Vorkurs UZH 2008

Mathematik Rechenfertigkeiten

Skript Donnerstag

Irmgard Bühler, Mathematik Institut, Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190, 4057 Zürich

14.August 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Kurvendiskussion

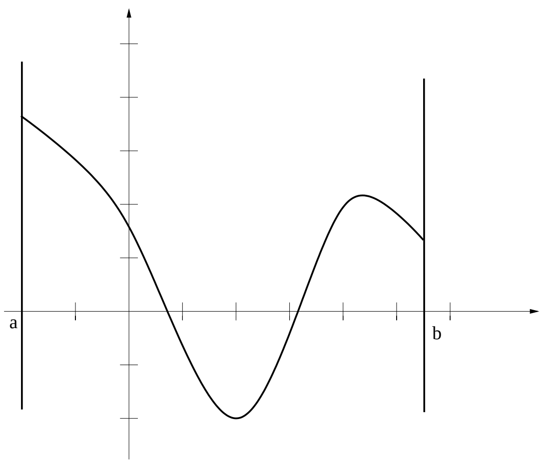
Wie sieht die Kurve einer gegebenen Funktion $f(x)$ aus? Um eine Funktion aufzeichnen zu können, hilft es,

1. die Nullstellen der Funktion sowie
2. die Minima und Maxima der Funktion

zu kennen. Wir wissen bereits, dass die Nullstellen bestimmt werden, indem die Funktion gleich Null gesetzt wird

$$f(x) = 0$$

und dann nach x aufgelöst wird. Wie sieht es aber mit den Minima, respektive den Maxima aus? Wir betrachten die folgende Funktion f mit Definitionsbereich $[a, b]$:



Wo liegen die Maxima und Minima? Gibt es unterschiedliche Typen von Maxima resp. Minima?

Definition. Die Funktion $f(x) : D \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_{max} \in D$ ein *absolutes Maximum*, falls gilt

$$f(x_{max}) \geq f(x) \qquad \text{für alle } x \in D$$

und ein *absolutes Minimum* in $x_{min} \in D$, falls

$$f(x_{min}) \leq f(x) \qquad \text{für alle } x \in D.$$

Weiter hat die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_{max} ein *lokales Maximum*, falls ein beliebig kleines Intervall I um x_{max} herum existiert (also $x_{max} \in I$), so dass

$$f(x_{max}) \geq f(x) \qquad \text{für alle } x \text{ im Intervall } I$$

respektive ein *lokales Minimum* $x_{min} \in I$, falls

$$f(x_{min}) \leq f(x) \qquad \text{für alle } x \text{ im Intervall } I.$$

Zusammengefasst:

absolutes Maximum x_{max}	:	$f(x_{max})$	$\geq$	$f(x)$	für alle $x \in D$
absolutes Minimum x_{min}	:	$f(x_{min})$	$\leq$	$f(x)$	für alle $x \in D$
lokales Maximum x_{max}	:	$f(x_{max})$	$>$	$f(x)$	für alle $x \in I$
lokales Minimum x_{min}	:	$f(x_{min})$	$<$	$f(x)$	für alle $x \in I$

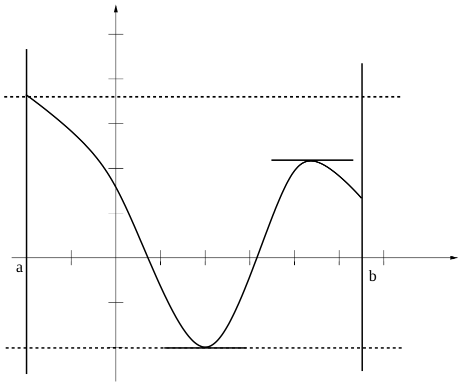
Minima und Maxima werden zusammen auch als *Extrema* oder *Extremalwerte* bezeichnet.

Bemerkung. Manchmal werden die lokalen Extrema auch *relative* Extrema genannt.

Satz 1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$. Dann kann f nur Extremalwerte haben*

1. *an den Randpunkten a und b und*
2. *falls $f'(x) = 0$.*

Um dies einzusehen, betrachten wir die folgende Funktion



Die Randpunkte müssen immer extra betrachtet werden, da sie immer Extremalwerte sind. In diesem Fall ist a ein absolutes Maximum, während b ein lokales Minimum ist.

