VORKURS: MATHEMATIK
RECHENFERTIGKEITEN 2014

Montag: Zahlenmengen, Variablen, Termumformungen, Wurzeln und Potenzen, Das Lösen von (Un)Gleichungen in einer Variablen.

INHALTSVERZEICHNIS MONTAG

1 Zahlenmengen ... 4

1.1 $\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen ... 4

1.1.1 $\mathbb{N}_0$ = Menge der natürlichen Zahlen einschliesslich der Null ... 4

1.2 $\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen ... 4

1.3 $\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen ... 4

1.4 $\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen ... 4

1.5 Teilmengen ... 5

1.6 Verknüpfungen +, •, −, : ... 5

1.6.1 Beispiele zur Reihenfolge der Operationen ... 5

1.6.2 Bruchrechnen ... 6

1.6.2.1 Brüche kürzen ... 6

1.6.2.2 Brüche addieren / subtrahieren ... 6

1.6.2.3 Brüche multiplizieren ... 6

1.6.2.4 Brüche dividieren ... 6

1.6.2.5 Doppelbrüche ... 7

1.6.2.6 Periodische Dezimalzahlen in Brüche umwandeln ... 7

2 Variablen ... 8

2.1 Beispiele. ... 8

3 Termumformungen ... 9

3.1 Die Rechengesetze ... 9

3.1.1 Rechengesetze der Addition ... 9

3.1.2 Rechengesetze der Multiplikation ... 9

3.1.3 Das Distributivgesetz (Verteilungsgesetz) ... 9

3.2 Beispiele von Termumformungen ... 10

3.2.1 Klammerregeln ... 10

3.2.2 Anwendung des Distributivgesetzes ... 10

3.3 Die binomischen Formeln ... 10

3.3.1 Die 1. binomische Formel ... 10

3.3.2 Die 2. binomische Formel ... 11

3.3.3 Die 3. binomische Formel ... 11

3.3.3.1 Motivation der binomischen Formeln ... 12

3.3.4 Binomische Formeln für höhere Potenzen ... 12
3.4 Faktorisierungsmethoden ... 13
3.4.1 Ausklammern gemeinsamer Faktoren ... 14
3.4.1.1 Ausklammern eines Klammerterms ... 14
3.4.2 Ausklammern in Teilsummen ... 14
3.4.3 Zerlegen von Summen in binomische Formeln ... 15
3.4.4 Kombination verschiedener Faktorisierungsmethoden ... 15
3.4.5 Zerlegung quadratischer Terme durch den 2-Klammeransatz ... 16
3.4.6 Vermischte und anspruchsvolle Aufgaben ... 17
3.5 Bruchterme ... 17
3.5.1 Kürzen ... 17
3.5.2 Addieren & Subtrahieren ... 18
3.5.3 Multiplikation ... 19
3.5.4 Division ... 19
3.5.5 Doppelbrüche ... 19
4 Wurzeln und Potenzen ... 21
4.1 Die Definition der Quadratwurzel ... 21
4.1.1 Rechenregeln für Quadratwurzeln ... 21
4.2 Rechnen mit n-ten Wurzeln ... 22
4.2.1 Die Definition der n-ten Wurzel ... 22
4.2.2 Rechenregeln für n-te Wurzeln ... 22
4.2.3 Wurzeltermumformungen ... 22
4.3 Rechnen mit Potenzen ... 23
4.3.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten ... 23
4.3.1.1 Rechenregeln für Potenzen mit natürlichen Exponenten ... 23
4.3.2 Potenzen mit beliebigen ganzzahligen Exponenten ... 25
4.3.3 Potenzen mit rationalen Exponenten ... 26
4.3.4 Zusammenstellung der Potenzregeln ... 26
4.3.5 Anwendungen der Potenzregeln ... 27
5 Das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen ... 28
5.1 Allgemeines ... 28
5.2 Äquivalenzumformungen bei Gleichungen ... 28
5.3 Lineare Gleichungen ... 29
5.4 Lineare Ungleichungen ... 31
5.5 Bruchgleichungen ... 31
5.6 Bruchungleichungen ... 33
5.7 Produkte die Null sind. Ein Spezialfall von Gleichungen. ... 34
5.8 Wurzelgleichungen ... 35

5.9 Quadratische Gleichungen ... 36
5.9.1 Sonderfälle von quadratischen Gleichungen ... 37
5.9.1.1 Die reinquadratische Gleichung ... 37
5.9.1.2 Leicht faktorisierbare quadratische Gleichungen ... 37
5.9.1.3 Quadratisches Ergänzen ... 37
5.9.2 Lösungsformel und Lösbarkeit ... 39
5.9.2.1 Die Lösungsformel und Lösungsfälle der quadratischen Gleichung ... 41
5.9.2.2 Ein Musterbeispiel zur Lösungsformel ... 42
5.9.3 Faktorisieren von quadratischen Termen ... 42
5.9.4 Die Vieta-Formeln ... 43
5.10 Gleichungen höheren Grades ... 44
5.10.1 Biquadratische Gleichungen ... 44
6 ANhang ... 45
6.1 Die «Wurzel aus 2» als Beispiel einer irrationalen Zahl ... 45
6.2 Beweis der Unendlichkeit der Primzahlfolge ... 46
6.2.1 Exkurs über Primzahlzusammenhänge ... 46
6.2.1.1 Primzahlzwillinge ... 46
6.2.1.2 Die Goldbachsche Vermutung ... 46

1 ZAHLENMENGEN

Der folgende, kurze Überblick der Zahlenmengen folgt dem üblichen Aufbau im Schulunterricht von der Primarstufe zur gymnasialen Stufe; von den sogenannten natürlichen Zahlen zu den reellen Zahlen. Wichtig für Sie ist, dass Sie die Bedeutung und die korrekte Notationen dieser Mengen beherrschen, da eine Zahlenmenge oft als gegebene Grundmenge oder als zusätzliche Voraussetzung in Aufgabenstellungen auftritt.

1.1 $\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}$ = { 1, 2, 3, . . . }
Daraus lassen sich kompliziertere Zahlenmengen konstruieren. Man spricht auch von einer sog. Zahlenbereichserweiterung. Diese Notwendigkeit besteht, da bereits die Gleichung $x + 2 = 2$ in $\mathbb{N}$ keine Lösung hat. Mit diesem Grundgedanken werden wir jetzt die Menge der natürlichen Zahlen nach und nach erweitern.

1.1.1 $\mathbb{N}_0$ = Menge der natürlichen Zahlen einschliesslich der Null

$\mathbb{N}_0$ **= { 0, 1, 2, . . . }**. Durch Hinzufügen der 0 lässt sich nun auch die Gleichung $x + 2 = 2$ lösen.

1.2 $\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Z}$ = { . . ., −2, −1, 0, 1, 2, . . . }. In $\mathbb{Z}$ hat auch die folgende Gleichung eine Lösung: $8 + x = 5$.

1.3 $\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen, d.h. der Brüche $\frac{a}{b}$, wobei a und b ganze Zahlen sind und b verschieden von 0 sein muss. (Teilen durch null ist nie erlaubt!) In $\mathbb{Q}$ hat jede Gleichung der Form $b \cdot x = a$ mit $b \neq 0$ eine (eindeutige) Lösung.

Aufgepasst: Es gibt Zahlen wie etwa «π» oder «$\sqrt{2}$», die *keine* Elemente aus $\mathbb{Q}$ sind! Es lässt sich beweisen, dass sich diese *Zahlen nicht als Brüche darstellen lassen!* Diese Zahlen sind *nicht abbrechende Dezimalzahlen*, sie werden also *nie periodisch* nach dem Komma. (Siehe Anhang!)
Diese neue Kategorie von Zahlen nennt man **irrationale** Zahlen. Alle Wurzeln aus Primzahlen und Kombinationen davon sind weitere Beispiele für irrationale Zahlen. Für die irrationalen Zahlen ist kein eigener Buchstabe vorgesehen.

1.4 $\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen ist die Menge der rationalen Zahlen vereinigt mit den irrationalen Zahlen. Beim Schritt von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ erhalten Gleichungen wie etwa $x^2 = 2$ eine Lösung (Wurzeln). Aber es kommen noch viel mehr Zahlen dazu, wie etwa π und e, die nicht Lösung einer solchen einfachen Gleichung sind. Dieser Schritt ist bei weitem der schwierigste der hier erwähnten Schritte, aber um rechnen zu können, müssen wir uns darüber keine Sorgen machen. In gewisser Hinsicht ist $\mathbb{R}$ die ideale Zahlenmenge, um nicht nur zu zählen, sondern auch messen zu können.

Man hat $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, wobei das Symbol $\subset$ «ist enthalten in» bedeutet. (Die Redewendung «ist Teilmenge von» ist ebenfalls gebräuchlich.)

Um anzugeben, dass eine Zahl x in einer dieser Mengen liegt, verwenden wir das Symbol $\in$. So heisst $x \in \mathbb{Q}$, dass x eine rationale Zahl ist.

1.5 Teilmengen

Manchmal möchten wir mit Teilmengen der oben genannten Mengen arbeiten, wie etwa

1. **Intervalle**: wir schreiben **[0, 2)** für alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geqslant 0$ und $x < 2$;

   Dieses Intervall (nennen wir es I) lässt sich auch so darstellen: $I = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\}$

und

2. **Endliche Mengen**, wie z.B.: $\{\frac{1}{2}, \pi, 0\}$ oder $\{1, 2, \dots, 10\}$ (die Menge aller Zahlen in $\mathbb{N}$, die kleiner als 11 sind) oder $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 21\}$ (die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen kleiner als 22).

1.6 Verknüpfungen +, •, −, :

Auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sind die Verknüpfungen **+** (Addition) und • (Multiplikation) definiert. Wenn es keine Verwirrung bringt, so lassen wir • weg. Weiter gibt es ab $\mathbb{Z}$ die Verknüpfung **−** (Subtraktion) und wir schreiben $-a$ für $0-a$. Schliesslich gibt es ab $\mathbb{Q}$ die Verknüpfung **:** oder **/** (Division), oft auch geschrieben als $a/b = \frac{a}{b}$. Diese Operation ist aber nur dann erlaubt, wenn $b \neq 0$ ist. Die Operationen +, •, −, und : heissen Grundoperationen.

Die **Reihenfolge** der Operationen wird in der Mathematik nach strengen Regeln vorgenommen. Sie ist wie folgt festgelegt:

1. Ausdrücke in **Klammern** (Schachtelklammern werden von innen nach aussen aufgelöst.)
2. Punkt-Operationen (**•, :**)
3. Strich-Operationen (**+, −**)

1.6.1 Beispiele zur Reihenfolge der Operationen

(1) 20 – 8 : 4 =

(2) 3 – (5 – 9) =

(3) 10 – (1 – (4 +9)) • 2 =

1.6.2 Bruchrechnen

1.6.2.1 Brüche kürzen

Sind im Zähler und im Nenner eines Bruches gleiche Faktoren, so kann man sie kürzen, indem man *Zähler und Nenner durch den gleichen Faktor teilt.* Wenn man einen Faktor kürzt, bleibt immer der Faktor 1 stehen. *Der Wert des Bruches ändert sich beim Kürzen nicht!* Summen dürfen nicht ohne weiteres gekürzt werden! Zwei Beispiele:

1) $\frac{18}{27} =$ (...mit 9 kürzen) $= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$ (Der Wert des Bruches ändert sich dabei nicht!)

2) $\frac{8+5}{5}$ (...hier wäre es *falsch mit 5 zu kürzen*. Im Zähler liegt eine Summe und *kein Produkt* vor!)

Das richtige Resultat lautet: $\underline{\underline{\frac{13}{5}}} = 2.6$ ...und nicht 9. Der Bruchstrich zwingt uns (nach dem Distributivgesetz) dazu, *jeden* Summanden aus dem Zähler mit dem Nenner zu dividieren: $\frac{8+5}{5} = (8+5):5 = \frac{8}{5} + \frac{5}{5} = \frac{8}{5} + 1$. Dies wäre dann zwar eine erlaubte Umformung, entspricht jedoch nicht einem Kürzen des Bruches.

