Mathematik Rechenfertigkeiten

Skript Freitag

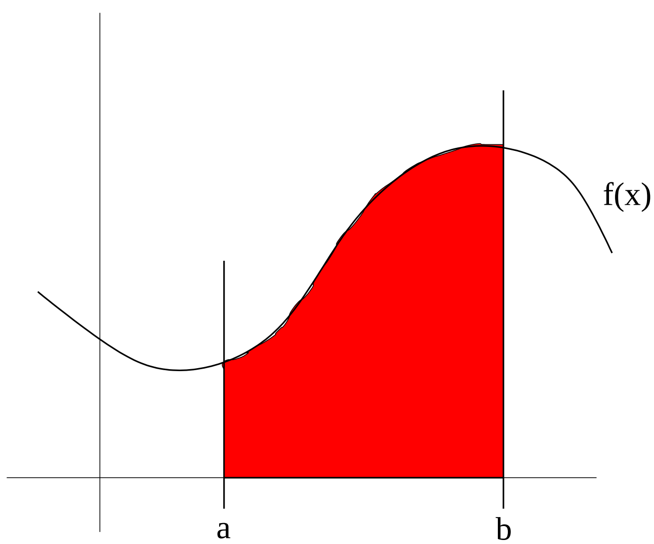
Inhaltsverzeichnis

1 Integralrechnung

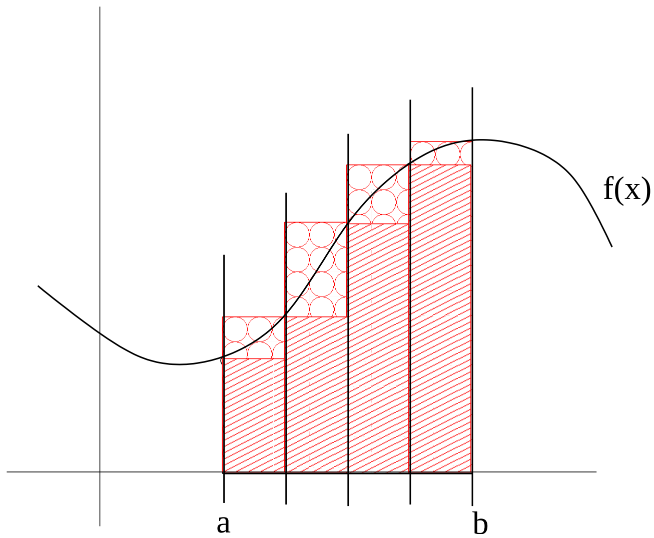
Wir haben in den letzten Tagen bereits die Ableitung, respektive das Differenzieren, kennengelernt. Wir kommen nun zur entgegengesetzten Richtung, der Integralrechnung. Ziel des ersten Teils ist, zu zeigen, dass ein Zusammenhang besteht zwischen dem Ausrechnen des Flächeninhaltes unter dem Graphen einer Funktion f und dem Finden einer Funktion F mit der Eigenschaft $F' = f$, einer sogenannten **Stammfunktion** von f. Im zweiten und dritten Teil werden wir Integrationsregeln und Integrationsmethoden behandeln, welche uns helfen eine gegebene Funktion f zu integrieren. Schliesslich werden wir im vierten und letzten Teil uns noch mit sogenannten uneigentlichen Integralen beschäftigen.

1.1 Definition und Bedeutung

Wir betrachten eine Funktion $f(x)$, welche überall ≥ 0 ist. Wie gross ist die Fläche, welche zwischen dem Graphen der Funktion und der x–Achse sowie den vertikalen Geraden $x = a$ und $x = b$ liegt?



Wir teilen diese Fläche in n Stücke auf, und zwar so, dass wir sie einerseits von unten und andererseits von oben approximieren:



Wir brauchen fogende Bezeichnungen:

Innere Treppenfläche U_n:	Die schraffierte Fläche
Äussere Treppenfläche O_n:	Die schraffierte plus die gekreiselte Fläche

Unterteilen wir nun die Fläche in immer kleinere Stücke, so wird die Approximation immer besser. Anderst gesagt bekommen wir den korrekten Flächeninhalt sobald wir das $n \to \infty$ laufen lassen.

