Vorkurs Grundlagen Mathematik
Algebra III & Folgen

Dr. Sandra König

Universität Zürich

09.09.2020

Inhalt

Logarithmen I

Um die Multiplikation von grossen Zahlen zu umgehen wurden früher Tabellen wie diese verwendet:

$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	$\cdots$
$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$

Während in der oberen Zeile multipliziert wird, wird unten addiert. Solche Tabellen wurden zuerst von J. Napier (1614), H. Briggs (1624) und J. Brgi (1620) berechnet und als "Logarithmus"–Tabellen bezeichnet (griechisch sinngemäss "Beziehung zwischen Zahlen").

Definition

Eine auf $(0, \infty)$ definierte Funktion $\ell(x)$ heisst *logarithmische Funktion*, falls für alle x, y gilt

$$\ell(x \cdot y) = \ell(x) + \ell(y).$$

Logarithmen II

Proposition

Ist $\ell(x)$ eine logarithmische Funktion, so gilt:

- $\ell\left(\frac{z}{x}\right) = \ell(z) - \ell(x)$
- $\ell\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n} \cdot \ell(x)$ *(Potenzregel)*
- $\ell(1) = 0$ *und* $x = 1$ *ist die einzige Nullstelle*

Die erste Eigenschaft kann man zeigen, indem man z.B. $y = \frac{z}{x}$ in die Definition einsetzt:

$$\ell(z) = \ell\left(x \cdot \frac{z}{x}\right) = \ell(x) + \ell\left(\frac{z}{x}\right).$$

und nach $\ell\left(\frac{z}{x}\right)$ auflöst.

Logarithmen III

Gibt es eine Zahl a existiert, so dass $\ell(a) = 1$ ist, dann folgt aus der Potenzregel, dass

$$\ell\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n},$$

die logarithmische Funktion $\ell(x)$ ist also die *Umkehrfunktion* der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$. ℓ heisst dann *Logarithmus zur Basis a*

$$y = \log_a x \qquad \text{falls} \quad x = a^y.$$

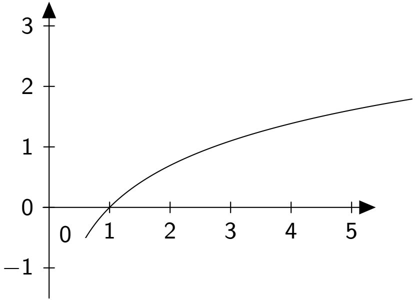
Logarithmen zur Basis 10 sind praktisch für numerische Berechnungen, da das Verschieben des Dezimalkommas einfach eine ganze Zahl zum Logarithmus dazu addiert:

$$\log_{10}(0.1) = -1, \quad \log_{10}(0.01) = -2$$

In der Theorie ist aber die Eulersche Zahl e als Basis vorzuziehen

Logarithmen IV

Der Graph von $\ln(x)$ ist



Berechnung von Flächen I

Problem

Sei a gegeben. Bestimme die Fläche F unter der Kurve $y = x^a$ zwischen $x = 0$ und $x = B$.

Lösung für $a > -1$ (Fermat 1636)
Betrachte einen Wert $\theta < 1$ nahe bei 1 und Rechtecke mit den Höhen B^a, $(\theta B)^a$, $(\theta^2 B)^a$, ... (siehe Abbildung unten).Dann kann die gesuchte Fläche durch die geometrische Reihe approximiert werden:

$$
\begin{aligned}
& \text{1. Rechteck} + \text{2. Rechteck} + \text{3. Rechteck} + \cdots \\
&= B(1-\theta)B^a + B(\theta - \theta^2)\theta^a B^a + B(\theta^2 - \theta^3)\theta^{2a} B^a + \cdots \\
&= B^{a+1} \cdot (1-\theta)(1 + \theta^{a+1} + \theta^{2a+2} + \cdots) \\
&\underset{\text{Binomialtheorem}}{\overset{\text{verallg.}}{=}} B^{a+1} \cdot \frac{1-\theta}{1-\theta^{a+1}},
\end{aligned}
$$

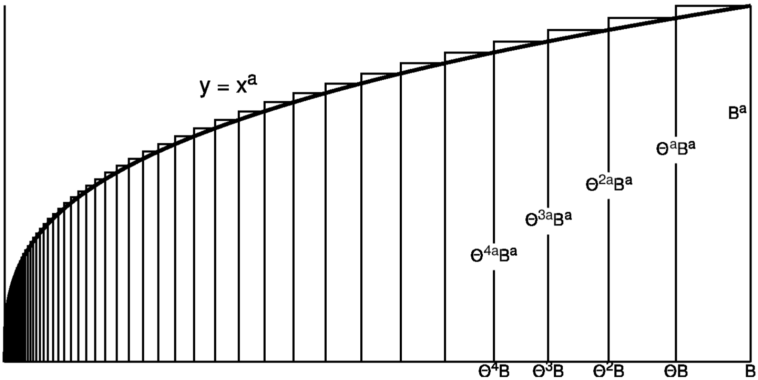


Figure: Die Fläche unter der Kurve x^a mit $a = \frac{1}{3}$.