1.6.2.2 Brüche addieren / subtrahieren

Man kann *nur gleichnamige* Brüche addieren (subtrahieren): Man addiert (subtrahiert) die Zähler und behält den Nenner bei. Wenn möglich kürzt man anschliessend. Ungleichnamige Brüche muss man zuerst gleichnamig machen (d. h. auf gleiche Nenner erweitern). Dabei nimmt man *nicht irgendeinen beliebigen gemeinsamen Nenner, sondern* den *kleinstmöglichen gemeinsamen Nenner* (den sog. *Hauptnenner,* auch *kleinstes gemeinsames Vielfaches «kgV»* der beiden Nenner *genannt*). Die Rechnung wird dann einfacher, und wir brauchen nicht, mit allzu grossen Zahlen zu rechnen! Ein Beispiel:

$\frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} \quad = \frac{10}{12} + \frac{3}{12} - \frac{5}{12} \quad = \frac{8}{12}$ (...noch mit 4 kürzen) $= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

1.6.2.3 Brüche multiplizieren

Zwei Brüche werden nach der Merkregel «*Zähler • Zähler*» *über* «*Nenner • Nenner*» miteinander multipliziert. *Vor* dem *Ausmultiplizieren kürzen* wir, falls möglich. Die Rechnung wird dann einfacher, und wir brauchen nicht mehr, mit allzu grossen Zahlen zu rechnen! Ein Beispiel:

$\frac{2}{3} \cdot \frac{24}{7}$ (...vor dem Ausmultiplizieren mit 3 kürzen!) $= \frac{2 \cdot 8}{1 \cdot 7} \quad = \underline{\underline{\frac{16}{7}}}$

1.6.2.4 Brüche dividieren

Brüche werden dividiert, indem man *den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert.* (Dies folgt aus der Tatsache, dass die Division die Umkehroperation der Multiplikation ist.) Die Division von Brüchen wird also auf die Multiplikation von Brüchen zurückgeführt! Ein Beispiel:

$\frac{5}{6} : \frac{1}{3} \quad = \frac{5}{6} \bullet \frac{3}{1}$ (...noch mit 3 kürzen und ausmultiplizieren) $= \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$

1.6.2.5 Doppelbrüche

Doppelbrüche müssen deutlich geschrieben sein. Der Hauptbruchstrich muss länger und eher dicker sein als die anderen. Das Gleichheitszeichen gehört auf die Höhe des Hauptbruchstrichs. Da ein Doppelbruch ebenso gut als Division zweier Brüche aufgefasst werden kann, gilt für die Berechnung: Der *obere Bruch* wird *mit dem Kehrwert des unteren multipliziert*. Ein Beispiel:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \bullet \frac{3}{1} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

1.6.2.6 Periodische Dezimalzahlen in Brüche umwandeln

Zahlen wie 0.636363... oder 0.7333... sind sogenannte periodische Dezimalzahlen. Ab einer bestimmten Stelle wiederholt sich eine Zahlenfolge bis in alle Unendlichkeiten. Dieser Zahlenfolge sagt man auch «Periode».

0.636363... hat die Periode 63. Man schreibt hierfür auch $0.\overline{63}$

0.7333... hat die Periode 3. Anders geschrieben: $0.7\overline{3}$.

Aber wie kann man solche periodische Dezimalzahlen in Brüche umwandeln?
Die Idee: Durch eine geschickte Subtraktion bringen wir den periodischen Teil der Dezimalzahl zum Verschwinden. Die folgenden Beispiele sollten selbsterklärend sein:

Beispiele:

a) $x = 0.\overline{2}$

$$\begin{array}{rrcl} & 10x & = & 2.222... \\ - & 1x & = & 0.222... \\ \hline & 9x & = & 2 \end{array}$$

Somit ist $x = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$.

b) $x = 0.\overline{63}$

$$\begin{array}{rrcl} & 100x & = & 63.6363... \\ - & 1x & = & 0.6363... \\ \hline & 99x & = & 63 \end{array}$$

Somit ist $x = \frac{63}{99} = \underline{\underline{\frac{7}{11}}}$.

2 VARIABLEN

Wenn wir über eine nicht näher spezifizierte Zahl aus einer Teilmenge der genannten Zahlenmengen (zum Beispiel, aus einem Intervall in $\mathbb{R}$) reden möchten, so bezeichnen wir sie mit einem (meistens lateinischen) Buchstaben, den wir Variable nennen. Dabei bezeichnen die Variablen x, y, z meistens reelle Zahlen (wir schreiben: x, y, z $\in \mathbb{R}$), während i, j, m, n eher Elemente von $\mathbb{N}_0$ sind (i, j, m, n $\in \mathbb{N}_0$) und andere Buchstaben (etwa a, b, c) beide Bedeutungen haben können (aber das ist natürlich kein Gesetz!)

Für eine Variable sollte man immer genau angeben, welche Werte sie haben kann, d.h. man sollte immer eine Teilmenge von einer der eingeführten Zahlenmengen angeben, in der die Variable liegen soll; diese Menge nennen wir dann den **Definitionsbereich** der Variable.

2.1 Beispiele.

(1) n $\in \{1, 2, ..., 10\}$ heisst, dass n für eine natürliche Zahl grösser als 0 und kleiner als 11 steht.

(2) x $\in [0, 10)$ heisst, dass x einer reellen Zahl grösser gleich 0 und kleiner als 10 entspricht.

(3) y $\in \mathbb{R}$, $x + 2y \neq 0$ heisst, dass y eine reelle Zahl bezeichnet, für die $x + 2y$ (mit dem oben eingeführten x) nicht null ist.

(4) Wenn nur Ungleichheiten, oder andere Eigenschaften von Variablen ohne weitere Angaben gegeben sind, so ist gemeint, dass die Variablen reell sind. Also heisst $a + b \neq 3$ (ohne weiteres), dass a und b reelle Zahlen sind, deren Summe ungleich 3 ist.

Nun können wir mit Variablen genauso rechnen wie mit Zahlen, d.h. wir können sie miteinander, oder mit konkreten Zahlen, multiplizieren, zueinander addieren, usw.

Indem man mehrere solche Operationen zusammensetzt, erhält man sogenannte algebraische Ausdrücke (auch **Terme** genannt).

Mann soll dabei darauf achten, dass diese Ausdrücke Sinn machen für alle Werte der Variablen aus ihren Definitionsbereichen. Insbesondere sollte der Nenner eines Bruchs für keine Werte der Variablen null werden!
Oft dreht man das Vorgehen um, und schränkt die Definitionsbereiche der Variablen erst dann ein, wenn man solchen Nennern begegnet. Das ist nur deshalb erlaubt, weil man weiss, das man auch von Anfang an diese Definitionsbereiche hätte so wählen können.

3 TERMUMFORMUNGEN

Termumformungen erfolgen nach eindeutig bestimmten Rechengesetzen und Regeln (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Distributivgesetz, etc.) Wird ein Term korrekt umgeformt, so ergibt sich beim Einsetzen von Zahlenwerten für die Variablen, sowohl beim ursprünglichen, wie auch beim umgeformten Term derselbe Wert. Man spricht deshalb auch von einer **äquivalenten Termumformung**. [Äquivalenz: Zu lateinisch aequivalentia «Gleichwertigkeit»]

3.1 Die Rechengesetze

3.1.1 Rechengesetze der Addition

	In Worten:	für a, b, c gilt:
Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)	Die Reihenfolge der Summanden hat keinen Einfluss auf die Summe, d.h. es gilt:	**a + b = b + a** *2 + 3 = 3 + 2*
Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)	Bei drei Summanden hat die Reihenfolge der Additionen keinen Einfluss auf die Summe, d.h. es gilt:	**(a + b) + c = a + (b + c)** *(5 + 2) + 3 = 5 + (2 + 3)* *7 + 3 = 5 + 5*

Kommutativ- sowie Assoziativgesetz gelten analog für Summen mit beliebig vielen Summanden.

3.1.2 Rechengesetze der Multiplikation

	In Worten:	für a, b, c gilt:
Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)	Die Reihenfolge der Faktoren hat keinen Einfluss auf das Produkt, d.h. es gilt:	**ab = ba** *2•3 = 3•2*
Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)	In einem Produkt aus drei Faktoren hat die Reihenfolge der Multiplikationen keinen Einfluss auf das Produkt, d.h. es gilt:	**(ab)c = a(bc)** *(2•3)•4 = 3•(2•4)* *6 • 4 = 3 • 8*

Kommutativ- sowie Assoziativgesetz gelten analog für Produkte mit beliebig vielen Faktoren.

3.1.3 Das Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

Es regelt das Zusammenwirken von Addition und Multiplikation.

	für a, b, c gilt:
Man darf eine Summe multiplizieren, indem man zuerst die Summanden multipliziert und dann die erhaltenen Produkte addiert (sog. gliedweises Ausmultiplizieren).	**a (b + c) = ab + ac** *2•(3 + 4) = 2•3 + 2•4* *2 • 7 = 6 + 8*
oder umgekehrt: In einer Summe zweier Produkte darf man einen gemeinsamen Faktor ausklammern.	**ab + ac = a (b + c)** *2•3+ 2•4 = 2•(3 + 4)*

3.2 Beispiele von Termumformungen

3.2.1 Klammerregeln

40p – [(30q – 12p) – (7q + 3p)] =	
= 40p – [30q – 12p – 7q – 3p]	*Innere Klammern aufgelöst*
= 40p – [23q – 15p]	*zusammengefasst*
= 40p – 23q **+** 15p	*Eckige Klammern aufgelöst*
= <u>55p – 23q</u>	*Zusammengefasst*

3.2.2 Anwendung des Distributivgesetzes

(1) $(2a - c)\,(a - 2c) = 2a^2 - 4ac - ac + 2c^2 = \underline{\underline{2a^2 - 5ac + 2c^2}}$

(2) $(2x - y + 3)\,(x + 3y) =$ ✎

ⓘ Mehrere Klammern werden miteinander multipliziert, indem man schrittweise zuerst zwei Klammern multipliziert und anschliessend das entstehende Produkt mit der dritten Klammer multipliziert (Assoziativgesetz!):

(3) $(x + 3)\,(x + 5)\,(x - 2) =$
$(x^2 + 5x + 3x + 15)\,(x - 2) =$ (Um Rechenaufwand zu sparen, die linke Klammer zuerst vereinfachen!)
$(x^2 + 8x + 15)\,(x - 2) =$
$x^3 - 2x^2 + 8x^2 - 16x + 15x - 30 = \underline{x^3 + 6x^2 - x - 30}$.

3.3 Die binomischen[1] Formeln

Die binomischen Formeln - es gibt drei Stück davon - sind ein Hilfsmittel zum Ausmultiplizieren und zur Faktorisierung. Beim Ausmultiplizieren sparen sie Zeit, bei der Faktorisierung sind sie oft unersetzlich! Deshalb lohnt es sich diese Formeln auswendig zu lernen.

3.3.1 Die 1. binomische Formel

Diese wird angewendet, wenn eine Summe quadriert wird. Sie lautet: $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

ⓘ Vermeiden Sie den häufig gemachten Fehler: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$??!!

Setzen Sie zum Beispiel a=4 und b=3 ein, und überzeugen Sie sich selbst von der Unkorrektheit dieser Aussage! Eine Summe darf also nicht summandenweise quadriert werden!

[1] Das Wort *Binom* steht für eine Summe aus *zwei* Gliedern. Binome sind also Terme wie a + b , 2x + y , 3a – 2b , usw.

Zur korrekten Herleitung ✎ :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = \dots$$

Beispiele:

(1) $(3c + d)^2 = 9c^2 + 6cd + d^2$

Da a und b Variablen sind, also beliebig wählbar, gilt die binomische Formel natürlich auch für $(3c + d)^2$. Hier steht 3c für a und d für b. Im Vergleich dazu das gliedweise Ausmultiplizieren:

$(3c + d)(3c + d) = 9c^2 + 3cd + 3cd + d^2 = 9c^2 + 6cd + d^2$.

(2) Für a und b kann man also alles Mögliche einsetzen. Etwa abstrakt gesehen △ und □:

$(\triangle + \square)^2 = \triangle^2 + 2\,\triangle\square + \square^2$

3.3.2 Die 2. binomische Formel

Diese wird angewendet, wenn eine Differenz quadriert wird. Sie lautet: $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

Beispiele:

(1) $(s - 5u)^2 = \underline{\underline{s^2 - 10su + 25u^2}}$

(2) $(6x - 5)^2 = \underline{\underline{36x^2 - 60x + 25}}$

3.3.3 Die 3. binomische Formel

Wenn man so will, ist sie eine Mischung aus der 1. und der 2. binomischen Formel und lautet:

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Herleitung ✎:

$$(a+b)(a-b) = \dots$$

Beispiele:

(1) $(2s - 1)(2s + 1) = \underline{\underline{4s^2 - 1}}$

Hier wurde stillschweigend die Tatsache «$1^2 = 1$» verwendet. Im Vergleich dazu das gliedweise Ausmultiplizieren: $(2s - 1)(2s + 1) = 4s^2 + 2s - 2s - 1 = 4s^2 - 1$.