Definition 1. Falls

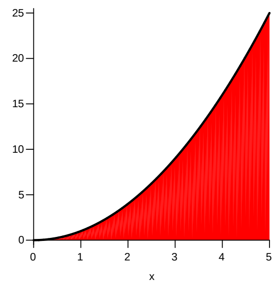
$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n,$$

dann wird dieser Limes als *bestimmtes Integral* bezeichnet, und wir schreiben

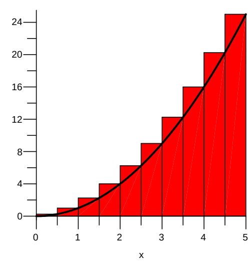
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

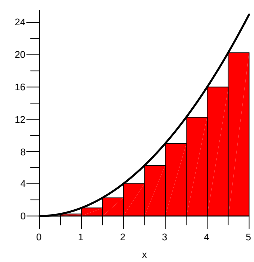
Für eine positive Funktion entspricht also das Integral gerade der Fläche unter der Kurve.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$ und wollen die Fläche von 0 bis zu einer Zahl b berechnen.



Wir unterteilen die Fläche zuerst wieder in n Teile und approximieren sie von oben sowie von unten.





Wir werden folgende Formel benutzen: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Wir erhalten für die äussere Treppenfläche

$$
\begin{aligned}
O_n &= \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{3b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{nb}{n}\right)^2 \\
&= \frac{b}{n} \cdot \left(\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \left(\frac{3b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{nb}{n}\right)^2\right) \\
&= \frac{b^3}{n^3} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) \\
&= \frac{b^3}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{b^3}{n^3} \left(\frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{b^3}{n^3} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n)}{6}\right) = b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)
\end{aligned}
$$

also

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{b^3}{3}.$$

Auf die gleiche Art und Weise erhalten wir für die innere Treppenfläche

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{b}{n}\cdot 0^2 + \frac{b}{n}\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n}\cdot\left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n}\cdot\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3}\cdot\left(0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right) \\ &= \frac{b^3}{n^3}\cdot\left(\frac{(n-1)\,n\,(2(n-1)+1)}{6}\right) = b^3\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) \end{aligned}$$

und für den Limes

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} b^3\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) = \frac{b^3}{3}.$$

Die zwei Grenzwerte stimmen überein, und somit erhalten wir

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}.$$

Allgemein bekommen wir sogar

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

1.2 Unbestimmtes Integral

Eine Funktion $F(x)$ heisst *Stammfunktion* der Funktion $f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$.

Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann bezeichnet man

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

als *unbestimmtes Integral*. Dabei ist $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

Es reicht aus, die Integrale von ein paar wichtigen Funktionen zu kennen, um integrieren zu können. Zusammen mit den Eigenschaften der Integration sowie wie mit den Methoden

- partiellen Integration (Kapitel 1.4)
- Substitution (Kaptiel 1.5)

können wir fast alle Integrale berechnen.

Darum gleich zu Beginn, die wichtigsten Funktionen integriert (überprüfen durch Ableiten):

1. $\displaystyle\int x\ dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
2. $\displaystyle\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1}\ x^{n+1} + C, \qquad$ wobei $n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
3. $\displaystyle\int e^x\ dx = e^x + C$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \ln(x) + C$
5. $\displaystyle\int \sin(x)\ dx = -\cos(x) + C$
6. $\displaystyle\int \cos(x)\ dx = \sin(x) + C$

Da konstante Zahlen abgeleitet 0 ergeben, setzten wir nach der Integration immer eine Konstante C dazu, damit wir den möglichst allgemeinen Fall erhalten. Diese Konstante wird *Integrationskonstante* genannt.

Eigenschaften:

- $$\int c \cdot f(x)\ dx = c \cdot \int f(x)\ dx \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}$$

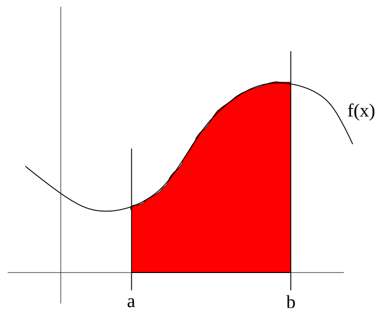
- $$\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

1.3 Bestimmtes Integral

Wir haben gesehen, dass das *bestimmte Integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse zwischen den *Integrationsgrenzen* a und b angibt. Im Unterschied zum unbestimmten Integral ist es eine Zahl, keine Funktion.



