$\mathbb{P}^1$-LOCALISATION ET UNE CLASSE DE KODAIRA–SPENCER ARITHMÉTIQUE

par

Joseph Ayoub

Résumé. — Dans cet article, on introduit et on étudie le concept de $\mathbb{P}^1$-localisation qui est la variante du concept de $\mathbb{A}^1$-localisation où l'on remplace la droite affine par la droite projective. On démontre un théorème de $\mathbb{P}^1$-connexité en adaptant la preuve de Morel de son théorème de $\mathbb{A}^1$-connexité. On s'intéresse ensuite à la $\mathbb{P}^1$-localisation du faisceau des formes différentielles absolues et on montre que son 0-ième faisceau d'homologie est nul. Ceci nous amène naturellement à la définition d'une classe de Kodaira–Spencer arithmétique. Enfin, nous montrons un lien entre cette classe de Kodaira–Spencer arithmétique et les classes de Deligne–Illusie pour presque tout nombre premier, ce qui nous permet de prouver qu'elle est non identiquement nulle.

Abstract. — In this article, we introduce and study the concept of $\mathbb{P}^1$-localisation which is the variant of the concept of $\mathbb{A}^1$-localisation where the affine line is replaced by the projective line. We prove a $\mathbb{P}^1$-connectivity theorem following the proof of Morel of his $\mathbb{A}^1$-connectivity theorem. We then consider the $\mathbb{P}^1$-localisation of the sheaf of absolute differential forms and we show that its 0-th homology sheaf vanishes. This naturally brings us to the definition of an arithmetic Kodaira–Spencer class. Finally, we establish a link between this arithmetic Kodaira–Spencer class and the Deligne–Illusie classes for almost all prime numbers, which enable us to prove that the former is not identically zero.

Table des matières

1. Introduction

Soient S un schéma de base et Λ un anneau de coefficients. On considère des complexes de préfaisceaux de Λ-modules sur la catégorie Sm/S des S-schémas lisses et, pour fixer les idées, on travaille dans cette introduction localement pour la topologie étale. Rappelons qu'un complexe de préfaisceaux F est dit $\mathbb{A}^1$-local si pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$ le morphisme

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(X; F) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1 \times X; F),$$

Mots clefs. — $\mathbb{P}^1$-localisation, formes différentielles, classe de Kodaira–Spencer arithmétique.

L'auteur a bénéficié du soutien du Fond National Suisse de la Recherche Scientifique (NSF), projet 200020_178729.

induit par la projection évidente, est un isomorphisme (dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\Lambda)$). On dispose d'un endofoncteur de $\mathbb{A}^1$-localisation, noté $\mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}$, qui rend un complexe de préfaisceaux $\mathbb{A}^1$-local de manière optimale : pour tout complexe de préfaisceaux F on a une équivalence $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale $F \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(F)$.

La $\mathbb{A}^1$-localisation joue un rôle central en théorie des motifs depuis les travaux de Voevodsky [**28**] et Morel–Voevodsky [**21**]. Cependant, la $\mathbb{A}^1$-localisation est un exemple parmi d'autres d'un procédé beaucoup plus général, à savoir la localisation de Bousfield dans les catégories de modèles [**14**]. En particulier, il est tout à fait possible de remplacer la droite affine $\mathbb{A}^1$ par la droite projective $\mathbb{P}^1$. On obtient alors la notion de complexe de préfaisceaux $\mathbb{P}^1$-local ainsi qu'un endofoncteur de $\mathbb{P}^1$-localisation, noté $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}$. Toutefois, si la $\mathbb{A}^1$-localisation a été perçue comme un procédé naturel et important au cours des dernières décennies, il n'en est pas de même pour la $\mathbb{P}^1$-localisation. (Ceci est vrai à une exception près : les motifs birationnels de Kahn–Sujatha [**17**] sont le résultat de la $\mathbb{P}^1$-localisation considérée dans la catégorie des motifs effectifs de Voevodsky ; voir la proposition 3.9 ci-dessous.)

L'objectif de cet article est de démontrer que le concept de $\mathbb{P}^1$-localisation est intéressant et qu'il mène naturellement à une construction surprenante, celle d'une classe de Kodaira–Spencer arithmétique. (La question de l'existence d'une telle classe est discutée dans un article de Faltings [**11**] mais la classe que nous proposons est de nature un peu différente ; voir la remarque 6.4 ci-dessous.)

L'article est organisé comme suit. La section 2 contient des généralités sur la $\mathbb{P}^1$-localisation et la section 3 regroupe quelques exemples de faisceaux $\mathbb{P}^1$-locaux. Dans la section 4 on démontre le théorème de $\mathbb{P}^1$-connexité. Il s'agit de l'analogue du théorème de $\mathbb{A}^1$-connexité de Morel [**20**] dans le contexte de la $\mathbb{P}^1$-localisation et sa preuve est largement calquée sur celle de Morel. La section 5 contient le résultat principal de cet article : on y montre que le complexe $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1)$ est acyclique en degré zéro. C'est cette acyclicité qui permet de définir une classe de Kodaira–Spencer arithmétique dans la section 6. Enfin, dans la section 7 nous démontrons un lien entre notre classe de Kodaira–Spencer arithmétique et les classes de Deligne–Illusie pour presque tout nombre premier. (Pour un nombre premier p, la classe de Deligne–Illusie, introduite dans [**9**, Remarque 2.2(iii)], est l'obstruction à relever le morphisme de Frobenius modulo p^2.) Grâce à ce lien, on montre que notre classe de Kodaira–Spencer arithmétique est non triviale, déjà pour les courbes de genre $\geqslant 2$.

Remerciements. — Je remercie Ahmed Abbes de m'avoir parlé du papier de Faltings [**11**]. Je remercie Bruno Kahn, Alberto Merici et Shuji Saito pour des discussions sur les motifs avec module en lien avec le sujet de cet article. Je remercie Thomas Nikolaus de m'avoir expliqué que l'homologie de Hochschild des $\mathbb{Q}$-algèbres lisses était formelle. Enfin, je remercie vivement un rapporteur anonyme pour sa suggestion de comparer la classe de Kodaira–Spencer arithmétique construite dans cet article avec les classes de Deligne–Illusie. La section 7 est entièrement le fruit de cette suggestion, et son ajout rend l'article bien meilleur !

Conventions et notations courantes.

Anneaux et schémas. — Les anneaux sont toujours supposés commutatifs et unitaires. Les schémas sont toujours supposés quasi-compacts et séparés. Si S est un schéma, on note Sm/S la catégorie des S-schémas lisses et Et/S celle des S-schémas étales. Si $S = \mathrm{Spec}(A)$, ces catégories sont aussi désignées par Sm/A et Et/A. On note $\mathbb{A}^1$ la droite affine et $\mathbb{P}^1$ la droite projective.

Modules quasi-cohérents. — Si X est un schéma, on note $\mathbf{QCoh}(X)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents. Par abus de language, un objet de $\mathbf{QCoh}(X)$ sera souvent considéré comme un faisceau étale de $\mathcal{O}_X$-modules sur Et/X en utilisant par exemple [**18**, Lemme 13.1.5].

La catégorie $\mathbf{QCoh}(X)$ est monoïdale fermée. Son produit tensoriel est désigné par $- \otimes_{\mathcal{O}_X} -$ et son bifoncteur « homomorphismes internes » est désigné par $\mathcal{H}om(-,-)$.

Si $f : Y \longrightarrow X$ est un morphisme de schémas, on note $f^\star$ (au lieu de f^*) le foncteur « image inverse » sur les modules quasi-cohérents. L'adjoint à droite de $f^\star$ sera noté $f_\star$ (au lieu de f_*).

Complexes. — Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, on note $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ sa catégorie dérivée. Si Λ est un anneau, on note $\mathbf{D}(\Lambda)$ au lieu de $\mathbf{D}(\mathbf{Mod}(\Lambda))$ la catégorie dérivée des Λ-modules.

Préfaisceaux et faisceaux. — Si $\mathcal{C}$ est une catégorie et Λ un anneau, on note $\mathbf{PSh}(\mathcal{C};\Lambda)$ la catégorie des préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathcal{C}$. Si τ est une topologie sur $\mathcal{C}$, on note $\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C};\Lambda)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{PSh}(\mathcal{C};\Lambda)$ formée des τ-faisceaux. On note a_τ le foncteur de τ-faisceautisation.

La catégorie $\mathbf{PSh}(\mathcal{C};\Lambda)$ est monoïdale fermée. Son produit tensoriel est désigné par $\otimes_\Lambda$, ou simplement par $\otimes$. Le bifoncteur « homomorphismes internes » est désigné par $\underline{\mathrm{Hom}}$. Lorsque F est un préfaisceau d'ensembles (et non de Λ-modules), on donne un sens à « $F\otimes(-)$ » et « $\underline{\mathrm{Hom}}(F,-)$ » comme dans [**2**, Définition 4.4.2]. Autrement dit, $F\otimes(-)$ est le produit tensoriel dans $\mathbf{PSh}(\mathcal{C};\Lambda)$ avec le préfaisceau de Λ-modules librement engendré par F, et $\underline{\mathrm{Hom}}(F,-)$ est son adjoint à droite. De même, pour un préfaisceau d'ensembles pointé (F,x), on écrit « $(F,x)\otimes(-)$ » pour le conoyau de $x_* : (-)\longrightarrow F\otimes(-)$ et « $\underline{\mathrm{Hom}}((F,x),-)$ » pour le noyau de $x^* : \underline{\mathrm{Hom}}(F,-)\longrightarrow(-)$.

Si $f:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ est un foncteur, on note f_* le foncteur « image directe » qui à un préfaisceau F sur $\mathcal{D}$ associe le préfaisceau $F\circ f$ sur $\mathcal{C}$. On note f^* l'adjoint à gauche de f_* ; c'est le foncteur « image inverse ».

Structures de modèles τ-locales. — Avec $\mathcal{C}$ et τ comme ci-dessus, la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathcal{C};\Lambda))$ possède une structure de modèles, dite τ-locale, et sa catégorie homotopique est notée $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathcal{C};\Lambda))$. Pour un objet $X\in\mathcal{C}$, on note

$$\mathrm{R}\Gamma_\tau(X;-):\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathcal{C};\Lambda))\longrightarrow\mathbf{D}(\Lambda)$$

le foncteur dérivé à droite de $\Gamma(X;-)$ relativement à la structure τ-locale. La cohomologie de X à valeurs dans un complexe de préfaisceaux F est alors définie par $\mathrm{H}^*_\tau(X;F)=\mathrm{H}^*(\mathrm{R}\Gamma_\tau(X;F))$.

2. Définitions générales : structures de modèles $\mathbb{P}^1$-localisées

Dans cette section, on fixe un schéma de base S et un anneau de coefficients Λ. On note Sm/S la catégorie des S-schémas lisses. Par « préfaisceau » on entendra « préfaisceau de Λ-modules sur Sm/S ». On travaille localement pour une topologie τ sur Sm/S. En pratique, τ sera la topologie Nisnevich ($\tau=\mathrm{Nis}$) ou la topologie étale ($\tau=\text{ét}$), mais on aura aussi à considérer la topologie Zariski ($\tau=\mathrm{Zar}$) et la topologie grossière ($\tau=\varnothing$). (Si S est le spectre d'un corps k, il est intéressant de prendre la topologie h et, lorsque k admet la résolution des singularités, la topologie cdh, mais nous ne discuterons pas de ces topologies dans cet article pour ne pas alourdir l'exposition.) On note a_τ le foncteur « τ-faisceau associé ».

La catégorie des complexes de préfaisceaux $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S;\Lambda))$ possède une structure de modèles dite globale où les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les morphismes surjectifs ; voir par exemple [**2**, Proposition 4.4.16]. Rappelons qu'un morphisme de complexes de préfaisceaux $F\longrightarrow G$ est appelé une équivalence τ-locale s'il induit des isomorphismes $\mathrm{a}_\tau\mathrm{H}_i(F)\simeq\mathrm{a}_\tau\mathrm{H}_i(G)$ pour tout $i\in\mathbb{Z}$. La localisation de Bousfield de la structure globale suivant les équivalences τ-locales existe et la structure de modèles $(\mathbf{W}_\tau,\mathbf{Cof},\mathbf{Fib}_\tau)$ qui en résulte est dite τ-locale ; voir par exemple [**2**, Proposition 4.4.31, Définition 4.4.33]. Les flèches dans $\mathbf{W}_\tau$ sont exactement les équivalences τ-locales et les flèches dans $\mathbf{Fib}_\tau$ sont appelées les τ-fibrations. (Les cofibrations pour la structure τ-locale sont les mêmes que celles pour la structure globale.) La catégorie homotopique relativement à la structure τ-locale sera notée $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S;\Lambda))$; elle est équivalente à la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}_\tau(\mathrm{Sm}/S;\Lambda))$ des τ-faisceaux via le foncteur a_τ.

Définition 2.1. — *La structure de modèles $(\mathbb{P}^1,\tau)$-locale $(\mathbf{W}_{\mathbb{P}^1,\tau},\mathbf{Cof},\mathbf{Fib}_{\mathbb{P}^1,\tau})$ sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$ est la localisation de Bousfield de la structure τ-locale suivant les morphismes*

$$(\mathbb{P}^1\times X)\otimes\Lambda[n]\longrightarrow X\otimes\Lambda[n]$$

avec $X\in\mathrm{Sm}/S$ et $n\in\mathbb{Z}$. Les flèches dans $\mathbf{W}_{\mathbb{P}^1,\tau}$ sont appelées les équivalences $(\mathbb{P}^1,\tau)$-locales et les flèches dans $\mathbf{Fib}_{\mathbb{P}^1,\tau}$ sont appelées les $(\mathbb{P}^1,\tau)$-fibrations. La catégorie homotopique relativement à la structure $(\mathbb{P}^1,\tau)$-locale sera notée $\mathbf{D}_{\mathbb{P}^1,\tau}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S;\Lambda))$.

On dispose de la description suivante des complexes $(\mathbb{P}^1,\tau)$-fibrants.

Lemme 2.2. — *Pour qu'un complexe de préfaisceaux L soit $(\mathbb{P}^1,\tau)$-fibrant il faut et il suffit qu'il soit τ-fibrant et que, pour tout $X\in\mathrm{Sm}/S$, le morphisme $L(X)\longrightarrow L(\mathbb{P}^1\times X)$, induit par la projection évidente, soit un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence de la construction de la localisation de Bousfield ; voir en effet [**2**, Définition 4.2.64, Proposition 4.2.66]. ■

Définition 2.3. — *Soit F un complexe de préfaisceaux considéré comme un objet de la catégorie homotopique $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S\,;\Lambda))$ relativement à la structure τ-locale. On dit que F est $\mathbb{P}^1$-local si pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$ le morphisme*

$$\mathrm{R}\Gamma_\tau(X;F) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_\tau(\mathbb{P}^1 \times X;F),$$

induit par la projection évidente, est un isomorphisme dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\Lambda)$. Autrement dit, F est $\mathbb{P}^1$-local si et seulement si un (et donc tout) remplacement τ-fibrant de F est $(\mathbb{P}^1,\tau)$-fibrant.

Remarque 2.4. — Dans la définition 2.3, si l'on prend pour τ la topologie grossière, on parle alors de complexes de préfaisceaux $\mathbb{P}^1$-invariants. Ainsi, un complexe de préfaisceaux F est $\mathbb{P}^1$-invariant si le morphisme $F(X) \longrightarrow F(\mathbb{P}^1 \times X)$ est un quasi-isomorphisme pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$.

La notion de complexe de préfaisceaux $\mathbb{P}^1$-local dépend crucialement de la topologie choisie. Ainsi, nous dirons souvent « $\mathbb{P}^1$-local pour la topologie τ » pour préciser le rôle de la topologie. □

Lemme 2.5. — *Il existe un endofoncteur $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}$ de la catégorie $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$ muni d'une transformation naturelle $\lambda : \mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}$ tel que les deux conditions suivantes sont satisfaites pour tout complexe de préfaisceaux L sur Sm/S :*

(a) $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(L)$ *est $\mathbb{P}^1$-local ;*

(b) $\lambda_L : L \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(L)$ *est une équivalence $(\mathbb{P}^1,\tau)$-locale.*

De plus, le couple $(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau},\lambda)$ est unique à une unique transformation naturelle inversible près.

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence de la construction de la localisation de Bousfield ; voir en effet [**2**, Proposition 4.2.72]. ■

Dans le reste de la section on donne un modèle explicite de l'endofoncteur de $\mathbb{P}^1$-localisation $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}$.

Construction 2.6. — On fixe un endofoncteur « remplacement τ-fibrant » $(-)_{\tau\text{-fib}}$ sur les complexes de préfaisceaux. Étant donné un complexe de préfaisceaux L, on pose :

$$\Phi_\tau(L) = \mathrm{Cône}\left\{\delta : (\mathbb{P}^1,\infty) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1,\infty), L_{\tau\text{-fib}}) \to L_{\tau\text{-fib}}\right\}$$

avec δ la counité de l'adjonction $((\mathbb{P}^1,\infty) \otimes -, \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1,\infty),-))$. On obtient ainsi un endofoncteur Φ_τ sur les complexes de préfaisceaux muni d'une transformation naturelle $\phi : \mathrm{id} \longrightarrow \Phi_\tau$. On définit ensuite l'endofoncteur Φ_τ^∞ en prenant la colimite de la suite

$$L \xrightarrow{\phi_L} \Phi_\tau(L) \xrightarrow{\phi_{\Phi_\tau(L)}} \Phi_\tau^{\circ 2}(L) \xrightarrow{\phi_{\Phi_\tau^{\circ 2}(L)}} \cdots \xrightarrow{\phi_{\Phi_\tau^{\circ n-1}(L)}} \Phi_\tau^{\circ n}(L) \xrightarrow{\phi_{\Phi_\tau^{\circ n}(L)}} \cdots .$$

Par construction, on dispose d'une transformation naturelle $\phi^\infty : \mathrm{id} \longrightarrow \Phi_\tau^\infty$. □

Théorème 2.7. — *On suppose que S est noethérien de dimension finie et que l'une des deux alternatives suivantes est satisfaite :*

(i) τ est la topologie grossière, Zariski ou Nisnevich ;

(ii) τ est la topologie étale et les p-dimensions cohomologiques ponctuelles de S (au sens de [**3**, Définition 3.12]*) sont uniformément bornées lorsque p parcourt les nombres premiers non inversibles dans Λ.*

Soit L un complexe de préfaisceaux. Alors, $\Phi_\tau^\infty(L)$ est $(\mathbb{P}^1,\tau)$-fibrant et $\phi_L^\infty : L \longrightarrow \Phi_\tau^\infty(L)$ est une équivalence $(\mathbb{P}^1,\tau)$-locale. Autrement dit, Φ_τ^∞ est un endofoncteur de $\mathbb{P}^1$-localisation (i.e., il existe un isomorphisme naturel $\Phi_\tau^\infty \simeq \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}$ qui échange ϕ^∞ et λ).

Démonstration. — On divise la preuve en deux parties.

Partie A. — La fibre homotopique du morphisme $\phi_L : L \longrightarrow \Phi_\tau(L)$ s'identifie à

$$(\mathbb{P}^1, \infty) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), L_{\tau\text{-fib}})$$

qui est $(\mathbb{P}^1, \tau)$-localement acyclique. (Plus généralement, $(\mathbb{P}^1, \infty) \otimes F$ est $(\mathbb{P}^1, \tau)$-localement acyclique pour tout complexe de préfaisceaux F. Ceci découle du fait que les complexes de préfaisceaux $(\mathbb{P}^1, \tau)$-localement acycliques forment une sous-catégorie triangulée de $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S\,; \Lambda))$ stable par sommes directes infinies et contenant les complexes de la forme $(\mathbb{P}^1, \infty) \otimes (X \otimes \Lambda)$ pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$.) Il s'ensuit que $\phi_L : L \longrightarrow \Phi_\tau(L)$ est une équivalence $(\mathbb{P}^1, \tau)$-locale pour tout complexe de préfaisceaux L. Puisque les colimites filtrantes préservent les équivalences $(\mathbb{P}^1, \tau)$-locales, il s'ensuit aussitôt que le morphisme $\phi_L^\infty : L \longrightarrow \Phi_\tau^\infty(L)$ est aussi une équivalence $(\mathbb{P}^1, \tau)$-locale.

Il reste à montrer que $\Phi_\tau^\infty(L)$ est $(\mathbb{P}^1, \tau)$-fibrant. On vérifie d'abord qu'il est τ-fibrant. Pour cela, on remarque que le morphisme $\phi_{\Phi_\tau^{\circ n}(L)} : \Phi_\tau^{\circ n}(L) \longrightarrow \Phi_\tau^{\circ n+1}(L)$ se factorise par $(\Phi_\tau^{\circ n}(L))_{\tau\text{-fib}}$. Ainsi, $\Phi_\tau^\infty(L)$ s'écrit aussi comme une colimite filtrante des complexes $(\Phi_\tau^{\circ n}(L))_{\tau\text{-fib}}$. Or, sous les conditions de l'énoncé, les colimites filtrantes préservent les complexes de préfaisceaux τ-fibrants ; voir par exemple [**2**, Corollaire 4.5.61, Proposition 4.5.62, Proposition 4.5.63] et [**3**, Lemme 3.18]. Ceci montre que $\Phi_\tau^\infty(L)$ est τ-fibrant comme souhaité.