(2) $(2x - 5y)(2x + 5y) = \underline{\underline{4x^2 - 25y^2}}$

(3) $49 \cdot 51 = \dots$ ohne TR berechnen, geht folgendermassen:

$49 \cdot 51 = (50-1)\cdot(50+1) = 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = \underline{\underline{2499}}$

3.3.3.1 Motivation der binomischen Formeln

Der Mathematik-Skeptiker sagt sich nun: «Die binomischen Formeln sind ja jetzt soweit bekannt, und beim Ausmultiplizieren sparen sie tatsächlich ein paar Sekunden ein. Aber allein deswegen der ganze Aufwand? Das kann ja wohl nicht alles gewesen sein!»

Beruhigenderweise war das auch nicht alles, denn ***wirklich unersetzlich sind die binomischen Formeln erst, wenn man sie rückwärts anwendet!***

Angenommen, der folgende Bruchterm soll vereinfacht werden: $\dfrac{4x^2-12x+9}{2x-3}$.

Was für Möglichkeiten zur Vereinfachung gibt es?

Natürlich «binomische Formeln»: $\dfrac{4x^2-12x+9}{2x-3}=\dfrac{(2x-3)^2}{2x-3}=2x-3.$

Hier wurde die 2. binomische Formel offenbar rückwärts angewendet, und aus einer Summe wurden wieder Faktoren, die dann gekürzt werden konnten!

Bemerkung: Wenn man eine Summe bzw. eine Differenz in ein Produkt verwandelt, spricht man in der Mathematik von einer sogenannten «Faktorisierung», auch «Faktorzerlegung» genannt.

Hier noch Beispiele zu den binomischen Formeln; und zwar rückwärts angewendet:

(1) $16j^2 + 16jk + 4k^2 = (4j + 2k)^2$ ...Man überlege, wie man auf die Lösung kommen kann!

(2) $x^2 - 16y^2 =$ ✎

(3) $(x + y)^2 - z^2 =$ ✎

Tipp: Bevor man die 3.binomische Formel « $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ » anwendet, sollte man sich zunächst überlegen was dem « a » und was dem « b » bei diesem Beispiel entspricht! a = und b = .

3.3.4 Binomische Formeln für höhere Potenzen

Die binomischen Formeln gelten auch für höhere Potenzen von Summen (und Differenzen). Wir betrachten etwa die binomische Formel für die **dritte Potenz** (rechnen Sie nach)**:**

Binomial-
koeffizienten

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$$

Aussenglieder

Dabei stellt man folgendes fest:

Die beiden Aussenglieder des rechten Ausdrucks haben genau dieselbe Potenz wie der linke Ausdruck. Das ist bei jeder höheren Potenz so. Das Interessante ist nun, dass für höhere Potenzen die Binomialkoeffizienten eine bestimmte Gesetzmässigkeit aufweisen. Für diese Gesetzmässigkeit der Binomialkoeffizienten gibt es eine grafische Darstellung, die als [1]**PASCAL'sches Zahlendreieck** bekannt ist.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

Jeder Koeffizient einer Zeile ist die Summe der beiden darüber stehenden Koeffizienten (*4 + 6 = 10*). Die Aussenglieder haben immer den Koeffizienten 1. Man muss nun in Gedanken hinter den Koeffizienten die beiden Summanden **a** und **b** aus dem Binom ergänzen. Dabei wird **a** nach fallenden Potenzen und **b** nach steigenden Potenzen geordnet.

Zum Beispiel: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^5$

fallende Potenzen bei **a**

$$\boxed{a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b^1 + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a^1 \cdot b^4 + b^5}$$

steigende Potenzen bei **b**

Im «–» Fall wechseln sich aufeinander folgende Zeichen immer ab, beginnend mit einem Plus.

Beispiel: $(a - b)^5 = (+)\, a^5 - 5\, a^4 b^1 + 10\, a^3 b^2 - 10\, a^2 b^3 + 5\, a^1 b^4 - b^5$. Überlegen Sie wieso!

3.4 Faktorisierungsmethoden

In diesem Kapitel geht es darum, Summenterme (bzw. Differenzen) in ein Produkt umzuwandeln. Man sagt auch: «Einen Term in Faktoren zu zerlegen». Ein Beispiel wäre, wie oben gesehen:

$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$.

Hier wurde eine binomische Formel rückwärts angewendet. Wir werden nun weitere Methoden für die Faktorzerlegung kennen lernen, wie etwa das Ausklammern gemeinsamer Faktoren, etc..

[1] Benannt nach dem französischen Mathematiker Blaise PASCAL (1623 - 1662)

3.4.1 Ausklammern gemeinsamer Faktoren

Kommt ein Faktor in allen Gliedern eines Summenterms vor, so kann man ihn ausklammern. In der Regel klammern wir den grössten gemeinsamen Teiler (den sog. «ggT») aller Summanden vor.

Beispiele:

(1) $p^2y + py + 2y = \mathbf{y}(p^2 + p + 2)$ ...der allen Gliedern **gemeinsame Faktor** war hier **y**.

(2) $12ab - 16ac - 32ad = \mathbf{4a}(3b - 4c - 8d)$ ...wir suchen jeweils den **grösstmöglichen gemeinsamen Faktor** aller Glieder. Hier also **4a**.

(3) $3a^2 + a = \mathbf{a}(3a + 1)$ ...man denke sich bei «a» den Faktor 1, also 1·a.

(4) $x^4 - x^3 =$

3.4.1.1 Ausklammern eines Klammerterms

Der allen Gliedern *gemeinsame Faktor kann* sehr wohl *auch ein Klammerterm sein !*

Beispiel:

$x \cdot (a+b) + y \cdot (a+b) = \underline{\underline{(a+b) \cdot (x+y)}}$, der allen Gliedern gemeinsame Faktor war hier $\boxed{(a+b)}$

3.4.2 Ausklammern in Teilsummen

$ax + bx + ay + by = \ldots$

Das Vorgehen beim Ausklammern in Teilsummen lässt sich in zwei Schritten erklären:

Schritt 1:

Durch «geschicktes» Faktorisieren der Teilsummen erhalten wir jeweils den *gleichen Klammerterm* als Faktor: $ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$.

Schritt 2:

Den Klammerterm als gemeinsamen Faktor vorklammern: $x\mathbf{(a+b)} + y\mathbf{(a+b)} = \mathbf{(a+b)} \cdot (x+y)$.

Wir erläutern das Verfahren an zwei weiteren Beispielen:

(1) $cx + dx - cy - dy$

Aufgepasst: $cx + dx - cy - dy = x(c+d) + y(-c-d)$ wäre eine Sackgasse! Um den gleichen Klammerterm zu erhalten, *klammern* wir x und $\boldsymbol{-y}$ *aus!* (Beim Setzen der Minusklammer Vorzeichen beachten!)

$$cx + dx - cy - dy = \boldsymbol{x}(c+d) - \boldsymbol{y}(c+d) = \underline{\underline{(c+d)(x-y)}}.$$

Eine *andere Möglichkeit* diese Aufgabe zu lösen, wäre durch *Umordnen der Summanden*:

$cx + dx - cy - dy = cx - cy + dx - dy = c(x-y) + d(x-y) = \underline{\underline{(x-y)(c+d)}}$.

(2) $4x + 2y - 6x^2 - 3xy \quad =$

3.4.3 Zerlegen von Summen in binomische Formeln

Wie schon weiter oben erwähnt sieht man den Nutzen der binomischen Formeln erst dann so richtig, wenn man sie rückwärts anwendet.

Beispiel: $u^2 + 6uv + 9v^2 = (u + 3v)^2$ ...1. binomische Formel...

ⓘ Aber aufgepasst! *Nicht alles was nach einer binomischen Formel aussieht, ist auch eine!* Dazu müssen schon zwei Quadrate und ein *passendes gemischtes Glied* vorkommen oder *eine Differenz zweier Quadrate.*

Die folgende Auflistung soll aufzeigen was gemeint ist:

$x^2 + 2xy + y$	Ist **keine** binomische Formel, da das *3. Glied kein Quadratausdruck* ist.
$4a^2 + 10a + 25$	Ist **keine** binomische Formel, da das *2. Glied nicht dem Doppelprodukt entspricht.* $(2\cdot 2a\cdot 5 = 20a)$!
$x^2 + 6x - 9$	Ist **keine** binomische Formel, da die *Vorzeichen nicht übereinstimmen.*
$4a^2 + 9b^2 - 12ab$	**Ist** eine binomische Formel, die Terme sind nur *nicht richtig geordnet.* Aus $4a^2 - 12ab + 9b^2$ ergibt sich $(2a - 3b)^2$.
$-25a^2 + 49b^2$	**Ist** ebenfalls eine binomische Formel, die Terme sind nur *nicht richtig geordnet.* Aus $49b^2 - 25a^2$ ergibt sich $(7b + 5a)(7b - 5a)$.
$9a^2 + 16b^2$	Ist **keine** binomische Formel (Die *Vorzeichen stimmen nicht* überein).

3.4.4 Kombination verschiedener Faktorisierungsmethoden

Manchmal muss man beim Faktorisieren von Summen eine Kombination verschiedener Methoden (bzw. mehrmals die gleiche Methode) anwenden um eine Summe vollständig in Faktoren zu zerlegen!

Hier einige <u>Musterbeispiele</u>:

(1) $5x^2 + 10xy + 5y^2 = 5(x^2 + 2xy + y^2) = \underline{\underline{5(x + y)^2}}$ ...zuerst 5 ausklammern, dann die 1. binomische Formel anwenden.

(2) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = (x + y)^2 - z^2 = \underline{\underline{[(x + y) + z]\,[(x + y) - z]}}$ ... zuerst die 1., dann die 3. binomische Formel anwenden. Die Runden Klammern am Schluss können weggelassen werden.

(3) $x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = \underline{\underline{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}}$. ...hier wenden wir zweimal die 3. binomische Formel an. Man beachte: Im ersten Schritt haben wir zwar bereits ein Produkt von Faktoren, aber die Faktoren sind *noch nicht vollständig zerlegt.*

(4) $9a^2 - 6ab + b^2 - 15a + 5b =$ ...Ausklammern? Nein, da kein gemeinsamer Faktor in allen Gliedern vorkommt! Man erkennt jedoch die 2. binomische Formel in den ersten 3 Gliedern der Summe. Das soll unser erster Schritt sein... $= (3a - b)^2 - 15a + 5b =$ ...aber wie weiter? Das ist noch kein Produkt

von Faktoren! Wenn wir jetzt in der rechten Teilsumme -5 ausklammern, sollte uns das weiterbringen... $= (3a - b)^2 - 5(3a - b)$ = ...tatsächlich! Jetzt noch die Klammer [3a – b] vorklammern... = [3a – b] [(3a – b)– 5] = ...unnötige Klammern weglassen... = $\underline{(3a - b)\ (3a - b - 5)}$.

3.4.5 Zerlegung quadratischer Terme durch den 2-Klammeransatz

Wir betrachten das Produkt « $(x + 3)(x + 5)$ » und erhalten als Lösung den quadratischen Term « $x^2 + 8x + 15$ ».

Die *Frage* ist nun, wie man umgekehrt von einem quadratischen Term auf dessen Zerlegung kommt, beim obigen Beispiel also, wie man von « $x^2 + 8x + 15$ » auf « $(x + 3)(x + 5)$ » kommt.

Die *Antwort:* Mit dem entsprechenden Ansatz und mit systematischem Probieren!

Ein Beispiel:
Wir möchten $x^2 + 9x + 20$ faktorisieren.

Ansatz: $x^2 + 9x + 20 = \mathbf{(x \qquad)(x \qquad)}$

In den Klammern müssen zwei Zahlen stehen, deren Produkt 20 ist und deren Summe 9 ist, damit man auf die 9x kommt. Man muss nicht lange suchen, bis man die Lösung sieht...

$x^2 + 9x + 20 = (x \mathbf{+ 4})(x \mathbf{+ 5})$. ...Durch das Ausmultiplizieren hat man stets eine Kontrollmöglichkeit!

Allgemeine Begründung: $\boxed{\underline{(x+a)(x+b)} = x^2 + bx + ax + ab = \underline{x^2 + (a+b)x + ab}}$

Wir erläutern diese Methode an weiteren Beispielen:

(1) $x^2 + 5xy + 6y^2 = (x \mathbf{+ 2y})(x \mathbf{+ 3y})$

(2) $x^2 \mathbf{-} 14x \mathbf{+} 40 = \quad (x \qquad)(x \qquad)$

Das Produkt der zwei gesuchten Zahlen soll +40 und die Summe -14 betragen. Etwa -5 und -8? Nein! Sondern ......