Wenden wir uns nun den Punkten innerhalb des Intervalls (a, b) zu, wobei wir uns im Moment nicht darauf konzentrieren, ob es sich um lokale oder um absolute Extrema handelt.

Wir sehen, dass bei den Extrema die Steigung der Funktion gleich Null ist. Da die Steigung der ersten Ableitung entspricht, bedeutet dies

$$x_e \text{ Extrema der Funktion f(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x_e) = 0.$$

Wie bestimmen wir nun aber, ob x_e ein Maximum oder ein Minimum ist? Betrachten wir nochmals unsere Funktion von oben:

Wir laufen nun von links nach rechts der Funktion entlang. Am Anfang ist die Steigung negativ, wir müssen den Berg hinunter laufen. Unten angekommen ist sie kurz gleich Null und danach wird sie positiv, wir laufen den Berg hinauf. Die Steigung wechselt somit von negativ zu positiv. Die Steigung entspricht aber der ersten Ableitung der Funktion. Dies bedeutet, dass die Ableitung immer grösser wird, sie also selbst eine positive Steigung hat. Die Ableitung der ersten Ableitung entspricht der zweiten Ableitung. Diese muss also positiv sein.

Beim Maximum ist die Situation gerade umgekehrt. Zuerst laufen wir den Berg hinauf zum Maximum, das heisst die erste Ableitung ist positiv. Danach gehts den Berg hinunter, also wird

die erste Ableitung negativ. Da die erste Ableitung also immer kleiner wird, muss die zweite Ableitung negativ sein.
Sei x_e ein Extrema der Funktion $f(x)$, also $f(x_e)' = 0$. Wir erhalten folgendes:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f''(x_e) > 0 & \Rightarrow & x_e \text{ ist ein Minimum} \\ f''(x_e) < 0 & \Rightarrow & x_e \text{ ist ein Maximum} \end{array}}$$

Falls $f''(x_e) = 0$ gilt, können wir keine definitive Aussage machen, ohne dass wir noch weitere Ableitungen berechnen würden. Es ist sowohl möglich, dass x_e ein Maximum oder ein Minimum ist, aber auch, dass keines von beiden der Fall ist und bei x_e ein sogenannter Sattelpunkt vorkommt. Wir werden diesen Fall nicht weiter betrachten.

Wollen wir nun noch bestimmen, ob es sich um ein absolutes oder ein lokales Extrema handelt, müssen wir die oben berechneten Extremalwerte im Intervall (a, b) berechnen und diese zusammen und mit den Funktionswerten $f(a)$ sowie $f(b)$ vergleichen, um zu bestimmen, welcher von diesen Werten am grössten, respektive am kleinsten ist. Es kann auch mehrere absolute Extrema haben, falls die Werte übereinstimmen.

Wir gehen also wie folgt vor, um die Extrema von f zu finden:

1. Berechne zunächst $f(a)$ und $f(b)$.

2. Berechne die Nullstellen x_e der Ableitung f' in (a, b).

3. Berechne die zweite Ableitung $f''(x)$ und setze jede Nullstelle x_e von f' in f'' ein. Durch vergleichen von $f''(x_e)$ mit 0 erfahren wir, ob f in x_e ein Minimum oder ein Maximum hat, oder ob keines von beidem der Fall ist.

4. Vergleiche alle gefundenen Maxima und Minima in (a, b) miteinander sowie mit den Werten $f(a)$ und $f(b)$ um zu entscheiden, welche Extrema nur lokal sind und welche absolut.

Beispiel. Bestimme die Extremalwerte der Funktion $f(x) = x^3(x-1)^2$ im Intervall $[-1, 2]$.

1. $f(-1) = -4 \quad$ und $\quad f(2) = 8$.

2. Erste Ableitung f':

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(x-1)^2 + x^3 \cdot 2(x-1) \\ &= x^2(3(x-1)^2 + 2x(x-1)) \\ &= x^2(x-1)(3(x-1) + 2x) \\ &= x^2(x-1)(5x-3); \end{aligned}$$

also sind $0, \frac{3}{5}$ und 1 Nullstellen von f'. Diese liegen alle im Interval $(-1, 2)$.