Berechnung von Flächen III

Setze nun $\theta = 1 - \varepsilon$, wobei ε ganz klein sei. Dann folgt aus dem verallgemeinerten Binomialtheorem, dass

$$\theta^{a+1} = (1-\varepsilon)^{a+1} = 1 - (a+1)\varepsilon + (\ldots)\varepsilon^2,$$

wobei $(\ldots)$ beschränkt ist, solange ε ebenfalls beschränkt ist. Somit gilt

$$\frac{1-\theta}{1-\theta^{a+1}} = \frac{\varepsilon}{(a+1)\varepsilon + (\ldots)\varepsilon^2} = \frac{1}{a+1+(\ldots)\varepsilon} \to \frac{1}{a+1} \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Die Summe dieser Rechtecke approximiert die gesuchte Fläche F von oben. Ersetzen wir die Höhen der Rechtecke durch $(\theta B)^a$, $(\theta^2 B)^a$, $(\theta^3 B)^a$, $\ldots$, erhalten wir eine Approximation von unten. In diesem zweiten Fall wird die Summe der Rechtecke mit θ^a multipliziert, was für $\theta \to 1$ gegen 1 konvergiert.
Somit konvergieren beide Approximationen gegen den gleichen Wert und es folgt:

Berechnung von Flächen IV

Theorem (Fermat 1636)

Sei $a > -1$. Die Fläche unter der Kurve $y = x^a$ begrenzt durch $x = 0$ und $x = B$ ist gegeben durch

$$F = \frac{B^{a+1}}{a+1}.$$

Spezialfall: Fläche unter einer Hyperbel $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$
Fermats Methode kann hier nicht angewandt werden. Aus der *geometrischen* Reihe B, θB, $\theta^2 B$, $\theta^3 B$, $\ldots$ ergibt sich für die Summe der Rechtecke

$$(1-\theta)(1+1+1+\cdots),$$

deren partiellen Summen eine *arithmetische* Reihe bilden. Der Wechsel von Multiplikation zu Addition lässt vermuten: Die Fläche unter der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ ist ein Logarithmus.

Berechnung von Flächen V

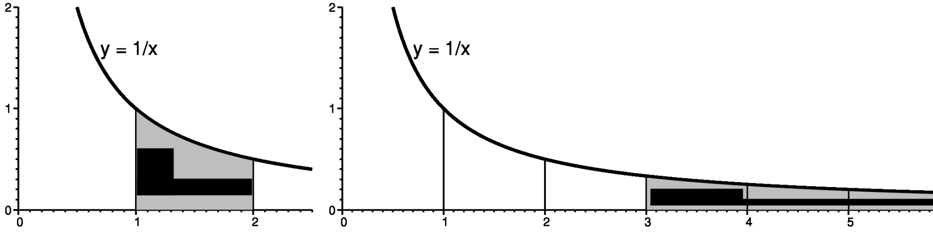


Figure: Die Fläche($1 \to 2$) und die Fläche($3 \to 6$) sind gleich gross.

Durch Zusammenstauchen der x-Achse und Dehnen der y-Achse mit jeweils dem Faktor 3 können wir sehen, dass

$$\text{Fläche}(3 \to 6) = \text{Fläche}(1 \to 2)$$

Somit gilt

$$\text{Fläche}(1 \to 3) + \text{Fläche}(1 \to 2) = \text{Fläche}(1 \to 6).$$

Dies bedeutet, dass die Funktion $\ln(a) = \text{Fläche}(1 \to a)$ folgende Identität erfüllt:

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$$

und somit ein Logarithmus (der *natürliche* Logarithmus) ist.

Theorem

Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ *ist der Logarithmus zur Basis* e.

Folgen & Grenzwerte I

Offene Fragen nach Euler:
Was ist...

- ... eine Ableitung wirklich? Antwort: ein Grenzwert!
- ... ein Integral wirklich? Antwort: ein Grenzwert!
- ... eine unendliche Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ wirklich? Antwort: Ein Grenzwert!
- ... ein Grenzwert wirklich? Antwort: eine Zahl!

Folgen & Grenzwerte II

Definition (Folge)

Eine *(unendliche) Folge* ist eine Abbildung $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto s_n$ und wird bezeichnet mit

$$\{s_n\} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots\}.$$

s_n wird *Folgenglied* genannt und n ist der zugehörige Index.