(3) $x^2 - 6x - 27 =$

(4) $x^2 + 5x + 8 =$

(5) Eine etwas anspruchsvollere Aufgabe: $2x^2 + 9xy + 10y^2 =$

Tipp: Versuchen Sie den (naheliegenden!) Ansatz: (2x + ...) (x + ...). Kontrolle nicht vergessen!

3.4.6 Vermischte und anspruchsvolle Aufgaben

- Lassen sich die Terme a^3+b^3 und a^3-b^3 faktorisieren? Antwort: Ja!

  $\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$ und $\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

  Ein Beispiel dazu: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

- Man faktorisiere $a^2-a+2b-4b^2$.

  Achtung: $a(a-1)+2b(1-2b)$ ist eine Sackgasse! Umgruppieren hilft hier aber weiter!
  $a^2-4b^2-a+2b=(a+2b)(a-2b)-(a-2b)=\underline{\underline{(a-2b)[a+2b-1]}}$

- Oft kommt man auch mit dem folgenden «Trick» weiter:
  Man faktorisiere $x^4+x^2y^2+y^4$! Mit den bisherigen Methoden kommt man hier nicht weiter. Addiert man jedoch den Term x^2y^2 dazu und subtrahiert ihn gleich wieder, hat man einen äquivalenten Term erhalten, der einen Faktorisierungsansatz zulässt:

$$x^4+x^2y^2+y^4 \;=\; x^4+x^2y^2+y^4+\underbrace{x^2y^2-x^2y^2}_{=0} \;=\; x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$
$$=\;(x^2+y^2)^2-(xy)^2 \;=\; \underline{\underline{(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)}}$$

3.5 Bruchterme

Das Bruchrechnen mit Termen unterscheidet sich im Wesentlichen nicht vom Bruchrechnen mit Zahlen. Die dort erwähnten Rechenregeln, Hinweise und Bemerkungen gelten auch hier. Was neu dazukommt, ist die häufige Anwendung der Faktorzerlegung und ein paar Rechentricks, wie etwa zum richtigen Zeitpunkt eine (-1) auszuklammern.

3.5.1 Kürzen

z.B.: $\dfrac{2a^2-4a}{5a^2-10a}$

1) In Faktoren **zerlegen**: $\dfrac{2a^2-4a}{5a^2-10a}=\dfrac{2a(a-2)}{5a(a-2)}$

2) Gemeinsame Faktoren **kürzen**: Hier mit $a(a-2)$ kürzen: $\underline{\underline{\dfrac{2}{5}}}$

ⓘ Kürzen ist nur erlaubt, wenn Zähler und Nenner vollständig in Produkte zerlegt sind!

z. B.: $\dfrac{a+b(2-a^2)}{b(2-a^2)}$ ...darf man nicht kürzen, selbst wenn's verlockend aussieht...

3.5.2 Addieren & Subtrahieren

Wir erinnern uns daran, dass wir nur gleichnamige Brüche addieren respektive subtrahieren können. Aber wie finden wir den Hauptnenner? Die Antwort: Durch das Faktorisieren der Nenner!

z.B.: $\frac{3}{2a-2}-\frac{a}{a^2-1}$ ...Faktorisieren der Nenner... $\frac{3}{2(a-1)}-\frac{a}{(a+1)(a-1)}$

1) Hauptnenner bestimmen: **HN**: $2(a+1)(a-1)$

Zur Erinnerung: Der HN ist das **kleinste** gemeinsame Vielfache « kgV » der beiden Nenner. Der Hauptnenner ist also der kleinste Ausdruck, der beide Nenner als Faktor enthält! Der HN: $2(a-1)(a+1)(a-1)$ wäre also falsch!

2) Auf HN **erweitern**: $\frac{3\,\boldsymbol{(a+1)}}{2(a+1)(a-1)}-\frac{\boldsymbol{2}\,a}{2(a+1)(a-1)}$

Der erste Bruch wird mit $(a+1)$ erweitert, der zweite mit 2. Jetzt haben wir einen gemeinsamen Nenner.

3) Zähler zusammenfassen: $\frac{3a+3-2a}{2(a+1)(a-1)}=\frac{a+3}{2(a+1)(a-1)}$

4) Kürzen, falls möglich: (Hier nicht möglich.) $\frac{a+3}{2(a+1)(a-1)}$

ⓘ Aufgepasst bei der Subtraktion! Das Minuszeichen bezieht sich auf den gesamten nachfolgenden Zähler. Also: Nicht vergessen die Vorzeichen anzupassen! Hierzu ein Beispiel: $\frac{a}{2}-\frac{b-c}{2}=\frac{a-b+c}{2}$.

Beispiel: 🖉

$\frac{4x+5}{x^2-x-12}-\frac{3}{x-4}=$

Beispiel: 🖉

$\frac{7}{x-1}+\frac{6}{1-x}=$

3.5.3 Multiplikation

z.B.: $\frac{2a}{(a^2-b^2)} \bullet \frac{(a-b)}{4}$

1) Vor dem Multiplizieren **faktorisieren und kürzen**: $\frac{2a}{(a+b)(a-b)} \bullet \frac{(a-b)}{4} = \frac{a}{(a+b)} \bullet \frac{1}{2}$

2) «**Zähler • Zähler** & **Nenner • Nenner**»: $= \underline{\underline{\frac{a}{2(a+b)}}}$

3.5.4 Division

z.B.: $\frac{(a+b)^2}{3b} : \frac{a^2-b^2}{6b^2}$

1) « **Bruch :** ***Bruch*** **=** **Bruch •** ***Kehrbruch*** »: $\frac{(a+b)^2}{3b} \bullet \frac{6b^2}{a^2-b^2}$

2) Wie bei der **Multiplikation** fortfahren: $\frac{(a+b)^2}{3b} \bullet \frac{6b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)}{1} \bullet \frac{2b}{(a-b)} = \underline{\underline{\frac{2b(a+b)}{(a-b)}}}$

<u>Beispiel</u>: 🖉

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{1}{b^2-a^2} =$$

3.5.5 Doppelbrüche

1) Einen **Doppelbruch** kann man problemlos **als Division** zweier Bruchterme **schreiben**:

$$\frac{\frac{(a+b)^2}{3b}}{\frac{a^2-b^2}{6b^2}} = \frac{(a+b)^2}{3b} : \frac{a^2-b^2}{6b^2}$$

2) Wie bei der **Division** fortfahren (siehe oben): $\frac{(a+b)^2}{3b} : \frac{a^2-b^2}{6b^2} = \ldots = \underline{\underline{\frac{2b(a+b)}{(a-b)}}}$

ⓘ Man beachte: Ein Doppelbruch lässt sich oft durch geschicktes Erweitern umformen:

$$\frac{\frac{(a+b)^2}{3b}\cdot\left(6b^2\right)}{\frac{a^2-b^2}{6b^2}\cdot\left(6b^2\right)} = \frac{(a+b)^2\cdot 2b}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)^2\cdot 2b}{(a+b)(a-b)} = \underline{\underline{\frac{2b(a+b)}{(a-b)}}}$$

Beispiel:

$$\frac{\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}}{\frac{1}{a^2-1}} =$$

4 WURZELN UND POTENZEN

4.1 Die Definition der Quadratwurzel

Definition[1]

Die Quadratwurzel einer *positiven* Zahl a ist diejenige *positive* Zahl, die mit sich selber multipliziert a ergibt.

Konkret: $\sqrt{10}$ ist die (***positive***) Zahl, die mit sich selbst multipliziert 10 ergibt.
($\sqrt{10} = + 3.16227766016837933199889354...$)

Bemerkungen:

- Den Ausdruck unter einer Wurzel nennt man Radikand. Im obigen Beispiel $\sqrt{10}$ wäre also 10 der Radikand.

- Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ist nicht definiert und kann somit nicht gezogen werden. $\sqrt{-4}$ = ? (Es gibt keine reelle Zahl die mit sich selbst multipliziert -4 ergibt. Dies leuchtet hoffentlich ein! Denn Quadratzahlen sind immer positiv: « - » · « - » = « + »)

- Alle Quadratwurzeln, deren Radikand nicht ausschliesslich Quadratzahlen enthält, sind irrationale Zahlen, d.h. sie sind nicht-periodisch und nicht-abbrechend.

- Wir legen fest: $\boxed{\sqrt{0} = 0}$

Bemerkungen

ⓘ Es ist wichtig, dass Sie verstehen, dass $\sqrt{36}$ ***nicht -6 ist, sondern +6 ist!*** Auch wenn beide Zahlen mit sich selbst multipliziert 36 ergeben, fordert die Definition diejenige *positive* Zahl, die mit sich selber multipliziert 36 ergibt, also die ***eindeutige Zahl 6***.

Wäre das nicht der Fall; könnten Sie für $\sqrt{36}$ wahlweise einmal -6 und einmal +6 schreiben, so würde die ganze Mathematik in sich zusammenfallen. Dann könnten Sie Schwachsinniges beweisen wie etwa: $\underline{\underline{1}} = 7 - 6 = 7 - \sqrt{36} = 7 - (-6) = \underline{\underline{13}}$ ...und gerade deshalb haben die Mathematiker Vorsichtsmassnahmen getroffen und die Quadratwurzel entsprechend definiert!

4.1.1 Rechenregeln für Quadratwurzeln

- $\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}}$

- $\boxed{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ Die Wurzel kann bei einer Summe NICHT summandenweise gezogen werden! Ein Gegenbeispiel: $\underline{\sqrt{9+16}} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$ jedoch $\underline{\sqrt{9} + \sqrt{16}} = 3 + 4 = \underline{\underline{7}}$.

[1] Das Zeichen „$\sqrt{\ }$“ erinnert an den Buchstaben r für lateinisch radix („Wurzel“).

4.2 Rechnen mit n-ten Wurzeln

Aus einer Zahl kann man auch die dritte, vierte, oder ganz allgemein die n-te Wurzel ziehen.

Was vermuten Sie, beträgt $\sqrt[3]{8}$? ✎

4.2.1 Die Definition der n-ten Wurzel

Definition

Es sei $a \geq 0 \in \mathbb{R}$. Die *nichtnegative* Zahl x mit $x^n = a$ heisst n-te Wurzel aus a.   Schreibweise: $x = \sqrt[n]{a}$

Beispiele:

1) $\sqrt[4]{16} = 2$, da $2^4 = 16$ (-2 *ist nach Definition falsch, und somit ist das Resultat 2 eindeutig!*)

2) $\sqrt[3]{-8} \neq -2$, obwohl $(-2)^3 = -8$ ist, ist der Ausdruck $\sqrt[3]{-8}$ nicht definiert. (Da Wurzeln *nur* für *positive Radikanden definiert* sind.) Der Grund dieser Einschränkung ist, dass später im Zusammenhang mit den sog. Potenzregeln ansonsten Widersprüche auftreten würden[1].

4.2.2 Rechenregeln für n-te Wurzeln

- $\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$
- $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$

Bemerkungen:

- Für n = 2 hat man eine Quadratwurzel. In diesem Fall schreibt man die 2 über der Wurzel nicht hin. Für n = 3 spricht man auch von Kubikwurzeln.
- Natürlich gilt auch hier: Die Wurzel kann bei einer Summe NICHT summandenweise gezogen werden!
- Wir werden gleich sehen, dass $\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$ gilt. Dies ist für die Berechnung n-ter Wurzeln mit Hilfe des TR nützlich. Zum Beispiel wird $\sqrt[4]{16}$ als [1][6] [^] [(] [1][÷][4] [)] eingegeben.

4.2.3 Wurzeltermumformungen

Es folgen verschiedene Beispiele :

a) ✎ $(\sqrt{x} + 8)^2 =$

[1] Wir werden später die Beziehung $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ einführen. Wären negative Radikanden erlaubt, liesse sich das folgende widersprüchliche Beispiel konstruieren: $\underline{-2} = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = \underline{2}$

b) ✎ $(3\cdot\sqrt{3x+4})^2 =$

c) Wir möchten den Nenner eines Bruches wurzelfrei machen. Also erweitern wir geschickterweise mit $(\sqrt{2}-\sqrt{3})$!

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^{\ 2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = -\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

Man beachte, dass hier die binomische Formel $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ verwendet wurde!

d) ✎ Wir möchten den Nenner eines Bruches wurzelfrei machen: $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

e) $\sqrt{a^2} = |a|$. Die Betragsstriche sind notwendig! Z. Bsp.: $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$ (und **nicht** -7) !

4.3 Rechnen mit Potenzen

4.3.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten

Definition:

Für jede reelle Zahl a und natürliche Zahl n heisst: $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\textbf{Produkt aus n Faktoren a}}$ die ***n-te Potenz von a***.