Partie B. — D'après le lemme 2.5, il reste à voir que le morphisme $\Phi_\tau^\infty(L) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{P}^1, \Phi_\tau^\infty(L))$ est un quasi-isomorphisme ou, ce qui revient au même, que le complexe $\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), \Phi_\tau^\infty(L))$ est acyclique. On montre d'abord que le morphisme de counité

$$\delta : (\mathbb{P}^1, \infty) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), \Phi_\tau^\infty(L)) \longrightarrow \Phi_\tau^\infty(L)$$

induit le morphisme nul sur les préfaisceaux d'homologie. Pour cela, il est suffisant de montrer que la composition de

$$(\mathbb{P}^1, \infty) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), \Phi_\tau^{\circ n}(L)) \xrightarrow{\delta} \Phi_\tau^{\circ n}(L) \longrightarrow \Phi_\tau^\infty(L)$$

est nulle à homotopie près pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, cette composition se factorise par la composition de

$$(\mathbb{P}^1, \infty) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), (\Phi_\tau^{\circ n}(L))_{\tau\text{-fib}}) \xrightarrow{\delta} (\Phi_\tau^{\circ n}(L))_{\tau\text{-fib}} \longrightarrow \Phi_\tau^{\circ n+1}(L)$$

qui est nulle à homotopie près par construction.

Il est maintenant aisé de conclure. En effet, l'identité du complexe $\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), \Phi_\tau^\infty(L))$ est égale à la composition de

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), \Phi_\tau^\infty(L)) \arrow[r, "\eta"] & \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), (\mathbb{P}^1, \infty) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), \Phi_\tau^\infty(L))) \arrow[d, "\delta"] \\
& \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), \Phi_\tau^\infty(L))
\end{tikzcd}$$

avec η l'unité de l'adjonction $((\mathbb{P}^1, \infty) \otimes -, \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), -))$. La flèche verticale ci-dessus est nulle en homologie d'après la discussion précédente. (En effet, l'endofoncteur $\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), -)$ est exact sur les préfaisceaux.) L'homologie du complexe $\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), \Phi_\tau^\infty(L))$ est donc nulle comme souhaité. ∎

Remarque 2.8. — Étant donné un préfaisceau de Λ-algèbres $\mathcal{A}$ sur Sm/S, on peut étendre la discussion précédente aux préfaisceaux de $\mathcal{A}$-modules. Ainsi, la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S\,; \mathcal{A}))$ des complexes de préfaisceaux de $\mathcal{A}$-modules possède des structures de modèles τ-locale et $(\mathbb{P}^1, \tau)$-locale ; une flèche est une équivalence τ-locale, une équivalence $(\mathbb{P}^1, \tau)$-locale, une τ-fibration ou une $(\mathbb{P}^1, \tau)$-fibration s'il en est ainsi après oubli de l'action de $\mathcal{A}$. (Voir [**26**, Theorem 4.1].) Les catégories homotopiques sont notées

$$\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S\,; \mathcal{A})) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{D}_{\mathbb{P}^1, \tau}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S\,; \mathcal{A})).$$

Le théorème 2.7 est encore valable pour les complexes de préfaisceaux de $\mathcal{A}$-modules. □

Remarque 2.9. — Si le schéma S est noethérien, on peut étendre la discussion précédente aux préfaisceaux avec transferts (voir par exemple [**19**, Appendix 1A]) quitte à se restreindre à $\tau \in \{\mathrm{Nis}, \text{ét}\}$ afin que la τ-faisceautisation préserve les transferts. Ainsi, la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/S\,; \Lambda))$ des complexes de préfaisceaux avec transferts possède des structures de modèles τ-locale et $(\mathbb{P}^1, \tau)$-locale ; une flèche est une équivalence τ-locale, une équivalence $(\mathbb{P}^1,\tau)$-locale, une τ-fibration ou une $(\mathbb{P}^1,\tau)$-fibration s'il en est ainsi après oubli des transferts. (Autrement dit, l'adjonction « ajout et oubli des transferts » $(\mathrm{a}_{\mathrm{tr}},\mathrm{o}_{\mathrm{tr}})$ est de Quillen relativement aux structures τ-locales et $(\mathbb{P}^1,\tau)$-locales respectivement.) Les catégories homotopiques sont notées

$$\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/S;\Lambda)) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{D}_{\mathbb{P}^1,\tau}(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/S;\Lambda)).$$

Le théorème 2.7 est encore valable pour les complexes de préfaisceaux avec transferts si dans la construction 2.6, on remplace $(\mathbb{P}^1,\infty)\otimes -$ par le produit tensoriel avec transferts $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{P}^1,\infty)\otimes^{\mathrm{tr}} -$ qu'on dérive à gauche. On laisse les détails au lecteur puisqu'on n'aura pas besoin de cette variante du théorème 2.7. □

3. Exemples de faisceaux $\mathbb{P}^1$-locaux

On peut réécrire la section 2 en remplaçant $\mathbb{P}^1$ par n'importe quel S-schéma lisse pointé. Notre objectif dans cet article est de montrer que le choix de $\mathbb{P}^1$ fournit une théorie intéressante, et en particulier non vide. Ainsi, nous regroupons dans cette section quelques exemples explicites de faisceaux $\mathbb{P}^1$-locaux. L'un de ces exemples jouera un rôle important dans la section 7.

Exemple 3.1. — Le faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions régulières est $\mathbb{P}^1$-local pour $\tau \in \{\mathrm{Zar},\mathrm{Nis},\text{ét}\}$. Ceci découle du calcul de la cohomologie de Zariski de l'espace projectif relatif à valeurs dans $\mathcal{O}$ (voir [**12**, Chapitre III, Proposition 2.1.12]) et du fait que la cohomologie cohérente ne dépend pas du choix de $\tau \in \{\mathrm{Zar},\mathrm{Nis},\text{ét}\}$ (voir [**1**, Exposé VII, Proposition 4.3]). □

Pour énoncer un résultat un peu plus général, on introduit une notation.

Notation 3.2. — Étant donnés un schéma S et un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent $\mathcal{M}$, on note $\underline{\mathcal{M}}$ le faisceau étale de $\mathcal{O}$-modules sur Sm/S qui lui est associé, i.e., qui est donné par

$$\underline{\mathcal{M}}(X) = \Gamma(X;(X\to S)^\star\mathcal{M})$$

pour tout S-schéma lisse X. □

Proposition 3.3. — *Soit S un schéma de base et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent. Alors, le faisceau $\underline{\mathcal{M}}$ est $\mathbb{P}^1$-local pour $\tau \in \{\mathrm{Zar},\mathrm{Nis},\text{ét}\}$.*

Démonstration. — Lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{O}_S$, on retrouve l'exemple 3.1 et, comme dans ledit exemple, on peut supposer que $\tau = \mathrm{Zar}$.

Le cas général découle du cas particulier $\mathcal{M} = \mathcal{O}_S$ grâce à la formule de projection. En effet, on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et que $\mathcal{M}$ est associé à un A-module M. On a alors un isomorphisme

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Zar}}(X;\underline{\mathcal{M}}) \simeq \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Zar}}(X;\mathcal{O}) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A M$$

pour tout S-schéma lisse X. Puisque $\mathcal{O}$ est $\mathbb{P}^1$-local, ceci permet de conclure. ■

Remarque 3.4. — Soit S un schéma. L'association $\mathcal{M} \rightsquigarrow \underline{\mathcal{M}}$ définit un foncteur triangulé

$$\mathbf{D}(\mathbf{QCoh}(S)) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{Shv}_\tau(\mathrm{Sm}/S;\mathcal{O})) \tag{3.1}$$

de la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérents dans la catégorie dérivée des faisceaux de $\mathcal{O}$-modules sur Sm/S. Ce foncteur est pleinement fidèle comme on le voit aussitôt en se ramenant au cas où S est affine et en utilisant que $\mathbf{D}(\mathbf{QCoh}(S))$ est alors compactement engendrée par $\mathcal{O}_S$. D'après la proposition 3.3, le foncteur (3.1) se factorise par la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}_\tau(\mathrm{Sm}/S;\mathcal{O}))$ formée des objets $\mathbb{P}^1$-locaux, ce qui fournit un foncteur triangulé pleinement fidèle

$$\mathbf{D}(\mathbf{QCoh}(S)) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbf{Shv}_\tau(\mathrm{Sm}/S;\mathcal{O})). \tag{3.2}$$

On peut se demander si (3.2) est une équivalence de catégories, i.e., si tout complexe de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules $\mathbb{P}^1$-local provient de $\mathbf{D}(\mathbf{QCoh}(S))$. Il n'en est rien comme le montre le résultat suivant. □

Proposition 3.5. — *Soit S un schéma et soit $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille de $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérents. Alors, le faisceau $\prod_{\alpha\in I}\underline{\mathcal{M}}_\alpha$ est $\mathbb{P}^1$-local pour $\tau \in \{\mathrm{Zar},\mathrm{Nis},\text{ét}\}$. Toutefois, le faisceau de $\mathcal{O}$-modules $\prod_{\alpha\in I}\underline{\mathcal{M}}_\alpha$ n'est pas en général dans l'image essentielle du foncteur* (3.2).

Démonstration. — Posons $M = \prod_{\alpha \in I} \underline{\mathcal{M}_\alpha}$. Clairement M est un τ-faisceau de $\mathcal{O}$-modules. En général, il n'est pas dans l'image de (3.1) : c'est le cas par exemple si $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{O}_S$, pour tout $\alpha \in I$, lorsque S est non vide et I est infini. Le fait que M est $\mathbb{P}^1$-local découle de la proposition 3.3 et de l'isomorphisme

$$\mathrm{H}^*_\tau(X; M) \simeq \prod_{\alpha \in I} \mathrm{H}^*_\tau(X; \underline{\mathcal{M}_\alpha}) \tag{3.3}$$

valable pour tout S-schéma lisse X. Pour justifier (3.3), on peut raisonner comme suit. Pour $\alpha \in I$, on fixe une résolution injective $\underline{\mathcal{M}_\alpha} \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet_\alpha$ dans la catégorie abélienne des τ-faisceaux de $\mathcal{O}$-modules sur Sm/S et on pose $I^\bullet = \prod_{\alpha \in I} \mathcal{I}^\bullet_\alpha$. Si X est un S-schéma lisse, et si $U \subset X$ est un ouvert affine, alors $\underline{\mathcal{M}_\alpha}(U) \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet_\alpha(U)$ est un quasi-isomorphisme puisque $\mathrm{H}^i_\tau(U; \underline{\mathcal{M}_\alpha}) = 0$ si $i > 0$. (On utilise ici [**12**, Chapitre III, Théorème 1.3.1] joint à [**1**, Exposé VII, Proposition 4.3].) Il s'ensuit que $M(U) \longrightarrow I^\bullet(U)$ est aussi un quasi-isomorphisme, ce qui montre que $M \longrightarrow I^\bullet$ est une équivalence τ-locale. Autrement dit, $M \longrightarrow I^\bullet$ est une résolution injective du τ-faisceau de $\mathcal{O}$-modules M. Or, la cohomologie du complexe $I^\bullet(X)$ est le produit des cohomologies des complexes $\mathcal{I}^\bullet_\alpha(X)$, et l'isomorphisme (3.3) s'ensuit. ■

On peut modifier le principe de la proposition 3.5 pour obtenir un autre faisceau de $\mathcal{O}$-modules $\mathbb{P}^1$-local qui n'est pas dans l'image du foncteur (3.2).

Construction 3.6. — Étant donné un $\mathbb{Q}$-schéma lisse X, on pose

$$\mathcal{O}_{\mathrm{pp}}(X) = \operatorname*{colim}_{N \in \mathbb{N}} \prod_{p \geqslant N} \mathcal{O}(\mathcal{X}_p) \tag{3.4}$$

où $\mathcal{X}$ est un modèle entier de X, i.e., un $\mathbb{Z}$-schéma de type fini muni d'un isomorphisme $X \simeq \mathcal{X} \otimes \mathbb{Q}$, p parcourt les nombres premiers, et $\mathcal{X}_p = \mathcal{X} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est la réduction de $\mathcal{X}$ modulo p. (L'indice « pp » fait référence à l'expression « presque tout nombre premier ».) Si $\mathcal{X}'$ est un autre modèle entier de X, on a des isomorphismes canoniques $\mathcal{X}_p \simeq \mathcal{X}'_p$ pour p suffisamment grand. Ceci montre que (3.4) est indépendant du choix du modèle entier. L'association $X \rightsquigarrow \mathcal{O}_{\mathrm{pp}}(X)$ définit un préfaisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathrm{pp}}$ sur $\mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$. Étant donnée une fonction régulière $f \in \mathcal{O}(X)$, il existe un entier naturel $N \geqslant 1$ tel que $f \in \mathcal{O}(\mathcal{X} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{(N-1)!}])$. On peut donc prendre la réduction de f modulo p pour $p \geqslant N$ et obtenir un élément $f_{\mathrm{pp}} \in \mathcal{O}_{\mathrm{pp}}(X)$. Ceci définit un morphisme de préfaisceaux d'anneaux $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{pp}}$. □

Proposition 3.7. — *Le préfaisceau $\mathcal{O}_{\mathrm{pp}}$ est un faisceau pour la topologie étale et il est $\mathbb{P}^1$-local pour $\tau \in \{\mathrm{Zar}, \mathrm{Nis}, \text{ét}\}$.*

Démonstration. — Pour $N \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$, on pose $S_N = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{(N-1)!}])$. La catégorie $\mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$ est équivalente à la 2-colimite des catégories Sm/S_N. Mieux encore, le site $(\mathrm{Sm}/\mathbb{Q}, \tau)$ est équivalent à la 2-limite des sites $(\mathrm{Sm}/S_N, \tau)$ au sens de [**1**, Exposé VI, Définition 8.2.5] ; voir aussi [**1**, Exposé VI, Théorème 8.2.3].

Pour N fixé, appelons $\mathcal{O}_{\geqslant N}$ le faisceau de $\mathcal{O}$-modules sur Sm/S_N donné par

$$\mathcal{O}_{\geqslant N}(\mathcal{X}) = \prod_{p \geqslant N} \mathcal{O}(\mathcal{X}_p)$$

pour tout S_N-schéma lisse $\mathcal{X}$. Clairement, on a $\mathcal{O}_{\geqslant N} = \prod_{p \geqslant N} (i_p)_* \mathcal{O}$ avec $i_p : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \hookrightarrow S_N$ l'inclusion évidente. De plus, $(i_p)_* \mathcal{O} = \underline{\mathcal{O}_p}$ avec $\mathcal{O}_p$ le $\mathcal{O}_{S_N}$-module quasi-cohérent associé au $\mathbb{Z}[\frac{1}{(N-1)!}]$-module $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. D'après la proposition 3.5, le faisceau $\mathcal{O}_{\geqslant N}$ est donc $\mathbb{P}^1$-local pour $\tau \in \{\mathrm{Zar}, \mathrm{Nis}, \text{ét}\}$.

Pour $M \geqslant N$ ou $M = \infty$, appelons $j_{MN} : (\mathrm{Sm}/S_M, \tau) \longrightarrow (\mathrm{Sm}/S_N, \tau)$ le morphisme de sites évident donné par le produit fibré $- \times_{S_N} S_M$. (Bien entendu, on convient que $S_\infty = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$.) On dispose de morphismes naturels de faisceaux $j^*_{MN} \mathcal{O}_{\geqslant N} \longrightarrow \mathcal{O}_{\geqslant M}$, pour $M \geqslant N$, et d'un isomorphisme de préfaisceaux

$$\mathcal{O}_{\mathrm{pp}} \simeq \operatorname*{colim}_{N \in \mathbb{N}} j^*_{\infty N} \mathcal{O}_{\geqslant N}.$$

Grâce à [**1**, Exposé VI, Corollaire 8.7.7], pour tout $\mathbb{Z}$-schéma lisse $\mathcal{X}$, on obient un isomorphisme

$$\mathrm{H}^*_\tau(\mathcal{X} \otimes \mathbb{Q}; \mathcal{O}_{\mathrm{pp}}) \simeq \operatorname*{colim}_{N \in \mathbb{N}} \mathrm{H}^*_\tau(\mathcal{X} \times S_N; \mathcal{O}_{\geqslant N}). \tag{3.5}$$

Puisque les $\mathcal{O}_{\geqslant N}$ sont des faisceaux $\mathbb{P}^1$-locaux pour $\tau \in \{\mathrm{Zar}, \mathrm{Nis}, \text{ét}\}$, les isomorphismes ci-dessus entraînent qu'il en est de même pour $\mathcal{O}_{\mathrm{pp}}$. ■

Remarque 3.8. — Le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathrm{pp}}$ admet un endomorphisme de Frobenius

$$\phi : \mathcal{O}_{\mathrm{pp}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{pp}}.$$

Pour $X \in \mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$, $\mathcal{X}$ un modèle entier de X et $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{pp}}(X)$ une section représentée par une famille $(f_p)_{p \geqslant N} \in \prod_{p \geqslant N} \mathcal{O}(\mathcal{X}_p)$, la section $\phi(f)$ est représentée par la famille $((f_p)^p)_{p \geqslant N}$. Ceci permet de définir une nouvelle structure de $\mathcal{O}$-algèbre sur $\mathcal{O}_{\mathrm{pp}}$, à savoir celle donnée par la composition de

$$\mathcal{O} \xrightarrow{(-)_{\mathrm{pp}}} \mathcal{O}_{\mathrm{pp}} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_{\mathrm{pp}}.$$

La $\mathcal{O}$-algèbre ainsi obtenue sera notée $\mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}$. Clairement, pour $X \in \mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$ et $\mathcal{X}$ un modèle entier de X, on a

$$\mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}(X) = \operatorname*{colim}_{N \in \mathbb{N}} \prod_{p \geqslant N} \Gamma(\mathcal{X}_p; (\mathrm{Fr}_p)_\star \mathcal{O}_{\mathcal{X}_p})$$

où Fr_p désigne le Frobenius de $\mathcal{X}_p$. La $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}$ jouera un rôle important dans la section 7. □

On termine cette section avec un autre type d'exemples provenant de la théorie des motifs. Afin de faciliter les références, on travaille avec des préfaisceaux avec transferts et on se restreint au cas où τ est la topologie Nisnevich. Faisons d'abord quelques rappels.

On fixe un corps k qu'on supposera parfait. Soit $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\Lambda)$ la catégorie des motifs effectifs de Voevodsky [**29**, §3] et soit $\mathbf{DM}^{\circ}(k;\Lambda)$ la catégorie des motifs birationnels de Kahn–Sujatha [**17**, Definition 4.2.1]. Ces catégories sont des localisations de la catégorie $\mathbf{D}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$, mais on peut également les identifier à des sous-catégories triangulées de cette dernière. On a alors des inclusions

$$\mathbf{DM}^{\circ}(k;\Lambda) \subset \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\Lambda) \subset \mathbf{D}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$$

de sorte que

— $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\Lambda)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$ formée des objets $\mathbb{A}^1$-locaux (pour la topologie Nisnevich) ;

— $\mathbf{DM}^{\circ}(k;\Lambda)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\Lambda)$ formée des motifs effectifs M tel que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}}(\Lambda(1), M) = 0$, avec $\Lambda(1)$ le motif de Tate. (Voir [**17**, Lemma 4.5.4].)

(Bien entendu, ci-dessus $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}}(-,-)$ désigne le bifoncteur « homomorphismes internes » dans la catégorie monoïdale fermée $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\Lambda)$.) Identifions également $\mathbf{D}_{\mathbb{P}^1,\mathrm{Nis}}(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$ à la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{D}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$ formée des objets $\mathbb{P}^1$-locaux (pour la topologie Nisnevich). Alors, on a le résultat suivant.

Proposition 3.9. — *On a un carré cartésien d'inclusions pleinement fidèles*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{DM}^{\circ}(k;\Lambda) & \subset & \mathbf{D}_{\mathbb{P}^1,\mathrm{Nis}}(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda)) \\ \cap & & \cap \\ \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\Lambda) & \subset & \mathbf{D}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda)), \end{array}$$

i.e., $\mathbf{DM}^{\circ}(k;\Lambda)$ *s'identifie à l'intersection de* $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\Lambda)$ *avec* $\mathbf{D}_{\mathbb{P}^1,\mathrm{Nis}}(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$. *Plus concrètement, un complexe de préfaisceaux avec transferts est un motif birationnel si et seulement si il est à la fois $\mathbb{A}^1$-local et $\mathbb{P}^1$-local (pour la topologie Nisnevich).*

Démonstration. — Le motif de $\mathbb{P}^1$ pointé à l'infini, qu'on note $\mathrm{M}(\mathbb{P}^1,\infty)$, est isomorphe dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\Lambda)$ à $\Lambda(1)[2]$. Ainsi, pour que $M \in \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\Lambda)$ soit dans $\mathbf{DM}^{\circ}(k;\Lambda)$, il faut et il suffit que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}}(\mathrm{M}(\mathbb{P}^1,\infty), M)$ soit nul. Or, si l'on considère $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\Lambda)$ comme une sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$, on a $\mathrm{M}(\mathbb{P}^1,\infty) = \mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{P}^1,\infty))$ et M est un complexe de préfaisceaux avec transferts $\mathbb{A}^1$-local. Il s'ensuit que

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}}(\mathrm{M}(\mathbb{P}^1,\infty), M) \simeq \mathrm{R}_{\mathrm{Nis}}\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1,\infty), M)$$

de sorte que l'annulation du membre à gauche équivaut à la condition de M est $\mathbb{P}^1$-local pour la topologie Nisnevich. ■

Corollaire 3.10. — *Soit F un faisceau Nisnevich avec transferts sur* Sm/k *invariant par homotopie. Alors F est $\mathbb{P}^1$-local pour la topologie Nisnevich si et seulement si il est birationnel au sens de* [**17**, Definition 2.3.1].

