TOPOLOGIE FEUILLETÉE ET THÉORIE DE GALOIS DIFFÉRENTIELLE

par

Joseph Ayoub

Résumé. — Dans cet article, on étudie une nouvelle topologie de Grothendieck qu'on appelle la topologie feuilletée. La majeure partie de l'article est consacrée à l'étude de cette topologie « aux points génériques ». En fait, la topologie feuilletée est intimement liée à la théorie de Galois différentielle de la même manière que la topologie étale est liée à la théorie de Galois ordinaire. Ce lien tout à fait élémentaire permet de mettre en évidence une théorie de Galois différentielle « cachée » qui se manifeste par des groupes fondamentaux différentiels supérieurs, le groupe de Galois différentiel absolu de Kolchin étant le premier de ces groupes fondamentaux.

Il s'avère que les groupes fondamentaux différentiels sont souvent calculables explicitement en termes d'invariants classiques. (C'est notamment le cas pour les corps de fonctions de variétés algébriques.) Plus surprenant encore : le type d'homotopie feuilletée, qui est l'objet « homotopique » naturel dont les groupes d'homotopie sont les groupes fondamentaux différentiels, se décrit facilement à l'aide des espaces d'Eilenberg–Mac Lane. En termes techniques, on comprend parfaitement et explicitement les k-invariants et la théorie de l'obstruction de la tour de Postnikov du type d'homotopie feuilleté. Cette découverte est certainement le résultat principal de cet article.

Abstract. — In this article we study an new Grothendieck topology that we name the foliated topology. A major part of the article is concerned with the study of the foliated topology "at generic points". In fact, the foliated topology is closely related to differential Galois theory in the same way that the étale topology is related to ordinary Galois theory. Although this link is completely elementary, it permits to unravel a "hidden" differential Galois theory manifesting itself into higher differential fundamental groups. The absolute differential Galois group of Kolchin is just the first one of these differential fundamental groups.

It turns out that these differential fundamental groups are often explicitly computable in terms of classical invariants. (This is for instance the case for fields of rational functions of algebraic varieties.) Even more surprising is the fact that the foliated homotopy type, which is the natural "homotopical" object whose homotopy groups yield the differential fundamental groups, can be easily described using Eilenberg–Mac Lane spaces. In technical terms, we completely and very explicitly understand the k-invariants and the obstruction theory of the Postnikov tower of the foliated homotopy type. This discovery is certainly the main result of the present article.

Table des matières

Mots clefs. — Algèbre différentielle, théorie de Galois différentielle, feuilletage schématique, topologie feuilletée, type d'homotopie feuilletée.

L'auteur a bénéficié du soutien du Fond National Suisse de la Recherche Scientifique (NSF), projet 200020_178729.

Introduction

Dans cet article, j'étudie une nouvelle topologie de Grothendieck que j'appelle la *topologie feuilletée*. (En fait, dans cet article, la topologie feuilletée apparaitra sous plusieurs variantes mais il convient de passer sous silence cela pour le moment.) L'introduction et le développement de la topologie feuilletée ont été motivés par la conjecture de conservativité en théorie des motifs. Toutefois, le lien entre la topologie feuilletée et les motifs ne saute pas aux yeux et dans cette introduction je ne discuterai pas de ce lien. En fait, la topologie feuilletée est tout à fait naturelle et elle aurait pu (ou aurait dû ?) être introduite il y a bien longtemps indépendement d'une possible application aux motifs ! Il est donc possible d'intéresser le lecteur à la topologie feuilletée sans invoquer de grandes conjectures motiviques, et c'est le pari que je prends dans cette introduction et tout au long de l'article.

La majeur partie de article est rédigée dans le language des Δ-schémas. Toutefois, pour faire appel à l'intuition géométrique, j'utiliserai plutôt le language des feuilletages dans cette introduction. (Il s'agit en fait de feuilletages schématiques comme dans la définition 6.1.1 ; un Δ-schéma (essentiel) est simplement un feuilletage schématique muni d'un choix de coordonnées locales (voir la définition 3.1.1 et la proposition 6.2.3).) L'étude des feuilletages est un chapitre classique et passionnant de la géométrie différentielle mais dans lequel je suis à peu près complètement ignorant. Classiquement, les théoriciens des feuilletages se sont intéressés à la classification des feuilletages sur une variété différentiable donnée. (Un des théorèmes célèbres dans cette direction est bien sûr le théorème de Thurston [**66**] selon lequel toute variété différentiable dont la caractéristique d'Euler est nulle admet un feuilletage de codimension 1.) Ainsi, il me semble judicieux de dire que dans la démarche classique, l'espace total d'un feuilletage est véritablement l'objet d'étude. En revanche, dans ce travail, je m'intéresse d'avantage aux feuilles qu'à l'espace total. En réalité, les feuilletages considérés dans ce travail ont tendance à avoir des espaces totaux pathologiques : ce sont souvent des schémas non noethériens, de dimension infinie et possiblement singuliers. (Le terme « feuilletage » est donc utilisé dans ce travail d'une manière abusive et contraire à la tradition, mais j'espère pouvoir compter sur l'indulgence du lecteur !) Pour dire les choses simplement : la notion de feuilletage apparaît dans ce travail comme un moyen de donner un sens, et d'une manière purement algébrique, à des espaces qui habituellement dépassent le cadre de la géométrie algébrique. Un exemple simple mais parlant est celui du revêtement universel du $\mathbb{C}$-schéma $\mathbb{E}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$: il est donné par l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ mais on peut aussi le réaliser comme la projection sur $\mathbb{E}^1$ de la feuille passant par le point $(1,0)$ du feuilletage sur $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t,t^{-1},l])$ donné par le champs de vecteurs $\partial_l - t\cdot\partial_t$. Autrement dit, on peut accéder au revêtement universel du $\mathbb{C}$-schéma $\mathbb{E}^1$ grâce à un objet purement algébrique, à savoir le feuilletage sur $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{A}^1$ donné par le champs de vecteurs $\partial_l - t\cdot\partial_t$.

Partant du constat que les feuilletages schématiques sont des objets purement algébriques qui permettent de réaliser des espaces transcendants (par passage aux feuilles et moyennant le choix d'un point), il est tentant de considérer les feuilletages schématiques comme des espaces à part entière qui généralisent les schémas ordinaires. Plus précisément, il s'agit de déclarer qu'un schéma est feuilleté par ses composantes connexes et de le considérer ainsi comme une sorte très particulière d'espaces plus généraux : les feuilletages schématiques. Il est alors naturel de developper les notions de bases de la géométrie algébrique à la Grothendieck pour ces espaces (voir les sous-sections 6.1 et 6.2). En particulier, on est amené par analogie à déclarer qu'un morphisme entre deux feuilletages schématiques est *étale* s'il induit des isomorphismes sur les espaces tangents ponctuels des feuilles. (Il s'agit bien d'une condition qui peut être exprimée d'une manière purement algébrique, voir la définition 6.2.5.)

La *topologie feuilletée* est simplement la topologie de Grothendieck sur les feuilletages schématiques ayant pour familles couvrantes les familles « surjectives » de morphismes étales. (La condition de « surjectivité » est en fait assez délicate, voir la définition 6.5.9.) Il est important de remarquer que, même si on ne s'intéresse au final qu'aux schémas ordinaires, la topologie feuilletée garde tout son attrait : en effet, il existe beaucoup de recouvrements feuilletés de schémas ordinaires qui ne se raffinent pas par des recouvrements pour les topologies classiques de la géométrie algébrique (étale, fpqc, h, etc.). C'est le cas par exemple du recouvrement feuilleté considéré ci-dessus du schéma $\mathbb{E}^1$, i.e., celui donné par la projection évidente $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{E}^1$, où le schéma $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{A}^1$ est muni du feuilletage induit par $\partial_l - t \cdot \partial_t$.

Il est souvent pertinent de considérer la topologie étale comme une « approximation » de la topologie transcendante. Il s'agit d'une approximation bien meilleure que la topologie de Zariski et elle est particulièrement adaptée aux invariants topologiques finis. Je pense bien évidement à l'isomorphisme de comparaison d'Artin–Grothendieck

$$\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}^*(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

entre cohomologie étale et cohomologie singulière, valable pour tout $\mathbb{C}$-schéma X de type fini et tout entier non nul $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. En revanche, la cohomologie étale à coefficients rationnels est un invariant pauvre : si le $\mathbb{C}$-schéma X est normal, alors les $\mathbb{Q}$-vectoriels $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X; \mathbb{Q})$ sont nuls pour $i > 0$. En un sens, la topologie étale est une approximation profinie de la topologie transcendante. Un slogan que j'aimerai proposer est le suivant : la topologie feuilletée est une approximation pro-algébrique de la topologie transcendante ! Pour illustrer cela, je mentionne l'isomorphisme de comparaison

$$\mathrm{H}^*_{\text{ft}}(X; \mathcal{O}^\delta) \simeq \mathrm{H}^*(X(\mathbb{C}); \mathbb{C}),$$

valable pour X un $\mathbb{C}$-schéma lisse, et où le membre de gauche désigne la cohomologie feuilletée de X à valeurs dans le faisceau des « fonctions constantes le long des feuilles ». Cet isomorphisme de comparaison se factorise en fait par un autre isomorphisme $\mathrm{H}^*_{\text{ft}}(X; \mathcal{O}^\delta) \simeq \mathrm{H}^*_{\text{dR}}(X)$ qui découle d'un lemme de Poincaré feuilleté (voir le théorème 5.7.4). La possibilité d'un lemme de Poincaré dans le contexte de la topologie feuilletée est d'ailleurs l'un des principaux attraits de cette topologie !

Je termine cette introduction par un aperçu de l'article. À présent, j'abandonne le language des feuilletages schématiques pour celui des Δ-schémas (voir la définition 3.1.1).

Théorie de Galois différentielle classique. — La section 1 contient des rappels et des compléments d'algèbre différentielle. Dans la sous-section 1.2, je présente, dans un language un peu plus algébrique, la preuve de Malgrange [**55**] de son théorème de l'involutivité générique. Ce théorème sera constamment utilisé dans cet article et j'espère que le lecteur trouvera ma présentation utile. Comme première application, dans la sous-section 1.3, j'utilise le théorème de l'involutivité de Malgrange pour démontrer le théorème 1.3.11 qui fournit des informations sur l'algèbre des constantes d'une Δ-algèbre de type fini sur un Δ-corps.

La section 2 contient une présentation de la théorie de Galois différentielle classique à la Kolchin et Picard–Vessiot. Là encore, il s'agit en grande partie de rappels, mais il y a aussi quelques nouveautés importantes. La présentation que je donne de la théorie de Galois différentielle est proche de celle de Kovacic [**52, 53**] sauf que, contrairement à ce dernier, je m'efforce de considérer des extensions arbitraires de Δ-corps. Ainsi, je ne me restreins pas aux extensions de Δ-corps pour lesquelles on s'attend à de bonnes propriétés galoisiennes (i.e., les extensions fortement normales de [**52**]) – ce qui aurait été d'ailleurs largement insuffisant pour les besoins de cet article. Ce point de vu conduit naturellement à la notion de « noyau totalement décomposable » (voir la définition 2.2.5) : je montre que toute Δ-extension L/K possède une plus grande sous-Δ-extension L^{td}/K, son noyau totalement décomposable, qui a des bonnes propriétés galoisiennes. (Ceci n'est pas évident ! La preuve repose d'une manière essentielle sur le théorème 1.3.11

mentionné ci-dessus, qui lui repose sur le théorème de l'involutivité de Malgrange.) Rétrospectivement, il y a des similarités avec la théorie des extensions algébriques en caractéristique positive : le noyau totalement décomposable correspond à la sous-extension séparable maximale. Cependant, il convient de noter une différence importante : le noyau totalement décomposable de la Δ-extension L/L^{td} n'est pas forcément la Δ-extension triviale !

Les sous-sections 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4 sont consacrées à l'étude générale des Δ-extensions. En particulier, je développe la propriété pour une Δ-extension de « décomposer maximalement » une autre (voir la définition 2.1.1). Cette propriété est à la base de la notion de « noyau totalement décomposable » mentionnée ci-dessus. L'étude générale des Δ-extensions culmine avec la l'introduction des Δ-extensions normales et pseudo-normales (voir la définition 2.4.1).

Dans la sous-section 2.6, je construis le groupoïde de Galois différentiel d'une Δ-extension normale. Cette construction repose sur la notion de groupoïde rationnel à la Weil que je rappelle dans la sous-section 2.5. (En effet, la démarche suivie conduit naturellement à la construction d'un groupoïde rationnel qu'il faut ensuite régulariser pour obtenir le groupoïde de Galois différentiel.) Dans la sous-section 2.8, je développe la correspondance de Galois différentielle habituelle entre sous-Δ-extensions et sous-groupes fermés du groupe de Galois différentiel. Enfin, la sous-section 2.9 regroupe quelques compléments. On y trouvera notamment une définition des extensions de Picard–Vessiot, la construction des clôtures de Kolchin et de Picard–Vessiot d'un Δ-corps, et enfin la correspondance entre modules différentiels et représentations linéaires du groupe de Galois différentiel absolu.

Topologie feuilletée dans le cadre des Δ-schémas. — Dans la sous-section 3.3, j'introduis une première version de la topologie feuilletée : la topologie *feuilletée de type fini* sur la catégorie des Δ-schémas, désignée par « fttf ». La définition de cette topologie est très simple : elle est engendrée par les familles surjectives de morphismes de type fini de Δ-schémas (voir la définition 3.3.2). La motivation géométrique derrière une telle définition est claire si on y pense en termes de feuilletages. En effet, un morphisme de Δ-schémas induit un morphisme étale de feuilletages schématiques ! (En fait, pour que cela soit tout à fait exact, il faut se restreindre aux Δ-schémas essentiels, voir la proposition 6.2.10.) Dans la sous-section 3.3, on trouvera aussi la construction d'une famille conservative de points du topos fttf d'un Δ-schéma (voir le théorème 3.3.16).

Dans les sous-sections 3.5 et 3.6, j'introduis deux classes remarquables de faisceaux feuilletés : celle des faisceaux feuilletés discrets et celle, plus générale, des faisceaux feuilletés localement discrets. Les faisceaux feuilletés discrets sont les analogues, pour la topologie feuilletée, des faisceaux constants en topologie étale (ou autre topologie classique). De même, les faisceaux feuilletés localement discrets sont les analogues, pour la topologie feuilletée, des faisceaux localement constants. Cette analogie est basée sur l'idée simple suivante : dans le contexte des feuilletages les espaces « discrets » naturels sont les feuilletages où les feuilles sont réduites à des points. (De tels feuilletages sont dits discrets et on peut les définir en demandant que leurs espaces tangents aux feuilles soient nuls en tout point.) Je mentionne aussi le théorème 3.6.11 qui fournit un analogue pour la topologie feuilletée de l'équivalence entre faisceaux sur le petit site étale d'un corps et les actions continues du groupe de Galois absolu sur des ensembles discrets.

Théorie de Galois différentielle supérieure ou les types d'homotopie feuilletée. — Dans la section 4, j'introduis et j'étudie le type d'homotopie feuilletée d'un Δ-corps. (En fait, pour simplifier, je me suis restreins au cas des Δ-corps algébriquement clos.)

La section 4 débute avec le « lemme magique », qui est l'un des résultats techniques essentiels de cet article. C'est précisément grâce au « lemme magique » que la cohomologie feuilletée est calculable ! Il n'est pas difficile d'expliquer le rôle de ce lemme. En effet, supposons qu'on veuille calculer la cohomologie feuilletée d'un Δ-corps K à valeurs dans un préfaisceau F. En première approximation, on peut s'intéresser à la cohomologie de Čech. On se donne pour cela un (K,Δ)-schéma intègre et de type fini X, et on remarque que le singleton $\{U \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)\}$ est un recouvrement fttf pour tout ouvert non vide $U \subset X$. Ainsi, si L est le corps des fonctions rationnelles sur X, le complexe de Čech

$$F(L) \rightrightarrows F(L \otimes_K L) \overset{\longrightarrow}{\rightrightarrows} F(L \otimes_K L \otimes_K L) \overset{\rightrightarrows}{\rightrightarrows} \cdots$$

est une première approximation de la cohomologie feuilletée de K à valeurs dans F. En prenant des Δ-extensions L/K de plus en plus grande, cette approximation est suffisante pour comprendre le $\mathrm{H}^1_{\mathrm{fttf}}(K;F)$. Toutefois, pour accéder à des classes de cohomologie en degré $\geqslant 2$, il faudrait passer à l'étape suivante et considérer la cohomologie de Čech des Δ-schémas $\mathrm{Spec}(L\otimes_K L)$ et $\mathrm{Spec}(L\otimes_K L\otimes_K L)$, etc. Malheureusement, en général, la Δ-extension L/K a un degré de transcendance non nul (et même souvent infini) et les schémas $\mathrm{Spec}(L\otimes_K L)$ et $\mathrm{Spec}(L\otimes_K L\otimes_K L)$, etc., sont donc de dimension non nulle (et même souvent infinie). Il est donc difficile de comprendre les recouvrements feuilletés de ces schémas et il est encore plus difficile de comprendre leur cohomologie de Čech. Ce raisonnement semble indiquer que la cohomologie feuilletée est un invariant monstrueux et incalculable !

Évidemment, la situation serait beaucoup plus agréable si les schémas $\mathrm{Spec}(L\otimes_K\cdots\otimes_K L)$ étaient remplacés par leurs anneaux de fonctions rationnels $\mathrm{Frac}(L\otimes_K\cdots\otimes_K L)$. En fait, c'est exactement ce que le « lemme magique » permet de faire ! (Autrement dit, ce lemme affirme que les « géométries globales » des schémas $\mathrm{Spec}(L\otimes_K\cdots\otimes_K L)$ s'annihilent mutuellement dans le complexe de Čech. Il s'agit, à mon avis, d'un phénomène un peu étrange, d'où le qualificatif « magique ».) Pour un énoncé plus précis, je renvoie le lecteur au théorème 4.2.18. En fait, le « lemme magique » est véritablement un phénomène général qui peut être formalisé dans une situation abstraite (voir le théorème 4.1.3).

Fort de ce tournant agréable, j'introduis dans la sous-section 4.4 la notion d'*hyper-recouvrement générique*. Comme son nom l'indique, il s'agit d'un analogue générique de la notion classique d'hyper-recouvrement. L'exemple le plus simple est donné par le Δ-schéma semi-simplicial

$$\cdots \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}\; \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(L\otimes_K L\otimes_K L)) \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}\; \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(L\otimes_K L)) \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow}\; \mathrm{Spec}(L)$$

avec K/L une Δ-extension de type fini. Un résultat technique important, démontré dans la sous-section 4.5 (voir le théorème 4.5.1), affirme que les hyper-recouvrements génériques d'un Δ-corps algébriquement clos sont connexes en chaque degré. Autrement dit, ce sont des spectres de Δ-corps semi-cosimpliciaux. Mis à part son utilité technique évidente, ce résultat entraîne une formule de Kunneth pour la cohomologie feuilletée d'un Δ-corps algébriquement clos.

Dans la sous-section 4.6, j'introduis la notion d'« hyper-enveloppe différentielle » d'un Δ-corps K (désormais supposé algébriquement clos). En gros, il s'agit d'un hyper-recouvrement générique de $\mathrm{Spec}(K)$ donné en chaque degré par le spectre d'un Δ-corps différentiellement clos (voir la définition 4.6.6). Le *type d'homotopie feuilletée* (générique) de K est obtenu à partir d'une hyper-enveloppe différentielle en prenant les corps des constantes en chaque degré (voir la définition 4.6.21). On trouve aussi dans la sous-section 4.6 la proposition 4.6.25 qui affirme que la cohomologie feuilletée à valeurs dans un faisceau feuilleté localement discret se calcule comme la cohomologie étale du type d'homotopie feuilletée à valeurs dans un système local associé. Ce résultat justifie pleinement la terminologie !

Les sous-sections 4.7, 4.8 et 4.10 sont très techniques. Le but ici est d'étudier le type d'homotopie feuilletée en analysant sa tour de Postnikov. Remarquablement, et malgré la complexité de la situation, il est possible d'obtenir des résultats très satisfaisants et à priori inespérés. Parmi ces résultats, je cite les théorèmes 4.8.17 et 4.10.17 qui affirment que la tour de Postnikov du type d'homotopie feuilletée de K est, essentiellement, une suite de projections de torseurs sous des espaces d'Eilenberg–Mac Lane associés à des pro-groupes algébriques (qui sont, par définition, les groupes fondamentaux différentiels de K). Ces résultats seront en faite précisés dans la suite de l'article où je montre que les torseurs que je viens de mentionner ont tendance d'être des torseurs triviaux ! Autrement dit, le type d'homotopie feuilletée a tendance d'être un produit d'espaces d'Eilenberg–Mac Lane !

Calcul du type d'homotopie feuilletée. — Le but de la section 5 est de terminer l'analyse de la tour de Postnikov du type d'homotopie feuilletée en l'explicitant entièrement. Pour ce faire, j'ai besoin de deux ingrédients. D'abord je dois comprendre la cohomologie des espaces d'Eilenberg–Mac Lane algébriques et de leurs torseurs. Ceci fait l'objet des sous-sections 5.5 et 5.6. Ensuite, je dois comprendre la cohomologie feuilletée des Δ-corps à valeurs dans certains faisceaux feuilletés localement discrets. Ce sont, d'une part, les faisceaux feuilletés localement discrets associés à des Δ-modules et, d'autre part, les faisceaux feuilletés discrets associés à des schémas en groupes commutatifs et connexes sur les corps des constantes. La cohomologie feuilletée à valeurs dans de tels faisceaux se calcule explicitement grâce au lemme de Poincaré feuilleté (voir les théorèmes 5.7.4 et 5.8.7).

En comparant, d'une part, la cohomologie feuilletée du Δ-corps K à valeurs dans les faisceaux feuilletés localement discrets pertinents et, d'autre part, la cohomologie étale du type d'homotopie feuilletée générique de K (qu'on peut réaliser comme une tour de torseurs sous des espaces d'Eilenberg–Mac Lane algébriques grâce au travail effectué dans la section 4), j'arrive à montrer que les k-invariants dans la tour de Postnikov s'annulent souvent. Au final, ceci permet de calculer explicitement le type d'homotopie feuilletée. Pour les énoncés précis, je renvoie le lecteur au théorème 5.12.3.

Au delà des Δ-corps. — Les deux dernières sections 6 et 7, sont largement indépendentes du reste de l'article. Dans les sous-sections 6.1 et 6.2, j'introduis le language des feuilletages schématiques, et je fais le lien entre feuilletages et Δ-schémas. Les sous-sections 6.3 et 6.4 contiennent des résultats techniques autour de la notion de complétion faible d'un feuilletage schématique affine le long d'un fermé constructible. Dans la sous-section 6.5, j'introduis la topologie *feuilletée* désignée par « ft ». Il s'agit d'une variante de la topologie feuilletée de type fini qui a la vertu d'être fonctorielle pour des morphismes arbitraires de feuilletages schématiques. Dans la sous-section 6.8, je montre que les topologies fttf et ft fournissent génériquement les mêmes groupes de cohomologie pour une grande classe de préfaisceaux ; voir le théorème 6.8.15.

Dans la section 7, je tente de généraliser l'étude « aux points génériques » de la topologie feuilletée afin d'obtenir des résultats un peu plus globaux. Plus précisément, je m'intéresse dans cette section à la cohomologie feuilletée de feuilletages schématiques du type $X[[t_1, \cdots, t_n]]$, avec X un Δ-schéma intègre, et ceci localement au point générique de X. Les résultats obtenus dans cette section sont très techniques et s'appliquent à une classe restreinte de préfaisceaux qualifiés de ft-localement malléable. J'introduis et j'étudie la notion de malléabilité dans les sous-sections 7.4 et 7.6. Dans les sous-sections 7.7, 7.8 et 7.9, je donne quelques exemples de préfaisceaux (ft-localement) malléables et je tire quelques conséquences sur la cohomologie feuilletée à valeurs dans ces préfaisceaux.

Conventions et notations courantes

Une fois pour toute. — Tout au long de l'article, on fixe un ensemble fini $\Delta = \{\partial_1, \cdots, \partial_m\}$ de dériviations qui commutent deux à deux. On fixe aussi un système d'indéterminées $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_m)$ tel que $\partial_i(t_i) = 1$ et $\partial_i(t_j) = 0$ pour $i \neq j$. Pour un multi-indice $\mathbf{r} = (r_1, \cdots, r_m) \in \mathbb{N}^m$, on pose

$$\partial^{\mathbf{r}} = \partial_1^{r_1} \cdots \partial_m^{r_m}, \quad \mathbf{t}^{\mathbf{r}} = t_1^{r_1} \cdots t_m^{r_m} \quad \text{et} \quad |\mathbf{r}| = r_1 + \cdots + r_m.$$

Coefficients. — On fixe un anneau de coefficients Λ. Étant donné un ensemble E et un Λ-module M, on pose $E \otimes M = \bigoplus_{e \in E} M \cdot e$ et $\mathrm{Hom}(E, M) = \prod_{e \in E} M$. En particulier, $E \otimes \Lambda$ est le Λ-module librement engendré par E.

Anneaux et algèbres. — Sauf mention explicite du contraire, tous les anneaux et les algèbres sont commutatifs et unitaires. Si A est un anneau et $f \in A$, on note $\mathrm{D}(f) \subset \mathrm{Spec}(A)$ l'ouvert où f ne s'annule pas. Un ouvert de cette forme est dit *standard*. Si $I \subset A$ est un idéal, on note $\mathrm{Z}(I) \subset \mathrm{Spec}(A)$ le sous-schéma fermé (ou, simplement, la partie fermée) des zéros communs des éléments de I. Si l'anneau A est intègre, on note $\mathrm{Frac}(A)$ son corps des fractions. En général, on note $\mathrm{Frac}(A)$ la localisation de A en la partie multiplicative $S \subset A$ formée des éléments qui sont réguliers (i.e., qui ne sont pas diviseurs de zéro) dans $A_{\text{réd}}$. Un morphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$ est un *isomorphisme rationnellement* s'il induit un isomorphisme $\mathrm{Frac}(A) \simeq \mathrm{Frac}(B)$.

Schémas et Δ-schémas. — Sauf mention explicite du contraire, les schémas et les Δ-schémas sont supposés séparés. (Cette convention sera parfois rappelée si l'hypothèse de séparabilité intervient d'une façon cruciale dans une preuve.) Les schémas non réduits ne jouent aucun rôle dans cet article. Ainsi, même si cela nous répugne, il nous arrive parfois d'identifier un schéma avec son plus grand sous-schéma réduit, et confondre des expressions comme « partie localement fermée » et « sous-schéma localement fermé », sans nécessairement avertir le lecteur. Si x est un point d'un schéma X, on note $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau locale en x, $\mathfrak{m}_x$ son idéal maximal et $\kappa(x)$ son corps résiduel. (En particulier, si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier d'un anneau A, on a $\kappa(\mathfrak{p}) \simeq \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$.) Si X est un schéma (resp. Δ-schéma) admettant un nombre fini de points génériques, on note κ_X (et parfois $\kappa(X)$) le produit des corps résiduels des points génériques de X.

Si S est un schéma, on note Sch/S la catégorie des S-schémas. On note $\mathbb{A}^1_S$ et $\mathbb{P}^1_S$ les droites affine et projective relatives à S. On note $\mathbb{E}^1_S$ le complémentaire de la section nulle dans $\mathbb{A}^1_S$ et on reserve la notation $\mathbf{G}_{mS}$ au S-schéma en groupes multiplicatif de S-schéma sous-jacent $\mathbb{E}^1_S$. Si le schéma de base S est compris et qu'il n'y a pas risque de confusion, on supprime le « S » en indice. De même, le produit fibré au-dessus de S est noté par « $- \times_S -$ » sauf lorsqu'il n'y a pas de confusion possible et dans ce cas on écrit simplement « $- \times -$ ». La même convention s'applique aussi au produit tensoriel.

Groupes et actions. — On traitera un groupe abstrait (et même un objet en groupes) comme s'il s'agissant du groupe d'automorphismes d'un objet dans une catégorie. Ainsi, la multiplication d'un groupe G est le morphisme $G \times G \longrightarrow G$ donné par $(g, h) \rightsquigarrow h \circ g$. (Autrement dit, la source du morphisme de multiplication est l'objet représentant les paires (g, h) de flèches composables, i.e., tel que le but de g est la source de h.) Par conséquent, une action à gauche d'un groupe G sur un objet X sera désignée par $a : X \times G \longrightarrow X$ alors qu'une action à droite sera désignée par $a : G \times X \longrightarrow X$.

Simplicial et cosimplicial. — On note $\mathbf{\Delta}$ la catégorie des ordinaux finis $\underline{\mathbf{n}} = \{0 \to \cdots \to n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$, et $\mathbf{\Delta}' \subset \mathbf{\Delta}$ sa sous-catégorie ayant les mêmes objets mais où l'on ne retient que les applications strictement croissantes. Un foncteur contravariant de source $\mathbf{\Delta}$ (resp. $\mathbf{\Delta}'$) est appelé un *objet simplicial* (resp. *semi-simplicial*). De même, un foncteur covariant de source $\mathbf{\Delta}$ (resp. $\mathbf{\Delta}'$) est appelé un *objet cosimplicial* (resp. *semi-cosimplicial*). Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, on note $\delta^i : \underline{\mathbf{n-1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ l'unique application injective évitant i. Pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on note $\sigma^i : \underline{\mathbf{n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{n-1}}$ l'unique application surjective qui identifie i et $i+1$. On note d_i (resp. d^i) et s_i (resp. s^i) les actions des δ^i et σ^i dans un objet simplicial (resp. cosimplicial). On note aussi $\mathbf{\Delta}_+$ et $\mathbf{\Delta}'_+$ les catégories obtenues de $\mathbf{\Delta}$ et $\mathbf{\Delta}'$ en ajoutant un objet initial $\underline{\mathbf{-1}} = \varnothing$. Un foncteur contravariant de source $\mathbf{\Delta}_+$ (resp. $\mathbf{\Delta}'_+$) est appelé un *objet simplicial augmenté* (resp. *semi-simplicial augmenté*). De même, un foncteur covariant de source $\mathbf{\Delta}_+$ (resp. $\mathbf{\Delta}'_+$) est appelé un *objet cosimplicial coaugmenté* (resp. *semi-cosimplicial coaugmenté*).

Complexes. — Si $\mathcal{A}$ est une catégorie additive, on note $\mathbf{Cpl}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes dans $\mathcal{A}$. On utilisera les deux indexations : l'homologique et la cohomologique. Un complexe A est dit *borné à gauche* (resp. *à droite*) si A_i (resp. A^i) est nul pour i suffisament grand. On note $\mathbf{Cpl}^+(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{Cpl}^-(\mathcal{A})$) la sous-catégorie de $\mathbf{Cpl}(\mathcal{A})$ formée des complexes bornés à gauche (resp. à droite). On désigne par $\sigma^{\geqslant -}$ et $\sigma^{\leqslant -}$ les troncations bêtes des complexes (indexation cohomologique). Par exemple, on a $(\sigma^{\leqslant n}A)^i = A^i$ si $i \leqslant n$ et $(\sigma^{\leqslant n}A)^i = 0$ sinon. Étant donné un multi-complexe A dans $\mathcal{A}$, on note $\mathrm{Tot}^{\oplus}(A)$ et $\mathrm{Tot}^{\prod}(A)$ les complexes simples associés à A en utilisant les sommes directes et les produits directs respectivement. Lorsque ces opérations ne font intervenir que des sommes et produits finis, ils coïncident et on note simplement $\mathrm{Tot}(A)$ le complexe simple obtenu. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, on note $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ sa catégorie dérivée, et $\mathbf{D}^+(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{D}^-(\mathcal{A})$) la sous-catégorie de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ formée des complexes bornés à gauche (resp. à droite). Les troncations canoniques des complexes sont désignées par $\tau^{\leqslant -}$ et $\tau^{\geqslant -}$ (indexation cohomologique). On emploie parfois le terme « quasi-isomorphisme » d'une manière abusive pour désigner un isomorphisme dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ (qui peut être donné par un zigzag de quasi-isomorphisme).

Préfaisceaux, faisceaux et complexes d'iceux. — Étant donnée un site $(\mathcal{C}, \tau)$, i.e., une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$ munie d'une topologie de Grothendieck τ, on note $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{C}$ et $\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C})$ sa sous-catégorie pleine des faisceaux pour la topologie τ. On note $\mathrm{a}_\tau : \mathbf{PSh}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C})$ le foncteur « faisceau associé ». On note aussi $\mathbf{PSh}(\mathcal{C}; \Lambda)$ la catégorie des préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathcal{C}$ et $\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C}; \Lambda)$ sa sous-catégorie pleine des faisceaux pour la topologie τ. Sauf mention explicite du contraire, les termes « préfaisceau » et « faisceau » signifient préfaisceaux et faisceaux d'ensembles. Les termes « complexes de préfaisceaux » et « complexes de faisceaux » signifient complexes de préfaisceaux et complexes de faisceaux de Λ-modules.

La catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\Lambda))$, des complexes de préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathcal{C}$, admet une structure de modèles *projective*. Elle est caractérisée par ses équivalences faibles, qui sont les quasi-isomorphismes de complexes de préfaisceaux, et ses fibrations, qui sont les morphismes surjectifs. Elle admet une autre structure de modèles appelée la structure *projective* τ-*locale*. Elle est obtenue par une localisation de Bousfield suivant les *équivalences* τ-*locales* qui sont les morphismes de complexes de préfaisceaux induisant des isomorphismes sur les τ-faisceaux associés à leurs préfaisceaux d'homologie. La catégorie homotopique $\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\Lambda)))$, relativement à la structure de modèles projective τ-locale, est naturellement équivalente (via le foncteur a_τ), à la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C},\Lambda))$. Étant donné un complexe de préfaisceaux $F^\bullet$ et un objet $X\in\mathcal{C}$, on note $\mathrm{R}\Gamma_\tau(X;F)$ le complexe $G^\bullet(X)$ où $G^\bullet$ est un remplacement projectivement τ-fibrant de $F^\bullet$. Les Λ-modules de cohomologie de $\mathrm{R}\Gamma_\tau(X;F)$ seront notés $\mathrm{H}^i_\tau(X;F)$.

Homomorphisme interne. — Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, et si $X,Y\in\mathcal{C}$, on note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ l'ensemble des flèches de X dans Y. Si $\mathcal{C}$ est comprise, on note simplement $\mathrm{Hom}(X,Y)$ cet ensemble. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie enrichie, on note $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ l'objet qui représente les flèches de X dans Y. (Le plus souvent, ceci est appliqué avec $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique fermée, enrichie sur elle-même : dans ce cas $\underline{\mathrm{Hom}}(X,-)$ est un adjoint à droite du foncteur $X\otimes -$.)

Autres notations. — Étant donné un objet X, on note id_X l'identité de X et $\mathrm{diag}_X : X\longrightarrow X\times X$ le morphisme diagonal. (On se refrène d'utiliser « Δ_X » pour le morphisme diagonal étant donné que le symbol « Δ » désigne l'ensemble des dérivations.) Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets et $e\in I$, on note $\mathrm{pr}_e:\prod_{i\in I}X_i\longrightarrow X_e$ la projection sur le e-ième facteur.

Étant donnée une A-algèbre B, on note $\Omega_A(B)$ le B-module de ses différentielles de Kähler relatives. Étant donné un S-schéma X, on note $\Omega_{X/S}$ le $\mathcal{O}_X$-module des différentielles de Kähler. On pose aussi $\Omega_{/S}(X)=\Gamma(X;\Omega_{X/S})$.

1. Quelques notions d'algèbre différentielle

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats classiques d'algèbre différentielle. En particulier, nous donnons une preuve détaillée du théorème de l'involutivité générique de Malgrange ; ce théorème jouera un rôle très important dans cet article et sera utilisé couramment dans la suite.

On fixe une fois pour toute et tout au long de l'article un ensemble fini $\Delta=\{\partial_1,\cdots,\partial_m\}$ d'opérateurs différentiels qui commutent deux à deux. Comme d'habitude, pour $\mathbf{r}=(r_1,\cdots,r_m)\in\mathbb{N}^m$, on écrit $\partial^{\mathbf{r}}$ pour $\partial_1^{r_1}\cdots\partial_m^{r_m}$ et on pose $|\mathbf{r}|=r_1+\cdots+r_m$.

1.1. Rappels d'algèbre différentielle. —

Un Δ-*anneau* est un anneau A muni d'une action de Δ par des opérateurs différentiels qui commutent deux à deux. Ainsi, pour $1\leqslant i\leqslant m$, on a des homomorphismes de groupes abéliens $\partial_i:A\longrightarrow A$ qui commutent deux à deux et tels que

$$\partial_i(a\cdot b)=a\cdot\partial_i(b)+\partial_i(a)\cdot b,\quad \forall(a,b)\in A^2.$$

On notera $A^{\Delta=0}$ le sous-anneau des *constantes* de A défini par

$$A^{\Delta=0}=\{a\in A;\ \partial_i(a)=0,\ 1\leqslant i\leqslant m\}.$$

Lorsque A est un corps, on parlera de Δ-*corps* ; $A^{\Delta=0}$ est alors un sous-corps de A. Un Δ-morphisme de Δ-anneaux est un morphisme d'anneaux qui commute à l'action des $\partial\in\Delta$. Un Δ-morphisme de Δ-corps est appelé aussi une Δ-extension.

Si A est un Δ-anneau et $D\subset A$ est une partie, l'anneau des fractions $A[d^{-1};\ d\in D]$ est naturellement un Δ-anneau. Si $P\subset A$ est un idéal premier, on note comme d'habitude, $A_P=A[d^{-1};\ d\notin P]$. Lorsque A est intègre et que $P=0$, on obtient le Δ-corps des fractions de A, qu'on note $\mathrm{Frac}(A)$.

Étant donné un Δ-anneau A, une (A,Δ)-*algèbre* est un Δ-morphisme de Δ-anneaux $f:A\longrightarrow B$. Souvent, le morphisme f sera sous-entendu, et on dira simplement que B est une (A,Δ)-algèbre.

Exemple 1.1.1. — Étant donnée une famille d'indéterminées $(x_i)_{i\in I}$, on note $A\langle x_i;\ i \in I\rangle$ la (A,Δ)-algèbre des polynômes différentiels en les x_i. En tant que A-algèbre, elle est librement engendrée par les $\partial^{\mathbf{r}} x_i$, avec $i \in I$ et $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^m$. Si B est une (A,Δ)-algèbre et $(b_i)_{i\in I} \in B^I$, il existe un unique morphisme de (A,Δ)-algèbres $f : A\langle x_i;\ i \in I\rangle \longrightarrow B$ tel que $f(x_i) = b_i$. □

Exemple 1.1.2. — Soient A un Δ-anneau, et B et C des (A,Δ)-algèbres. Alors, la A-algèbre $B \otimes_A C$ est naturellement une (A,Δ)-algèbre. L'action d'un opérateur $\partial \in \Delta$ sur un tenseur $b \otimes c$ (avec $b \in B$ et $c \in C$) est donnée par $\partial(b \otimes c) = b \otimes \partial(c) + \partial(b) \otimes c$. □

On dit qu'une (A,Δ)-algèbre B est engendrée par une partie $E \subset B$ si la A-algèbre B est engendrée par la partie $\{\partial^{\mathbf{r}}(e);\ e \in E \text{ et } \mathbf{r} \in \mathbb{N}^m\}$. C'est le cas si et seulement si le morphisme de (A,Δ)-algèbres $A\langle x_e;\ e \in E\rangle \longrightarrow B$, envoyant x_e sur e, est surjectif. Une (A,Δ)-algèbre B est dite de type fini s'il existe une partie finie $E \subset B$ qui l'engendre.

Étant donné un Δ-anneau A, un (A,Δ)-*module* est un A-module M muni d'homomorphismes de groupes abéliens $\partial_i : M \longrightarrow M$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, qui commutent deux à deux et tels que

$$\partial_i(a \cdot l) = a \cdot \partial_i(l) + \partial_i(a) \cdot l, \quad \forall (a,l) \in A \times M.$$

Ces homomorphismes sont encore appelés des opérateurs différentiels. On notera $M^{\Delta=0}$ le sous-$A^{\Delta=0}$-module des constantes de M égal à l'intersection des noyaux des $\partial \in \Delta$. Le produit tensoriel des (A,Δ)-modules est défini comme pour les (A,Δ)-algèbres. On dit que le (A,Δ)-module M est engendré par une partie $E \subset M$ si le A-module M est engendré par la partie $\{\partial^{\mathbf{r}}(l);\ l \in E \text{ et } \mathbf{r} \in \mathbb{N}^m\}$. Le (A,Δ)-module M est de type fini s'il existe par une partie finie $E \subset M$ qui l'engendre.

Clairement, A est naturellement un (A,Δ)-module. Un Δ-*idéal* de A est simplement un sous-(A,Δ)-module de A. On dit qu'il est de type fini s'il est de type fini en tant que (A,Δ)-module.

Exemple 1.1.3. — Soit B une (A,Δ)-algèbre. Alors, le B-module des différentielles de Kähler relatives $\Omega_{B/A}$ est naturellement un (B,Δ)-module tel que $\partial(\mathrm{d}b) = \mathrm{d}(\partial(b))$ pour tout $\partial \in \Delta$ et $b \in B$. (Ceci découle aussitôt de l'identification $\Omega_{B/A} = I/I^2$ où $I \subset B \otimes_A B$ est le noyau du Δ-morphisme $B \otimes_A B \longrightarrow B$ donné par la multiplication.) □

Lemme 1.1.4. — *Soit A un Δ-anneau et soit M un (A,Δ)-module. Alors, l'annulateur* $\mathrm{ann}(M)$ *de M est un Δ-idéal de A.*

Démonstration. — Rappelons que $\mathrm{ann}(M) = \{a \in A;\ a\cdot m = 0,\ \forall m \in M\}$. Il s'agit de montrer que $\mathrm{ann}(M)$ est stable par les opérateurs différentiels $\partial \in \Delta$. Pour $a \in \mathrm{ann}(M)$ et $m \in M$, on a

$$0 = \partial(a \cdot m) = a \cdot \partial m + (\partial a) \cdot m.$$

Puisque a annule aussi ∂m, on obtient que $(\partial a) \cdot m = 0$. Ceci étant vrai pour tout $m \in M$, le lemme est démontré. ■

Définition 1.1.5. — *Un Δ-anneau S est dite* simple *s'il est non nul et si (0) et S sont ses seuls Δ-idéaux.*

Lemme 1.1.6. — *Si A est Δ-anneau et $I \subsetneq A$ un Δ-idéal strict maximal, alors A/I est simple. Si S est Δ-anneau simple et si T est une (S,Δ)-algèbre telle que $T \otimes_S \mathrm{Frac}(S)$ est simple, alors T est un Δ-anneau simple.*

Démonstration. — C'est immédiat. ■

Le lemme suivant est bien connu ; il est dû à Ritt.

Lemme 1.1.7. — *Soient A une $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbre et $I \subset A$ un Δ-idéal. Alors $\sqrt{I}$ est aussi un Δ-idéal.*

Démonstration. — Pour $x \in A$, $\partial \in \Delta$ et $a,\ r \in \mathbb{N}$, on a la formule

$$\partial^a(x^r) = \sum_{a_1+\cdots+a_r=a} \frac{a!}{a_1!\cdots a_r!}(\partial^{a_1}x)\cdots(\partial^{a_r}x).$$

Lorsque $a = r$, au moins l'un des a_i est nul sauf si $a_1 = \cdots = a_r = 1$. Il s'ensuit que

$$\partial^r(x^r) = r!(\partial x)^r \mod (x). \tag{1.1}$$

Supposons maintenant que $x \in \sqrt{I}$ et que l'entier r est choisi de sorte que $x^r \in I$. Alors $\partial^r(x^r) \in I$ car I est Δ-idéal. Il s'ensuit, d'après (1.1), que $\partial x \in \sqrt{I + (x)} = \sqrt{I}$. ■

Étant donné un anneau A, on note $A_{\text{réd}} = A/\sqrt{(0)}$ l'anneau réduit associé.