Beispiele:

$5^4 = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 625$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$-2^4 = -(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) = -16$

$(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$

ⓘ Man beachte den Unterschied der untersten zwei Beispiele. Setzt man keine Klammern um « - 2 », folgt aus der Regel «Punkt vor Strich» das Resultat - 16; im Gegensatz zu $(-2)^4 = +16$.

4.3.1.1 Rechenregeln für Potenzen mit natürlichen Exponenten

Wir geben jeweils zuerst die Rechenregel an, gefolgt von einem Beweis zur Begründung, und einem Zahlenbeispiel zur Illustration. Am Ende des Kapitels folgt eine Zusammenstellung aller Regeln.

Multiplikation zweier Potenzen mit gleicher Basis

- *Regel:* $\boxed{a^m\cdot a^n = a^{m+n}}$
- *Beweis:* $a^m\cdot a^n = \underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{\textbf{m Faktoren}}\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{\textbf{n Faktoren}} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}_{\textbf{m + n Faktoren}} = a^{m+n}$
- *Zahlenbeispiel:* $7^2\cdot 7^3 = (7\cdot 7)\cdot(7\cdot 7\cdot 7) = 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 7^5$

Division zweier Potenzen mit gleicher Basis

- *Regel:* $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ (Vorläufig soll m>n gelten!)
- *Beweis:* $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot a \cdot a}^{m \ \ Faktoren}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{n \ \ Faktoren}} = \ldots n - mal \ kürzen \ldots = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}^{(m-n) \ \ Faktoren}}{1} = a^{m-n}$
- *Zahlenbeispiel:* $\frac{2^7}{2^4} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1} = 2^3 = 2^{7-4}$

Potenz einer Potenz

- *Regel:* $\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$
- *Beweis:* $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \ Faktoren \ a^m} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \cdot m \ \ Faktoren \ a} = a^{m \cdot n}$
- *Zahlenbeispiel:* $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12}$

Multiplikation zweier Potenzen mit gleichem Exponenten

- *Regel:* $\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$
- *Beweis:* $a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \ Faktoren \ a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \ Faktoren \ b} = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \ Faktoren \ ab} = (ab)^n$
- *Zahlenbeispiel:* $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3$

Division zweier Potenzen mit gleichem Exponenten

- *Regel:* $\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$
- *Beweis:* $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n-mal} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- *Zahlenbeispiel:* $\frac{3^4}{8^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8} = \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) = \left(\frac{3}{8}\right)^4$

ⓘ Nach den bisherigen Betrachtungen kann der Exponent nur eine natürliche Zahl sein. Ziel der nächsten zwei Kapitel ist die Antwort auf die Frage:

Haben auch Ausdrücke wie a^{-3} oder $a^{1/2}$ einen Sinn?

Prinzipiell könnten wir diese Ausdrücke beliebig definieren - allerdings sollen diese **Definitionen** auch **sinnvoll** sein, das heisst, **die bekannten Rechenregeln sollen weiterhin gelten!**

4.3.2 Potenzen mit beliebigen ganzzahligen Exponenten

Was bedeutet a^0?

- Wir können einerseits rechnen: $a^2 : a^2 = a^{2-2} = a^0$
- Andererseits ist $a^2 : a^2 = 1$.
- Also erhalten wir: $\boxed{a^0 = 1}$

Was bedeutet a^{-1}?

- Es ist einerseits $a^1 : a^2 = a^{1-2} = a^{-1}$.
- Andererseits ist $a^1 : a^2 = \frac{1}{a}$.
- Also ist $\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$. Genauso zeigt man: $\boxed{a^{-2} = \frac{1}{a^2}}$, oder $\boxed{a^{-3} = \frac{1}{a^3}}$, usw. ...

FAZIT: Die folgende Definition scheint also sinnvoll zu sein *(solange im Nenner für a nicht Null steht).*

Definition:

Für $a \neq 0$ wird vereinbart: $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Beispiele dazu:

$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$ $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{27}} = 27$

Eine abschliessende Bemerkung: $\boxed{\text{Der Ausdruck } \mathbf{0^0} \textbf{ ist nicht definiert.}}$ Begründung:

Aus $4^0 = 1$; $3^0 = 1$; $2^0 = 1$; $1^0 = 1$; ... würde sich für 0^0 der Wert **1** ergeben!
Aus $0^4 = 0$; $0^3 = 0$; $0^2 = 0$; $0^1 = 0$; ... würde sich für 0^0 der Wert **0** ergeben!

4.3.3 Potenzen mit rationalen Exponenten

Was bedeutet $a^{1/3}$?

- Wir können (analog zu oben) rechnen: $\underline{a^{1/3}} \cdot \underline{a^{1/3}} \cdot \underline{a^{1/3}} = a^{1/3+1/3+1/3} = a^1 = a$.
- Die Zahl, die dreimal mit sich selbst multipliziert a ergibt, ist aber $\underline{\sqrt[3]{a}}$.
- **Es ist daher sinnvoll** $\boxed{a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}}$ **zu setzen, oder allgemein:** $\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$**.**

Beispiel : Unter $10^{\frac{1}{2}}$ verstehen wir ab jetzt den Ausdruck $\sqrt[2]{10}$ also $\sqrt{10}$.

Die Definition des Ausdrucks $a^{\frac{m}{n}}$ ist an dieser Stelle naheliegend, wie die folgende Überlegung aufzeigt:

- $a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Somit definieren wir $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$

Zusammenfassend haben wir also die folgenden Definitionen vereinbart:

Für $a \geq 0$ und natürliche Zahlen n und m ist

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}} \quad \text{und} \quad \boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}.$$

ⓘ Potenzen lassen sich somit als Wurzeln schreiben und umgekehrt Wurzeln als Potenzen.

4.3.4 Zusammenstellung der Potenzregeln

Unter Berücksichtigung der **Definitionen**:

$$\boxed{a^0 = 1}, \quad \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}, \quad \boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}, \quad \boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

gelten die folgenden **Potenzregeln** :

1. $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ und $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

2. $\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$ und $\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$

3. $\boxed{(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}}$

Wir schliessen diese Zusammenstellung mit vier wichtigen Bemerkungen ab:

- ⓘ Für die **Addition** bzw. **Subtraktion von Potenzen** gibt es **keine Rechenregeln.**

$$\boxed{2^2 + 2^3 \neq 2^{2+3} \quad \textit{(links steht 12; rechts steht 32)}}$$

- ⓘ Für die **Multiplikation** bzw. **Division von Potenzen mit verschiedenen Basen und verschiedenen Exponenten** gibt es ebenfalls **keine Rechenregeln.**

$$\boxed{a^3 b^2 \text{ lässt sich nicht weiter verrechnen.}}$$

- ⓘ Auch bei Potenzen spielen **Klammern** eine **wichtige Rolle**, welche vernachlässigt, falsche Aussagen liefern. Der folgende Fall sorgt oft für Verwirrung. Um Klarheit zu schaffen, merke man sich: **Eine Potenz bindet stärker als eine Multiplikation!**

$$\boxed{2^{2^3} = 2^{(2^3)} = 2^8 = 256} \text{ hingegen ist } \boxed{\left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64.}$$

- a^x ist **vorläufig nur für Exponenten x ∈ ℚ definiert**. Für allgemeine **reelle Exponenten** folgt eine entsprechende Definition im Kapitel «Exponentialfunktionen und Logarithmus».

4.3.5 Anwendungen der Potenzregeln

Das korrekte Anwenden der Potenzregeln ist einerseits Übungssache und andererseits Konzentrationssache. Es ist wichtig, dass Sie sich an die Regeln halten und keine neuen Regeln «erfinden». Bei jedem Schritt sollten Sie angeben können, welche Regel Sie gerade anwenden. Natürliche gibt es mehrere korrekte Lösungswege die zum Ziel führen!

a) ✎ $\frac{a^3 \cdot b^2}{b^3} : \frac{a^2 \cdot b^2}{a^4} =$

b) $\sqrt{a\sqrt{a}} = \textit{(Wurzeln als Potenz schreiben)} = \sqrt{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \underline{\underline{a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}}}$

5 DAS LÖSEN VON GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

5.1 Allgemeines

Beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen geht es darum, alle Werte aus der Grundmenge $\mathbb{G}$ zu finden, die durch Einsetzung in die Lösungsvariable (in der Regel x) eine wahre Aussage ergeben. Diese Werte bilden die Lösungsmenge der (Un)Gleichung. Meistens wird man die Lösung(en) einer Gleichung nicht auf Anhieb sehen. Deshalb wird es also nötig sein, eine Gleichung oder eine Ungleichung solange umzuformen, bis man die Lösung(en) sieht.
Auf dem «Weg» dahin sollte man jedoch darauf achten, dass durch ungeschickte Umformungen weder Lösungen verloren gehen (sog. Verlustumformungen) noch neue Scheinlösungen dazukommen (sog. Gewinnumformungen). Wir werden also bemüht sein, Umformungen anzuwenden, welche die Lösungsmenge unverändert lassen. Solche Umformungen nennt man auch **Äquivalenzumformungen**.

5.2 Äquivalenzumformungen bei Gleichungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten den **gleichen Term addiert** oder **subtrahiert**
- beide Seiten mit der **gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert** oder **dividiert**.

Eine derartige Umformung heisst **Äquivalenzumformung**.

Beispiele:

1.
$$\begin{aligned} & 2\cdot x+1=5 && \mid -1 \\ \Leftrightarrow\quad & 2\cdot x=4 && \mid :2 \\ \Leftrightarrow\quad & x=2 \\ & \mathbb{L}=\{2\} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\cdot x-5=2 && \mid +5 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{3}\cdot x=7 && \mid \cdot 3 \\ \Leftrightarrow\quad & x=21 \\ & \mathbb{L}=\{21\} \end{aligned}$$

Zur Probe setzt man das Lösungselement ein und überzeugt sich, dass eine wahre Aussage entsteht!

$2\cdot\mathbf{2}+1=5$ (wahre Aussage)

$\frac{1}{3}\cdot\mathbf{21}-5=2$ (wahre Aussage)

5.3 Lineare Gleichungen

Eine Gleichung heisst linear, wenn die Variable nur in der ersten Potenz vorkommt und nirgends im Nenner steht. Es folgen drei Beispiele.

Beispiel 1:

$$5 - 0{,}5x = 3 + 0{,}75x \qquad \Big|\ + 0{,}5x$$

$$5 = 3 + 1{,}25x \qquad \Big|\ - 3$$

$$2 = 1{,}25x \qquad \Big|\ : 1{,}25$$

$$1{,}6 = x$$

$$\mathbb{L} = \{1{,}6\} \text{ falls } \mathbb{G} = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{L} = \{\ \} \text{ falls } \mathbb{G} = \mathbb{N}$$

Dieses Beispiel soll unter anderem aufzeigen, dass die *Lösungsmenge von der Grundmenge abhängig ist.* Wie schon weiter oben erwähnt, soll ab jetzt, falls nichts anderes vorausgesetzt wird, $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ gelten.

Beispiel 2:

$$2x + 24 = 36 - x + 4 + 3x \qquad \Big|\ \text{Rechte Seite zusammenfassen}$$

$$2x + 24 = 40 + 2x \qquad \Big|\ - 2x$$

$$\underline{24 = 40}$$ falsche Aussage! D.h.: Keine Zahl ergibt eingesetzt für x eine wahre Aussage. Diese Gleichung hat somit keine Lösungen!

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{\ \}}}$$

Eine Gleichung die durch Äquivalenzumformungen auf eine falsche Aussage führt, hat also eine leere Lösungsmenge.

Beispiel 3:

$$12 + x - 7 = 2x + 5 - x \qquad \Big|\ \text{Beide Seiten zusammenfassen}$$

$$x + 5 = x + 5 \qquad \Big|\ - x$$

$$\underline{5 = 5}$$ wahre Aussage! D.h.: Jede Zahl ergibt eingesetzt für x eine wahre Aussage und somit auch eine Lösung. Was man bereits in der zweiten Zeile sieht. Also:

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \mathbb{R}}}$$

Zusammenfassend kann man also sagen:

ⓘ Eine lineare Gleichung hat entweder *genau eine Zahl* oder *keine Zahl* oder *alle Zahlen der Grundmenge* als Lösung.

Wir lösen weitere Beispiele:

ⓘ Dabei sollte man stets beachten: **Jede auf einer Seite durchgeführte Veränderung, muss auch auf der anderen Seite der Gleichung genauso durchgeführt werden.** (Man stelle sich etwa eine Waage im Gleichgewicht vor. Ändert sich das Gewicht auf der einen Waagschale, wird man auf der anderen Waagschale die gleiche Veränderung durchführen, um die Waage im Gleichgewicht zu behalten.)