Démonstration. — En effet, un faisceau Nisnevich avec transferts invariant par homotopie est $\mathbb{A}^1$-local d'après [**19**, Théorème 24.1] ; c'est donc un objet de $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\Lambda)$ considérée comme une sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$. Ainsi, grâce à la proposition 3.9, F est $\mathbb{P}^1$-local si et seulement si $F \in \mathbf{DM}^{\circ}(k;\Lambda)$, ce qui revient à dire que F est birationnel. En effet, d'après [**17**, Theorem 4.2.2(d)], la t-structure naturelle sur $\mathbf{D}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$, dont le cœur est la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts, induit une t-structure sur $\mathbf{DM}^{\circ}(k;\Lambda)$ dont le cœur est la catégorie des faisceaux birationnels. ■

4. Le théorème de $\mathbb{P}^1$-connexité (suivant Morel)

Le but de cette section est d'établir le théorème de $\mathbb{P}^1$-connexité (voir le théorème 4.4 ci-dessous) qui est l'analogue direct du théorème de $\mathbb{A}^1$-connexité de Morel [**20**, Theorem 6.1.8] dans le contexte de la $\mathbb{P}^1$-localisation. La preuve est essentiellement la même que celle de Morel : on démontre que la $\mathbb{P}^1$-localisation préserve une version faible de la connexité et on utilise ensuite le théorème d'effacement de Bloch–Ogus–Gabber (comme axiomatisé dans [**8**, Theorem 5.1.10]) pour conclure. Le seul point de divergence avec la preuve de Morel réside dans la notion de « connexité faible » utilisée : dans [**20**], il est suffisant de considérer la connexité générique car on dispose d'un modèle sympathique du foncteur de $\mathbb{A}^1$-localisation. Dans le cas de la $\mathbb{P}^1$-localisation, on doit utiliser une notion plus précise, celle de préconnexité ; voir la définition 4.5 ci-dessous. On commence par introduire des notions de connexité pour les complexes de préfaisceaux.

Définition 4.1. — *Soit $(\mathcal{C},\tau)$ un site et soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier. Un complexe de préfaisceaux L sur $\mathcal{C}$ est dit localement n-connexe (pour la topologie τ) si les faisceaux d'homologie $\mathrm{a}_\tau\mathrm{H}_i(L)$ sont nuls pour $i \leqslant n$.*

Lorsque τ est la topologie grossière, on parlera alors de complexes de préfaisceaux n-connexes. Ainsi, L est n-connexe si les préfaisceaux d'homologie $\mathrm{H}_i(L)$ sont nuls pour $i \leqslant n$.

Le résultat principal de cette section est uniquement valable lorsque le schéma de base est le spectre d'un corps. On fixe donc un corps de base k et un anneau de coefficients Λ. Dans cette section, on supposera souvent l'hypothèse suivante vérifiée.

Hypothèse 4.2. — L'une des deux alternatives suivantes est satisfaite :

(i) τ est la topologie Nisnevich ;

(ii) τ est la topologie étale et Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. □

On désigne par « fét » la topologie engendrée par les familles surjectives de morphismes finis étales. L'hypothèse 4.2 servira via le résultat suivant (qui généralise légèrement [**25**, Exercice 1.21]).

Lemme 4.3. — *Soit X un schéma et notons comme d'habitude* Et/X *la catégorie des X-schémas étales. Soit F un complexe de* fét*-faisceaux sur* Et/X *à valeurs dans les $\mathbb{Q}$-vectoriels. Alors, le morphisme évident*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Nis}}(X;F) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(X;F)$$

est un isomorphisme (dans la catégorie dérivée des $\mathbb{Q}$-vectoriels).

Démonstration. — On se ramène aussitôt au cas où X est schéma local hensélien. Appelons x le point fermé de X et fixons un point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de x donné par le spectre d'une clôture séparable de $\kappa(x)$. Notons $\overline{X}$ l'hensélisé strict de X en $\overline{x}$ et $G = \mathrm{Aut}(\overline{X}/X) \simeq \mathrm{Aut}(\overline{x}/x)$ le groupe profini des automorphismes du X-schéma $\overline{X}$. Alors G agit continument sur le complexe $F(\overline{X})$ muni de la topologie discrète. De plus, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(X;F) \simeq \mathrm{R}\Gamma(G;F(\overline{X})).$$

Étant donné que $F(\overline{X})$ est un complexe de $\mathbb{Q}$-vectoriels, $\mathrm{R}\Gamma(G;F(\overline{X}))$ est quasi-isomorphe à $F(\overline{X})^G$. Étant donné que F est un complexe de fét-faisceaux, on a $F(\overline{X})^G \simeq F(X)$. ■

Le résultat principal de cette section s'énonce comme suit.

Théorème 4.4. — *On suppose l'hypothèse 4.2 vérifiée. Soit L un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k. *Si L est localement n-connexe pour la topologie τ, il en est de même de son $\mathbb{P}^1$-localisé* $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(L)$.

Pour la preuve du théorème 4.4, on a besoin de deux autres notions de connexité.

Définition 4.5. — *Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier. Soit L un complexe de préfaisceaux sur* Sm/k.

(i) On dit que L est génériquement n-connexe si pour tout k-schéma lisse et connexe X de point générique η_X, le complexe $L(\eta_X)$ est n-connexe (i.e., $\mathrm{H}_i(L(\eta_X)) = 0$ *pour $i \leqslant n$).*

(ii) On dit que L est n-préconnexe si pour tout k-schéma essentiellement lisse X, le complexe $L(X)$ est $(n - \dim(X))$*-connexe (i.e.,* $\mathrm{H}_i(L(X)) = 0$ *pour $i \leqslant n - \dim(X)$).*

Remarque 4.6. — Précisons ce que nous entendons par « essentiellement lisse » dans cet article. Un k-schéma X est dit essentiellement lisse s'il existe un k-schéma lisse W et un morphisme de k-schémas $j : X \longrightarrow W$ vérifiant la condition suivante : l'ensemble des voisinages ouverts de $j(X)$ dans W contient une famille cofinale $(W_i)_{i\in I}$ aux inclusions $W_{i_1} \hookrightarrow W_{i_2}$ affines pour tout $i_1 \leqslant i_2$ et le morphisme j induit un isomorphisme $X \simeq \lim_{i\in I} W_i$. Le pro-schéma $(W_i)_{i\in I}$ ne dépend que de X à un unique isomorphisme près. Étant donné un préfaisceau F sur Sm/k, on peut alors poser $F(X) = \mathrm{colim}_{i\in I} F(W_i)$. Ceci permet d'étendre F aux k-schémas essentiellement lisses. □

Remarque 4.7. — Un complexe de préfaisceaux n-préconnexe est clairement génériquement n-connexe, mais la réciproque est fausse. Étant donnée une équivalence Nis-locale $F \longrightarrow G$, F est génériquement n-connexe si et seulement si G est génériquement n-connexe. L'analogue de cette propriété pour la notion de n-préconnexité est fausse ; voir toutefois le corollaire 4.10 ci-dessous. □

Proposition 4.8. — *On suppose l'hypothèse 4.2 vérifiée. Soit L un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k *que l'on suppose n-préconnexe. Pour tout k-schéma essentiellement lisse X, on a* $\mathrm{H}^i_\tau(X; L) = 0$ *pour $i \geqslant \dim(X) - n$.*

Démonstration. — Si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, le complexe de préfaisceaux $\mathrm{a}_{\text{fét}}(L)$ est encore n-préconnexe et grâce au lemme 4.3 on a $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X; L) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{Nis}}(X; \mathrm{a}_{\text{fét}}(L))$. Quitte à remplacer L par $\mathrm{a}_{\text{fét}}(L)$, on peut donc supposer que τ est la topologie Nisnevich.

On ne restreint pas la généralité en supposant que $n = -1$. Dans ce cas, on cherche à montrer que $\mathrm{H}^i_{\mathrm{Nis}}(X; L) = 0$ pour $i > \dim(X)$. Par un argument de suite spectrale, il est suffisant de montrer que

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{Nis}}(X; \mathrm{H}^j(L)) = 0$$

pour $i > \dim(X) - j$. Lorsque $j \leqslant 0$, ceci découle de la borne usuelle sur la dimension cohomologique du petit site Nisnevich d'un schéma (voir par exemple [**21**, §3.1, Proposition 1.8]). On peut donc supposer que $j > 0$. Puisque L est (-1)-préconnexe, pour tout $x \in X$ de codimension strictement inférieure à j, on a $\mathrm{H}^j(L)(\mathcal{O}_{X,x}) = 0$. Le résultat recherché découle alors du lemme 4.9 ci-dessous. ■

Lemme 4.9. — *Soit X un schéma noethérien de dimension finie et soit F un préfaisceau de groupes abéliens sur* Et/X. *On fixe un entier $j \in \mathbb{N}$, et on suppose que $F(\mathcal{O}_{X',x'}) = 0$ pour tout X-schéma étale X' et tout point $x' \in X'$ de codimension strictement inférieure à j. Alors, on a* $\mathrm{H}^i_{\mathrm{Nis}}(X; F) = 0$ *pour $i > \dim(X) - j$.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que F est un faisceau Nisnevich. Clairement, F est la réunion filtrante de ses sous-faisceaux qui sont engendrés par un nombre fini de sections. (Un faisceau Nisnevich est engendré par un nombre fini de sections si et seulement si il s'écrit comme un quotient d'une somme finie de faisceaux de la forme $\mathrm{a}_{\mathrm{Nis}}(U \otimes \Lambda)$, avec $U \in \mathrm{Et}/X$.) Étant donné que la cohomologie Nisnevich commute aux colimites filtrantes et que l'hypothèse sur F vaut aussi pour ses sous-faisceaux, on peut supposer que F est lui-même engendré par un nombre fini de sections.

Notons $Z \subset X$ le support de F. On rappelle que Z est le plus petit fermé tel que la restriction de F à $\mathrm{Et}/(X \smallsetminus Z)$ soit nulle. Puisque F est engendré par un nombre fini de sections, $X \smallsetminus Z$ est aussi l'ensemble des points $x \in X$ tels que la restriction de F à $\mathrm{Et}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est nulle. (En effet, supposons que F est engendré par des sections $s_i \in F(U_i)$, pour $i \in I$, avec I fini. La restriction de F à $\mathrm{Et}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est nulle si et seulement si les sections $s_i|_{U_i \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})}$ sont toutes nulles. Puisque I est fini, cette dernière condition équivaut à l'existence d'un voisinage ouvert $Y \subset X$ de x tel que les sections $s_i|_{U_i \times_X Y}$ sont toutes nulles, ce qui entraîne que la restriction de F à Et/Y est nulle.)

Soit $z \in Z$ un point du support de F. D'après ce qui précède, la restriction de F à $\mathrm{Et}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,z})$ est non nulle. Il existe donc un X-schéma étale X' tel que $F(X' \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,z})) \neq 0$. On peut donc trouver $x' \in X'$ dont l'image dans X est contenue dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,z})$ et telle que $F(\mathcal{O}_{X',x'}) \neq 0$. D'après l'hypothèse sur F, la codimension de x' dans X' est nécessairement supérieure ou égale à j. Il s'ensuit aussitôt que z est de codimension supérieure ou égale à j dans X. Ceci montre que le fermé $Z \subset X$ est de codimension supérieure ou égale à j. On en déduit que $\dim(Z) \leqslant \dim(X) - j$.

Il est maintenant aisé de conclure. Appelons $\iota : Z \hookrightarrow X$ l'inclusion évidente. Par la propriété de localisation pour les faisceaux Nisnevich, on a $F \simeq \iota_* G$ avec $G = \iota^* F$. (Voir [**1**, Exposé VIII, Théorème 6.3] dont la preuve vaut également pour la topologie Nisnevich.) Puisque ι_* est un foncteur exact des catégories des faisceaux Nisnevich, il s'ensuit que

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{Nis}}(X; F) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{Nis}}(Z; G).$$

Le résultat recherché découle maintenant de la borne usuelle sur la dimension cohomologique du petit site Nisnevich d'un schéma (voir par exemple [**21**, §3.1, Proposition 1.8]). ■

La propriété de permanence suivante sera cruciale pour la preuve du théorème 4.4.

Corollaire 4.10. — *On suppose l'hypothèse 4.2 vérifiée. Soit L un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k *et soit $L \longrightarrow G$ un remplacement τ-fibrant de L. Si L est n-préconnexe, il en est de même de G.*

Démonstration. — Puisque $\mathrm{H}_i(G(X)) = \mathrm{H}^{-i}_{\tau}(X; L)$ pour tout k-schéma essentiellement lisse X, l'assertion découle de la proposition 4.8. ■

On a besoin aussi des trois propriétés de permanence ci-dessous.

Lemme 4.11. —

(a) Soient F et L des complexes de préfaisceaux sur Sm/k. *On suppose que F est m-connexe et que L est n-préconnexe. Alors, le complexe de préfaisceaux $F \otimes L$ est $(m+n+1)$-préconnexe.*

(b) Soit X un k-schéma lisse et soit L un complexe de préfaisceaux sur Sm/k. *On suppose que L est n-préconnexe. Alors, le complexe de préfaisceaux $\underline{\mathrm{Hom}}(X, L)$ est $(n - \dim(X))$-préconnexe.*

(c) Soit $a : M \longrightarrow L$ un morphisme de complexes de préfaisceaux sur Sm/k. *On suppose que L est n-préconnexe et que M est $(n-1)$-préconnexe. Alors, le complexe de préfaisceaux* $\mathrm{Cône}(a)$ *est n-préconnexe.*

Démonstration. — C'est évident. ■

On est maintenant en mesure d'établir le résultat préliminaire suivant.

Théorème 4.12. — *On suppose l'hypothèse 4.2 vérifiée. Soit L un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k *et soit H un remplacement $(\mathbb{P}^1, \tau)$-fibrant de L. Si L est n-préconnexe, il en est de même de H.*

Démonstration. — D'après le théorème 2.7, on dispose d'une description explicite de H comme colimite de la suite $(\Phi_\tau^{\circ n}(L))_{n \in \mathbb{N}}$ où Φ_τ est l'endofoncteur de la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k; \Lambda))$ introduit dans la construction 2.6. Il est donc suffisant de montrer que l'endofoncteur Φ_τ préserve les complexes de préfaisceaux n-préconnexes. Soit donc L un complexe de préfaisceaux n-préconnexe. Rappelons que

$$\Phi_\tau(L) = \mathrm{Cône}\left\{(\mathbb{P}^1, \infty) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), L_{\tau\text{-fib}}) \to L_{\tau\text{-fib}}\right\}.$$

D'après le corollaire 4.10, le complexe de préfaisceaux $L_{\tau\text{-fib}}$ est encore n-préconnexe. Grâce au lemme 4.11(a,b), il s'ensuit que $(\mathbb{P}^1, \infty) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), L_{\tau\text{-fib}})$ est $(n-1)$-préconnexe. Le lemme 4.11(c) permet alors de conclure. ■

On explique maintenant comment déduire le théorème principal de cette section du théorème 4.12.

Démonstration du théorème 4.4. — Soit L un complexe de préfaisceaux sur Sm/k localement n-connexe pour la topologie τ. Si X est un k-schéma essentiellement lisse, la n-connexité locale de L entraîne que $\mathrm{H}^i_\tau(X; L) = 0$ pour $i \geqslant \dim(X) - n$. (On utilise ici le lemme 4.3 lorsque τ est la topologie étale ainsi que la borne usuelle sur la dimension cohomologique du petit site Nisnevich d'un schéma [**21**, §3.1, Proposition 1.8].) Ainsi, si G est un remplacement τ-fibrant de L, le complexe de préfaisceaux G est n-préconnexe. D'après le théorème 4.12, un remplacement $(\mathbb{P}^1, \tau)$-fibrant H de G est aussi n-préconnexe. Or, le complexe de préfaisceaux H est isomorphe à $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(L)$ dans $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k; \Lambda))$, et il est donc suffisant de montrer que H est localement n-connexe pour la topologie τ. Bien entendu, il sera plus précis de montrer que H est localement n-connexe pour la topologie Nisnevich.

Puisqu'il est $(\mathbb{P}^1, \tau)$-fibrant, et donc aussi $(\mathbb{P}^1, \mathrm{Nis})$-fibrant, le complexe de préfaisceaux H est $\mathbb{P}^1$-local en tant qu'objet de $\mathbf{D}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k; \Lambda))$. Puisqu'il est n-préconnexe, le complexe de préfaisceaux H est génériquement n-connexe. Le lemme 4.13 ci-dessous entraîne donc que H est localement n-connexe pour la topologie Nisnevich comme souhaité. ■

Lemme 4.13. — *Soit L un complexe de préfaisceaux sur* Sm/k*. On suppose que L est génériquement n-connexe et qu'il est $\mathbb{P}^1$-local en tant qu'objet de* $\mathbf{D}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k; \mathbb{Z}))$*. Alors, L est localement n-connexe pour la topologie Nisnevich.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que L est $(\mathbb{P}^1, \mathrm{Nis})$-fibrant. On cherche à montrer que L est localement n-connexe pour la topologie Nisnevich et il est plus précis de montrer qu'il est localement n-connexe pour la topologie Zariski.

Donnons-nous un k-schéma lisse X et un point $x \in X$. Notons η le point générique de la composante connexe de X contenant x. Il découle du sous-lemme 4.14 ci-dessous que le morphisme

$$\mathrm{H}_i(L(\mathcal{O}_{X,x})) \longrightarrow \mathrm{H}_i(L(\eta))$$

est injectif pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Or, $\mathrm{H}_i(L(\eta)) = 0$ pour $i \leqslant n$ car L est supposé génériquement n-connexe. Il s'ensuit que $\mathrm{H}_i(L(\mathcal{O}_{X,x})) = 0$ pour $i \leqslant n$ comme souhaité. ■

Le résultat ci-dessous est une variante du théorème d'effacement de Bloch–Ogus–Gabber.

Sous-lemme 4.14. — *Soit L un complexe de préfaisceaux sur* Sm/k*. On suppose que L est* $(\mathbb{P}^1, \mathrm{Nis})$*-fibrant. Soit X un k-schéma lisse et fixons un point $x \in X$. Soit $\alpha \in$* $\mathrm{H}_i(L(X))$ *et supposons qu'il existe un ouvert dense $U \subset X$ tel que $\alpha|_U = 0$. Alors, il existe un voisinage ouvert $x \in V \subset X$ tel que $\alpha|_V = 0$.*

Démonstration. — Il s'agit d'un cas particulier de [**8**, Theorem 5.1.10]. En effet, il est clair que L vérifie les conditions (SUB1) et (SUB2) de [**8**, §5.1]. Toutefois, pour la commodité du lecteur, nous incluons une preuve en admettant le lemme de présentation de Gabber [**8**, Theorem 3.1.1] (et son extension aux corps finis [**15**, Theorem 1.1]) ; en fait, on a seulement besoin d'une version faible dudit lemme.

On peut supposer que X est connexe. On fixe un ouvert non vide $U \subset X$ tel que $\alpha|_U = 0$ et on pose $Z = X \smallsetminus U$. D'après [**8**, Theorem 3.1.1] et [**15**, Theorem 1.1], quitte à remplacer X par un voisinage ouvert de x, on peut trouver un k-schéma lisse Y et un morphisme étale $e : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_Y$ vérifiant les conditions suivantes.

(i) Les morphismes évidents $Z \longrightarrow e^{-1}(e(Z))$ et $e^{-1}(e(Z)) \longrightarrow e(Z)$ sont des isomorphismes. Autrement dit, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X \smallsetminus Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "e"] \\ \mathbb{A}^1_Y \smallsetminus e(Z) \arrow[r] & \mathbb{A}^1_Y \end{tikzcd}$$

qui est distingué pour la topologie Nisnevich.

(ii) La composition de

$$Z \hookrightarrow X \xrightarrow{e} \mathbb{A}^1_Y \xrightarrow{\mathrm{pr}} Y$$

est un morphisme fini.

Nous allons voir que ces propriétés entraînent que la classe d'homologie $\alpha \in \mathrm{H}_i(L(X))$ est déjà nulle.

Identifions Z à un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^1_Y$. Grâce à la propriété (ii), Z est aussi un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^1_Y$. (L'inclusion étant donnée par la composition de $Z \hookrightarrow \mathbb{A}^1_Y \hookrightarrow \mathbb{P}^1_Y$.) De plus, ce sous-schéma fermé est disjoint de la section infinie $\infty_Y \subset \mathbb{P}^1_Y$. Ainsi, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X \smallsetminus Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1_Y \smallsetminus Z \arrow[r] & \mathbb{P}^1_Y \end{tikzcd}$$

qui est aussi distingué pour la topologie Nisnevich. On pose :

$$L_Z(X) = \mathrm{hofib}\{L(X) \longrightarrow L(X \smallsetminus Z)\} \quad \text{et} \quad L_Z(\mathbb{P}^1_Y) = \mathrm{hofib}\{L(\mathbb{P}^1_Y) \longrightarrow L(\mathbb{P}^1_Y \smallsetminus Z)\}.$$

Étant donné que L est Nis-fibrant, la flèche verticale de gauche dans le morphisme de triangles distingués

$$\begin{tikzcd} L_Z(\mathbb{P}^1_Y) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\text{q.-i.}"] & L(\mathbb{P}^1_Y) \arrow[r] \arrow[d] & L(\mathbb{P}^1_Y \smallsetminus Z) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\ L_Z(X) \arrow[r, "\delta_1"] & L(X) \arrow[r] & L(X \smallsetminus Z) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

est un quasi-isomorphisme.