Corollaire 1.1.8. — *Si A est une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre, alors $A_{\text{réd}}$ est naturellement une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre.*

Notations 1.1.9. — Soient A une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre et $E \subset A$ une partie. On note $(E)^\Delta$ le Δ-idéal engendré par E et $(E)^{\Delta-\text{rad}}$ sont radical ; ce dernier est encore un Δ-idéal d'après le lemme 1.1.7. □

Lemme 1.1.10. — *Soient A un Δ-anneau et $I \subset A$ un Δ-idéal radiciel. Soient $f, g \in A$ tels que $f \cdot g \in I$. Alors, $(\partial^{\mathbf{r}} f) \cdot (\partial^{\mathbf{s}} g) \in I$ pour tout $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{N}^m$.*

Démonstration. — Par récurrence, il suffit de montrer que $f \cdot (\partial g) \in I$ pour tout $\partial \in \Delta$. Puisque I est un Δ-idéal, l'élément $\partial(f \cdot g) = f \cdot (\partial g) + (\partial f) \cdot g$ est dans I. En multipliant cet élément par $f \cdot (\partial g)$, on déduit que $f^2 \cdot (\partial g)^2 \in I$. Puisque $I = \sqrt{I}$, ceci qui permet de conclure. ■

Corollaire 1.1.11. — *Soit A une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre. Soit $I \subsetneq A$ un Δ-idéal strict et supposons que I est maximal pour cette propriété. Alors I est un idéal premier.*

Démonstration. — Soient $f, g \in A$ tel que $f \cdot g \in I$ et $f \notin I$. On cherche à montrer que $g \in I$. Puisque I est maximal, on a nécessairement $A = I + (f)^\Delta$. On peut donc écrire

$$1 = a + \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^m} b_{\mathbf{r}} \cdot \partial^{\mathbf{r}} f$$

avec $a \in I$ et $b_{\mathbf{r}} \in A$ nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux. Il s'ensuit que

$$g = a \cdot g + \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^m} b_{\mathbf{r}} \cdot (\partial^{\mathbf{r}} f) \cdot g. \tag{1.2}$$

Puisque I est maximal, le lemme 1.1.7 entraîne que I est radiciel. On peut donc appliquer le lemme 1.1.10 pour obtenir que $(\partial^{\mathbf{r}} f) \cdot g \in I$. L'égalité (1.2) montre alors que $g \in I$ comme souhaité. ■

Corollaire 1.1.12. — *Soit A une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre non nulle. Il existe alors des Δ-idéaux premiers dans A.*

Démonstration. — En effet, d'après le lemme de Zorn, il existe des Δ-idéaux stricts dans A qui sont maximaux pour cette propriété. Un tel idéal est premier par le corollaire 1.1.11. ■

Définition 1.1.13. — *Soit A une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre.*

(a) Un Δ-idéal $I \subset A$ est dit radiciellement de type fini *s'il existe une partie finie $E \subset A$ telle que $(E)^{\Delta-\text{rad}} = \sqrt{I}$. (En fait, on peut supposer que $E \subset I$ quitte à remplacer les éléments de E par des puissances convenables.)*

(b) La $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre A est dite radiciellement noethérienne *si tous ses Δ-idéaux sont radiciellement de type fini . (Il revient au même de demander que toute chaîne croissante de Δ-idéaux radiciels est stationnaire.)*

Remarque 1.1.14. — Si A est une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre radiciellement noethérienne et B une localisation de A (i.e., obtenue à partir de A en inversant des éléments), alors B est aussi une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre radiciellement noethérienne. □

Le résultat suivant est du à Kolchin [**50**] ; il généralise le « théorème de la base » de Ritt [**62**].

Théorème 1.1.15. — *Si A une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre radiciellement noethérienne, il en est de même de $A\langle x \rangle$.*

Démonstration. — On suppose par l'absurde qu'il existe des Δ-idéaux dans $A\langle x \rangle$ qui ne soient pas radiciellement de type fini. D'après le lemme 1.1.16 ci-dessous, on peut en trouver un qui soit maximal ; notons-le I. D'après ce même lemme, I est un idéal premier. Quitte à remplacer A par $A/A \cap I$ et I par son image dans $(A/A \cap I)\langle x \rangle$, on peut supposer que $A \cap I = 0$.

Pour continuer, nous aurons besoin d'une petite digression. Munissons $\mathbb{N}^m$ de l'ordre lexicographique, i.e., décrétons que $\mathbf{r} \preceq \mathbf{r}'$ si et seulement si il existe $1 \leqslant u \leqslant m$ tel que $r_i = r'_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant u - 1$ et $r_u < r'_u$. Étant donné un polynôme différentiel $P \in A\langle x \rangle \smallsetminus A$, on note $\mathrm{ord}(P)$ le plus grand élément $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^m$, pour l'ordre lexicographique, tel que $\partial^{\mathbf{r}} x$ apparaît effectivement dans P. (Pour $P \in A$, on convient que $\mathrm{ord}(P)$ est strictement plus petit que tout élément de $\mathbb{N}^m$.) L'ensemble $\mathrm{ord}(I \smallsetminus \{0\}) \subset \mathbb{N}^m$, formé des $\mathrm{ord}(P)$ pour

$P \in I$ non nul, est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^m$ stable par translation suivant les vecteurs dans $\mathbb{N}^m$. Les éléments minimaux de $\mathrm{ord}(I \smallsetminus \{0\})$, pour l'ordre partiel naturel ($\mathbf{r} \leqslant \mathbf{r}'$ si et seulement si $r_i \leqslant r'_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$) sont en nombre fini ; on les note $\mathbf{r}^1, \cdots, \mathbf{r}^s$. On fixe aussi des éléments $P_1, \cdots, P_s$ dans $I \smallsetminus \{0\}$ tels que $\mathrm{ord}(P_j) = \mathbf{r}^j$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant s$. On supposera aussi que le degré de P_j en $\partial^{\mathbf{r}^j} x$ est minimal et on le notera d_j. On peut alors écrire

$$P_j = Q_{j,0} \cdot (\partial^{\mathbf{r}^j} x)^{d_j} + \cdots + Q_{j,d_j-1} \cdot (\partial^{\mathbf{r}^j} x) + Q_{j,d_j}$$

où les $Q_{j,k}$ sont des polynômes différentiels d'ordres strictement plus petits que $\mathbf{r}^j$ (pour l'ordre lexicographique) avec $Q_{j,0} \neq 0$. On pose aussi

$$R_j = d_j \cdot Q_{j,0} \cdot (\partial^{\mathbf{r}^j} x)^{d_j-1} + \cdots + Q_{j,d_j-1}.$$

C'est la dérivée de P_j par rapport à $\partial^{\mathbf{r}^j} x$ considéré comme une indéterminée. Pour $\mathbf{e} \in \mathbb{N}^m \smallsetminus \{0\}$, on vérifie aisément que

$$\partial^{\mathbf{e}} P_j = R_j \cdot \partial^{\mathbf{r}^j+\mathbf{e}} x + \text{un polynôme différentiel d'ordre strictement plus petit que } \mathbf{r}^j + \mathbf{e}.$$

(Ci-dessus, il s'agit encore de l'orde lexicographique.)

Notons $R = R_1 \cdots R_s \cdot Q_{1,0} \cdots Q_{s,0}$. Nous allons montrer que :

$$\sqrt{I \cdot (R)^{\Delta}} = (R \cdot P_1, \cdots, R \cdot P_s)^{\Delta-\mathrm{rad}}.$$

L'inclusion « $\supseteq$ » est claire. Pour l'inclusion inverse, il suffit de montrer que si S est un polynôme différentiel non nul de I, il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $R^u \cdot S \in (P_1, \cdots, P_s)^{\Delta}$. (Cela suffit en effet puisqu'alors $R^{u+1} \cdot S$ est dans le Δ-idéal $(R)^{\Delta} \cdot (P_1, \cdots, P_s)^{\Delta}$ dont le radical est bien égal à $(R \cdot P_1, \cdots, R \cdot P_s)^{\Delta-\mathrm{rad}}$, comme on le voit bien en utilisant le lemme 1.1.10.) On raisonne par récurrence sur $\mathrm{ord}(S)$. Par construction, il existe un unique $1 \leqslant j_0 \leqslant s$ tel que $\mathbf{r}^{j_0} \leqslant \mathrm{ord}(S)$ (pour l'ordre partiel naturel sur $\mathbb{N}^m$). On distingue deux cas de figure. Si $\mathrm{ord}(S) = \mathbf{r}^{j_0}$, la division euclidienne par rapport à $\partial^{\mathbf{r}^{j_0}} x$ fournit une expression $(Q_{j_0,0})^u \cdot S = P_{j_0} \cdot T + Z$ où T et Z sont des polynômes différentiels d'ordres plus petits ou égaux à $\mathbf{r}^{j_0}$ et tel que le degré de $\partial^{\mathbf{r}^{j_0}} x$ dans Z est strictement plus petit que d_{j_0}. Vu les choix précédents et puisque $Z \in I$, on a nécessairement $Z = 0$. Ceci montre que $R^u \cdot S \in (P_1, \cdots, P_s)^{\Delta}$. Supposons maintenant que $\mathrm{ord}(S) \neq \mathbf{r}^{j_0}$ et notons $\mathbf{e} = \mathrm{ord}(S) - \mathbf{r}^{j_0}$. C'est un élément de $\mathbb{N}^m \smallsetminus \{0\}$. Le polynôme différentiel $\partial^{\mathbf{e}} P_{j_0}$ est linéaire en $\partial^{\mathbf{r}^{j_0}+\mathbf{e}} x$ et a même ordre que S. Une division euclidienne fournit alors une relation de la forme $(R_{j_0})^u \cdot S = (\partial^{\mathbf{e}} P_{j_0}) \cdot T + Z$ avec Z un polynôme différentiel d'ordre strictement plus petit que celui de S. Puisque $Z \in I$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Il est maintenant aisé de terminer la preuve du théorème. En effet, on vient de prouver que $I \cdot (R)^{\Delta}$ était radiciellement de type fini. Par ailleurs, on a $R \notin I$. En effet, puisque I est premier, il suffit de vérifier que les $Q_{j,0}$ et les R_j ne sont pas dans I, ce qui est clair pour des raisons d'ordre et de degré. Il s'ensuit que $I + (R)^{\Delta}$ contient strictement I et il est donc radiciellement de type fini puisque I a été supposé maximal. Le lemme 1.1.17 ci-dessous permet donc de conclure. ∎

Les deux lemmes ci-dessous ont servi dans la preuve du théorème 1.1.15.

Lemme 1.1.16. — *Soient A une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre et $I_0 \subset A$ un Δ-idéal. On suppose que I_0 n'est pas radiciellement de type fini. Il existe alors un Δ-idéal $I \subset A$, contenant I_0, qui n'est pas radiciellement de type fini et qui est maximal pour ces propriétés. De plus, I est un idéal premier.*

Démonstration. — L'existence de I est assurée par le lemme de Zorn. Il est immédiat que I est radiciel, i.e., $I = \sqrt{I}$. Montrons que I est un idéal premier. Pour cela, considérons des éléments $f, g \in A$ tels que $f \cdot g \in I$. Si $f \notin I$ et $g \notin I$, les Δ-idéaux $I + (f)^{\Delta}$ et $I + (g)^{\Delta}$ sont radiciellement de type fini puisque I est maximal. D'après le lemme 1.1.10, on a $\partial^{\mathbf{r}} f \cdot \partial^{\mathbf{s}} g \in I$ pour tout $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{N}^m$. Il s'ensuit que le Δ-idéal $(I + (f)^{\Delta}) \cdot (I + (g)^{\Delta})$ est contenu dans I. Or, il contient I^2. On a donc

$$I = \sqrt{(I + (f)^{\Delta}) \cdot (I + (g)^{\Delta})}$$

ce qui est une contradiction puisque le membre de droite est radiciellement de type fini. ∎

Lemme 1.1.17. — *Soient A une $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbre et $I \subset A$ un Δ-idéal. On suppose qu'il existe un élément $x \in A$ tel que $I \cdot (x)^\Delta$ et $I + (x)^\Delta$ soient radiciellement de type fini. Alors, I est aussi radiciellement de type fini.*

Démonstration. — Par hypothèse, on peut trouver des éléments $a_1, \cdots, a_n \in I$ tels que

$$\sqrt{I \cdot (x)^\Delta} = (a_1 \cdot x, \cdots, a_n \cdot x)^{\Delta-\mathrm{rad}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{I + (x)^\Delta} = (x, a_1, \cdots, a_n)^{\Delta-\mathrm{rad}}. \tag{1.3}$$

Nous allons montrer que $\sqrt{I} = (a_1, \cdots, a_n)^{\Delta-\mathrm{rad}}$. Bien entendu, il est suffisant de montrer l'inclusion $I \subset (a_1, \cdots, a_n)^{\Delta-\mathrm{rad}}$. Soit donc $y \in I$. D'après la seconde égalité dans (1.3), on peut écrire, pour $p \in \mathbb{N}$ suffisamment grand,

$$y^p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^m} v_{i,\mathbf{r}} \cdot \partial^{\mathbf{r}} a_i + \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^m} u_{\mathbf{s}} \cdot \partial^{\mathbf{s}} x$$

où les coefficients $v_{i,\mathbf{r}}$ et $u_{\mathbf{s}}$ appartiennent à A et sont nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux. En multipliant cette expression par y, on obtient

$$y^{p+1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^m} (v_{i,\mathbf{r}} \cdot y) \cdot \partial^{\mathbf{r}} a_i + \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^m} u_{\mathbf{s}} \cdot (y \cdot \partial^{\mathbf{s}} x).$$

Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que $y \cdot \partial^{\mathbf{s}} x$ est dans $(a_1, \cdots, a_n)^{\Delta-\mathrm{rad}}$. Puisque $y \cdot x \in I \cdot (x)^\Delta$, il découle de la première égalité dans (1.3) que $y \cdot x \in (a_1 \cdot x, \cdots, a_n \cdot x)^{\Delta-\mathrm{rad}} \subset (a_1, \cdots, a_n)^{\Delta-\mathrm{rad}}$. On conclut à l'aide du lemme 1.1.10. ■

Le résultat suivant est le « théorème de la base » de Ritt (ou de Raudenbush-Ritt) [**62**].

Corollaire 1.1.18. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et A une (K,Δ)-algèbre de type fini. Alors A est radiciellement noethérienne.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du théorème 1.1.15. ■

Proposition 1.1.19. — *Soit A une $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbre.*

(i) Tout idéal premier minimal de A est un Δ-idéal.

(ii) Si A est radiciellement noethérienne, alors A possède un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

Démonstration. — Soit $Q \subset A$ un idéal premier minimal de A. La $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbre A_Q admet un unique idéal premier $Q \cdot A_Q$ qui est donc le nil-radical de A_Q. D'après le lemme 1.1.7, $Q \cdot A_Q$ est un Δ-idéal de A_Q. Puisque Q est l'image inverse de $Q \cdot A_Q$ par le Δ-morphisme évident $A \longrightarrow A_Q$, ceci montre l'assertion (i).

On démontrera l'assertion (ii) par contraposition. Pour cela, remarquons que si B est une $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbre et $\mathcal{E}$ un ensemble infini d'idéaux premiers minimaux de B, on peut trouver un élément $b \in B \smallsetminus \{0\}$ tel que l'ensemble $\{Q \in \mathcal{E};\ b \in Q\}$ est encore infini. (En effet, B n'est pas intègre car sinon il n'y aurait pas eu une infinité d'idéaux premiers minimaux. Or, si $b_1 \cdot b_2 = 0$ avec $b_1, b_2 \in B \smallsetminus \{0\}$, tout $Q \in \mathcal{E}$ contient soit b_1, soit b_2.) Notons aussi que, grâce à (i), la condition $b \in Q$ équivaut à $(b)^{\Delta-\mathrm{rad}} \subset Q$.

Supposons maintenant que A possède un nombre infini d'idéaux premiers minimaux. On applique le principe précédent pour construire une suite d'éléments $(a_n)_{n \geqslant 1}$ dans A vérifiant la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une infinité d'idéaux premiers minimaux dans A qui contiennent le Δ-idéal $(a_1, \cdots, a_n)^{\Delta-\mathrm{rad}}$. Supposons que les éléments $a_1, \cdots, a_n$ sont choisis. (Pour $n = 0$ il n'y a rien à choisir et la propriété souhaitée est automatiquement satisfaite grâce à (i).) On applique le principe précédent avec $B = A/(a_1, \cdots, a_n)^{\Delta-\mathrm{rad}}$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des images dans B des idéaux premiers minimaux qui contiennent $(a_1, \cdots, a_n)^{\Delta-\mathrm{rad}}$. Ceci fournit un élément b et on prend pour a_{n+1} un relèvement de b dans A. Par construction, il est clair que la chaîne $((a_1, \cdots, a_n)^{\Delta-\mathrm{rad}})_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante. Ceci montre que A n'est pas radiciellement noethérienne. ■

Remarque 1.1.20. — Étant donné un anneau R, on note $\mathrm{Frac}(R)$ l'anneau obtenu en inversant dans R tous les éléments qui ne sont pas des diviseurs de zéro dans $R_{\mathrm{réd}}$. Vu la proposition 1.1.19(ii), si A est une $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbre réduite et radiciellement noethérienne, alors $\mathrm{Frac}(A)$ est un produit direct fini de Δ-corps. □

On termine cette sous-section avec le résultat classique suivant.

Lemme 1.1.21. — *Soient A un Δ-anneau et B une A-algèbre étale. Il existe alors une unique structure de (A,Δ)-algèbre sur B.*

Démonstration. — Pour $\partial \in \Delta$, la donnée d'une dérivation $\partial : B \longrightarrow B$ équivaut à celle d'un morphisme de B-modules $l(\partial) : \Omega_{B/\mathbb{Z}} \longrightarrow B$. Puisque la A-algèbre B est étale, on a $\Omega_{B/\mathbb{Z}} \simeq B \otimes_A \Omega_{A/\mathbb{Z}}$. On prend alors pour $l(\partial) : \Omega_{B/\mathbb{Z}} \longrightarrow B$ le morphisme obtenu par extension des scalaires à partir du morphisme $l(\partial) : \Omega_{A/\mathbb{Z}} \longrightarrow A$ correspondant à la dérivation $\partial : A \longrightarrow A$. ■

1.2. Théorème de l'involutivité générique de Malgrange. —

Le but de cette sous-section est d'établir le théorème 1.2.1 ci-dessous. Il s'agit du théorème de l'involutivité générique pour les systèmes différentiels algébriques. Il a été conjecturé par É. Cartan sous une forme imprécise et a été démontré par Malgrange [**55**] qui lui donna aussi sa forme définitive. La démonstration que nous proposons ici reprend celle de Malgrange.

Théorème 1.2.1. — *Soient S une $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbre et A une (S,Δ)-algèbre de type fini. On suppose que S et A sont intègres, et que le morphisme structural $S \longrightarrow A$ est injectif. Soit $A_0 \subset A$ une sous-S-algèbre de type fini, et notons A_n (pour $n \in \mathbb{N}$) la sous-S-algèbre de A engendrée par les $\partial^{\mathbf{r}}x$ avec $x \in A_0$ et $|\mathbf{r}| \leqslant n$. Supposons que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, ce qui revient à demander que A_0 engendre la (S,Δ)-algèbre A. Alors, il existe $\nu \in \mathbb{N}$ et $f \in A_\nu \smallsetminus \{0\}$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites.*

(a) La S-algèbre $A_\nu[f^{-1}]$ est lisse (et en particulier de présentation finie).

(b) Pour tout $n \geqslant \nu$, la $A_n[f^{-1}]$-algèbre $A_{n+1}[f^{-1}]$ est isomorphe à l'algèbre symétrique d'un $A_n[f^{-1}]$-module projectif de type fini.

Remarque 1.2.2. — L'hypothèse que A est réduite est nécessaire pour la validité du théorème 1.2.1 comme le montre l'exemple de la $(\mathbb{Q},\{\partial\})$-algèbre $\mathbb{Q}\langle\epsilon\rangle/((\partial^i\epsilon)\cdot(\partial^j\epsilon);\ i,\ j \in \mathbb{N})$. □

Jusqu'à la fin de la preuve du théorème 1.2.1, on fixe une présentation $A = S\langle x_1,\cdots,x_p\rangle/I$ de la (S,Δ)-algèbre A avec I un Δ-idéal premier vérifiant $S \cap I = 0$, et on suppose que A_0 est l'image de $S[x_1,\cdots,x_p]$ dans A.

Notations 1.2.3. — On note $F = S\langle x_1,\cdots,x_p\rangle$ et F_n (pour $n \in \mathbb{N}$) la sous-S-algèbre de F engendrée par les $\partial^{\mathbf{r}}x_j$ avec $1 \leqslant j \leqslant p$ et $|\mathbf{r}| \leqslant n$. Clairement, $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et la S-algèbre F_n est une algèbre de polynômes en un nombre fini d'indéterminées. On note $I_n = I \cap F_n$; c'est un idéal premier de F_n. On a une identification canonique : $F_n/I_n = A_n$. □

Étant donné un polynôme différentiel $P \in S\langle x_1,\cdots,x_p\rangle \smallsetminus S$, son ordre total est défini comme étant le maximum des nombres $|\mathbf{r}|$ lorsque $\mathbf{r}$ varie parmi les m-uplets d'entiers tels que $\partial^{\mathbf{r}}x_j$ apparaît effectivement dans l'écriture de P pour au moins un des $1 \leqslant j \leqslant p$. Ce nombre sera noté $\mathrm{ordtot}(P)$. Clairement, $P \in F_n$ si et seulement si $\mathrm{ordtot}(P) \leqslant n$. Le résultat ci-dessous est simple mais crucial pour la suite.

Proposition 1.2.4. — *Soit $P \in S\langle x_1,\cdots,x_p\rangle \smallsetminus S$ d'ordre total plus petit ou égal à un entier naturel ν. Alors, pour tout $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^m \smallsetminus \{0\}$, on peut écrire d'une manière unique :*

$$\partial^{\mathbf{s}}P = \mathrm{N}_{\mathbf{s},\nu}(P) + \sum_{j=1}^{p} \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{N}^m,\ |\mathbf{r}|=\nu} \mathrm{C}^j_{\mathbf{r}}(P)\cdot\partial^{\mathbf{r}+\mathbf{s}}x_j, \tag{1.4}$$

avec $\mathrm{C}^j_{\mathbf{r}}(P)$ des polynômes différentiels d'ordre total inférieur ou égal à ν et $\mathrm{N}_{\mathbf{s},\nu}(P)$ un polynôme différentiel d'ordre total inférieur ou égal à $\nu + |\mathbf{s}| - 1$. De plus, les polynômes différentiels $\mathrm{C}^j_{\mathbf{r}}(P)$ sont obtenus en dérivant P par rapport au symbole $\partial^{\mathbf{r}}x_j$ considéré comme une indéterminée.

Démonstration. — C'est immédiat. ■

Remarque 1.2.5. — Pour $\nu \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{d}_\nu : F_\nu \longrightarrow \Omega_{F_{\nu-1}}(F_\nu)$ la différentielle de Kähler relative de la $F_{\nu-1}$-algèbre F_ν. (On conviendra ici que $F_{-1} = S$.) Puisque F_ν est une $F_{\nu-1}$-algèbre de polynômes en les $\partial^{\mathbf{r}}x_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$ et $|\mathbf{r}| = \nu$, le F_ν-module $\Omega_{F_{\nu-1}}(F_\nu)$ est librement engendré par les $w^{\mathbf{r}}_j = \mathrm{d}_\nu(\partial^{\mathbf{r}}x_j)$. Avec les notations de la proposition 1.2.4, on a alors :

$$\mathrm{d}_v(P) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{|\mathbf{r}|=v} \mathrm{C}_{\mathbf{r}}^{j}(P) \cdot w_j^{\mathbf{r}}. \tag{1.5}$$

Ceci est une simple reformulation du fait que $\mathrm{C}_{\mathbf{r}}^{j}(P)$ est la dérivée de P par rapport au symbole $\partial^{\mathbf{r}} x_j$ considéré comme une indéterminée. □

Construction 1.2.6. — On considère des symboles linéairement indépendants $w_j^{\mathbf{e}}$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$ et $\mathbf{e} \in \mathbb{N}^m$. Pour $v \in \mathbb{N}$, on note $W_v(n)$ le A_v-module libre ayant pour base les $w_j^{\mathbf{e}}$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$ et $|\mathbf{e}| = n$. (On notera que $W_v(n) = W_0(n) \otimes_{A_0} A_v$.) Pour $n \geqslant v$, on considère le sous-A_v-module $R_v(n) \subset W_v(n)$ engendré par les éléments de la forme

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{|\mathbf{r}|=v} \mathrm{c}_{\mathbf{r}}^{j}(P) \cdot w_j^{\mathbf{r}+\mathbf{s}} \tag{1.6}$$

avec $P \in I_v$ et $|\mathbf{s}| = n - v$; ci-dessus, on a noté $\mathrm{c}_{\mathbf{r}}^{j}(P)$ la classe de $\mathrm{C}_{\mathbf{r}}^{j}(P) \in F_v$ dans le quotient $A_v = F_v/I_v$. Lorsque $0 \leqslant n \leqslant v-1$, on prendra pour $R_v(n)$ l'image du morphisme canonique $R_n(n) \otimes_{A_n} A_v \longrightarrow W_v(n)$.

Considérons la A_v-algèbre graduée $A_v[z_1, \cdots, z_m]$. On peut munir $W_v = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_v(n)$ d'une structure de $A_v[z_1, \cdots, z_m]$-module libre de rang p en posant $z^{\mathbf{s}} \cdot w_j^{\mathbf{e}} = w_j^{\mathbf{e}+\mathbf{s}}$. On a alors $z^{\mathbf{e}} \cdot w_j^{0} = w_j^{\mathbf{e}}$ et $(w_1^0, \cdots, w_p^0)$ est une base du $A_v[z_1, \cdots, z_m]$-module W_v. Remarquons aussi que $\mathrm{c}_{\mathbf{r}+\mathbf{t}}^{j}(\partial^{\mathbf{t}} P) = \mathrm{c}_{\mathbf{r}}^{j}(P)$ pour tout $\mathbf{t} \in \mathbb{N}^m$ de sorte que si on multiplie par $z^{\mathbf{t}}$ le vecteur (1.6) pour P on obtient le vecteur (1.6) pour $\partial^{\mathbf{t}} P$. Il s'ensuit les deux propriétés suivantes. D'une part, $R_v = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_v(n)$ est un sous-$A_v[z_1, \cdots, z_m]$-module gradué de W_v et il est engendré par ses éléments homogènes de degré au plus v, i.e., par $R_v(0) \oplus \cdots \oplus R_v(v)$. D'autre part, si $v' \geqslant v$, l'isomorphisme canonique $W_v \otimes_{A_v} A_{v'} \simeq W_{v'}$ envoie R_v dans $R_{v'}$. On en déduit donc des morphismes de $A_{v'}[z_1, \cdots, z_m]$-modules gradués $R_v \otimes_{A_v} A_{v'} \longrightarrow R_{v'}$. □

On note le fait suivant qui sera utile plus tard.

Proposition 1.2.7. — *Pour tout $v \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme canonique :*

$$\Omega_{A_{v-1}}(A_v) \simeq W_v(v)/R_v(v). \tag{1.7}$$

Cet isomorphisme envoie $\mathrm{d}_{A_v/A_{v-1}}(\partial^{\mathbf{r}} x_j + I_v)$ sur $w_j^{\mathbf{r}} + R_v(v)$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$ et $|\mathbf{r}| = v$. (Ici encore, on convient que $A_{-1} = S$.)

Démonstration. — En effet, d'après la remarque 1.2.5 et modulo les identifications $w_j^{\mathbf{r}} = \mathrm{d}_v(\partial^{\mathbf{r}} x_j)$, on a

$$\begin{aligned} W_v(v)/R_v(v) &\simeq \Omega_{F_{v-1}}(F_v)/(I_v \cdot \Omega_{F_{v-1}}(F_v) + \textstyle\sum_{P\in I_v} F_v \cdot \mathrm{d}_v(P)) \\ &\simeq \Omega_{A_{v-1}}(B_v)/(J_v \cdot \Omega_{A_{v-1}}(B_v) + \textstyle\sum_{P\in J_v} B_v \cdot \mathrm{d}_{B_v/A_{v-1}}(P)) \end{aligned}$$

où $B_v = F_v/I_{v-1}F_v$ et $J_v = I_v/I_{v-1}F_v$. Puisque $A_v = B_v/J_v$, le A_v-module dans la seconde ligne ci-dessus s'identifie à $\Omega_{A_{v-1}}(A_v)$. ■

Lemme 1.2.8. — *Il existe un entier $v \in \mathbb{N}$ et un élément $f \in A_v \smallsetminus \{0\}$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites.*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-$A_v[f^{-1}]$-module $R_v(n)[f^{-1}]$ est un facteur direct du $A_v[f^{-1}]$-module libre $W_v(n)[f^{-1}]$. En particulier, c'est un $A_v[f^{-1}]$-module projectif.

(ii) Pour tout $v' \geqslant v$, le morphisme canonique

$$R_v[f^{-1}] \otimes_{A_v} A_{v'} \longrightarrow R_{v'}[f^{-1}]$$

est un isomorphisme de $A_{v'}[f^{-1}][z_1, \cdots, z_m]$-modules gradués.

Démonstration. — Considérons le $A[z_1, \cdots, z_m]$-module gradué $W = W_0 \otimes_{A_0} A$ et son sous-$A[z_1, \cdots, z_m]$-module gradué $R \subset W$ donné par l'union croissante des images des morphismes canoniques $R_v \otimes_{A_v} A \longrightarrow W$ (pour $v \in \mathbb{N}$). Puisque $\mathrm{Frac}(A)[z_1, \ldots, z_m]$ est noethérien, le $\mathrm{Frac}(A)[z_1, \ldots, z_m]$-module $R \otimes_A \mathrm{Frac}(A)$ est nécessairement de type fini. On peut donc trouver $v \in \mathbb{N}$ tel que le $\mathrm{Frac}(A)[z_1, \ldots, z_m]$-module $R \otimes_A \mathrm{Frac}(A)$

est engendré par l'image de R_v. Il s'ensuit alors que pour tout $v' \geqslant v$, le morphisme canonique de $A_{v'}$-modules $R_v \otimes_{A_v} A_{v'} \longrightarrow R_{v'}$ induit un isomorphisme après extension des scalaires à $\mathrm{Frac}(A_{v'})$. Autrement dit, on a un isomorphisme :

$$(R_v \otimes_{A_v} A_{v'}) \otimes_{A_{v'}} \mathrm{Frac}(A_{v'}) \simeq R_{v'} \otimes_{A_{v'}} \mathrm{Frac}(A_{v'}). \tag{1.8}$$

Fixons $v \in \mathbb{N}$ comme ci-dessus. Choisissons un sous-$A_v[z_1, \cdots, z_m]$-module de type fini $R_v^- \subset R_v$ tel que

$$R_v^- \otimes_{A_v} \mathrm{Frac}(A_v) = R_v \otimes_{A_v} \mathrm{Frac}(A_v). \tag{1.9}$$

D'après [**39**, Corollaire 11.3.3] appliqué à la A_v-algèbre $A_v[z_1, \cdots, z_m]$ et le $A_v[z_1, \cdots, z_m]$-module de présentation finie W_v/R_v^-, le sous-ensemble des $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_v)$ tels que $(W_v/R_v^-)_{\mathfrak{p}}$ est plat sur $(A_v)_{\mathfrak{p}}$ est ouvert. De plus, cet ensemble est non vide car il contient le point générique. Ainsi, il existe $f \in A_v \smallsetminus \{0\}$ tel que $W_v/R_v^-[f^{-1}]$ est plat sur $A_v[f^{-1}]$. Il en est de même des facteurs directs $W_v(n)/R_v^-(n)[f^{-1}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, les $W_v(n)/R_v^-(n)[f^{-1}]$ sont aussi de présentation finie sur $A_v[f^{-1}]$. Ce sont donc des $A_v[f^{-1}]$-modules projectifs. Il s'ensuit que $R_v^-(n)[f^{-1}]$ est un facteur direct de $W_v(n)[f^{-1}]$.

Nous montrerons (i) et (ii) en vérifiant que pour tout $v' \geqslant v$, le morphisme $R_v^-[f^{-1}] \otimes_{A_v} A_{v'} \longrightarrow R_{v'}[f^{-1}]$ est un isomorphisme. Considérons pour cela le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
R_v^-[f^{-1}] \otimes_{A_v} A_{v'} \arrow[r] \arrow[d] & R_{v'}[f^{-1}] \arrow[d] \\
W_v[f^{-1}] \otimes_{A_v} A_{v'} \arrow[r, "\sim"] & W_{v'}[f^{-1}].
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont injectives : c'est vrai par définition pour la flèche verticale de droite et c'est vrai pour la flèche verticale de gauche puisque les $R_v^-(n)[f^{-1}]$ sont des facteurs directs des $W_v(n)[f^{-1}]$. Il s'ensuit que le morphisme $R_v^-[f^{-1}] \otimes_{A_v} A_{v'} \longrightarrow R_{v'}[f^{-1}]$ est injectif. Pour montrer que ce morphisme est surjectif, il suffit de montrer que le morphisme

$$W_v/R_v^-[f^{-1}] \otimes_{A_v} A_{v'} \longrightarrow W_{v'}/R_{v'}[f^{-1}]$$

est injectif. Puisque $A_{v'}$ est intègre et que les $W_v(n)/R_v^-(n)[f^{-1}]$ sont projectifs (et donc sans torsion), il suffit de vérifier cela après extension des scalaires au corps des fractions de $A_{v'}$. On utilise alors les isomorphismes (1.8) et (1.9) pour conclure. ∎

Démonstration du théorème 1.2.1. — Soient $v \in \mathbb{N}$ et $f \in A_v$ vérifiant les conclusions du lemme 1.2.8. D'après le lemme 1.2.9 ci-dessous, la propriété (a) est satisfaite quitte à remplacer f par un multiple convenable. Pour la propriété (b), fixons un entier $n \geqslant v$. Notre objectif est de montrer que $A_{n+1}[f^{-1}]$ est isomorphe à l'algèbre symétrique d'un $A_n[f^{-1}]$-module projectif de type fini.

On note $I'_{n+1} \subset F_{n+1}$ l'idéal engendré par I_n et les ∂P pour $\partial \in \Delta$ et $P \in I_n$. Clairement, on a $I'_{n+1} \subset I_{n+1}$. On introduit aussi les notations suivantes :

$$B = F_{n+1}/I_nF_{n+1}, \quad J = I_{n+1}/I_nF_{n+1}, \quad J' = I'_{n+1}/I_nF_{n+1} \quad \text{et} \quad L = \mathrm{Frac}(A_n).$$

(Avec ces notations on a $A_{n+1} \simeq B/J$.) On montrera les deux propriétés suivantes.

(1) La $A_n[f^{-1}]$-algèbre $B/J'[f^{-1}]$ est isomorphe à l'algèbre symétrique d'un $A_n[f^{-1}]$-module projectif de type fini.

(2) Les L-algèbres de type fini $(B/J') \otimes_{A_n} L$ et $(B/J) \otimes_{A_n} L$ ont même dimension de Krull.

Ces deux propriétés permettent de conclure. En effet, vu la propriété (1), il est suffisant de voir que le morphisme $B/J'[f^{-1}] \twoheadrightarrow B/J[f^{-1}]$ est inversible. Or, la propriété (1) entraîne aussi que $\mathrm{Spec}(B/J'[f^{-1}])$ est un schéma intègre. Il suffit donc de montrer que l'immersion fermée $\mathrm{Spec}(B/J[f^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B/J'[f^{-1}])$ est un morphisme dominant. On peut vérifier cela après changement de base à $\mathrm{Spec}(L)$. Ceci est alors immédiat puisque les dimensions de Krull de $\mathrm{Spec}((B/J) \otimes_{A_n} L)$ et $\mathrm{Spec}((B/J') \otimes_{A_n} L)$ sont égales par la propriété (2).

Pour démontrer la propriété (1), on fixe une famille de générateurs $(P_g)_{g \in G}$ de l'idéal I_n. Il s'ensuit que

$$I'_{n+1} = I_nF_{n+1} + \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{m} (\partial_i P_g) \cdot F_{n+1}.$$

D'après la proposition 1.2.4, on peut écrire

$$\partial_i P_g = N_{i,g} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{|\mathbf{r}|=n} C^j_{\mathbf{r},g} \cdot \partial_i \partial^{\mathbf{r}} x_j \tag{1.10}$$

avec $N_{i,g}$, $C^j_{\mathbf{r},g} \in F_n$. En réduisant modulo l'idéal $I_n F_{n+1}$, on obtient des générateurs de l'idéal $J' \subset B$, à savoir les :

$$n_{i,g} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{|\mathbf{r}|=n} c^j_{\mathbf{r},g} \cdot (z_i \cdot w^{\mathbf{r}}_j), \tag{1.11}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $g \in G$. Ci-dessus, on a noté $z_i \cdot w^{\mathbf{r}}_j$ au lieu de $\partial_i \partial^{\mathbf{r}} x_j$. On notera aussi $w^{\mathbf{s}}_j$ au lieu de $\partial^{\mathbf{s}} x_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$ et $|\mathbf{s}| = n+1$. Avec ces notations, $B[f^{-1}]$ devient l'algèbre symétrique du $A_n[f^{-1}]$-module libre $W_n(n+1)[f^{-1}]$ et les parties linéaires

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{|\mathbf{r}|=n} c^j_{\mathbf{r},g} \cdot (z_i \cdot w^{\mathbf{r}}_j) \tag{1.12}$$

des générateurs (1.11) engendrent le facteur direct $R_n(n+1)[f^{-1}]$ de $W_n(n+1)[f^{-1}]$. Par ailleurs, le morphisme $\mathrm{Spec}(B/J'[f^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A_n[f^{-1}])$ est dominant puisque $A_n \longrightarrow B/J'$ est injectif. (En effet, en composant avec $B/J' \twoheadrightarrow B/J$ on obtient l'inclusion évidente $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$.) La propriété (1) découle alors du lemme 1.2.10 ci-dessous.

Il nous reste à montrer (2). D'après ce qui précède, $(B/J') \otimes_{A_n} L$ est isomorphe à la L-algèbre symétrique du L-vectoriel $(W_n(n+1)/R_n(n+1)) \otimes_{A_n} L$. La dimension de Krull de la L-algèbre $(B/J') \otimes_{A_n} L$ est donc égale au rang du A_n-module projectif $W_n(n+1)/R_n(n+1)$. Par ailleurs, la proposition 1.2.7 fournit un isomorphisme

$$\Omega_L((B/J) \otimes_{A_n} L) \simeq (W_{n+1}(n+1)/R_{n+1}(n+1)) \otimes_{A_n} L.$$

En particulier, le $(B/J) \otimes_{A_n} L$-module $\Omega_L((B/J) \otimes_{A_n} L)$ est projectif et son rang est celui du A_{n+1}-module projectif $W_{n+1}(n+1)/R_{n+1}(n+1)$. Puisque $(B/J) \otimes_{A_n} L$ est une L-algèbre réduite et de type fini, il en découle que sa dimension de Krull est égale au rang du A_{n+1}-module projectif $W_{n+1}(n+1)/R_{n+1}(n+1)$. Ceci permet de conclure puisque $W_{n+1}(n+1)/R_{n+1}(n+1) \simeq (W_n(n+1)/R_n(n+1)) \otimes_{A_n} A_{n+1}$. ■

Lemme 1.2.9. — *Soient R une $\mathbb{Q}$-algèbre intègre et P une R-algèbre intègre, de type fini et de morphisme structural injectif. Il existe alors $g \in P \smallsetminus \{0\}$ tel que la R-algèbre $P[g^{-1}]$ est lisse (et en particulier de présentation finie).*

Démonstration. — Puisque la R-algèbre P est de type fini, il existe une R-algèbre de présentation finie P' est un morphisme surjectif de R-algèbres $P' \twoheadrightarrow P$ induisant un isomorphisme $P' \otimes_R \mathrm{Frac}(R) \simeq P \otimes_R \mathrm{Frac}(R)$. Si $I \subset P'$ est le noyau de ce morphisme, on a $I \otimes_R \mathrm{Frac}(R) = 0$. Autrement dit, tout élément de I est de torsion sur R. Le lieu de lissité du morphisme $\mathrm{Spec}(P') \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ est un ouvert de $\mathrm{Spec}(P')$ qui rencontre le sous-schéma fermé $\mathrm{Spec}(P) \subset \mathrm{Spec}(P')$. (En effet, puisque $\mathrm{Frac}(R)$ est un corps de carcatéristique nulle, le lieu de lissité du $\mathrm{Frac}(R)$-schéma $\mathrm{Spec}(P \otimes_R \mathrm{Frac}(R))$ est non vide.) On peut donc trouver $g' \in P'$, d'image non nulle $g \in P$, tel que la R-algèbre $P'[g'^{-1}]$ est lisse. On affirme que $P'[g'^{-1}] \longrightarrow P[g^{-1}]$ est un isomorphisme, ce qui terminera la preuve du lemme. Pour vérifier cela, il suffit de montrer que l'image de I dans $P'[g'^{-1}]$ est nulle. Ceci découle du fait que tout élément de I est de torsion sur R alors que la R-algèbre $P'[g'^{-1}]$ est plate. ■

Lemme 1.2.10. — *Soient R un anneau intègre et M un R-module projectif de type fini. On suppose données une famille $(v_i)_{i\in I}$ d'éléments de M, engendrant un facteur direct $N \subset M$, ainsi qu'une famille $(r_i)_{i\in I}$ d'éléments de R. On pose $P = R[M]/(v_i - r_i;\ i \in I)$. Alors, si le morphisme* $\mathrm{Spec}(P) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ *est dominant, la R-algèbre P est isomorphe à $R[M/N]$.*

Démonstration. — Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de R, nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux. Supposons que $\sum_{i\in I} a_i \cdot v_i = 0$. Alors $d = \sum_{i\in I} a_i \cdot r_i$ est dans $R \cap (v_i - r_i;\ i \in I) = \ker\{R \to P\}$. Il s'ensuit que le morphisme $\mathrm{Spec}(P) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ se factorise par $\mathrm{Spec}(R/(d))$. Puisque ce morphisme est supposé dominant et que R est intègre, ceci entraîne que $d = 0$.

On a montré que la relation $\sum_{i\in I} a_i \cdot v_i = 0$ entraîne que $\sum_{i\in I} a_i \cdot r_i = 0$. L'association $v_i \rightsquigarrow r_i$ s'étend donc en un morphisme R-linéaire $f : N \longrightarrow R$. Notons encore $f : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R[N])$ la section associée. Clairement, on a $\mathrm{Spec}(P) = \mathrm{Spec}(R[M]) \times_{\mathrm{Spec}(R[N]),f} \mathrm{Spec}(A)$. Or, N est un facteur direct de M. Le choix d'une décomposition $M \simeq L \oplus N$ fournit un isomorphisme $\mathrm{Spec}(R[M]) \simeq \mathrm{Spec}(R[L]) \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(R[M])$. L'associativité du produit fibré fournit l'isomorphisme $\mathrm{Spec}(P) \simeq \mathrm{Spec}(R[L])$ recherché. ■

1.3. Propriété de finitude pour les algèbres des constantes. —

On rappelle que pour un Δ-anneau A, on note $A^{\Delta=0}$ le sous-anneau des constantes de A. De même, pour $\partial \in \Delta$, on note $A^{\partial=0}$ le noyau de l'opérateur $\partial : A \longrightarrow A$; c'est un sous-$(\Delta \smallsetminus \{\partial\})$-anneau de A. Le lemme classique ci-dessous et son corollaire sont incontournables lorsqu'on étudie le sous-corps des constantes d'un Δ-corps.

Lemme 1.3.1. — *Soient K un Δ-corps et V un (K, Δ)-module. Supposons donnés $v_0, \cdots, v_n \in V$ et fixons $\partial \in \Delta$. Alors, les vecteurs $(v_j, \partial v_j, \cdots, \partial^n v_j) \in V^{n+1}$, pour $0 \leqslant j \leqslant n$, sont linéairement dépendants sur K si et seulement si les v_j, pour $0 \leqslant j \leqslant n$, sont linéairement dépendants sur le sous-corps $K^{\partial=0}$.*

Démonstration. — Une implication est claire : si les v_j sont linéairement dépendants sur $K^{\partial=0}$, alors les vecteurs $(v_j, \partial v_j, \cdots, \partial^n v_j)$ sont aussi linéairement dépendants sur $K^{\partial=0}$ et donc aussi sur K. (On utilise que l'opérateur ∂ est $K^{\partial=0}$-linéaire.)

Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur l'entier n. Lorsque $n = 0$, il n'y a rien à montrer. On suppose donc que $n \geqslant 1$ et que le résultat est connu pour $n - 1$. On fixe une relation de dépendance

$$\sum_{j=0}^{n} g_j \cdot (v_j, \partial v_j, \cdots, \partial^n v_j) = 0 \tag{1.13}$$

avec $g_0, \cdots, g_n \in K$ dont au moins un est non nul. Si les vecteurs $(v_j, \cdots, \partial^{n-1} v_j)$, pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$, sont linéairement dépendants sur K, l'hypothèse de récurrence permet de conclure. Si ces vecteurs sont linéairement indépendants sur K, alors nécessairement $g_n \neq 0$. En multipliant par g_n^{-1} dans (1.13), on peut supposer que $g_n = 1$. On a alors les relations

$$(R_k) \ : \ -\partial^k v_n = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \cdot \partial^k v_j \qquad (\text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant n).$$

En appliquant l'opérateur ∂ à (R_k) et en retranchant (R_{k+1}), on obtient les relations

$$(R'_k) \ : \ 0 = \sum_{j=0}^{n-1} (\partial g_j) \cdot \partial^k v_j \qquad (\text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1).$$

Puisque les vecteurs $(v_j, \cdots, \partial^{n-1} v_j)$, pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$, sont supposés linéairement indépendants sur K, on trouve que $\partial g_j = 0$. Ainsi, les g_j sont dans $K^{\partial=0}$ pour tout $0 \leqslant j \leqslant n$. ■

Le résultat suivant généralise le lemme 1.3.1 ; on le trouve aussi dans [**50**].

Corollaire 1.3.2. — *Soient K un Δ-corps et V un (K, Δ)-module. Supposons donnés $v_0, \cdots, v_n \in V$. Alors, les familles $(\partial^{\mathbf{r}} v_j)_{0 \leqslant r_1, \cdots, r_m \leqslant n} \in (V^{n+1})^m$, pour $0 \leqslant j \leqslant n$, sont linéairement dépendantes sur K si et seulement si les v_j, pour $0 \leqslant j \leqslant n$, sont linéairement dépendants sur le sous-corps des constantes $K^{\Delta=0}$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le cardinal de $\Delta = \{\partial_1, \cdots, \partial_m\}$. Lorsque $m = 1$, il s'agit du lemme 1.3.1. Supposons que le résultat est connu pour les Δ'-corps, avec $\Delta' = \{\partial_1, \cdots, \partial_{m-1}\}$. En l'appliquant aux $n+1$ vecteurs $(v_j, \partial_m v_j, \cdots, \partial_m^n v_j)$ du (K, Δ')-module V^{n+1}, on trouve qu'ils sont linéairement dépendants sur le sous-corps $K^{\Delta'=0}$. En considérant V comme un $(K^{\Delta'=0}, \{\partial_m\})$-module et en appliquant le lemme 1.3.1, on obtient le résultat recherché. ■

Le résultat suivant est également tiré de [**50**].