Beispiel 4: ✎ $\frac{7x-6}{4}+3=2x$

Beispiel 5: $10-\frac{3x-1}{2}=\frac{6x+3}{11}$ sei hier als Musterbeispiel vorgelöst.

$$10-\frac{3x-1}{2} = \frac{6x+3}{11} \qquad \Big|\cdot 22$$

$$22\cdot\left(10-\frac{3x-1}{2}\right) = 22\cdot\frac{6x+3}{11} \qquad \Big|\ \textit{ausmultiplizieren / kürzen}$$

$$220-11\cdot(3x-1) = 2\cdot(6x+3) \qquad \Big|\ \textit{(Die Klammern sind notwendig!)}$$

$$220-33x+11 = 12x+6$$

$$-33x+231 = 12x+6 \qquad \Big|+33x \qquad \Big|-6$$

$$225 = 45x \qquad \Big|:45$$

$$5 = x$$

5.4 Lineare Ungleichungen

Steht bei einer linearen Gleichung an der Stelle des Gleichheitszeichen einer der folgenden Ungleichheitszeichen « < ; > ; ≤; ≥ » spricht man von einer linearen Ungleichung. Auch zum Lösen von Ungleichungen brauchen wir *Äquivalenzumformungen*, um die Lösungsvariable zu isolieren. Jedoch können sich *diese*, von den Äquivalenzumformungen linearer Gleichungen unterscheiden, wie wir gleich sehen werden.

$7>5 \quad \vert\cdot(-3)$ $-21>-15$ falsche Aussage	$8>4 \quad \vert:(-2)$ $-4>-2$ falsche Aussage
Richtig wäre: $-21<-15$	**Richtig** wäre: $-4<-2$

Bei Ungleichungen ist also das Ungleichheitszeichen umzukehren, wenn auf beiden Seiten mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert wird.

> ⓘ Wir halten fest:
> **Multiplikation oder Division mit derselben positiven Zahl** auf beiden Seiten der Ungleichung sind Äquivalenzumformungen.
>
> **Multiplikation oder Division mit derselben negativen Zahl** auf beiden Seiten der Ungleichung sind Äquivalenzumformungen, wenn das **Ungleichheitszeichen umgekehrt** wird.

Es folgen zwei Beispiele dazu:

Beispiel 1: $2x > 10 \quad \vert :2$

$x > 5$, $\mathbf{x \in (5, \infty)}$

Beispiel 2: $-2x \geq 10 \quad \vert :(-2)$

$x \leq -5$, $\mathbf{x \in (-\infty, -5]}$

5.5 Bruchgleichungen

Eine Bruchgleichung ist eine Gleichung, bei der die Lösungsvariable x im Nenner eines Bruches oder mehrerer Brüche steht. Ein Beispiel wäre: $\frac{3x-2}{2x+2}=2$

Bei einer Bruchgleichung ist es besonders wichtig die **Definitionsmenge** anzugeben. Im obigen Beispiel darf die Zahl -1 nicht für x eingesetzt werden, da sonst der Nenner Null wird. (Die Division durch Null ist nach wie vor nicht definiert!) Alle andere Zahlen sind hingegen erlaubt. **Wir müssen** also **-1 aus der Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ ausschliessen**. Es gilt:

$\boxed{\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$

Um die Nenner wegzuschaffen, multipliziert man die Bruchgleichung mit dem Hauptnenner (=HN). Hier also mit HN= 2x+2.

$$\frac{3x-2}{2x+2}=2 \qquad \vert\cdot(2x+2)$$

$3x-2=2(2x+2)$ | Die Klammern bei **(**2x + 2**)** sind notwendig!

$3x-2=4x+4$ | – 3x

$-2=x+4$ | – 4

$-6=x$ (Kontrolle durch Einsetzen: $\frac{-20}{-10}=2$) O.k.

$\underline{\underline{\mathbb{L}=\{-6\}}}$

Wie wichtig es ist, die Definitionsmenge anzugeben, soll das nächste Beispiel illustrieren.

Beispiel: ✎ $\mathbb{D}$ = ..., ✎ HN=...................

$$1+\frac{6}{x-3}=2+\frac{2x}{x-3} \quad \Big| \cdot(x-3)$$

$$1\cdot(x-3)+6=2\cdot(x-3)+2x \quad \Big| \text{ zusammenfassen}$$

$$x+3=4x-6 \quad \Big| +6 \;\Big| -x$$

$$9=3x \quad \Big| :3$$

$$\underline{x=3} \quad \Big| \text{ Es handelt sich hierbei jedoch nicht um die Lösung...}$$

ⓘ...Denn **3** ist nicht in der Definitionsmenge enthalten; und somit bestimmt keine Lösung der Bruchgleichung! Es handelt sich hier um eine sogenannte **Scheinlösung**. Da der einzige Lösungskandidat eine Scheinlösung ist, ist die Lösungsmenge leer! $\underline{\underline{\mathbb{L}=\{\,\}}}$.

Wie konnte eine solche Scheinlösung entstehen? Nun in der ersten Zeile haben wir mit (x – 3) multipliziert. Für den speziellen Wert x=3 würden wir also an dieser Stelle mit Null multiplizieren, und das ist keine Äquivalenzumformung!

Es folgt ein weiteres Beispiel (**Tipp**: um den Hauptnenner zu bestimmen, sollten Sie **zunächst sämtliche Nenner faktorisieren**! Also nicht einfach die Gleichung mit (x-1)(5x-5)(7x-7) multiplizieren, sonst rechnen Sie sich ins Verderben!)

Beispiel : ✎ $\frac{x-4}{x-1}+\frac{3x-5}{5x-5}=2-\frac{5x-1}{7x-7}$; $\mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$\frac{x-4}{x-1}+\frac{3x-5}{5(x-1)}=2-\frac{5x-1}{7(x-1)} \quad \Big| \cdot \mathrm{HN}=35(x-1)$$

5.6 Bruchungleichungen

Bruchungleichungen sind durch Umformungen komplizierter und aufwändiger zu lösen als Bruchgleichungen. Wir verzichten an dieser Stelle auf eine umfassende Theorie der Bruchungleichungen. Es soll jedoch aufgezeigt werden, worin die Problematik bei solchen Aufgaben liegt.

Dies wird anhand eines Beispiels illustriert:

$\frac{3}{x-1} > 5$ ist eine Bruchungleichung mit $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und HN = (x–1)

$$\frac{3}{x-1} > 5 \quad \Big| \cdot \text{HN} = (x-1)$$

ⓘ...Und an dieser Stelle taucht ein Problem auf. Ist der **HN positiv oder negativ**? Ist er **positiv bleibt** das **Ungleichheitszeichen**; ist er **negativ** müssen wir das **Ungleichheitszeichen umkehren**. Diese Überlegung zwingt uns an dieser Stelle zu einer sog. «Fallunterscheidung»:

Fall 1: Für $x > 1$ ist der HN positiv

$$\frac{3}{x-1} > 5 \quad \Big| \cdot \text{HN} = (x-1)$$

$$3 > 5(x-1)$$

$$3 > 5x - 5$$

$$8 > 5x$$

$$\underline{1.6 > x}$$

Fall 2: Für $x < 1$ ist der HN negativ

$$\frac{3}{x-1} > 5 \quad \Big| \cdot \text{HN} = (x-1)$$

$$3 < 5(x-1)$$

$$3 < 5x - 5$$

$$8 < 5x$$

$$\underline{1.6 < x}$$

Wir fassen zusammen:

Im Fall 1 haben wir: $x > 1$ **und** $1.6 > x$. Dies ergibt das Intervall: $\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1.6\}$ (Falls man Mühe hat, dies einzusehen, könnte eine grafische Veranschaulichung auf dem Zahlenstrahl weiterhelfen).

Im Fall 2 haben wir: $x < 1$ **und** $1.6 < x$. Da keine Zahl x beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt, gilt: $\mathbb{L}_2 = \{\ \}$.
(Falls man Mühe hat, dies einzusehen, könnte eine grafische Veranschaulichung auf dem Zahlenstrahl weiterhelfen).

Die Gesamtlösung ergibt sich als Vereinigung der beiden Teillösungen:
$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1.6\}$

Dies war noch eine relativ «harmlose» Bruchungleichung. Kommen mehrere Brüche vor, steigt der Rechenaufwand entsprechend.

Es gibt jedoch auch elegantere Methoden solche Aufgaben zu lösen. Dieses Thema werden wir später wieder aufgreifen (Dienstag: «Reelle Funktionen»).

5.7 Produkte die Null sind. Ein Spezialfall von Gleichungen.

Frage: Wann ist ein Produkt verschiedener Faktoren Null? «$a \cdot b \cdot c = 0$»

Antwort:

Ein Produkt verschiedener Faktoren ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist!
Also: « $a \cdot b \cdot c = 0 \iff a = 0$ oder $b = 0$ oder $c = 0$ »

Mit dieser Überlegung lassen sich nun bei speziellen Gleichungen, die Lösungen zum Teil sofort ablesen. Wir illustrieren das am folgenden Beispiel:

Beispiel 1): Man bestimme die vollständige Lösungsmenge der folgenden Gleichung: $x \cdot (x-5) = 0$
Mit der obigen Überlegung wird die linke Seite Null, wenn der erste Faktor x gleich Null ist, oder wenn der zweite Faktor (x – 5) gleich Null wird.
Dies ergibt zwei Lösungen: $\mathbf{x_1=0}$ und $\mathbf{x_2 = 5}$. Somit ist $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{0\,;\,5\}}}$

ⓘ **Irrweg**: Beide Seiten der Gleichung durch x dividieren ergibt $x - 5 = 0$ und somit die Lösung $x = 5$. Die zweite Lösung $x = 0$ wurde damit vernachlässigt. Die **Division durch die Lösungsvariable** ist somit eine sog. «**Verlustumformung**» und keine Äquivalenzumformung!

Beispiel 2): ✎ $x^2 + 9x + 20 = 0$
Mit den obigen Überlegungen kann man diese «geeignete» quadratische Gleichung durch Faktorisieren lösen! (Mit «geeignet» meint man hier, dass sich der Term mit der 2-Klammermethode faktorisieren lässt.):

$$x^2 + 9x + 20 = 0 \quad \Big| \text{ faktorisieren}$$
$$(\qquad\qquad)(\qquad\qquad) = 0$$

5.8 Wurzelgleichungen

Wenn die Lösungsvariable x unter der Wurzel vorkommt, spricht man von einer Wurzelgleichung. Es folgen drei Beispiele für Wurzelgleichungen.

Beispiele: **1)** $\sqrt{x} = 2$
2) $\sqrt{x+104} = \sqrt{x} + 8$
3) $\sqrt{x^2 + 8x + 8} - \sqrt{2x+3} = 0$

Bemerkungen:

- Auch bei Wurzelgleichungen ist unser Ziel, alle Zahlen zu finden, die die Gleichung erfüllen; also alle Zahlen, die eingesetzt in die Gleichung, eine wahre Aussage ergeben.
- Streng genommen, müsste man (wie etwa bei Bruchgleichungen) zunächst die Definitionsmenge bestimmen. (Der Ausdruck unter der Wurzel darf bekanntlich nicht negativ sein!) Da dies bei Wurzelgleichungen aber sehr umständlich sein kann (vgl. Bsp. 3)), macht man das in der Praxis anders: Man löst zuerst die Gleichung nach x auf und setzt dann die gefundenen Lösungen in die Gleichung ein, um zu sehen, ob diese zur Definitionsmenge gehören.
- Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist keine Äquivalenzumformung. Es können durch das Quadrieren neue Lösungen (sog. Scheinlösungen entstehen). Die Schlusskontrolle durch Einsetzen der Lösungen ist bei Wurzelgleichungen also notwendig!

Lösungen der Beispiele:

1) $\sqrt{x} = 2$ Wir quadrieren links und rechts und erhalten x = 4.
Wir setzen in die Gleichung ein: $\sqrt{4} = 2$ O.k.! Somit lautet die Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{4\}$.

2) $\sqrt{x+104} = \sqrt{x} + 8$ Hier können wir die Wurzeln nicht noch besser isolieren. Also quadrieren wir ein erstes Mal: $\left(\sqrt{x+104}\right)^2 = \left(\sqrt{x} + 8\right)^2$.

Da wir auf der rechten Seite das Quadrat einer Summe haben, müssen wir die erste binomische Formel anwenden. (Das Doppelprodukt dabei nicht vergessen!)

Das ergibt: $x + 104 = x + 16\sqrt{x} + 64$.

Wir isolieren die Wurzel: $\sqrt{x} = \frac{40}{16}$. Wir kürzen (wie gewohnt) den Bruch: $\sqrt{x} = \frac{5}{2}$.