3. Zweite Ableitung $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x(x-1) + x^2)(5x-3) + x^2(x-1)5 \\ &= (2x^2 - 2x + x^2)(5x-3) + 5x^3 - 5x^2 \\ &= (3x^2 - 2x)(5x-3) + 5x^3 - 5x^2 \\ &= 15x^3 - 19x^2 + 6x + 5x^3 - 5x^2 \\ &= 20x^3 - 24x^2 + 6x \end{aligned}$$

Somit gilt

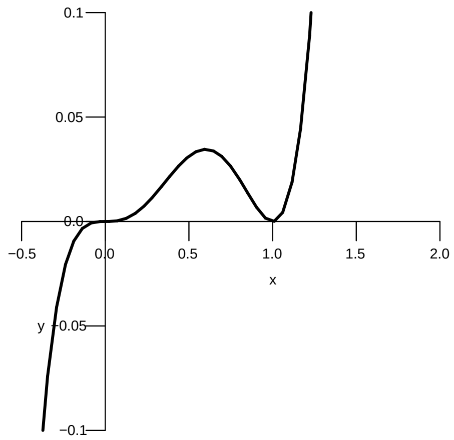
$$\begin{aligned} f''(0) &= 0 \\ f''\left(\frac{3}{5}\right) &= 20 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 - 24 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{5^3} \cdot (20 \cdot 27 - 24 \cdot 9 \cdot 5 + 6 \cdot 3 \cdot 25) = -\frac{90}{125} < 0 \\ f''(1) &= 20 - 24 + 6 = 2 > 0 \end{aligned}$$

Also hat f in $\frac{3}{5}$ ein Maximum und in 1 ein Minimum. Was ist nun bei 0? Wir betrachten die Funktion f links und rechts von der Null. Sei ϵ eine ganz klein Zahl > 0. Dann gilt:

$$f(-\epsilon) < 0; \qquad f(\epsilon) > 0$$

Also hat f *keinen* Extremwert in 0 (sondern einen Sattelpunkt).

4. Vergleichen wir die gefundenen Extremalwerte in $(-1, 2)$ mit $f(-1)$ und $f(2)$, so sehen wir, dass diese nur lokale Extrema sind, während $f(-1)$ und $f(2)$ absolute Extrema sind.



Die Funktion $f(x) = x^3(x-1)^2$

Beispiel. Finde die Extremalwerte der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

auf ganz $\mathbb{R}$.

1. Da wir die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ betrachten, haben wir keine Funktionsgrenzen wo Extrema auftreten können.

2. Erste Ableitung $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= \frac{1-x}{e^x} \end{aligned}$$

   Somit hat f' nur an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle.

3. Zweite Ableitung $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= \frac{-1-(1-x)}{e^x} = \frac{x-2}{e^x} \end{aligned}$$

   Somit ist $f''(1) = -\frac{1}{e^1} < 0$ und somit hat die Funktion in 1 ein Maximum.

4. Die Funktion f hat in 1 ein absolutes Maximum.

2 Optimieren

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, wie man die Extremalwerte einer reellen Funktion berechnet. Was das überhaupt nützt, wurde aber noch nicht so klar. Dieser Abschnitt ist deshalb den sogenannten *Optimierungsproblemen* gewidmet, deren Lösungen oft durch Ableiten der zu optimierenden Funktionen gefunden werden. Es wird hier also keine neue Theorie entwickelt, sondern nur an praktischen Beispielen gezeigt, was es bringt, Extremalwerte von Funktionen ausrechnen zu können. Ein klassisches Problem ist das Folgende.

Beispiel. Eine Firma kauft von einem Produkt jeweils eine Menge x ein. Das Produkt wird dann kontinuierlich an die Kunden weiterverkauft, bis alles weg ist; erst dann wird die nächste Menge x eingekauft. Die Nachfrage nach diesem Produkt beträgt $N > 0$ pro Tag. Die Firma hat zwei Arten von Kosten zu beachten:

1. Es gibt Lagerungskosten pro Tag, die proportional zu x sind (also gleich Lx für ein gewisses $L \geq 0$).
2. Es gibt bei jedem Einkauf Einkaufskosten $E \geq 0$, die unabhängig sind von der Menge x.