Proposition 1.3.3. — *Soient K un Δ-corps et M un (K, Δ)-module. Alors, le morphisme évident*

$$K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0} \longrightarrow M \tag{1.14}$$

est injectif.

Démonstration. — On raisonne par l'absurde. On se donne un élément non nul $f \in K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}$ appartenant au noyau de (1.14). On peut écrire $f = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \otimes c_\alpha$ avec I est un ensemble fini, $x_\alpha \in K \smallsetminus \{0\}$ et $c_\alpha \in M^{\Delta=0} \smallsetminus \{0\}$ linéairement indépendants sur $K^{\Delta=0}$. Dire que f est dans le noyau de (1.14) équivaut à dire que $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha \cdot c_\alpha = 0$. Ainsi, les éléments $c_\alpha \in M$, pour $\alpha \in I$, sont linéairement dépendants sur K. Puisque $\partial^{\mathbf{r}} c_\alpha = 0$ pour $|\mathbf{r}| \geqslant 1$, il s'ensuit que les familles $(\partial^{\mathbf{r}} c_\alpha)_{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^m}$, pour $\alpha \in I$, sont linéairement dépendantes sur K. Le corollaire 1.3.2 entraîne alors que les éléments c_α, pour $\alpha \in I$, sont linéairement dépendants sur $K^{\Delta=0}$ ce qui contredit l'hypothèse de départ. ■

Corollaire 1.3.4. — *Soit K un Δ-corps et notons C son corps des constantes. Soit E un C-vectoriel et munissons $K \otimes_C E$ de l'action de Δ donnée par $\partial(x \otimes e) = \partial(x) \otimes e$ pour tout $\partial \in \Delta$, $x \in K$ et $e \in E$. Alors, on a un isomorphisme canonique $E \simeq (K \otimes_C E)^{\Delta=0}$.*

Démonstration. — Le morphisme $E \longrightarrow K \otimes_C E$ est injectif et permet d'identifier E à un sous-C-vectoriel de $K \otimes_C E$. On a clairement $E \subset (K \otimes_C E)^{\Delta=0}$ et le triangle

$$\begin{tikzcd} K \otimes_C E \arrow[r] \arrow[dr, equal] & K \otimes_C (K \otimes_C E)^{\Delta=0} \arrow[d] \\ & K \otimes_C E \end{tikzcd}$$

est commutatif. La flèche horizontale est injective et il en est de même de la flèche verticale d'après la proposition 1.3.3. Il s'ensuit que la flèche horizontale est un isomorphisme. Ceci entraîne le résultat recherché puisque K est une C-algèbre fidèlement plate. ■

Corollaire 1.3.5. — *Soit K un Δ-corps et notons $C = K^{\Delta=0}$ son corps des constantes. Ci-dessous, A et A' sont des (K, Δ)-algèbres, L/K et L'/K sont des Δ-extensions, $Q \subset A^{\Delta=0}$ et $Q' \subset A'^{\Delta=0}$ sont des sous-C-algèbres, et $D = L^{\Delta=0}$ et $D' = L'^{\Delta=0}$ sont les corps des constantes de L et L'.*

(a) Le morphisme canonique $Q \otimes_C Q' \longrightarrow A \otimes_K A'$ est injectif.

(b) Si la Q-algèbre A est plate (resp. fidèlement plate), il en est de même de la $D \otimes_C Q$-algèbre $L \otimes_K A$.

(c) La $D \otimes_C D'$-algèbre $L \otimes_K L'$ est fidèlement plate.

Supposons que K est de caractéristique nulle. Alors, on a les deux propriétés supplémentaires suivantes.

(d) Si la Q-algèbre A est ind-lisse (i.e., colimite filtrante d'algèbres lisses), il en est de même de la $D \otimes_C Q$-algèbre $L \otimes_K A$.

(e) La $D \otimes_C D'$-algèbre $L \otimes_K L'$ est ind-lisse.

Démonstration. — La proposition 1.3.3 entraîne que le morphisme canonique $K \otimes_C Q' \longrightarrow A'$ est injectif. En lui appliquant le foncteur exact $A \otimes_K -$, on déduit que le morphisme $A \otimes_C Q' \longrightarrow A \otimes_K A'$ est injectif. Par ailleurs, le morphisme $Q \otimes_C Q' \longrightarrow A \otimes_C Q'$ est injectif car il s'obtient de l'inclusion $Q \hookrightarrow A$ par application du foncteur exact $- \otimes_C Q'$. Ceci montre l'assertion (a).

Clairement, (c) et (e) sont des cas particuliers de (b) et (d). Concentrons-nous d'abord sur la « platitude » dans (b). D'après la proposition 1.3.3, le morphisme canonique $D \otimes_C K \longrightarrow L$ est injectif. Puisque L est un corps ce morphisme est automatiquement plat. Par changement de base, il en est de même du morphisme

$$D \otimes_C A \simeq (D \otimes_C K) \otimes_K A \longrightarrow L \otimes_K A.$$

Vu l'hypothèse sur la Q-algèbre A, le morphisme $D \otimes_C Q \longrightarrow D \otimes_C A$ est plat. Ceci permet de conclure. Le même raisonnement permet de démontrer (d) ; l'hypothèse sur la caractéristique de K assure en effet que l'injection $D \otimes_C K \hookrightarrow L$ est automatiquement un morphisme ind-lisse.

Pour terminer, il reste à traiter la « fidélité » dans (b). Il suffit pour cela de montrer que la surjectivité du morphisme $\mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(Q)$ entraîne celle du morphisme $\mathrm{Spec}(L \otimes_K A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(D \otimes_C Q)$. On montrera que le morphisme $\mathrm{Spec}(L \otimes_K \kappa(\mathfrak{q})) \longrightarrow \mathrm{Spec}(D \otimes_C \kappa(\mathfrak{p}))$ est surjectif pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset Q$ et tout Δ-idéal premier $\mathfrak{q} \subset A$ contenant $\mathfrak{p}A$. Pour que cela suffise, il reste bien sûr à voir qu'un tel $\mathfrak{q}$

existe pour tout $\mathfrak{p}$. Or, la surjectivité du morphisme $\mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(Q)$ entraîne que l'idéal $\mathfrak{p}A$ est strict dans A. Puisque $\mathfrak{p}A$ est un Δ-idéal, il est contenu dans au moins un Δ-idéal premier $\mathfrak{q}$.

On pose $M = \kappa(\mathfrak{q})$ et $E = M^{\Delta=0}$. Clairement, on a $\kappa(\mathfrak{p}) \subset E$ et la $D \otimes_C \kappa(\mathfrak{p})$-algèbre $D \otimes_C E$ est fidèlement plate, ce qui entraîne que le morphisme $\mathrm{Spec}(D \otimes_C E) \longrightarrow \mathrm{Spec}(D \otimes_C \kappa(\mathfrak{p}))$ est surjectif. Il reste donc à voir que le morphisme $\mathrm{Spec}(L \otimes_K M) \longrightarrow \mathrm{Spec}(D \otimes_C E)$ est surjectif.

On pose $L_0 = \mathrm{Frac}(K \otimes_C D)$ et $M_0 = \mathrm{Frac}(K \otimes_C E)$. D'après la proposition 1.3.3, les morphismes $K \otimes_C D \longrightarrow L$ et $K \otimes_C E \longrightarrow M$ sont injectifs, ce qui permet de définir des morphismes de Δ-corps $L_0 \hookrightarrow L$ et $M_0 \hookrightarrow M$. Clairement, le morphisme $L_0 \otimes_K M_0 \longrightarrow L \otimes_K M$ est fidèlement plat et induit une surjection sur les schémas affines associés. Il reste donc à montrer que le morphisme $\mathrm{Spec}(L_0 \otimes_K M_0) \longrightarrow \mathrm{Spec}(D \otimes_C E)$ est surjectif. Un point de $\mathrm{Spec}(D \otimes_C E)$ correspond à une extension U/C et à deux morphismes $u : D \longrightarrow U$ et $v : E \longrightarrow U$ de C-algèbres. Notons $V = \mathrm{Frac}(K \otimes_C U)$. Les morphismes u et v induisent alors des morphismes canoniques $u' : L_0 \longrightarrow V$ et $v' : M_0 \longrightarrow V$ de K-algèbres. Ceci permet de définir un point de $\mathrm{Spec}(L_0 \otimes_K M_0)$. C'est l'antécédent recherché. ■

Le résultat suivant est également bien connu.

Lemme 1.3.6. — *Soit A une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre intègre. Alors le sous-anneau $A^{\Delta=0}$ est algébriquement clos dans A. Autrement dit, si $a \in A$ est zéro d'un polynôme unitaire à coefficients dans $A^{\Delta=0}$, alors $a \in A^{\Delta=0}$.*

Démonstration. — On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $a \in A \smallsetminus A^{\Delta=0}$ algébrique sur A. On fixe un polynôme unitaire $P \in A^{\Delta=0}[t]$ tel que $P(a) = 0$ et on suppose que son degré est minimal. Puisque a n'est pas une constante, il existe $\partial \in \Delta$ tel que $\partial(a) \neq 0$. En appliquant l'opérateur ∂ à la relation $P(a) = 0$, on obtient que $\partial(a) \cdot P'(a) = 0$. Puisque A est intègre, on a même $P'(a) = 0$. Le coefficient dominant de P' étant un entier non nul, ceci contredit la minimalité du degré de P. ■

Le résultat suivant sera utile dans la suite. Sa preuve repose sur la proposition 1.3.3 et le lemme 1.3.6.

Proposition 1.3.7. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et notons $C = K^{\Delta=0}$ son corps des constantes. Soit C'/C une extension de C. Alors, $K \otimes_C C'$ est une (K, Δ)-algèbre intègre. De plus, en posant $K' = \mathrm{Frac}(K \otimes_C C')$, nous avons une identification canonique $C' = (K')^{\Delta=0}$.*

Démonstration. — L'anneau $K \otimes_C C'$ est naturellement une (K, Δ)-algèbre en posant $\partial(x \otimes c') = \partial(x) \otimes c'$ pour tout $x \in K$, $c' \in C'$ et $\partial \in \Delta$. Puisque C est algébriquement clos dans K d'après le lemme 1.3.6, l'anneau $K \otimes_C C'$ est bien intègre.

Notons $D = (K')^{\Delta=0}$; c'est un sous-corps de K' contenant C'. D'après la proposition 1.3.3, le morphisme canonique $K \otimes_C D \longrightarrow K'$ est injectif. (Il s'ensuit en particulier que $K \otimes_C D$ est intègre, mais on aurait pu aussi utiliser encore une fois le lemme 1.3.6.) Puisque $C' \subset D$, on a nécessairement $\mathrm{Frac}(K \otimes_C D) \simeq K'$. Autrement dit, l'inclusion $C' \hookrightarrow D$ induit un isomorphisme $\mathrm{Frac}(K \otimes_C C') \simeq \mathrm{Frac}(K \otimes_C D)$. Ceci entraîne que $C' = D$ comme souhaité. ■

Corollaire 1.3.8. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et L/K une Δ-extension engendrée par une famille de constantes $(l_i)_{i \in I}$. Alors, l'extension $L^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est aussi engendrée par la famille $(l_i)_{i \in I}$.*

Démonstration. — Notons $C = K^{\Delta=0}$ et soit $D = C(l_i;\, i \in I) \subset L$ le sous-C-corps engendré par les l_i. Clairement, nous avons $D \subset L^{\Delta=0}$. D'après la proposition 1.3.3, le morphisme canonique $K \otimes_C D \longrightarrow L$ est injectif. Puisque les l_i engendrent la Δ-extension L/K, nous déduisons que $\mathrm{Frac}(K \otimes_C D) = L$. La proposition 1.3.7 entraîne maintenant que $L^{\Delta=0} = D$. ■

Le résultat ci-dessous ne servira pas tout de suite, mais il sera utile plus tard.

Corollaire 1.3.9. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et notons $C = K^{\Delta=0}$. Soit D/C une extension. Alors, l'association $L \rightsquigarrow L^{\Delta=0}$ induit une bijection entre l'ensemble des sous-Δ-extensions de $\mathrm{Frac}(K \otimes_C D)/K$ et celui des sous-extensions de D/C. De plus, si $L \subset \mathrm{Frac}(K \otimes_C D)$ est un sous-Δ-corps contenant K, alors on a $\mathrm{Frac}(K \otimes_C L^{\Delta=0}) \simeq L$.*

Démonstration. — Soit $L \subset \mathrm{Frac}(K \otimes_C D)$ un sous-Δ-corps contenant K. Nous allons montrer que l'inclusion $\mathrm{Frac}(K \otimes_C L^{\Delta=0}) \hookrightarrow L$ est un isomorphisme, ce qui permettra de conclure.

On note $E = L^{\Delta=0}$ et $L_0 = \mathrm{Frac}(K \otimes_C E)$. Ainsi, L_0 est un sous-Δ-corps de L et on a $L_0^{\Delta=0} = L^{\Delta=0} = E$. D'après la proposition 1.3.7, on a $\mathrm{Frac}(K \otimes_C D) = D$. La proposition 1.3.3, appliquée à $\mathrm{Frac}(K \otimes_C D)$ vu comme une Δ-algèbre sur L_0 et L, entraîne donc que les morphismes canoniques

$$L_0 \otimes_E D \longrightarrow \mathrm{Frac}(K \otimes_C D) \qquad \text{et} \qquad L \otimes_E D \longrightarrow \mathrm{Frac}(K \otimes_C D)$$

sont injectifs. En passant aux corps des fractions, on obtient des morphismes de Δ-corps

$$\mathrm{Frac}(L_0 \otimes_E D) \longrightarrow \mathrm{Frac}(K \otimes_C D) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Frac}(L \otimes_E D) \longrightarrow \mathrm{Frac}(K \otimes_C D).$$

Ces morphismes sont clairement surjectifs ; ce sont donc des isomorphismes. Ceci montre que l'inclusion $L_0 \hookrightarrow L$ induit un isomorphisme $\mathrm{Frac}(L_0 \otimes_E D) \simeq \mathrm{Frac}(L \otimes_E D)$. Il s'ensuit que $L_0 = L$. ■

Nous avons à présent suffisamment d'outils pour entreprendre l'objectif de cette sous-section, c'est-à-dire l'étude des propriétés de finitude pour les algèbres des constantes. Notre premier résultat dans cette direction repose sur le théorème de la base de Ritt (voir le corollaire 1.1.18).

Théorème 1.3.10. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et A une (K,Δ)-algèbre intègre et de type fini. Alors,* $\mathrm{Frac}(A)^{\Delta=0}$ *est une extension de type fini de $K^{\Delta=0}$.*

Démonstration. — Notons $L = \mathrm{Frac}(A)$, $D = L^{\Delta=0}$ et $C = K^{\Delta=0}$. Pour montrer que l'extension D/C est de type fini, il suffit de montrer que toute suite croissante de sous-extensions est stationnaire. Soit

$$C \subset D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \cdots \subset D \tag{1.15}$$

une telle suite. La (L,Δ)-algèbre $L \otimes_K A$ est de type fini. Elle est donc radiciellement noethérienne d'après le corollaire 1.1.18. Il en est de même de la (L,Δ)-algèbre $L \otimes_K L$ puisqu'elle s'obtient de $L \otimes_K A$ par localisation. Il s'ensuit que toute suite croissante de Δ-idéaux radiciels de $L \otimes_K L$ est stationnaire. Nous utiliserons cette propriété pour montrer que la suite (1.15) est stationnaire.

D'après le corollaire 1.3.5, le morphisme canonique

$$D \otimes_C D \longrightarrow L \otimes_K L \tag{1.16}$$

est injectif, fidèlement plat et ind-lisse. Dans la suite, on identifiera $D \otimes_C D$ à une sous-algèbre de $L \otimes_K L$. En fait, on a même $D \otimes_C D \subset (L \otimes_K L)^{\Delta=0}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n \subset D \otimes_C D$ le noyau du morphisme canonique $D \otimes_C D \twoheadrightarrow D \otimes_{D_n} D$ et on pose $J_n = I_n \cdot (L \otimes_K L)$. Puisque l'algèbre $D \otimes_{D_n} D$ est réduite (D_n étant de caractéristique nulle), l'idéal I_n est radiciel. Puisque $L \otimes_K L$ est une $D \otimes_C D$-algèbre ind-lisse, il en est de même de l'idéal J_n. Par ailleurs, puisque $D \otimes_C D$ est contenue dans le sous-anneau des constantes de $L \otimes_K L$, l'idéal J_n est en fait un Δ-idéal. Ainsi, nous avons construit une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Δ-idéaux radiciels dans la $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbre radiciellement noethérienne $L \otimes_K L$. Il existe donc un entier $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $J_n = J_\nu$ pour tout $n \geqslant \nu$. Pour terminer la preuve, il reste à montrer que ceci entraîne que $I_n = I_\nu$. (En effet, $D \otimes_{D_\nu} D \longrightarrow D \otimes_{D_n} D$ sera donc inversible ce qui forcera l'égalité $D_\nu = D_n$.) Pour cela, il suffit de savoir que $I = (I \cdot (L \otimes_K L)) \cap (D \otimes_C D)$ pour tout idéal $I \subset D \otimes_C D$. Ceci découle de la fidèle platitude de la $D \otimes_C D$-algèbre $L \otimes_K L$. ■

En utilisant le théorème de l'involutivité générique de Malgrange (voir le théorème 1.2.1) on peut préciser le théorème 1.3.10 de la manière suivante.

Théorème 1.3.11. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et A une (K,Δ)-algèbre réduite et de type fini. Notons $C = K^{\Delta=0}$ le sous-corps des constantes de K. Il existe alors un élément $f \in A$ qui n'est pas un diviseur de zéro et tel que les conditions suivantes sont satisfaites.*

(a) La C-algèbre $B = (A[f^{-1}])^{\Delta=0}$ est de type fini, et la B-algèbre $A[f^{-1}]$ est ind-lisse et fidèlement plate. De plus, le morphisme $\mathrm{Spec}(A[f^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ *est ouvert.*

(b) Pour tout $g \in A$ qui n'est pas un diviseur de zéro, il existe $h \in B$ qui n'est pas un diviseur de zéro et tel que la C-algèbre $(A[(fgh)^{-1}])^{\Delta=0}$ est isomorphe à $B[h^{-1}]$.

(c) L'inclusion $\mathrm{Frac}(B) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(A)^{\Delta=0}$ *est une bijection.*

Démonstration. — La (K,Δ)-algèbre A est radiciellement noethérienne (d'après le corollaire 1.1.18) et possède donc un nombre fini d'idéaux premiers minimaux (d'après la proposition 1.1.19(ii)). On ne restreint donc pas la généralité en supposant que A est intègre. Le théorème 1.3.10 entraîne que l'extension $\mathrm{Frac}(A)^{\Delta=0}/C$ est de type fini. Il existe donc un élément $f_0 \in A \smallsetminus \{0\}$ tel que $A[f_0^{-1}]$ contient des générateurs de cette extension. Autrement dit, on peut trouver une sous-C-algèbre de type fini $B_0 \subset (A[f_0^{-1}])^{\Delta=0}$ telle que $\mathrm{Frac}(B_0) = \mathrm{Frac}(A)^{\Delta=0}$.

Par ailleurs, soit $A_0 \subset A$ une sous-K-algèbre de type fini qui engendre la (K,Δ)-algèbre A, i.e., $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec $A_n \subset A$ la sous-K-algèbre engendrée par les $\partial^{\mathbf{r}}a$ avec $a \in A_0$ et $|\mathbf{r}| \leqslant n$. D'après le théorème 1.2.1, il existe $\nu \in \mathbb{N}$ et $f_1 \in A_\nu \smallsetminus \{0\}$ tels que, pour $n \geqslant \nu$, $A_{n+1}[f_1^{-1}]$ est l'algèbre symétrique d'un $A_n[f_1^{-1}]$-module projectif de type fini. Quitte à remplacer ν par un entier plus grand et f_1 par un multiple non nul, on peut supposer que f_1 est un multiple de f_0 et que $A_\nu[f_1^{-1}]$ contient B_0.

D'après la proposition 1.3.3, le morphisme canonique $K \otimes_C B_0 \longrightarrow A_\nu[f_1^{-1}]$ est injectif. Or, $K \otimes_C B_0$ et $A_\nu[f_1^{-1}]$ sont des K-algèbres de type fini. On peut donc trouver un multiple $f_2 \in A_\nu \smallsetminus \{0\}$ de f_1 tel que $A_\nu[f_2^{-1}]$ est une $K\otimes_C B_0$-algèbre lisse. On peut aussi trouver $b_0 \in K\otimes_C B_0$ tel que la $(K\otimes_C B_0)[b_0^{-1}]$-algèbre lisse $A_\nu[(b_0 \cdot f_2)^{-1}]$ est fidèlement plate. (Rappelons qu'en présence de la propriété de lissité, ceci signifie simplement que le morphisme $\mathrm{Spec}(A_\nu[(b_0 \cdot f_2)^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}((K \otimes_C B_0)[b_0^{-1}])$ est surjectif.) D'après le lemme 1.3.14 ci-dessous, on peut trouver $b_1 \in B_0 \smallsetminus \{0\}$ tel que la $B_0[b_1^{-1}]$-algèbre $(K \otimes_C B_0)[(b_0 \cdot b_1)^{-1}]$ est fidèlement plate. On pose $B = B_0[b_1^{-1}]$ et $f = b_0 \cdot b_1 \cdot f_2$. Avec ces choix, la B-algèbre $A_\nu[f^{-1}]$ est ind-lisse et fidèlement plate. Puisque les $A_\nu[f^{-1}]$-algèbres $A_n[f^{-1}]$ sont lisses et fidèlement plates (d'après le théorème 1.2.1), il découle aussi que la B-algèbre $A[f^{-1}]$ est ind-lisse et fidèlement plate. En fait, ce raisonnement montre aussi que le morphisme $\mathrm{Spec}(A[f^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ est ouvert.

Notons $B' = (A[f^{-1}])^{\Delta=0}$. C'est une sous-$B$-algèbre de la B-algèbre fidèlement plate $A[f^{-1}]$. Par ailleurs, on a $\mathrm{Frac}(B) \subset \mathrm{Frac}(B') \subset \mathrm{Frac}(A)^{\Delta=0}$ ce qui force l'égalité $\mathrm{Frac}(B) = \mathrm{Frac}(B')$. Le corollaire 1.3.13 ci-dessous entraîne donc que $B = B'$. Les points (a) et (c) sont démontrés. Il reste à vérifier le point (b). Puisque le morphisme $\mathrm{Spec}(A[f^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ est ouvert on peut trouver $h \in B \smallsetminus \{0\}$ tel que le morphisme $\mathrm{Spec}(A[(fgh)^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B[h^{-1}])$ est surjectif. Le raisonnement précédent, basé sur le corollaire 1.3.13, permet encore une fois de montrer que $B[h^{-1}] = (A[(fgh)^{-1}])^{\Delta=0}$. ∎

Lemme 1.3.12. — *Soient R un anneau et $S \subset R$ un sous-anneau. Donnons-nous un élément $f \in S$ qui n'est pas un diviseur de zéro, et notons $T = S[f^{-1}]$ et $Q = R[f^{-1}]$. Si la S-algèbre R est fidèlement plate, alors $S \simeq T \times_Q R$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que f n'est pas un diviseur de zéro dans R. En effet, le morphisme $f : R \longrightarrow R$ est injectif puisqu'il s'obtient de $f : S \longrightarrow S$ par application du foncteur exact $R \otimes_S -$. Ainsi, T et R s'identifient à des sous-anneaux de Q de sorte que $T \times_Q R$ est simplement l'intersection $T \cap R$ dans Q.

Nous démontrons d'abord le lemme en supposant que l'inclusion $S \hookrightarrow R$ admet une rétraction $r : R \twoheadrightarrow S$. Donnons nous un élément $a \in T \cap R$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ et $g \in S$ tels que $f^n \cdot a = g$. Puisque f, g et a sont des éléments de R, on peut leur appliquer la rétraction r pour obtenir la relation $f^n \cdot r(a) = g$. Il s'ensuit que $f^n \cdot (a - r(a)) = 0$. Puisque f^n n'est pas un diviseur de zéro dans R, on obtient la relation $a = r(a)$. Ceci démontre que $a \in S$.

Traitons maintenant le cas général. Puisque R est une S-algèbre fidèlement plate, il suffit de montrer que le morphisme $S \longrightarrow T \times_Q R$ est inversible après application du foncteur exact $R \otimes_S -$. Le morphisme que nous obtenons ainsi s'identifie à

$$R \longrightarrow R[f^{-1}] \times_{R\otimes_S R[(1\otimes f)^{-1}]} (R \otimes_S R).$$

Autrement dit, il suffit de montrer le lemme pour le sous-anneau $R = 1 \otimes_S R \hookrightarrow R \otimes_S R$ et son élément $1 \otimes f$. Or, l'inclusion $R \hookrightarrow R\otimes_S R$ possède une rétraction (donnée par la multiplication de R). On s'est donc ramené au cas considéré auparavant. ∎

Corollaire 1.3.13. — *Soient R un anneau intègre et $S \subset S' \subset R$ des sous-anneaux. On suppose que la S-algèbre R est fidèlement plate et que* $\mathrm{Frac}(S) = \mathrm{Frac}(S')$. *Alors, $S = S'$.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que S' est une S-algèbre de type fini. L'égalité $\mathrm{Frac}(S) = \mathrm{Frac}(S')$ entraîne alors l'existence d'un élément $f \in S \smallsetminus \{0\}$ tel que $S[f^{-1}] = S'[f^{-1}]$. Il s'ensuit que $S' \subset S[f^{-1}] \cap R$, l'intersection étant prise dans $R[f^{-1}]$. Or, le lemme 1.3.12 affirme que $S = S[f^{-1}] \cap R$, ce qui permet de conclure. ∎

Lemme 1.3.14. — *Soient C un corps, R une C-algèbre et D/C une extension. Alors, le morphisme évident* $\mathrm{Spec}(D \otimes_C R) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ *est ouvert.*

Démonstration. — Par un argument de passage à la limite, on se ramène au cas où l'extension D/C est de type fini. On peut alors supposer que $D = \mathrm{Frac}(P)$ avec P une C-algèbre intègre et de type fini. Le morphisme de schémas qui nous intéresse se factorise de la manière suivante :

$$\mathrm{Spec}(D \otimes_C R) \xrightarrow{u} \mathrm{Spec}(P \otimes_C R) \xrightarrow{v} \mathrm{Spec}(R).$$

Soit $U \subset \mathrm{Spec}(D \otimes_C R)$ un ouvert. Topologiquement, le morphisme u est l'inclusion d'une partie de $\mathrm{Spec}(P \otimes_C R)$ munie de la topologie induite. Il existe alors un ouvert $V \subset \mathrm{Spec}(P \otimes_C R)$ tel que $U = u^{-1}(V)$. Or, si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, le morphisme $u_{\mathfrak{p}} : \mathrm{Spec}(D \otimes_C \kappa(\mathfrak{p})) \longrightarrow \mathrm{Spec}(P \otimes_C \kappa(\mathfrak{p}))$ est d'image dense. Ainsi $\mathrm{Spec}(P \otimes_C \kappa(\mathfrak{p}))$ rencontre V si et seulement si $\mathrm{Spec}(D \otimes_C \kappa(\mathfrak{p}))$ rencontre U. Il s'ensuit que $v(V) = v \circ u(U)$. Puisque le morphisme v est plat et de présentation finie, la partie $v(V)$ est ouverte dans $\mathrm{Spec}(R)$. Le lemme est démontré. ■

On note une conséquence du théorème 1.3.11 qui servira plus tard.

Corollaire 1.3.15. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et S une (K, Δ)-algèbre simple de type fini. Alors, on a $S^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(S)^{\Delta=0}$ et c'est une extension finie de $K^{\Delta=0}$.*

Démonstration. — Soit $f \in S \setminus \{0\}$ vérifiant les conditions du théorème 1.3.11(a). Étant donné qu'un idéal de $(S[f^{-1}])^{\Delta=0}$ engendre un Δ-idéal de $S[f^{-1}]$, la simplicité de $S[f^{-1}]$ entraîne que $(S[f^{-1}])^{\Delta=0}$ est un corps. Puisque la $K^{\Delta=0}$-algèbre $(S[f^{-1}])^{\Delta=0}$ est de type fini, c'est nécessairement une extension finie de $K^{\Delta=0}$. Il en est donc de même de $\mathrm{Frac}(S)^{\Delta=0}$.

Il reste à voir que $S^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(S)^{\Delta=0}$. Pour ce faire, considérons la sous-K-algèbre $T \subset \mathrm{Frac}(S)$ engendrée par S et $\mathrm{Frac}(S)^{\Delta=0}$. Clairement, T est une (K, Δ)-algèbre qui contient S et telle que $\mathrm{Frac}(S) = \mathrm{Frac}(T)$. Pour conclure, il suffit de montrer que $T = S$. Or, le (S, Δ)-module T/S est de type fini et génériquement nul (i.e., $T/S \otimes_S \mathrm{Frac}(S) = 0$). Son annulateur $\mathrm{ann}(T/S)$ est donc un Δ-idéal non nul (voir le lemme 1.1.4). Puisque S est simple, on a nécessairement $\mathrm{ann}(T/S) = S$ et donc $S = T$. ■

2. Théorie de Galois différentielle classique

Le but de cette section est de présenter la théorie de Galois différentielle de Kolchin (et de Picard–Vessiot) sous une forme qui sera mieux adaptée aux besoins de cet article. Les résultats de cette section ne sont pas vraiment nouveaux. En l'occurrence, notre présentation est proche de celle de [**52, 53**] : la théorie de Galois différentielle sera obtenue en analysant la « création » de nouvelles constantes dans des produits tensoriels d'extensions de Δ-corps. Toutefois, nous nous sommes efforcés de considérer les extensions arbitraires de Δ-corps – contrairement à [**52**] où seulement les Δ-extensions fortement normales sont considérées – ce qui nous a permis de dégager la notion de « noyau totalement décomposable » qui sera importante pour la théorie de Galois différentielle supérieure développée dans les sections 4 et 5.

2.1. Décomposition maximale, I. Définition et sorites. —

Dans cette sous-section et la suivante, nous étudions la notion de « décomposition maximale » qui jouera un rôle fondamental dans notre présentation de la théorie de Galois différentielle. Nous sommes surtout intéressés par la décomposition maximale des Δ-extensions, mais il sera commode de pouvoir considérer aussi des Δ-algèbres plus générales. Dans cette sous-section, nous regroupons quelques sorites relatifs à cette notion. Des résultats plus importants seront donnés dans la sous-section suivante.

Définition 2.1.1. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et A une (K, Δ)-algèbre réduite possédant un nombre fini d'idéaux premiers minimaux. Nous dirons qu'une Δ-extension L/K* décompose maximalement *la (K, Δ)-algèbre A si la condition suivante est satisfaite. Pour toute Δ-extension L'/L, le morphisme canonique*

$$\mathrm{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K A)^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Frac}(L' \otimes_K A)^{\Delta=0}, \tag{2.1}$$

de la construction 2.1.2 ci-dessous, est inversible.

Construction 2.1.2. — Gardons les notations et les hypothèses de la définition 2.1.1. Le morphisme (2.1) est obtenu de la manière suivante. Remarquons d'abord qu'il existe des isomorphismes évidents

$$\mathrm{Frac}(L \otimes_K A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(L \otimes_K \mathrm{Frac}(A)) \tag{2.2}$$

pour toute Δ-extension L/K. On peut donc remplacer A par $\mathrm{Frac}(A)$ dans (2.1). Or $\mathrm{Frac}(A)$ est un produit direct fini de Δ-corps et le morphisme (2.1), pour $\mathrm{Frac}(A)$, sera le produit direct des morphismes (2.1) pour chacun de ces Δ-corps. Il reste donc à expliquer la construction de (2.1) dans le cas d'une Δ-extension M/K.

La $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}$-algèbre $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M)$ est plate. (En effet, les anneaux locaux du schéma affine $\mathrm{Frac}((L \otimes_K M)^{\Delta=0})$ sont des corps.) D'après le corollaire 1.3.5, il s'ensuit que le morphisme

$$L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0} \longrightarrow L' \otimes_L \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)$$

est injectif et plat. En particulier, il préserve les non diviseurs de zéro. On peut donc lui appliquer $\mathrm{Frac}(-)$ pour obtenir le morphisme

$$\mathrm{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Frac}(L' \otimes_L \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)) \simeq \mathrm{Frac}(L' \otimes_K M)$$

qui se factorise par $\mathrm{Frac}(L' \otimes_K M)^{\Delta=0}$ pour fournir le morphisme recherché. Il découle aussitôt de la construction que le morphisme (2.1) est toujours injectif. □

Remarque 2.1.3. — Gardons les notations et les hypothèses de la définition 2.1.1. Par construction, les morphismes (2.1) pour A et $\mathrm{Frac}(A)$ sont les mêmes modulo les identifications (2.2). Ainsi, la Δ-extension L/K décompose maximalement la (K, Δ)-algèbre A si et seulement si elle décompose maximalement la (K, Δ)-algèbre $\mathrm{Frac}(A)$. □

Exemple 2.1.4. — Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et notons $C = K^{\Delta=0}$. Soit C' une C-algèbre réduite possédant un nombre fini d'idéaux premiers minimaux. Alors, la (K, Δ)-algèbre $K \otimes_C C'$ est maximalement décomposée par la Δ-extension triviale K/K. Ceci est une conséquence immédiate des définitions et de la proposition 1.3.7. □

Remarque 2.1.5. — Un cas particulièrement agréable de la définition 2.1.1 est celui d'une Δ-extension M/K telle que K est algébriquement clos dans M. Dans ce cas, pour toute Δ-extension L/K, la (K, Δ)-algèbre $L \otimes_K M$ est intègre et $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M)$ est un corps. De même, le lemme 1.3.6 entraîne que $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos dans $M^{\Delta=0}$. La $K^{\Delta=0}$-algèbre $L^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}$ est donc intègre et $\mathrm{Frac}(L^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0})$ est un corps. La condition que L/K décompose maximalement M/K se traduit alors plus concrètement de la manière suivante. Pour toute Δ-extension L'/L, le corps des constantes de $\mathrm{Frac}(L' \otimes_K M)$ est engendré (en tant que corps) par les corps des constantes de L' et $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M)$. □

Lemme 2.1.6. — *Gardons les notations et les hypothèses de la définition 2.1.1. Si L/K est une Δ-extension qui décompose maximalement A, alors il en est de même de toute Δ-extension L'/K qui contient L/K.*

Démonstration. — Ceci est une conséquence immédiate de la définition 2.1.1. ■

Proposition 2.1.7. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et A une (K, Δ)-algèbre réduite possédant un nombre fini de Δ-idéaux premiers minimaux. Une Δ-extension L/K décompose maximalement A si et seulement si elle décompose maximalement toutes les sous-(K, Δ)-algèbres de type fini de A.*

Démonstration. — On montre d'abord que la condition est suffisante. Supposons donc que toute sous-(K, Δ)-algèbre de type fini de A est maximalement décomposée par une Δ-extension L/K. Clairement, A est l'union filtrante de ses sous-(K, Δ)-algèbres de type fini $B \subset A$ telles que $\mathfrak{q} \rightsquigarrow B \cap \mathfrak{q}$ est une bijection entre les idéaux premiers minimaux de A et B. (Pour que cette propriété soit satisfaite, il suffit que $\mathfrak{q} \cap B \neq \mathfrak{q}' \cap B$ si $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}' \subset A$ sont des idéaux premiers minimaux distincts.) Si $B \subset A$ est une telle sous-(K, Δ)-algèbre, on a une injection canonique $\mathrm{Frac}(B) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(A)$. En inspectant la construction 2.1.2, il est facile de voir qu'on dispose d'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K B)^{\Delta=0}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Frac}(L' \otimes_K B)^{\Delta=0} \arrow[d] \\
\mathrm{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K A)^{\Delta=0}) \arrow[r] & \mathrm{Frac}(L' \otimes_K A)^{\Delta=0}
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

pour toute Δ-extension L'/L. Les flèches verticales dans (2.3) sont injectives et en passant à la colimite suivant $B \subset A$, elles induisent des isomorphismes. Or, par hypothèse, la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme. Ceci permet de conclure.

On montre maintenant que la condition est nécessaire. On suppose donc que A est maximalement décomposée par une Δ-extension L/K et on fixe une sous-(K,Δ)-algèbre de type fini $B \subset A$. On peut trouver $f \in A$ tel que $B \longrightarrow A[f^{-1}]$ soit encore injectif et l'association $\mathfrak{q} \rightsquigarrow B \cap \mathfrak{q}$ soit une bijection entre les idéaux premiers minimaux de $A[f^{-1}]$ et B. Puisque la Δ-extension L/K décompose maximalement A, elle décompose aussi maximalement $A[f^{-1}]$. (En effet, $\mathrm{Frac}(A[f^{-1}])$ est un facteur direct de $\mathrm{Frac}(A)$ qui est un produit fini de corps.) On peut donc remplacer A par $A[f^{-1}]$ et supposer que $\mathfrak{q} \rightsquigarrow B \cap \mathfrak{q}$ est une bijection entre les idéaux premiers minimaux de A et B. On dispose alors du carré commutatif (2.3). Cette fois, c'est la flèche horizontale inférieure qui est supposée inversible et on doit prouver que la flèche horizontale supérieure est également inversible. Pour ce faire, on montrera que le carré (2.3) est cartésien. On utilise encore une fois que la flèche horizontale inférieure dans (2.3) est la colimite filtrante suivant les sous-(B,Δ)-algèbres de type fini $A' \subset A$ des flèches analogues associées à A'. Ceci nous permet de remplacer la (K,Δ)-algèbre A par une sous-(K,Δ)-algèbre de type fini $A' \subset A$. Or, $\mathrm{Frac}(L \otimes_K A')$ et $\mathrm{Frac}(L \otimes_K B)$ sont des produits finis de Δ-extensions (de type fini) de L. Le résultat recherché découle maintenant du lemme 2.1.8 ci-dessous. ∎

Lemme 2.1.8. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et L/K, M/K et M'/M des Δ-extensions. Alors, le carré*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Frac}(L^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}) & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Frac}(L^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} M'^{\Delta=0}) & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(L \otimes_K M')^{\Delta=0} \end{array} \tag{2.4}$$

est cartésien.

Démonstration. — Notons $M_0 = \mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0})$ et $M'_0 = \mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} M'^{\Delta=0})$; ce sont des Δ-corps (voir la proposition 1.3.7). Remarquons que le carré

$$\begin{array}{ccc} M_0 & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M'_0 & \longrightarrow & M' \end{array} \tag{2.5}$$

est cartésien. En effet, puisque M_0 est un corps, il suffit de vérifier que le morphisme $M'_0 \otimes_{M_0} M \longrightarrow M'$ est injectif. Or, d'après la proposition 1.3.3, le morphisme canonique $M'^{\Delta=0} \otimes_{M^{\Delta=0}} M \longrightarrow M'$ est injectif. Ceci permet de conclure puisque $M'_0 \otimes_{M_0} M$ est une localisation de $M'^{\Delta=0} \otimes_{M^{\Delta=0}} M$.

En appliquant $\mathrm{Frac}(L \otimes_K -)$ au carré cartésien (2.5), on obtient de nouveau un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M_0) & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(L \otimes_K M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Frac}(L \otimes_K M'_0) & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(L \otimes_K M'). \end{array} \tag{2.6}$$

Pour démontrer cela, on peut supposer que l'extension L/K est de type fini. Dans ce cas, la (L,Δ)-algèbre $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M_0)$ est un produit fini de corps. Il est alors suffisant de montrer que le morphisme

$$\mathrm{Frac}(L \otimes_K M) \otimes_{\mathrm{Frac}(L \otimes_K M_0)} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M'_0) \longrightarrow \mathrm{Frac}(L \otimes_K M')$$

est injectif. Ceci découle aussitôt de l'injectivité du morphisme $M \otimes_{M_0} M'_0 \longrightarrow M'$ établie ci-dessus.

Le foncteur $(-)^{\Delta=0}$ préserve les carrés cartésiens. En l'appliquant au carré cartésien (2.6), on se ramène à démontrer le lemme avec M et M' remplacés par M_0 et M'_0. Autrement dit, on peut supposer que $M =$

$\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0})$ et de même pour M'. Le carré (2.4) s'identifie alors au carré

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Frac}(L^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}) & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(L \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0})^{\Delta=0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Frac}(L^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} M'^{\Delta=0}) & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(L \otimes_{K^{\Delta=0}} M'^{\Delta=0})^{\Delta=0}. \end{array}$$

Or, la proposition 1.3.7 entraîne que les flèches horizontales dans le carré ci-dessus sont des isomorphismes. Ceci permet de conclure. ∎

Vu la proposition 2.1.7, il est légitime d'étendre la définition 2.1.1 de la manière suivante.

Définition 2.1.9. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et A une (K,Δ)-algèbre réduite. Nous dirons qu'une Δ-extension L/K* décompose maximalement *la (K,Δ)-algèbre A si toute sous-(K,Δ)-algèbre de type fini $B \subset A$ est maximalement décomposée par L/K au sens de la définition 2.1.1.*

Remarque 2.1.10. — Avec cette extension de la définition 2.1.1, le lemme 2.1.6 est maintenant valable pour n'importe quelle (K,Δ)-algèbre réduite A. De même, l'exemple 2.1.4 s'étend à n'importe quelle C-algèbre réduite C'. □

Proposition 2.1.11. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, L/K une Δ-extension et A une (K,Δ)-algèbre réduite. Alors la Δ-extension L/K décompose maximalement A si et seulement si elle décompose maximalement les Δ-extensions $\kappa(\mathfrak{p})/K$ pour tous les Δ-idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p} \subset A$.*

Démonstration. — Montrons d'abord que la condition est suffisante. Nous supposons donc que les Δ-extensions $\kappa(\mathfrak{p})/K$ sont décomposées maximalement par L/K. Fixons une (K,Δ)-algèbre de type fini $B \subset A$ et montrons qu'elle est décomposée maximalement par L/K. Il existe des idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n \subset A$ tels que les idéaux premiers minimaux de B sont exactement les $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i \cap B$. Il s'ensuit que B est une sous-(K,Δ)-algèbre de type fini de $A' = \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{p}_i$. Notre hypothèse entraîne clairement que A' est maximalement décomposée par L/K. D'après la proposition 2.1.7, il en est de même de B.

Réciproquement, supposons que la (K,Δ)-algèbre A est maximalement décomposée par L/K et fixons un idéal premier minimal $\mathfrak{p}$. Il s'agit de montrer que la (K,Δ)-algèbre intègre $A_0 = A/\mathfrak{p}$ est maximalement décomposée par L/K. Or, si $B_0 \subset A_0$ est une sous-(K,Δ)-algèbre de type fini, il existe une sous-(K,Δ)-algèbre de type fini $B \subset A$ telle que B_0 est l'image de B par le morphisme évident $A \twoheadrightarrow A_0$. De plus, quitte à remplacer B par une sous-algèbre plus grande, on peut supposer que $\mathfrak{p} \cap B$ est un idéal premier minimal de B. Il s'ensuit que $\mathrm{Frac}(B_0)$ est un facteur direct du produit fini de corps $\mathrm{Frac}(B)$. Notre hypothèse entraîne que B est maximalement décomposée par L/K. Il en est donc de même de $\mathrm{Frac}(B)$ et de son facteur direct $\mathrm{Frac}(B_0)$. Nous avons ainsi démontré que B_0 est maximalement décomposée par L/K et ceci pour toute sous-(K,Δ)-algèbre de type fini de A_0. ∎

Le résultat suivant complémente la proposition 2.1.11 ; il permet de se ramener au cas particulièrement agréable discuté dans la remarque 2.1.5.

Lemme 2.1.12. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et M/K et L/K des Δ-extensions. Notons $K' \subset M$ la clôture algébrique de K dans M. Pour que L/K décompose maximalement M/K il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites.*

(a) L'extension L/K contient une clôture galoisienne de K'/K.

(b) Pour tout morphisme de K-extensions $K' \hookrightarrow L$, la Δ-extension M/K' est maximalement décomposée par la Δ-extension L/K'.