Jetzt quadrieren wir links und rechts und erhalten: $x = \frac{25}{4}$. Dafür können wir auch x = 6.25 schreiben. Wir setzen zur Kontrolle x = 6.25 in die Gleichung ein (mit TR, oder von Hand): O.k.! Somit lautet die Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{6.25\}$

Bevor wir das dritte Beispiel lösen, geben wir zunächst ein allgemeines Lösungsvorgehen an:

Allgemeines Lösungsrezept:

1. **Wurzel isolieren** und durch Quadrieren **beseitigen** (eventuell mehrmals durchzuführen, wie etwa im Bsp.2.);
2. die so entstandene **Gleichung ohne Wurzeln lösen;**
3. gefundene **Lösungen** durch Einsetzen **überprüfen.**

3) Würden wir die Gleichung $\sqrt{x^2+8x+8}-\sqrt{2x+3}=0$ quadrieren, müssten wir für die linke Seite die 2. Binomische Formel anwenden und wir hätten ein Doppelprodukt von Wurzeltermen und somit die Wurzeln noch nicht beseitigt! Also zuerst umordnen:

$$\sqrt{x^2+8x+8}=\sqrt{2x+3}\,.$$

Jetzt können wir quadrieren; die Wurzeln verschwinden:

$$x^2+8x+8=2x+3\,.$$

Nach entsprechender Umformung erhalten wir eine quadratische Gleichung: $x^2+6x+5=0$. Um die Lösungen zu bestimmen, faktorisieren wir die linke Seite: $(x+1)(x+5)=0$ .Wir können die Lösungen $\mathbf{x_1=-1}$ und $\mathbf{x_2=-5}$ ablesen. Wir setzen in die Gleichung ein:

$\sqrt{(-1)^2+8\cdot(-1)+8}-\sqrt{2\cdot(-1)+3}=\sqrt{1}-\sqrt{1}=0\,;$ **-1** ist **Lösung**.

$\sqrt{(-5)^2+8\cdot(-5)+8}-\sqrt{2\cdot(-5)+3}=\sqrt{-7}-\sqrt{-7}\,;$ **-5** gehört **nicht** zur Definitionsmenge und ist somit nur eine **Scheinlösung**.

Somit gilt: **$\mathbb{L}$ = {-1}**.

Bemerkung:
Wir sind im obigen Beispiel einmal mehr auf eine quadratische Gleichung gestossen: «$x^2+6x+5=0$». Mit geschicktem Faktorisieren konnten wir diese Gleichung lösen. Wie gehen wir jedoch vor, wenn eine quadratische Gleichung der Form $3x^2-117x+5013=0$, oder gar der Form $x^2+3.17x-\sqrt{77}=0$ vorliegt? Die Antwort darauf erfolgt im nächsten Kapitel.

5.9 Quadratische Gleichungen

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung lautet:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

wobei $a\neq 0$, b und c reelle Zahlen sind. Mit «x» ist die unbekannte Grösse gemeint.

Die Zahlen **a**, **b** und **c** werden auch **Koeffizienten** genannt. Im Beispiel $\boxed{3x^2 + 8x - 7 = 0}$ wären also die entsprechenden Koeffizienten: $\boxed{a = 3}$; $\boxed{b = 8}$; $\boxed{c = -7}$. Gleichungen, die sich auf diese allgemeine Form umstellen lassen, heissen quadratisch.
Es wird $a\neq 0$ vorausgesetzt, da sonst für a=0 die lineare Gleichung « bx + c = 0 » gegeben wäre.

5.9.1 Sonderfälle von quadratischen Gleichungen

Wir betrachten zunächst Sonderfälle von quadratischen Gleichungen, die besonders einfach zu lösen sind. Dann werden wir mit einem «Trick», der sog. «quadratischen Ergänzung» auch anspruchsvollere quadratische Gleichungen lösen, und schliesslich werden wir eine Lösungsformel herleiten, mit der sich die Lösungen direkt berechnen lassen.

5.9.1.1 Die reinquadratische Gleichung

Ist $\mathbf{b = 0}$, fehlt also das sogenannte lineare Glied « bx », dann spricht man von einer **reinquadratischen Gleichung**. Sie hat die allgemeine Form $\mathbf{ax^2 + c = 0}$.

In diesem Fall lässt sich die quadratische Gleichung in die Form «$x^2 = \ldots$» bringen. Dazu zwei Beispiele:

Beispiel 1:

$$2x^2 - 8 = 0 \quad \Big| +8$$

$$2x^2 = 8 \quad \Big| :2$$

$$x^2 = 4 \quad \Big| \pm\sqrt{}$$

$$x = \pm 2$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{2\,; -2\}}}$$

Beispiel 2:

$$x^2 + 16 = 0 \quad \Big| -16$$

$$x^2 = -16 \quad \Big| \pm\sqrt{} \text{ nicht definiert!}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{\,\}}}$$

5.9.1.2 Leicht faktorisierbare quadratische Gleichungen

Wir faktorisieren die linke Seite und können dann die Lösungen sofort ablesen:

$$x^2 + 9x + 20 = 0$$

$$(x + 4)\,(x + 5) = 0$$

$$x_1 = -4\,;\; x_2 = -5$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-4\,; -5\}}}$$

5.9.1.3 Quadratisches Ergänzen

Wir betrachten das Beispiel

$$x^2 + 2x + 1 = 3.$$

Mit den bisherigen Methoden kommt man auf den ersten Blick nicht weiter. Subtrahieren wir 3 auf beiden Seiten lässt sich die Gleichung $x^2 + 2x - 2 = 0$ nicht wie bis anhin mit der Faktorisierungsmethode auflösen. Auf den zweiten Blick erkennt man auf der linken Seite eine binomische Formel!

$x^2 + 2x + 1 = 3$	**links** steht (glücklicherweise) eine **binomische Formel**
$(x + 1)^2 = 3$	$\pm\sqrt{\ }$
$x + 1 = \pm\sqrt{3}$	-1
$x = -1 \pm\sqrt{3}$	

$x_1 = -1 + \sqrt{3} \approx 0.732$; $x_2 = -1 - \sqrt{3} \approx -2.732$

$\mathbb{L} = \{0.732\ ;\ -2.732\}$

ⓘ Das bedeutet: Wenn auf der einen Seite eine binomische Formel (also ein Quadrat) steht, kann eine quadratische Gleichung durch Wurzelziehen « $\pm\sqrt{\ }$ » gelöst werden.

Eine Frage drängt sich nun auf:
Was machen wir, wenn keine binomische Formel vorkommt?

Antwort:
Dann stellen wir eine her!

Wie das gehen soll, illustrieren wir am folgenden Beispiel:

Beispiel:

$x^2 + 10x - 13 = 0$	**+ 38** *(...damit wir links die binomische Formel $(x + 5)^2$ herstellen können!)*
$x^2 + 10x + 25 = 38$	
$(x + 5)^2 = 38$	$\pm\sqrt{\ }$ *(soweit wollten wir ja kommen! Das war's!)*
$x + 5 = \pm\sqrt{38}$	

$x_1 = -5 + \sqrt{38} \approx 1.164$; $x_2 = -5 - \sqrt{38} \approx -11.164$

$\mathbb{L} = \{1.164\ ;\ -11.164\}$

ⓘ Man nennt ein solches «Herstellen» von binomischen Formeln, eine **quadratische Ergänzung.**

Dazu eine kleine Übung: Man ergänze die folgenden Ausdrücke zu einem Quadrat. Welche Zahl muss man jeweils dazuzählen? 🖉

a) $x^2 + 4x + \; \dots \; = \; (x + \; \dots \;)^2$

b) $x^2 - 14x + \; \dots \; = \; (x - \; \dots \;)^2$

c) $x^2 + 3x + \; \dots \; = \; (x + \; \dots \;)^2$

d) Die Zahl, die dazuzuzählen ist, erhalten wir also mit der allgemeinen Regel:

«Den Koeffizient von x ……………………………… und anschliessend ………………….»

Wir können nun also quadratische Gleichungen mit quadratischem Ergänzen auflösen. Dabei haben wir es stets mit konkreten Zahlen als Koeffizienten zu tun. Die gleiche Rechnung können wir aber auch durchführen, ohne uns auf bestimmte Zahlen festzulegen. Wir ersetzen die Zahlen durch Buchstaben und führen die Überlegungen des letzten Kapitels ganz allgemein durch, und zwar ein für alle Mal.

Das bringt zwei Resultate: Zum einen haben wir dann eine Lösungsformel zur Verfügung. Sie erlaubt uns, die Lösungen einer quadratischen Gleichung zu finden, ohne jedes Mal quadratisch ergänzen zu müssen. Und noch etwas: Wir können anhand der Koeffizienten einer quadratischen Gleichung im voraus entscheiden, wie viele Lösungen sie haben wird: zwei, eine oder keine.

5.9.2 Lösungsformel und Lösbarkeit

Wir legen uns nicht auf konkrete Koeffizienten fest, sondern rechnen mit Buchstaben. Dazu gehen wir von folgender Gleichung aus:

$ax^2 + bx + c = 0$, mit $a \neq 0$

Wir nehmen also an, dass die Gleichung in allgemeiner Form gegeben ist.

Beginnen wir die Rechnung: Wir bereiten durch zwei kleine Umformungen das quadratische Ergänzen vor:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 && \mid -c \\ ax^2 + bx &= -c && \mid : a \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} && \mid \text{quadratisch ergänzen!} \end{aligned}$$

Um quadratisch zu ergänzen, addieren wir zuerst auf beiden Seiten $\frac{b^2}{4a^2}$ ($\frac{b}{a}$ *durch 2 teilen und quadrieren*) und schreiben dann die linke Seite als Quadrat und die rechte Seite schreiben wir über einen gemeinsamen Bruchstrich:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad | \pm\sqrt{} \text{ ...hier entstehen 2 Lösungen}$$

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad | \text{ Rechts Regel: } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ anwenden}$$

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad | -\frac{b}{2a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

So, und das wäre eigentlich schon die Lösungsformel. Wir führen noch eine Abkürzung ein: Für den Ausdruck unter der Wurzel « $\mathbf{b^2 - 4ac}$ » schreiben wir « **D** ». Somit lautet die Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{mit } \mathbf{D = b^2 - 4ac}$$

Wir greifen das Beispiel «$x^2 + 10x - 13 = 0$» von weiter oben wieder auf, und wenden die soeben hergeleitete Formel an:

- Die Gleichung $x^2 + 10x - 13 = 0$ vergleichen wir mit der allgemeinen Form:
  $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$

- In unserem Beispiel steht **a** für **1**, **b** für **10** und **c** für **−13**.

- Zuerst berechnen wir den Ausdruck $D = b^2 - 4ac$:
  D $= 100 - 4 \cdot 1 \cdot (-13) = 100 + 52 =$ **152**

- Anwendung der Formel: $x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{152}}{2} = \begin{cases} 1.164 \\ -11.164 \end{cases}$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1.164 \;;\; -11.164\}$ stimmt tatsächlich! Die Formel klappt!

ⓘ **HALT !** Die Formel «klappt» nicht immer. **Ist der Ausdruck D unter der Wurzel negativ, dürfen wir nicht die Wurzel daraus ziehen**. In einem solchen Fall gilt: «Die quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung».

ⓘ Der Ausdruck

$$\mathbf{D = b^2 - 4ac}$$

der unter der Wurzel steht, entscheidet über die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung.

D heisst **Diskriminante** der quadratischen Gleichung. Das Wort «Diskriminante» kommt übrigens aus dem Lateinischen «discriminare» und heisst «trennen, scheiden». Die Diskriminante unterscheidet die Lösungsfälle.

An dieser Stelle scheint eine saubere Zusammenfassung der bisher erreichten Ergebnisse angebracht zu sein:

5.9.2.1 Die Lösungsformel und Lösungsfälle der quadratischen Gleichung

Zur Untersuchung der quadratischen Gleichung $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

wird die **Diskriminante** $\mathbf{D = b^2 - 4ac}$ eingeführt.

Ist **<u>D > 0</u>** dann hat die Gleichung **zwei Lösungen**, nämlich:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\ .$$

Dafür schreibt man abkürzend die Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

und meint damit: Die eine Lösung erhält man durch Addieren der Wurzel, die andere, durch Subtrahieren der Wurzel .

Ist **<u>D = 0</u>** dann hat die Gleichung nur **eine Lösung:** $x = \frac{-b}{2a}$, (Denn: $\sqrt{0} = 0$)

Ist **<u>D < 0</u>** dann hat die Gleichung **keine Lösung.**

5.9.2.2 Ein Musterbeispiel zur Lösungsformel

Die Benützung der Lösungsformel demonstrieren wir am Beispiel der Gleichung $5x^2 = 10 - 4x$.