Zusätzliche Eigenschaften:

- Für $a \leq c \leq b$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

- Vertauschen der Integrationsgrenzen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Nun wollen wir aber das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnen. Das wird mit Hilfe der Stammfunktion $F(x)$ gemacht und zwar nach dem *Hauptsatz der Integralrechnung:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

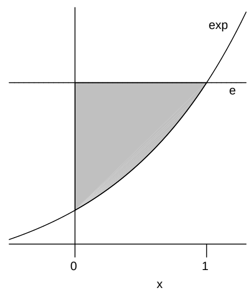
und wir schreiben auch

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.}$$

Beispiel.

- $\int\limits_3^5 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_3^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{3^4}{4} = \frac{544}{4} = 136$

- Gesucht ist die Fläche, die zwischen der y-Achse, dem Graphen von e^x und der konstanten Funktion $y = e$ eingeschlossen ist.

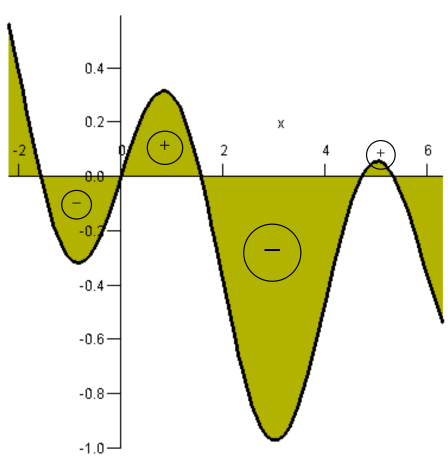


Der Schnittpunkt von e und e^x liegt bei 1, daher sind 0 und 1 die Integrationsgrenzen.

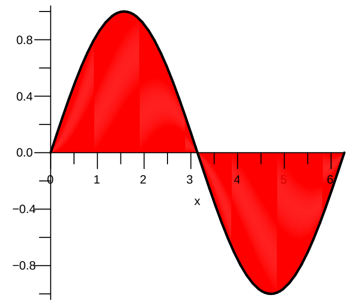
$$\int_0^1 (e - e^x)\, dx = \Big[ex - e^x\Big]_0^1 = e - e - (-1) = 1$$

Bis jetzt haben wir immer Funktionen $f \geq 0$ betrachtet. Was passiert mit dem Flächeninhalt, wenn die Funktion negativ wird?

Flächen unterhalb der x–Achse werden als negativ betrachtet.



Beispiel. Wir wollen die Fläche zwischen dem Graphen von $\sin(x)$ und der x–Achse zwischen 0 und 2π berechnen:



Dies entspricht dem Integral

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\, dx.$$

Wir teilen die Funktion in die positiven und in die negativen Teile auf:

$$\sin(x) \begin{cases} \geq 0, & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi \\ \leq 0, & \text{falls } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

und erhalten somit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin(x)|\, dx &= \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin(x))\, dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} + \cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) + \cos(2\pi) - \cos(\pi)) = -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4. \end{aligned}$$

1.4 Partielle Integration

Die Partielle Integration entspricht der Produktregel der Differentiation, darum erinnern wir uns zuerst an die Produktregel der Differentiation:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

respektive etwas umgeformt

$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g.$$

Durch integrieren auf beiden Seiten, erhalten wir

$$\int f \cdot g' \, dx = \int (f \cdot g)' \, dx - \int f' \cdot g \, dx$$

Da $\int h' \, dx = h$ für jede Funktion h, entspricht dies

$$\boxed{\int f \cdot g'(x) \; dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \; dx}$$

Dies nennt man die partielle Integration. Die zu integrierende Funktion muss also ausgedrückt werden können als Produkt zweier Funktionen $f(x) \cdot g'(x)$. Diese Regel gilt sowohl für unbestimmte als auch für bestimmte Integrale.

Beispiel.