Stellen wir zuerst einmal alle genannten Variablen zusammen:

Einkaufsmenge	x
Nachfrage pro Tag	N
Lagerungskosten pro Tag	Lx
Einkaufskosten pro Einkauf	E

Wenn man viel auf einmal einkauft (d.h. wenn man x gross wählt), so hat man wenig Einkaufskosten pro Tag, aber grosse Lagerungskosten; kauft man jeweils wenig auf einmal ein, so hat man kleine Lagerungskosten aber hohe Einkaufskosten. Wie gross muss die Firma x wählen, damit möglichst wenig Kosten pro Tag entstehen?

Wie bei allen Optimieringsproblemen, gibt es hier eine *Zielfunktion*, die Kosten K pro Tag, deren Minima/Maxima gefunden werden müssen. Dies unter gewissen Bedingungen für das Argument (hier $x > 0$).

Wie sieht unsere Funktion K denn überhaupt aus?

Nun, erstens hat man pro Tag Lx Lagerungskosten. Weiter kauft man alle $\frac{x}{N}$ Tage ein, und das kostet jeweils E, also sind die Einkaufskosten pro Tag genau

$$\frac{E}{\frac{x}{N}} = \frac{EN}{x}.$$

Die Kostenfunktion ist also

$$K(x) = Lx + \frac{EN}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Um die Minima dieser Funktion zu bestimmen, bemerken wir, dass K differenzierbar ist mit Ableitung

$$K'(x) = L - \frac{EN}{x^2}.$$

Nun wissen wir aus dem Satz, dass K auf $(0, \infty)$ genau dort ein Minimum hat, wo K' eine Nullstelle besitzt (es gibt keine Randwerte). Die einzige Nullstelle von K' in $(0, \infty)$ ist

$$x_e = \sqrt{\frac{EN}{L}}.$$

Weiter berechnen wir die zweite Ableitung um sicher zu gehen, dass es auch wirklich ein Minimum ist:

$$K''(x) = -\frac{EN}{x^3} \cdot (-2) = \frac{2EN}{x^3}$$

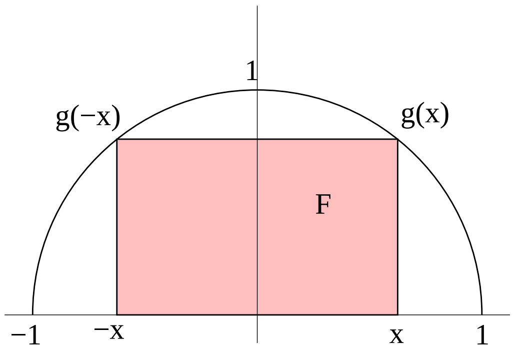
und somit

$$K''(\sqrt{\frac{EN}{L}}) = \frac{2EN}{(\frac{EN}{L})^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

da E, N und L positiv sind. Somit haben wir in x_e tatsächlich ein Minimum. Man sollte also jeweils eine Menge von $\sqrt{\frac{EN}{L}}$ einkaufen, um die Kosten zu minimieren.

Beispiel. Gegeben ist ein Halbkreis C mit Radius 1. Was ist die maximale Fläche eines Rechtecks, das ganz in C liegt und eine Seite auf dem Durchmesser von C hat?

Wir versuchen, das Problem auf ein Optimierungsproblem der oben stehenden Art zurückzuführen. Sei C der Halbkreis begrenzt durch den Graph der Funktion $g : x \mapsto \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1]$, und der x-Achse. Betrachte ein Rechteck R in C, dessen eine Seite auf der x-Achse liegt und dessen andere Punkte gerade den Kreis berühren (sonst ist die Fläche des Rechtecks nicht maximal).



Es ist einfach einzusehen, dass auf der x–Achse der Abstand von den Eckpunkten des Rechtecks zum Nullpunkt, rechts und links vom Nullpunkt übereinstimmen müssen, sonst ist die Fläche des Rechtecks erneut nicht maximal. Somit sind die Eckpunkte des Rechtecks $(x,0),(-x,0)$ sowie $(x,g(x))$ und $(-x,g(-x))$.