Démonstration. — En effet, en utilisant la proposition 2.1.7, on peut se ramener au cas où la Δ-extension M/K est de type fini. Pour toute Δ-extension L'/L, on a alors :

$$\mathrm{Frac}(L' \otimes_K M) = \prod_{\sigma: K' \hookrightarrow L} \mathrm{Frac}({L'}_{\sigma} \otimes_{K'} M).$$

Ceci permet de conclure. ∎

Remarque 2.1.13. — Ci-dessus, nous avons implicitement utilisé le fait bien connu suivant. Si K est un Δ-corps de caractéristique nulle et K'/K une extension algébrique, il existe une unique structure de Δ-corps sur K' telle que l'inclusion $K \hookrightarrow K'$ soit compatible à l'action des opérateurs différentiels $\partial \in \Delta$. □

Proposition 2.1.14. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et A et A' deux (K, Δ)-algèbres réduites. Soit L/K est une Δ-extension qui décompose maximalement A et A'. Alors, L/K décompose aussi maximalement $A \otimes_K A'$.*

Démonstration. — D'après les propositions 2.1.7 et 2.1.11, il suffit de traiter le cas où les (K, Δ)-algèbres sont des Δ-extensions de type fini M/K et M'/K. Soit L'/L une Δ-extension. Puisque la Δ-extension L'/K décompose maximalement la (K, Δ)-algèbre M'/K (voir le lemme 2.1.6) et puisque $\mathrm{Frac}(L' \otimes_K M)$ est un produit direct fini de Δ-extensions de L', on déduit que le morphisme canonique

$$\mathrm{Frac}(\mathrm{Frac}(L' \otimes_K M)^{\Delta=0} \otimes_{L'^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L' \otimes_K M')^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Frac}(L' \otimes_K M \otimes_K M')^{\Delta=0} \tag{2.7}$$

est inversible. En utilisant maintenant que L/K décompose maximalement M et M', on obtient les isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}) \simeq \mathrm{Frac}(L' \otimes_K M)^{\Delta=0}$$

$$\text{et} \qquad \mathrm{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M')^{\Delta=0}) \simeq \mathrm{Frac}(L' \otimes_K M')^{\Delta=0}.$$

En joignant ceci à l'isomorphisme (2.7), on obtient que le morphisme canonique

$$\mathrm{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} (\mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M')^{\Delta=0})) \longrightarrow \mathrm{Frac}(L' \otimes_K M \otimes_K M')^{\Delta=0} \tag{2.8}$$

est inversible. En utilisant l'isomorphisme (2.7) avec L'/K remplacé par L/K, on peut réécrire l'isomorphisme (2.8) de la manière suivante :

$$\mathrm{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M \otimes_K M')^{\Delta=0}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(L' \otimes_K M \otimes_K M')^{\Delta=0}.$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

2.2. Décomposition maximale, II. Existence et noyau totalement décomposable. —

Dans cette sous-section, on continue l'étude de la notion de « décomposition maximale » introduite dans la sous-section 2.1. Notre prochain résultat est un théorème d'existence.

Théorème 2.2.1. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et A une (K, Δ)-algèbre réduite. Alors, il existe une Δ-extension L/K qui décompose maximalement A et telle que $L^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est une extension algébrique. Si la (K, Δ)-algèbre A est de type fini, on peut supposer en plus que L est le corps des fractions d'une (K, Δ)-algèbre simple de type fini.*

On démontre d'abord un résultat préliminaire.

Proposition 2.2.2. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et A et B des (K, Δ)-algèbres réduites de type fini. On suppose que le morphisme*

$$\mathrm{Frac}(\mathrm{Frac}(B)^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(A)^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Frac}(B \otimes_K A)^{\Delta=0} \tag{2.9}$$

n'est pas inversible. Il existe alors une (K, Δ)-algèbre simple de type fini S telle que le morphisme (2.9), avec B remplacé par S, n'est pas inversible. De plus, on peut prendre pour S un quotient d'une localisation de la (K, Δ)-algèbre B.

Démonstration. — D'après le théorème 1.3.11 et quitte à inverser un non diviseur de zéro dans A, on peut supposer que la $K^{\Delta=0}$-algèbre $A^{\Delta=0}$ est de type fini, que $\mathrm{Frac}(A^{\Delta=0}) = \mathrm{Frac}(A)^{\Delta=0}$ et que le morphisme $A^{\Delta=0} \longrightarrow A$ est fidèlement plat. Ceci s'applique également à la (K, Δ)-algèbre B. En utilisant encore une fois le théorème 1.3.11, on peut trouver un non diviseur de zéro $f \in B \otimes_K A$ tel que la $K^{\Delta=0}$-algèbre $(B \otimes_K A[f^{-1}])^{\Delta=0}$ est de type fini, $\mathrm{Frac}((B \otimes_K A[f^{-1}])^{\Delta=0}) = \mathrm{Frac}(B \otimes_K A)^{\Delta=0}$ et le morphisme $(B \otimes_K A[f^{-1}])^{\Delta=0} \longrightarrow B \otimes_K A[f^{-1}]$ est fidèlement plat. Ceci dit, il découle des hypothèses de l'énoncé que le morphisme injectif

$$B^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} A^{\Delta=0} \longrightarrow (B \otimes_K A[f^{-1}])^{\Delta=0} \tag{2.10}$$

n'est pas inversible, même rationnellement, i.e., après application de $\mathrm{Frac}(-)$. Puisque le morphisme (2.10) est injectif et de type fini, on peut remplacer f par un multiple (voir le théorème 1.3.11(b)), et supposer que ce morphisme est plat.

Considérons aussi le morphisme

$$B \otimes_{B^{\Delta=0}} (B \otimes_K A[f^{-1}])^{\Delta=0} \longrightarrow B \otimes_K A[f^{-1}]. \tag{2.11}$$

Ce morphisme est injectif d'après la proposition 1.3.3. (En effet, vu les propriétés satisfaites par B, $B^{\Delta=0}$, etc, il suffit de vérifier l'injectivité après changement de base à $\mathrm{Frac}(B)$ qui est alors un produit fini de Δ-corps.) La source de ce morphisme est une B-algèbre de présentation finie et, quitte à remplacer f par un multiple convenable, son but est fidèlement plat sur une sous-B-algèbre de présentation finie aussi grande qu'on veut. (On utilise ici le théorème 1.2.1.) Il s'ensuit que le morphisme (2.11) est plat au-dessus d'un ouvert dense de $\mathrm{Spec}(B)$. Ainsi, quitte à localiser d'avantage B, on peut supposer que le B-morphisme (2.11) est plat et injectif fibre par fibre au-dessus de B (voir [**39**, Proposition 9.6.1]).

À présent, soit $\mathfrak{n} \in \mathrm{Spec}(B^{\Delta=0})$ un idéal maximal tel que le morphisme

$$\kappa(\mathfrak{n}) \otimes_{K^{\Delta=0}} A^{\Delta=0} \longrightarrow \kappa(\mathfrak{n}) \otimes_{B^{\Delta=0}} (B \otimes_K A[f^{-1}])^{\Delta=0}, \tag{2.12}$$

déduit par changement de base du morphisme de $B^{\Delta=0}$-algèbres (2.10), est injectif mais non inversible rationnellement. (D'après [**39**, Proposition 9.6.1], le sous-ensemble des idéaux premiers de $B^{\Delta=0}$ satisfaisant à ces conditions est une partie constructible de $\mathrm{Spec}(B^{\Delta=0})$; elle est dense puisqu'elle contient les idéaux premiers minimaux de $B^{\Delta=0}$ vu les propriétés du morphisme (2.10). Ceci assure l'existence de $\mathfrak{n}$.) Soit S un quotient simple de la (K,Δ)-algèbre $B/\mathfrak{n}B$. Vu les propriétés du morphisme (2.11), le morphisme évident

$$S \otimes_{B^{\Delta=0}} (B \otimes_K A[f^{-1}])^{\Delta=0} \longrightarrow S \otimes_K A[f^{-1}], \tag{2.13}$$

est injectif.

Il est maintenant aisé de conclure. Considérons le triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd} S^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} A^{\Delta=0} \arrow[r] \arrow[dr] & S^{\Delta=0} \otimes_{B^{\Delta=0}} (B \otimes_K A[f^{-1}])^{\Delta=0} \arrow[d] \\ & S \otimes_K A[f^{-1}]. \end{tikzcd}$$

La flèche horizontale s'obtient par changement de base suivant $\kappa(\mathfrak{n}) \hookrightarrow S^{\Delta=0}$ du morphisme (2.12). Cette flèche est donc injective mais non inversible rationnellement. La flèche verticale est injective puisque le morphisme (2.13) est injectif. Il s'ensuit que le morphisme $S^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} A^{\Delta=0} \longrightarrow (S \otimes_K A[f^{-1}])^{\Delta=0}$ n'est pas inversible rationnellement. Or, d'après le corollaire 1.3.15, on sait que $S^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(S)^{\Delta=0}$. On a donc montré que le morphisme

$$\mathrm{Frac}(S)^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(A)^{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Frac}(S \otimes_K A)^{\Delta=0}$$

n'est pas inversible rationnellement, comme souhaité. ∎

Démonstration du théorème 2.2.1. — Supposons d'abord que la (K,Δ)-algèbre A est de type fini. Nous allons montrer qu'il existe une (K,Δ)-algèbre simple et de type fini S telle que la Δ-extension $\mathrm{Frac}(S)/K$ décompose maximalement A. On procède par l'absurde en supposant que, pour toute (K,Δ)-algèbre simple S, on peut trouver une (S,Δ)-algèbre intègre et de type fini T telle que le morphisme

$$\mathrm{Frac}(\mathrm{Frac}(T)^{\Delta=0} \otimes_{\mathrm{Frac}(S)^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(S \otimes_K A)^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Frac}(T \otimes_K A)^{\Delta=0}$$

n'est pas inversible. En appliquant la proposition 2.2.2, on peut supposer que $T \otimes_S \mathrm{Frac}(S)$ est simple. Puisque S est simple, ceci entraîne que T est aussi simple.

Ainsi, on peut construire une chaîne croissante de (K,Δ)-algèbres simples de type fini

$$S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \cdots \tag{2.14}$$

telle que les morphismes

$$\mathrm{Frac}(S_{n+1})^{\Delta=0} \otimes_{\mathrm{Frac}(S_n)^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(S_n \otimes_K A)^{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Frac}(S_{n+1} \otimes_K A)^{\Delta=0} \tag{2.15}$$

sont des inclusions strictes pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $L_n = \mathrm{Frac}(S_n)$, $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ et $L = \mathrm{Frac}(S)$. On pose

$$D_n = L^{\Delta=0} \otimes_{L_n^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L_n \otimes_K A)^{\Delta=0}.$$

Les morphismes (2.15) fournissent alors une chaîne d'inclusions strictes de $L^{\Delta=0}$-algèbres :

$$D_0 \subsetneq D_1 \subsetneq \cdots \subsetneq D_n \subsetneq D_{n+1} \subsetneq \cdots . \tag{2.16}$$

L'union des ces $L^{\Delta=0}$-algèbres n'est autre que la $L^{\Delta=0}$-algèbre $D = \mathrm{Frac}(L \otimes_K A)^{\Delta=0}$ qui est un produit fini d'extensions de type fini de $L^{\Delta=0}$ (d'après le théorème 1.3.10). Ceci entraîne que le chaîne (2.16) est nécessairement stationnaire, ce qui est contradictoire.

Supposons maintenant que A est une (K,Δ)-algèbre quelconque. Il existe une famille $(S_\alpha)_{\alpha\in I}$ de (K,Δ)-algèbres simples de type fini telle que pour toute sous-(K,Δ)-algèbre de type fini $A_0 \subset A$, il existe $\alpha_0 \in I$ tel que A_0 est maximalement décomposée par $\mathrm{Frac}(S_{\alpha_0})/K$. Il suffit alors de trouver une Δ-extension L/K contenant tous les S_α et telle que $L^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est une extension algébrique. Une façon de procéder est de munir l'ensemble I d'un bon ordre et de construire une famille de Δ-extensions $(L_\alpha/K)_{\alpha\in I}$ par récurrence transfinie en prenant pour L_α le corps des fractions d'un quotient simple de $(\bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta)\otimes_K S_\alpha$. (Voir la preuve de [**67**, Theorem 1] pour un argument similaire.) ■

On continue avec le résultat suivant qui est à la base de la notion de « noyau totalement décomposable » (voir la définition 2.2.5 ci-dessous).

Théorème 2.2.3. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et M/K une Δ-extension. Si L/K est une Δ-extension qui décompose maximalement M, posons*

$$N = \mathrm{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}) \cap M, \tag{2.17}$$

l'intersection étant prise dans $\mathrm{Frac}(L\otimes_K M)$ *modulo les identifications canoniques. On a alors les propriétés suivantes.*

(a) Le sous-corps $N \subset M$ ne dépend pas du choix de la Δ-extension qui décompose maximalement M.

(b) L'inclusion évidente $\mathrm{Frac}(L \otimes_K N)^{\Delta=0} \hookrightarrow \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}$ *est une bijection.*

(c) Le morphisme évident $\mathrm{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K N)^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Frac}(L \otimes_K N)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Pour démontrer (a), on se donne une Δ-extension L'/L et on appelle $N' \subset M$ le sous-corps obtenu à partir de L'/K à l'aide de la formule (2.17). On doit montrer que $N = N'$. Puisque L/K décompose maximalement M, on a $\mathrm{Frac}(L' \otimes_K M)^{\Delta=0} \simeq \mathrm{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0})$. Il s'ensuit que

$$N' = \mathrm{Frac}(L' \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}) \cap M.$$

Puisque le corps M est contenu dans $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M)$, on déduit que

$$N' \subset \mathrm{Frac}(L' \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}) \cap \mathrm{Frac}(L \otimes_K M) = \mathrm{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}).$$

(Pour établir l'égalité ci-dessus on part du carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} L \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0} & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(L \otimes_K M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L' \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0} & \longrightarrow & L' \otimes_L \mathrm{Frac}(L \otimes_K M) \end{array}$$

auquel on applique $\mathrm{Frac}(-)$. Le carré obtenu est alors cartésien car $\mathrm{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0})$ est une union filtrante de produits finis de corps.) Ceci entraîne immédiatement que $N' = N$.

On donne maintenant la preuve de (b). D'après le lemme 2.2.4 ci-dessous, la (L,Δ)-algèbre $\mathrm{Frac}(L\otimes_K N)$ est donnée par

$$\mathrm{Frac}(L \otimes_K \mathrm{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0})) \cap \mathrm{Frac}(L \otimes_K K \otimes_K M),$$

l'intersection étant prise dans $\mathrm{Frac}(L\otimes_K L\otimes_K M)$. (Pour une meilleure lisibilité nous n'avons pas identifié $K\otimes_K M$ et M dans la formule ci-dessus. De même, nous n'identifierons pas $K\otimes_K N$ et N dans la suite de la preuve de (b).) Il s'ensuit que

$$\mathrm{Frac}(L\otimes_K K\otimes_K N)^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(L\otimes_K \mathrm{Frac}(L\otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L\otimes_K M)^{\Delta=0}))^{\Delta=0} \cap \mathrm{Frac}(L\otimes_K K\otimes_K M)^{\Delta=0},$$

l'intersection étant prise dans $\mathrm{Frac}(L\otimes_K L\otimes_K M)^{\Delta=0}$. Or, on a des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} & \mathrm{Frac}(L\otimes_K \mathrm{Frac}(L\otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L\otimes_K M)^{\Delta=0}))^{\Delta=0} \\ \simeq\ & \mathrm{Frac}(\mathrm{Frac}(L\otimes_K L)^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L\otimes_K M)^{\Delta=0}) \\ \simeq\ & \mathrm{Frac}(L\otimes_K L\otimes_K M)^{\Delta=0}; \end{aligned}$$

le premier isomorphisme est une conséquence de la proposition 1.3.7 et le second est une conséquence du fait que L/K décompose maximalement M. On a donc obtenu l'égalité

$$\mathrm{Frac}(L\otimes_K K\otimes_K N)^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(L\otimes_K K\otimes_K M)^{\Delta=0}.$$

C'est ce qu'il fallait demontrer.

Il reste à vérifier (c). Par construction et en utilisant (b), on a $K\otimes_K N \subset \mathrm{Frac}(L\otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L\otimes_K N)^{\Delta=0})$, l'inclusion étant entre sous-anneaux de $L\otimes_K N$. On en déduit un morphisme canonique

$$L\otimes_K N \longrightarrow \mathrm{Frac}(L\otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L\otimes_K N)^{\Delta=0}).$$

En composant avec le morphisme dans (c), on trouve le morphisme évident $L\otimes_K N \longrightarrow \mathrm{Frac}(L\otimes_K N)$ qui est inversible rationnellement. Ceci montre que le morphisme dans (c) est surjectif. Or, on sait déjà qu'il est injectif. Ceci termine la preuve du théorème. ■

Lemme 2.2.4. — *Soient k un corps, C/k une extension et C_1, $C_2 \subset C$ des sous-corps contenant k. On note $C_3 = C_1 \cap C_2$. Alors, pour toute extension D/k, on a*

$$\mathrm{Frac}(D\otimes_k C_3) = \mathrm{Frac}(D\otimes_k C_1) \cap \mathrm{Frac}(D\otimes_k C_2),$$

l'intersection étant prise dans $\mathrm{Frac}(D\otimes_k C)$.

Démonstration. — Par un passage à la limite, on se ramène au cas où l'extension D/k est de type fini. Soit $D_0/k \subset D/k$ une sous-extension transcendante pure telle que D/D_0 est une extension finie. Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant 3$, on a $\mathrm{Frac}(D\otimes_k C_i) = D\otimes_{D_0} \mathrm{Frac}(D_0\otimes_k C_i)$. Puisque D est plat sur D_0, il suffit donc de démontrer le résultat pour D_0. Une récurrence immédiate nous ramène ensuite au cas de l'extension $k(t)/k$. Il s'agit alors de vérifier que $C_3(t) = C_1(t) \cap C_2(t)$, ce qui est immédiat. ■

Définition 2.2.5. — *Avec les notations et les hypothèses du théorème 2.2.3, le sous-Δ-corps $N \subset M$ sera appelé le* noyau totalement décomposable *de la Δ-extension M/K ; il sera noté M^{td} (ou $(M/K)^{\mathrm{td}}$ s'il y a besoin de préciser la dépendance en K).*

On dira qu'une Δ-extension M/K est totalement décomposable *si $M = M^{\mathrm{td}}$.*

Remarques 2.2.6. — Soient K un Δ-corps et M/K une Δ-extension.

(i) Par construction, on a $M^{\Delta=0} \subset M^{\mathrm{td}}$. Il s'ensuit que $(M^{\mathrm{td}})^{\Delta=0} = M^{\Delta=0}$.

(ii) La Δ-extension M/K est totalement décomposable si et seulement si il existe une Δ-extension L/K telle que $\mathrm{Frac}(L\otimes_K M) = \mathrm{Frac}(L\otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L\otimes_K M)^{\Delta=0})$. La condition est nécessaire par le théorème 2.2.3(c). Pour la réciproque, on remarque que si une telle Δ-extension L/K existe, elle décompose maximalement M/K et la formule (2.17) donne alors $M^{\mathrm{td}} = M$.

(iii) Pour toute Δ-extension L/K, on a $\mathrm{Frac}(L\otimes_K M^{\mathrm{td}})^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(L\otimes_K M)^{\Delta=0}$. Pour vérifier cela, on peut remplacer L/K par une Δ-extension plus grande. (En effet, si L'/L est une Δ-extension, on a
— $\mathrm{Frac}(L\otimes_K M^{\mathrm{td}})^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(L'\otimes_K M^{\mathrm{td}})^{\Delta=0} \cap \mathrm{Frac}(L\otimes_K M)$ et
— $\mathrm{Frac}(L\otimes_K M)^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(L'\otimes_K M)^{\Delta=0} \cap \mathrm{Frac}(L\otimes_K M)$,
les intersections étant prises dans $L'\otimes_K M$.) Or, une Δ-extension suffisamment grande décompose maximalement M/K et l'égalité recherchée est celle du théorème 2.2.3(b).

(iv) Soit M/K une Δ-extension totalement décomposable. Si $K' \subset M$ est un sous-Δ-corps contenant K, alors la Δ-extension M/K' est aussi totalement décomposable. (La réciproque est fausse même si on suppose que la Δ-extension K'/K est totalement décomposable.) Pour vérifier cela, on peut supposer que la Δ-extension K'/K est de type fini. Si L/K décompose totalement M, alors toute Δ-extension de K' qui figure comme facteur du produit fini de Δ-corps $\operatorname{Frac}(L \otimes_K K')$ décompose totalement la Δ-extension M/K'. □

Exemple 2.2.7. — Une Δ-extension algébrique est totalement décomposable. Pour voir cela, il suffit de traiter le cas d'une extension finie M/K. On prend alors L/K une clôture galoisienne de M/K de sorte que

$$L \otimes_K M = \operatorname{Frac}(L \otimes_K M) = \prod_{\sigma : M \hookrightarrow L} L \qquad \text{et} \qquad (L \otimes_K M)^{\Delta=0} = \prod_{\sigma : M \hookrightarrow L} L^{\Delta=0}.$$

Il s'ensuit que $L \otimes_K M = L \otimes_{L^{\Delta=0}} (L \otimes_K M)^{\Delta=0}$, ce qui entraîne que $M^{\mathrm{td}} = M$. □

Lemme 2.2.8. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et M/K et L/K des Δ-extensions. Alors, L/K décompose maximalement la (K, Δ)-algèbre M si et seulement si elle décompose maximalement la (K, Δ)-algèbre M^{td}.*

Démonstration. — Notons $N = M^{\mathrm{td}}$. Clairement, si la (K, Δ)-algèbre M est maximalement décomposée par L/K, alors il en est de même de N (voir la proposition 2.1.7). Réciproquement, supposons que la (K, Δ)-algèbre N est maximalement décomposée par L/K et fixons une Δ-extension L'/L telle que L'/K décompose maximalement M. Nous avons alors une chaîne d'isomorphismes canoniques :

$$\operatorname{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \operatorname{Frac}(L \otimes_K N)^{\Delta=0}) \simeq \operatorname{Frac}(L' \otimes_K N)^{\Delta=0} \simeq \operatorname{Frac}(L' \otimes_K M)^{\Delta=0}.$$

(Le premier isomorphisme traduit le fait que L/K décompose maximalement N et le second isomorphisme est celui du théorème 2.2.3(b).) Par ailleurs, nous avons des inclusions

$$\operatorname{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \operatorname{Frac}(L \otimes_K N)^{\Delta=0}) \hookrightarrow \operatorname{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \operatorname{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}) \hookrightarrow \operatorname{Frac}(L' \otimes_K M)^{\Delta=0}.$$

Il s'ensuit que ces inclusions sont des égalités. En particulier, on a un isomorphisme canonique

$$\operatorname{Frac}(L'^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} \operatorname{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}) \simeq \operatorname{Frac}(L' \otimes_K M)^{\Delta=0}.$$

Ceci étant vrai pour les Δ-extensions de L suffisamment grandes, c'est aussi vrai pour toutes les Δ-extensions L'/L (utiliser le lemme 2.1.8). Autrement dit, L/K décompose maximalement M. ■

Proposition 2.2.9. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et M/K une Δ-extension. Soit $M' \subset M$ un sous-Δ-corps contenant K. Alors, on a $M'^{\mathrm{td}} = M^{\mathrm{td}} \cap M'$.*

Démonstration. — En effet, soit L/K une Δ-extension qui décompose maximalement M/K et donc aussi M'/K. On note $N = M^{\mathrm{td}}$ et $N' = M'^{\mathrm{td}}$. On considère la (L, Δ)-algèbre

$$\operatorname{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \operatorname{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}) \cap \operatorname{Frac}(L \otimes_K M'). \tag{2.18}$$

C'est une union filtrante de produits finis de corps. On peut donc lui appliquer le corollaire 1.3.9 pour déduire qu'elle est égale à la (L, Δ)-algèbre obtenue en appliquant $\operatorname{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} -)$ à

$$\begin{aligned} & \operatorname{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \operatorname{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0})^{\Delta=0} \cap \operatorname{Frac}(L \otimes_K M')^{\Delta=0} \\ = \; & \operatorname{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0} \cap \operatorname{Frac}(L \otimes_K M')^{\Delta=0} \\ = \; & \operatorname{Frac}(L \otimes_K M')^{\Delta=0}. \end{aligned}$$

Ceci montre que (2.18) est égale à $\operatorname{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \operatorname{Frac}(L \otimes_K M'))$. On peut maintenant faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} M^{\mathrm{td}} \cap M' &= \operatorname{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \operatorname{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}) \cap M' \\ &= \operatorname{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \operatorname{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}) \cap \operatorname{Frac}(L \otimes_K M') \cap M' \\ &= \operatorname{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \operatorname{Frac}(L \otimes_K M')^{\Delta=0}) \cap M' = M'^{\mathrm{td}}. \end{aligned}$$

La proposition est démontrée. ■

Corollaire 2.2.10. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et M/K une Δ-extension. Si M/K est totalement décomposable, il en est de même de toutes ses sous-Δ-extensions.*

Démonstration. — C'est un cas particulier de la proposition 2.2.9. ■

Pour énoncer le prochain résultat et son corollaire, il sera commode d'étendre la notation introduite dans la définition 2.2.5. Ainsi, si M est une (K,Δ)-algèbre égale à un produit fini de Δ-extensions de K, on note M^{td} (ou $(M/K)^{\mathrm{td}}$) le produit des noyaux totalement décomposables des facteurs de M. On étend ceci, de la manière évidente, aux (K,Δ)-algèbres colimites filtrantes de produits finis de Δ-extensions de K.

Lemme 2.2.11. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et K'/K et M/K des Δ-extensions. Alors, il existe un isomorphisme évident*

$$\mathrm{Frac}(K' \otimes_K (M/K)^{\mathrm{td}}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Frac}(K' \otimes_K M)/K')^{\mathrm{td}}.$$

Démonstration. — On pose $M' = \mathrm{Frac}(K' \otimes_K M)$. Fixons une Δ-extension L'/K' qui décompose maximalement la (K',Δ)-algèbre M'. Quitte à élargir L', peut supposer que la Δ-extension L'/K décompose maximalement le (K,Δ)-corps M. Dans ce cas, on a

$$\begin{array}{rcl} M'^{\mathrm{td}} & = & \mathrm{Frac}(L' \otimes_{L'^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L' \otimes_{K'} M')^{\Delta=0}) \cap M' \\ & = & \mathrm{Frac}(L' \otimes_{L'^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L' \otimes_K M)^{\Delta=0}) \cap M' \\ & = & \mathrm{Frac}(L' \otimes_{L'^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L' \otimes_K M^{\mathrm{td}})^{\Delta=0}) \cap M' \\ & \subset & \mathrm{Frac}(L' \otimes_K M^{\mathrm{td}}) \cap \mathrm{Frac}(K' \otimes_K M) = \mathrm{Frac}(K' \otimes_K M^{\mathrm{td}}). \end{array}$$

Ceci fournit une inclusion $M'^{\mathrm{td}} \subset \mathrm{Frac}(K' \otimes_K M^{\mathrm{td}})$. L'inclusion réciproque est immédiate. ■

Corollaire 2.2.12. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et M_1/K et M_2/K des Δ-extensions. Alors, il existe un isomorphisme évident*

$$\mathrm{Frac}((M_1/K)^{\mathrm{td}} \otimes_K (M_2/K)^{\mathrm{td}}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Frac}(M_1 \otimes_K M_2)/K)^{\mathrm{td}}.$$

Démonstration. — En effet, grâce au lemme 2.2.11, on a

$$(\mathrm{Frac}(M_1 \otimes_K M_2)/K)^{\mathrm{td}} \subset (\mathrm{Frac}(M_1 \otimes_K M_2)/M_1)^{\mathrm{td}} = \mathrm{Frac}(M_1 \otimes_K (M_1/K)^{\mathrm{td}}).$$

Par symétrie, on obtient également $(\mathrm{Frac}(M_1 \otimes_K M_2)/K)^{\mathrm{td}} \subset \mathrm{Frac}((M_1/K)^{\mathrm{td}} \otimes_K M_2)$. Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{Frac}(M_1 \otimes_K M_2)/K)^{\mathrm{td}} & \subset & \mathrm{Frac}(M_1 \otimes_K (M_1/K)^{\mathrm{td}}) \cap \mathrm{Frac}((M_1/K)^{\mathrm{td}} \otimes_K M_2) \\ & = & \mathrm{Frac}((M_1/K)^{\mathrm{td}} \otimes_K (M_2/K)^{\mathrm{td}}). \end{array}$$

L'inclusion réciproque est immédiate. ■

Proposition 2.2.13. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et M/K une Δ-extension. Soient M_1, $M_2 \subset M$ des sous-Δ-corps contenant K et supposons que le Δ-corps M est engendré par M_1 et M_2. Supposons enfin que $(M_2)^{\mathrm{td}} = M_2$. Alors, le Δ-corps M^{td} est engendré par $(M_1)^{\mathrm{td}}$ et M_2. De plus, une Δ-extension L/K décompose maximalement M si et seulement si elle décompose maximalement M_1 et M_2.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que la Δ-extension M/K est de type fini. (Utiliser le corollaire 2.2.10.) On note $N_1 = (M_1)^{\mathrm{td}}$ et $N = M^{\mathrm{td}}$. Clairement, N contient N_1 et M_2 ; il contient donc le sous-Δ-corps $N' \subset M$ engendré par N_1 et M_2. Le but est de montrer que $N' = N$. Soit L/K une Δ-extension qui décompose maximalement M (et donc aussi M_1 et M_2). Il suffit de montrer que l'inclusion

$$\mathrm{Frac}(L \otimes_K N') \hookrightarrow \mathrm{Frac}(L \otimes_K N) \tag{2.19}$$

est une bijection. D'après le théorème 2.2.3(c), on a

$$\mathrm{Frac}(L \otimes_K N) = \mathrm{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K N)^{\Delta=0}). \tag{2.20}$$

Puisque $N' \subset N$, le corollaire 2.2.10 entraîne que la Δ-extension N'/K est totalement décomposée. On a donc également

$$\mathrm{Frac}(L \otimes_K N') = \mathrm{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K N')^{\Delta=0}). \tag{2.21}$$

Ainsi, il est suffisant de montrer que l'inclusion

$$\mathrm{Frac}(L \otimes_K N')^{\Delta=0} \hookrightarrow \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0} \tag{2.22}$$

est une bijection. Or, le produit fini de Δ-corps $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M)$ est engendré par $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M_1)$ et $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M_2)$. Puisque M_2 est totalement décomposable, on a $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M_2) = \mathrm{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M_2)^{\Delta=0})$. Ceci montre que le produit fini de Δ-corps $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M)$ est en fait engendré par $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M_1)$ et $\mathrm{Frac}(L \otimes_K$

$M_2)^{\Delta=0}$. Le corollaire 1.3.8 entraîne aussitôt que le produit fini de corps $\mathrm{Frac}(L\otimes_K M)^{\Delta=0}$ est engendré par $\mathrm{Frac}(L\otimes_K M_1)^{\Delta=0}$ et $\mathrm{Frac}(L\otimes_K M_2)^{\Delta=0}$. Or, ces deux produits finis de corps sont dans l'image de (2.22). Ceci montre que (2.22) est une bijection. ■

Proposition 2.2.14. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et M/K une Δ-extension de type fini. Alors, l'extension (et non seulement la Δ-extension) M^{td}/K est de type fini. En particulier, son degré de transcendance est fini.*

Démonstration. — Notons $N = M^{\mathrm{td}}$ et fixons une Δ-extension L/K qui décompose maximalement M. La Δ-extension N/K est de type fini puisqu'elle est contenue dans M/K. Il s'ensuit que le produit fini de Δ-extensions $\mathrm{Frac}(L\otimes_K N)/L$ est aussi de type fini. Le théorème 1.3.10 entraîne donc que le produit fini d'extensions $\mathrm{Frac}(L\otimes_K N)^{\Delta=0}/L^{\Delta=0}$ est de type fini. Or, d'après le théorème 2.2.3(c), on a

$$\mathrm{Frac}(L\otimes_K N) = \mathrm{Frac}(L\otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L\otimes_K N)^{\Delta=0}).$$

Le produit fini d'extensions (et non seulement le produit fini de Δ-extensions !) $\mathrm{Frac}(L\otimes_K N)/L$ est donc de type fini, ce qui entraîne que l'extension N/K est aussi de type fini. ■

Proposition 2.2.15. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, L/K une Δ-extension et A une (K,Δ)-algèbre intègre de type fini. On suppose que la Δ-extension $\mathrm{Frac}(A)/K$ est totalement décomposée par L/K. Il existe alors un ouvert dense $U\subset \mathrm{Spec}(A)$ tel que pour tout Δ-idéal premier $\mathfrak{p}\in U$, la Δ-extension $\kappa(\mathfrak{p})/K$ est totalement décomposée par L/K.*

Démonstration. — D'après le théorème 1.2.1 et la proposition 2.2.14, on peut, quitte à localiser A, supposer que la K-algèbre (et non seulement la (K,Δ)-algèbre) A est de type fini. On note $B = L\otimes_K A$; c'est une L-algèbre (et non seulement une (L,Δ)-algèbre) de type fini. Puisque la Δ-extension $\mathrm{Frac}(A)/K$ est totalement décomposée par L/K, on a

$$\mathrm{Frac}(B) \simeq \mathrm{Frac}(L\otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(B)^{\Delta=0}). \tag{2.23}$$

Par ailleurs, d'après le théorème 1.3.11, il existe un non diviseur de zéro $f\in B$ tel que $\mathrm{Frac}(B[f^{-1}]^{\Delta=0}) = \mathrm{Frac}(B)^{\Delta=0}$. Il s'ensuit que le morphisme canonique

$$L\otimes_{L^{\Delta=0}} B[f^{-1}]^{\Delta=0} \longrightarrow B[f^{-1}] \tag{2.24}$$

est un isomorphisme rationnellement, i.e., après application de $\mathrm{Frac}(-)$. Puisque la source et le but de (2.24) sont des L-algèbres (et non seulement des (L,Δ)-algèbres) de type fini, il existe un non diviseur de zéro $g\in L\otimes_{L^{\Delta=0}} B[f^{-1}]^{\Delta=0}$ tel que (2.24) induit un isomorphisme

$$(L\otimes_{L^{\Delta=0}} B[f^{-1}]^{\Delta=0})[g^{-1}] \xrightarrow{\sim} B[(gf)^{-1}]. \tag{2.25}$$

Le morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(B)\longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est ouvert (voir le lemme 1.3.14). Soit $U\subset \mathrm{Spec}(A)$ l'image de $\mathrm{Spec}(B[(gf)^{-1}])$ par ce morphisme ; c'est un ouvert dense de $\mathrm{Spec}(A)$. Si $\mathfrak{p}\in U$ est un Δ-idéal, on déduit de (2.25) une surjection de (L,Δ)-algèbres

$$(L\otimes_{L^{\Delta=0}} B[f^{-1}]^{\Delta=0})[g^{-1}] \twoheadrightarrow B/\mathfrak{p}B[(gf)^{-1}] = L\otimes_K (A/\mathfrak{p})[(gf)^{-1}]. \tag{2.26}$$

Il en découle aussitôt que la (L,Δ)-algèbre $L\otimes_K (A/\mathfrak{p})[(gf)^{-1}]$ est engendrée par les inverses de g et f, et par l'image de $B[f^{-1}]^{\Delta=0}$ par (2.26). Or l'image de $B[f^{-1}]^{\Delta=0}$ est contenue dans le sous-anneau des constantes. On obtient ainsi que le produit de (L,Δ)-corps $\mathrm{Frac}(L\otimes_K (A/\mathfrak{p}))$ est engendré par ses constantes. Autrement dit, on a

$$\mathrm{Frac}(L\otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L\otimes_K (A/\mathfrak{p}))^{\Delta=0}) = \mathrm{Frac}(L\otimes_K (A/\mathfrak{p})). \tag{2.27}$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

2.3. Extensions subordonnées. —

Le but de cette sous-section est de démontrer le résultat suivant et d'en tirer quelques conséquences.

Théorème 2.3.1. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et L/K une Δ-extension. Il existe alors une Δ-extension M/K qui satisfait aux propriétés suivantes.*

(a) M est totalement décomposée par L/K.

(b) $M^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est un extension algébrique.

(c) *Si M'/K est une Δ-extension qui satisfait aux conditions (a) et (b) ci-dessus, il existe une inclusion de Δ-extensions $M'/K \hookrightarrow M/K$.*

De plus, M/K est unique à un isomorphisme non canonique près et $M^{\Delta=0}$ est une clôture algébrique de $K^{\Delta=0}$. Si la Δ-extension L/K est de type fini, alors M est isomorphe au corps des fractions d'une $(K \otimes_{K^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}, \Delta)$-algèbre simple de type fini.

La preuve du théorème 2.3.1 utilise une propriété importante des Δ-extensions totalement décomposables que nous devons d'abord établir.

Proposition 2.3.2. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et M/K une Δ-extension de type fini et totalement décomposable. Alors, M est isomorphe au corps des fractions d'une $(\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}), \Delta)$-algèbre simple de type fini.*

Démonstration. — Puisque $M/\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0})$ est aussi une Δ-extension totalement décomposable (voir la remarque 2.2.6(iv)), on peut remplacer K par $\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0})$ et supposer que $M^{\Delta=0} = K^{\Delta=0}$. On fixe $A \subset M$ une sous-(K,Δ)-algèbre de type fini telle que $\mathrm{Frac}(A) = M$. D'après le théorème 1.2.1 et la proposition 2.2.14, on peut remplacer A par une localisation et supposer que la K-algèbre (et non seulement la (K,Δ)-algèbre) A est de type fini. Il s'agit de montrer qu'en localisant d'avantage A, on obtient une (K,Δ)-algèbre simple.

D'après le théorème 2.2.1, il existe une Δ-extension L/K qui décompose totalement M et telle que $L = \mathrm{Frac}(B)$ avec B une (K,Δ)-algèbre simple de type fini. On pose $C = B \otimes_K A$ et $N = \mathrm{Frac}(C) = \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)$. En utilisant que $B^{\Delta=0} = L^{\Delta=0}$ (voir le corollaire 1.3.15), on a aussi

$$N = \mathrm{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}) = \mathrm{Frac}(B \otimes_{B^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}). \tag{2.28}$$

Nous allons construire un morphisme de (K,Δ)-algèbres $A[h^{-1}] \longrightarrow B \otimes_{B^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}[l^{-1}]$, avec $h \in A \smallsetminus \{0\}$ et $l \in B \otimes_{B^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}$, tel que le morphisme de schémas affines associé

$$\mathrm{Spec}(B \otimes_{B^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}[l^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A[h^{-1}]) \tag{2.29}$$

est surjectif. Ceci permettra de conclure. En effet, d'après le lemme 2.3.3 ci-dessous, la (K,Δ)-algèbre $Q = B \otimes_{B^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}[l^{-1}]$ est simple. Ainsi, si $0 \subsetneq J \subsetneq A[h^{-1}]$ est un Δ-idéal, on a nécessairement $J \cdot Q = Q$, ce qui contredit la surjectivité du morphisme de K-schémas (2.29).

On divise le reste de la preuve en deux parties.

Partie A. — D'après le théorème 1.3.11, on peut trouver un non diviseur de zéro $f \in C$ tel que $N^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(C[f^{-1}]^{\Delta=0})$. Vu les égalités (2.28), on a

$$N = \mathrm{Frac}(B \otimes_{B^{\Delta=0}} C[f^{-1}]^{\Delta=0}). \tag{2.30}$$

Le théorème 1.3.11 permet aussi de supposer que la $K^{\Delta=0}$-algèbre $C[f^{-1}]^{\Delta=0}$ est de type fini. Considérons le morphisme

$$B \otimes_{B^{\Delta=0}} C[f^{-1}]^{\Delta=0} \longrightarrow C[f^{-1}]. \tag{2.31}$$

Puisque $B^{\Delta=0} = L^{\Delta=0}$ est une extension finie de $K^{\Delta=0}$, la proposition 1.3.3 entraîne que le morphisme (2.31) est injectif. Puisque A est une K-algèbre (et non seulement une (K,Δ)-algèbre) de type fini, le B-morphisme (2.31) est de type fini. Or, d'après (2.30), il induit un isomorphisme rationnellement. On peut donc trouver des non diviseurs de zéro $g \in C$ et $l_0 \in B \otimes_{B^{\Delta=0}} C[f^{-1}]$ tel que (2.31) induit un isomorphisme

$$B \otimes_{B^{\Delta=0}} C[f^{-1}]^{\Delta=0}[l_0^{-1}] \simeq C[(gf)^{-1}]. \tag{2.32}$$

Partie B. — Considérons maintenant le morphisme

$$A \otimes_{A^{\Delta=0}} C[f^{-1}]^{\Delta=0} \longrightarrow C[f^{-1}]. \tag{2.33}$$

Puisque $A^{\Delta=0} = M^{\Delta=0} = K^{\Delta=0}$, la proposition 1.3.3 entraîne que le morphisme (2.33) est injectif. On rappelle que la K-algèbre (et non seulement la (K,Δ)-algèbre) A est de type fini. D'après le théorème 1.2.1 et quitte à remplacer f par un multiple convenable, la K-algèbre $C[f^{-1}]$ possède une sous-K-algèbre de type fini S, contenant l'image de (2.33) et telle que $C[f^{-1}]$ est une union filtrante de S-algèbres fidèlement plates et de type fini. On peut donc supposer que le non diviseur de zéro $g \in C$, choisi ci-dessus, rend le morphisme de K-schémas

$$\mathrm{Spec}(C[(gf)^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A \otimes_{A^{\Delta=0}} C[f^{-1}]^{\Delta=0}) \tag{2.34}$$

ouvert. Notons $V \subset \mathrm{Spec}(A \otimes_{A^{\Delta=0}} C[f^{-1}]^{\Delta=0})$ l'ouvert dense égal à l'image de (2.34). D'autre part, la projection

$$\mathrm{Spec}(A \otimes_{A^{\Delta=0}} C[f^{-1}]^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \tag{2.35}$$

est un morphisme plat et de type fini. C'est donc également un morphisme ouvert. Notons $U \subset \mathrm{Spec}(A)$ l'ouvert dense égal à l'image de V par (2.35).

Considérons à présent le morphisme

$$\mathrm{Spec}(A \otimes_{A^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A \otimes_{A^{\Delta=0}} C[f^{-1}]^{\Delta=0}). \tag{2.36}$$

(On rappelle que $N = \mathrm{Frac}(C)$ et $N^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(C[f^{-1}]^{\Delta=0})$.) Les fibres du morphisme (2.35) rencontrent l'image de l'inclusion (2.36) en des parties denses. Ainsi, si $W \subset \mathrm{Spec}(A \otimes_{A^{\Delta=0}} N^{\Delta=0})$ désigne l'image inverse de V par (2.36), alors l'image de W par la projection

$$\mathrm{Spec}(A \otimes_{A^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \tag{2.37}$$

n'est autre que l'ouvert $U \subset \mathrm{Spec}(A)$. Puisque V est l'image du morphisme (2.34), W est l'image du morphisme

$$\mathrm{Spec}(C[(gf)^{-1}] \otimes_{C[f^{-1}]^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A \otimes_{A^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}). \tag{2.38}$$

On déduit de ce qui précède que l'image du morphisme

$$\mathrm{Spec}(C[(gf)^{-1}] \otimes_{C[f^{-1}]^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \tag{2.39}$$

est égale à $U \subset \mathrm{Spec}(A)$. En utilisant l'isomorphisme (2.32) de la partie A, on peut réécrire le morphisme (2.39) de la manière suivante

$$\mathrm{Spec}(B \otimes_{B^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}[l_0^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \tag{2.40}$$

et l'image de ce morphisme est l'ouvert dense $U \subset \mathrm{Spec}(A)$. Soit $h \in A \smallsetminus \{0\}$ tel que $\mathrm{Spec}(A[h^{-1}]) \subset U$ et appelons $l \in B \otimes_{B^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}$ le produit de l_0 et du numérateur de l'image de h dans $B \otimes_{B^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}[l_0^{-1}]$. On a construit ainsi un morphisme de (K, Δ)-algèbres $A[h^{-1}] \longrightarrow B \otimes_{B^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}[l^{-1}]$ induisant une surjection sur les schémas affines associés. Ceci termine la preuve. ■

Lemme 2.3.3. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et A une (K, Δ)-algèbre simple. On note $C = A^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(A)^{\Delta=0}$ (voir le corollaire 1.3.15). Si D/C est une extension, alors $A \otimes_C D$ est encore une (K, Δ)-algèbre simple.*

Démonstration. — Puisque C est algébriquement clos dans A, l'anneau $A \otimes_C D$ est intègre. Soit $J \subsetneq A \otimes_C D$ un Δ-idéal et montrons que $J = 0$. Pour cela, nous pouvons supposer que J est maximal. En particulier $R = (A \otimes_C D)/J$ est intègre. Puisque la (K, Δ)-algèbre A est supposée simple, le morphisme $A \longrightarrow R$ est nécessairement injectif. Il induit donc un morphisme de (K, Δ)-corps $\mathrm{Frac}(A) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(R)$. Il est clair que le Δ-corps $\mathrm{Frac}(R)$ est engendré par $\mathrm{Frac}(A)$ et D. Le corollaire 1.3.8 entraîne alors que $\mathrm{Frac}(R)^{\Delta=0} = D$. D'après la proposition 1.3.3, le morphisme canonique $\mathrm{Frac}(A) \otimes_C D \longrightarrow \mathrm{Frac}(R)$ est injectif. Il en découle que le morphisme canonique $A \otimes_C D \longrightarrow R$ est également injectif. Autrement dit, on a bien $J = 0$. ■

Le second ingrédient dans la preuve du théorème 2.3.1 est le résultat suivant.

Proposition 2.3.4. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et L/K une Δ-extension de type fini. Soit M/K une Δ-extension totalement décomposée par L/K. Alors, la Δ-extension (et donc aussi l'extension) $M/\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0})$ est de type fini.*

Démonstration. — D'après la remarque 2.2.6(iv), on peut remplacer K par $\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0})$ et supposer que $K^{\Delta=0} = M^{\Delta=0}$. Dans ce cas, il faut montrer que l'extension M/K est de type fini. (D'après la proposition 2.2.14, ceci équivaut à la type finitude de la Δ-extension M/K.)