- Um $\int x \cos(x) \; dx$ zu bestimmen, wählen wir die Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x & g'(x) &= \cos(x) \\ f'(x) &= 1 & g(x) &= \sin(x) \end{aligned}$$

  Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int x \cos(x) \; dx = \int f(x) g'(x) \; dx &= f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \; dx \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x) \; dx = x \sin(x) + \cos(x) + C. \end{aligned}$$

  Zur Kontrolle, dass es auch die richtige Stammfunktion ist, kann man die Stammfunktion ableiten:

$$\begin{aligned} (x \sin(x) + \cos(x) + C)' &= 1 \cdot \sin(x) + x \cos(x) - \sin(x) + 0 \\ &= x \cos(x), \end{aligned}$$

  was der ursprünglichen Funktion entspricht. Wir haben also richtig integriert!

- Für $\int\limits_1^{e^2} \ln(x)\,dx$ betrachten wir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) & g'(x) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} & g(x) &= x \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \int\limits_1^{e^2} \ln(x)\,dx = \int\limits_1^{e^2} 1 \cdot \ln(x)\,dx &= x\ln(x)\Big|_1^{e^2} - \int\limits_1^{e^2} \frac{1}{x}\,x\,dx \\ &= e^2\ln(e^2) - 1 \cdot \ln(1) - x\Big|_1^{e^2} \\ &= e^2 \cdot 2 - \ln(1) - e^2 + 1 \\ &= e^2 + 1. \end{aligned}$$

1.5 Integration durch Substitution

Wenn die zu integrierende Funktion von der Form $f(g(x))g'(x)$ ist, das heisst, das Integral hat folgende Form

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx$$

dann können wir die Funktion $g(x)$ durch eine Variable u ersetzten und danach über u integrieren. Nicht immer ist diese Form einfach abzulesen. Vermuten wir, dass wir Substitution anwenden können, probieren wirs einfach aus, und zwar wie folgt:

(i) Suche eine Funktion, welche wir ersetzten wollen: $u = g(x)$.

(ii) Leite u nach x ab: $\frac{du}{dx} = g'(x)$.

(iii) Löse diese Gleichung nach dx auf: $dx = \frac{du}{g'(x)}$.

(iv) Ersetzte im Integral $g(x)$ durch u und dx durch $\frac{du}{g'(x)}$. Falls es ein bestimmtes Integral ist und Integrationsgrenzen a und b vorkommen, werden diese ersetzt durch $u(a)$ und $u(b)$.

$$\begin{aligned} g(x) &\leftrightarrow u \\ dx &\leftrightarrow \frac{du}{g'(x)} \\ \text{Integrationsgrenzen } a, b &\leftrightarrow u(a), u(b) \end{aligned}$$

(v) Das $g'(x)$ sollte sich nun rauskürzen, so dass im Integral kein x mehr vorkommt. Passiert das nicht, können wir nicht Substitution anwenden oder müssen eine andere Substitution vornehmen. Sonst weiter zum nächsten Schritt.

(vi) Es gilt nun:

$$\boxed{\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x)\ dx &= \int f(u)du \\ \text{respektive } \int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx &= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du \end{aligned}}$$

Das neue Integral entspricht also dem alten Integral.

(vii) Beim unbestimmten Integral müssen wir wieder $g(x)$ für u einsetzen um die Lösung zu bekommen.

Bemerkung. Anstatt das bestimmte Integral mit Integrationsgrenzen direkt zu lösen, kann das Integral auch zuerst nur unbestimmt, das heisst ohne Integrationsgrenzen, betracht werden. Dann müssen nach dem Lösen des Integrals und der Rücksubstitution (u durch $g(x)$ ersetzen) noch die Integrationsgrenzen eingesetzt werden.

Beispiel.

- Wir wollen das Integral $\int xe^{x^2}\,dx$ lösen und setzen dafür $u(x) = x^2$. Es folgt, dass

  $$\frac{du}{dx} = 2x, \qquad \text{und somit} \qquad dx = \frac{du}{2x}.$$

  Wir erhalten somit

  $$\begin{aligned} \int xe^{x^2}\,dx &= \int xe^u \,\frac{du}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\int e^u\,du \\ &= \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C. \end{aligned}$$

- Nun ein bestimmtes Integral. Wir berechnen $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$:

  Wir setzen $u = x + 1$ und erhalten $\frac{du}{dx} = 1$, also $du = dx$.

  $$\begin{aligned} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int\limits_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du \\ &= \int\limits_1^2 u^{-\frac{1}{2}}\,du = 2\,u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^2 = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

Bemerkung. *Vergleich Partielle Integration $\leftrightarrow$ Substitution:*

Wann benutzen wir partielle Integration, wann die Substitution? Grundsätzlich können wir drei Punkte festhalten.