Die Fläche des zu x gehörenden Rechtecks ist gleich

$$F(x) := 2x \cdot g(x) = 2x\sqrt{1-x^2}, \quad \text{mit } x \in [0,1].$$

Wir müssen also das Maximum von F auf $[0,1]$ bestimmen. Nun ist F differenzierbar auf $(0,1)$ mit Ableitung

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot (-2x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-x^2) = 2 \cdot \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Setzen wir $F'(x) = 0$, so erhalten wir

$$2 \cdot \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}.$$

Die einzige Nullstelle von F' in $(0,1)$ ist somit $x_e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Berechnen wir nun noch die zweite Ableitung

$$\begin{aligned}
F''(x) &= 2 \cdot (-4x) \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 2(1-2x^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) \\
&= \frac{-8x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x(1-2x^2)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(-8x + \frac{2x-4x^3}{1-x^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{-8x+8x^3+2x-4x^3}{1-x^2}\right) \\
&= \frac{4x^3-6x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x(4x^2-6)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$F''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (4 \cdot \frac{1}{2} - 6)}{(1-\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}} < 0$$

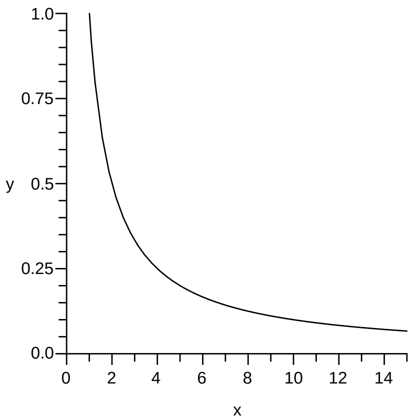
und somit hat F in $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein Maximum der Grösse

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

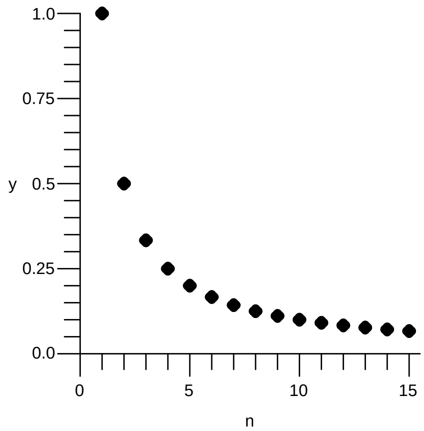
Ein Vergleich mit den Werten $F(0) = 0$ und $F(1) = 0$ zeigt, dass dieses Maximum absolut ist.

3 Folgen und Reihen

Folgen und Reihen (vor allem geometrische Reihen) sind sehr wichtig. Sie sind im Grunde genommen auch nur Funktionen, aber im Gegensatz zu den bisher betrachteten sind sie diskret.



Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$



Folge $a_n = \frac{1}{n}$

3.1 Folgen

Definition 1. Eine *Folge* reeller Zahlen ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n, \end{aligned}$$

so dass jeder Zahl n eine reelle Zahl a_n zugeordnet wird. Man schreibt hierfür $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ oder $(a_0, a_1, \ldots)$.

Bemerkung. Manchmal fängt die Folge auch erst bei a_1 statt a_0 an, oder bei einem beliebigen anderen Startpunkt.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist also zum Beispiel eine Folge von Zahlen:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots \qquad \text{oder} \qquad 3, 9, 27, 81, \ldots.$$

Diese entsprechen den Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} 0 & \mapsto & 2 \\ 1 & \mapsto & 4 \\ 2 & \mapsto & 6 \\ 3 & \mapsto & 8 \\ 4 & \mapsto & 10 \\ 5 & \mapsto & 12 \\ & \vdots & \end{array} \qquad \text{respektive} \qquad \begin{array}{rcl} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 9 \\ 3 & \mapsto & 27 \\ 4 & \mapsto & 81 \\ 5 & \mapsto & 243 \\ & \vdots & \end{array}$$

Kurz beschreibt man eine Folge indem man das n-ten Glied angibt. Es gibt zwei Möglichkeiten:

- *rekursiv*: a_n in Abhängigkeit von a_{n-1}, wobei ein Startwert a_0 gegeben ist. Zum Beispiel

$$a_n = a_{n-1} + 2, \text{ wobei } a_0 = 2.$$

- *explizit*: a_n nur in Abhängigkeit von n. Zum Beispiel

$$a_n = 3^n.$$

Man nennt diese Abhängigkeiten auch *Bildungsgesetze*.

