Universität Zürich, 7. - 11. September 2008

Vorkurs Grundlagen für das Mathematikstudium

Übungsblatt 4: Natürliche Zahlen und Reihen

Aufgabe 1 Das Majorantenkriterium für Reihen besagt Folgendes: Sei $0 \leq a_i \leq b_i$ für alle i (gross genug, d.h. für alle $i \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$). Dann gelten

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i \quad \text{konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad \text{konvergiert}$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad \text{divergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty} b_i \quad \text{divergiert}$$

Beweise mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die Reihe

$$e^{10} = 1 + 10 + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \frac{10^4}{4!} + \dots$$

konvergiert.

Aufgabe 2 Gruppiere die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

so um, dass sie gegen den Wert 1.5 konvergiert.

Aufgabe 3 Jeder Mensch hat n anderen Menschen seine Hand geschüttelt. Zeige, dass die Anzahl der Menschen, für die n ungerade ist, gerade ist.

Aufgabe 4 Kann man eine 25-Talernote in insgesamt 10 Noten mit kleinerem Wert wechseln, wenn diese die Werte 1, 3 oder 5 Taler haben?

Aufgabe 5 Eine Heuschrecke springt auf einer Linie. Der erste Sprung ist 1 cm lang, der zweite Sprung 2 cm lang, und so weiter. Jeder Sprung kann entweder vorwärts oder rückwärts gehen. Zeige, dass die Heuschrecke nach 1985 Sprüngen nicht an der gleichen Stelle sein kann wie am Anfang.

Aufgabe 6 a) Beweise, dass $n^3 + 2n$ für jede natürlich Zahl n durch 3 teilbar ist.

b) Beweise, dass $n^5 + 4n$ für jede natürlich Zahl n durch 5 teilbar ist.

c) Beweise, dass $n^2 + 1$ für jede natürlich Zahl n nicht durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 7 a) Wenn p, $p + 10$ und $p + 14$ Primzahlen sind, wie gross ist dann p?

b) Wenn p, $2p+1$ und $4p+1$ Primzahlen sind, wie gross ist dann p?

Aufgabe 8 Wir können reelle Zahlen als Dezimalentwicklung schreiben, also für $x \in [0,1]$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}, \quad x_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Sei nun $g \geq 2$ eine natürliche Zahl. Die g Elemente der Menge $\{0, 1, \ldots, g-1\}$ nennt man g-al Ziffern. Wir betrachten nun eine beliebige Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ mit $x_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$. Beweise, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k g^{-1}$ gegen einen Wert $x \in [0,1]$ konvergiert. Diese Reihe heisst dann g-al Entwicklung von x.
(Bemerkung: Man kann zeigen, dass jede reelle Zahl x eine eindeutige g-al Entwicklung besitzt für jede natürliche Zahl g.)

Aufgabe 9 Eine punktförmige Schnecke kriecht auf einem 1 m langen Gummiband mit einer konstanten Geschwindigkeit von 5 cm/h. Am Ende der ersten und jeder weiteren Stunde wird das ganze Band homogen um jeweils einen Meter gedehnt. Wird die Schnecke in endlicher Zeit das rechte Ende erreichen, wenn sie zu Beginn der ersten Stunde am linken Ende startete?