Universität Zürich, 9. September 2013

Vorkurs Grundlagen für das Mathematikstudium

Übungsblatt 1: Algebra und Logik

Aufgabe 1. Finde die zweite Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 10x + 21 = 0$ (siehe Beispiel auf Seite 2 im Skript) mit Hilfe geometrischer Überlegungen.

Aufgabe 2.

(a) Finde das Polynom vom Grad 3, welches durch die Punkte $P = (0, 3)$, $Q = (1, 1)$, $R = (2, 2)$ und $S = (3, 0)$ geht.

(b) Finde das Polynom $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, welches für $x = m$ den Wert $1^3 + 2^3 + \cdots + m^3$ hat. (Für $x = 0$ soll es den Wert 0 annehmen.) Welchen Grad hat es?

Aufgabe 3.

(a) Zeige, dass es zwei verschiedene Polynome vom Grad 3 gibt, welche durch die Punkte $P = (1, 1)$, $Q = (2, 3)$ und $R = (3, 5)$ gehen. Begründe diese Tatsache.

(b) Zeige, dass es kein Polynom vom Grad 3 gibt, welches durch die Punkte $P = (0, -1)$, $Q = (1, 2)$, $R = (2, 7)$, $S = (3, 20)$ und $T = (4, 0)$ geht. Begründe diese Tatsache.

Aufgabe 4.

(a) Johannas Katze niest immer bevor es regnet. Heute hat sie geniest. “Also wird es regnen”, denkt Johanna. Hat sie recht?

(b) Peter hat gesagt: “Vorgestern war ich 10, aber im nächsten Jahr werde ich 13.” Ist das möglich?

Aufgabe 5. Wir bezeichnen mit *Aussagen* solche Sätze, von welchen wir sinnvoll sagen können, dass sie wahr oder falsch sind. Sind A, B Aussagen, so ist A die *Negation* von B, falls A genau dann wahr ist, wenn B falsch ist.

(a) Welche der folgenden Sätze sind Aussagen:

  (i) Die Zahl 2 ist ungerade.
  (ii) Löse diese Aufgabe!
  (iii) Ich sage nie die Wahrheit.

(b) Verneine die folgenden Aussagen (Negation):

  (i) Alle Frauen sind schön.
  (ii) Der Boden ist vom Regen nass oder jemand hat ihn mit dem Wasserschlauch vollgespritzt.

(iii) Jede Frau und jeder Mann hat schon mindestens einmal im Leben nicht alles vom Teller aufgegessen.

Aufgabe 6. "Meiers werden uns heute abend besuchen", kündigt Frau Müller an. "Die ganze Familie, also Herr und Frau Meier mit ihren drei Kindern Franziska, Kathrin und Walter?" fragt Herr Müller bestürzt. Darauf Frau Müller, die keine Gelegenheit vorübergehen lässt, ihren Mann zu logischem Denken anzuregen: "Nun, ich will es dir so erklären: Wenn Herr Meier kommt, dann bringt er auch seine Frau mit. Mindestens eines der beiden Kinder Walter und Kathrin kommt. Entweder kommt Frau Meier oder Franziska, aber nicht beide. Entweder kommt Franziska und Kathrin oder beide nicht. Und wenn Walter kommt, dann auch Kathrin und Herr Meier. So, jetzt weisst du, wer uns heute abend besuchen wird."
Wer kommt und wer kommt nicht?

Aufgabe 7. Dem bekannten französischen Forscher E.R. Reur ist es endlich gelungen, die erste These der Julirevolution ("Alle Menschen sind gleich") wissenschaftlich zu beweisen. Ist nämlich M eine Menge mit endlich vielen Elementen, so gilt $a = b$ für $a, b \in M$.
Beweis durch Induktion:

(i) Induktionsanfang: Hat M genau ein Element, $M = \{a\}$, so ist die Aussage richtig.

(ii) Induktionsschluss: (α): Die Aussage sei richtig für alle Mengen mit genau n Elementen. (β): Es sei M' eine Menge mit genau $n+1$ Elementen. Für $b \in M'$ sei $N := M' \setminus \{b\}$. Die Elemente von N sind nach (α) einander gleich. Es bleibt zu zeigen: $b = c$, wenn $c \in M'$. Dazu entfernt man ein anderes Element d aus M' und weiss dann: $b \in M' \setminus \{d\}$. Die Elemente dieser Menge sind nach (α) wiederum einander gleich. Wegen der Transitivität der Gleichheitsbeziehung folgt dann die Behauptung. (Transitivität: $a = b$ und $b = c$ implizieren $a = c$; siehe Äquivalenzrelation am Mittwoch.)

Was ist falsch an diesem Schluss?

Aufgabe 8. Folgende Identitäten sind durch vollständige Induktion zu verifizieren:

(a) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 9.

(a) Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeige: Keine der n aufeinanderfolgenden Zahlen

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \ldots, (n+1)! + (n+1)$$

ist prim. Folgerung: Es gibt beliebig grosse Primzahllücken.

(b) Beweise, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
Hinweis: Durch Widerspruch! Nehme an $\{p_0, \ldots, p_m\}$ sei die Menge aller Primzahlen und führe dies zum Widerspruch. Betrachte dazu $p = p_0 \cdot p_1 \cdot \cdots \cdot p_m + 1$.