Universität Zürich, 15. September 2011

Vorkurs Grundlagen für das Mathematikstudium

Übungsblatt 4: Relationen und Reihen

Aufgabe 1 Untersuche die folgenden Relationen und stelle fest, ob sie reflexiv, symmetrisch oder transitiv sind. Welches sind Äquivalenzrelationen?

(a) $x \sim_R y$, falls x der Bruder von y ist.

(b) $x \sim_R y$, falls x ein Geschwister von y ist.

(c) $x \sim_R y$, falls x und y die gleiche Staatszugehörigkeit haben.

(d) $x \sim_R y$, falls eine Zugverbindung von x nach y existiert.

Finde selber Beispiele für Relationen und gebe deren Eigenschaften an.

Aufgabe 2 Welche der folgenden Relationen beschreiben eine Ordnungsrelation?

(a) $x \sim_R y$, falls x älter als y ist.

(b) $x \sim_R y$, falls x nördlicher liegt als y.

(c) $x \sim_R y$, falls x eine Teilmenge von y ist.

Welche der Ordnungsrelationen ist total?

Aufgabe 3 In der Vorlesung wurden zwei verschiedene Annäherungen an die Zahl e behandelt:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Bestimme die ersten sechs Folgenglieder der linken Folge, sowie die ersten sechs Glieder der Folge der Partialsummen s_n der rechten Reihe. Was fällt auf?

Aufgabe 4 Bestimme den Wert der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2^k}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$.

Hinweis zu (b): Finde Zahlen x, y mit $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{x}{k} + \frac{y}{k+1}$ und bestimme die Partialsummen s_n.

Aufgabe 5 Das Majorantenkriterium für Reihen besagt Folgendes: Sei $0 \leq a_i \leq b_i$ für alle i (gross genug, d.h. für alle $i \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$). Dann gelten

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i \quad \text{konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad \text{konvergiert}$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad \text{divergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty} b_i \quad \text{divergiert}$$

Finde je ein Gegenbeispiel, das zeigt, dass die Bedingung $a_i \leq b_i$ für beide Aussagen nicht hinreichend ist. Reicht auch $0 \leq |a_i| \leq b_i$?

Aufgabe 6 Begründe, weshalb die beiden folgenden Reihen nicht konvergent sein können.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3+4k^2-2}{7k^3+1}$,

(b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2-1}$.

Hinweis zu (b): Majorantenkriterium.

Aufgabe 7 Eine punktförmige Schnecke kriecht auf einem 1 m langen Gummiband mit einer konstanten Geschwindigkeit von 5 cm/h. Am Ende der ersten und jeder weiteren Stunde wird das ganze Band homogen um jeweils einen Meter gedehnt. Wird die Schnecke in endlicher Zeit das rechte Ende erreichen, wenn sie zu Beginn der ersten Stunde am linken Ende startete?

Aufgabe 8 Gebe ein Verfahren an, wie man die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

so umgruppieren kann, dass sie gegen den Wert 1.5 konvergiert.
Hinweis: Gruppiere die negativen und die positiven Folgenglieder so um, dass die Partialsummen immer möglichst nahe bei 1.5 liegen.