Revenons maintenant au problème qui nous intéresse. On dispose d'une classe d'homologie $\alpha \in \mathrm{H}_i(L(X))$ telle que $\alpha|_{X \smallsetminus Z} = 0$. Nous allons montrer que $\alpha = 0$. D'après le diagramme précédent, il existe $\beta_1 \in \mathrm{H}_i(L_Z(X))$ telle que $\delta_1(\beta_1) = \alpha$. Via le quasi-isomorphisme dans le diagramme ci-dessus, la classe β_1 provient d'une unique classe $\beta_2 \in \mathrm{H}_i(L_Z(\mathbb{P}^1_Y))$. On pose $\alpha_2 = \delta_2(\beta_2)$. Clairement, α est l'image de α_2 par $L(\mathbb{P}^1_Y) \longrightarrow L(X)$. Pour conclure, il est donc suffisant de montrer que $\alpha_2 = 0$. Nous montrerons plus précisément que le morphisme δ_2 est nul.

Pour ce faire, on utilise que le fermé ∞_Y est contenu dans $\mathbb{P}^1_Y \smallsetminus Z$. On peut donc compléter le diagramme ci-dessous en un morphisme de triangles distingués

$$\begin{tikzcd} L_Z(\mathbb{P}^1_Y) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, dotted] & L(\mathbb{P}^1_Y) \arrow[r] \arrow[d, equal] & L(\mathbb{P}^1_Y \smallsetminus Z) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\ L(\mathbb{P}^1_Y, \infty_Y) \arrow[r] & L(\mathbb{P}^1_Y) \arrow[r] & L(\infty_Y) \arrow[r] & {}. \end{tikzcd}$$

Ceci montre que le morphisme δ_2 se factorise à travers le complexe $L(\mathbb{P}^1_Y, \infty_Y)$. Puisque L est $(\mathbb{P}^1, \mathrm{Nis})$-fibrant, le complexe $L(\mathbb{P}^1_Y, \infty_Y)$ est acyclique. Ceci permet de conclure. ∎

On termine la section en développant quelques applications du théorème 4.4. Rappelons que la catégorie triangulée $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$ possède une t-structure naturelle dont le cœur est equivalent à la catégorie abélienne $\mathbf{Shv}_\tau(\mathrm{Sm}/k;\Lambda)$ des τ-faisceaux. (En effet, la catégorie triangulée en question est équivalente à $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}_\tau(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$.) On note $\tau_{\geqslant n}$ et $\tau_{\leqslant n}$ les foncteurs de troncation. (On adopte la convention homologique : $\tau_{\geqslant n}L$ est localement $(n-1)$-connexe pour tout complexe de préfaisceaux L.)

Théorème 4.15. — *On suppose l'hypothèse 4.2 vérifiée. Soit L un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k. *On suppose que L est $\mathbb{P}^1$-local en tant qu'objet de* $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$. *Alors, il en est de même des complexes tronqués $\tau_{\geqslant n}L$ et $\tau_{\leqslant n}L$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas du complexe $\tau_{\geqslant 0}L$ car la $\mathbb{P}^1$-localité est stable par décalage et vérifie la propriété deux de trois dans les triangles distingués. Remarquons que les foncteurs de troncation sur les complexes de préfaisceaux préservent les équivalences τ-locales et se dérivent donc trivialement.

On dispose d'un morphisme évident $e : \tau_{\geqslant 0}L \longrightarrow L$. Étant donné que L est $\mathbb{P}^1$-local, ce morphisme se factorise uniquement comme suit :

$$\begin{tikzcd} \tau_{\geqslant 0}L \arrow[r, "e_0"'] \arrow[rr, bend left, "e"] & \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(\tau_{\geqslant 0}L) \arrow[r, "\ell"'] & L. \end{tikzcd}$$

D'après le théorème 4.4, $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(\tau_{\geqslant 0}L)$ est un objet positif de $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$ relativement à la t-structure naturelle. Ainsi, le morphisme $\ell : \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(\tau_{\geqslant 0}L) \longrightarrow L$ se factorise uniquement comme suit :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(\tau_{\geqslant 0}L) \arrow[r, "\ell_0"'] \arrow[rr, bend left, "\ell"] & \tau_{\geqslant 0}L \arrow[r, "e"'] & L. \end{tikzcd}$$

On a alors un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \tau_{\geqslant 0}L \arrow[r, "\ell_0\circ e_0"] \arrow[dr, "e"'] & \tau_{\geqslant 0}L \arrow[d, "e"] \\ & L, \end{tikzcd}$$

ce qui montre que $\ell_0 \circ e_0$ est l'identité de $\tau_{\geqslant 0}L$. (Utiliser la propriété universelle des troncations.) Ainsi, $\tau_{\geqslant 0}L$ est un facteur direct de $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(\tau_{\geqslant 0}L)$ et il est donc $\mathbb{P}^1$-local comme shouhaité. ■

Définition 4.16. — *Soit F un τ-faisceau de Λ-modules sur* Sm/k. *On dit que F est strictement $\mathbb{P}^1$-invariant (relativement à la topologie τ) si les préfaisceaux de cohomologie $\mathrm{H}^i_\tau(-;F)$ sont $\mathbb{P}^1$-invariants pour tout $i \in \mathbb{N}$. (Voir la remarque 2.4.) Il revient au même de dire que le complexe $F[0]$, vu comme objet de* $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$, *est $\mathbb{P}^1$-local. On note* $\mathbf{PI}_\tau(k;\Lambda)$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Shv}_\tau(\mathrm{Sm}/k;\Lambda)$ *formée des faisceaux strictement $\mathbb{P}^1$-invariants.*

Remarque 4.17. — La « $\mathbb{P}^1$-invariance stricte » est l'analogue direct de la notion de « $\mathbb{A}^1$-invariance stricte » introduite par Morel dans [**20**, Definition 6.2.1]. Dans la section 3 nous avons donné plusieurs exemples de τ-faisceaux strictement $\mathbb{P}^1$-invariants :

— (pour $\tau \in \{\mathrm{Zar}, \mathrm{Nis}, \text{ét}\}$) le τ-faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions régulières, un produit de $\mathcal{O}$ et le τ-faisceau $\mathcal{O}_{\mathrm{pp}}$;

— (pour $\tau = \mathrm{Nis}$) les faisceaux Nisnevich birationnels au sens de [**17**, Definition 2.3.1].

En effet, rappelons-le, un τ-faisceau est strictement $\mathbb{P}^1$-invariant si et seulement si il est $\mathbb{P}^1$-local en tant qu'objet de $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$. □

Corollaire 4.18. — *On suppose l'hypothèse 4.2 vérifiée. Soit L un objet de* $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$. *Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) L est $\mathbb{P}^1$-local.

(b) Les faisceaux d'homologie $\mathrm{a}_\tau\mathrm{H}_i(L)$ sont strictement $\mathbb{P}^1$-invariants pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — L'implication (b) $\Rightarrow$ (a) s'obtient par un argument de suite spectrale. L'implication réciproque découle du théorème 4.15 et de la formule $\mathrm{a}_\tau\mathrm{H}_i(L)[i] \simeq \tau_{\leqslant i}(\tau_{\geqslant i}(L))$. □

Proposition 4.19. — *On suppose l'hypothèse 4.2 vérifiée. L'inclusion* $\mathbf{PI}_\tau(k;\Lambda) \hookrightarrow \mathbf{Shv}_\tau(\mathrm{Sm}/k;\Lambda)$ *admet un adjoint à gauche donné par le foncteur composé* $\mathrm{h}_{\mathbb{P}^1,\tau}(-) = \mathrm{a}_\tau\mathrm{H}_0(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(-))$.

Démonstration. — En effet, soient F et G des τ-faisceaux sur Sm/k et supposons que G est strictement $\mathbb{P}^1$-invariant. Rappelons que ceci veut dire que le complexe $G[0]$ est $\mathbb{P}^1$-local. Ainsi, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_\tau(\mathrm{Sm}/k;\Lambda)}(F,G) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))}(F,G) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))}(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(F),G) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))}(\tau_{\leqslant 0}\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(F),G) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{PI}_\tau(k;\Lambda)}(\mathrm{a}_\tau\mathrm{H}_0(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(F)),G). \end{aligned}$$

Ci-dessus, nous avons utilisé le théorème 4.4 qui entraîne que $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(F)$ est positif (relativement à la t-structure naturelle) pour déduire que $\tau_{\leqslant 0}\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(F) \simeq \mathrm{a}_\tau \mathrm{H}_0(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\tau}(F))[0]$. ■

PROPOSITION 4.20. — *On suppose l'hypothèse 4.2 vérifiée. Soit F un τ-faisceau strictement $\mathbb{P}^1$-invariant sur* Sm/k. *Alors, pour tout k-schéma lisse X et tout ouvert dense $U \subset X$, le morphisme de restriction $F(X) \longrightarrow F(U)$ est injectif.*

Démonstration. — En effet, soit $\alpha \in F(X)$ une section telle que $\alpha|_U = 0$. Pour montrer que α est nulle, il suffit de montrer que pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $x \in V \subset X$ tel que $\alpha|_V = 0$. Soit L un remplacement τ-fibrant de $F[0]$. Puisque F est $\mathbb{P}^1$-local, L est $(\mathbb{P}^1,\tau)$-fibrant. De plus, on a $F(-) \simeq \mathrm{H}_0(L(-))$. Le résultat recherché découle alors du sous-lemme 4.14 appliqué à L. ■

On termine la section avec l'énoncé suivant dont la validité est claire à présent.

THÉORÈME 4.21. — *On suppose l'hypothèse 4.2 vérifiée. Considérons le plongement pleinement fidèle*

$$\mathbf{D}_{\mathbb{P}^1,\tau}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda)) \hookrightarrow \mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$$

qui identifie $\mathbf{D}_{\mathbb{P}^1,\tau}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$ avec la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$ formée des objets $\mathbb{P}^1$-locaux. Alors, la t-structure naturelle sur la catégorie $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$ se restreint en une t-structure sur la catégorie $\mathbf{D}_{\mathbb{P}^1,\tau}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;\Lambda))$ qu'on appelle la t-structure homotopique. Le cœur de la t-structure homotopique est naturellement équivalent à la catégorie $\mathbf{PI}_\tau(k;\Lambda)$ (qui est donc abélienne).

5. Sur la $\mathbb{P}^1$-localisation des faisceaux de formes différentielles

Dans cette section, on fixe un corps de base k que l'on suppose de caractéristique nulle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\Omega^n_{/k}$ le préfaisceau des formes différentielles algébriques de degré n sur Sm/k. La restriction de $\Omega^n_{/k}$ au petit site étale d'un k-schéma lisse X est le $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\Omega^n_{X/k}$. En particulier, $\Omega^n_{/k}$ est un faisceau étale sur Sm/k. Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 5.1. — *Le complexe de préfaisceaux $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^n_{/k})$ est localement $(n-1)$-connexe pour la topologie étale.*

On établit d'abord une réduction.

LEMME 5.2. — *Il suffit de démontrer le théorème 5.1 pour $n = 1$.*

Démonstration. — D'après le sous-lemme 5.3 ci-dessous, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^n_{/k}) \simeq \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}\left({}^{\mathrm{L}}\textstyle\bigwedge^n_{\mathcal{O}} \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/k})\right)$$

dans $\mathbf{D}_{\text{ét}}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;k))$. (Ici, la puissance extérieure est définie comme étant l'image du projecteur d'anti-symétrisation agissant sur la puissance tensorielle, ce qui est loisible car k est de caractéristique nulle.) Or, si l'on admet que $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/k})$ est localement 0-connexe, le complexe de préfaisceaux

$${}^{\mathrm{L}}\textstyle\bigwedge^n_{\mathcal{O}} \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/k})$$

est localement $(n-1)$-connexe et le théorème 4.4 permet de conlcure. ■

SOUS-LEMME 5.3. — *Soit S un schéma de base, et soit $\mathcal{A}$ un préfaisceau de $\mathbb{Q}$-algèbres commutatives sur* Sm/S. *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des complexes de préfaisceaux de $\mathcal{A}$-modules. Alors,* $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\mathcal{M})$ *et* $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\mathcal{N})$ *sont encore des complexes de préfaisceaux de $\mathcal{A}$-modules, et on a un isomorphisme canonique dans* $\mathbf{D}_{\text{ét}}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S;\mathcal{A}))$ *:*

$$\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\mathcal{M} \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{N}) \simeq \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\mathcal{M}) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\mathcal{N})).$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que le morphisme évident

$$\mathcal{M} \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\mathcal{M}) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\mathcal{N})$$

est une équivalence $(\mathbb{P}^1, \text{ét})$-locale. On se ramène aussitôt à montrer que l'endofoncteur $\mathcal{L} \,{}^{\mathrm{L}}\!\otimes_{\mathcal{A}} -$ préserve les équivalences $(\mathbb{P}^1, \text{ét})$-locales entre complexes de préfaisceaux de $\mathcal{A}$-modules, et cela pour tout complexe de préfaisceaux de $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{L}$. On ne restreint pas la généralité en supposant que $\mathcal{L}$ est cofibrant (pour la structure de modèles sur la catégorie des $\mathcal{A}$-modules de [**26**, Theorem 4.1]). Par un argument de passage à la colimite, on se ramène même au cas où $\mathcal{L} = X \otimes \mathcal{A}$ avec X un S-schéma lisse. Le résultat recherché est immédiat dans ce cas. ∎

Dans la suite, on se concentre sur le cas $n = 1$ du théorème 5.1 et on cherche à montrer que $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(\Omega^1_{/k})$ est localement 0-connexe pour la topologie étale. On commence par donner une liste de conditions équivalentes à la 0-connexité locale pour la $\mathbb{P}^1$-localisation d'un faisceau étale.

Proposition 5.4. — *On suppose que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Soit F un faisceau étale de Λ-modules. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) Le complexe de préfaisceaux $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(F)$ est localement 0-connexe.

(b) Le faisceau étale $\mathrm{h}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(F)$ est nul.

(c) Pour tout k-schéma lisse X, on a $\Gamma(\eta_X; \mathrm{h}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(F)) = 0$.

(d) Le morphisme évident $F \longrightarrow \mathrm{h}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(F)$ est nul.

(e) Tout morphisme de faisceaux étales $F \longrightarrow G$, avec G strictement $\mathbb{P}^1$-invariant, est nul.

(Ci-dessus, η_X désigne le schéma des points génériques de X et le foncteur $\mathrm{h}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(-)$ est celui introduit dans la proposition 4.19.)

Démonstration. — D'après le théorème 4.4, le complexe $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(F)$ est localement (-1)-connexe. Ainsi, pour qu'il soit localement 0-connexe, il faut et il suffit que son 0-ième faisceau d'homologie $\mathrm{h}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(F)$ soit nul. Ceci montre l'équivalence (a) ⇔ (b). L'équivalence (b) ⇔ (c) découle de la proposition 4.20. L'équivalence (b) ⇔ (e) découle de la proposition 4.19 qui affirme que $\mathrm{h}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(F)$ coreprésente le foncteur

$$\mathrm{Hom}(F, -) : \mathbf{PI}_{\text{ét}}(k; \Lambda) \longrightarrow \mathbf{Mod}(\Lambda).$$

De même, l'équivalence (d) ⇔ (e) découle de la proposition 4.19 qui affirme que $F \longrightarrow \mathrm{h}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(F)$ est initial parmi les morphismes $F \longrightarrow G$, avec G strictement $\mathbb{P}^1$-invariant. ∎

Pour démontrer le cas $n = 1$ du théorème 5.1, nous procédons par l'absurde en supposant que le faisceau $\mathrm{h}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(\Omega^1_{/k})$ est non nul.

Lemme 5.5. — *(Sous l'hypothèse $\mathrm{h}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(\Omega^1_{/k}) \neq 0$.) Le morphisme évident $\Omega^1_{/k} \longrightarrow \mathrm{h}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(\Omega^1_{/k})$ est injectif.*

Démonstration. — Appelons $\mathcal{N} \subset \Omega^1_{/k}$ le noyau du morphisme $\Omega^1_{/k} \longrightarrow \mathrm{h}_{\mathbb{P}^1, \text{ét}}(\Omega^1_{/k})$. Ce morphisme est non nul d'après la proposition 5.4. De plus, ce morphisme est $\mathcal{O}$-linéaire. (En effet, d'après la remarque 2.8, un remplacement $(\mathbb{P}^1, \text{ét})$-fibrant de $\Omega^1_{/k}$ admet naturellement une structure de $\mathcal{O}$-module compatible à celle de $\Omega^1_{/k}$.) Ainsi, $\mathcal{N}$ est un sous-$\mathcal{O}$-module strict de $\Omega^1_{/k}$. D'après le sous-lemme 5.6 ci-dessous, $\mathcal{N}$ est nécessairement nul. ∎

Sous-lemme 5.6. — *Le faisceau étale de $\mathcal{O}$-modules $\Omega^1_{/k}$ est simple : si $\mathcal{K} \subset \Omega^1_{/k}$ est un sous-faisceau étale de $\mathcal{O}$-modules, alors $\mathcal{K} = 0$ ou $\mathcal{K} = \Omega^1_{/k}$.*

Démonstration. — On suppose que $\mathcal{K}$ est non nul et on montre que $\mathcal{K} = \Omega^1_{/k}$. On peut trouver un k-schéma lisse X et une forme différentielle non nulle $\omega \in \mathcal{K}(X)$. Il existe alors un courbe lisse et connexe $C \subset X$ telle que $\omega|_C \neq 0$. En effet, quitte à remplacer X par un ouvert dense on peut trouver un morphisme étale $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k[t_1, \cdots, t_n])$, ce qui permet d'écrire $\omega = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathrm{d}t_i$ avec $a_i \in \mathcal{O}(X)$. On suppose que $a_1 \neq 0$, ce qui ne restreint pas la généralité. On peut trouver des scalaires $c_2, \cdots, c_n$ dans k tel que a_1 ne s'annule pas identiquement sur la courbe $C \subset X$ définie par les équations $t_2 - c_2 = \cdots = t_n - c_n = 0$. (En effet, puisque k est infini, la réunion des courbes ainsi définies est Zariski dense dans X.) La restriction de ω à C est alors non nulle comme souhaité.

Puisque $\omega|_{\eta_C}$ est non nul, c'est un générateur du $\mathcal{O}(\eta_C)$-vectoriel $\Omega^1_{/k}(\eta_C)$, et on a donc $\mathcal{K}(\eta_C) = \Omega^1_{/k}(\eta_C)$. Quitte à remplacer C par un C-schéma étale convenable (ce qui ne détruit pas la dernière égalité), on peut supposer qu'il existe un morphisme étale $C \longrightarrow \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(k[t])$ génériquement Galoisien de groupe G. Puisque $\mathcal{K}$ est un faisceau étale, on a $\mathcal{K}(k(t)) = \mathcal{K}(\eta_C)^G$. La même formule étant valable pour « $\Omega^1_{/k}$ » au lieu de « $\mathcal{K}$ », on déduit que $\mathcal{K}(k(t)) = \Omega^1_{/k}(k(t))$.

D'après ce qui précède, on a $\mathrm{d}t \in \mathcal{K}(k(t))$ et on peut donc trouver un ouvert non vide $U \subset \mathbb{A}^1$ tel que $\mathrm{d}t \in \mathcal{K}(U)$. Puisque $\mathcal{K}$ est un sous-$\mathcal{O}$-module de $\Omega^1_{/k}$, il s'ensuit que $\mathcal{K}(V) = \Omega^1_{/k}(V)$ pour tout ouvert $V \subset U$. On peut écrire $\mathbb{A}^1$ comme l'union de U et d'un translaté U' de U. (Plus précisément, U' est l'image de U par un endomorphisme de $\mathbb{A}^1$ correspondant à la substitution $t \rightsquigarrow t + c$ avec $c \in k$ suffisamment général.) On a encore $\mathcal{K}(V') = \Omega^1_{/k}(V')$ pour tout ouvert $V' \subset U'$. (Utiliser que $\mathcal{K}$ et $\Omega^1_{/k}$ sont définis sur Sm/k.) Puisque $\mathcal{K}$ et $\Omega^1_{/k}$ sont des faisceaux Zariski, on a $\mathcal{K}(\mathbb{A}^1) = \mathcal{K}(U) \times_{\mathcal{K}(U\cap U')} \mathcal{K}(U')$ et de même pour « $\Omega^1_{/k}$ » au lieu de « $\mathcal{K}$ ». Ceci montre que $\mathcal{K}(\mathbb{A}^1) = \Omega^1_{/k}(\mathbb{A}^1)$. Il est maintenant aisé de conclure. En effet, pour un k-schéma affine X, le $\mathcal{O}(X)$-module $\Omega^1_{/k}(X)$ est engendré par les images des morphismes $f^* : \Omega^1_{/k}(\mathbb{A}^1) \longrightarrow \Omega^1_{/k}(X)$ associés aux morphismes de k-schémas $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1$. ■

Pour aller plus loin, on doit étudier l'action de l'endofoncteur Φ_τ de la construction 2.6 sur $\Omega^1_{/k}$.