1. Finden wir im Integral eine Funktion einer Funktion? Also sowas wie $f(g(x))$?
   $\longrightarrow$ Substitution (d.h. $g(x)$ ersetzen)

2. Werden im Integral zwei Funktionen multipliziert, es kommen aber keine Funktionen in Funktionen vor? $\longrightarrow$ Partielle Integration

3. Ist das Integral nach Anwendung einer der Methode komplizierter als vor dem integrieren, dann wurde entweder die falsche Methode gewählt, oder es muss etwas anderes substituiert oder die partielle Integration anders angewendet werden.

Es braucht etwas Intuition um jeweils die richtige Methode richtig auszuwählen... mit etwas Übung klappt das aber schon. Einfach nicht aufgeben und ausprobieren.

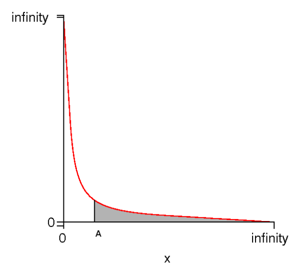
Beispiel. Wann soll welche Methode wie angewendet werden? Ein paar Beispiele:

Funktion	Methode	Was wird wie ersetzt?
$(3x^2-5)^6$		
$\sin(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6})$		
$t \cdot \cos(t)$		
$e^y \cos(y)$		
a^{5x}		
$\ln(x)$		
$\ln\left(\frac{1}{8-3x}\right)$		
$\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$		
$x^2 \cos(x)$		

1.6 Uneigentliche Integrale

Fragestellung: Kann man eine nicht beschränkte Fläche berechnen? Was passiert, wenn die Integrationsgrenzen unendlich oder Polstellen der Funktion sind?

Fall 1: Kann man die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ auf dem Intervall $[A, \infty[$ messen?



Wenn

$$\lim_{N\to\infty} \int_A^N f(x)\, dx$$

existiert, dann nennt man dies ein *uneigentliches Integral* und schreibt:

$$\boxed{\int_A^\infty f(x)\, dx}$$

Beispiel.

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty x \cdot e^{-x}\, dx.$$

Wir lösen das Integral $\int_0^N xe^{-x}\, dx$ mit partieller Integration:

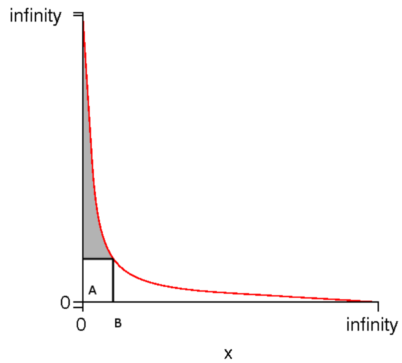
$$f(x) = x \qquad g'(x) = e^{-x}$$
$$f'(x) = 1 \qquad g(x) = -e^{-x}$$

$$\int_0^N xe^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_0^N + \int_0^N e^{-x}\, dx = -Ne^{-N} - e^{-N} - (-e^{-0}) = -e^{-N}(N+1) + 1$$

Wegen $\lim_{N\to\infty} (-e^{-N}(N+1)) \to 0$ existiert der Grenzwert und es gilt:

$$\int_0^\infty xe^{-x}\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^N xe^{-x}\, dx = 1.$$

Fall 2: Kann man die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ auf einem Intervall messen, welches eine Polstelle bei A beinhaltet?



Analog zum ersten Fall: Wenn

$$\lim_{\alpha \to A} \int_{\alpha}^{B} f(x)\, dx$$

existiert, dann existiert das uneigentliche Integral:

$$\boxed{\int_{A}^{B} f(x)\, dx}$$

Beispiel. Betrachte $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\, dx$. Da

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)\Big|_{\varepsilon}^{1} = \ln(1) - \ln(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon) \to \infty \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0$$

folgt $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ existiert nicht.

Beispiel. Betrachte $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$. Da

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

und $\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon} = 0$, folgt $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$ existiert.