Zunächst bringen wir sie in die allgemeine Form:

$$5x^2 + 4x - 10 = 0$$

Diese Gleichung vergleichen wir mit der allgemeinen Form

$$\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}\,x + \mathbf{c} = 0$$

In unserem Beispiel steht **a** für **5**, **b** für **4** und **c** für **−10**.

Wir berechnen die Diskriminante D und schauen, ob diese Gleichung überhaupt Lösungen hat:

$D = b^2 - 4ac$:

$\mathbf{D} = 16 - 4 \cdot 5 \cdot (-10) = 16 + 200 = \mathbf{216}$

D > 0 ; somit hat die Gleichung 2 Lösungen

Jetzt schreiben wir die Lösungsformel hin, ersetzen jedoch a, b und c durch die entsprechenden Zahlen. Für den Ausdruck unter der Wurzel D schreiben wir 216:

$x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{216}}{10}$, Somit ist $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{1.070\ ;\ -1.870\}}}$

5.9.3 Faktorisieren von quadratischen Termen

<u>Bis jetzt</u> konnten wir mit der Probiermethode «geeignete» quadratische Terme zerlegen:

$x^2 + 9x + 20 \quad \rightarrow \ldots 2-\mathit{Klammeransatz}\ldots \rightarrow \quad (x + \mathbf{4})(x + \mathbf{5})$

Schöner Nebeneffekt: Man sieht die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$x^2 + 9x + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = \mathbf{-4}\ ;\ x_2 = \mathbf{-5}}}$

<u>Neu</u>: Es geht auch umgekehrt:

$x^2 + 9x + 20 = 0 \quad \rightarrow \ldots \boldsymbol{\mathit{Lösungsformel}} \ldots \rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = \mathbf{-4}\ ;\ x_2 = \mathbf{-5}}}$

Schöner Nebeneffekt: Man kann die Faktorisierung des quadratischen Terms angeben:

$x^2 + 9x + 20 \quad \rightarrow \quad (x + \mathbf{4})(x + \mathbf{5})$

Wir geben nun (ohne Beweis) ein **Rezept** an, **wie man jeden beliebigen quadratischen Term faktorisieren kann**:

Für das **Faktorisieren** eines quadratischen Terms $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ kann man wie folgt **vorgehen:**

1) Lösungen berechnen $\rightarrow$ (**2** Lösungen: $\mathbf{x_1}$; $\mathbf{x_2}$ / **1** Lösung: $\mathbf{x_1}$ / oder **keine** Lösung)

2) Falls $\boxed{\text{2 Lösungen}}$ $\rightarrow$ $ax^2 + bx + c = \boxed{a(x - \mathbf{x_1})(x - \mathbf{x_2})}$

Falls $\boxed{\text{1 Lösung}}$ $\rightarrow$ $ax^2 + bx + c = \boxed{a(x - \mathbf{x_1})^2}$

Falls $\boxed{\textbf{keine}\text{ Lösung}}$ $\rightarrow$ $ax^2 + bx + c$ ist $\boxed{\textbf{unzerlegbar}}$

<u>Beispiel</u>:
Wir möchten den Term $\boxed{4x^2 - 2x - 12 \text{ faktorisieren}}$. Mit der 2-Klammermethode kommt man vermutlich nicht weiter... ...mit dem Rezept hingegen:

1) Lösungen berechnen:

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, führt auf die Lösungen: $x_1 = -1.5$; $x_2 = 2$

2) 2 Lösungen, $a = 4$: $\rightarrow$ $\mathbf{4}\,(x - \mathbf{x_1})\,(x - \mathbf{x_2}) = \boxed{\mathbf{4}\,(x + \mathbf{1.5})\,(x - \mathbf{2})}$.

5.9.4 Die Vieta-Formeln

Der französische Jurist und Mathematiker François Vieta (1540 – 1603) hat folgende interessante Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten a, b und c einer quadratischen Gleichung und ihren Lösungen herausgefunden:

Hat die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so gilt:

$\boxed{x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}}$ und $\boxed{x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}}$

Dies liefert uns ein gutes Mittel, die Lösungen von quadratischen Gleichungen zu kontrollieren.

<u>Beispiel</u>: 🖉 Jemand behauptet, die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung $3x^2 + 6x - 24 = 0$ sei $\mathbb{L} = \{-4; 8\}$. Weisen Sie mit Vieta's Formeln nach, dass dies falsch ist!

5.10 Gleichungen höheren Grades

Selbstverständlich gibt es auch Gleichungen die einen höheren Grad als zwei haben:

Beispiele:
$x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$ ist eine Gleichung **3. Grades** (hat bis zu 3 Lösungen).

$3x^7 + 6x^5 - 4x + 100 = 0$ ist eine Gleichung **7. Grades** (hat bis zu 7 Lösungen).

Bemerkung:
«Speziell **einfache» Gleichungen höheren Grades** kann man zwar oft **direkt lösen** (zum Beispiel sieht man bei der Gleichung $x^4 = 1$ sofort die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1; -1\}$), **im allgemeinen** geht dies jedoch **nicht so problemlos**!

Es gilt:

Für Gleichungen 3. oder 4. Grades gibt es zwar **Lösungsformeln**, doch sind diese **sehr kompliziert** und umständlich.

Für Gleichungen 5. oder höheren Grades ist sogar bewiesen, dass es **keine allgemeinen Lösungsformeln** gibt.

In der Praxis benutzt man **daher** zur Lösung von Gleichungen höheren als 2. Grades meistens **numerische Näherungsverfahren** (Computer oder moderne Taschenrechner). Wir werden nur kurz eine «speziell einfache» Form von Gleichungen vierten Grades vorstellen:

5.10.1 Biquadratische Gleichungen

Gleichungen vierten Grades sind, wie oben erwähnt, im allgemeinen schwer zu lösen! Wir betrachten hier aber eine ganz spezielle Gleichung vierten Grades, eine sog. **biquadratische Gleichung:**

$\mathbf{x^4 - 29x^2 + 100 = 0}$ (Der Ausdruck biquadratisch hat natürlich mit der Ähnlichkeit einer quadratischen Gleichung zu tun: $ax^4 + bx^2 + c = 0$.)

Wir **substituieren** (=ersetzen) nun $\mathbf{x^2}$ mit $\mathbf{z}$. Es sei also: $\mathbf{x^2 = z}$

Somit erhalten wir eine quadratische Gleichung für z: $\mathbf{z^2 - 29z + 100 = 0}$

Und diese können wir wie gewohnt nach z auflösen. Wir erhalten für die Diskriminante: $D = 441$; und für die Lösungen: $\mathbf{z_1 = 25}$; $\mathbf{z_2 = 4}$. (Man rechne nach!)

Anders formuliert: $\mathbf{x^2 = 25}$ und $\mathbf{x^2 = 4}$ **erfüllen** die ursprüngliche Gleichung $\mathbf{x^4 - 29x^2 + 100 = 0}$.

Wir interessieren uns aber für welche x (und nicht für welche x^2) die Gleichung erfüllt wird. Dies liegt nun auf der Hand:

1.Fall: Aus $x^2 = 25$ folgt: $\mathbf{x_1 = 5}$ und $\mathbf{x_2 = -5}$.

2.Fall: Aus $x^2 = 4$ folgt: $\mathbf{x_3 = 2}$ und $\mathbf{x_4 = -2}$.

Somit ergibt sich für die Lösungsmenge: $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{5; -5; 2; -2\}}}$.

6 ANHANG

6.1 Die «Wurzel aus 2» als Beispiel einer irrationalen Zahl

Behauptung: $\sqrt{2}$ ist kein Element aus $\mathbb{Q}$ und ist somit **nicht als Bruch darstellbar**.

Beweis (durch Widerspruch[1]):

Nehmen wir an $\sqrt{2}$ sei rational, dann liesse sich $\sqrt{2}$ als Bruch darstellen: $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$

Ausserdem setzen wir voraus, dass dieser Bruch bereits **vollständig gekürzt** ist, dass also a und b zwei teilerfremde ganze Zahlen sind. (Man kann jeden Bruch soweit kürzen, bis man nicht weiter kürzen kann; Und das haben wir mit unserem Bruch gemacht!)

Im Folgenden werden wir durch einige Umformungen sehen, dass der Bruch, den wir als nicht weiter kürzbar vorausgesetzt haben, doch gekürzt werden kann, weil wir sowohl a als auch b durch 2 teilen werden! Damit erzeugen wir einen Widerspruch, was bedeutet, dass es keinen solchen Bruch geben kann.

Durch Quadrieren beider Seiten von $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ erhält man: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2 \cdot b^2$

Wenn nun aber a^2 zweimal so gross ist wie b^2, so ist a^2 sicher eine gerade Zahl. Damit ist aber auch a eine gerade Zahl. (Diese Tatsache lässt sich ebenfalls ganz einfach mit Hilfe eines indirekten Beweises zeigen. Versuchen Sie's!) Man kann also a durch 2 teilen und erhält auf jeden Fall wieder eine ganze Zahl k. Wir können also schreiben:

$$a = 2k$$

Eingesetzt in $a^2 = 2 \cdot b^2$ ergibt das:

$$(2k)^2 = 2 \cdot b^2$$

$$4 \cdot k^2 = 2 \cdot b^2$$

Wir dividieren beide Seiten durch 2:

$$2 \cdot k^2 = b^2$$

Dies bedeutet, dass b^2 und damit auch b eine gerade Zahl ist (gleiche Argumentation wie oben). Wenn jedoch a und b gerade Zahlen sind, so ergibt sich hier ein **Widerspruch** zur Voraussetzung, dass a und b teilerfremde Zahlen sind und der Bruch vollständig gekürzt war.

Somit war unsere Annahme falsch! $\sqrt{2}$ **lässt sich nicht als Bruch darstellen**, und ist deshalb keine rationale Zahl, (sondern eine sogenannte **irrationale** Zahl).

$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots$ (wird nie periodisch!)

[1] *Widerspruch-Beweis*, oder auch *indirekter Beweis* genannt: Man nimmt das Gegenteil der Behauptung als gültig an, und leitet daraus einen Widerspruch her. Folglich muss die Behauptung wahr sein.

6.2 Beweis der Unendlichkeit der Primzahlfolge [1]

Behauptung:
Es gibt unendlich viele Primzahlen und somit gibt es keine «grösste Primzahl».

Beweis (durch Widerspruch):
Angenommen es gäbe eine grösste Primzahl P, dann bildet man die natürliche Zahl N

$$N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots P) + 1,$$

die das um 1 vermehrte Produkt sämtlicher Primzahlen einschliesslich P ist.

Wir betrachten die Primfaktorzerlegung dieser Zahl N:
Die Zahl N ist durch keine der Primzahlen bis P teilbar, da sie bei jeder Teilung den Rest 1 lässt.

Also ist N

1) entweder selbst Primzahl

oder

2) hat Primzahlen als Teiler, die in der Folge 2, 3, ..., P nicht auftreten.

Beides steht aber im Widerspruch zu der Annahme, P sei die grösste Primzahl.
Also ist die Folge der Primzahlen unendlich!

Die bisher grösste bekannte Primzahl (Stand: April 2009) lautet $2^{42'643'801} - 1$, eine Zahl mit 12'837'064 Stellen! Unser Beweis stellt jedoch sicher, dass noch grössere Primzahlen existieren!

6.2.1 Exkurs über Primzahlzusammenhänge

6.2.1.1 Primzahlzwillinge

Primzahlzwillinge nennt man zwei Primzahlen, die die Differenz zwei haben.

Beispiele: {5; 7} {17; 19} {41; 43} Bis heute ist unklar, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt!

6.2.1.2 Die Goldbachsche Vermutung [2]

Jede gerade natürliche Zahl (ausser 2) ergibt sich als Summe von zwei Primzahlen.

Beispiele: 4=2+2, 6=3+3, 8=5+3, 10=7+3, 12=7+5, etc.

Dies ist die bisher ebenfalls noch unbewiesene Goldbachsche Vermutung.

---

[1] Dieser Beweis geht auf den griechischen Mathematiker Euklid zurück. Euklid, geboren um 365 v. Chr., gestorben um 300 v. Chr. Grosse Primzahlen spielen für moderne Verschlüsselungsmethoden etwa im Internet eine wichtige Rolle.

[2] Sie sehen: In der Mathematik sind noch lange nicht alle Fragen geklärt. Die Vermutung ist zwar leicht zu verstehen, deren Beweis hat bis heute jedoch noch keiner erbracht (trotz gelegentlichem Preisausschreiben bis zur 1 Million Dollar.)