Lemme 5.7. — *Pour $\tau \in \{\mathrm{Zar}, \mathrm{Nis}, \text{ét}\}$, le complexe de préfaisceaux $\Phi_\tau(\Omega^1_{/k})$ est un objet du cœur de la t-structure naturelle sur $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;k))$. Autrement dit, $\Phi_\tau(\Omega^1_{/k})$ s'identifie à un τ-faisceau. De plus, modulo cette identification, on a une suite exacte courte de τ-faisceaux*

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{/k} \longrightarrow \Phi_\tau(\Omega^1_{/k}) \longrightarrow \mathrm{a}_\tau((\mathbb{P}^1,\infty)\otimes\mathcal{O}) \longrightarrow 0. \tag{5.1}$$

Démonstration. — En tant qu'objet de $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;k))$, on a

$$\Phi_\tau(\Omega^1_{/k}) \simeq \text{Cône}\left\{\delta : (\mathbb{P}^1,\infty)\otimes \mathrm{R}_\tau\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1,\infty),\Omega^1_{/k}) \to \Omega^1_{/k}\right\}.$$

Étant donné un k-schéma affine et lisse X, on a

$$\mathrm{H}^i_\tau(\mathbb{P}^1\times X;\Omega^1_{/k}) = \begin{cases} \Omega^1_{/k}(X) & \text{si } i=0,\\ \mathcal{O}(X)\cdot\varepsilon & \text{si } i=1,\\ 0 & \text{si } i\geqslant 2,\end{cases}$$

avec $\varepsilon \in \mathrm{H}^1_\tau(\mathbb{P}^1,\Omega^1_{\mathbb{P}^1/k})$ le générateur représenté par le cocyle

$$\varepsilon = ((\mathbb{P}^1\smallsetminus\{0\},\mathbb{P}^1\smallsetminus\{\infty\}), \mathrm{d}\log t \in \Omega^1_{/k}(\mathbb{P}^1\smallsetminus\{0,\infty\})). \tag{5.2}$$

Ceci fournit un isomorphisme

$$\varepsilon : \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}_\tau\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k,\infty),\Omega^1_{/k})[1]$$

dans $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k;k))$. On a donc par construction un triangle distingué

$$\Omega^1_{/k} \longrightarrow \Phi_\tau(\Omega^1_{/k}) \longrightarrow (\mathbb{P}^1_k,\infty)\otimes\mathcal{O} \longrightarrow \Omega^1_{/k}[1],$$

ce qui permet de conclure. ■

Ci-dessous, on note Φ l'endofoncteur Φ_τ avec τ la topologie grossière.

Proposition 5.8. — *On considère $\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})$ comme un faisceau Zariski grâce au lemme 5.7. Alors, la composition de*

$$\Omega^1_{/k} \longrightarrow \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{Zar}}\mathrm{H}_0(\Phi(\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}))) \tag{5.3}$$

est surjective (en tant que morphisme de faisceaux Zariski).

La proposition 5.8 suffit pour conclure ; expliquons comment.

Preuve du théorème 5.1 (cas $n = 1$). — Rappelons que nous procédons par l'absurde en supposant que le faisceau étale $\mathrm{h}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/k})$ est non nul. D'après le lemme 5.5, ceci entraîne que le morphisme

$$\Omega^1_{/k} \longrightarrow \mathrm{h}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/k})$$

est injectif. Or, ce dernier morphisme se factorise par la composition de (5.3) qui est donc elle aussi injective. La proposition 5.8 entraîne alors que la composition de (5.3) est un isomorphisme. En particulier, $\Omega^1_{/k}$ est facteur direct du faisceau Zariski $\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})$. Or, il découle du lemme 5.7 que le faisceau étale $\Phi_{\text{ét}}(\Omega^1_{/k})$ est isomorphe à $\mathrm{a}_{\text{ét}}(\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}))$. Puisque $\Omega^1_{/k}$ est un faisceau étale, il est donc aussi facteur direct de $\Phi_{\text{ét}}(\Omega^1_{/k})$.

Notons $\rho : \Phi_{\text{ét}}(\Omega^1_{/k}) \longrightarrow \Omega^1_{/k}$ la rétraction construite ci-dessus (ou n'importe quelle autre rétraction). Il est facile de voir que le diagramme infini suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_{/k} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, equal] & \Phi_{\text{ét}}(\Omega^1_{/k}) \arrow[r, "\phi_\Phi"] \arrow[d, "\rho"] & \Phi^{\circ 2}_{\text{ét}}(\Omega^1_{/k}) \arrow[r, "\phi_{\Phi^{\circ 2}}"] \arrow[d, "\Phi(\rho)"] & \Phi^{\circ 3}_{\text{ét}}(\Omega^1_{/k}) \arrow[r, "\phi_{\Phi^{\circ 3}}"] \arrow[d, "\Phi^{\circ 2}(\rho)"] & \cdots \\
& \Omega^1_{/k} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, equal] & \Phi_{\text{ét}}(\Omega^1_{/k}) \arrow[r, "\phi_\Phi"] \arrow[d, "\rho"] & \Phi^{\circ 2}_{\text{ét}}(\Omega^1_{/k}) \arrow[r, "\phi_{\Phi^{\circ 2}}"] \arrow[d, "\Phi(\rho)"] & \cdots \\
& & \Omega^1_{/k} \arrow[r, "\phi"] & \Phi_{\text{ét}}(\Omega^1_{/k}) \arrow[r, "\phi_\Phi"] \arrow[d, "\rho"] & \cdots \\
& & & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}$$

et qu'il induit par passage à la colimite une rétraction $\Phi^{\infty}_{\text{ét}}(\Omega^1_{/k}) \longrightarrow \Omega^1_{/k}$ du morphisme ϕ^∞. Or, d'après le théorème 2.7, $\Phi^{\infty}_{\text{ét}}(\Omega^1_{/k})$ est $(\mathbb{P}^1, \text{ét})$-fibrant. Il en est donc de même de $\Omega^1_{/k}$, ce qui est clairement absurde. (Remarquer en effet que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(k; \Omega^1_{/k}) = 0$ alors que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1; \Omega^1_{/k}) \simeq k$.) ∎

Le reste de la section est consacré à la preuve de la proposition 5.8. On doit d'abord analyser l'extension (5.1) fournie par le lemme 5.7.

Construction 5.9. — Soit X un k-schéma lisse. La suite exacte courte (5.1), avec $\tau = \mathrm{Zar}$, se restreint en une suite exacte courte de faisceaux Zariski sur X :

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/k} \longrightarrow \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})|_X \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{Zar}}((\mathbb{P}^1, \infty) \otimes \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0. \tag{5.4}$$

La donnée d'un morphisme de k-schémas $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ détermine un morphisme de faisceaux Zariski

$$f : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{Zar}}((\mathbb{P}^1, \infty) \otimes \mathcal{O}_X). \tag{5.5}$$

On obtient alors, par pull-back, une suite exacte courte de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents sur X :

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/k} \longrightarrow \mathcal{E}_{X,f} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0. \tag{5.6}$$

Par construction, on dispose d'un morphisme évident $\mathcal{E}_{X,f} \longrightarrow \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})|_X$. □

Le résultat suivant décrit la classe de l'extension (5.6).

Lemme 5.10. — *Soit X un k-schéma lisse et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ un morphisme de k-schémas. Alors, la classe de l'extension $\mathcal{E}_{X,f}$ dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \Omega^1_{X/k}) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(X; \Omega^1_{X/k})$ est égale à l'image de $\varepsilon \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1; \Omega^1_{\mathbb{P}^1/k})$ (voir (5.2)) par le morphisme composé*

$$f^* : \mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1; \Omega^1_{\mathbb{P}^1/k}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(X; f^\star\Omega^1_{\mathbb{P}^1/k}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(X; \Omega^1_{X/k}).$$

Démonstration. — Ceci est tautologique, mais nous donnons les détails pour la commodité du lecteur. D'après la preuve du lemme 5.7, la classe de l'extension (5.1) est donnée par la composition de

$$(\mathbb{P}^1,\infty)\otimes\mathcal{O} \xrightarrow[\text{q.-i.}]{\varepsilon} (\mathbb{P}^1,\infty)\otimes \mathrm{R}_{\mathrm{Zar}}\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1,\infty),\Omega^1_{/k})[1] \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{/k}[1].$$

Par restriction au petit site Zariski de X, on en déduit que la classe de l'extension (5.4) est donnée par la composition de

$$(\mathbb{P}^1,\infty)\otimes\mathcal{O}_X \xrightarrow[\text{q.-i.}]{\varepsilon} (\mathbb{P}^1,\infty)\otimes \mathrm{hofib}\left\{\mathrm{R}_{\mathrm{Zar}}\mathrm{pr}_*\Omega^1_{\mathbb{P}^1_X/k} \xrightarrow{\infty^*} \Omega^1_{X/k}\right\}[1] \longrightarrow \Omega^1_{X/k}[1],$$

avec $\mathrm{pr} : \mathbb{P}^1_X \longrightarrow X$ la projection évidente. La classe de l'extension (5.6) est obtenue en précomposant avec le morphisme $f : \mathcal{O}_X \longrightarrow (\mathbb{P}^1,\infty)\otimes\mathcal{O}_X$. Or, la composition de

$$\mathrm{hofib}\left\{\mathrm{R}_{\mathrm{Zar}}\mathrm{pr}_*\Omega^1_{\mathbb{P}^1_X/k} \xrightarrow{\infty^*} \Omega^1_{X/k}\right\}[1] \xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}} (\mathbb{P}^1,\infty)\otimes \mathrm{hofib}\left\{\mathrm{R}_{\mathrm{Zar}}\mathrm{pr}_*\Omega^1_{\mathbb{P}^1_X/k} \xrightarrow{\infty^*} \Omega^1_{X/k}\right\}[1] \longrightarrow \Omega^1_{X/k}[1]$$

est clairement égale à celle de

$$\mathrm{hofib}\left\{\mathrm{R}_{\mathrm{Zar}}\mathrm{pr}_*\Omega^1_{\mathbb{P}^1_X/k} \xrightarrow{\infty^*} \Omega^1_{X/k}\right\}[1] \hookrightarrow \mathrm{R}_{\mathrm{Zar}}\mathrm{pr}_*\Omega^1_{\mathbb{P}^1_X/k}[1] \xrightarrow{(f,\mathrm{id}_X)^*} \Omega^1_{X/k}[1].$$

Le morphisme qui nous intéresse est donc la composition de

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{R}_{\mathrm{Zar}}\mathrm{pr}_*\Omega^1_{\mathbb{P}^1_X/k}[1] \xrightarrow{(f,\mathrm{id}_X)^*} \Omega^1_{X/k}[1].$$

Or, on a la décomosition $\mathrm{R}_{\mathrm{Zar}}\mathrm{pr}_*\Omega^1_{\mathbb{P}^1_X/k}[1] \simeq \Omega^1_{X/k}[1]\oplus\mathcal{O}_X\cdot\varepsilon$. De plus, le morphisme $(f,\mathrm{id}_X)^*$ envoie ε sur l'élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X,\Omega^1_{X/k}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X,\Omega^1_{X/k}[1])$ décrit dans l'énoncé. Ceci permet de conclure. ∎

Corollaire 5.11. — *Soit X un k-schéma lisse et connexe. On se donne des morphismes $f_1,\dots,f_n \in \mathrm{Hom}(X,\mathbb{P}^1)$ et des fonctions régulières $a_1,\dots,a_n \in \mathcal{O}(X)$. On suppose que $\sum_{i=1}^n a_i\cdot f_i^*(\varepsilon)$ est nulle dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(X;\Omega^1_{X/k})$. Alors, il existe une section $\alpha\in\Gamma(X;\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}))$ dont l'image par le morphisme évident*

$$\Gamma(X;\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})) \longrightarrow \frac{\mathrm{Hom}(X,\mathbb{P}^1)\otimes\mathcal{O}(X)}{\infty\otimes\mathcal{O}(X)} \tag{5.7}$$

est donnée par $\sum_{i=1}^n f_i\otimes a_i$.

Démonstration. — Le morphisme (5.7) de l'énoncé s'obtient à partir de la troisième flèche de la suite exacte (5.4) grâce à l'identification

$$\Gamma(X,\mathrm{a}_{\mathrm{Zar}}((\mathbb{P}^1,\infty)\otimes\mathcal{O}_X)) \simeq \frac{\mathrm{Hom}(X,\mathbb{P}^1)\otimes\mathcal{O}(X)}{\infty\otimes\mathcal{O}(X)} \tag{5.8}$$

valable pour X connexe. Il est facile de généraliser la construction 5.9 pour définir une extension

$$0\longrightarrow\Omega_{X/k}\longrightarrow\mathcal{E}_{X,\sum_{i=1}^n f_i\otimes a_i}\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow 0$$

et un morphisme $\mathcal{E}_{X,\sum_{i=1}^n f_i\otimes a_i}\longrightarrow\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})|_X$ en prenant, au lieu de (5.5), le morphisme

$$\sum_{i=1}^n f_i\otimes a_i : \mathcal{O}_X\longrightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{Zar}}((\mathbb{P}^1,\infty)\otimes\mathcal{O}_X).$$

Dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X,\Omega_{X/k})$, on a l'identité $[\mathcal{E}_{X,\sum_{i=1}^n f_i\otimes a_i}] = \sum_{i=1}^n a_i\cdot[\mathcal{E}_{X,f}]$ et, grâce au lemme 5.10, la condition $\sum_{i=1}^n a_i\cdot f_i^*(\varepsilon) = 0$ entraîne que l'extension $\mathcal{E}_{X,\sum_{i=1}^n f_i\otimes a_i}$ est scindée. Il existe donc une section globale $\beta\in\mathcal{E}_{X,\sum_{i=1}^n f_i\otimes a_i}(X)$ qui s'envoie sur $1\in\mathcal{O}_X(X)$. L'image de β dans $\Gamma(X;\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}))$ convient clairement. ∎

On est maintenant en mesure de conclure.

Démonstration de la proposition 5.8. — Rappelons que

$$\Phi(\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})) = \text{Cône}\left\{\delta : (\mathbb{P}^1, \infty) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})) \longrightarrow \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})\right\}. \tag{5.9}$$

En particulier, le morphisme de préfaisceaux $\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}) \longrightarrow \mathrm{H}_0(\Phi(\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})))$ est surjectif. Il est donc suffisant de montrer la propriété suivante : étant donnée une section $\alpha \in \Gamma(X; \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}))$, il existe Zariski localement une section $\beta \in \Gamma(X; \Omega^1_{/k})$ qui a la même image que α dans $\Gamma(X; \mathrm{H}_0(\Phi(\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}))))$. On divise la preuve de cela en plusieurs parties.

Partie A. — On peut supposer que X est connexe. L'image de α par (5.7) est une somme finie $\sum_{i\in I} f_i \otimes a_i$ avec $f_i : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ des morphismes de k-schémas et $a_i \in \mathcal{O}(X)$ des fonctions régulières sur X. Le problème étant local sur X, on peut supposer que X est affine. Dans ce cas, on a $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(X; \Omega^1_{X/k}) = 0$ et, grâce au corollaire 5.11, il existe des sections $\alpha'_i \in \Gamma(X; \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}))$, pour $i \in I$, dont les images par (5.7) sont respectivement égales à $f_i \otimes 1$. Ainsi, la section $\alpha - \sum_{i\in I} a_i \cdot \alpha'_i$ appartient au sous-k-vectoriel $\Gamma(X; \Omega^1_{/k})$ de $\Gamma(X; \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}))$ et il est suffisant de montrer la propriété recherchée pour les α'_i (au lieu de α). Autrement dit, on peut supposer que l'image de α par (5.7) est de la forme $f \otimes 1$ pour un certain morphisme $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$.

Le problème étant local sur X, on peut supposer que le morphisme f se factorise par le complémentaire d'un point rationnel de $\mathbb{P}^1$ différent de $\infty = [1 : 0]$. On ne restreint pas la généralité en supposant que ce point est $\mathrm{o} = [0 : 1]$. On note alors $g : X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ le morphisme tel que $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ correspond au X-point $[1 : g] \in \mathbb{P}^1(X)$ en notation projective.

Partie B. — On continue à supposer que X est affine. Introduisons à présent l'automorphisme u du X-schéma $\mathbb{P}^1_X$ donné en notation projective par

$$u([a : b]) = [a : b + g \cdot a].$$

On note $q : \mathbb{P}^1_X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ la projection évidente. On affirme que

$$q^*(\varepsilon) = (q \circ u)^*(\varepsilon) \tag{5.10}$$

dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1_X; \Omega^1_{\mathbb{P}^1_X/k})$. Pour vérifier cela, remarquons que $\Omega^1_{\mathbb{P}^1_X/k} = \mathrm{pr}^\star(\Omega^1_{X/k}) \oplus q^\star(\Omega^1_{\mathbb{P}^1/k})$. Puisque X est affine, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1_X; \Omega^1_{\mathbb{P}^1_X/k}) \simeq \mathcal{O}(X) \otimes_k \mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1, \Omega^1_{\mathbb{P}^1/k}) \simeq \mathcal{O}(X) \cdot \varepsilon.$$

Ainsi, pour vérifier l'égalité (5.10), il suffit de montrer que $\varepsilon = u_x^*(\varepsilon)$ dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1, \Omega^1_{\mathbb{P}^1/k})$ pour tout $x \in X(k)$ (quitte à supposer que k est algébriquement clos, ce qui est loisible). Bien entendu, u_x est l'automorphisme de $\mathbb{P}^1$ donné par $u_x([a : b]) = [a : b + g(x) \cdot a]$. L'égalité $\varepsilon = u_x^*(\varepsilon)$ découle du fait qu'un endomorphisme de $\mathbb{P}^1$ agit sur la cohomologie de de Rham $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1; \Omega^1_{\mathbb{P}^1/k})$ en multipliant par son degré.

Partie C. — Étant donnée l'identité (5.10), le corollaire 5.11 (avec $f_1 = q$, $f_2 = q \circ u$, $a_1 = 1$ et $a_2 = -1$) fournit une section $\gamma \in \Gamma(\mathbb{P}^1_X; \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}))$ dont l'image par

$$\Gamma(\mathbb{P}^1_X; \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})) \longrightarrow \frac{\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1_X, \mathbb{P}^1) \otimes \mathcal{O}(X)}{\infty \otimes \mathcal{O}(X)} \tag{5.11}$$

est représentée par $q \otimes 1 - (q \circ u) \otimes 1$. Considérons les sections

$$\gamma' = \gamma + \alpha|_{\mathbb{P}^1_X} \in \Gamma(\mathbb{P}^1_X; \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})) \qquad \text{et} \qquad \gamma'_\infty = s_\infty^*(\gamma') \in \Gamma(X; \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}))$$

avec $s_\infty : X \hookrightarrow \mathbb{P}^1_X$ la section à l'infini. L'image de γ'_∞ par (5.7) est donnée par la combinaison linéaire

$$(q \circ s_\infty) \otimes 1 - (q \circ u \circ s_\infty) \otimes 1 + [1 : g] \otimes 1.$$

Le morphisme $q \circ s_\infty$ correspond au X-point $\infty = [1 : 0] \in \mathbb{P}^1(X)$ et sa classe dans le but de (5.7) est nulle. D'autre part, $u([1 : 0]) = [1 : g]$, ce qui montre que le morphisme $q \circ u \circ s_\infty$ correspond au X-point $[1 : g]$. Ceci montre que l'image de γ'_∞ par (5.7) est nulle, i.e., $\gamma'_\infty \in \Gamma(X; \Omega^1_{/k})$.

Partie D. — En posant $\gamma'' = \gamma' - \gamma'_\infty|_{\mathbb{P}^1_X} = \gamma + \alpha|_{\mathbb{P}^1_X} - \gamma'_\infty|_{\mathbb{P}^1_X}$, on trouve un élément

$$\gamma'' \in \Gamma((\mathbb{P}^1, \infty) \times X; \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})) \subset \Gamma(\mathbb{P}^1_X; \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})).$$

Par construction (voir (5.9)), pour tout X-morphisme $h : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_X$, l'image de $h^*(\gamma'') \in \Gamma(X; \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}))$ par le morphisme

$$\Gamma(X; \Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k})) \longrightarrow \Gamma(X; \mathrm{H}_0(\Phi(\Phi_{\mathrm{Zar}}(\Omega^1_{/k}))))$$

est nulle. Prenons pour h la section nulle $s_0 : X \hookrightarrow \mathbb{P}^1_X$. On a $s_0^*(\gamma'') = s_0^*(\gamma) + \alpha + \gamma'_\infty$. On sait déjà que $\gamma'_\infty \in \Gamma(X; \Omega^1_{/k})$ (voir la partie C). D'autre part, l'image de $s_0^*(\gamma)$ par (5.7) est représentée par

$$(q \circ s_0) \otimes 1 - (q \circ u \circ s_0) \otimes 1.$$

Le morphisme $q \circ s_0$ correspond au X-point $\mathrm{o} = [0 : 1] \in \mathbb{P}^1(X)$ et le morphisme $q \circ u \circ s_0$ correspond aussi au X-point $u([0 : 1]) = [0 : 1] \in \mathbb{P}^1(X)$. On en déduit que l'image de $s_0^*(\gamma)$ par (5.7) est nulle, i.e., $s_0^*(\gamma) \in \Gamma(X; \Omega^1_{/k})$. Il est maintenant clair que la section $\beta = -s_0^*(\gamma) - \gamma'_\infty \in \Gamma(X; \Omega^1_{/k})$ convient. ■

6. Une classe de Kodaira–Spencer arithmétique

Dans cette section on donne la construction d'une classe de Kodaira–Spencer arithmétique associée à un $\mathbb{Q}$-schéma lisse. La non trivialité de cette classe sera établie dans la section 7. On introduit d'abord certains faisceaux de $\mathcal{O}$-modules.