Betrachten wir noch ein paar weitere Beispiele.

Beispiel.

- Folge der Stammbrüche: $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$. Dies entspricht $a_n = \frac{1}{n}$ (erstes Folgeglied ist a_1).
- Alternierende Folge: $(1, -1,\ 1, -1,\ 1, -1,\ 1, -1, \ldots)$, entspricht der Folge $(-1)^n$.
- Folge der Primzahlen: $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots)$. Es ist kein explizites Bildungsgesetz bekannt.
- Fibonacci-Zahlen: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$. Wird beschrieben durch $a_0 = 1, a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$.
- Arithmetische Folge: $(-2, 3, 8, 12, 18, \ldots)$, entspricht der Folge $a_n = 5n - 2$.
- Geometrische Folge: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$, entspricht der Folge $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Wir sehen bei diesen Beispielen, dass es ganz unterschiedliche Folgen gibt. Arithmetische, alternierende, geometrische... etc. Wir werden nun einige davon genauer betrachen.

Definition. Bei einer *arithmetischen Folge* sind die Abstände zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern immer konstant, das heisst es gibt eine Zahl $r \in \mathbb{R}$, so dass

$$\boxed{a_n - a_{n-1} = r \qquad \text{konstant für alle } n \in \mathbb{N}.}$$

Wir haben bereits zwei Beispiele dazu gesehen:

- $(2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$, entspricht der Folge $a_n = a_{n-1} + 2$. Es gilt somit

  $$a_n - a_{n-1} = 2$$

  und der Abstand zwischen zwei Gliedern ist $r = 2$.
- $(-2, 3, 8, 12, 18, \ldots)$, entspricht der Folge $a_n = 5n - 2$. Es gilt

  $$a_n - a_{n-1} = 5n - 2 - (5(n-1) - 2) = 5n - 2 - 5n + 5 + 2 = 5,$$

  also ist in diesem Fall der Abstand zwischen zwei Gliedern $r = 5$.

Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heisst *geometrische Folge*, wenn der Quotient aus zwei aufeinanderfolgenden Gliedern stets konstant ist, das heisst es gibt eine Zahl $q \in \mathbb{R}$, so dass

$$\boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \qquad \text{konstant für alle } n \in \mathbb{N}.}$$

Dies entspricht der rekursiven Formel

$$a_n = q \cdot a_{n-1}.$$

Will man ein explizites Bildungsgesetz, kann man aus

$$\begin{aligned} a_1 &= q \cdot a_0, \\ a_2 &= q \cdot a_1 = q \cdot q \cdot a_0 = q^2 a_0, \\ a_3 &= q \cdot a_2 = q \cdot q^2 \cdot a_0 = q^3 \cdot a_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

folgen, dass

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

gilt.

Wir haben bereits zwei Beispiele von geometrischen Folgen kennengelernt:

- (1,3,9,27,81,...) entspricht der Folge $a_n = 3^n$ für $n \geq 0$. Es gilt

  $$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3,$$

  also ist $q = 3$.

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$, entspricht der Folge $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für $n \geq 1$ und es gilt:

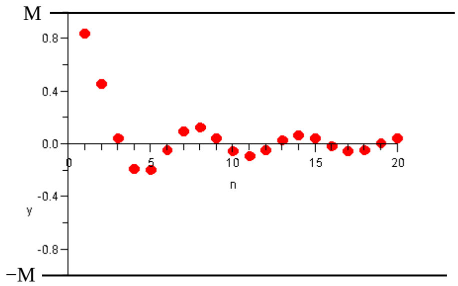
  $$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \frac{1}{2},$$

  und somit ist $q = \frac{1}{2}$.