Eine Folge kann auf mehrere Arten beschrieben werden:

- Auflisten der ersten paar Folgeglieder, z.B. $\{s_n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$
- Durch eine explizite Formel, z.B. $\{s_n\} = (-1)^n$

Folgen & Grenzwerte III

Folgen mit einer speziellen Struktur sind:

Beispiel (Arithmetische Folge)

Bei einer arithmetischen Folge ist die Differenz von zwei aufeinander folgenden Folgenglieder konstant, z.B.

$$\{s_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Beispiel (Geometrische Folge)

Bei einer geometrischen Folge ist der Quotient q von zwei aufeinander folgenden Folgenglieder konstant, z.B.

$$\{s_n\} = \{q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, \ldots\}$$

Folgen & Grenzwerte IV

Was bedeutet nun "eine Folge $\{s_n\}$ hat den Grenzwert s", oder "eine Folge $\{s_n\}$ konvergiert gegen s"?

Definition (D'Alembert 1765, Cauchy 1821)

Eine Folge $\{s_n\}$ *konvergiert*, falls eine Zahl s existiert, so dass

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \geq 1, \quad \text{so dass } \forall\, n \geq N \text{ gilt:} \quad |s_n - s| < \varepsilon.$$

Die Zahl s wird *Grenzwert* von $\{s_n\}$ genannt, und wir schreiben $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ oder auch $s_n \to s$. Man sagt auch, dass $\{s_n\}$ *gegen s konvergiert*. Eine nicht konvergente Folge wird *divergent* genannt.

Bemerkung

In Worten lautet die Definition: Eine Folge $\{s_n\}$ konvergiert gegen s, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|s_n - s| < \varepsilon$.

Folgen & Grenzwerte V

Hilfreich ist hier folgende Identität (Beweis siehe Übungen):

Lemma (Dreiecks-Ungleichung)

Für zwei beliebige Zahlen u und v gilt

$$|u+v| \leq |u| + |v| \text{ und } |u| - |v| \leq |u-v|.$$

Theorem

Eine Folge $\{s_n\}$, welche konvergiert, ist beschränkt, das heisst

$$\exists\, B, \quad \text{so dass} \quad \forall\, n \geq 1 \quad \text{gilt:} \quad |s_n| \leq B.$$

Die Umkehrung gilt nicht:
Die Folge $\{s_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$ ist beschränkt (wähle $B = 1$) aber nicht konvergent.

Folgen & Grenzwerte VI

Für das Konvergenzverhalten der geometrischen Folge gilt:

Lemma

Für die geometrische Folge $\{1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots\}$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \textit{für } |q| < 1, \\ 1 & \textit{für } q = 1, \\ \infty & \textit{für } q > 1. \end{cases}$$

Die Folge divergiert für $q \leq -1$.

Folgen & Grenzwerte VII

Theorem

Seien $s_n \to s$ und $v_n \to v$ zwei konvergente Folgen. Dann konvergieren die Summe, das Produkt und der Quotient der beiden Folgen und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (s_n + v_n) &= s + v \\ \lim_{n\to\infty} (s_n \cdot v_n) &= s \cdot v \\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{s_n}{v_n}\right) &= \frac{s}{v}, \quad \textit{falls } v_n \neq 0 \textit{ für alle } n \textit{ und } v \neq 0. \end{aligned}$$

Beweis siehe Übungen.

Cauchy-Folgen I

Die Definition von Konvergenz hat einen gravierenden Nachteil: Um $|s_n - s|$ zu berechnen, muss der Grenzwert s bekannt sein. Was, wenn s nicht bekannt ist?
Cauchys Idee: betrachte statt $|s - s_n| < \varepsilon$ den Term $|s_n - s_{n+k}| < \varepsilon$ für *alle* Nachfolger s_{n+k} von s_n.

Definition

Eine Folge $\{s_n\}$ heisst *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N \geq 1, \quad \text{so dass } \forall\ n \geq N \text{ und } \forall\ k \geq 1 \text{ gilt: } |s_n - s_{n+k}| < \varepsilon.$$

Cauchy-Folgen II

Beispiel

Die Folge

$$\{s_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

ist eine Cauchy-Folge, da für ein festes $N \geq 1$ für alle $n \geq N$ und $k \geq 1$ gilt

$$|s_n - s_{n+k}| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right| = \left|\frac{k}{n(n+k)}\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Mit der Dreiecks-Ungleichung erhält man

$$|s_n - s_{n+k}| \leq |s_n - s| + |s - s_{n+k}| < 2\varepsilon,$$

woraus folgt, dass eine konvergente Folge eine Cauchy-Folge sein muss.
Es gilt aber auch die umgekehrte Behauptung:

Cauchy-Folgen III

Theorem (Cauchy 1821)

Eine Folge $\{s_n\}$ von reelle Zahlen konvergiert zu einem reellen Grenzwert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Ein formaler Beweis baut auf Eigenschaften von irrationalen und reellen Zahlen auf. Das Theorem ist beispielsweise falsch für rationale Zahlen:

$$\{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \ldots\}$$

ist eine Cauchy-Folge (da $|s_n - s_{n+k}| < 10^{-n+1}$ gilt), aber die Folge konvergiert gegen $\sqrt{2}$, welches keine rationale Zahl ist.