Définition 6.1. — *Soit S un schéma noethérien, régulier de caractéristique nulle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit un faisceau étale de $\mathcal{O}$-modules Ξ^n_S sur Sm/S par la formule*

$$\Xi^n_S = \mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{H}_n(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^n_{/S})).$$

(Comme d'habitude, $\Omega^n_{/S}$ est donné par $\Omega^n_{/S}(X) = \Gamma(X; \Omega^n_{X/S})$ pour tout S-schéma lisse X.)

On a le théorème suivant concernant les faisceaux de la définition 6.1. (Ci-dessous, $\underline{\Omega}^1_{S/\mathbb{Q}}$ désigne le faisceau étale de $\mathcal{O}$-modules sur Sm/S associé à $\Omega^1_{S/\mathbb{Q}}$ en concordance avec la notation 3.2.)

Théorème 6.2. — *Soit S un schéma noethérien, régulier de caractéristique nulle et de dimension finie.*

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, le complexe de préfaisceaux $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^n_{/S})$ est localement $(n-1)$-connexe pour la topologie étale de sorte que Ξ^n_S est son premier faisceau d'homologie potentiellement non nul.

(b) On a une suite exacte courte de faisceaux étales de $\mathcal{O}$-modules sur Sm/S :

$$0 \longrightarrow \Xi^1_{\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/S} \longrightarrow \Xi^1_S \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{S/\mathbb{Q}} \longrightarrow 0.$$

De plus, pour $i \geqslant 2$, on a des isomorphismes $\mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{H}_i(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/\mathbb{Q}}))|_{\mathrm{Sm}/S} \simeq \mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{H}_i(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/S}))$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a un morphisme surjectif de faisceaux étales de $\mathcal{O}$-modules sur Sm/S :

$$\Xi^n_S \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}^n_{\mathcal{O}}(\underline{\Omega}^1_{S/\mathbb{Q}})$$

où $\mathrm{Sym}^n_{\mathcal{O}}(-)$ est le foncteur « n-ième puissance symétrique » sur les faisceaux étales de $\mathcal{O}$-modules.

Démonstration. — Lorsque S est le spectre d'un corps, l'assertion (a) est donnée par le théorème 5.1. Expliquons comment ramener le cas général à celui d'un corps. Remarquons d'abord que le lemme 5.2 s'étend sans modification au cas général de sorte qu'il suffit de traiter le cas $n = 1$. La question étant locale, on peut supposer que S est affine. D'après le théorème de Popescu [**22, 23**], S s'écrit comme une limite projective de $\mathbb{Q}$-schémas affines lisses : $S = \lim_{i \in I} S_i$. Il s'ensuit aussitôt que la catégorie Sm/S est équivalente à la 2-colimite des catégories Sm/S_i. Le foncteur image inverse

$$\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S)$$

est donc exact et on le note $(-)|_{\mathrm{Sm}/S}$. Étant donné un préfaisceau F sur $\mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$ et un S-schéma lisse X, on a

$$\Gamma(X; F|_{\mathrm{Sm}/S}) = \operatorname*{colim}_{i \in I/i_0} F(X_{i_0} \times_{S_{i_0}} S_i)$$

pour le choix d'un S_{i_0}-schéma lisse X_{i_0} tel que $X \simeq X_{i_0} \times_{S_{i_0}} S$.

Considérons la suite exacte courte de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules

$$0 \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{S/\mathbb{Q}} \longrightarrow \Omega^1_{/\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/S} \longrightarrow \Omega^1_{/S} \longrightarrow 0. \tag{6.1}$$

D'après la proposition 3.3, le faisceau $\underline{\Omega}^1_{S/\mathbb{Q}}$ est $\mathbb{P}^1$-local. En appliquant le foncteur de $\mathbb{P}^1$-localisation à la suite exacte (6.1), on obtient donc un triangle distingué

$$\underline{\Omega}^1_{S/\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/S}) \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/S}) \longrightarrow \tag{6.2}$$

dans $\mathbf{D}_{\text{ét}}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S\,;\mathbb{Q}))$. La suite exacte longue de faisceaux étales d'homologie associée à (6.2) montre que $\mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{H}_i(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/S}))$ est un quotient de $\mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{H}_i(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/S}))$ pour $i \leqslant 0$. Il est donc suffisant de montrer que le complexe de préfaisceaux $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/S})$ est localement 0-connexe.

Le site $(\mathrm{Sm}/S, \text{ét})$ est équivalent à la 2-limite des sites $(\mathrm{Sm}/S_i, \text{ét})$. En raisonnant comme dans la preuve de [**4**, Proposition 1.A.1] (voir aussi la preuve de [**3**, Proposition 3.20]), on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/S}) \simeq \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/\mathbb{Q}})|_{\mathrm{Sm}/S} \tag{6.3}$$

dans $\mathbf{D}_{\text{ét}}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S\,;\mathbb{Q}))$. Or, le complexe de préfaisceaux $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/\mathbb{Q}})$ est localement 0-connexe d'après le théorème 5.1 (avec $k = \mathbb{Q}$), ce qui permet de conclure.

Le triangle distingué (6.2), joint à l'isomorphisme (6.3), entraîne également l'assertion (b). Il reste à montrer l'assertion (c). Considérons le morphisme bord

$$\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/S}) \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{S/\mathbb{Q}}[1]$$

du triangle distingué (6.2). Grâce au sous-lemme 5.3, on en déduit un morphisme

$$\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^n_{/S}) \longrightarrow {}^{\mathrm{L}}{\textstyle\bigwedge}^n_{\mathcal{O}}(\underline{\Omega}^1_{S/\mathbb{Q}}[1]) \simeq \mathrm{Sym}^n_{\mathcal{O}}(\underline{\Omega}^1_{S/\mathbb{Q}})[n].$$

Le morphisme dans l'assertion (c) s'en déduit par application de $\mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{H}_n(-)$. Pour voir qu'il est surjectif, on remarque qu'il factorise le morphisme évident

$$\mathrm{Sym}^n_{\mathcal{O}}(\Xi^1_S) \longrightarrow \mathrm{Sym}^n_{\mathcal{O}}(\underline{\Omega}^1_{S/\mathbb{Q}})$$

qui est surjectif d'après l'assertion (b). ■

Définition 6.3. — *Soit X un $\mathbb{Q}$-schéma lisse et notons $\mathcal{T}_{X/\mathbb{Q}}$ le $\mathcal{O}_X$-module des champs de vecteurs sur X, i.e., le dual $\mathcal{O}_X$-linéaire de $\Omega^1_{X/\mathbb{Q}}$. La classe de Kodaira–Spencer arithmétique de X est la classe*

$$\kappa_{\mathrm{arith}}(X) \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X; \mathcal{T}_{X/\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Xi^1_{\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Et}/X})$$

qui correspond via l'isomorphisme évident $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X; \mathcal{T}_{X/\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Xi^1_{\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Et}/X}) \simeq \mathrm{Ext}^1(\underline{\Omega}^1_{X/\mathbb{Q}}, \Xi^1_{\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/X})$ à la classe de la suite exacte courte de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules

$$0 \longrightarrow \Xi^1_{\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/X} \longrightarrow \Xi^1_X \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X/\mathbb{Q}} \longrightarrow 0 \tag{6.4}$$

du théorème 6.2(b).

Remarque 6.4. — L'idée derrière cette définition est la suivante. Le faisceau de $\mathcal{O}$-modules $\Xi^1_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$ est une incarnation du faisceau « $\underline{\Omega}^1_{\mathbb{Q}/\mathbb{F}_1}$ » où « $\mathbb{F}_1$ » désigne l'hypothétique « corps à un élément ». Plus généralement, pour un $\mathbb{Q}$-schéma lisse X, le faisceau de $\mathcal{O}$-modules Ξ^1_X sur Sm/X est une incarnation du faisceau « $\underline{\Omega}^1_{X/\mathbb{F}_1}$ » et la suite exacte courte (6.4) correspond à la suite exacte usuelle :

$$\text{« } 0 \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{\mathbb{Q}/\mathbb{F}_1}|_{\mathrm{Sm}/X} \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X/\mathbb{F}_1} \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X/\mathbb{Q}} \longrightarrow 0 \text{ ».}$$

Toutefois, on ne s'attend pas à ce que $\Xi^1_{\mathbb{Q}}$ soit de la forme $\underline{V}$, comme dans la notation 3.2, pour un $\mathbb{Q}$-vectoriel V (l'hypothétique $\Omega^1_{\mathbb{Q}/\mathbb{F}_1}$), ce qui aurait été souhaitable en vue d'adapter à un corps de nombres la preuve de [**27**, Théorème 1] de la conjecture de Szpiro pour un corps de fonctions. En fait, dans [**11**] Faltings défend la thèse qu'il n'existe pas de système non identiquement nul de classes de Kodaira–Spencer $\kappa(X) \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X; \mathcal{T}_{X/\mathbb{Q}} \otimes V)$, pour $X \in \mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$, avec V un $\mathbb{Q}$-vectoriel fixé à l'avance. Or, on montrera dans la section 7 que la classe $\kappa_{\mathrm{arith}}(X)$ est non triviale pour X une courbe projective lisse de genre $\geqslant 2$. □

Remarque 6.5. — Nous ignorons s'il est possible de remplacer dans la Définition 6.3 la topologie étale par la topologie Zariski (comme c'est le cas pour les classes de Kodaira–Spencer usuelles). En effet, le $\mathcal{O}_X$-module $\Xi^1_{\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Et}/X}$ n'a aucune raison d'être quasi-cohérent. Autrement dit, il n'est pas du tout clair que (6.4) est une suite exacte de faisceaux Zariski. □

Il sera utile pour la preuve du théorème 7.19 ci-dessous de donner une construction légèrement différente de la classe de Kodaira–Spencer arithmétique.

Remarque 6.6. — Considérons le morphisme

$$\Omega^1_{/\mathbb{Q}} \longrightarrow \Xi^1_{\mathbb{Q}}[1] \tag{6.5}$$

de la catégorie $\mathbf{D}_{\text{ét}}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/\mathbb{Q};\mathcal{O}))$ égal à la composition de

$$\Omega^1_{/\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{H}_1(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/\mathbb{Q}}))[1] = \Xi^1_{\mathbb{Q}}[1].$$

(L'existence de la seconde flèche ci-dessus découle de la 0-connexité locale de $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/\mathbb{Q}})$, i.e., du théorème 5.1.) Pour un $\mathbb{Q}$-schéma lisse X, la composition de

$$\underline{\Omega}^1_{X/\mathbb{Q}} \longrightarrow \Omega^1_{/\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/X} \longrightarrow \Xi^1_{\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/X}[1]$$

coïncide avec la classe de Kodaira–Spencer arithmétique $\kappa_{\text{arith}}(X) \in \mathrm{Ext}^1(\underline{\Omega}^1_{X/\mathbb{Q}}, \Xi^1_{\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/X})$ de la définition 6.3. Pour s'en convaincre, on remarque que la fibre homotopique

$$\mathrm{hofib}\{\underline{\Omega}^1_{X/\mathbb{Q}} \to \Xi^1_{\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/X}[1]\}$$

est un faisceau étale strictement $\mathbb{P}^1$-invariant, extension de $\Xi^1_{\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/X}$ par $\underline{\Omega}^1_{X/\mathbb{Q}}$, qui s'identifie au 0-ième faisceau d'homologie de la $\mathbb{P}^1$-localisation de

$$\mathrm{hofib}\{\underline{\Omega}^1_{X/\mathbb{Q}} \to \Omega^1_{/\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Sm}/X}\} \simeq \Omega^1_{/X}[-1],$$

qui n'est autre que le faisceau Ξ^1_X. □

Notation 6.7. — Appelons Ω^1_{arith} la fibre homotopique du morphisme (6.5). C'est un objet du cœur de la catégorie triangulée $\mathbf{D}_{\text{ét}}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/\mathbb{Q};\mathcal{O}))$, i.e., un faisceau étale de $\mathcal{O}$-modules sur $\mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$. □

Proposition 6.8. — *On a une suite exacte courte de faisceaux étales de $\mathcal{O}$-modules sur* $\mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$ *:*

$$0 \longrightarrow \Xi^1_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \Omega^1_{\text{arith}} \longrightarrow \Omega^1_{/\mathbb{Q}} \longrightarrow 0. \tag{6.6}$$

Étant donné un $\mathbb{Q}$-schéma lisse X, on a un isomorphisme canonique $\Gamma(X;\Omega^1_{\text{arith}}) \simeq \Gamma(X;\Xi^1_X)$. Plus généralement, les restrictions de (6.6) *et de* (6.4) *à* Et/X *sont canoniquement isomorphes. En particulier, la restriction de* (6.6) *à* Et/X *détermine la classe $\kappa_{\text{arith}}(X) \in \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X/\mathbb{Q}}, \Xi^1_{\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Et}/X})$.*

Démonstration. — Ceci découle aussitôt de la remarque 6.6. ■

On termine cette section avec une autre construction intéressante.

Définition 6.9. — *Soit S un schéma noethérien, régulier de caractéristique nulle. Pour $N \in \mathbb{N}$, on considère le complexe de de Rham tronqué $\Omega^{\leq N}_{/S}$ sur* Sm/S *:*

$$[\mathcal{O} \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1_{/S} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^N_{/S}]$$

avec $\mathcal{O}$ placé en degré zéro. En faisant varier N, on obtient une tour de complexes de préfaisceaux $(\Omega^{\leq N}_{/S})_{N\in\mathbb{N}}$. On en déduit une tour $\Upsilon_S = (\Upsilon^N_S)_{N\in\mathbb{N}}$ de faisceaux étales sur Sm/S *en posant :*

$$\Upsilon^N_S = \mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{H}_0(\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^{\leq N}_{/S})).$$

Puisque $\mathcal{O}$ est $\mathbb{P}^1$-local, on a un morphisme évident $\Upsilon_S \longrightarrow \mathcal{O}$.

Proposition 6.10. — *Soit S un schéma noethérien, régulier de caractéristique nulle et de dimension finie.*

(a) Le complexe de préfaisceaux $\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^{\leq N}_{/S})$ est localement (-1)-connexe pour la topologie étale de sorte que Υ^N_S est son premier faisceau d'homologie non nul.

(b) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a une suite exacte de faisceaux étales*

$$\Xi_S^{N+1} \longrightarrow \Upsilon_S^{N+1} \longrightarrow \Upsilon_S^N \longrightarrow 0.$$

Si $N = 0$, c'est même une suite exacte courte (i.e., la première flèche est injective).

(c) *La tour Υ_S est naturellement une tour d'algèbres et $\Upsilon_S \longrightarrow \mathcal{O}$ est un morphisme d'algèbres.*

Démonstration. — L'assertion (a) découle aussitôt du théorème 6.2(a). L'assertion (b) découle aussitôt de l'assertion (a), du théorème 6.2(a) et du triangle distingué

$$\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^{N+1}_{/S})[-N-1] \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^{\leqslant N+1}_{/S}) \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^{\leqslant N}_{/S}) \longrightarrow .$$

Pour l'assertion (c) on utilise la structure d'algèbre sur la tour $(\Omega^{\leqslant N}_{/S})_{N\in\mathbb{N}}$, l'assertion (a) et le fait que le foncteur $\mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{H}_0$ est monoïdal sur les complexes de préfaisceaux localement (-1)-connexes. ■

Afin d'expliquer la signification de la tour Υ_S, nous avons besoin d'une construction.

Construction 6.11. — On définit une tour ${}^2\widehat{\mathcal{O}} = ({}^2\widehat{\mathcal{O}}^N)_{N\in\mathbb{N}}$ de faisceaux de bi-$\mathcal{O}$-modules sur $\mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$ en posant, pour $X \in \mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$,

$${}^2\widehat{\mathcal{O}}^N(X) = \Gamma(X \times X; \mathcal{O}_{X\times X}/(\mathcal{I}_\Delta)^{N+1})$$

avec $\mathcal{I}_\Delta$ l'idéal de l'immersion diagonale $\Delta : X \hookrightarrow X \times X$. Les ${}^2\widehat{\mathcal{O}}^N$ sont des faisceaux d'algèbres et on dispose de deux morphismes de faisceaux d'algèbres $\mathrm{pr}_1^*, \mathrm{pr}_2^* : \mathcal{O} \longrightarrow {}^2\widehat{\mathcal{O}}^N$ induisant la structure de bi-$\mathcal{O}$-module. (Bien entendu, « pr_1 » et « pr_2 » désignent les projections sur le premier et second facteurs.) Lorsque $N < 0$, on convient que ${}^2\widehat{\mathcal{O}}^N = 0$.

On dispose d'une connexion sur le pro-faisceau ${}^2\widehat{\mathcal{O}}$ considéré comme un $\mathcal{O}$-module via pr_1^*. En effet, si $X \in \mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$ est affine et si ∂ est une dérivation de $\mathcal{O}(X)$, alors l'endomorphisme de $\mathcal{O}(X \times X)$ donné par $\partial(f \otimes g) = \partial(f) \otimes g$, pour $f, g \in \mathcal{O}(X)$, envoie l'idéal I_Δ^{N+1} dans I_Δ^N (avec $I_\Delta = \mathcal{I}_\Delta(X \times X)$). Ceci permet de définir, pour $N \in \mathbb{N}$, des complexes de de Rham

$$\mathrm{dR}_{/\mathbb{Q}}({}^2\widehat{\mathcal{O}}^N) = [{}^2\widehat{\mathcal{O}}^N \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1_{/\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}} {}^2\widehat{\mathcal{O}}^{N-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n_{/\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}} {}^2\widehat{\mathcal{O}}^{N-n} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots]. \tag{6.7}$$

Il s'agit d'un complexe de $\mathcal{O}$-modules lorsqu'on fait agir $\mathcal{O}$ via pr_2^*. De plus, ce complexe est localement acyclique sauf en degré zéro et on a $\mathrm{H}_0(\mathrm{dR}_{/\mathbb{Q}}({}^2\widehat{\mathcal{O}}^N)) = \mathcal{O}$. En effet, soit X un $\mathbb{Q}$-schéma affine lisse muni d'un morphisme étale $X \longrightarrow \mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[t_1, \cdots, t_n])$. Dans ce cas, on a un isomorphisme

$${}^2\widehat{\mathcal{O}}^N(X) \simeq \mathcal{O}(X)[s_1, \cdots, s_n]/(s_1, \cdots, s_n)^{N+1},$$

avec $s_i = t_i \otimes 1 - 1 \otimes t_i$, tel que l'inclusion canonique de $\mathcal{O}(X)$ dans le membre à droite correspond au morphisme pr_2^*. Modulo cet isomorphisme, les différentielles du complexe (6.7) s'expriment à l'aide de la dérivation des polynômes en les variables $s_1, \cdots, s_n$ et les éléments de $\mathcal{O}(X)$ se comportent comme des constantes. L'acyclicité locale du complexe (6.7) sauf en degré zéro est alors immédiate.

Fixons un $\mathbb{Q}$-schéma lisse S. La restriction de $\mathrm{dR}_{/\mathbb{Q}}({}^2\widehat{\mathcal{O}}^N)$ à Sm/S admet un quotient naturel, à savoir

$$\mathrm{dR}_{/S}({}^2\widehat{\mathcal{O}}^N) = [{}^2\widehat{\mathcal{O}}^N \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1_{/S} \otimes_{\mathcal{O}} {}^2\widehat{\mathcal{O}}^{N-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n_{/S} \otimes_{\mathcal{O}} {}^2\widehat{\mathcal{O}}^{N-n} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots]. \tag{6.8}$$

Ce complexe est aussi localement acyclique sauf en degré zéro. Pour démontrer cela, on raisonne comme dans le cas de $\mathrm{dR}_{/\mathbb{Q}}({}^2\widehat{\mathcal{O}}^N)$. On peut supposer que le schéma S est affine, qu'il est muni d'un morphisme étale $S \longrightarrow \mathbb{A}^d = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[t_1, \cdots, t_d])$, que le S-schéma X est affine et qu'il est muni d'un S-morphisme étale $X \longrightarrow S[t_{d+1}, \cdots, t_{d+n}]$. Modulo l'identification

$${}^2\widehat{\mathcal{O}}^N(X) \simeq \mathcal{O}(X)[s_1, \cdots, s_{d+n}]/(s_1, \cdots, s_{d+n})^{N+1},$$

les différentielles du complexe (6.8) s'expriment à l'aide de la dérivation des polynômes en les variables $s_{d+1}, \cdots, s_{d+n}$ et les éléments de $\mathcal{O}(X)[s_1, \cdots, s_d]/(s_1, \cdots, s_d)^{N+1}$ se comportent comme des constantes. L'acyclicité locale du complexe (6.8) sauf en degré zéro s'ensuit. On pose :

$${}^2\underline{\widehat{\mathcal{O}}}{}^N_S = \mathrm{H}_0(\mathrm{dR}_{/S}({}^2\widehat{\mathcal{O}}^N)).$$

D'après le raisonnement précédent, on a ${}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}{}^N_S(X) = \mathcal{O}(X)[s_1, \cdots, s_d]/(s_1, \cdots, s_d)^{N+1}$, ce que l'on peut réécrire indépendamment du choix des coordonnées locales comme suit :

$${}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}{}^N_S(X) = \Gamma(S \times X; \mathcal{O}_{S\times X}/(\mathcal{I}_g)^{N+1})$$

avec $\mathcal{I}_g$ l'idéal du graphe $g : X \longrightarrow S \times X$ du morphisme structural du S-schéma X. Clairement, le faisceau de $\mathcal{O}$-modules ${}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}{}^N_S$ est associé au $\mathcal{O}_S$-module localement libre ${}^2\widehat{\mathcal{O}}{}^N_S = \mathcal{O}_{S\times S}/(\mathcal{I}_\Delta)^{N+1}$; il est donc $\mathbb{P}^1$-local d'après la proposition 3.3. En variant N, on obtient une tour de $\mathcal{O}$-algèbres ${}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}_S = ({}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}{}^N_S)_{N\in\mathbb{N}}$. □

Théorème 6.12. — *Soit S un $\mathbb{Q}$-schéma lisse. Il existe un morphisme canonique de tours de faisceaux d'algèbres sur* Sm/S *:*

$$\Upsilon_S \longrightarrow {}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}_S.$$

De plus, on a des morphismes de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \Xi^{N+1}_S & \longrightarrow & \Upsilon^{N+1}_S & \longrightarrow & \Upsilon^N_S & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^{N+1}_{\mathcal{O}}\underline{\Omega}^1_{S/\mathbb{Q}} & \longrightarrow & {}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}{}^{N+1}_S & \longrightarrow & {}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}{}^N_S & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les flèches verticales sont surjectives.