Puisque L est une Δ-extension de type fini, tout facteur direct du produit fini de Δ-corps $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M)$ est une Δ-extension de type fini de M. Le théorème 1.3.10 entraîne alors que la $M^{\Delta=0}$-algèbre $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}$

est un produit fini d'extensions de type fini de $M^{\Delta=0}$. Puisque $M^{\Delta=0} = K^{\Delta=0} \subset L^{\Delta=0}$, il s'ensuit que la $L^{\Delta=0}$-algèbre $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}$ est un produit fini d'extensions de type fini de $L^{\Delta=0}$. Comme L/K décompose totalement M/K, on a $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M) = L \otimes_{L^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}$. Ceci montre que la L-algèbre (et non seulement la (L, Δ)-algèbre) $\mathrm{Frac}(L \otimes_K M)$ est un produit fini d'extensions de type fini de L. Ceci entraîne que l'extension (et non seulement la Δ-extension) M/K est de type fini. ■

Démonstration du théorème 2.3.1. — On divise la preuve en deux parties.

Partie A. — On traite ici le cas où la Δ-extension L/K est de type fini. Considérons la catégorie $\mathcal{E}$ ayant pour objets les Δ-extensions M/K totalement décomposées par L/K et telles que $M^{\Delta=0}$ est une clôture algébrique de $K^{\Delta=0}$. La catégorie $\mathcal{E}$ est non vide puisqu'elle contient la Δ-extension $K \otimes_{K^{\Delta=0}} \overline{K^{\Delta=0}}/K$ avec $\overline{K^{\Delta=0}}$ une clôture algébrique de $K^{\Delta=0}$. Supposons donnée une chaîne de morphismes

$$M_0/K \hookrightarrow M_1/K \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow M_n/K \hookrightarrow M_{n+1}/K \hookrightarrow \cdots$$

dans $\mathcal{E}$ et notons $M = \bigcup_n M_n$. Alors, la Δ-extension M/K est totalement décomposée par L/K. D'après la proposition 2.3.4, l'extension $M/K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}$ est de type fini. Puisque $\overline{K^{\Delta=0}} \simeq M_n^{\Delta=0} \simeq M^{\Delta=0}$, il existe alors un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M_n = M_{n+1}$ pour $n \geqslant n_0$. La catégorie $\mathcal{E}$ possède donc des objets maximaux. (On dit qu'un objet est maximal si toute flèche partant de cet objet est inversible.)

Fixons une Δ-extension $M/K \in \mathcal{E}$ maximale. Nous allons montrer que la condition (c) est satisfaite. Soit $A' \subset M'$ une sous-$(K \otimes_{K^{\Delta=0}} M'^{\Delta=0}, \Delta)$-algèbre simple de type fini telle que $M' = \mathrm{Frac}(A')$. (Une telle algèbre existe par la proposition 2.3.2.) L'extension $M'^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ étant algébrique, nous pouvons fixer un plongement $M'^{\Delta=0}/K^{\Delta=0} \hookrightarrow M^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$. Ce plongement induit une inclusion $K \otimes_{K^{\Delta=0}} M'^{\Delta=0} \hookrightarrow M$. (Rappelons que nous avons aussi un plongement canonique $K \otimes_{K^{\Delta=0}} M'^{\Delta=0} \hookrightarrow M'$ dont l'image est contenue dans A'.) Notons $K' = K \otimes_{K^{\Delta=0}} M'^{\Delta=0}$ et $B' = A' \otimes_{K'} M$. Remarquons que B' est une (M, Δ)-algèbre de type fini et fixons un quotient simple $B' \twoheadrightarrow B$. On note $N = \mathrm{Frac}(B)$. Alors $N^{\Delta=0}$ est une clôture algébrique de $K^{\Delta=0}$.

Puisque la (K, Δ)-algèbre A' est simple, le morphisme évident $A' \longrightarrow B$ est injectif. Il induit donc un morphisme de (K, Δ)-corps $M' = \mathrm{Frac}(A') \hookrightarrow \mathrm{Frac}(B) = N$. Par ailleurs, on a aussi une inclusion $M \hookrightarrow N$. De plus, le Δ-corps N est engendré par M et M'. D'après la proposition 2.2.13, la Δ-extension N/K est totalement décomposée par L/K. Par la maximalité de M, on déduit que $M = N$. En particulier, M'/K est une sous-Δ-extension de M/K.

Montrons enfin l'unicité à isomorphisme près de la Δ-extension M/K. Soit M_1/K une Δ-extension satisfaisant aux conditions (a)–(c) de l'énoncé. La condition (c), appliquée à M/K et M_1/K, fournit des morphismes de Δ-extensions

$$\iota : M_1/K \hookrightarrow M/K \qquad \text{et} \qquad \iota_1 : M/K \hookrightarrow M_1/K.$$

Il suffit donc de montrer que $\sigma = \iota \circ \iota_1$ est inversible. Pour cela, on forme le (K, Δ)-corps

$$H = \mathrm{colim}\,\{M \overset{\sigma}{\hookrightarrow} M \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \cdots \overset{\sigma}{\hookrightarrow} M \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \cdots\}. \tag{2.41}$$

La Δ-extension H/K est totalement décomposée par L/K. Puisque $M^{\Delta=0}$ est une clôture algébrique de $K^{\Delta=0}$, on déduit que $\sigma : M^{\Delta=0} \hookrightarrow M^{\Delta=0}$ est un isomorphisme. Il s'ensuit que $M^{\Delta=0} \simeq H^{\Delta=0}$ et en particulier, $H^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est une extension algébrique. La proposition 2.3.4 entraîne que la Δ-extension $H/K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}$ est de type fini. La colimite dans (2.41) est donc nécessairement stationnaire. Autrement dit, l'inclusion $\sigma : M \hookrightarrow M$ est bijective.

Partie B. — On traite maintenant le cas d'une Δ-extension L/K arbitraire. On note $\{L_\alpha/K;\ \alpha \in I\}$ l'ensemble des sous-Δ-extensions de type fini de L/K. Pour chaque $\alpha \in I$, on fixe une Δ-extension M_α/K satisfaisant aux conditions (a)–(c) de l'énoncé. On peut supposer que $M_\alpha^{\Delta=0} = \overline{K^{\Delta=0}}$ avec $\overline{K^{\Delta=0}}$ une clôture algébrique fixée de $K^{\Delta=0}$. On pose $\overline{K} = K \otimes_{K^{\Delta=0}} \overline{K^{\Delta=0}}$. Alors, M_α est le corps des fractions d'une $(\overline{K}, \Delta)$-algèbre simple de type fini A_α.

On muni I d'un bon ordre et on construit, par récurrence transfinie, une famille croissante de Δ-extensions $(M_{\leqslant\alpha}/\overline{K})_{\alpha \in I}$ de la manière suivante. Pour $\alpha \in I$, on pose $M_{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ et on prend pour $M_{\leqslant\alpha}$ le corps des fractions d'un quotient simple de $M_{<\alpha} \otimes_{\overline{K}} A_\alpha$. On pose alors $M = \bigcup_{\alpha \in I} M_{\leqslant\alpha}$. Par construction, on a des morphismes $A_\alpha \longrightarrow M$. Ils sont injectifs puisque les A_α sont simples. Il s'ensuit des morphismes de $(\overline{K}, \Delta)$-corps $M_\alpha \hookrightarrow M$ et leurs images engendrent le Δ-corps M. Or, les Δ-extensions M_α/K sont totalement décomposées par L/K. La proposition 2.2.13 et un argument de passage à la colimite entraînent alors que la Δ-extension M/K est totalement décomposée par L/K.

D'autre part, par construction, l'extension $M^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est algébrique ; c'est même une clôture algébrique de $K^{\Delta=0}$. Pour terminer, il reste donc à montrer que la Δ-extension M/K satisfait à la condition (c) et qu'elle est unique à un isomorphisme près.

Soit M'/K une Δ-extension totalement décomposée par L/K et telle que $M'^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est une extension algébrique. On cherche à construire une inclusion $M'/K \hookrightarrow M/K$. On va d'abord construire un Δ-corps M'' qui contient M' et M. On pose $\overline{M}' = M' \otimes_{M'^{\Delta=0}} \overline{K^{\Delta=0}}$ (pour un choix d'un plongement $M'^{\Delta=0} \hookrightarrow \overline{K^{\Delta=0}}$). On construit par récurrence transfinie une famille $(M''_{\leqslant\alpha}/\overline{M}')_{\alpha\in I}$ de Δ-extensions telles que $M_{\leqslant\alpha} \subset M''_{\leqslant\alpha}$. Pour $\alpha \in I$ on pose $M''_{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} M''_\beta$ et on prend pour $M''_{\leqslant\alpha}$ le corps des fractions d'un quotient simple de $M''_{<\alpha} \otimes_{\overline{K}} A_\alpha$ qui contient le quotient simple de $M_{<\alpha} \otimes_{\overline{K}} A_\alpha$ utilisé précédemment. (Précisons que si $\alpha \in I$ est le plus petit élément, alors $M''_{<\alpha} = \overline{M}'$.) On pose $M'' = \bigcup_{\alpha\in I} M''_{\leqslant\alpha}$. Le (K, Δ)-corps M'' contient M et M' qui l'engendrent. La proposition 2.2.13 entraîne alors que la Δ-extension M'' est totalement décomposée par L/K. On note aussi que $M''^{\Delta=0} \simeq \overline{K^{\Delta=0}}$.

Pour conclure, il suffit de montrer l'assertion suivante. Si M_1/M une Δ-extension telle que $M_1^{\Delta=0} = M^{\Delta=0}$ et telle que M_1/K est totalement décomposable par L/K, alors $M_1 = M$. Ceci démontrera aussi l'unicité de M/K à isomorphisme près en adaptant le raisonnement utilisé à la fin de la partie A.

Soit $N/K \subset M_1/K$ une sous-Δ-extension de type fini. On montera que $N \subset M$ ce qui terminera la preuve. Il existe une sous-Δ-extension de type fini $L_0/K \subset L/K$ qui décompose totalement N/K. Soit M_0/K une Δ-extension satisfaisant aux conditions (a)–(c) par rapport à L_0/K. Par la construction de M, on dispose d'une injection $M_0 \hookrightarrow M$. Considérons le sous-Δ-corps $M'_0 \subset M'$ engendré par N et M_0. D'après la proposition 2.2.13, L_0/K décompose totalement M'_0/K. Puisque $M_0'^{\Delta=0} \subset M'^{\Delta=0}$, on déduit que l'extension $M_0'^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est algébrique. D'après la partie A de la preuve, on a nécessairement $M'_0 = M_0$. Ceci montre que $N \subset M_0$ et termine la démonstration du théorème. ■

Définition 2.3.5. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et L/K et M/K des Δ-extensions. Nous dirons que M/K est* subordonnée *à L/K si elle vérifie les conditions (a)–(c) du théorème 2.3.1. Nous dirons que M/K est* potentiellement subordonnée *à L/K si l'extension $M^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est algébrique et si la Δ-extension $M \otimes_{M^{\Delta=0}} \overline{M^{\Delta=0}}/K$, avec $\overline{M^{\Delta=0}}$ une clôture algébrique de $M^{\Delta=0}$, est subordonnée à L/K.*

Remarque 2.3.6. — Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et L/K une Δ-extension de type fini. Alors, L/K possède des Δ-extensions de type fini qui lui sont potentiellement subordonnées. En effet soit M/K une Δ-extension potentiellement subordonnée à L/K. D'après la proposition 2.3.4, M est de type fini sur $K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}$. Soit $M_0 \subset M$ un sous-(K, Δ)-corps engendré par un ensemble fini de générateurs de la Δ-extension $M/K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}$. On a alors $M_0 \otimes_{M_0^{\Delta=0}} M^{\Delta=0} \simeq M$ ce qui entraîne que M_0/K est potentiellement subordonnée à L/K. □

Corollaire 2.3.7. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle.*

(i) Soient L/K une Δ-extension, M/K une Δ-extension potentiellement subordonnée à L/K, et N/K une Δ-extension totalement décomposée par L/K et telle que l'extension $N^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est algébrique. Alors, tout (K, Δ)-morphisme $M \hookrightarrow N$ induit un isomorphisme $M \otimes_{M^{\Delta=0}} N^{\Delta=0} \simeq N$.

(ii) Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et L/K et N/K des Δ-extensions. On suppose que l'extension $N^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est algébrique. Soient M/K une Δ-extension subordonnée à L/K et $\sigma_1, \sigma_2 : M \hookrightarrow N$ des morphismes de (K, Δ)-corps. Alors, les images de σ_1 et σ_2 sont égales.

(iii) Soient L/K et L'/L des Δ-extensions et soient M/K et M'/K des Δ-extensions subordonnées à L/K et L'/K respectivement. Alors, M/K est isomorphe à une unique sous-Δ-extension de M'/K.

(iv) *Soit L/K une Δ-extension. Alors, une Δ-extension M/K est subordonnée à L/K si et seulement si elle vérifie les conditions (a) et (b) du théorème 2.3.1 et si, pour toute sous-Δ-extension de type fini $L'/K \subset L/K$, elle contient une sous-Δ-extension $M'/K \subset M/K$ qui est subordonnée à L'/K.*

Démonstration. — D'après la partie A de la preuve du théorème 2.3.1, l'assertion (ii) est satisfaite lorsque L/K est de type fini. On peut donc parler de *la* sous-Δ-extension subordonnée à L/K dans N/K.

D'après la partie B de la preuve du théorème 2.3.1, une Δ-extension M/K subordonnée à L/K est engendrée par les sous-Δ-extensions de M/K subordonnées aux sous-Δ-extensions de type fini de L/K. La propriété (iv) découle aussitôt. (Utiliser la propriété (c) du théorème 2.3.1.) De même, il s'ensuit que tout endomorphisme d'une Δ-extension subordonnée à une autre est un automorphisme. On peut utiliser cela pour démontrer (i). On se ramène aussitôt au cas où M/K est subordonnée (et non seulement potentiellement subordonnée) à L/K. Grâce à la propriété (c) du théorème 2.3.1, il existe une inclusion $N/K \hookrightarrow M/K$ et la composition $M \hookrightarrow N \hookrightarrow M$ est un automorphisme, ce qui entraîne que $M \simeq N$.

Il reste à voir (ii) lorsque L/K n'est pas supposée de type fini. (En effet, (iii) découle de (ii).) On peut remplacer N/K par le sous-Δ-corps engendré par les images de σ_1 et σ_2. Il s'ensuit que la Δ-extension N/K est totalement décomposée par L/K (voir la proposition 2.2.13). On utilise alors (i) pour conclure. ∎

Proposition 2.3.8. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, L/K et M/K des Δ-extensions.*

(a) *On suppose que la Δ-extension M/K est de type fini, totalement décomposée par L/K et que $M^{\Delta=0}$ est algébrique sur $K^{\Delta=0}$. Il existe alors une extension finie $C/L^{\Delta=0}$ est une inclusion de Δ-extensions $M/K \hookrightarrow L \otimes_{L^{\Delta=0}} C/K$.*

(b) *On suppose que $L^{\Delta=0}$ est une clôture algébrique de $K^{\Delta=0}$, que la Δ-extension $L/K \otimes_{K^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}$ est de type fini et que M/K est subordonnée à L/K. Alors, M/K est (non canoniquement) isomorphe à une unique sous-Δ-extension de L/K.*

Démonstration. — Les hypothèses dans (b) entraînent que la Δ-extension $M/K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}$ est de type fini (voir la proposition 2.3.4). On peut donc utiliser le corollaire 2.3.7(ii) pour déduire (b) de (a). Il reste à démontrer (a). Pour cela, on peut remplacer L/K par $L \otimes_{L^{\Delta=0}} \overline{L^{\Delta=0}}$, avec $\overline{L^{\Delta=0}}$ une clôture algébrique de $L^{\Delta=0}$, et supposer que $L^{\Delta=0}$ est algébriquement clos.

D'après la proposition 2.3.2, M est le corps des fractions d'une (K, Δ)-algèbre simple de type fini A. D'après le théorème 1.2.1 et la proposition 2.2.14, on peut remplacer A par une localisation et supposer que la K-algèbre (et non seulement la (K, Δ)-algèbre) A est de type fini. D'après le théorème 1.3.11, il existe un non diviseur de zéro $f \in L \otimes_K A$ tel que

$$\mathrm{Frac}((L \otimes_K A[f^{-1}])^{\Delta=0}) \simeq \mathrm{Frac}(L \otimes_K A)^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(L \otimes_K M)^{\Delta=0}. \tag{2.42}$$

Puisque L/K décompose totalement M/K, il s'ensuit que le morphisme canonique

$$L \otimes_{L^{\Delta=0}} (L \otimes_K A[f^{-1}])^{\Delta=0} \longrightarrow L \otimes_K A[f^{-1}]. \tag{2.43}$$

est un isomorphisme rationnellement. On pose $E = (L \otimes_K A[f^{-1}])^{\Delta=0}$. D'après le théorème 1.3.11 et quitte à remplacer f par un multiple convenable, on peut supposer que E est une $L^{\Delta=0}$-algèbre de type fini. Ainsi, (2.43) est un morphisme de L-algèbres de type fini. Il existe donc un ouvert dense $U \subset \mathrm{Spec}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} E)$ au-dessus duquel le morphisme de L-schémas

$$\mathrm{Spec}(L \otimes_K A[f^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} E) \tag{2.44}$$

est un isomorphisme. D'après le lemme 2.3.9 ci-dessous, il existe un $L^{\Delta=0}$-point x de $\mathrm{Spec}(E)$ tel que le L-point associé dans $\mathrm{Spec}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} E)$ appartient à U. On en déduit un L-point de $\mathrm{Spec}(L \otimes_K A[f^{-1}])$ qui fournit un morphisme de (L, Δ)-algèbres

$$L \otimes_K A[f^{-1}] \longrightarrow L. \tag{2.45}$$

Après restriction à A, on obtient un morphisme de (K, Δ)-algèbres $A \longrightarrow L$ qui est nécessairement injectif puisque A est simple. Ce morphisme induit l'inclusion $M \hookrightarrow L$ recherchée. ∎

L'énoncé classique suivant a servi dans la preuve de la proposition 2.3.8.

Lemme 2.3.9. — *Soient k un corps algébriquement clos et X un k-schéma de type fini. Soit K/k une extension et $U \subset X \otimes_k K$ un ouvert non vide. Alors, l'ensemble $X(k) \cap U(K)$ est non vide. (Autrement dit, $X(k)$ est dense dans $X \otimes_k K$.)*

Remarque 2.3.10. — La proposition 2.3.8(b) est encore valable sans l'hypothèse de type finitude de la Δ-extension $L/K \otimes_{K^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}$. Toutefois, pour se débarasser de cette hypothèse, il faut utiliser un résultat ultérieur – le corollaire 2.8.5 – dont la preuve dépendra de la proposition 2.3.8(b). Pour cela, nous avons décidé d'énoncer et de démontrer le cas général à la fin de la sous-section 2.8 ; voir la proposition 2.8.6. □

Proposition 2.3.11. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, L/K une Δ-extension et M/K une Δ-extension potentiellement subordonnée à L/K. On suppose que $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos dans $L^{\Delta=0}$ et que $K^{\Delta=0} = M^{\Delta=0}$. Soit $D/K^{\Delta=0}$ une extension. Alors, la Δ-extension* $\mathrm{Frac}(M \otimes_{K^{\Delta=0}} D)/\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} D)$ *est potentiellement subordonnée à* $\mathrm{Frac}(L \otimes_{K^{\Delta=0}} D)/\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} D)$.

Démonstration. — On note $C = K^{\Delta=0}$ le corps des constantes de K. On supposera que C est algébriquement clos, ce qui ne restreint pas la généralité. On divise la preuve en deux parties.

Partie A. — D'après le corollaire 2.3.7(iv), il suffit de traiter le cas où la Δ-extension L/K est de type fini. La proposition 2.3.4 entraîne alors que la Δ-extension M/K est aussi de type fini. Par un argument de passage à la limite, on se ramène également au cas où l'extension D/C est de type fini.

D'après la remarque 2.3.6, on peut trouver une Δ-extension de type fini $N/\mathrm{Frac}(K \otimes_C D)$ potentiellement subordonnée à la Δ-extension $\mathrm{Frac}(L \otimes_C D)/\mathrm{Frac}(K \otimes_C D)$. Quitte à étendre le corps des constantes de N, on peut supposer que cette Δ-extension contient $\mathrm{Frac}(M \otimes_C D)/\mathrm{Frac}(K \otimes_C D)$. Ceci permet d'identifier $\mathrm{Frac}(M \otimes_C D)$, et par la même occasion M, à un sous-Δ-corps de N. Notre but est de montrer que le morphisme évident

$$\mathrm{Frac}(M \otimes_C N^{\Delta=0}) \longrightarrow N \qquad (2.46)$$

est bijectif, ce qui permettra clairement de conclure.

On fixe des sous-(K, Δ)-algèbres de type fini $A \subset M$ et $B \subset N$ telles que B contient A (modulo l'identification de M avec un sous-Δ-corps de N), $\mathrm{Frac}(A) = M$ et $\mathrm{Frac}(B) = N$. D'après la proposition 2.3.2, on peut supposer que la (K, Δ)-algèbre A est simple. Comme d'habitude, grâce aux théorèmes 1.2.1 et 1.3.11 et à la proposition 2.2.14, on peut supposer que la K-algèbre A est lisse, que la $K^{\Delta=0}$-algèbre $B^{\Delta=0}$ est lisse, que $\mathrm{Frac}(B^{\Delta=0}) = N^{\Delta=0}$, et que le morphisme $B^{\Delta=0} \longrightarrow B$ est ind-lisse, ouvert et à fibres géométriques intègres. (La dernière propriété découle en fait du lemme 1.3.6.)

L'inclusion $A \hookrightarrow B$ fournit un morphisme injectif

$$A \otimes_C B^{\Delta=0} \longrightarrow B \qquad (2.47)$$

qui permet de retrouver (2.46) par application de $\mathrm{Frac}(-)$. (Rappelons que $C = K^{\Delta=0} = A^{\Delta=0} = M^{\Delta=0}$.) On doit donc montrer que ce morphisme est rationnellement un isomorphisme. Nous allons montrer qu'il existe un ouvert dense $U \subset \mathrm{Spec}(B^{\Delta=0})$ tel que, pour tout point fermé $\mathfrak{m} \in U$, le morphisme

$$A \simeq A \otimes_C \kappa(\mathfrak{m}) \longrightarrow B \otimes_{B^{\Delta=0}} \kappa(\mathfrak{m}) \simeq B/\mathfrak{m}B,$$

obtenu en appliquant $- \otimes_{B^{\Delta=0}} \kappa(\mathfrak{m})$ à (2.47), est rationnellement un isomorphisme. Ceci permettra de conclure. (En effet, l'ensemble des points non nécessairement fermés $\mathfrak{p} \subset \mathrm{Spec}(B^{\Delta=0})$ tels que le morphisme

$$A \otimes_C B^{\Delta=0}/\mathfrak{p} \longrightarrow B/\mathfrak{p}B$$

est injectif et induit un isomorphisme $\mathrm{Frac}(A \otimes_C \kappa(\mathfrak{p})) \simeq \mathrm{Frac}(B/\mathfrak{p}B)$ est une partie constructible. Elle contiendrait alors l'ouvert U et donc le point générique de $\mathrm{Spec}(B^{\Delta=0})$.)

Dire que la Δ-extension $N/\mathrm{Frac}(K \otimes_C D)$ est totalement décomposée par la Δ-extension $\mathrm{Frac}(L \otimes_C D)/\mathrm{Frac}(K \otimes_C D)$ équivaut à dire que la Δ-extension N/K est totalement décomposée par la Δ-extension L/K. D'après la proposition 2.2.15, il existe un ouvert dense dans $\mathrm{Spec}(B)$ tel que L/K décompose totalement $\mathrm{Frac}(B/\mathfrak{q})$ pour tout Δ-idéal premier $\mathfrak{q} \subset B$ appartenant à cet ouvert. Étant donné que le morphisme $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B^{\Delta=0})$ est ouvert et à fibres géométriquement intègres, il existe un ouvert $U_0 \subset \mathrm{Spec}(B^{\Delta=0})$ tel que L/K décompose totalement $\mathrm{Frac}(B/\mathfrak{p}B)$ pour tout $\mathfrak{p} \in U_0$. Supposons que $\mathfrak{m} \in U_0$ est un point fermé. Puisque A est simple, le morphisme $A \longrightarrow B/\mathfrak{m}B$ est injectif et induit une inclusion

$M = \mathrm{Frac}(A) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(B/\mathfrak{m}B)$. Ainsi, si $\mathrm{Frac}(B/\mathfrak{m}B)^{\Delta=0} = C$, cette inclusion est nécessairement une bijection par le corollaire 2.3.7(i). Autrement dit, pour terminer, il suffit de montrer que l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B^{\Delta=0})$ tels que $\mathrm{Frac}(B/\mathfrak{p}B)^{\Delta=0} = \kappa(\mathfrak{p})$ contient un ouvert dense. Ceci fera l'objet de la partie suivante.

Partie B. — On fixe une (K,Δ)-algèbre simple de type fini S telle que $\mathrm{Frac}(S)/K$ décompose maximalement (et donc aussi totalement) N/K et M/K. Puisque $C = K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos, on a $S^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(S)^{\Delta=0} = C$. Puisque la Δ-extension $\mathrm{Frac}(S \otimes_C B^{\Delta=0})/\mathrm{Frac}(K \otimes_C B^{\Delta=0})$ décompose totalement $N/\mathrm{Frac}(K \otimes_C B^{\Delta=0})$, il existe, d'après la proposition 2.3.8(a), une $B^{\Delta=0}$-algèbre étale E, avec E un anneau intègre, et un morphisme de $\mathrm{Frac}(K \otimes_C B^{\Delta=0})$-corps $\mathrm{Frac}(B \otimes_{B^{\Delta=0}} E) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(S \otimes_C E)$. On peut trouver un non diviseur de zéro $f \in S \otimes_C E$ tel que ce morphisme se restreint en un morphisme de $(K \otimes_C E, \Delta)$-algèbres

$$B \otimes_{B^{\Delta=0}} E \longrightarrow S \otimes_C E[f^{-1}].$$

Ce morphisme étant injectif, il existe un ouvert dense $V \subset \mathrm{Spec}(E)$ tel que pour tout $\mathfrak{r} \in V$, le morphisme induit

$$B \otimes_{B^{\Delta=0}} \kappa(\mathfrak{r}) \longrightarrow S \otimes_C \kappa(\mathfrak{r})[f^{-1}]$$

est injectif. Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B^{\Delta=0})$ est l'image de $\mathfrak{r}$, il s'ensuit une injection

$$\mathrm{Frac}(B/\mathfrak{p}B)^{\Delta=0} \otimes_{\kappa(\mathfrak{p})} \kappa(\mathfrak{r}) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(S \otimes_C \kappa(\mathfrak{r}))^{\Delta=0} = \kappa(\mathfrak{r}).$$

Ceci montre que $\kappa(\mathfrak{p}) \simeq \mathrm{Frac}(B/\mathfrak{p}B)^{\Delta=0}$. La propriété dont on avait besoin dans la partie A est donc vérifiée pour tout $\mathfrak{p} \in U_1$, avec U_1 l'image de V par $\mathrm{Spec}(E) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B^{\Delta=0})$. Ceci termine la preuve de la proposition. ■

On peut reformuler la proposition 2.3.11 comme une généralisation du corollaire 2.3.7(i).

Corollaire 2.3.12. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, L/K une Δ-extension et M/K une Δ-extension potentiellement subordonnée à L/K. Soit N/K une Δ-extension totalement décomposée par L/K munie d'un morphisme de (K,Δ)-corps $M \hookrightarrow N$. Alors, l'inclusion évidente* $\mathrm{Frac}(M \otimes_{M^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}) \hookrightarrow N$ *est une bijection.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que $L^{\Delta=0}$ et $N^{\Delta=0}$ contiennent une clôture algébrique $\overline{K^{\Delta=0}}$ de $K^{\Delta=0}$. Le morphisme $M \hookrightarrow N$ envoie alors $M^{\Delta=0}$ dans $\overline{K^{\Delta=0}}$. On peut donc remplacer K et M par $K \otimes_{K^{\Delta=0}} \overline{K^{\Delta=0}}$ et $M \otimes_{M^{\Delta=0}} \overline{K^{\Delta=0}}$, et supposer que $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos.

Notons $D = N^{\Delta=0}$. D'après la proposition 2.3.11, la Δ-extension $\mathrm{Frac}(M \otimes_{K^{\Delta=0}} D)/\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} D)$ est potentiellement subordonnée à la Δ-extension $\mathrm{Frac}(L \otimes_{K^{\Delta=0}} D)/\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} D)$ qui décompose totalement $N/\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} D)$. Le corollaire 2.3.7(i) permet alors de conclure. ■

Théorème 2.3.13. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, L/K une Δ-extension et M/K une Δ-extension potentiellement subordonnée à L/K. Alors, une Δ-extension N/K est totalement (resp. maximalement) décomposée par L/K si et seulement si elle est totalement (resp. maximalement) décomposée par M/K. En particulier, M/K est totalement décomposée par elle-même.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas non respé ; le cas réspé en découle grâce au lemme 2.2.8.

Supposons d'abord que la Δ-extension N/K est totalement décomposée par M/K et montrons qu'elle est aussi totalement décomposée par L/K. Pour cela, nous pouvons supposer que N/K est de type fini. Dans ce cas, N/K est totalement décomposée par une sous-Δ-extension de type fini M_0/K de M/K. Or, d'après la proposition 2.3.8, la Δ-extension $\overline{L}/K = L \otimes_{L^{\Delta=0}} \overline{L^{\Delta=0}}/K$, avec $\overline{L^{\Delta=0}}$ une clôture algébrique de $L^{\Delta=0}$, contient une copie de M_0/K. Il s'ensuit que $\overline{L}/K$ décompose totalement N/K. Il en est donc de même de L/K.

Réciproquement, supposons que la Δ-extension N/K est totalement décomposée par L/K et montrons qu'elle est aussi totalement décomposée par M/K. Pour cela, nous pouvons supposer que N/K est de type fini. Il s'agit de montrer que

$$\mathrm{Frac}(M \otimes_{M^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(M \otimes_K N)^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Frac}(M \otimes_K N) \tag{2.48}$$

est un isomorphisme. La (K,Δ)-algèbre $\mathrm{Frac}(M\otimes_K N)$ est un produit fini de (K,Δ)-corps. Il suffit donc de montrer que le morphisme

$$\mathrm{Frac}(M\otimes_{M^{\Delta=0}} N'^{\Delta=0})\longrightarrow N' \tag{2.49}$$

est inversible pour tout facteur direct irréductible N' de $\mathrm{Frac}(M\otimes_K N)$. Or, la Δ-extension N'/K contient les Δ-extensions M/K et N/K qui l'engendrent. D'après la proposition 2.2.13, la Δ-extension N'/K est totalement décomposée par L/K. Puisque la Δ-extension M/K est potentiellement subordonnée à L/K, le corollaire 2.3.12 affirme que (2.49) est bien inversible. ■

2.4. Extensions normales et pseudo-normales. —

Dans cette sous-section, nous introduisons la classe des Δ-extensions normales et celle des Δ-extensions pseudo-normales.

Définition 2.4.1. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle. Une Δ-extension N/K est dite* normale *(ou* de Kolchin*) si elle vérifie les conditions suivantes.*

(a) L'extension $N^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est algébrique.

(b) La Δ-extension N/K est totalement décomposée par elle-même.

Une Δ-extension M/K est dite pseudo-normale *si son noyau totalement décomposable M^{td}/K (voir la définition 2.2.5) est une Δ-extension normale.*

Le résultat suivant montre en particulier que la classe des Δ-extensions normales est la même que celle des Δ-extensions potentiellement subordonnées (à une Δ-extension non spécifiée).

Lemme 2.4.2. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle.*

(i) Soient L/K une Δ-extension et N/K une Δ-extension potentiellement subordonnée à L/K. Alors, la Δ-extension N/K est normale.

(ii) Soient M/K une Δ-extension pseudo-normale et $N=M^{\mathrm{td}}$ son noyau totalement décomposable. Alors, la Δ-extension N/K est potentiellement subordonnée à M/K.

Démonstration. — L'assertion (i) est contenue dans le théorème 2.3.13 ; elle est reprise ici pour mémoire. Nous démontrerons l'assertion suivante.

(ii′) Soient M/K une Δ-extension et $N=M^{\mathrm{td}}$ son noyau totalement décomposable. On suppose que l'extension $M^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est algébrique et que M/K est maximalement décomposée par elle-même. Alors, N/K est potentiellement subordonnée à M/K.

Vu le lemme 2.2.8 une Δ-extension pseudo-normale est maximalement décomposée par elle-même. Il s'ensuit que (ii′) $\Rightarrow$ (ii).

Pour démontrer (ii′), on peut supposer que $K^{\Delta=0}=M^{\Delta=0}$ est algébriquement clos. On doit alors montrer que N/K est subordonnée à M/K. D'après le corollaire 2.3.7(iv), il suffit de vérifier que, pour toute sous-Δ-extension de type fini $M_0/K\subset M/K$, la Δ-extension N/K contient une Δ-extension qui lui est subordonnée. Or, si N_0/K est une Δ-extension subordonnée à M_0/K, il existe une injection $N_0/K\hookrightarrow M_0/K$ d'après la proposition 2.3.8. Puisque N_0/K est totalement décomposable, on a $N_0\subset M_0^{\mathrm{td}}\subset M^{\mathrm{td}}=N$. ■

Proposition 2.4.3. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle. Alors, toute Δ-extension de K est maximalement décomposée par une Δ-extension normale.*

Démonstration. — Si M/K est maximalement décomposée par L/K et si N/K est potentiellement subordonnée à L/K, alors le théorème 2.3.13 affirme que M/K est également maximalement décomposée par N/K. (On fera attention que dans l'énoncé de ce théorème, « M » et « N » jouent des rôles opposés.) Or, d'après le lemme 2.4.2(i), N/K est normale. ■

Lemme 2.4.4. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et M/K une Δ-extension telle que $M^{\Delta=0}$ est algébrique sur $K^{\Delta=0}$. Alors, M/K est pseudo-normale si et seulement si elle est maximalement décomposée par elle-même.*

Démonstration. — La condition est nécessaire d'après le lemme 2.2.8. Réciproquement, supposons que M/K est maximalement décomposée par elle-même. La propriété (ii′) de la preuve du lemme 2.4.2 affirme que M^{td}/K est subordonnée à M/K. D'après le lemme 2.4.2(i), M^{td}/K est normale comme souhaité. ■

Lemme 2.4.5. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et M/K une Δ-extension normale (resp. pseudo-normale). Alors, M/K est égale à l'union filtrante de ses sous-Δ-extensions normales (resp. pseudo-normales) de type fini.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que toute sous-Δ-extension de type fini $M_0/K \subset M/K$ est contenue dans une sous-Δ-extension normale (resp. pseudo-normale) de type fini. D'après le lemme 2.4.2(ii), la Δ-extension M^{td}/K est potentiellement subordonnée à M/K. Elle est donc égale à l'union filtrante de ses sous-Δ-extensions de type fini qui sont subordonnées à des sous-Δ-extensions de type fini de M/K. Ces sous-Δ-extensions subordonnées sont normales d'après le lemme 2.4.2(i). Ceci montre bien que M^{td}/K est l'union filtrante de ses sous-Δ-extensions normales de type fini. En particulier, on peut trouver une sous-Δ-extension $N/K \subset M^{\mathrm{td}}/K$ normale de type fini et contenant M_0^{td}. D'après la proposition 2.2.13, la sous-Δ-extension M_1/K engendrée par N et M_0 vérifie $M_1^{\mathrm{td}} = N$. Elle est donc pseudo-normale. ■

Le résultat suivant décrit une propriété remarquable des Δ-extensions normales.

Proposition 2.4.6. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et L/K une Δ-extension telle que $L^{\Delta=0}$ est algébrique sur $K^{\Delta=0}$. Soient M, $N \subset L$ des sous-(K,Δ)-corps et supposons les conditions suivantes.*

(a) Le morphisme $M^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} N^{\Delta=0} \longrightarrow L^{\Delta=0}$ est injectif.

(b) La Δ-extension N/K est normale et $(M \otimes_{M^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}) \cap (N \otimes_{N^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}) = K \otimes_{K^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}$, l'intersection étant prise dans L modulo les identifications canoniques.

Alors, le morphisme canonique $M \otimes_K N \longrightarrow L$ est injectif et $\mathrm{Frac}(M \otimes_K N)^{\Delta=0} = M^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}$. *De plus, la Δ-extension* $\mathrm{Frac}(M \otimes_K N)/M$ *est normale.*

Démonstration. — On va d'abord établir l'égalité $\mathrm{Frac}(M \otimes_K N)^{\Delta=0} = M^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}$. Puisque N/K est normale et qu'elle est contenue dans L/K, on a des identifications canoniques :

$$\begin{aligned} \mathrm{Frac}(L \otimes_K N) &= \mathrm{Frac}(L \otimes_N \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)) \\ &= \mathrm{Frac}(L \otimes_N \mathrm{Frac}(N \otimes_{N^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0})) \\ &= \mathrm{Frac}(L \otimes_{N^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{Frac}(L \otimes_K N)^{\Delta=0} = L^{\Delta=0} \otimes_{N^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0}.$$

En particulier $\mathrm{Frac}(L \otimes_K N)^{\Delta=0}$ est contenu dans $\mathrm{Frac}((N \otimes_{N^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}) \otimes_K N)$. (Bien entendu, on identifie $N \otimes_{N^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}$ avec un sous-corps de L). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathrm{Frac}(M \otimes_K N)^{\Delta=0} &\subset \mathrm{Frac}(M \otimes_K N) \cap \mathrm{Frac}((N \otimes_{N^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}) \otimes_K N) \\ &= \mathrm{Frac}((M \cap (N \otimes_{N^{\Delta=0}} L^{\Delta=0})) \otimes_K N). \end{aligned}$$

En utilisant la propriété (b) de l'énoncé, en obtient

$$M \cap (N \otimes_{N^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}) = M \cap (K \otimes_{K^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}) = K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}.$$

On déduit de ce qui précède l'inclusion :

$$\mathrm{Frac}(M \otimes_K N)^{\Delta=0} \subset (K \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}) \otimes_K N \simeq M^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} N.$$

Or, on a $(M^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} N)^{\Delta=0} = M^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}$. Ceci fournit l'égalité recherchée.

On montre maintenant que le morphisme $M \otimes_K N \longrightarrow L$ est injectif. Pour cela, il est suffisant de montrer que $N \otimes_K (M \otimes_K N) \longrightarrow N \otimes_K L$ est injectif. La source de ce morphisme se réécrit $(N \otimes_K M) \otimes_N (N \otimes_N N)$ et il est donc suffisant de montrer que

$$\mathrm{Frac}(N \otimes_K M) \otimes_N \mathrm{Frac}(N \otimes_K N) \longrightarrow \mathrm{Frac}(N \otimes_K L) \tag{2.50}$$

est injectif. On note que le morphisme (2.50) est induit par les inclusions de (N,Δ)-algèbres :

$$\mathrm{Frac}(N \otimes_K M) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(N \otimes_K L) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Frac}(N \otimes_K N) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(N \otimes_K L).$$

Puisque la Δ-extension N/K est totalement décomposée par elle-même, $\mathrm{Frac}(N \otimes_K N)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Frac}(N \otimes_{N^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0})$. Ceci permet de réécrire (2.50) de la manière suivante :

$$\mathrm{Frac}(N \otimes_K M) \otimes_{N^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Frac}(N \otimes_K L). \tag{2.51}$$

La condition (a) et la détermination de $\mathrm{Frac}(M \otimes_K N)^{\Delta=0}$ montrent que l'anneau $N \otimes_K M$ est intègre. Ainsi, $\mathrm{Frac}(N \otimes_K M)$ est un Δ-corps. Il s'ensuit que tout Δ-idéal de la source de (2.51) est engendré par des constantes. Pour montrer que (2.51) est injectif, il est donc suffisant de montrer qu'il induit un morphisme injectif sur les anneaux des constantes. En utilisant encore une fois la détermination de $\mathrm{Frac}(M \otimes_K N)^{\Delta=0}$ ainsi que la proposition 1.3.7, on peut écrire le morphisme $(2.51)^{\Delta=0}$ de la manière suivante :

$$(N^{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0}) \otimes_{N^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Frac}(N \otimes_K L)^{\Delta=0}. \tag{2.52}$$

Il est donc suffisant de montrer que

$$\mathrm{Frac}(N \otimes_K N) \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Frac}(N \otimes_K L) \tag{2.53}$$

est injectif. Or, (2.53) s'obtient en appliquant $\mathrm{Frac}(N \otimes_K -)$ au morphisme $N \otimes_{K^{\Delta=0}} M^{\Delta=0} \longrightarrow L$ qui est injectif d'après la condition (a) et la proposition 1.3.3. Ceci permet de conclure. ∎

Proposition 2.4.7. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale. Soit $L \subset N$ un sous-(K, Δ)-corps. Alors, la Δ-extension N/L est encore normale.*

Démonstration. — Quitte à remplacer K et L par $K \otimes_{K^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}$ et $L \otimes_{L^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}$ respectivement, on peut supposer que $K^{\Delta=0} = L^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$.

On traite d'abord le cas où la Δ-extension N/K est de type fini. La Δ-extension N/L est totalement décomposée par la Δ-extension $\mathrm{Frac}(N \otimes_K L)/L$. D'après la proposition 2.3.8(a), il existe une extension finie $E/\mathrm{Frac}(N \otimes_K L)^{\Delta=0}$ et un morphisme de (L, Δ)-corps

$$N \hookrightarrow \mathrm{Frac}(N \otimes_K L) \otimes_{\mathrm{Frac}(N \otimes_K L)^{\Delta=0}} E. \tag{2.54}$$

(On note que la structure de (L, Δ)-corps sur le but de (2.54) est induite par l'action de L sur le second facteur de $N \otimes_K L$.) Clairement, l'extension

$$\mathrm{Frac}(N \otimes_K L) \otimes_{\mathrm{Frac}(N \otimes_K L)^{\Delta=0}} E/K$$

est totalement décomposée par N/K. Or, la Δ-extension N/K est potentiellement subordonnée à elle-même (voir le lemme 2.4.2(ii)). Le corollaire 2.3.12, appliqué à (2.54) considéré comme un morphisme de (K, Δ)-corps, fournit un isomorphisme de (L, Δ)-corps

$$\mathrm{Frac}(N \otimes_{N^{\Delta=0}} E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(N \otimes_K L) \otimes_{\mathrm{Frac}(N \otimes_K L)^{\Delta=0}} E.$$

Ceci montre que la Δ-extension $\mathrm{Frac}(N \otimes_{N^{\Delta=0}} E)/L$ décompose totalement la Δ-extension N/L. Il s'ensuit que la Δ-extension N/L est totalement décomposée par elle-même et elle est donc normale.

On passe au cas général. D'après le lemme 2.4.5, N/K est l'union filtrante de ses sous-Δ-extensions normales et de type fini. Soit $N_0/K \subset N/K$ une telle sous-Δ-extension et soit $N_1 \subset N$ le sous-Δ-corps engendré par N_0 et L. On montrera que la Δ-extension N_1/L est normale ; ceci permettra de conclure puisque N/L est l'union filtrante de telles Δ-extensions. On note $L_0 = N_0 \cap L$. D'après le cas traité ci-dessus, on sait que la Δ-extension N_0/L_0 est normale. D'après la proposition 2.4.6, $N_1/L \simeq \mathrm{Frac}(N_0 \otimes_{L_0} L)/L$ est une Δ-extension normale. La proposition est démontrée. ∎

Remarque 2.4.8. — La variante de la proposition 2.4.7, où « normale » est remplacé par « pseudo-normale », n'est pas vraie en général. □

2.5. Rappels sur les groupoïdes algébriques et les groupoïdes rationnels. —

Cette sous-section contient des rappels sur les groupoïdes algébriques et les groupoïdes rationnels qui serviront dans la construction du groupoïde de Galois différentiel d'une Δ-extension normale (voir la sous-section 2.6). On y trouvera aussi la preuve d'un résultat technique sur les actions rationnelles de groupes rationnels (voir la proposition 2.5.25) qui servira dans la sous-section 2.7.

Définition 2.5.1. — *Soit S un schéma. Un S-*schéma en groupoïdes *(appelé aussi S-*groupoïde algébrique*) est un foncteur contravariant $\mathcal{G}$ de la catégorie des S-schémas dans celle des groupoïdes tel que les préfaisceaux d'ensembles* $\mathrm{ob}(\mathcal{G})$ *et* $\mathrm{fl}(\mathcal{G})$, *qui envoient un S-schéma T sur les ensembles d'objets et de flèches de $\mathcal{G}(T)$, sont représentables. Lorsque* $\mathrm{ob}(\mathcal{G})$ *est le préfaisceau final, on parlera de S-*schémas en groupes *(ou encore de S-*groupes algébriques*).*

Nous rappelons ci-dessous la construction du nerf d'un S-schéma en groupoïdes. Comme d'habitude, on note $\mathbf{\Delta}$ la catégorie des ordinaux finis $\underline{\mathbf{n}} = \{0 \to \cdots \to n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Un objet simplicial (resp. cosimplicial) est un foncteur contravariant (resp. covariant) de source $\mathbf{\Delta}$.