Eigenschaften

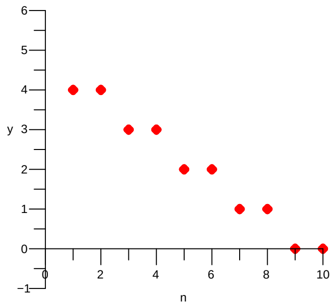
Folgen können folgende Eigenschaften haben: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist

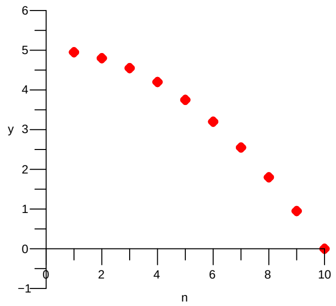
- *beschränkt*, falls $|a_n| \leq M$, das heisst alle a_n sind kleiner als eine feste Grösse M (M ist eine feste Zahl, die aber beliebig gross sein kann).



Beispiel: $\frac{\sin(n)}{n}$

- *(streng) monoton fallend*, falls $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n < a_{n+1}$) für alle n

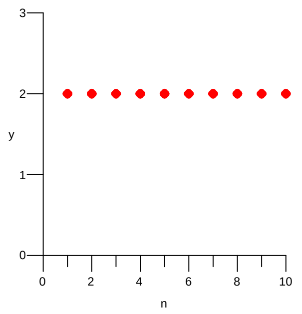


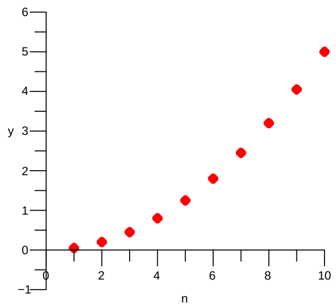


Beispiel: $\lfloor \frac{10-n}{2} \rfloor$. (Bemerkung: $\lfloor \ldots \rfloor$ bedeutet abrunden auf die nächste ganze Zahl.)

Beispiel: $5 - n^2$.

- *(streng) monoton wachsend*, falls $a_n \geq a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$) für alle n

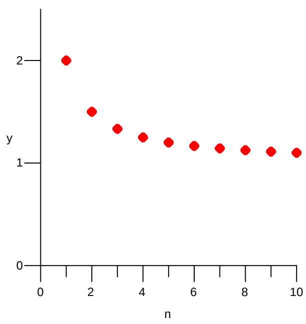


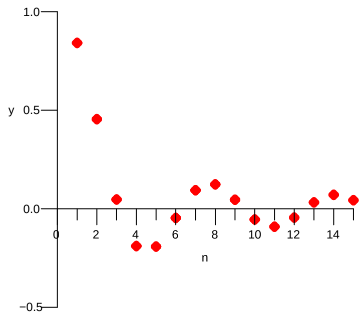


Beispiel: $a_n = 2$.

Beispiel: n^2

- *konvergent*, falls ihr Grenzwert existiert: $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

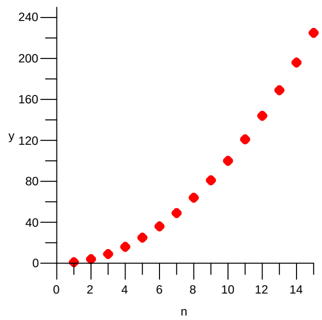


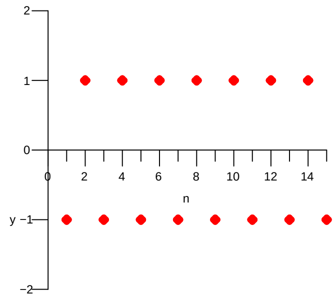


Beispiel: $\frac{1}{n} + 1$.

Beispiel: $\frac{\sin(n)}{n}$.

- *divergent*, falls sie nicht konvergent ist.





Beispiel: n^2

Beispiel: $(-1)^n$

Beispiel. $a_n = \frac{n}{n+1}$ ist konvergent, denn

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Eine weitere wichtige konvergente Folge ist die *Eulerfolge* $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, wobei x eine beliebige feste reelle Zahl ist. Diese Folge ist wichtig, weil für $n \to \infty$ gerade die Exponentialfunktion herauskommt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.}$$

3.2 Reihen

Wir summieren nun über die Folgeglieder um eine Reihe zu bekommen.