Démonstration. — Pour chaque $N \in \mathbb{N}$, on a un morphisme évident $\Omega^{\leqslant N}_{/S} \longrightarrow \mathrm{dR}_{/S}({}^2\widehat{\mathcal{O}}{}^N)$ et, comme expliqué dans la construction 6.11, le but de ce morphisme est localement quasi-isomorphe à ${}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}{}^N_S$. Ainsi, on a un morphisme

$$\Omega^{\leqslant N}_{/S} \longrightarrow {}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}{}^N_S \tag{6.9}$$

dans la catégorie $\mathbf{D}_{\text{ét}}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S; \mathbb{Q}))$. Ce morphisme est compatible aux structures d'algèbre et, en variant N, on obtient un morphisme de tours.

Puisque le faisceau de $\mathcal{O}$-modules ${}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}{}^N_S$ est $\mathbb{P}^1$-local, (6.9) se factorise uniquement par un morphisme

$$\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^{\leqslant N}_{/S}) \longrightarrow {}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}{}^N_S \tag{6.10}$$

dans la catégorie $\mathbf{D}_{\text{ét}}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S; \mathbb{Q}))$. Ce morphisme est compatible aux structures d'algèbre et, en variant N, on obtient un morphisme de tours. En appliquant $\mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{H}_0$, on en déduit le morphisme $\Upsilon_S \longrightarrow {}^2\widehat{\underline{\mathcal{O}}}_S$ recherché. La deuxième assertion découle aussitôt de la construction et du théorème 6.2(c). ■

Remarque 6.13. — Grâce au théorème 6.12, Υ_S apparaît comme un raffinement de la complétion de $S \times S$ en sa diagonale. Il est donc tentant de penser à Υ_S comme étant la complétion de l'hypothétique « $S \times_{\mathbb{F}_1} S$ » en sa diagonale. Plus précisément, la tour de faisceaux d'algèbres Υ_S enverrait un S-schéma lisse X sur l'anneau de la complétion de « $S \times_{\mathbb{F}_1} X$ » suivant le graphe du morphisme structural de X. Cependant, si l'on croit à cette interprétation, les faisceaux Υ^N_S devraient avoir des structures naturelles de $\mathcal{O}$-algèbres, i.e., il devrait exister un morphisme d'algèbres $\mathcal{O} \longrightarrow \Upsilon_S$. Nous n'avons pas réussi à construire un tel morphisme. □

7. Lien avec les classes de Deligne–Illusie

Dans cette section, nous allons comparer la classe de Kodaira–Spencer arithmétique introduite dans la définition 6.3 avec les classes de Deligne–Illusie pour presque tout nombre premier. En invoquant un résultat de Raynaud [**24**, Lemma I.5.4], cette comparaison entraîne que $\kappa_{\text{arith}}(C) \neq 0$ pour toute $\mathbb{Q}$-courbe projective et lisse C de genre $\geqslant 2$. En particulier, ceci montre que le faisceau $\Xi^1_{\mathbb{Q}}$ est non nul.

Une grande partie de la section est consacrée à des rappels sur les p-dérivations et les classes de Deligne–Illusie. Nous suivrons l'article [**10**] où ces notions sont introduites de façon commode pour la comparaison que nous voulons établir. Le contenu original de la section débute avec la construction 7.15. On fixe un nombre premier p, et on écrit parfois $\mathbb{F}_p$ et $\mathrm{W}_2(\mathbb{F}_p)$ au lieu de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Définition 7.1. — *Soit A une $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-algèbre et posons $A_0 = A/pA$. Soit M un A_0-module. Une p-dérivation de A dans M est une application $\delta : A \longrightarrow M$ vérifiant les identités suivantes (avec $a, b \in A$) :*

(a) $\delta(0) = \delta(1) = 0$;

(b) $\delta(a + b) = \delta a + \delta b + \mathrm{C}_p(a, b) \cdot \delta p$;

(c) $\delta(ab) = a^p \cdot \delta b + b^p \cdot \delta a$.

Ci-dessus, $\mathrm{C}_p(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ *est le polynôme à coefficients entiers donné par*

$$\mathrm{C}_p(x, y) = \frac{x^p + y^p - (x + y)^p}{p}.$$

On note p-$\mathrm{Der}(A; M)$ le A_0-module des p-dérivations de A dans M. Clairement, l'association $M \rightsquigarrow p$-$\mathrm{Der}(A; M)$ définit un endofoncteur p-$\mathrm{Der}(A; -)$ de la catégorie des A_0-modules.

Remarque 7.2. — La définition 7.1 est tirée de [**10**, Definition 2.1.1] où les auteurs parlent de « p-dérivations totales ». Dans la littérature (et notamment dans les articles de Buium [**6**], [**7**], etc.), l'expression « p-dérivation » désigne une notion différente : il s'agit d'une application $\delta : A \longrightarrow A$ vérifiant des identités introduites par Joyal [**16**] et qui relèvent celles de la définition 7.1 avec $\delta p = 1$. Ici, on préfère utiliser l'expression « p-dérivation de Buium » pour désigner une p-dérivation $\delta : A \longrightarrow A_0$ vérifiant $\delta p = 1$. □

Remarque 7.3. — Les identités (a) et (b) entraînent par récurrence que

$$\delta n = \frac{n - n^p}{p} \cdot \delta p,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ceci est compatible avec l'identité (c) car $p \cdot \delta p = 0$ dans M. En particulier, pour tout $\mathbb{F}_p$-vectoriel M, on a une bijection

$$p\text{-}\mathrm{Der}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}; M) \xrightarrow{\sim} M$$

qui envoie une p-dérivation δ sur l'élément δp. □

Remarque 7.4. — Une p-dérivation $\delta : A \longrightarrow M$ est additive, i.e., l'identité $\delta(a+b) = \delta a + \delta b$ est vérifiée pour tout $a, b \in A$, si et seulement si $\delta p = 0$. Clairement, une p-dérivation additive s'annule sur le sous-groupe $pA \subset A$ et induit donc une application additive $\delta : A_0 \longrightarrow M$ qui est elle-même une p-dérivation de A_0. (Les p-dérivations de A_0 sont nécessairement additives car p est nul dans A_0.) Ainsi, il y a bijection entre les p-dérivations additives de A et les p-dérivations de A_0.

Par ailleurs, se donner une p-dérivation de A_0 revient à se donner un A_0-module M et une application additive $\delta : A_0 \longrightarrow M$ qui devient une dérivation au sens usuel lorsqu'on fait agir A_0 sur M par

$$\begin{array}{ccc} A_0 \times M & \longrightarrow & M \\ (a, m) & \mapsto & a^p m. \end{array}$$

Si $\phi_p = (-)^p$ désigne le Frobenius en p, ceci équivaut à se donner un morphisme de A_0-modules

$$\Omega^1_{A_0/\mathbb{F}_p} \otimes_{A_0, \phi_p} A_0 \longrightarrow M.$$

Autrement dit, le A_0-module $\Omega^1_{A_0/\mathbb{F}_p} \otimes_{A_0, \phi_p} A_0$ coreprésente l'endofoncteur p-$\mathrm{Der}(A_0; -)$ et l'application $\mathrm{d} \otimes 1 : A_0 \longrightarrow \Omega^1_{A_0/\mathbb{F}_p} \otimes_{A_0, \phi_p} A_0$ est la p-dérivation universelle de A_0. □

Lemme 7.5. — *Soit A une $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-algèbre. Il existe une p-dérivation universelle $\delta_A : A \longrightarrow p$-$\Omega^1_A$ induisant un isomorphisme de A_0-modules*

$$\mathrm{Hom}_{A_0}(p\text{-}\Omega^1_A, M) \longrightarrow p\text{-}\mathrm{Der}(A; M)$$

naturel en le A_0-module M. De plus, le A_0-module quotient p-$\Omega^1_A/A_0 \cdot \delta_A p$ est canoniquement isomorphe à $\Omega^1_{A_0/\mathbb{F}_p} \otimes_{A_0, \phi_p} A_0$. Enfin, si la $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-algèbre A est lisse, on a une suite exacte courte de A_0-modules

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow p\text{-}\Omega^1_A \longrightarrow \Omega^1_{A_0/\mathbb{F}_p} \otimes_{A_0, \phi_p} A_0 \longrightarrow 0 \tag{7.1}$$

où la première flèche envoie $1 \in A_0$ sur $\delta_A p \in p$-Ω^1_A.

Démonstration. — Ceci est démontré dans [**10**, §2.7]. La construction de $p\text{-}\Omega^1_A$ est facile : c'est le quotient du A_0-module librement engendré par les symbols « $\delta_A a$ », un pour chaque $a \in A$, quotienté par les relations (a), (b) et (c) de la définition 7.1. La p-dérivation composée

$$A \xrightarrow{\delta_A} p\text{-}\Omega^1_A \twoheadrightarrow \frac{p\text{-}\Omega^1_A}{A_0 \cdot \delta_A p}$$

est la p-dérivation universelle de A qui s'annule en p. La seconde assertion découle donc de la remarque 7.4. Il reste à voir que la suite (7.1) est exacte si A est lisse. Il s'agit de [**10**, Lemma 2.11], mais nous esquissons une preuve pour la commodité du lecteur. Seule l'injectivité du morphisme $A_0 \longrightarrow p\text{-}\Omega^1_A$ envoyant 1 sur $\delta_A p$ demande une preuve. Nous montrerons que ce morphisme admet une rétraction.

Par la propriété universelle, l'existence d'une rétraction du morphisme $A_0 \longrightarrow p\text{-}\Omega^1_A$ équivaut à l'existence d'une p-dérivation de Buium $\delta : A \longrightarrow A_0$ (i.e., vérifiant $\delta p = 1$). Considérons la $\mathrm{W}_2(\mathbb{F}_p)$-algèbre $\mathrm{W}_2(A_0)$ des vecteurs de Witt de longueur 2 à coefficients dans A_0. Ensemblistement, on a $\mathrm{W}_2(A_0) = A_0 \times A_0$ et les règles d'addition et de multiplication sont

$$(a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1 + \mathrm{C}_p(a_0, b_0)),$$

$$(a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) = (a_0 b_0, a_0^p b_1 + b_0^p a_1).$$

(Voir par exemple [**5**, Chapitre IX, §1, n° 7, Exemple 2].) Puisque A est lisse sur $\mathrm{W}_2(\mathbb{F}_p)$ et que le noyau du morphisme $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{W}_2(A_0) \longrightarrow A_0$ est de carré nul, il existe un morphisme $A \longrightarrow \mathrm{W}_2(A_0)$ qui relève l'identité de A_0. (En effet, par définition, « lisse » entraîne « formellement lisse » ; voir [**13**, Chapitre IV, Définitions 17.1.1 et 17.3.1].) La composition de

$$A \longrightarrow \mathrm{W}_2(A_0) \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} A_0$$

est une p-dérivation qui envoie p sur 1 comme souhaité. ■

Remarque 7.6. — Pour une $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-algèbre A et un élément $f \in A$, on a un isomorphisme canonique de $A_0[f^{-1}]$-modules $p\text{-}\Omega^1_{A[f^{-1}]} \simeq p\text{-}\Omega^1_A[f^{-1}]$. En effet, si δ est une p-dérivation de A à valeurs dans un $A_0[f^{-1}]$-module M, on peut étendre δ uniquement à $A[f^{-1}]$ en posant

$$\delta(\frac{a}{f^r}) = \frac{f^{rp} \cdot \delta a - a^p \cdot \delta f^r}{f^{2rp}}.$$

On peut donc recoller la p-dérivation universelle : si X est un $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-schéma et $X_0 = X \otimes \mathbb{F}_p$ sa réduction modulo p, on dispose d'un $\mathcal{O}_{X_0}$-module quasi-cohérent $p\text{-}\Omega^1_X$ muni d'une p-dérivation $\delta_X : \mathcal{O}_X \longrightarrow p\text{-}\Omega^1_X$ qui est la p-dérivation universelle en chaque ouvert affine de X. D'après le lemme 7.5, si X est lisse de dimension n, le $\mathcal{O}_X$-module $p\text{-}\Omega^1_X$ est localement libre de dimension $n+1$, et on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_0} \longrightarrow p\text{-}\Omega^1_X \longrightarrow (\mathrm{Fr}_p)^\star \Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p} \longrightarrow 0, \tag{7.2}$$

où Fr_p désigne l'endomorphisme de Frobenius. Tout ceci est discuté dans [**10**, §2.12]. □

Proposition 7.7. — *Soit X un $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-schéma lisse et notons $X_0 = X \otimes \mathbb{F}_p$ sa réduction modulo p. Les données suivantes sont équivalentes :*

(i) un scindage de la suite exacte courte (7.2)*;*

(ii) une p-dérivation de Buium $\delta : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_0}$ (i.e., vérifiant $\delta p = 1$);

(iii) un relèvement du Frobenius à X, i.e., un endomorphisme f de $\mathcal{O}_X$ tel que $f_0 = f \otimes \mathbb{F}_p$ est l'endomorphisme de Frobenius de $\mathcal{O}_{X_0}$.

Démonstration. — Un scindage de la suite exacte courte (7.2) équivaut à la donnée d'une rétraction du morphisme $\mathcal{O}_{X_0} \longrightarrow p\text{-}\Omega^1_X$, ce qui équivaut, par la propriété universelle, à la donnée d'une p-dérivation $\delta : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_0}$ qui vaut 1 en p. Ceci montre l'équivalence entre les données (i) et (ii). Il reste à montrer l'équivalence avec la donnée (iii). Ceci est établi dans [**10**, Lemma 2.10], mais nous esquissons l'argument pour la commodité du lecteur.

On ne restreint pas la généralité en supposant que $X = \mathrm{Spec}(A)$. Nous allons construire une bijection entre les p-dérivations de Buium de A de les relèvements à A du Frobenius de A_0. Pour ce faire, on remarque que le morphisme

$$\mathbf{p} : A_0 \longrightarrow pA,$$

induit par la multiplication par p, est un isomorphisme car la $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-algèbre A est plate.

(1) Étant donnée une p-dérivation $\delta : A \longrightarrow A_0$ telle que $\delta p = 1$, on définit un endomorphisme f_δ de A en posant $f_\delta(a) = a^p + \mathbf{p}(\delta a)$. Clairement, f_δ est un relèvement du Frobenius de A_0.

(2) Réciproquement, si f est un endomorphisme de A qui relève le Frobenius, on définit une p-dérivation δ_f en posant $\delta_f(a) = \mathbf{p}^{-1}(f(a) - a^p)$. Clairement, δ_f est une p-dérivation de Buium.

De plus, les associations $\delta \rightsquigarrow f_\delta$ et $f \rightsquigarrow \delta_f$ sont inverses l'une de l'autre. ■

Définition 7.8. — *Soit X un $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-schéma lisse. La classe de Deligne–Illusie de X est la classe*

$$\mathrm{DI}_p(X) \in \mathrm{Ext}^1((\mathrm{Fr}_p)^\star\Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}, \mathcal{O}_{X_0}) \simeq \mathrm{H}^1(X; \mathcal{H}om((\mathrm{Fr}_p)^\star\Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}, \mathcal{O}_{X_0}))$$

de la suite exacte courte (7.2).

Corollaire 7.9. — *Soit X un $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-schéma lisse. Alors, le Frobenius de X_0 se relève en un endomorphisme de X si et seulement si la classe $\mathrm{DI}_p(X)$ est nulle.*

Démonstration. — D'après la proposition 7.7, un relèvement du Frobenius à X existe si et seulement si la suite exacte courte (7.2) est scindée, ce qui est le cas si et seulement si $\mathrm{DI}_p(X) = 0$. ■

Construction 7.10. — Dans [**9**, Remarque 2.2(iii)], Deligne et Illusie ont introduit une classe de cohomologie associée à un $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-schéma lisse X. Leur construction est la suivante. Soit $\mathcal{F}_X$ le faisceau Zariski sur X_0 qui à un ouvert $U_0 \subset X_0$, réduction d'un ouvert $U \subset X$, associe l'ensemble des relèvements à $\mathcal{O}_U$ du Frobenius de $\mathcal{O}_{U_0}$. Alors $\mathcal{F}_X$ est un torseur sous le $\mathcal{O}_{X_0}$-module $\mathcal{H}om((\mathrm{Fr}_p)^\star\Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}, \mathcal{O}_{X_0})$. En effet, si f et f' sont deux relèvements du Frobenius au-dessus de $U = \mathrm{Spec}(A)$, alors l'application

$$\begin{array}{cccc} \delta_{f,f'} : & A & \longrightarrow & A_0 \\ & a & \mapsto & \mathbf{p}^{-1}(f(a) - f'(a)) \end{array}$$

est une p-dérivation additive de A (car $\delta_{f,f'} = \delta_f - \delta_{f'}$ alors que $\delta_f p = \delta_{f'} p = 1$). D'après la remarque 7.4, $\delta_{f,f'}$ s'écrit uniquement comme la composée $\ell_{f,f'} \circ (\mathrm{d} \otimes 1)$ avec

$$\ell_{f,f'} \in \Gamma(U; \mathcal{H}om((\mathrm{Fr}_p)^\star\Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}, \mathcal{O}_{X_0})).$$

Autrement dit, l'association $(\ell, \delta) \rightsquigarrow \delta + \ell \circ (\mathrm{d} \otimes 1)$ définit une action localement simplement transitive du faisceau $\mathcal{H}om((\mathrm{Fr}_p)^\star\Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}, \mathcal{O}_{X_0})$ sur $\mathcal{F}_X$. Ceci étant, $\mathcal{F}_X$ définit une classe de cohomologie

$$[\mathcal{F}_X] \in \mathrm{H}^1(X; \mathcal{H}om((\mathrm{Fr}_p)^\star\Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}, \mathcal{O}_{X_0})).$$

La terminologie introduite dans la définition 7.8 est justifiée par le résultat suivant. (Ce résultat est inclus ici par souci d'exhaustivité, mais il ne servira pas dans la suite.) □

Lemme 7.11. — *Modulo les identifications évidentes, on a l'égalité* $\mathrm{DI}_p(X) = -[\mathcal{F}_X]$.

Démonstration. — Il s'agit de [**10**, Theorem 3.2]. (Dans [**10**], $\mathrm{DI}_p(X)$ est appelée la classe de Kodaira–Spencer arithmétique de X et $[\mathcal{F}_X]$ est appelée la classe de Deligne–Illusie de X.)

On fixe un recouvrement affine $(U_i)_{i\in I}$ de X et, pour chaque $i \in I$, on fixe un relèvement à $\mathcal{O}_{U_i}$ du Frobenius de $\mathcal{O}_{(U_i)_0}$ qu'on note f_i. Pour $(i,j) \in I^2$, on pose $U_{ij} = U_i \cap U_j$. L'application

$$\begin{array}{cccc} \delta_{ij} : & \mathcal{O}(U_{ij}) & \longrightarrow & \mathcal{O}((U_{ij})_0) \\ & a & \mapsto & \mathbf{p}^{-1}(f_j(a) - f_i(a)) \end{array}$$

est une p-dérivation additive de $\mathcal{O}(U_{ij})$ et elle s'écrit comme la composée $\ell_{ij} \circ (\mathrm{d} \otimes 1)$ pour un unique élément

$$\ell_{ij} \in \Gamma(U_{ij}; \mathcal{H}om((\mathrm{Fr}_p)^\star\Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}, \mathcal{O}_{X_0})).$$

La famille $(\ell_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ est un 1-cocycle de Čech qui représente la classe $[\mathcal{F}_X]$.

Nous allons maintenant décrire un 1-cocycle de Čech qui représente la classe $\mathrm{DI}_p(X)$ de la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_0} \xrightarrow{u} p\text{-}\Omega^1_X \xrightarrow{v} (\mathrm{Fr}_p)^\star \Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p} \longrightarrow 0.$$

Le relèvement de Frobenius f_i détermine une p-dérivation de Buium $\delta_i = \delta_{f_i}$ sur $\mathcal{O}_{U_i}$. Par la propriété universelle, δ_i s'écrit comme la composée $r_i \circ \delta_X|_{U_i}$ pour un unique morphisme

$$r_i : p\text{-}\Omega^1_X|_{U_i} = p\text{-}\Omega^1_{U_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_0}|_{U_i} = \mathcal{O}_{(U_i)_0}.$$

Le morphisme r_i est une rétraction du morphisme $u|_{U_i}$. Il existe alors une unique section

$$s_i : (\mathrm{Fr}_p)^\star \Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}|_{U_i} = (\mathrm{Fr}_p)^\star \Omega^1_{(U_i)_0/\mathbb{F}_p} \longrightarrow p\text{-}\Omega^1_X|_{U_i} = p\text{-}\Omega^1_{U_i}$$

à $v|_{U_i}$ telle que

$$u|_{U_i} \circ r_i + s_i \circ v|_{U_i} = \mathrm{id}. \tag{7.3}$$

Pour $(i, j) \in I^2$, l'image du morphisme $s_j|_{U_{ij}} - s_i|_{U_{ij}}$ est contenue dans $\mathcal{O}_{X_0}|_{U_{ij}}$. Autrement dit, il existe un unique élément

$$h_{ij} \in \Gamma(U_{ij}; \mathcal{H}om((\mathrm{Fr}_p)^\star \Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}, \mathcal{O}_{X_0}))$$

tel que $s_j|_{U_{ij}} - s_i|_{U_{ij}} = u|_{U_{ij}} \circ h_{ij}$. La famille $(h_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ est un 1-cocycle de Čech qui représente $\mathrm{DI}_p(X)$.