Construction 2.5.2. — Soit $\mathcal{G}$ un S-schéma en groupoïdes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note G_n le préfaisceau d'ensembles donné par $G_n(T) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{n}}, \mathcal{G}(T))$, pour tout S-schéma T. Autrement dit, $G_n(T)$ est l'ensemble des suites composables de n flèches dans $\mathcal{G}(T)$. On obtient ainsi un préfaisceau simplicial $G_\bullet$ sur la catégorie des S-schémas. Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, on note $d_i : G_n \longrightarrow G_{n-1}$ le morphisme correspondant à l'unique application injective $\delta^i : \underline{\mathbf{n-1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ évitant i. De même, pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on note $s_i : G_{n-1} \longrightarrow G_n$ le morphisme correspondant à l'unique application surjective $\sigma^i : \underline{\mathbf{n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{n-1}}$ qui identifie i et $i+1$. Clairement, on a

$$G_n = G_1 \times_{d_0, G_0, d_1} G_1 \times_{d_0, G_0, d_1} \cdots \times_{d_0, G_0, d_1} G_1 \qquad (n \text{ facteurs } G_1). \tag{2.55}$$

En particulier, les préfaisceaux G_n sont représentables. Le S-schéma simplicial $G_\bullet$ est appelé le nerf du S-schéma en groupoïdes $\mathcal{G}$. □

L'existence d'inverses dans le S-schéma en groupoïdes $\mathcal{G}$ se traduit par la propriété que les carrés

$$\begin{tikzcd} G_2 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"] & G_1 \arrow[d, "d_0"] \\ G_1 \arrow[r, "d_0"] & G_0 \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} G_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"] & G_1 \arrow[d, "d_1"] \\ G_1 \arrow[r, "d_1"] & G_0 \end{tikzcd}$$

sont cartésiens. Autrement dit, on a des isomorphismes

$$(d_0, d_1) : G_2 \xrightarrow{\sim} G_1 \times_{d_0, G_0, d_0} G_1 \qquad \text{et} \qquad (d_1, d_2) : G_2 \xrightarrow{\sim} G_1 \times_{d_1, G_0, d_1} G_1.$$

Le résultat suivant est bien connu et sa preuve est immédiate.

Proposition 2.5.3. — *La construction 2.5.2 fournit une équivalence entre la catégorie des S-schémas en groupoïdes $\mathcal{G}$ et la catégorie des S-schémas simpliciaux $G_\bullet$ qui vérifient les conditions suivantes.*

(a) Pour tout $n \geqslant 2$, on a un isomorphisme

$$G_n \xrightarrow{\sim} G_1 \times_{d_0, G_0, d_1} G_1 \times_{d_0, G_0, d_1} \cdots \times_{d_0, G_0, d_1} G_1 \qquad (n \text{ facteurs } G_1)$$

donné par les n morphismes $G_n \longrightarrow G_1$ qui correspondent aux injections $\underline{\mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ d'image $\{i, i+1\}$ (pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$).

(b) On a des isomorphismes

$$(d_0, d_1) : G_2 \xrightarrow{\sim} G_1 \times_{d_0, G_0, d_0} G_1 \qquad \text{et} \qquad (d_1, d_2) : G_2 \xrightarrow{\sim} G_1 \times_{d_1, G_0, d_1} G_1.$$

Via cette équivalence de catégories, les S-schémas G_0 et G_1 correspondent aux S-schémas $\mathrm{ob}(\mathcal{G})$ *et* $\mathrm{fl}(\mathcal{G})$.

Remarque 2.5.4. — Le résultat précédent permet d'identifier la catégorie des S-schémas en groupoïdes avec une sous-catégorie pleine de S-schémas simpliciaux. Dans la suite, l'expression « $G_\bullet$ est un S-groupoïde algébrique » signifiera que $G_\bullet$ est un S-schéma simplicial vérifiant les conditions (a) et (b) de la proposition 2.5.3. □

On se propose maintenant de décrire les actions d'un groupoïde en language simplicial. On travaille d'abord dans la catégorie des ensembles. Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde. Un $\mathcal{G}$-*ensemble à gauche* (resp. *à droite*) $\mathcal{X}$ est un foncteur covariant (resp. contravariant) de $\mathcal{G}$ dans la catégorie des ensembles.

Remarque 2.5.5. — On passe des $\mathcal{G}$-ensembles à gauche aux $\mathcal{G}$-ensembles à droite en associant à $\mathcal{X}$ le foncteur $\mathcal{X}^\circ$ identique à $\mathcal{X}$ sur les objets et tel que $\mathcal{X}^\circ(g) = \mathcal{X}(g^{-1})$ pour $g \in \mathrm{fl}(\mathcal{G})$. □

Construction 2.5.6. — Soient $\mathcal{G}$ un groupoïde et $\mathcal{X}$ un $\mathcal{G}$-ensemble à gauche. On peut associer à $\mathcal{X}$ un groupoïde $\int_{\mathcal{G}} \mathcal{X}$ défini de la manière suivante :

— un objet de $\int_{\mathcal{G}} \mathcal{X}$ est un couple (x, e) avec $e \in \mathrm{ob}(\mathcal{G})$ et $x \in \mathcal{X}(e)$;

— une flèche $(x, e) \to (x', e')$ de $\int_{\mathcal{G}} \mathcal{X}$ est une flèche $e \to e' \in \mathrm{fl}(\mathcal{G})$ telle que $x' = \mathcal{X}(e \to e')(x)$.

On dispose alors d'un morphisme de groupoïdes $r : \int_{\mathcal{G}} \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{G}$ donné par $(x, e) \rightsquigarrow e$.

Notons $G_\bullet$ et $X_\bullet$ les nerfs des groupoïdes $\mathcal{G}$ et $\int_{\mathcal{G}} \mathcal{X}$ respectivement. Le morphisme de groupoïdes r induit alors un morphisme d'ensembles simpliciaux $r_\bullet : X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$. Par construction, on a $X_0 = \coprod_{e \in \mathrm{ob}(\mathcal{G})} \mathcal{X}(e)$ et $r_0 : X_0 \longrightarrow G_0$ est l'application évidente. Remarquons aussi que nous avons un isomorphisme canonique $X_1 \simeq X_0 \times_{r_0, G_0, d_1} G_1$ qui envoie une flèche $(x, e) \to (x', e')$ dans $\int_{\mathcal{G}} \mathcal{X}$ sur $((x, e), (e \to e'))$. Nous disposons également d'un autre isomorphisme $X_1 \simeq G_1 \times_{d_0, G_0, r_0} X_0$ qui envoie la flèche $(x, e) \to (x', e')$ sur le couple $((e \to e'), (x', e'))$. Autrement dit, les carrés

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "r_1"] & X_0 \arrow[d, "r_0"] \\ G_1 \arrow[r, "d_i"] & G_0 \end{tikzcd} \tag{2.56}$$

sont cartésiens pour $i \in \{0, 1\}$. Or, rappelons-le, nous avons des isomorphismes canoniques

$$X_n \simeq X_1 \times_{d_0, X_0, d_1} \cdots \times_{d_0, X_0, d_1} X_1 \qquad \text{et} \qquad G_n \simeq G_1 \times_{d_0, G_0, d_1} \cdots \times_{d_0, G_0, d_1} G_1.$$

Il s'ensuit que les carrés

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "l"] \arrow[d, "r_n"] & X_m \arrow[d, "r_m"] \\ G_n \arrow[r, "l"] & G_m \end{tikzcd} \tag{2.57}$$

sont cartésiens pour toutes les applications $l : \underline{\mathbf{m}} \to \underline{\mathbf{n}}$. Nous dirons alors que le morphisme d'ensembles simpliciaux $r_\bullet : X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ est cartésien. □

La vérification du lemme suivant facile et sera laissée au lecteur.

Lemme 2.5.7. — *Soient $\mathcal{G}$ un groupoïde et $G_\bullet$ son nerf. La construction 2.5.6 (resp. sa variante pour les actions à droite) fournit une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{G}$-ensembles à gauche (resp. à droite) $\mathcal{X}$ et la catégorie des morphismes cartésiens d'ensembles simpliciaux $r_\bullet : X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$.*

Remarque 2.5.8. — La donnée d'un morphisme cartésien d'ensembles simpliciaux $r_\bullet : X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ a la vertu d'être indépendante du choix d'un « coté ». Bien entendu, il y a donc deux $\mathcal{G}$-ensembles qu'on peut extraire à partir de $r_\bullet : X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$, l'un à gauche et l'autre à droite, et ces deux $\mathcal{G}$-ensembles sont échangés par le procédé de la remarque 2.5.5. □

Exemples 2.5.9. — Soient $\mathcal{G}$ un groupoïde et $G_\bullet$ son nerf.

(1) Alors, $\mathcal{G}$ agit naturellement à gauche sur l'ensemble G_1. En effet, on dispose d'un foncteur covariant $\mathcal{X}$ donné par $\mathcal{X}(e) = \{e' \to e \in \mathrm{fl}(\mathcal{G})\}$. Cette action correspond au morphisme cartésien $d_0 : G_{1+\bullet} \longrightarrow G_\bullet$. (Ici, nous avons noté $G_{1+\bullet}$ l'ensemble simplicial obtenu de $G_\bullet$ en composant avec l'endonfoncteur $\underline{\mathbf{n}} \rightsquigarrow \underline{\mathbf{1+n}}$ de $\mathbf{\Delta}$.)

(2) Dualement, $\mathcal{G}$ agit naturellement à droite sur G_1. En effet, on dispose d'un foncteur contravariant $\mathcal{X}'$ donné par $\mathcal{X}'(e) = \{e \to e'' \in \mathrm{fl}(\mathcal{G})\}$. Cette action correspond au morphisme cartésien $G_{\bullet+1} \longrightarrow G_\bullet$ donné par les morphismes $d_{n+1} : G_{n+1} \longrightarrow G_n$. (Ici, nous avons noté $G_{\bullet+1}$ l'ensemble simplicial obtenu de $G_\bullet$ en composant avec l'endonfoncteur $\underline{\mathbf{n}} \rightsquigarrow \underline{\mathbf{n+1}}$ de $\mathbf{\Delta}$.)

L'inversion des flèches fournit un isomorphisme de $\mathcal{G}$-ensembles à gauche $\mathcal{X} \simeq \mathcal{X}'^{\circ}$ et un isomorphisme de $\mathcal{G}$-ensembles à droite $\mathcal{X}^{\circ} \simeq \mathcal{X}'$. Il existe donc un isomorphisme canonique d'ensembles simpliciaux $G_{1+\bullet} \simeq G_{\bullet+1}$ compatible aux morphismes cartésiens ci-dessus. En degré n, cet isomorphisme transforme une suite composable de $n+1$ flèches $(\alpha_i : e_i \to e_{i+1})_{0 \leqslant i \leqslant n}$ dans $\mathcal{G}$ en $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, (\alpha_n \circ \cdots \circ \alpha_0)^{-1})$. □

Les considérations ci-dessus suggèrent la définition suivante.

Définition 2.5.10. — *Soient S un schéma et $G_\bullet$ un S-groupoïde algébrique. Un $G_\bullet$-*schéma *est un morphisme de S-schémas simpliciaux $r_\bullet : X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ tels que les carrés* (2.57) *sont cartésiens. (Un tel morphisme de S-schémas simpliciaux sera dit cartésien.) Souvent, nous dirons simplement que $X_\bullet$ est un $G_\bullet$-schéma ou encore que le S-groupoïde algébrique $G_\bullet$ agit sur le S-schéma X_0.*

Remarque 2.5.11. — Les deux exemples 2.5.9 se transportent aux S-groupoïdes algébriques $G_\bullet$. Ainsi, on dispose de deux $G_\bullet$-schémas canoniques donnés par les morphismes cartésiens de S-schémas simpliciaux $G_{1+\bullet} \longrightarrow G_\bullet$ et $G_{\bullet+1} \longrightarrow G_\bullet$, et l'inversion des flèches fournit un isomorphisme canonique entre eux. Lorsque $G_\bullet$ est un S-groupe algébrique, on appelle *$G_\bullet$-torseur* un $G_\bullet$-schéma $X_\bullet$ qui est, localement pour la topologie étale sur S, isomorphe au $G_\bullet$-schéma $G_{1+\bullet}$. □

On passe maintenant à la définition des S-groupoïdes rationnels. En première approximation, il s'agit de groupoïdes dans la catégorie des S-schémas et des morphismes rationnels. Étant donné que la composition des morphismes rationnels n'est pas toujours définie à moins de se restreindre aux morphismes rationnels génériquement ouverts (voir la définition 2.5.12 ci-dessous), on est obligé de laisser tomber les morphismes de dégénérescence. Pour nos besoins, il sera suffisant de se restreindre au cas où le schéma de base S est artinien (et même le spectre d'un produit fini de corps). Dans ce cas, la notion de « S-morphisme rationnel » est particulièrement simple ; rappelons-la. (Pour une notion plus générale, nous renvoyons le lecteur à [**2**, Exposé XVIII, §1].)

Définition 2.5.12. — *Soient S un schéma artinien, et X et Y des S-schémas de type fini. Un S-*morphisme rationnel *$[f] : Y \dashrightarrow X$ est une classe d'équivalence de couples (V, f) avec $V \subset Y$ un ouvert dense et $f : V \longrightarrow X$ un S-morphisme. Deux tels couples (V, f) et (V', f') sont équivalents s'il existe un ouvert dense $V'' \subset V \cap V'$ tel que $f|_{V''} = f'|_{V''}$. Lorsque cela ne cause pas de confusion, on notera simplement f au lieu de $[f]$.*

Remarque 2.5.13. — Nous dirons qu'un morphisme de schémas $f : Y \longrightarrow X$ est *génériquement ouvert* (resp. *génériquement plat*) s'il existe un ouvert dense $V \subset Y$ tel que $f|_V : V \longrightarrow X$ est un morphisme ouvert (resp. plat). Si f est génériquement ouvert, alors l'image inverse d'un ouvert dense de X est un ouvert dense de Y. (Si $U \subset X$ est un ouvert dense et $W \subset Y$ est un ouvert non vide alors $f^{-1}(U) \cap W \neq \varnothing$; en effet, $f(f^{-1}(U) \cap V \cap W) = U \cap f(V \cap W)$ est non vide puisque $f(V \cap W)$ est un ouvert non vide.) Par ailleurs, si f est de présentation finie, on peut trouver un ouvert dense $U \subset X$ tel que $f^{-1}(U)_{\text{réd}} \longrightarrow U_{\text{réd}}$ est plat. (Ceci découle par exemple de [**39**, Corollaire 11.3.2].) Ceci montre que, pour f de présentation finie, f est génériquement ouvert si et seulement si $f_{\text{réd}} : Y_{\text{réd}} \longrightarrow X_{\text{réd}}$ est génériquement plat. □

Définition 2.5.14. — *Soit S un schéma artinien. Un S-morphisme rationnel est dit* génériquement ouvert *(resp.* génériquement plat, dominant*) s'il en est ainsi d'un, et alors de tout, S-morphisme qui le représente. D'après la remarque 2.5.13, un S-morphisme rationnel $f : Y \dashrightarrow X$ est génériquement ouvert si et seulement si le S-morphisme rationnel $f_{\text{réd}} : Y_{\text{réd}} \dashrightarrow X_{\text{réd}}$ est génériquement plat.*

Lemme 2.5.15. — *Les S-schémas de type fini et les S-morphismes rationnels génériquement ouverts forment une catégorie ; elle sera notée* Rat/S. *De plus, cette catégorie est équivalente à l'opposée de la catégorie des $\mathcal{O}(S)$-algèbres artiniennes essentiellement de type fini (i.e., obtenues en localisant des $\mathcal{O}(S)$-algèbres de type fini).*

Démonstration. — Le fait que Rat/S est une catégorie découle aussitôt de la propriété suivante : l'image inverse d'un ouvert dense par un morphisme génériquement ouvert est un ouvert dense. (Voir la remarque 2.5.13.) La seconde assertion est laissée au lecteur. ■

Notation 2.5.16. — Soient A un anneau artinien et $S = \mathrm{Spec}(A)$. Étant donnée une A-algèbre artinienne essentiellement de type fini B, on note $\mathrm{Specrat}(B)$ l'objet de Rat/S qui lui correspond par l'équivalence du lemme 2.5.15. Cet objet est appelé le *spectre rationnel* de B. □

Soient $f : U \dashrightarrow X$ et $g : V \dashrightarrow X$ des S-morphismes rationnels génériquement ouverts (i.e., des flèches de Rat/S). Soient $U' \subset U$ et $V' \subset V$ des ouverts denses sur lesquels f et g sont définis et tels que les morphismes $f : U' \longrightarrow X$ et $g : V' \longrightarrow X$ sont universellement ouverts. (On peut par exemple prendre U' et V' de sorte que $U'_{\text{réd}}$ et $V'_{\text{réd}}$ soient plats sur $X_{\text{réd}}$.) Alors, le S-schéma $U' \times_X V'$ est bien défini à un unique isomorphisme près dans la catégorie Rat/S. On l'appellera le « produit fibré » de f et g et on le notera

$U \tilde{\times}_X V$. (Bien entendu, il ne s'agit pas du produit fibré catégorique dans Rat/S qui n'existe pas en général.) Par construction, on dispose de deux projections $\mathrm{pr}_1 : U \tilde{\times}_X V \dashrightarrow U$ et $\mathrm{pr}_2 : U \tilde{\times}_X V \dashrightarrow V$. Ce sont des S-morphismes rationnels génériquement ouverts. Notons aussi qu'un carré commutatif dans Rat/S

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & V \arrow[d, dashed, "g"] \\ U \arrow[r, dashed, "f"] & X \end{tikzcd} \tag{2.58}$$

induit un S-morphisme rationnel $W \dashrightarrow U \tilde{\times}_X V$. (On fera attention que ce morphisme n'est pas génériquement ouvert en général.) Lorsque ce morphisme est un isomorphisme birationnel, nous dirons que le carré (2.58) est *rationnellement cartésien*. Le résultat suivant est immédiat.

Lemme 2.5.17. — *Soient A un anneau artinien et $S = \mathrm{Spec}(A)$. Soient $U \dashrightarrow X$ et $V \dashrightarrow X$ des S-morphismes rationnels génériquement ouverts et notons $B \longrightarrow E$ et $B \longrightarrow F$ les morphismes de A-algèbres artiniennes qui leurs correspondent via l'équivalence du lemme 2.5.15. Alors, via cette même équivalence, $U \tilde{\times}_X V$ correspond à la A-algèbre artinienne* $\mathrm{Frac}(E \otimes_B F)$.

Comme d'habitude, on note $\mathbf{\Delta}'$ la sous-catégorie de $\mathbf{\Delta}$ ayant les mêmes objets mais où l'on ne retient que les applications injectives. Un objet semi-simplicial (resp. semi-cosimplicial) est un foncteur contravariant (resp. covariant) de source $\mathbf{\Delta}'$.

Définition 2.5.18. — *Soit S un schéma artinien. Un S-*groupoïde rationnel *est un objet semi-simplicial $G_\bullet$ dans la catégorie* Rat/S *vérifiant les conditions suivantes.*

(a) Pour tout $n \geqslant 2$, on a un isomorphisme birationnel

$$G_n \overset{\sim}{\dashrightarrow} G_1 \tilde{\times}_{d_0, G_0, d_1} G_1 \tilde{\times}_{d_0, G_0, d_1} \cdots \tilde{\times}_{d_0, G_0, d_1} G_1 \qquad (n \text{ facteurs } G_1)$$

donné par les n morphismes $G_n \dashrightarrow G_1$ qui correspondent aux injections $\underline{\mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ d'image $\{i, i+1\}$ (pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$).

(b) On a des isomorphismes birationnels

$$(d_0, d_1) : G_2 \overset{\sim}{\dashrightarrow} G_1 \tilde{\times}_{d_0, G_0, d_0} G_1 \qquad \text{et} \qquad (d_1, d_2) : G_2 \overset{\sim}{\dashrightarrow} G_1 \tilde{\times}_{d_1, G_0, d_1} G_1.$$

*Lorsque $G_0 = S$, on parlera alors de S-*groupe rationnel. *(On retrouve alors la notion classique due à Weil de « loi de groupe rationnelle ».)*

Remarque 2.5.19. — Soient S un schéma artinien et $G_\bullet$ un S-groupoïde rationnel. Nous dirons que $G_\bullet$ *possède finiment d'objets* lorsque le S-schéma G_0 est fini. Dans ce cas, on peut former le produit fibré $G_\bullet \times_{(G_0/S_0)^{\times \bullet}} G_0$ et obtenir un G_0-groupe rationnel. Ainsi, pour tout point fermé $x \in G_0$, on dispose d'un $\kappa(x)$-groupe rationnel G_x, le groupe rationnel des automorphismes de l'objet x. □

Définition 2.5.20. — *Étant donnés un schéma artinien S et un S-groupoïde rationnel $G_\bullet$, on appelle $G_\bullet$-*schéma rationnel *un morphisme d'objets semi-simpliciaux $r_\bullet : X_\bullet \dashrightarrow G_\bullet$ dans* Rat/S *tel que les carrés*

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "l"] \arrow[d, "r_n"] & X_m \arrow[d, "r_m"] \\ G_n \arrow[r, "l"] & G_m \end{tikzcd}$$

sont rationnellement cartésiens pour toute injection croissante $l : \underline{\mathbf{m}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$. (Nous dirons que le morphisme $r_\bullet$ est rationnellement cartésien.)

*Lorsque $G_\bullet$ est un S-groupe rationnel, on appelle $G_\bullet$-*torseur rationnel *un $G_\bullet$-schéma rationnel qui est, localement pour la topologie étale sur S, isomorphe au $G_\bullet$-schéma rationnel $G_{1+\bullet}$.*

Dans le reste de la sous-section, nous penchons un peu plus sur le cas des groupes rationnels. Rappelons que le théorème de régularisation de Weil assure qu'un S-groupe rationnel est birationnellement isomorphe à un unique S-groupe algébrique. Le lecteur trouvera une preuve de ce résultat, étendu à des schémas de base généraux, dans [**2**, Exposé XVIII, §3]. Nous n'aurons pas à nous servir du théorème de régularisation de Weil. Cependant, nous aurons besoin d'un résultat géométrique simple qui sert également dans la preuve de ce théorème. Il est basé sur l'observation suivante.

Lemme 2.5.21. — *Soient S un schéma, X, Y et W des S-schémas, et $p : W \longrightarrow X$ et $q : W \longrightarrow Y$ des S-morphismes. On suppose que $(p, q) : W \longrightarrow X \times_S Y$ est un morphisme ouvert. Soit $U \subset X$ un ouvert S-dense (i.e., les intersections de U avec les fibres du morphisme structural $X \longrightarrow S$ sont de ouverts denses). Alors, on a l'égalité : $q(W) = q(p^{-1}(U))$.*

Démonstration. — On peut remplacer W par son image dans $X \times_S Y$ et supposer que $(p, q) : W \longrightarrow X \times_S Y$ est l'inclusion d'un ouvert $W \subset X \times_S Y$.

Soit $y \in Y$ un point. Il faut montrer $q^{-1}(y)$ est vide si et seulement si $q^{-1}(y) \cap p^{-1}(U)$ est vide. Sachant que W est un ouvert de $X \times_S Y$, on peut écrire :

$$q^{-1}(y) \cap p^{-1}(U) = (W \cap (X \times_S y)) \cap (W \cap (U \times_S Y)) = W \cap (U \times_S y).$$

Puisque $U \subset X$ est S-dense, on déduit que $U \times_S y$ est un ouvert dense de $X \times_S y$. Ainsi $W \cap (U \times_S y)$ est vide si et seulement si $W \cap (X \times_S y) = q^{-1}(y)$ est vide. ■

Jusqu'à la fin de la sous-section, nous considérons la situation suivante.

Situation 2.5.22. — Soient k un corps et G un k-groupe rationnel. Soient B un k-schéma artinien (non nécessairement de type fini) et $b : X \longrightarrow B$ un k-morphisme de type fini. Supposons que X est muni d'une action à gauche de G, notée $a : X \times_k G \dashrightarrow X$, rendant le triangle

$$\begin{tikzcd} X \times_k G \arrow[r, dashed, "a"] \arrow[dr, bend right] & X \arrow[d, "b"] \\ & B \end{tikzcd}$$

commutatif dans Rat/B. (Autrement dit, X est $B \times_k G$-schéma rationnel au sens de la définition 2.5.20.) On suppose que G agit transitivement sur le B-schéma X au sens suivant : le morphisme canonique

$$(\mathrm{pr}_1, a) : X \times_k G \dashrightarrow X \times_B X \tag{2.59}$$

est génériquement ouvert et dominant. □

Proposition 2.5.23. — *Gardons les hypothèses et les notations de la situation 2.5.22. Il existe alors des ouverts denses $U \subset X$, $W \subset X \times_k G$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) U est l'image de W par la projection $\mathrm{pr}_1 : X \times_k G \longrightarrow X$;

(ii) l'action a est définie sur W, le morphisme $a|_W : W \longrightarrow X$ est plat et son image est égale à U ;

(iii) le morphisme $(a|_W, \mathrm{pr}_2|_W) : W \longrightarrow X \times_k G$ est une immersion ouverte d'image dense.

Démonstration. — Le morphisme rationnel $(a, \mathrm{id}_G) : X \times_k G \times_k G \dashrightarrow X \times_k G$ est isomorphe dans Rat/B à la projection sur les deux premiers facteurs $\mathrm{pr}_{12} : X \times_k G \times_k G \longrightarrow X \times_k G$. (Utiliser la description d'un $B \times_k G$-schéma rationnel comme étant un morphisme rationnellement cartésien de B-schémas semi-simpliciaux ; voir la définition 2.5.20.) Il s'ensuit aussitôt que l'action $a : X \times_k G \dashrightarrow X$ est un morphisme génériquement plat et dominant. (Autrement dit, elle correspond à un morphisme fidèlement plat de k-algèbres artiniennes par l'équivalence du lemme 2.5.15.) On peut donc trouver un ouvert dense $W_1 \subset X \times_k G$ tel que a est définie sur W_1, et tel que le morphisme $a|_{W_1} : W_1 \longrightarrow X$ est plat et dominant. Puisque (2.59) est génériquement ouvert et dominant, on peut, quitte à rétrécir W_1, supposer que le morphisme

$$(\mathrm{pr}_1|_{W_1}, a|_{W_1}) : W_1 \longrightarrow X \times_B X$$

est ouvert et dominant. De même, puisque $(a, \mathrm{pr}_2) : X \times_k G \dashrightarrow X \times_k G$ est un isomorphisme birationnel, on peut rétrécir W_1 et supposer que $(a|_{W_1}, \mathrm{pr}_2|_{W_1})$ est une immersion ouverte d'image dense.

Notons $U_1 = \mathrm{pr}_1(W_1)$, $U_2 = a(W_1)$ et $U = U_1 \cap U_2$; ce sont des ouverts denses de X. Puisque B est artinien, ces ouverts sont aussi B-denses. D'après le lemme 2.5.21, l'image de $W_2 = W_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(U)$ par $a|_{W_1}$ est égale à U_2 alors que son image par pr_1 est égale à U. Une deuxième application du lemme 2.5.21 entraîne que l'image de $W = W_2 \cap a^{-1}(U)$ par pr_1 est encore égale à U et il en est de même de son image par a. Ceci termine la preuve de la proposition. ■

Corollaire 2.5.24. — *Gardons les hypothèses et les notations de la situation 2.5.22. Quitte à remplacer X par un ouvert dense, on peut supposer que l'action $a : X \times_k G \dashrightarrow X$ est définie sur un ouvert dense $W \subset X \times_k G$ tel que les morphismes $a|_W : W \longrightarrow X$ et $\mathrm{pr}_1|_W : W \longrightarrow X$ sont fidèlement plats et le morphisme $(a|_W, \mathrm{pr}_2|_W) : W \longrightarrow X \times_k G$ est une immersion ouverte d'image dense.*

Le résultat ci-dessous complémente la proposition 2.5.23 et son corollaire 2.5.24.

Proposition 2.5.25. — *Gardons les hypothèses et les notations de la situation 2.5.22 et supposons de plus que le corps k est algébriquement clos. Supposons aussi que l'action $a : X \times_k G \dashrightarrow X$ est définie sur un ouvert dense $W \subset X \times_k G$ vérifiant les conclusions du corollaire 2.5.24. Pour $g \in G(k)$, notons $W_g \subset X$ l'ouvert obtenu en intersectant W avec $X \times g$ dans $X \times_k G$. La restriction de $a|_W$ à W_g est une immersion ouverte que nous noterons $a_g : W_g \longrightarrow X$.*

Soit $X_0 \subset X$ un ouvert dense. Alors, il existe un nombre fini de k-points $g_1, \cdots, g_n \in G(k)$ tels que X est l'union des ouverts $a_{g_i}(W_{g_i} \cap X_0)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Démonstration. — (Le fait que a_g est une immersion ouverte est clair. En effet, c'est la fibre en g du morphisme $(a|_W, \mathrm{pr}_2|_W)$ qui est une immersion ouverte par hypothèse.) Puisque B est artinien et qu'on peut traiter ses composantes connexes une par une, on peut supposer que $B = \mathrm{Spec}(K)$ avec K une extension de k. Il est aussi clair qu'on peut supposer K algébriquement clos. Par quasi-compacité, il suffit de montrer que $X = \bigcup_{g \in G(k)} a_g(W_g \cap X_0)$, et on peut se borner à vérifier que cette union contient les points fermés de X.

On pose $W_0 = \mathrm{pr}_2^{-1}(X_0) \cap W$, l'intersection étant prise dans $X \times_k G$. Pour $g \in G(k)$, on note $(W_0)_g \subset X$ l'intersection de W_0 avec $X \times g$. Ainsi, on a $(W_0)_g = W_g \cap X_0$.

Soit $x \in X(K)$ un K-point. D'après le lemme 2.5.21, le morphisme $a|_{W_0} : W_0 \longrightarrow X$ est surjectif. En particulier, $F_0 = (a|_{W_0})^{-1}(x)$ est non vide. Étant donné que le morphisme

$$(a|_{W_0}, \mathrm{pr}_2|_{W_0}) : W_0 \longrightarrow X \times_k G \simeq X \times_K (K \times_k G)$$

est une immersion ouverte, on déduit aussitôt que le morphisme évident $F_0 \longrightarrow K \times_k G$ est une immersion ouverte. Identifions F_0 avec son image dans $K \times_k G$. Alors, par construction, si $g \in G(k) \cap F_0(K)$, l'image de l'immersion ouverte $a_g|_{(W_0)_g} : (W_0)_g \longrightarrow X$ contient le K-point x. Il reste donc à montrer que $G(k) \cap F_0(K)$ est non vide, ce qui découle du lemme 2.3.9. ■

2.6. Groupoïde de Galois différentiel d'une extension normale. —

Nous reprenons ici l'étude des Δ-extensions. Dans cette sous-section, nous expliquons comment attacher à une Δ-extension normale un groupoïde algébrique, son *groupoïde de Galois différentiel*. Ceci demandera encore un certain effort et quelques démonstrations techniques seront reléguées à la sous-section 2.7. Toutefois, nous avons déjà suffisamment d'outils pour introduire la variante rationnelle de ce groupoïde. Rappelons d'abord la construction suivante.

Construction 2.6.1. — Soient $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$ une catégorie monoïdale unitaire et X un objet de $\mathcal{M}$ muni d'un morphisme $u : \mathbf{1} \longrightarrow X$. On dispose alors d'un objet semi-cosimplicial $\check{C}^\bullet(X, u)$ de $\mathcal{M}$, dit de Čech, qui admet la description suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\check{C}^n(X, u) = X \otimes \cdots \otimes X \qquad (n + 1 \text{ facteurs } X).$$

Pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant i \leqslant n$, le morphisme $d^i : \check{C}^{n-1}(X, u) \longrightarrow \check{C}^n(X, u)$ est donné par la composition de

$$X^{\otimes n} \simeq X^{\otimes i} \otimes \mathbf{1} \otimes X^{\otimes n-i} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes u \otimes \mathrm{id}} X^{\otimes n+1}.$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion sur le morphisme u, on notera $\check{C}^\bullet(X)$ au lieu de $\check{C}^\bullet(X, u)$.

Si X est une algèbre associative et u est son unité, $\check{C}^\bullet(X)$ s'étend naturellement en un objet cosimplicial de $\mathcal{M}$. Pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, le morphisme $s^i : \check{C}^n(X) \longrightarrow \check{C}^{n-1}(X)$ est le morphisme

$$X^{\otimes n+1} = X^{\otimes i} \otimes X \otimes X \otimes X^{n-i-1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}} X^{\otimes n},$$

où $m : X \otimes X \to X$ est la multiplication.

Dualement, si X est muni d'un morphisme $X \longrightarrow \mathbf{1}$ (resp. si X est une coalgèbre coassociative et counitaire), on dispose d'un objet semi-simplicial (resp. simplicial) $\check{C}_\bullet(X)$. □

La proposition suivante est une conséquence des résultats de la sous-section 2.4.

Proposition 2.6.2. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale de type fini. Alors, la $K^{\Delta=0}$-algèbre semi-cosimpliciale* $\mathrm{Frac}(\check{C}^\bullet(N/K))^{\Delta=0}$ *définit, via l'équivalence du lemme 2.5.15, un $K^{\Delta=0}$-groupoïde rationnel* $\mathrm{Specrat}(\mathrm{Frac}(\check{C}^\bullet(N/K))^{\Delta=0})$.

Démonstration. — Il s'agit de vérifier les conditions (a) et (b) de la définition 2.5.18 pour l'objet semi-simplicial $\mathrm{Specrat}(\mathrm{Frac}(\check{C}^\bullet(N/K))^{\Delta=0})$ de $\mathrm{Rat}/K^{\Delta=0}$. Il sera plus commode de travailler dualement avec les $K^{\Delta=0}$-algèbres artiniennes essentiellement de type fini. Pour $n \geqslant 2$, on a un isomorphisme évident

$$\mathrm{Frac}(\overbrace{(N\otimes_K N)\otimes_{d^0,N,d^1}\cdots\otimes_{d^0,N,d^1}(N\otimes_K N)}^{n\text{ fois}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(\overbrace{N\otimes_K N\otimes_K\cdots\otimes_K N}^{n+1\text{ fois}}) \tag{2.60}$$

induit par les morphismes $\mathrm{Frac}(\check{C}^1(N/K)) \longrightarrow \mathrm{Frac}(\check{C}^n(N/K))$ correspondant aux inclusions $\underline{\mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ d'image $\{i, i+1\}$. En passant aux sous-anneaux des constantes, on obtient l'isomorphisme

$$\mathrm{Frac}(\overbrace{(N\otimes_K N)\otimes_{d^0,N\,d^1}\cdots\otimes_{d^0,N,d^1}(N\otimes_K N)}^{n\text{ fois}})^{\Delta=0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(\overbrace{N\otimes_K N\otimes_K\cdots\otimes_K N}^{n+1\text{ fois}})^{\Delta=0}. \tag{2.61}$$

Il est donc suffisant de montrer que le morphisme canonique

$$\begin{array}{c}\mathrm{Frac}(\overbrace{\mathrm{Frac}(N\otimes_K N)^{\Delta=0}\otimes_{d^0,N^{\Delta=0},d^1}\cdots\otimes_{d^0,N^{\Delta=0},d^1}\mathrm{Frac}(N\otimes_K N)^{\Delta=0}}^{n\text{ fois}})\\ \big\downarrow \\ \mathrm{Frac}(\overbrace{(N\otimes_K N)\otimes_{d^0,N,d^1}\cdots\otimes_{d^0,N,d^1}(N\otimes_K N)}^{n\text{ fois}})^{\Delta=0}\end{array} \tag{2.62}$$

est inversible. Or, puisque la Δ-extension N/K est normale, le produit de (N,Δ)-corps $\mathrm{Frac}(N\otimes_K N)$ est engendré par son sous-anneau des constantes $\mathrm{Frac}(N\otimes_K N)^{\Delta=0}$. Le corollaire 1.3.8, entraîne aussitôt que le morphisme (2.62) est surjectif. Par ailleurs, le corollaire 1.3.5(a) assure que le morphisme (2.62) est injectif. Ceci termine la vérification de la condition (a).

La condition (b) se démontre par la même méthode. On traite uniquement le cas du morphisme (d^0, d^1). On part de l'isomorphisme évident

$$(d^0,d^1) : \mathrm{Frac}((N\otimes_K N)\otimes_{d^0,N,d^0}(N\otimes_K N)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(N\otimes_K N\otimes_K N) \tag{2.63}$$

auquel on applique $(-)^{\Delta=0}$. Ceci nous ramène à montrer que le morphisme canonique

$$\mathrm{Frac}(\mathrm{Frac}(N\otimes_K N)^{\Delta=0}\otimes_{d^0,N^{\Delta=0},d^0}\mathrm{Frac}(N\otimes_K N)^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Frac}((N\otimes_K N)\otimes_{d^0,N,d^0}(N\otimes_K N))^{\Delta=0} \tag{2.64}$$

est inversible. L'argument utilisé pour traiter le cas du morphisme (2.62) s'applique sans changement. ■

Définition 2.6.3. — *Gardons les hypothèses et les notations de la proposition 2.6.2. Le $K^{\Delta=0}$-groupoïde rationnel* $\mathrm{Specrat}(\mathrm{Frac}(\check{C}^\bullet(N/K))^{\Delta=0})$ *est appelé le* groupoïde rationnel de Galois différentiel *de N/K ; on le note* $\mathrm{Gal}^{\Delta,\mathrm{rat}}_\bullet(N/K)$. *Si $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$, il s'agit en fait d'un $K^{\Delta=0}$-groupe rationnel qu'on note simplement* $\mathrm{Gal}^{\Delta,\mathrm{rat}}(N/K)$ *; en tant qu'objet de* $\mathrm{Rat}/K^{\Delta=0}$, *il est donné par* $\mathrm{Specrat}(\mathrm{Frac}(N\otimes_K N)^{\Delta=0})$.

Remarque 2.6.4. — Le $K^{\Delta=0}$-groupoïde rationnel $\mathrm{Gal}^{\Delta,\mathrm{rat}}_\bullet(N/K)$ admet finiment d'objets : le $K^{\Delta=0}$-schéma $\mathrm{Gal}^{\Delta,\mathrm{rat}}_0(N/K) = \mathrm{Spec}(N^{\Delta=0})$ est fini. Il est aussi géométriquement connexe : le morphisme

$$(d_0,d_1) : \mathrm{Gal}^{\Delta,\mathrm{rat}}_1(N/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}^{\Delta,\mathrm{rat}}_0(N/K)\times_{K^{\Delta=0}}\mathrm{Gal}^{\Delta,\mathrm{rat}}_0(N/K)$$

est surjectif. En effet, il correspond par l'équivalence du lemme 2.5.15 au morphisme

$$N^{\Delta=0}\otimes_{K^{\Delta=0}}N^{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Frac}(N\otimes_K N)^{\Delta=0}$$

qui est injectif d'après le corollaire 1.3.5(a). □

Le résultat suivant complémente la proposition 2.6.2.

Proposition 2.6.5. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale de type fini. Via l'équivalence du lemme 2.5.15, le morphisme d'algèbres semi-cosimpliciales*

$$\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(\check{C}^\bullet(N/K))^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Frac}(\check{C}^\bullet(N/K)) \tag{2.65}$$

définit un $K \otimes_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Gal}_\bullet^{\Delta,\mathrm{rat}}(N/K)$-schéma rationnel $\mathrm{Specrat}(\mathrm{Frac}(\check{C}^\bullet(N/K)))$. *Lorsque $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$, il s'agit même d'un $K \otimes_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Gal}_\bullet^{\Delta,\mathrm{rat}}(N/K)$-torseur rationnel.*

Démonstration. — Il s'agit de vérifier que (2.65) induit un morphisme rationnellement cartésien d'objets semi-simpliciaux de Rat/K. Or, $\mathrm{Frac}(\check{C}^\bullet(N/K))$ définit clairement un K-groupoïde rationnel. Il suffit donc de montrer que les carrés

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Frac}(\check{C}^0(N/K))^{\Delta=0} \arrow[r, "d^i"] \arrow[d] & \mathrm{Frac}(\check{C}^1(N/K))^{\Delta=0} \arrow[d] \\
\mathrm{Frac}(\check{C}^0(N/K)) \arrow[r, "d^i"] & \mathrm{Frac}(\check{C}^1(N/K))
\end{tikzcd}$$

sont rationnellement cocartésiens pour $i \in \{0,1\}$. Ceci revient à montrer que les deux morphismes évidents

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Frac}(N \otimes_{N^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)\\
\text{et}\quad &\mathrm{Frac}(\mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0} \otimes_{N^{\Delta=0}} N) \longrightarrow \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)
\end{aligned}$$

sont inversibles, ce qui est vrai puisque la Δ-extension N/K est normale.

Supposons maintenant que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$ et montrons que le $K \otimes_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Gal}_\bullet^{\Delta,\mathrm{rat}}(N/K)$-schéma rationnel que l'on vient de définir est un torseur. Pour cela, on étend les scalaires de K à N. Le changement de base du morphisme (2.65) auquel on applique $\mathrm{Frac}(-)$ s'écrit alors :

$$\mathrm{Frac}(N \otimes_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(\check{C}^\bullet(N/K))^{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Frac}(\check{C}^{1+\bullet}(N/K)).$$

Or, on dispose d'un triangle commutatif de N-algèbres semi-cosimpliciales

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Frac}(N \otimes_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(\check{C}^\bullet(N/K))^{\Delta=0}) \arrow[r, "d^0"] \arrow[dr] & \mathrm{Frac}(N \otimes_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(\check{C}^{1+\bullet}(N/K))^{\Delta=0}) \arrow[d] \\
& \mathrm{Frac}(\check{C}^{1+\bullet}(N/K)).
\end{tikzcd}$$

Puisque la Δ-extension N/K est normale et que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$, la flèche verticale du triangle ci-dessus est un isomorphisme. Ceci termine la preuve de la proposition. ∎

Corollaire 2.6.6. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale de type fini. Supposons que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$. Alors,* $\mathrm{Gal}^{\Delta,\mathrm{rat}}(N/K) = \mathrm{Specrat}(\mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0})$ *est naturellement un $K^{\Delta=0}$-groupe rationnel et* $\mathrm{Specrat}(N)$ *est naturellement un* $\mathrm{Gal}^{\Delta,\mathrm{rat}}(N/K)$*-torseur rationnel défini sur K.*

Notre but maintenant est de raffiner les constructions précédentes pour obtenir un $K^{\Delta=0}$-groupoïde algébrique $\mathrm{Gal}_\bullet^\Delta(N/K)$ birationnellement isomorphe au $K^{\Delta=0}$-groupoïde rationnel $\mathrm{Gal}_\bullet^{\Delta,\mathrm{rat}}(N/K)$. Il est possible d'obtenir $\mathrm{Gal}_\bullet^\Delta(N/K)$ grâce à une extension du théorème de régularisation de Weil [**2**, Exposé XVIII] aux groupoïdes rationnels possédant finiment d'objets. Toutefois, nous avons décidé d'utiliser la particularité de la situation pour construire ce groupoïde à la main, d'autant plus que cela fournira des renseignements supplémentaires bien utiles. Notre construction est basée sur le résultat suivant.

Théorème 2.6.7. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale de type fini. Il existe alors une sous-(K,Δ)-algèbre simple de type fini $B \subset N$ vérifiant* $\mathrm{Frac}(B) = N$ *et des morphismes de $K^{\Delta=0}$-schémas*

$$c_n : \mathrm{Spec}(\overbrace{B \otimes_K \cdots \otimes_K B}^{n \text{ fois}}) \longrightarrow X_n, \qquad \textit{pour} \quad n \in \mathbb{N},$$

tels que les propriétés suivantes sont satisfaites.

(a) Les $K^{\Delta=0}$-schémas X_n sont lisses de type fini.

(b) Les morphismes c_n sont fidèlement plats, ouverts, réguliers et à fibres géométriques connexes. Les morphismes $\mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}) \longrightarrow K \otimes_{K^{\Delta=0}} X_n$*, déduits des c_n, sont de type fini, fidèlement plats et lisses.*

(c) Si $V \subset \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$ est un ouvert affine standard et $U = c_n(V)$, le morphisme $\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$, donné par $f \rightsquigarrow f \circ c_n$, induit un isomorphisme $\mathcal{O}(U) \simeq \mathcal{O}(V)^{\Delta=0}$.

(d) Les morphismes $(\mathrm{pr}_i, c_n) : \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B) \times_{N^{\Delta=0}} X_n$, déduits de c_n et des n projections $\mathrm{pr}_i : \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$, sont des immersions ouvertes denses. (On rappelle que $B^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$; voir le corollaire 1.3.15.)

(e) Les propriétés (a)–(c) ci-dessus restent vraies si B est remplacée par une localisation B' par des éléments non nuls (par exemple $B' = N$), et ceci pour les morphismes c'_n déduits de c_n en composant avec les inclusions évidentes :

$$\mathrm{Spec}((B'/K)^{\otimes n}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}).$$

La propriété (d) reste aussi vraie à condition que B' soit obtenue en inversant un nombre fini d'éléments (et donc aussi un seul élément) de B, ou, à défaut de cela, en remplaçant « immersion ouverte » par « pro-immersion ouverte ».

Munis du théorème 2.6.7, nous sommes en mesure de donner la construction du groupoïde de Galois différentiel d'une Δ-extension normale sans trop de peine. Ainsi, nous avons choisi de reléguer la preuve de ce théorème à la sous-section 2.7 et passer directement à la construction de ces groupoïdes de Galois. (Il est important de préciser ici que les arguments de la sous-section 2.7 ne montrent pas que les $K^{\Delta=0}$-schémas X_n du théorème 2.6.7 sont séparés. Le fait qu'ils le sont sera obtenu comme une conséquence du théorème 2.6.10 ; voir le corollaire 2.6.14.)