Definition. Die *Summenfolge* ist ein Ausdruck bestehend aus endlich vielen Summanden

$$\boxed{s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_n}$$

und heisst *(endliche) Reihe.*

Die Reihe kann sowohl beim Index $k = 0$ als auch beim Index $k = 1$ oder von einer beliebigen anderen Zahl aus beginnen.

Beispiel.

- $\sum\limits_{k=1}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{32}.$
- $\sum\limits_{k=0}^{4} (-1)^k = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 = 1.$

Es kann ziemlich schwierig sein, die Reihen zu berechnen. Folgende endliche Reihe ist aber zum Beispiel einfach zu berechnen: $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$ und zwar geht das wie folgt.

Angenommen, n sei gerade. Wir bilden Paare von Zahlen:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \text{mit} & n \\ 2 & \text{mit} & n-1 \\ 3 & \text{mit} & n-2 \\ & \vdots & \end{array}$$

Wenn wir jedes Paar zusammenzählen, bekommen wir immer $n + 1$. Weiter gibt es genau $\frac{n}{2}$ solche Paare (wir haben angenommen, dass n gerade ist). Somit bekommen wir

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ist n ungerade, dann betrachten wir $n - 1$, was ja nun gerade ist und wenden obige Formel an. Wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-1} k + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Die Formel ist also für n gerade respektive n ungerade dieselbe.

Bei den Folgen haben wir die geometrische Folge kennengelernt. Entsprechend dazu nun bei den Reihen die *geometrische Reihe*:

Satz 2. *Ist* $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ *eine geometrische Folge, so gilt für die Summe der ersten* n *Glieder:*

$$\boxed{s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.}$$

Das s_n *wird* endliche geometrische Reihe *genannt. Wenn die Folge erst bei* a_1 *anfängt, erhalten wir*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Hiermit lässt sich die Summe des ersten Beispiels auch direkt berechnen:

$$\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{32}.$$

Beweis des Satzes. Wir beweisen nur den ersten Teil, wo die Folge bei a_0 anfängt. Der zweite Teil folgt daraus, respektive wird äquivalent bewiesen. Die Folge ist geometrisch, das heisst von der Form $a_n = a_0 \cdot q^n$. Wir betrachten folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{rclcl} s_n & = & a_0 & + & a_0q + a_0q^2 + \ldots + a_0q^n \\ q \cdot s_n & = & & & a_0q + a_0q^2 + \ldots + a_0q^n + a_0q^{n+1} \end{array}$$

Berechnen wir nun die Differenz

$$s_n - q \cdot s_n = a_0 - a_0q^{n+1}.$$

Dies entspricht

$$s_n(1-q) = a_0(1-q^{n+1}).$$

Somit erhalten wir unsere Behauptung

$$s_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

□

Was passiert, wenn wir nicht nur bis zu einem gewissen n sondern sogar bis unendlich aufsummieren?

Definition. Hat die Summe unendlich viele Summanden, wird sie *unendliche Reihe* genannt und man schreibt

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} a_n.$$

Dies entspricht dem Grenzwert von s_n für $n \to \infty$,

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

und kann dementsprechend konverget sein, was bedeutet das die Summe existiert, oder divergent sein. In diesem Falle exitiert die Summe nicht.

Erneut ist die *(unendliche) geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n$ sehr wichtig.

Satz 3. *Die geometrische Reihe* $(a_0,\ a_0q,\ a_0q^2, \ldots)$ *ist konvergent für* $|q| < 1$*:*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = a_0(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = a_0 \frac{1}{1-q}}$$

Für alle anderen q divergiert die Summe.

Bemerkung. Beachten Sie, dass die Summe bei $n = 0$ anfängt.

Beweis des Satzes. Wir haben bereits s_n für eine geometrische Summe berechnet:

$$s_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Betrachten wir nun den Limes

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = a_0 \frac{1}{1-q},$$

da $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ falls $|q| < 1$.

$\square$

Beispiel.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung. Aus dem obigen Satz kann man ableiten, dass

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.}$$

Beispiel (zur Divergenz)**.** Es ist einfach zu sehen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

divergiert. Etwas schwieriger ist es zu zeigen, dass auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergent ist (siehe Übungen).