Il est maintenant aisé de conclure. En effet, pour $(i, j) \in I^2$, on a l'égalité $\delta_j|_{U_{ij}} - \delta_i|_{U_{ij}} = \delta_{ij}$ entre p-dérivations de $\mathcal{O}(U_{ij})$. On en déduit que $r_j|_{U_{ij}} - r_i|_{U_{ij}} = \ell_{ij} \circ v|_{U_{ij}}$. Grâce à l'égalité (7.3), il s'ensuit que $u|_{U_{ij}} \circ (\ell_{ij} + h_{ij}) \circ v|_{U_{ij}} = 0$, ce qui entraîne que $h_{ij} = -\ell_{ij}$ comme souhaité. ■

Le résultat suivant est une reformulation d'un lemme de Raynaud.

Lemme 7.12. — *Soit X une courbe projective lisse définie sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ de genre $\geqslant 2$. Alors, la classe de Deligne–Illusie* $\mathrm{DI}_p(X)$ *est non nulle. Autrement dit, la suite exacte courte* (7.4) *est non scindée.*

Démonstration. — D'après le corollaire 7.9, si $\mathrm{DI}_p(X) = 0$, alors il existe un endomorphisme f de X qui relève le Frobenius de X_0. Dans [**24**, Lemma I.5.4], Raynaud montre que ceci n'est pas possible : un tel f induirait un morphisme non nul de $(\mathrm{Fr}_p)^\star \Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}$ dans $\Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}$. Or, le degré de $(\mathrm{Fr}_p)^\star \Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}$ est strictement supérieur à celui de $\Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}$ étant donné que le genre de X_0 est $\geqslant 2$. ■

Pour continuer, nous devons modifier la suite exacte (7.2).

Construction 7.13. — Soit X un $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-schéma. On considère le $\mathcal{O}_{X_0}$-module quasi-cohérent $p\text{-}\check{\Omega}^1_X$ qui rend cartésien le carré suivant

$$\begin{tikzcd} p\text{-}\check{\Omega}^1_X \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{Fr}_p)_\star\, p\text{-}\Omega^1_X \arrow[d] \\ \Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p} \arrow[r, "\eta"] & (\mathrm{Fr}_p)_\star (\mathrm{Fr}_p)^\star \Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}, \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale à droite est déduite de la surjection $p\text{-}\Omega^1_X \twoheadrightarrow (\mathrm{Fr}_p)^\star \Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}$ et où η désigne la counité de l'adjonction $((\mathrm{Fr}_p)^\star, (\mathrm{Fr}_p)_\star)$. Si le $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-schéma X est lisse, on a une suite exacte courte de $\mathcal{O}_{X_0}$-modules

$$0 \longrightarrow (\mathrm{Fr}_p)_\star \mathcal{O}_{X_0} \longrightarrow p\text{-}\check{\Omega}^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p} \longrightarrow 0 \tag{7.4}$$

qui s'obtient par changement de base suivant le morphisme η de la suite exacte courte (7.2) à laquelle on applique le foncteur exact $(\mathrm{Fr}_p)_\star$. On a un isomorphisme d'adjonction

$$\mathrm{Ext}^1((\mathrm{Fr}_p)^\star \Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}, \mathcal{O}_{X_0}) \simeq \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}, (\mathrm{Fr}_p)_\star \mathcal{O}_{X_0}),$$

car les foncteurs $(\mathrm{Fr}_p)^\star$ et $(\mathrm{Fr}_p)_\star$ sont exacts, et cet isomorphisme envoie la classe de l'extension (7.2) sur celle de l'extension (7.4). Ainsi, dans la suite, on note aussi

$$\mathrm{DI}_p(X) \in \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X_0/\mathbb{F}_p}, (\mathrm{Fr}_p)_\star \mathcal{O}_{X_0}) \tag{7.5}$$

la classe de l'extension (7.4), et on l'appelle également la classe de Deligne–Illusie de X. En particulier, si X est une courbe lisse de genre $\geqslant 2$, le lemme 7.12 affirme que la classe (7.5) est non nulle. □

Remarque 7.14. — Les suites exactes courtes (7.2) et (7.4) sont fonctorielles en le $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-schéma lisse X. En variant X, on obtient donc deux suites exactes courtes de faisceaux étales de $\mathcal{O}$-modules sur $\mathrm{Sm}/\mathrm{W}_2(\mathbb{F}_p)$:

$$0 \longrightarrow (i_{p|p^2})_*\mathcal{O} \longrightarrow p\text{-}\Omega^1 \longrightarrow (i_{p|p^2})_*(\Omega^1_{/\mathbb{F}_p} \otimes_{\mathcal{O},\phi_p} \mathcal{O}) \longrightarrow 0, \tag{7.6}$$

$$0 \longrightarrow (i_{p|p^2})_*\mathcal{O}' \longrightarrow p\text{-}\check{\Omega}^1 \longrightarrow (i_{p|p^2})_*\Omega^1_{/\mathbb{F}_p} \longrightarrow 0. \tag{7.7}$$

Expliquons les nouvelles notations utilisées dans (7.6) et (7.7) :

— $p\text{-}\Omega^1$ et $p\text{-}\check{\Omega}^1$ sont les faisceaux donnés par $p\text{-}\Omega^1(X) = \Gamma(X; p\text{-}\Omega^1_X)$ et $p\text{-}\check{\Omega}^1(X) = \Gamma(X; p\text{-}\check{\Omega}^1_X)$;

— $i_{p|p^2} : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ est l'inclusion évidente ;

— $\phi_p : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ est l'endomorphisme de Frobenius du faisceau $\mathcal{O}$ sur $\mathrm{Sm}/\mathbb{F}_p$ et $\mathcal{O}'$ désigne le faisceau de $\mathcal{O}$-modules sur $\mathrm{Sm}/\mathbb{F}_p$ déduit de ϕ_p : une section a de $\mathcal{O}$ agit sur une section de $\mathcal{O}'$ par multiplication par a^p. (Autrement dit, on a $\mathcal{O}'(Y) = \Gamma(Y; (\mathrm{Fr}_p)_\star\mathcal{O}_Y)$ pour $Y \in \mathrm{Sm}/\mathbb{F}_p$.)

Dans la suite, on utilisera uniquement la suite exacte courte (7.7). □

Construction 7.15. — Comme dans la preuve de la proposition 3.7, on pose $S_N = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{(N-1)!}])$, pour $N \in \mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$, et on convient que $S_\infty = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$. On note $i_p : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \hookrightarrow S_N$ et $i_{p^2} : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \hookrightarrow S_N$ de sorte que $i_p = i_{p^2} \circ i_{p|p^2}$. Pour chaque $p \geqslant N$, on applique le foncteur $(i_{p^2})_*$ à (7.7) et on prend le produit des suites exactes ainsi obtenues. Ceci résulte en une suite exacte courte de faisceaux Zariski de $\mathcal{O}$-modules sur Sm/S_N :

$$0 \longrightarrow \prod_{p\geqslant N}(i_p)_*\mathcal{O}' \longrightarrow \prod_{p\geqslant N}(i_{p^2})_*p\text{-}\check{\Omega}^1 \longrightarrow \prod_{p\geqslant N}(i_p)_*\Omega^1_{/\mathbb{F}_p} \longrightarrow 0. \tag{7.8}$$

(Pour vérifier l'exactitude de (7.8), on remarque que $\Gamma(X; (i_{p^2})_*(7.7))$ est une suite exacte courte pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S_N$ affine.) On forme le changement de base de (7.8) suivant le morphisme évident

$$\Omega^1_{/S_N} \longrightarrow \prod_{p\geqslant N}(i_p)_*\Omega^1_{/\mathbb{F}_p}.$$

Il s'ensuit une suite exacte courte de faisceaux Zariski de $\mathcal{O}$-modules sur Sm/S_N :

$$0 \longrightarrow \prod_{p\geqslant N}(i_p)_*\mathcal{O}' \longrightarrow \widetilde{\Omega}^1_{\geqslant N} \longrightarrow \Omega^1_{/S_N} \longrightarrow 0. \tag{7.9}$$

Enfin, on prend la colimite suivant $N \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ des suites exactes courtes $j^*_{\infty N}(7.9)$ comme dans la preuve de la proposition 3.7. Il s'ensuit une suite exacte courte de faisceaux Zariski de $\mathcal{O}$-modules sur $\mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}'_{\mathrm{pp}} \longrightarrow \widetilde{\Omega}^1_{\mathrm{pp}} \longrightarrow \Omega^1_{/\mathbb{Q}} \longrightarrow 0. \tag{7.10}$$

Ci-dessus, $\mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}$ est bien le faisceau de $\mathcal{O}$-modules introduit dans la remarque 3.8. □

Définition 7.16. — *Soit X un $\mathbb{Q}$-schéma lisse. La classe de Deligne–Illusie pour presque tout nombre premier associée à X est la classe*

$$\mathrm{DI}_{\mathrm{pp}}(X) \in \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X/\mathbb{Q}}, \mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}|_{\mathrm{Et}/X}) \simeq \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X; \mathcal{T}_{X/\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}|_{\mathrm{Et}/X})$$

de la restriction à Et/X *de la suite exacte courte* (7.10).

Remarque 7.17. — Il est facile de voir qu'on a un isomorphisme

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(X; \mathcal{T}_{X/\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}|_{\mathrm{Ouv}/X}) \simeq \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X; \mathcal{T}_{X/\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}|_{\mathrm{Et}/X}).$$

(Puisque $\mathcal{T}_X$ est localement libre de dimension finie, ceci découle de [**1**, Exposé VI, Corollaire 8.7.7], de l'isomorphisme (3.3) et de [**1**, Exposé VII, Proposition 4.3].) Ainsi, dans la définition 7.16 on aurait pu utiliser le petit site Zariski $(\mathrm{Ouv}/X, \mathrm{Zar})$ au lieu du petit site étale $(\mathrm{Et}/X, \text{ét})$. Toutefois, nous avons choisi la version étale car elle se compare mieux avec la classe de Kodaira–Spencer arithmétique de la définition 6.3. □

Lemme 7.18. — *Soit X une $\mathbb{Q}$-courbe projective lisse de genre $\geqslant 2$. Alors, la classe* $\mathrm{DI}_{\mathrm{pp}}(X)$ *est non nulle.*

Démonstration. — On fixe un modèle entier $\mathcal{X}$ de X. On a une chaîne d'isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1\left(\Omega^1_{X/\mathbb{Q}}, \mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}|_{\mathrm{Et}/X}\right) &\overset{(1)}{\simeq} \operatorname*{colim}_{N\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^1\left(\Omega^1_{\mathcal{X}\times S_N/S_N}, \prod_{p\geqslant N}(i_p)_\star(\mathrm{Fr}_p)_\star\mathcal{O}_{\mathcal{X}_p}\right) \\ &\overset{(2)}{\simeq} \operatorname*{colim}_{N\in\mathbb{N}} \prod_{p\geqslant N} \mathrm{Ext}^1\left(\Omega^1_{\mathcal{X}\times S_N/S_N}, (i_p)_\star(\mathrm{Fr}_p)_\star\mathcal{O}_{\mathcal{X}_p}\right) \\ &\overset{(3)}{\simeq} \operatorname*{colim}_{N\in\mathbb{N}} \prod_{p\geqslant N} \mathrm{Ext}^1\left(\Omega^1_{\mathcal{X}_p/\mathbb{F}_p}, (\mathrm{Fr}_p)_\star\mathcal{O}_{\mathcal{X}_p}\right). \end{aligned} \tag{7.11}$$

Pour justifier les isomorphismes ci-dessus, on remarque que $\Omega^1_{\mathcal{X}\times S_N/S_N}$ est localement libre de rang fini, pour $N \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ suffisamment grand et pour $N = \infty$. On a donc les identifications

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{\mathcal{X}\times S_N/S_N}, -) \simeq \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathcal{X} \times S_N; \mathcal{T}_{\mathcal{X}\times S_N/S_N} \otimes -),$$

et l'isomorphisme (1) découle de [**1**, Exposé VI, Corollaire 8.7.7] alors que l'isomorphisme (2) découle de l'isomorphisme (3.3). L'isomorphisme (3) s'obtient par adjonction étant donné que $\mathrm{L}(i_p)^\star\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathbb{Z}} \simeq \Omega^1_{\mathcal{X}_p/\mathbb{F}_p}$ pour p suffisamment grand.

La composition de (7.11) envoie la classe $\mathrm{DI}_{\mathrm{pp}}(X)$ sur l'élément de

$$\operatorname*{colim}_{N\in\mathbb{N}} \prod_{p\geqslant N} \mathrm{Ext}^1\left(\Omega^1_{\mathcal{X}_p/\mathbb{F}_p}, (\mathrm{Fr}_p)_\star\mathcal{O}_{\mathcal{X}_p}\right)$$

représenté par la famille $(\mathrm{DI}_p(\mathcal{X}_p))_{p\geqslant N}$, pour N suffisamment grand. Pour que cet élément soit non nul, il faut et il suffit que les classes $\mathrm{DI}_p(\mathcal{X}_p)$ soient non nulles pour une infinité de nombres premiers p. Or, d'après le lemme 7.12, ces classes sont non nulles pour tout p en lequel $\mathcal{X}$ a bonne réduction. ■

On est enfin en mesure de démontrer le résultat principal de cette section qui fournit un lien entre la classe de Kodaira–Spencer arithmétique et les classes de Deligne–Illusie pour presque tout nombre premier.

THÉORÈME 7.19. — *Il existe un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules sur* $\mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$

$$\theta : \Xi^1_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{O}'_{\mathrm{pp}} \tag{7.12}$$

tel que la propriété suivante est satisfaite. Pour tout $\mathbb{Q}$-schéma lisse X, le morphisme

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X; \mathcal{T}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Xi^1_{\mathbb{Q}}|_{\mathrm{Et}/X}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X; \mathcal{T}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}|_{\mathrm{Et}/X}),$$

déduit de θ, envoie $\kappa_{\mathrm{arith}}(X)$ sur $\mathrm{DI}_{\mathrm{pp}}(X)$.

Démonstration. — La suite exacte (7.10) fournit un morphisme

$$\Omega^1_{/\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}[1] \tag{7.13}$$

dans la catégorie dérivée des faisceaux de $\mathcal{O}$-modules sur $\mathrm{Sm}/\mathbb{Q}$. D'après la proposition 3.7, le faisceau $\mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}$ est $\mathbb{P}^1$-local pour la topologie étale. (On rappelle que $\mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}$ coïncide avec $\mathcal{O}_{\mathrm{pp}}$ après oubli de la structure de $\mathcal{O}$-module.) Ainsi, le morphisme (7.13) se factorise uniquement par

$$\mathrm{Loc}_{\mathbb{P}^1,\text{ét}}(\Omega^1_{/\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}[1]. \tag{7.14}$$

En appliquant $\mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{H}_1$ à (7.14), on obtient le morphisme (7.12) recherché.

Considérons le morphisme $\Omega^1_{/\mathbb{Q}} \longrightarrow \Xi^1_{\mathbb{Q}}[1]$ de la remarque 6.6. Par construction, le triangle

$$\begin{tikzcd} \Omega^1_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[dr] & \Xi^1_{\mathbb{Q}}[1] \arrow[d, "\theta"] \\ & \mathcal{O}'_{\mathrm{pp}}[1] \end{tikzcd}$$

est commutatif. En prenant les fibres homotopiques de la flèche horizontale et de la flèche oblique, on obtient un morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Xi^1_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & \Omega^1_{\mathrm{arith}} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^1_{/\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}'_{\mathrm{pp}} \arrow[r] & \Omega^1_{\mathrm{pp}} \arrow[r] & \Omega^1_{/\mathbb{Q}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

avec $\Omega^1_{\mathrm{arith}}$ le faisceau de $\mathcal{O}$-modules introduit dans le remarque 6.6. L'assertion sur les classes $\kappa_{\mathrm{arith}}(-)$ et $\mathrm{DI}_{\mathrm{pp}}(-)$ découle maintenant de la proposition 6.8 et de la définition 7.16. ■

Corollaire 7.20. — *La classe $\kappa_{\mathrm{arith}}(X)$ est non nulle pour toute $\mathbb{Q}$-courbe projective lisse de genre $\geqslant 2$. En particulier, le faisceau $\Xi^1_{\mathbb{Q}}$ est aussi non nul.*

Démonstration. — Ceci découle de la conjonction du lemme 7.18 et du théorème 7.19. ■

Références

[1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. MR 0354653

[2] Joseph Ayoub, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. II*, Astérisque (2007), no. 315, vi+364 pp. (2008). MR 2438151

[3] ———, *La réalisation étale et les opérations de Grothendieck*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **47** (2014), no. 1, 1–145. MR 3205601

[4] ———, *Motifs des variétés analytiques rigides*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (2015), no. 140-141, vi+386. MR 3381140

[5] Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1983, Algèbre commutative. Chapitres 8 et 9. MR 722608

[6] Alexandru Buium, *Differential characters of abelian varieties over p-adic fields*, Invent. Math. **122** (1995), no. 2, 309–340. MR 1358979

[7] ———, *Differential modular forms*, J. Reine Angew. Math. **520** (2000), 95–167. MR 1748272

[8] Jean-Louis Colliot-Thélène, Raymond Hoobler, and Bruno Kahn, *The Bloch-Ogus-Gabber theorem*, Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996), Fields Inst. Commun., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 31–94. MR 1466971

[9] Pierre Deligne and Luc Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Invent. Math. **89** (1987), no. 2, 247–270. MR 894379

[10] Taylor Dupuy, Eric Katz, Joseph Rabinoff, and David Zureick-Brown, *Total p-differentials on schemes over* $\mathbf{Z}/p^2$, J. Algebra **524** (2019), 110–123. MR 3903661

[11] Gerd Faltings, *Does there exist an arithmetic Kodaira-Spencer class ?*, Algebraic geometry : Hirzebruch 70 (Warsaw, 1998), Contemp. Math., vol. 241, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 141–146. MR 1718142

[12] Alexander Grothendieck and Jean Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1961), no. 11, 167. MR 0217085

[13] ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 28, 255. MR 0217086

[14] Philip Hirschhorn, *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR 1944041

[15] Amit Hogadi and Girish Kulkarni, *Gabber's presentation lemma for finite fields*, Preprint (2018).

[16] André Joyal, *δ-anneaux et vecteurs de Witt*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **7** (1985), no. 3, 177–182. MR 789309

[17] Bruno Kahn and Ramdorai Sujatha, *Birational motives, II : Triangulated birational motives*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2017), no. 22, 6778–6831. MR 3737321

[18] Gérard Laumon and Laurent Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 39, Springer-Verlag, Berlin, 2000. MR 1771927

[19] Carlo Mazza, Vladimir Voevodsky, and Charles Weibel, *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, American Mathematical Society, Providence, RI ; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006. MR 2242284 (2007e :14035)

[20] Fabien Morel, *The stable $\mathbb{A}^1$-connectivity theorems*, *K*-Theory **35** (2005), no. 1-2, 1–68. MR 2240215

[21] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky, $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory of schemes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1999), no. 90, 45–143. MR 1813224 (2002f :14029)

[22] Dorin Popescu, *General Néron desingularization*, Nagoya Math. J. **100** (1985), 97–126. MR 818160 (87f :13019)

[23] ———, *General Néron desingularization and approximation*, Nagoya Math. J. **104** (1986), 85–115. MR 868439 (88a :14007)

[24] Michel Raynaud, *Around the Mordell conjecture for function fields and a conjecture of Serge Lang*, Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982), Lecture Notes in Math., vol. 1016, Springer, Berlin, 1983, pp. 1–19. MR 726419

[25] Joël Riou, *La conjecture de Bloch-Kato (d'après M. Rost et V. Voevodsky)*, Astérisque (2014), no. 361, Exp. No. 1073, x, 421–463. MR 3289290

[26] Stefan Schwede and Brooke Shipley, *Algebras and modules in monoidal model categories*, Proc. London Math. Soc. (3) **80** (2000), no. 2, 491–511. MR 1734325 (2001c :18006)

[27] Lucien Szpiro, *Discriminant et conducteur des courbes elliptiques*, no. 183, 1990, Séminaire sur les Pinceaux de Courbes Elliptiques (Paris, 1988), pp. 7–18. MR 1065151

[28] Vladimir Voevodsky, *Homology of schemes*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), no. 1, 111–153. MR 1403354

[29] ———, *Triangulated categories of motives over a field*, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, pp. 188–238. MR 1764202

Joseph Ayoub,
Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstr. 190, CH-8057 Zürich, Switzerland
CNRS, LAGA, Université Paris 13, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France
E-mail : joseph.ayoub@math.uzh.ch