Nous commençons par un résultat qui assure l'unicité, à un isomorphisme unique près, des $K^{\Delta=0}$-schémas X_n du théorème 2.6.7. Cela nécessitera une construction qui sera généralisée plus tard.

Construction 2.6.8. — Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et A une (K, Δ)-algèbre. Si S est un $K^{\Delta=0}$-schéma, on note $\mathrm{Hom}_\Delta(\mathrm{Spec}(A), S)$ l'ensemble des morphismes de $K^{\Delta=0}$-schémas $f : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow S$ qui satisfont la condition suivante : pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, l'image du morphisme $- \circ f : \mathcal{O}_{S,f(\mathfrak{p})} \longrightarrow A_\mathfrak{p}$ est contenue dans le sous-anneau $(A_\mathfrak{p})^{\Delta=0}$.

L'association $S \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_\Delta(\mathrm{Spec}(A), S)$ définit alors un copréfaisceau, i.e., un foncteur covariant de la catégorie des $K^{\Delta=0}$-schémas dans celle des ensembles. Si ce copréfaisceau est coreprésentable, on notera $\mathrm{Spec}(A)_{\Delta=0}$ le $K^{\Delta=0}$-schéma qui le coreprésente.

La construction précédente est fonctorielle au sens suivant. Un morphisme de (K, Δ)-algèbres $A \longrightarrow A'$ induit un morphisme de copréfaisceaux $\mathrm{Hom}_\Delta(\mathrm{Spec}(A'), -) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Delta(\mathrm{Spec}(A), -)$, et donc un morphisme de $K^{\Delta=0}$-schémas $\mathrm{Spec}(A')_{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)_{\Delta=0}$ (sous réserve que ces deux $K^{\Delta=0}$-schémas existent). □

Corollaire 2.6.9. — *Gardons les notations et le hypothèses du théorème 2.6.7. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, le $K^{\Delta=0}$-schéma X_n coreprésente le copréfaisceau* $\mathrm{Hom}_\Delta(\mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}), -)$.

Démonstration. — Fixons l'entier n et notons $A = (B/K)^{\otimes n}$. Notons aussi c et X au lieu de c_n et X_n. Soient S un $K^{\Delta=0}$-schéma et $f : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow S$ un élément de $\mathrm{Hom}^{\Delta=0}(\mathrm{Spec}(A), S)$. Il s'agit de montrer qu'il existe un morphisme $g : X \longrightarrow S$ tel que $f = g \circ c$. (L'uncité que g est alors claire puisque le morphisme c est fidèlement plat.)

Soit $(T_i)_{i \in I}$ un recouvrement de S par des ouverts affines et notons $V_i = f^{-1}(T_i)$. Soit $(V_{ij})_{j \in J_i}$ un recouvrement de V_i par des ouverts affines standards de $\mathrm{Spec}(A)$. Ainsi, $V_{ij} \simeq \mathrm{Spec}(A[a_{ij}^{-1}])$ et les a_{ij}, pour $i \in I$ et $j \in J_i$, engendrent A comme idéal. On notera $f_{ij} : V_{ij} \longrightarrow T_i$ les morphismes obtenus par restriction de f.

Puisque $f \in \mathrm{Hom}_\Delta(\mathrm{Spec}(A), S)$, le morphisme $- \circ f : \mathcal{O}(T_i) \longrightarrow \mathcal{O}(V_{ij})$ se factorise par le sous-anneau $\mathcal{O}(V_{ij})^{\Delta=0} = (A[a_{ij}^{-1}])^{\Delta=0}$. Notons $U_{ij} = c(V_{ij})$ et $c_{ij} : V_{ij} \longrightarrow U_{ij}$ le morphisme déduit de c. D'après le théorème 2.6.7(c), on a un isomorphisme canonique $\mathcal{O}(U_{ij}) \simeq \mathcal{O}(V_{ij})^{\Delta=0}$. Il existe donc un unique morphisme de $K^{\Delta=0}$-algèbres $\mathcal{O}(T_i) \longrightarrow \mathcal{O}(U_{ij})$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(T_i) \arrow[r] \arrow[dr, "-\circ f"'] & \mathcal{O}(U_{ij}) \arrow[d, "-\circ c"] \\ & \mathcal{O}(V_{ij}). \end{tikzcd}$$

Puisque T_i est affine, ce morphisme correspond à un morphisme de $K^{\Delta=0}$-schémas $g_{ij} : U_{ij} \longrightarrow T_i$ tel que $f_{ij} = g_{ij} \circ c_{ij}$. Notons encore $g_{ij} : U_{ij} \longrightarrow T$ le morphisme g_{ij} composé avec l'inclusion $T_i \hookrightarrow T$.

Nous allons montrer que les g_{ij} se recollent. Quitte à raffiner les recouvrements $(V_{ij})_{j\in J_i}$, nous pouvons supposer que les schémas V_{ij} sont connexes et donc irréductibles. (En effet, $\mathrm{Spec}(A)$ est un schéma normal, ce qui découle du fait que c est régulier et que X est lisse.) Il s'ensuit que les U_{ij} sont aussi irréductibles. Soient $\alpha, \beta \in \coprod_{i\in I} J_i$. Si $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$. Ceci entraîne que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$. (En effet, si $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$ alors $V_\alpha \sqcup V_\beta$ est un ouvert affine standard de $\mathrm{Spec}(A)$ et on doit donc avoir $\mathcal{O}(U_\alpha \cup U_\beta) = \mathcal{O}(V_\alpha \sqcup V_\beta)^{\Delta=0}$. Ceci est absurde puisque $U_\alpha \cup U_\beta$ est connexe et $\mathcal{O}(U_\alpha \cup U_\beta)$ ne contient pas d'idempotents non triviaux, ce qui n'est pas le cas de $\mathcal{O}(V_\alpha \sqcup V_\beta)^{\Delta=0}$.) Ainsi, le morphisme $V_\alpha \cap V_\beta \longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta$ est dominant. Or, il égalise les deux morphismes $g_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}$, $g_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$: $U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow S$. Ceci montre que $g_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = g_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$. On peut donc recoller les morphismes $(g_\alpha)_\alpha$ pour obtenir un morphisme g défini sur $\bigcup_{i,j} U_{ij}$. Il reste à voir que $(U_{ij})_{i\in I,\, j\in J_i}$ est un recouvrement de X ce qui découle du fait que $c : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow X$ est surjectif car fidèlement plat. ■

Théorème 2.6.10. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale de type fini. Alors, le schéma simplicial* $\mathrm{Spec}(\check{C}^\bullet(N/K))_{\Delta=0}$ *est un $K^{\Delta=0}$-groupoïde algébrique. De plus, il est birationnellement isomorphe au groupoïde rationnel* $\mathrm{Gal}_\bullet^{\Delta,\mathrm{rat}}(N/K)$.

Démonstration. — D'après le théorème 2.6.7(c) et (e), on sait que le corps des fractions du $K^{\Delta=0}$-schéma $\mathrm{Spec}(\check{C}^n(N/K))_{\Delta=0}$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Frac}(\check{C}^n(N/K))^{\Delta=0}$. Ceci montre que le $K^{\Delta=0}$-schéma semi-simplicial $\mathrm{Spec}(\check{C}^\bullet(N/K))_{\Delta=0}$ est birationnellement isomorphe à $\mathrm{Gal}_\bullet^{\Delta,\mathrm{rat}}(N/K)$.

Pour $n \geqslant 2$, considérons le morphisme

$$\mathrm{Spec}(\overbrace{N \otimes_K N \otimes_K \cdots \otimes_K N}^{n+1 \text{ fois}})_{\Delta=0} \longrightarrow \overbrace{\mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0} \times_{N^{\Delta=0}} \cdots \times_{N^{\Delta=0}} \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}}^{n \text{ fois}} \tag{2.66}$$

induit par les morphismes $\mathrm{Spec}(\check{C}^n(N/K))_{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\check{C}^1(N/K))_{\Delta=0}$ correspondant aux inclusions $\underline{\mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ d'image $\{i, i+1\}$. Nous allons montrer que (2.66) est un isomorphisme ce qui établira la condition (a) de la proposition 2.5.3 pour le schéma simplicial $\mathrm{Spec}(\check{C}^n(N/K))_{\Delta=0}$.

Nous savons déjà que (2.66) est un isomorphisme birationnel puisque $\mathrm{Gal}_\bullet^{\Delta,\mathrm{rat}}(N/K)$ est un $K^{\Delta=0}$-groupoïde rationnel (voir la proposition 2.6.2). Il suffit donc de montrer que ce morphisme est fidèlement plat. Considérons le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}((N/K)^{\otimes n+1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "c_{n+1}"] & \mathrm{Spec}(N \otimes_K N) \times_N \cdots \times_N \mathrm{Spec}(N \otimes_K N) \arrow[d, "c_2 \times \cdots \times c_2"] \\ \mathrm{Spec}((N/K)^{\otimes n+1})_{\Delta=0} \arrow[r, "(2.66)"] & \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0} \times_{N^{\Delta=0}} \cdots \times_{N^{\Delta=0}} \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}. \end{tikzcd}$$

D'après le théorème 2.6.7(b), le morphisme c_{n+1} et fidèlement plat. Il est donc suffisant de montrer que le morphisme $c_2 \times \cdots \times c_2$ est fidèlement plat. Ceci découle par récurrence du lemme 2.6.11 ci-dessous, et du théorème 2.6.7(b), (d) et (e).

La condition (b) de la proposition 2.5.3 se démontre en utilisant le même argument. Les détails sont laissés au lecteur. ■

Lemme 2.6.11. — *Soient k un corps et k'/k une extension telle que k est algébriquement clos dans k'. Soient X et Y des k-schémas de type fini, et X' et Y' des k'-schémas. On suppose donnés des morphismes fidèlement plats de k-schémas $p : X' \longrightarrow X$ et $q : Y' \longrightarrow Y$. On suppose aussi que le morphisme $Y' \longrightarrow k' \times_k Y$, déduit de q, est plat. Alors, le morphisme $p \times q : X' \times_{k'} Y' \longrightarrow X \times_k Y$ est fidèlement plat.*

Démonstration. — Le morphisme $X' \times_{k'} Y' \longrightarrow X \times_k Y$ est plat. En effet, on peut le factoriser de la manière suivante :

$$X' \times_{k'} Y' \longrightarrow X' \times_{k'} (k' \times_k Y) \simeq X' \times_k Y \longrightarrow X \times_k Y.$$

Il reste donc à montrer qu'il est surjectif. Pour cela, on peut supposer que k est algébriquement clos. (En effet, si $\overline{k}$ est une clôture algébrique de k, $k' \otimes_k \overline{k}$ est encore un corps puisque k est algébriquement clos dans k'. Il est donc loisible de remplacer k, k', X, X', etc., par $\overline{k}$, $k' \otimes_k \overline{k}$, $X \otimes_k \overline{k}$, $X' \otimes_k \overline{k}$, etc.)

Puisque le morphisme $X' \times_{k'} Y' \longrightarrow X \times_k Y$ est plat, son image est stable par générisation, i.e., si $\xi \in \overline{\{\eta\}}$ et si ξ est dans l'image, il en est de même de η. Il suffit donc de montrer que tout point fermé est dans l'image de ce morphisme. Puisque k a été supposé algébriquement clos, et que les k-schémas X et Y sont de type fini, les points fermés de $X \times_k Y$ sont les k-points. On fixe donc $x \in X(k)$ et $y \in Y(k)$. Puisque p et q sont fidèlement plats, les fibres $X'_x = p^{-1}(x)$ et $Y'_y = q^{-1}(y)$ sont des sous-schémas fermés non vides de X' et Y'. Le sous-schéma fermé $X'_x \times_{k'} Y'_y$ est également non vide et ses points sont envoyés sur le point (x, y) par le morphisme $p \times q$. Ceci termine la preuve du lemme. ■

Définition 2.6.12. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale de type fini. Le $K^{\Delta=0}$-groupoïde algébrique* $\mathrm{Spec}(\check{C}^\bullet(N/K))_{\Delta=0}$ *est appelé le* groupoïde de Galois différentiel *de N/K ; on le note* $\mathrm{Gal}^{\Delta}_{\bullet}(N/K)$. *Si $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$, il s'agit en fait d'un $K^{\Delta=0}$-groupe algébrique qu'on note simplement* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$ *; en tant que $K^{\Delta=0}$-schéma, il est donné par* $\mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}$.

Remarque 2.6.13. — Comme dans la remarque 2.6.4, on voit facilement que le $K^{\Delta=0}$-groupoïde algébrique $\mathrm{Gal}^{\Delta}_{\bullet}(N/K)$ est connexe et admet finiment d'objets. □

Corollaire 2.6.14. — *Reprenons les hypothèses et les notations du théorème 2.6.7. Alors, les $K^{\Delta=0}$-schémas X_n sont quasi-projectifs (et en particulier séparés).*

Démonstration. — Vu le théorème 2.6.10 et la remarque 2.6.13, il est suffisant de montrer qui si $\mathcal{G}$ est un groupoïde algébrique de type fini sur un corps k et si $\mathrm{ob}(\mathcal{G})$ est représenté par un k-schéma étale, alors $\mathrm{fl}(G)$ est représenté par un k-schéma quasi-projectif. Quitte à remplacer k par une extension finie, ce qui est loisible par [**35**, Corollaire 6.6.5], on peut supposer que $\mathrm{ob}(\mathcal{G})$ est une somme disjointe de copies de $\mathrm{Spec}(k)$. Dans ce cas, $\mathrm{fl}(\mathcal{G})$ est une somme disjointe de k-groupes algébriques et de k-torseurs sur des k-groupes algébriques. Quitte à remplacer une deuxième fois k par une extension finie, on peut supposer que $\mathrm{fl}(\mathcal{G})$ est une somme disjointe de k-groupes algébriques. Or, il est bien connu qu'un k-groupe algébrique est représenté par un k-schéma quasi-projectif (voir [**30**]). ■

Proposition 2.6.15. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale de type fini. On suppose que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$. Alors, le groupe des $K^{\Delta=0}$-points du $K^{\Delta=0}$-groupe algébrique* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) = \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}$ *agit à gauche sur la Δ-extension N/K de la manière suivante. Soit* $g \in \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)(K^{\Delta=0})$ *et soit $a \in N \otimes_K N$ un non diviseur de zéro tel que* $\mathrm{Spec}((N \otimes_K N[a^{-1}])^{\Delta=0})$ *est un voisinage affine du point rationnel g. Alors, les compositions de*

$$\alpha : N \xrightarrow{d^1} N \otimes_K N \longrightarrow N \otimes_K N[a^{-1}] \otimes_{(N \otimes_K N[a^{-1}])^{\Delta=0}, g} K^{\Delta=0}$$

$$\beta : N \xrightarrow{d^0} N \otimes_K N \longrightarrow N \otimes_K N[a^{-1}] \otimes_{(N \otimes_K N[a^{-1}])^{\Delta=0}, g} K^{\Delta=0}$$

sont des isomorphismes de (K, Δ)-corps, et l'action de g sur N est donnée par $\beta^{-1} \circ \alpha$.

Démonstration. — Soit $B \subset N$ une sous-(K, Δ)-algèbre de type fini satisfaisant aux conditions (a)–(d) du théorème 2.6.7. D'après le corollaire 2.6.6, $\mathrm{Spec}(B)$ est naturellement un $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$-schéma rationnel ; l'action est donnée par l'unique morphisme rationnel

$$a : \mathrm{Spec}(B) \times_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) \dashrightarrow \mathrm{Spec}(B)$$

qui rend commutatif le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(B \otimes_K B) \arrow[r, "(d_1,c_1)"] \arrow[dr, bend right, "d_0"'] & \mathrm{Spec}(B) \times_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Spec}(B \otimes_K B)_{\Delta=0} \arrow[d, dashed, "a"] \\ & \mathrm{Spec}(B). \end{tikzcd}$$

Plus précisément, d'après le théorème 2.6.7(d), on sait que le morphisme (d_1, c_1) est une immersion ouverte. On note W son image : c'est un ouvert dense de $\mathrm{Spec}(B) \times_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$ et l'action a est définie sur W.

Si g est un point rationnel de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$, alors son action sur $\mathrm{Spec}(B)$ est définie sur un ouvert dense. En effet, d'après le théorème 2.6.7(b), $c_1^{-1}(g)$ est non vide et il s'ensuit que $d_1(c_1^{-1}(g))$ est un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}(B)$; il est nécessairement dense puisque $\mathrm{Spec}(B)$ est irréductible. Il est facile de voir que l'action rationnelle de g sur $\mathrm{Spec}(B)$ est donnée par $\mathrm{Specrat}(\beta) \circ \mathrm{Specrat}(\alpha)^{-1} = \mathrm{Specrat}(\alpha^{-1} \circ \beta)$. L'action à gauche de g sur le corps des fractions de B est donc donnée par l'inverse de $\alpha^{-1} \circ \beta$. ■

Remarque 2.6.16. — La proposition 2.6.15 n'est pas vraiment satisfaisante. En effet, on aimerait avoir une action algébrique du $K^{\Delta=0}$-groupe algébrique $\mathrm{Gal}^{\Delta=0}(N/K)$ et non seulement une action « discrète » du groupe des ses points rationnels. Il est possible d'obtenir une telle action, non pas sur la Δ-extension N/K, mais plutôt sur son modèle canonique qui est un K-schéma quasi-projectif lisse X, muni d'une action de Δ sur son faisceau structural, et tel que N s'identifie au corps des fractions de X. Nous ne décrirons pas cette construction ici. On invite le lecteur intéressé à consulter [**51**]. □

Théorème 2.6.17. — *Gardons les hypothèses de la proposition 2.6.15. Alors,* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)(K^{\Delta=0})$ *s'identifie naturellement au groupe de tous les automorphismes de la Δ-extension N/K.*

Démonstration. — Dans la proposition 2.6.15 nous avons décrit une action du groupe $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)(K^{\Delta=0})$ sur la Δ-extension N/K. Cette action est fidèle puisqu'elle provient d'un torseur rationnel sour le $K^{\Delta=0}$-groupe algébrique $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$. Il reste à montrer que tout (K, Δ)-automorphisme $\phi : N \xrightarrow{\sim} N$ coïncide avec l'action d'un $g \in \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)(K^{\Delta=0})$. Le $K^{\Delta=0}$-point g est donné par la composition de

$$\mathrm{Spec}(K^{\Delta=0}) \simeq \mathrm{Spec}(N)_{\Delta=0} \xrightarrow{\mathrm{diag}} \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0} \xrightarrow{\mathrm{Spec}(\mathrm{id}\otimes\phi^{-1})} \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}.$$

La vérification que ce $K^{\Delta=0}$-point redonne l'automorphisme ϕ par le procédé décrit dans la proposition 2.6.15 est fastidieuse mais facile. Elle sera laissée au lecteur. ■

2.7. Démonstration d'un résultat technique. —

Nous démontrons ici le théorème 2.6.7 qui a servi dans la construction du groupoïde de Galois différentiel associé à une Δ-extension normale (voir la sous-section 2.6). Nous démontrons d'abord une réduction.

Lemme 2.7.1. — *Pour démontrer le théorème 2.6.7, il suffit de considérer uniquement le cas où $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos.*

Démonstration. — Soit $\overline{K^{\Delta=0}}$ une clôture algébrique de $K^{\Delta=0}$, et posons $\overline{K} = K \otimes_{K^{\Delta=0}} \overline{K^{\Delta=0}}$ et $\overline{N} = N \otimes_{K^{\Delta=0}} \overline{K^{\Delta=0}}$. La $(\overline{K}, \Delta)$-algèbre $\overline{N}$ est un produit direct de $(\overline{K}, \Delta)$-corps $\overline{N}_1, \cdots, \overline{N}_s$. Les Δ-extensions $\overline{N}_i/\overline{K}$ sont isomorphes deux à deux puisqu'elles sont subordonnées à N/K (voir le théorème 2.3.1, la définition 2.3.5 et le lemme 2.4.2). Il s'ensuit que la Δ-extension $\overline{N}_i/\overline{K}$ est totalement décomposée par la Δ-extension $\overline{N}_j/\overline{K}$ pour tout $1 \leqslant i,\ j \leqslant s$ (voir la remarque 2.2.6(iv)). Ceci montre que les Δ-extensions normales $\overline{N}_i/\overline{K}$ sont également isomorphes deux à deux (utiliser par exemple la proposition 2.3.8).

Notons G le groupe de Galois de l'extension $\overline{K^{\Delta=0}}/K^{\Delta=0}$. D'après la discussion précédente, la $(\overline{K}, \Delta)$-algèbre $\overline{N}$ est un produit direct de s copies d'un même $(\overline{K}, \Delta)$-corps $\overline{N}_1$ vérifiant $(\overline{N}_1)^{\Delta=0} = \overline{K^{\Delta=0}}$. Supposons que le théorème 2.6.7 est connu pour la Δ-extension normale $\overline{N}_1/\overline{K}$. Soit $\overline{B}_1 \subset \overline{N}_1$ une sous-$(\overline{K}, \Delta)$-algèbre simple de type fini vérifiant $\mathrm{Frac}(\overline{B}_1) = \overline{N}_1$ et soient $\overline{c}_{1,n} : \mathrm{Spec}((\overline{B}_1/\overline{K})^{\otimes n}) \longrightarrow \overline{X}_{1,n}$ des morphismes tels que les propriétés (a)–(e) dudit théorème sont satisfaites.

En prenant le produit direct de s copies de $\overline{B}_1$, on trouve une sous-$(\overline{K},\Delta)$-algèbre de type fini $\overline{B}\subset\overline{N}$. En prenant pour $\overline{X}_n$ et $\overline{c}_n$ le coproduit de s^n copies de $\overline{X}_{1,n}$ et $\overline{c}_{1,n}$, on obtient des morphismes de $\overline{K^{\Delta=0}}$-schémas $\overline{c}_n : \mathrm{Spec}((\overline{B}/\overline{K})^{\otimes n}) \longrightarrow \overline{X}_n$. Il est immédiat que les propriétés (a)–(e) sont encore vérifiées pour $\overline{B}\subset\overline{N}$ et les $\overline{c}_n$.

Le reste de la preuve est un exercice en descente galosienne. Soit $\overline{B}'$ la sous-(K,Δ)-algèbre de $\overline{N}$ engendrée par les translatés de $\overline{B}$ par l'action de G. Puisque $\overline{B}$ est de type fini sur $\overline{K}$, la $\overline{K}$-algèbre $\overline{B}'$ est de type fini. Puisque $\mathrm{Frac}(\overline{B}) = \overline{N}$, on a aussi $\mathrm{Frac}(\overline{B}) = \mathrm{Frac}(\overline{B}') = \overline{N}$. On peut donc trouver une sous-$(\overline{K},\Delta)$-algèbre de type fini $\overline{B}''\subset\overline{N}$, stable par l'action de G et qui est une localisation commune de $\overline{B}$ et $\overline{B}'$. En particulier, la sous-$(\overline{K},\Delta)$-algèbre $\overline{B}''\subset\overline{N}$ et les morphismes $\overline{c}''_n : \mathrm{Spec}((\overline{B}''/\overline{K})^{\otimes n}) \longrightarrow \overline{X}_n$ satisfont aux propriétés (a)–(e).

En utilisant le corollaire 2.6.9, on déduit que les schémas $\overline{X}_n$ sont aussi munis d'une action de G et les morphismes $\overline{c}''_n$ sont G-équivariants. On pose $B = (\overline{B}'')^G$, $X_n = \overline{X}_n/G$ et $c_n : \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}) \longrightarrow X_n$ les morphismes induits. La vérification des propriétés (a)–(e) pour B et les morphismes c_n est facile et sera laissée au lecteur. ∎

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de la sous-section, une Δ-extension normale de type fini N/K sera fixée et nous supposerons que $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos. Bien entendu, ceci entraîne que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$. Soit $B\subset N$ une sous-(K,Δ)-algèbre simple de type fini telle que $\mathrm{Frac}(B) = N$. On peut localiser B par un élément non nul chaque fois que cela semble utile. En particulier, grâce au théorème 1.2.1 et à la proposition 2.2.14, on peut supposer que la K-algèbre B est lisse (et en particulier de type fini).

Nous démontrons d'abord une version générique du théorème 2.6.7.

Proposition 2.7.2. — *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un ouvert affine standard dense $V\subset \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$ et un morphisme de $K^{\Delta=0}$-schémas $v : V \longrightarrow U$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites.*

(a) Le $K^{\Delta=0}$-schéma U est affine, de type fini et lisse.

(b) Le morphisme v est fidèlement plat, à fibres géométriques connexes, ouvert et régulier. Le morphisme $V \longrightarrow K\times_{K^{\Delta=0}} U$, déduit de v, est de type fini et lisse.

(c) Si $V'\subset V$ est un ouvert affine standard et $U' = v(V')$, alors $\mathcal{O}(U')\simeq\mathcal{O}(V')^{\Delta=0}$.

(d) Les morphismes $V \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)\times_{K^{\Delta=0}} U$ déduits de v et des n projections $V\longrightarrow\mathrm{Spec}(B)$, sont des immersions ouvertes denses.

Démonstration. — Notons $a\in(B/K)^{\otimes n}$ le non diviseur de zéro fourni par le théorème 1.3.11 appliqué à la (K,Δ)-algèbre $(B/K)^{\otimes n}$. Posons $V = \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}[a^{-1}])$ et $U = \mathrm{Spec}(((B/K)^{\otimes n}[a^{-1}])^{\Delta=0})$, et notons $v : V\longrightarrow U$ le morphisme évident. Alors, U est un $K^{\Delta=0}$-schéma affine, de type fini et lisse, et v est régulier, fidèlement plat et ouvert. Le théorème 1.3.11 nous dit aussi que si $V'\subset V$ est un ouvert standard, il existe un ouvert standard $V''\subset V'$, dense dans V', tel que $U'' = v(V'')$ est un ouvert standard de U et $\mathcal{O}(U'') = \mathcal{O}(V'')^{\Delta=0}$. Ceci permet en particulier de remplacer V et U par des ouverts denses arbitrairement petits.

La propriété (a) de l'énoncé est donc satisfaite. La première moitié de la propriété (b) est aussi satisfaite mis à part la connexité géométrique des fibres ; elle découle de la surjectivité de v et de la propriété (d) puisque $\mathrm{Spec}(B)$ est un $K^{\Delta=0}$-schéma géométriquement connexe. La deuxième moitié de la propriété (b) est satisfaite quitte à rétrécir l'ouvert V puisque $V\longrightarrow K\times_{K^{\Delta=0}} U$ est un morphisme dominant entre K-schémas de type fini. La propriété (d) est également facile à réaliser. En effet, puisque la Δ-extension N/K est normale, les morphismes $V\longrightarrow\mathrm{Spec}(B)\times_{K^{\Delta=0}} U$ sont des isomorphismes birationnels. On peut donc rétrécir V pour que ces morphismes deviennent des immersions ouvertes denses.

Il reste à établir la propriété (c). Comme rappelé ci-dessus, il existe un ouvert standard $V''\subset V'$, dense dans V'', et tel que $U'' = v(V'')$ est un ouvert standard et $\mathcal{O}(U'') = \mathcal{O}(V'')^{\Delta=0}$. En fait, on peut même supposer que $V'' = V'\cap v^{-1}(U'')$ (voir le théorème 1.3.11(b)). Puisque $v|_{V'} : V'\longrightarrow U'$ est fidèlement plat, on déduit que $\mathcal{O}(U') = \mathcal{O}(V')\cap\mathcal{O}(U'')$, l'intersection étant prise dans $\mathcal{O}(V'')$. (Utiliser par exemple le fait que $\mathcal{O}$ est un faisceau pour la topologie *fpqc*.) Il s'ensuit que $\mathcal{O}(U') = \mathcal{O}(V')\cap\mathcal{O}(V'')^{\Delta=0} = \mathcal{O}(V')^{\Delta=0}$. ∎

Définition 2.7.3. — *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $V \subset \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$ un ouvert (non nécessairement affine). Nous dirons que V est* bon *s'il existe un $K^{\Delta=0}$-schéma de type fini et lisse U ainsi qu'un morphisme de $K^{\Delta=0}$-schémas $v : V \longrightarrow U$ vérifiant les conditions (b)–(d) de la proposition 2.7.2.*

Dans la définition 2.7.3, on ne demande pas que le schéma U soit séparé. La proposition 2.7.2 affirme que $\mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$ contient un ouvert dense et bon.

Lemme 2.7.4. — *Soit $V \subset \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$ un ouvert bon au sens de la définition 2.7.3 et $v : V \longrightarrow U$ le $K^{\Delta=0}$-morphisme associé. Alors, U coreprésente le copréfaisceau $\mathrm{Hom}_\Delta(V, -)$. En particulier, le morphisme v est unique à un unique isomorphisme près.*

Démonstration. — La preuve est exactement la même que celle du corollaire 2.6.9. Précisons quand même la définition du copréfaisceau $\mathrm{Hom}_\Delta(V, -)$ qui, strictement parlant, ne rentre pas dans le cadre de la construction 2.6.8. Si S est un $K^{\Delta=0}$-schéma, $\mathrm{Hom}_\Delta(V, S)$ est l'ensemble des morphismes de $K^{\Delta=0}$-schémas $f : V \longrightarrow S$ satisfaisant à la condition suivante : pour tout $x \in V$, l'image du morphisme $- \circ f : \mathcal{O}_{S,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,x}$ est contenue dans le sous-anneau $(\mathcal{O}_{V,x})^{\Delta=0}$. ■

Sous les conditions du lemme 2.7.4, nous noterons $V_{\Delta=0}$ le $K^{\Delta=0}$-schéma U.

Corollaire 2.7.5. —

(i) Si $V \subset \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$ est un bon ouvert, il en est de même de tout ouvert $V' \subset V$. De plus, $V'_{\Delta=0}$ est l'image de V' par $v : V \longrightarrow V_{\Delta=0}$.

(ii) Si V_1 et V_2 sont des ouverts bons de $\mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$, il en est de même de $V_1 \cup V_2$.

Démonstration. — La partie (i) est claire et elle est incluse pour mémoire. Nous nous concentrons donc sur la partie (ii). Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $U_i = (V_i)_{\Delta=0}$ et $v_i : V_i \longrightarrow U_i$ le morphisme canonique. Notons aussi $V = V_1 \cup V_2$ et $V_{12} = V_1 \cap V_2$.

Rappelons que le K-schéma $\mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$ est lisse. Étant donné que v_1 et v_2 induisent des bijections sur les ensembles des composantes connexes, on peut supposer que V_1 et V_2 sont intègres. Si $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, alors $v = v_1 \sqcup v_2$ vérifie les conditions (b)–(d) de la proposition 2.7.2. On peut donc se concentrer sur le cas $V_{12} \neq \varnothing$. Ainsi, dans la suite, V, V_1, V_2 et V_{12} seront supposés intègres.

En utilisant (i), nous obtenons des isomorphismes canoniques :

$$v_1(V_{12}) \simeq (V_{12})_{\Delta=0} \simeq v_2(V_{12}). \tag{2.67}$$

On peut donc construire un $K^{\Delta=0}$-schéma U par recollement de U_1 et U_2 suivant l'isomorphisme composé (2.67). Nous avons alors un morphisme de $K^{\Delta=0}$-schémas $v : V \longrightarrow U$ ainsi qu'un diagramme commutatif à flèches horizontales des immersions ouvertes :

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \longrightarrow & V & \longleftarrow & V_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U_1 & \longrightarrow & U & \longleftarrow & U_2. \end{array}$$

Nous identifierons U_1 et U_2 à leurs images dans U de sorte que $U_1 = v(V_1)$, $U_2 = v(V_2)$ et $U_1 \cap U_2 = v(V_1 \cap V_2)$.

Montrons que le morphisme $v : V \longrightarrow U$ ainsi construit vérifie les conditions (b)–(d) de la proposition 2.7.2. Commençons par la fin : les morphismes $V \longrightarrow \mathrm{Spec}(B) \times_{K^{\Delta=0}} U$ sont des immersions ouvertes. En effet, c'est bien le cas des restrictions de ces morphismes aux ouverts V_i, pour $i \in \{1, 2\}$. Or, V est supposé intègre ce qui entraîne que V_1 et V_2 sont denses dans V. On peut donc appliquer le lemme 2.7.6 ci-dessous pour conclure.

Par construction, le morphisme v est fidèlement plat, ouvert et régulier. Il découle de (d) qu'il est aussi à fibres géométriques connexes. La seconde moitié de (b) est claire.

Il reste à démontrer la propriété (c). Soit $V' \subset V$ un ouvert affine standard non vide et notons, pour $i \in \{1, 2\}$, $V'_i = V_i \cap V'$ et $U'_i = v(V'_i)$. Puisque $V' = V'_1 \cup V'_2$, nous avons $U' = U'_1 \cup U'_2$. Ainsi, $\mathcal{O}(U')$ est l'égalisateur de la paire de flèches $\mathcal{O}(U'_1) \times \mathcal{O}(U'_2) \rightrightarrows \mathcal{O}(U'_1 \cap U'_2)$. Puisque le morphisme $V'_1 \cap V'_2 \longrightarrow U'_1 \cap U'_2$ est dominant, le morphisme $\mathcal{O}(U'_1 \cap U'_2) \longrightarrow \mathcal{O}(V'_1 \cap V'_2)^{\Delta=0}$ est injectif. Il s'ensuit que

$\mathcal{O}(U)$ est aussi l'égalisateur de la paire de flèches $\mathcal{O}(V_1')^{\Delta=0} \times \mathcal{O}(V_2')^{\Delta=0} \rightrightarrows \mathcal{O}(V_1' \cap V_2')^{\Delta=0}$. Ceci fournit l'identification $\mathcal{O}(U') = \mathcal{O}(V')^{\Delta=0}$ et termine la preuve du corollaire. ∎

Lemme 2.7.6. — *Soient X un schéma séparé et $U, V \subset X$ des ouverts denses tels que $X = U \cup V$. Soit $j : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas et supposons que $j|_U$ et $j|_V$ sont des immersions ouvertes. Alors j est aussi une immersion ouverte.*

Démonstration. — Quitte à remplacer Y par son ouvert $j(X) = j(U) \cup j(V)$, on peut supposer que le morphisme j est surjectif. Il s'agit dans ce cas de montrer que j est un isomorphisme. Le problème est local sur Y : il suffit donc de montrer que les morphismes $j^{-1}j(U) \longrightarrow j(U)$ et $j^{-1}j(V) \longrightarrow j(V)$, déduits de j par changement de base suivant les inclusions $j(U) \hookrightarrow Y$ et $j(V) \hookrightarrow Y$, sont des isomorphismes. Autrement dit, on peut supposer que $Y = j(U)$. En identifiant Y et U, on a donc une rétraction $j : X \longrightarrow U$ de l'inclusion évidente $U \hookrightarrow X$. Puisque X est séparé, l'inclusion $U \hookrightarrow X$ est nécessairement une immersion fermée. Puisque U est un ouvert dense, on obtient que $U = X$. ∎

Lemme 2.7.7. — *Soit $V \subset \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$ un ouvert affine standard et bon au sens de la définition 2.7.3. Soit $q : V \longrightarrow \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$ une immersion ouverte telle que $- \circ q : (B/K)^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{O}(V)$ est un morphisme de (K, Δ)-algèbres. Supposons que pour chaque projection $\mathrm{pr}_i : \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe une immersion ouverte $q_i : \mathrm{pr}_i(V) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ telle que le carré*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "q"] \arrow[d] & \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}) \arrow[d, "\mathrm{pr}_i"] \\ \mathrm{pr}_i(V) \arrow[r, "q_i"] & \mathrm{Spec}(B) \end{tikzcd}$$

commute. Alors, $q(V)$ est aussi un ouvert bon de $\mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$.

Démonstration. — Notons $U = V_{\Delta=0}$ et $v : V \longrightarrow U$ le morphisme canonique. Posons $V' = q(V)$ et $v' : V' \longrightarrow U$ la composition de $q(V) \simeq V \longrightarrow U$. Il est clair que v' satisfait aux conditions (b) et (c) de la proposition 2.7.2, et ceci sans supposer l'existence des immersions ouvertes q_i. Ces immersions ouvertes servent à vérifier la condition (d). En effet, elles permettent décrire les morphismes $V' \longrightarrow \mathrm{Spec}(B) \times_{K^{\Delta=0}} U$ comme les compositions de

$$V' \simeq V \longrightarrow \mathrm{pr}_i(V) \times_{K^{\Delta=0}} U \xrightarrow{q_i \times \mathrm{id}} \mathrm{Spec}(B) \times_{K^{\Delta=0}} U$$

ce qui entraîne immédiatement que ces morphismes sont des immersions ouvertes denses. ∎

Proposition 2.7.8. — *Quitte à localiser la (K, Δ)-algèbre B par un élément non nul, le K-schéma $\mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$, vu comme un ouvert de lui-même, est bon au sens de la définition 2.7.3.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.6.5, $\mathrm{Spec}(B)$ est un $\mathrm{Gal}^{\Delta,\mathrm{rat}}(N/K)$-torseur rationnel défini sur K. Rappelons que $G = \mathrm{Gal}^{\Delta,\mathrm{rat}}(N/K)$ est le groupe rationnel de Galois différentiel de la Δ-extension normale N/K (voir la définition 2.6.3). D'après le corollaire 2.5.24 et quitte à localiser B par un non diviseur de zéro, on peut supposer que l'action rationnelle $a : \mathrm{Spec}(B) \times_{K^{\Delta=0}} G \dashrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ est définie sur un ouvert dense $W \subset \mathrm{Spec}(B) \times_{K^{\Delta=0}} G$ tel que les morphismes $a|_W, \mathrm{pr}_1|_W : W \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ sont fidèlement plats et le morphisme $(a|_W, \mathrm{pr}_2|_W) : W \longrightarrow \mathrm{Spec}(B) \times_{K^{\Delta=0}} G$ est une immersion ouverte d'image dense.

Le $K^{\Delta=0}$-groupe rationnel $G^n = G \times_{K^{\Delta=0}} \cdots \times_{K^{\Delta=0}} G$ agit rationnellement sur le K-schéma $\mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$ via l'action produit

$$a^n : \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}) \times_{K^{\Delta=0}} G^n \dashrightarrow \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}).$$

Cette action est définie sur l'ouvert dense W^n égal à $W \times_K \cdots \times_K W$ modulo permutation des facteurs. Il est encore vrai que les morphismes $a^n|_{W^n}, \mathrm{pr}_1|_{W^n} : W^n \longrightarrow \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$ sont fidèlement plats, et que le morphisme $(a^n|_{W^n}, \mathrm{pr}_2|_{W^n}) : W^n \longrightarrow \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}) \times_{K^{\Delta=0}} G^n$ est une immersion ouverte d'image dense.

D'après la proposition 2.7.2, il existe un ouvert affine standard, dense et bon $V \subset \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$. D'après la proposition 2.5.25, on peut trouver des éléments $g_1, \cdots, g_m \in G^n(K^{\Delta=0})$ tels que $\mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$ est recouvert par les images des immersions ouvertes $a^n_{g_i} : (W^n)_{g_i} \cap V \longrightarrow \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$. Le corollaire 2.7.5 et le lemme 2.7.7 permettent de conclure. ∎

Grâce à la proposition 2.7.8, on dispose d'une sous-(K,Δ)-algèbre simple de type fini $B \subset N$ vérifiant $\mathrm{Frac}(B) = N$ et des morphismes $c_n : \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n}) \longrightarrow X_n$ tels que les conditions (a)–(d) du théorème 2.6.7 sont satisfaites. Il nous reste à vérifier la condition (e). Pour cela, il suffit de montrer que si B' est une localisation de B par un élément non nul, alors les morphismes $c'_n : \mathrm{Spec}((B'/K)^{\otimes n}) \longrightarrow X_n$, obtenus en composant les c_n avec les inclusions évidentes $\mathrm{Spec}((B'/K)^{\otimes n}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}((B/K)^{\otimes n})$, sont surjectifs. Ceci est un cas particulier du lemme suivant.

Lemme 2.7.9. — *Soient k un corps et W, W_0, et X_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, des k-schémas. Soient $c : W \longrightarrow W_0$ et $p_i : W \longrightarrow X_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, des k-morphismes. On suppose que les morphismes $(p_i, c) : W \longrightarrow X_i \times_k W_0$ sont des immersions ouvertes. Alors, si $U_i \subset X_i$ sont des ouverts denses, on a*

$$c(W) = c(p_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(U_n)).$$

Démonstration. — Ceci découle par récurrence du lemme 2.5.21. ∎

Le théorème 2.6.7 est maintenant démontré !

2.8. Correspondance de Galois différentielle. —

Dans cette sous-section, nous démontrons la correspondance de Galois différentielle qui est originellement due à Kolchin [**47, 48, 49**] (voir aussi [**19**] et [**28**, §3]).

Théorème 2.8.1. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale de type fini telle que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$. Il existe alors une bijection strictement décroissante entre l'ensemble des sous-Δ-extensions $M/K \subset N/K$ et celui des sous-$K^{\Delta=0}$-groupes fermés de* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$. *Cette correspondance associe à M/K le sous-groupe* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)$. *De plus, la Δ-extension M/K est normale si et seulement si le sous-groupe* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)$ *est distingué dans* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$. *Dans ce cas, on a un isomorphisme canonique de $K^{\Delta=0}$-groupes algébriques :*

$$\mathrm{Gal}^{\Delta}(M/K) \simeq \frac{\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)}{\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)}. \tag{2.68}$$

Jusqu'à la fin de la preuve de ce théorème, nous fixons une Δ-extension normale de type fini N/K telle que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$. Nous commençons avec le résultat suivant.

Proposition 2.8.2. — *Soit $M/K \subset N/K$ une sous-Δ-extension. Alors,* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)$ *est naturellement un sous-$K^{\Delta=0}$-groupe fermé de* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$. *Si la Δ-extension M/K est normale, alors* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(M/K)$ *est naturellement un quotient de* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$ *et on a une suite exacte courte de $K^{\Delta=0}$-groupes algébriques :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M) \longrightarrow \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}^{\Delta}(M/K) \longrightarrow 1. \tag{2.69}$$

Démonstration. — Pour une sous-Δ-extension générale $M/K \subset N/K$, on dispose d'un morphisme de $K^{\Delta=0}$-schémas simpliciaux

$$\mathrm{Spec}(\check{C}^{\bullet}(N/M))_{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\check{C}^{\bullet}(N/K))_{\Delta=0}$$

induisant un morphisme de $K^{\Delta=0}$-groupes algébriques

$$\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M) = \mathrm{Spec}(N \otimes_M N)_{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0} = \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K). \tag{2.70}$$

Montrons que le morphisme (2.70) est une immersion fermée. Puisqu'il s'agit d'un morphisme de $K^{\Delta=0}$-groupes algébriques, il suffit de montrer que (2.70) est une immersion localement fermée génériquement sur $\mathrm{Spec}(N \otimes_M N)_{\Delta=0}$. Il suffit de vérifier ceci après changement de base suivant l'extension $N/K^{\Delta=0}$. Or, d'après le théorème 2.6.7(d), les morphismes

$$\mathrm{Spec}(N \otimes_M N) \longrightarrow N \otimes_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Spec}(N \otimes_M N)_{\Delta=0} \quad \text{et} \quad \mathrm{Spec}(N \otimes_K N) \longrightarrow N \otimes_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}$$

sont des isomorphismes génériquement. Il est donc suffisant de montrer que le morphisme

$$\mathrm{Spec}(N \otimes_M N) \longrightarrow \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)$$

est une immersion fermée, ce qui est clair.

Supposons maintenant que M/K est elle-même une Δ-extension normale. On dispose alors d'un morphisme de $K^{\Delta=0}$-schémas simpliciaux

$$\mathrm{Spec}(\check{C}^{\bullet}(N/K))_{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\check{C}^{\bullet}(M/K))_{\Delta=0}$$

induisant un morphisme de $K^{\Delta=0}$-groupes algébriques

$$\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) = \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Spec}(M \otimes_K M)_{\Delta=0} = \mathrm{Gal}^{\Delta}(M/K). \tag{2.71}$$

Puisque le morphisme $\mathrm{Spec}(N \otimes_K N) \longrightarrow \mathrm{Spec}(M \otimes_K M)$ est dominant, il en est de même du morphisme (2.71). Ceci entraîne que $\mathrm{Gal}^{\Delta}(M/K)$ est un quotient de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$.

Il reste à établir la suite exacte (2.69). Seule l'exactitude au milieu nécessite une preuve et, pour cela, on doit montrer que le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(N \otimes_M N)_{\Delta=0} \arrow[r, "(2.70)"] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0} \arrow[d, "(2.71)"] \\
\mathrm{Spec}(M)_{\Delta=0} \arrow[r, "\mathrm{diag}"] & \mathrm{Spec}(M \otimes_K M)_{\Delta=0}
\end{tikzcd}$$

est cartésien. Puisqu'il s'agit d'un carré commutatif de $K^{\Delta=0}$-groupes algébriques, il suffit de montrer que ce carré est cartésien génériquement sur $\mathrm{Spec}(N \otimes_M N)_{\Delta=0}$. Il suffit aussi de vérifier cela après changement de base suivant $M/K^{\Delta=0}$ sur la ligne horizontale inférieure et suivant $N/K^{\Delta=0}$ sur la ligne horizontale supérieure. En utilisant le théorème 2.6.7(d), on se ramène donc à considérer le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(N \otimes_M N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(N \otimes_K N) \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(M) \arrow[r, "\mathrm{diag}"] & \mathrm{Spec}(M \otimes_K M)
\end{tikzcd}$$

qui est évidemment cartésien. Ceci termine la preuve de la proposition. ■

On fixe une clôture algébrique $\overline{K^{\Delta=0}}$ de $K^{\Delta=0}$, et on pose $\overline{K} = K \otimes_{K^{\Delta=0}} \overline{K^{\Delta=0}}$ et $\overline{N} = N \otimes_{K^{\Delta=0}} \overline{K^{\Delta=0}}$. (Ainsi, on a $\overline{K^{\Delta=0}} = \overline{K}^{\Delta=0} = \overline{N}^{\Delta=0}$.) Le résultat suivant fournit un inverse de la correspondance $M/K \rightsquigarrow \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)$ de la proposition 2.8.2.

Lemme 2.8.3. — *Soit $H \subset \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$ un sous-$K^{\Delta=0}$-groupe fermé. Il existe alors une unique sous-Δ-extension $\mathrm{Fix}(H)/K \subset N/K$ telle que $\mathrm{Fix}(H) \otimes_{K^{\Delta=0}} \overline{K}^{\Delta=0} \subset \overline{N}$ est le sous-$(\overline{K}, \Delta)$-corps des éléments fixés par l'action du groupe $\mathrm{Gal}^{\Delta=0}(N/K)(\overline{K}^{\Delta=0})$. De plus, on a l'égalité $H = \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/\mathrm{Fix}(H))$ entre sous-groupes de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$.*

Démonstration. — La construction de $\mathrm{Fix}(H)$ est facile. On note $\overline{\mathrm{Fix}}(H) \subset \overline{N}$ le sous-$(\overline{K}, \Delta)$-corps des éléments fixés par le sous-groupe $H(\overline{K}^{\Delta=0}) \subset \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)(\overline{K}^{\Delta=0})$. Puisque H est défini sur $K^{\Delta=0}$, il s'ensuit que $\overline{\mathrm{Fix}}(H)$ est stable par l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}^{\Delta=0}/K^{\Delta=0})$ sur $\overline{N}$. On pose alors

$$\mathrm{Fix}(H) = \overline{\mathrm{Fix}}(H)^{\mathrm{Gal}(\overline{K}^{\Delta=0}/K^{\Delta=0})}.$$

Par descente galoisienne, on a bien $\mathrm{Fix}(H) \otimes_{K^{\Delta=0}} \overline{K}^{\Delta=0} = \overline{\mathrm{Fix}}(H)$.

Il reste à identifier H avec $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/\mathrm{Fix}(H))$. Clairement $H(\overline{K}^{\Delta=0})$ et $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/\mathrm{Fix}(H))(\overline{K}^{\Delta=0})$ agissent sur la Δ-extension $\overline{N}/\overline{\mathrm{Fix}}(H)$. D'après le théorème 2.6.17, on a donc une inclusion

$$H(\overline{K}^{\Delta=0}) \subset \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/\mathrm{Fix}(H))(\overline{K}^{\Delta=0})$$

et il en découle que $H \subset \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/\mathrm{Fix}(H))$. On peut donc remplacer K par $\mathrm{Fix}(H)$, supposer que $\mathrm{Fix}(H) = K$ et chercher à montrer que $H = \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$. Or, d'après le corollaire 2.6.6, le $\overline{K}$-schéma $\mathrm{Specrat}(\overline{N}/\overline{K})$ est un $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$-torseur rationnel. Puisque $H(\overline{K}^{\Delta=0})$ est dense dans H, on obtient que

$$\mathrm{Specrat}(\overline{\mathrm{Fix}}(H)) = \mathrm{Specrat}(\overline{N}^{H(\overline{K}^{\Delta=0})}) \simeq \mathrm{Specrat}(\overline{N})/H$$

qui n'est isomorphe à $\mathrm{Spec}(\overline{K})$ que lorsque $H = \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$. Ceci termine la preuve du lemme. ■

Lemme 2.8.4. — *Soit $M/K \subset N/K$ une sous-Δ-extension et notons $H = \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)$. Alors, $M = \mathrm{Fix}(H)$.*

Démonstration. — Clairement, $H(\overline{K}^{\Delta=0})$ agit par l'identité sur $\overline{M} = M \otimes_{K^{\Delta=0}} \overline{K^{\Delta=0}}$. Il s'ensuit que $M \subset \mathrm{Fix}(H)$. Ainsi, on peut remplacer K par M, supposer que $H = \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$, et chercher à montrer que $\mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)) = K$. On procède comme dans la dernière partie de la preuve du lemme 2.8.3. D'après le corollaire 2.6.6, le $\overline{K}$-schéma $\mathrm{Specrat}(\overline{N}/\overline{K})$ est un $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$-torseur rationnel. Puisque $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)(\overline{K}^{\Delta=0})$ est dense dans $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$, on obtient que

$$\mathrm{Specrat}(\overline{\mathrm{Fix}}(\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K))) = \mathrm{Specrat}(\overline{N}^{\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)(\overline{K}^{\Delta=0})}) \simeq \mathrm{Specrat}(\overline{N})/\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) = \mathrm{Spec}(K).$$

Ceci termine la preuve du lemme. ■

Démonstration du théorème 2.8.1. — D'après les lemmes 2.8.3 et 2.8.4, les correspondances

$$M/K \subset N/K \rightsquigarrow \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M) \qquad \text{et} \qquad H \subset \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M) \rightsquigarrow \mathrm{Fix}(H)/K$$

sont inverses l'une de l'autre. Lorsque la Δ-extension M/K est normale, la proposition 2.8.2 assure que $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$ et donne l'isomorphisme canonique (2.68). Pour terminer la preuve du théorème, il reste à montrer que si $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)$ est un sous-groupe distingué alors M/K est une Δ-extension normale.

Dans le reste de la preuve, on supposera que $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos, ce qui ne restreint pas la généralité. Si $g \in \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)(K^{\Delta=0})$, on a

$$\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/g(M)) = g \cdot \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M) \cdot g^{-1}.$$

(En effet, tout point rationnel du sous-groupe $g \cdot \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M) \cdot g^{-1}$ fixe tous les éléments de $g(M)$.) Ainsi, si $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)$ est distingué dans $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$, on a $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/g(M)) = \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)$ ce qui entraîne que $M = g(M)$.

Notons $C_1, \cdots, C_n$ les corps résiduels des points génériques de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on dispose d'un point canonique $g_i \in \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)(C_i)$ et d'un automorphisme de $\mathrm{Frac}(N \otimes_{K^{\Delta=0}} C_i)$ qu'on notera encore g_i. Le même argument utilisé ci-dessus montre que cet automorphisme envoie le sous-Δ-corps $\mathrm{Frac}(M \otimes_{K^{\Delta=0}} C_i)$ dans lui-même. En démêlant les constructions (voir la proposition 2.6.15), on obtient que la composition de

$$N \xrightarrow{d^0} \mathrm{Frac}(N \otimes_K N) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Frac}(N \otimes_{K^{\Delta=0}} \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0}) = \coprod_{i=1}^{n} \mathrm{Frac}(N \otimes_{K^{\Delta=0}} C_i)$$

envoie M dans $\coprod_{i=1}^{n} \mathrm{Frac}(M \otimes_{K^{\Delta=0}} C_i)$. En posant $C = \coprod_{i=1}^{n} C_i = \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0}$, obtient alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_K M & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(M \otimes_{K^{\Delta=0}} C) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ N \otimes_K N & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Frac}(N \otimes_{K^{\Delta=0}} C). \end{array}$$

Ceci montre que $M \otimes_K M$ s'injecte dans $\mathrm{Frac}(M \otimes_{K^{\Delta=0}} C)$ et on dispose donc d'une injection de (K, Δ)-algèbres artiniennes $\mathrm{Frac}(M \otimes_K M) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(M \otimes_{K^{\Delta=0}} C)$. Il découle du corollaire 1.3.9 que chaque facteur indécomposable de $\mathrm{Frac}(M \otimes_K M)$ est une Δ-extension de M engendrée par des constantes. Il s'ensuit que la Δ-extension M/K est totalement décomposée par elle-même, i.e., elle est normale. ■

On termine la sous-section avec un corollaire du théorème 2.8.1 qu'on utilise ensuite pour éliminer l'hypothèse de finitude dans la proposition 2.3.8(b).

Corollaire 2.8.5. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, N/K une Δ-extension normale de type fini et $M/K \subset N/K$ une sous-Δ-extension. On suppose que $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos (ce qui entraîne que $K^{\Delta=0} = M^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$). Si la Δ-extension M/K est normale, alors tout Δ-automorphisme de M/K s'étend en un Δ-automorphisme de N/K.*

Démonstration. — Vu le théorème 2.6.17, le résultat recherché découle du fait que le morphisme de $K^{\Delta=0}$-groupes algébriques $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}^{\Delta}(M/K)$ est surjectif et que $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos. ■

PROPOSITION 2.8.6. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, L/K et M/K des Δ-extensions. On suppose que $L^{\Delta=0}$ est une clôture algébrique de $K^{\Delta=0}$, et que M/K est normale et totalement décomposée par L/K (ce qui est le cas notamment si M/K est subordonnée à L/K). Alors, M/K est (non canoniquement) isomorphe à une sous-Δ-extension de L/K qui est unique si $M^{\Delta=0}$ est algébriquement clos.*

Démonstration. — L'unicité de l'image de M/K, lorsque $M^{\Delta=0}$ est algébriquement clos, découle du corollaire 2.3.7(ii). On se concentre donc sur la construction d'un plongement $M/K \hookrightarrow L/K$. Pour ce faire, on peut remplacer K et M par $K \otimes_{K^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}$ et $M \otimes_{M^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}$ (pour n'importe quel $K^{\Delta=0}$-morphisme $M^{\Delta=0} \hookrightarrow L^{\Delta=0}$). Autrement dit, on peut supposer que $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos (ce qui entraîne que $K^{\Delta=0} = M^{\Delta=0} = L^{\Delta=0}$).

Par le lemme de Zorn, il existe un plongement maximal $\theta : M'/K \hookrightarrow L/K$ d'une sous-Δ-extension normale $M'/K \subset M/K$. Nous allons montrer que $M' = M$. Il suffit pour cela de montrer que toute sous-Δ-extension normale de type fini $N/K \subset M/K$ est contenue dans M'/K. Par maximalité de M'/K, il suffit de montrer θ s'étend au sous-(K, Δ)-corps $M'' \subset M$ engendré par M' et N. (Utiliser le théorème 2.8.1 pour voir que M''/K est normale.) Or, d'après la proposition 2.4.6, on a $M'' = \mathrm{Frac}(M' \otimes_{N'} N)$ avec $N' = M' \cap N$. Il est donc suffisant de montrer que le plongement $\theta|_{N'} : N' \hookrightarrow L$ s'étend à N.

Or, la Δ-extension N/K est normale de type fini. La proposition 2.3.8(b) s'applique et fournit un plongement $\rho : N/K \hookrightarrow L/K$. Puisque N'/K est normale (utiliser le théorème 2.8.1), on a l'égalité $\theta(N') = \rho(N')$. En particulier, il existe un Δ-automorphisme σ' de N'/K tel que $\rho|_{N'} \circ \sigma' = \theta|_{N'}$. D'après le corollaire 2.8.5, il existe un Δ-automorphisme σ de N/K qui étend σ'. Par construction, $\rho \circ \sigma : N \hookrightarrow L$ et $\theta : M \hookrightarrow L$ coïncident sur N' comme souhaité. ■

2.9. Quelques compléments. —

Cette sous-section contient des compléments à la théorie de Galois différentielle. D'abord, on explique comment isoler la plus grande sous-Δ-extension de Picard–Vessiot d'une Δ-extension normale et on étend la correspondance de Galois différentielle à des Δ-extensions de Picard–Vessiot qui ne sont plus supposées de type fini. Ensuite, on construit des clôtures normales et de Picard–Vessiot d'un Δ-corps. Enfin, on fait le lien entre représentations du groupe de Galois différentiel linéaire absolu et les modules différentiels.

DÉFINITION 2.9.1. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension de type fini. On dit que N/K est* de Picard–Vessiot *si elle est normale (i.e., de Kolchin) et si son groupoïde de Galois différentiel* $\mathrm{Gal}^{\Delta}_{\bullet}(N/K)$ *est linéaire, i.e., donné par un schéma simplicial affine. (Étant donné que* $\mathrm{Gal}^{\Delta}_0(N/K) = \mathrm{Spec}(N^{\Delta=0})$*, il suffit que* $\mathrm{Gal}^{\Delta}_1(N/K) = \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}$ *soit affine ; voir* (2.55)*.)*

Lorsque la Δ-extension N/K n'est plus supposée de type fini, on dira qu'elle est de Picard–Vessiot si elle est normale et si toutes ses sous-Δ-extensions normales et de type fini sont de Picard–Vessiot au sens précédent.

LEMME 2.9.2. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale. Alors N/K est de Picard–Vessiot si et seulement si la Δ-extension $N/K \otimes_{K^{\Delta=0}} N^{\Delta=0}$ est de Picard–Vessiot.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que la Δ-extension N/K est de type fini. Le lemme découle alors du fait suivant : un groupoïde algébrique $G_\bullet$ défini sur un corps k et possédant finiment d'objets est affine si et seulement si le G_0-groupe algébrique $G_1 \times_{(d_0,d_1), G_0 \times_k G_0, \mathrm{diag}} G_0$ est affine. ■

Remarque 2.9.3. — Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale de type fini. D'après le théorème 2.6.7, $(N \otimes_K N)^{\Delta=0}$ est l'anneau des fonctions régulières sur $\mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}$, i.e., $(N \otimes_K N)^{\Delta=0} = \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0})$, alors que $\mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0}$ est l'anneau artinien des fonctions rationnelles sur $\mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}$. Si N/K est de Picard–Vessiot, le schéma $\mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}$ est affine par définition et on obtient alors l'égalité :

$$\mathrm{Frac}((N \otimes_K N)^{\Delta=0}) \simeq \mathrm{Frac}(N \otimes_K N)^{\Delta=0}. \tag{2.72}$$

En fait, il n'est pas difficile de voir que l'égalité (2.72) caractérise les Δ-extensions de Picard–Vessiot parmi les Δ-extensions normales de type fini. □

On rappelle le résultat bien connu suivant. (Voir par exemple [**1**, Exposé $\mathrm{VI_B}$, Proposition 12.10].)

PROPOSITION 2.9.4. — *Soit G un schéma en groupes de type fini sur un corps k. Alors, $\mathcal{O}(G)$ est naturellement une k-algèbre de Hopf de type fini et $G \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(G))$ est un morphisme surjectif de k-schémas en groupes qui est initial parmi les morphismes de G vers un k-schéma en groupes affine.*

THÉORÈME 2.9.5. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale. Il existe alors une plus grande sous-Δ-extension $M/K \subset N/K$ qui est de Picard–Vessiot. Si $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$ et si la Δ-extension N/K est de type fini, alors $\mathrm{Gal}^{\Delta}(M/K)$ s'identifie au quotient affine maximal de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$, i.e., au $K^{\Delta=0}$-schéma en groupes affine $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)))$.*

Démonstration. — On se ramène aussitôt au cas où N/K est de type fini et $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$. Le résultat recherché est alors une conséquence immédiate de la correspondance de Galois différentielle (voir le théorème 2.8.1) et de la proposition 2.9.4. ■

LEMME 2.9.6. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale. Supposons que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$. Alors, $(N \otimes_K N)^{\Delta=0}$ est naturellement une $K^{\Delta=0}$-algèbre de Hopf qui est de type fini si la Δ-extension N/K est de type fini.*

Démonstration. — Supposons d'abord que la Δ-extension N/K est de type fini. Puisque N/K est normale, le $K^{\Delta=0}$-schéma $\mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}$ représente le $K^{\Delta=0}$-groupe algébrique $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$. Or, d'après le théorème 2.6.7(c), on a $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}) = (N \otimes_K N)^{\Delta=0}$. La proposition 2.9.4 permet de conclure.

Si N/K n'est pas nécessairement de type fini, on peut tout de même l'écrire comme l'union filtrante de des sous-Δ-extensions normales de type fini : $N = \bigcup_{\alpha} N_{\alpha}$. D'après la discussion précédente, les $K^{\Delta=0}$-algèbres $(N_{\alpha} \otimes_K N_{\alpha})^{\Delta=0}$ sont naturellement des algèbres de Hopf. Il en est donc de même de la $K^{\Delta=0}$-algèbre $(N \otimes_K N)^{\Delta=0}$ puisqu'elle est l'union filtrante des $(N_{\alpha} \otimes_K N_{\alpha})^{\Delta=0}$. ■

Le lemme 2.9.6 permet d'étendre la construction du groupe de Galois différentiel au cas d'une Δ-extension de Picard–Vessiot qui n'est pas nécessairement de type fini.

DÉFINITION 2.9.7. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension de Picard–Vessiot. Supposons que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$. Alors, le $K^{\Delta=0}$-schéma en groupes affine $\mathrm{Spec}((N \otimes_K N)^{\Delta=0})$ est appelé le groupe de Galois différentiel de N/K et sera noté $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$.*

On a aussi une correspondance de Galois « infinie ».

THÉORÈME 2.9.8. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, et N/K une Δ-extension de Picard–Vessiot telle que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0}$. Il existe alors une bijection strictement décroissante entre l'ensemble des sous-Δ-extensions $M/K \subset N/K$ et celui des sous-groupes fermés du $K^{\Delta=0}$-schéma en groupes affine $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$. Cette correspondance associe à M/K le sous-groupe $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)$. De plus, la Δ-extension M/K est normale si et seulement si le sous-groupe $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)$ est distingué dans $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$. Dans ce cas, on a un isomorphisme canonique de $K^{\Delta=0}$-schémas en groupes affines :*

$$\mathrm{Gal}^{\Delta}(M/K) \simeq \frac{\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)}{\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/M)}. \tag{2.73}$$

Démonstration. — Il s'agit d'une extension immédiate du théorème 2.8.1. ■

Remarque 2.9.9. — On peut aussi étendre la correspondance de Galois différentielle aux Δ-extensions normales « infinies », mais il faut alors donner un sens aux sous-groupes fermés de pro-groupes algébriques non nécessairement affines. On laisse cela au lecteur intéressé. □

On passe maintenant à la construction des clôtures normales. Expliquons d'abord de quoi il s'agit.

DÉFINITION 2.9.10. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle. Une* clôture normale *(ou* de Kolchin*) de K est une Δ-extension normale $\widehat{K}/K$ maximale au sens suivant. Toute Δ-extension normale M/K est isomorphe à une sous-Δ-extension de $\widehat{K}/K$.*

PROPOSITION 2.9.11. — *Tout Δ-corps de caractéristique nulle possède une clôture normale unique à un isomorphisme (non unique) près.*

Démonstration. — Soit $(N_{\alpha}/K)_{\alpha \in I}$ une famille représentative des classes d'isomorphismes des Δ-extensions normales de type fini de K. Pour chaque $\alpha \in I$, on choisit une sous-(K, Δ)-algèbre simple de type fini $S_\alpha \subset N_\alpha$ telle que $\mathrm{Frac}(S_\alpha) = N_\alpha$. Ceci permet de reproduire l'argument utilisé à la fin de la démonstration du théorème 2.2.1 (voir aussi [**67**, Theorem 1]). On obtient de cette manière une Δ-extension $\widehat{K}/K$ et des inclusions de (K,Δ)-corps $i_\alpha : N_\alpha \hookrightarrow \widehat{K}$, pour $\alpha \in I$, telles que l'extension $\widehat{K}^{\Delta=0}/K^{\Delta=0}$ est algébrique et le (K,Δ)-corps $\widehat{K}$ est engendré par les $i_\alpha(N_\alpha)$.

Clairement, les Δ-extensions N_α/K sont totalement décomposées par $\widehat{K}/K$. En utilisant la proposition 2.2.13, on déduit que la Δ-extension $\widehat{K}/K$ est totalement décomposée par elle-même ; elle est donc normale. Puisque toute Δ-extension normale de type fini est isomorphe à l'une des N_α/K, il découle que $\widehat{K}/K$ décompose totalement toute Δ-extension normale M/K, même si cette Δ-extension n'est pas de type fini. La proposition 2.8.6 montre alors que M/K est isomorphe à une unique sous-Δ-extension de $\widehat{K}/K$. Ceci donne aussi l'unicité de $\widehat{K}/K$ à isomorphisme près. ■

Définition 2.9.12. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle. Une* clôture de Picard–Vessiot *de K est une Δ-extension de Picard–Vessiot $\widetilde{K}/K$ maximale au sens suivant. Toute Δ-extension de Picard–Vessiot M/K est isomorphe à une sous-Δ-extension de $\widetilde{K}/K$.*

Proposition 2.9.13. — *Tout Δ-corps de caractéristique nulle possède une clôture de Picard–Vessiot $\widetilde{K}/K$ unique à un isomorphisme (non unique) près. Si $\widehat{K}/K$ est une clôture normale de K, alors $\widetilde{K}/K$ est isomorphe à la plus grande sous-Δ-extension de $\widehat{K}/K$ qui est de Picard–Vessiot.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du théorème 2.9.5 et de la proposition 2.9.11. ■

Définition 2.9.14. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle tel que $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos. Soit $\widetilde{K}/K$ une clôture de Picard–Vessiot de K. Alors, le $K^{\Delta=0}$-schéma en groupes affine* $\mathrm{Gal}^\Delta(\widetilde{K}/K)$ *est appelé le* groupe de Galois différentiel linéaire absolu *de K ; il sera noté* $\widetilde{\mathrm{Gal}}^\Delta_K$.

Dans le reste de la sous-section, nous faisons le lien entre modules différentiels et représentations du groupe de Galois différentiel linéaire absolu. Nous commençons par une définition.

Définition 2.9.15. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et M un (K,Δ)-module de rang fini sur K. On dit qu'une Δ-extension L/K* trivialise *M si le (L,Δ)-module $L \otimes_K M$ est trivial, i.e., isomorphe à L^n muni de l'action évidente de Δ. Il revient de même de demander que le L-vectoriel $L \otimes_K M$ possède une base formée de vecteurs constants.*

Le résultat suivant est bien connu.

Proposition 2.9.16. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et M un (K,Δ)-module de rang fini sur K. Il existe alors une Δ-extension de Picard–Vessiot L/K de type fini qui trivialise M.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos. On divise la preuve en deux étapes.

Étape A. — Nous allons d'abord démontrer qu'il existe une Δ-extension de type fini L/K qui trivialise M et telle que $L^{\Delta=0} = K^{\Delta=0}$. (Le fait qu'on peut remplacer L/K par une Δ-extension de Picard–Vessiot sera établi dans l'étape suivante.)

On raisonne par récurrence sur le rang de M. Lorsque ce rang est nul, il n'y a rien à montrer. Supposons donc que M est non nul et notons A la (K,Δ)-algèbre symétrique $\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} \mathrm{S}^d M^\vee$. Alors $A \otimes_K M$ admet un vecteur constant non nul, à savoir l'image de $1 \in K$ du (K,Δ)-morphisme de coévaluation $K \hookrightarrow M^\vee \otimes_K M$. Soit B un quotient simple de la (K,Δ)-algèbre $A[f_i^{-1};\, i \in I]$, où $(f_i)_{i\in I}$ est une base de $M^\vee$. Alors, $K' = \mathrm{Frac}(B)$ est une Δ-extension de type fini vérifiant $K'^{\Delta=0} = K^{\Delta=0}$ et telle que le (K',Δ)-module $M' = K' \otimes_K M$ possède un vecteur constant non nul, engendrant une droite $D' \subset M'$. L'hypothèse de récurrence appliquée au quotient M'/D' fournit une Δ-extension de type fini K''/K' vérifiant $K''^{\Delta=0} = K'^{\Delta=0}$ et telle que $K'' \otimes_{K'} (M'/D')$ possède une base formée de vecteurs constants. Ainsi, quitte à remplacer K par K'', on peut supposer que M admet une base $e_0, \cdots, e_n$ telle que $\partial_i(e_0) = 0$ et $\partial_i(e_j) = u_{ij} \cdot e_0$, avec $u_{ij} \in K$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$. On a alors les relations $\partial_{i_1}(u_{i_2 j}) = \partial_{i_2}(u_{i_1 j})$ qui entraînent que la (K,Δ)-algèbre $E = K\langle x_1, \cdots x_n\rangle/(\partial_i x_j - u_{ij})^\Delta$ est non nulle. (En fait, on vérifie aisément que $E = K[\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n]$, où $\bar{x}_j$ et la classe de x_j dans E.) Si L est le corps des fractions d'un quotient simple de E, le (L,Δ)-module $L \otimes_K M$ est trivial ; il admet une base de vecteurs constants donnée par e_0 et les $e_j - \bar{x}_j \cdot e_0$.

Étape B. — Ici, nous montrons comment remplacer la Δ-extension L/K de l'étape précédente par une sous-Δ-extension de Picard–Vessiot.

Fixons une base $(v_1, \cdots, v_r)$ du K-vectoriel M. Soit $(w_1, \cdots, w_r)$ une base du L-vectoriel $L \otimes_K M$ telle que $\partial_i(w_j) = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant r$. Soit $g = (g_{jk})_{1 \leqslant j,k \leqslant r}$ la matrice à coefficients dans L telle que

$$w_j = \sum_{k=1}^{r} g_{jk} \cdot v_k.$$

Notons $A \subset L$ la sous-(K, Δ)-algèbre engendrée par les g_{jk} et $N = \mathrm{Frac}(A) \subset L$ son corps des fractions. La matrice $g = (g_{jk})_{1 \leqslant j,k \leqslant r}$ étant inversible dans L, son déterminant $\det(g) \in A$ est non nul. On pose $B = A[\det(g)^{-1}]$. Il est alors clair que le (B, Δ)-module $B \otimes_K M$ admet une base de vecteurs constants, i.e., il est isomorphe à B^r. Il s'ensuit que la Δ-extension N/K trivialise M. Pour terminer, il reste à voir que N/K est de Picard–Vessiot.

Soit $h = (h_{jk})_{1 \leqslant j,k \leqslant r}$ la matrice à coefficients dans B inverse de $g = (g_{jk})_{1 \leqslant j,k \leqslant r}$, i.e., telle que

$$v_j = \sum_{k=1}^{r} h_{jk} \cdot w_k.$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant r$, notons $f_k : M \longrightarrow B$ le morphisme K-lineaire donné par $f_k(v_j) = h_{jk}$. Par construction, f_k est un morphisme de (K, Δ)-modules. De plus, les images des f_k engendrent une sous-(K, Δ)-algèbre de type fini $A' \subset B$ telle que $A'[\det(h^{-1})] = B$. Il s'ensuit que $N = \mathrm{Frac}(A')$.

Puisque N/K trivialise le (K, Δ)-module M, il découle que la (N, Δ)-algèbre $N \otimes_K A'$ est engendrée par ses constantes. Autrement dit, le morphisme

$$N \otimes_{N^{\Delta=0}} (N \otimes_K A')^{\Delta=0} \longrightarrow N \otimes_K A'$$

est un isomorphisme. En particulier, la Δ-extension N/K est totalement décomposée par elle-même. C'est donc une Δ-extension normale. Par ailleurs, le groupe algébrique $\mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}$ admet un morphisme vers un schéma affine, à savoir $\mathrm{Spec}(N \otimes_K A')^{\Delta=0}$, induisant un isomorphisme génériquement. Ceci n'est possible que lorsque le groupe algébrique $\mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}$ est affine. Autrement dit, la Δ-extension N/K est bien de Picard–Vessiot. ∎

La proposition 2.9.16 permet la construction suivante.

Construction 2.9.17. — Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension de Picard–Vessiot telle que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0} = C$. Soit M un (K, Δ)-module de rang fini r trivialisé par N/K. On peut associer à M une représentation algébrique de rang r du C-schéma en groupes affines $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$ ou, d'une manière équivalente, un comodule de rang r sur la C-algèbre de Hopf $(N \otimes_K N)^{\Delta=0}$. Le C-vectoriel sous-jacent à cette représentation est $V = (M \otimes_K N)^{\Delta=0}$. La coaction de $(N \otimes_K N)^{\Delta=0}$ sur V est donnée par la composition de

$$\begin{tikzcd} V = (M \otimes_K N)^{\Delta=0} \arrow[r, "\mathrm{id}_M \otimes d^0"] & (M \otimes_K N \otimes_K N)^{\Delta=0} \arrow[d, "\sim"] & \\ & ((M \otimes_K N) \otimes_{N, d^1} (N \otimes_K N))^{\Delta=0} & (M \otimes_K N)^{\Delta=0} \otimes_C (N \otimes_K N)^{\Delta=0}. \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que ceci définit bien un comodule. Alternativement, on peut associer à M le $\check{C}^{\bullet}(N/K)^{\Delta=0}$-module cosimplicial $(M \otimes_K \check{C}^{\bullet}(N/K))^{\Delta=0}$ qui satisfait clairement à la condition (Cs) de [**14**, Proposition 1.8]. Ceci dispense de toute vérification ! □

Théorème 2.9.18. — *La construction 2.9.17 fournit une équivalence de catégories entre, d'une part, la catégorie des (K, Δ)-modules de rang fini trivialisés par N/K et, d'autre part, la catégorie des représentations algébriques de rang fini du C-schéma en groupes affine* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$.

Démonstration. — Une manière économe de décrire l'inverse de la construction 2.9.17 est la suivante. Un comodule V sur $(N \otimes_K N)^{\Delta=0}$ correspond à un $\check{C}^{\bullet}(N/K)^{\Delta=0}$-module cosimplicial $V^{\bullet}$ vérifiant la condition (Cs) de [**14**, Proposition 1.8]. (Bien entendu, on a $V = V^0$.) Clairement, le $\check{C}^{\bullet}(N/K)$-module cosimplicial

$V^\bullet \otimes_{\check{C}^\bullet(N/K)^{\Delta=0}} \check{C}^\bullet(N/K)$ vérifie aussi la condition (Cs). Or, par decente fpqc, un $\check{C}^\bullet(N/K)$-module cosimplicial vérifiant (Cs) est canoniquement isomorphe à $U \otimes_K \check{C}^\bullet(N/K)$ pour un K-vectoriel U unique à un isomorphisme unique près. En appliquant ceci à $V^\bullet \otimes_{\check{C}^\bullet(N/K)^{\Delta=0}} \check{C}^\bullet(N/K)$, on obtient un K-vectoriel M et un isomorphisme de N-vectoriels $V^0 \otimes_C N \simeq M \otimes_K N$. De plus, le K-vectoriel M est l'égalisateur de la paire de morphismes

$$V^0 \otimes_C N \underset{d^1}{\overset{d^0}{\rightrightarrows}} V^1 \otimes_{(N\otimes_K N)^{\Delta=0}} (N \otimes_K N).$$

Ainsi, M est naturellement un (K, Δ)-module de rang égal à celui du comodule V. C'est le (K, Δ)-module recherché. Le reste de la preuve est une vérification pénible du fait que la construction décrite ci-dessus fournit un foncteur quasi-inverse au foncteur décrit dans la construction 2.9.17. Les détails sont omis. ■

3. Topologie feuilletée de type fini : le contexte des Δ-schémas

Dans cette section, nous introduisons l'un des acteurs majeurs de cet article : la topologie feuilletée. À vrai dire, nous introduisons ici une version préliminaire de la topologie feuilletée; une version plus définitive est celle de la définition 6.5.9. Cette version préliminaire, appelée « topologie feuilletée de type fini » et désignée par « fttf », est introduite ici dans le contexte des Δ-schémas. Elle a l'avantage d'admettre une définition simple et naturelle (contrairement à la définition 6.5.9) mais, malheureusement, elle n'est pas compatible avec les morphismes généraux de k-feuilletages. La raison est simple et déjà visible dans le contexte des Δ-schémas : si $\Delta' \subset \Delta$ est un sous-ensemble de dérivations, un recouvrement fttf d'un Δ-schéma n'induit pas un recouvrement fttf du Δ'-schéma sous-jacent. Le problème vient de la condition de finitude qui n'est pas préservée en général par le passage aux Δ'-schémas sous-jacents.

Le language géométrique, réduit au minimum vital dans la section 1, devient indispensable à partir de maintenant. Ainsi, nous commençons cette section par rappeller la notion de « Δ-schéma » (qui sera englobée dans la notion plus générale de « feuilletage schématique » dans les sous-sections 6.1 et 6.2). La définition et les premières propriétés de la topologie fttf se trouvent dans la sous-section 3.3. Dans les trois dernières sous-sections, on étudie quelques classes particulières de faisceaux fttf, et notamment les faisceaux discrets et localement discrets qui jouent un rôle particulièrement important dans la théorie.

3.1. Quelques notions élémentaires de géométrie Δ-algébrique. —

Pour préciser la terminologie utilisée dans la suite, on fait une définition « sans surprise ».

Définition 3.1.1. —

(a) *Un* espace *(*localement*)* Δ-annelé *est un espace (localement) annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ en Δ-anneaux. Plus précisément, pour tout ouvert $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est muni d'une action de Δ qui en fait un Δ-anneau et, pour toute inclusion d'ouverts $V \subset U$, le morphisme de restriction $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$ est un morphisme de Δ-anneaux.*

(b) *Un* morphisme d'espaces *(*localement*)* Δ-annelés *$f : (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ est un morphisme d'espaces (localement) annelés qui respecte les structures de Δ-anneau, i.e., tel que $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$ est un Δ-morphisme pour tout ouvert $U \subset X$.*

(c) *Enfin, un* Δ-schéma *est un espace Δ-annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que l'espace annelé sous-jacent (i.e., obtenu en oubliant les actions des $\partial \in \Delta$) est un schéma. Les* morphismes de Δ-schémas *(qu'on appelle aussi simplement* Δ-morphismes*) sont les morphismes d'espaces localement Δ-annelés.*

Comme de coutume, le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ sera souvent omis des notations.

Proposition 3.1.2. — *Soit A un Δ-anneau. Alors, le schéma affine* $\mathrm{Spec}(A)$ *est naturellement un Δ-schéma. De plus, pour tout espace localement Δ-annelé $(X, \mathcal{O}_X)$, il existe une bijection canonique entre l'ensemble des morphismes d'espaces localement Δ-annelés $f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ et l'ensemble des morphismes de Δ-anneaux $A \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$. Cette bijection envoie f sur le morphisme induit sur les sections globales.*

Démonstration. — Pour tout ouvert $U \subset \operatorname{Spec}(A)$, l'anneau $\mathcal{O}(U)$ est l'égalisateur d'une paire de Δ-morphismes entre deux produits de localisations de A. C'est donc naturellement un Δ-anneau. Clairement, ces structures font de $\operatorname{Spec}(A)$ un Δ-schéma. La seconde assertion découle facilement de son analogue « sans dérivations » ; voir [**41**, Proposition 1.6.3]. ■

Un Δ-schéma est dit affine s'il en est ainsi du schéma sous-jacent.

Corollaire 3.1.3. — *Le foncteur $A \rightsquigarrow \operatorname{Spec}(A)$ fournit une équivalence entre l'opposée de la catégorie des Δ-anneaux et la catégorie des Δ-schémas affines.*

Remarque 3.1.4. — Étant donné un Δ-schéma S, un (S,Δ)*-schéma* est un morphisme de Δ-schémas de but S. (Comme de coutume, le morphisme structural sera souvent omis des notations.) Si A un Δ-anneau, on dira « (A,Δ)-schéma » au lieu de « $(\operatorname{Spec}(A),\Delta)$-schéma ». D'après la proposition 3.1.2, la donnée d'un (A,Δ)-schéma équivaut à celle d'un Δ-schéma et d'une structure de (A,Δ)-algèbre sur le Δ-anneau des sections globales de son faisceau structural. □

Proposition 3.1.5. — *La catégorie des Δ-schémas possède les limites finies et le foncteur « schéma sous-jacent » y commute.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas du produit fibré de Δ-schémas. Si $S = \operatorname{Spec}(A)$, $X = \operatorname{Spec}(B)$ et $Y = \operatorname{Spec}(C)$, avec A un Δ-anneau, B et C des (A,Δ)-algèbres, le produit fibré $X \times_S Y$ est donné par $\operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$ où $B \otimes_A C$ est muni de la structure de Δ-anneau décrite dans l'exemple 1.1.2. Ceci est une conséquence immédiate de la proposition 3.1.2. Le produit fibré en général est obtenu par recollement comme dans la preuve de [**41**, Théorème 3.2.1]. ■

Lemme 3.1.6. — *Soit X un Δ-schéma. On note $\mathcal{O}_X^{\Delta=0}$ le sous-préfaisceau de $\mathcal{O}_X$ donné par $\mathcal{O}_X^{\Delta=0}(U) = \mathcal{O}_X(U)^{\Delta=0}$ pour tout ouvert $U \subset X$. Alors, $\mathcal{O}_X^{\Delta=0}$ est un faisceau. C'est le faisceau des* constantes *sur le Δ-schéma X.*

Démonstration. — En effet, $\mathcal{O}_X^{\Delta=0}$ est le noyau du morphisme de faisceaux $(\partial)_{\partial\in\Delta} : \mathcal{O}_X \longrightarrow \prod_{\partial\in\Delta} \mathcal{O}_X$. Il est donc lui-même un faisceau. ■

Définition 3.1.7. — *Soit X un Δ-schéma. Un* $(\mathcal{O}_X,\Delta)$-module *est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{M}$ muni d'une action de Δ telle que $\partial(a\cdot l) = a\cdot\partial(l) + \partial(a)\cdot l$ pour tout $\partial\in\Delta$, et toutes sections a et l de $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{M}$. Le $(\mathcal{O}_X,\Delta)$-module $\mathcal{M}$ est dit* quasi-cohérent *s'il en est ainsi du $\mathcal{O}_X$-module sous-jacent.*

Proposition 3.1.8. — *Soitent A un Δ-anneau et M un (A,Δ)-module. Alors, le $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$-module quasi-cohérent $\widetilde{M}$ associé à M est naturellement un $(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)},\Delta)$-module quasi-cohérent. De plus, le foncteur $M \rightsquigarrow \widetilde{M}$ est une équivalence entre la catégorie des (A,Δ)-modules et celle des $(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)},\Delta)$-modules quasi-cohérents.*

Démonstration. — La construction de l'action de Δ sur $\widetilde{M}$ se fait comme dans la preuve de proposition 3.1.2. L'équivalence de catégories se déduit facilement de [**41**, Théorème 1.4.1 et Corollaire 1.4.2]. ■

Exemple 3.1.9. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de Δ-schémas. Alors, le $\mathcal{O}_Y$-module Ω_f des différentielles de Kähler relatives est naturellement un $(\mathcal{O}_Y,\Delta)$-module quasi-cohérent. Il s'agit d'une extension immédiate de l'exemple 1.1.3. □

Remarque 3.1.10. — Si X est un Δ-schéma, alors $\mathcal{O}_X$ est un $(\mathcal{O}_X,\Delta)$-module quasi-cohérent. Les sous-$(\mathcal{O}_X,\Delta)$-modules (quasi-cohérents) de $\mathcal{O}_X$ sont les Δ-*idéaux* (quasi-cohérents) de $\mathcal{O}_X$, i.e., les idéaux (quasi-cohérents) stables par l'action de Δ.

Si $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ est un Δ-idéal quasi-cohérent, le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}(\mathcal{I}) \subset X$ associé est naturellement un Δ-schéma. On parlera alors de *sous-Δ-schéma fermé* de X. On a ainsi une bijection strictement décroissante entre les Δ-idéaux quasi-cohérents de $\mathcal{O}_X$ et les sous-Δ-schémas fermés de X. □

Remarque 3.1.11. — Soient X un Δ-schéma et $U \subset X$ un ouvert. Alors, l'espace localement Δ-annelé obtenu en restreignant le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ à U, est aussi un Δ-schéma. Nous dirons que U est un *sous-Δ-schéma ouvert* de X. On dispose aussi de la notion de *sous-Δ-schéma localement fermé* de X. C'est simplement un sous-Δ-schéma fermé d'un sous-Δ-schéma ouvert de X.

Toutefois, voici un point important où la « topologie » des Δ-schémas diffère de celle des schémas ordinaires : si U est un sous-Δ-schéma ouvert d'un Δ-schéma X, il n'existe pas en général de sous-Δ-schémas fermés complémentaires ! En effet, un fermé de X ne possède pas en général une structure de sous-Δ-schéma de X. □

Définition 3.1.12. — *Soient X un Δ-schéma et $Z \subset X$ une partie de X. On dit que Z est un* Δ-fermé *s'il existe un Δ-idéal quasi-cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ tel que $Z = \mathrm{Z}(\mathcal{I})$. Autrement dit, un Δ-fermé est un fermé qui possède une structure de sous-Δ-schéma de X.*

Rappelons que le support d'un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{M}$, généralement noté $\mathrm{Supp}(\mathcal{M})$, est le sous-ensemble des points $x \in X$ tels que le $\mathcal{O}_{X,x}$-module $\mathcal{M}_x$ est non nul.

Lemme 3.1.13. — *Soient X un Δ-schéma et $\mathcal{M}$ un $(\mathcal{O}_X, \Delta)$-module quasi-cohérent. On suppose que $\mathcal{M}$ est localement de type fini en tant que $\mathcal{O}_X$-module. Alors, le support de $\mathcal{M}$ est un Δ-fermé de X.*

Démonstration. — La question est locale sur X. On peut donc supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathcal{M} = \widetilde{M}$ où A est un Δ-anneau et M un (A, Δ)-module qui est de type fini en tant que A-module. D'après [**34**, Chapitre 0, (1.7.4)], le support de M coïncide avec le fermé de $\mathrm{Spec}(A)$ défini par l'annulateur $\mathrm{ann}(M)$ de M. Le lemme 1.1.4 permet alors de conclure. ■

Rappelons qu'un schéma est dit de caractéristique nulle si ses corps résiduels sont de caractéristique nulle. Un Δ-schéma est dit de caractéristique nulle s'il en est ainsi du schéma sous-jacent. Se donner un Δ-schéma de caractéristique nulle revient à se donner un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma.

Lemme 3.1.14. — *Soient X un Δ-schéma de caractéristique nulle et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un Δ-idéal quasi-cohérent. Alors, $\sqrt{\mathcal{I}}$ est aussi un Δ-idéal quasi-cohérent.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme 1.1.7. ■

Si X est un schéma, nous notons comme d'habitude $X_{\text{réd}} = \mathrm{Z}(\sqrt{(0)}\,)$ son plus grand sous-schéma fermé réduit. D'après le lemme 3.1.14, si X est un Δ-schéma de caractéristique nulle, $X_{\text{réd}}$ est naturellement un sous-Δ-schéma fermé de X. Plus généralement, si $Z \subset X$ est un Δ-fermé, il possède une unique structure réduite de sous-Δ-schéma fermé de X.

Proposition 3.1.15. — *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme quasi-compact de Δ-schémas. Alors, l'image fermée schématique de f est un sous-Δ-schéma fermé de X.* (1)

Démonstration. — La question est locale au-dessus de X. On peut donc supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ est un Δ-schéma affine. Puisque f est quasi-compact, il s'ensuit que Y admet un recouvrement fini $(Y_i)_{i \in I}$ par des ouverts affines Y_i. Or, l'image fermée schématique de f est l'union des images fermées schématiques des $f|_{Y_i}$. Ainsi, on peut supposer que Y est lui même affine, isomorphe à $\mathrm{Spec}(B)$. Dans ce cas, l'image fermée schématique de f est le sous-schéma fermé défini par $\ker\{A \to B\}$ qui est clairement un Δ-idéal. ■

Corollaire 3.1.16. — *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme quasi-compact de Δ-schémas. Si Z est un Δ-fermé de Y, alors $\overline{f(Z)}$ est un Δ-fermé de X.*

Définition 3.1.17. — *Soient X un Δ-schéma et $x \in X$ un point de X. On dit que x est un* Δ-point *si l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ est un Δ-idéal. Dans ce cas, $\kappa(x)$ est naturellement un Δ-corps et $\mathrm{Spec}(\kappa(x)) \longrightarrow X$ est un morphisme de Δ-schémas.*

Lemme 3.1.18. —

(a) Si A est un Δ-anneau, les Δ-points de $\mathrm{Spec}(A)$ sont exactement les Δ-idéaux premiers de A.

(b) Soient $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de Δ-schémas et $y \in Y$ un Δ-point de Y. Alors, $f(y) \in X$ est un Δ-point de X.

(c) Soient X un Δ-schéma et $x \in X$ un Δ-point de X. Alors, $\overline{\{x\}}$ est un Δ-fermé de X.

(d) Réciproquement, soient X un Δ-schéma de caractéristique nulle et $Z \subset X$ un Δ-fermé. Alors, tout point générique de Z est un Δ-point de X.

1. Pour plus de précision, nous employons le terme « image fermée schématique » au lieu de « image schématique » de [**41**, Chapitre I, Définition 6.10.1].

Démonstration. — Les assertions (a) et (b) sont claires. L'assertion (c) découle de la proposition 3.1.15. Pour démontrer (d), on munit Z de sa structure de sous-Δ-schéma fermé réduit de X et on applique ensuite la proposition 1.1.19(i). ∎

Définition 3.1.19. — *Un Δ-schéma X de caractéristique nulle est dit* localement radiciellement noethérien *s'il existe un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X par des ouverts affines tel que les $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbres $\mathcal{O}(U_i)$ sont radiciellement noethériennes.*

On dit que le Δ-schéma X est radiciellement noethérien *si de plus le schéma X est quasi-compact.*

Proposition 3.1.20. — *Soit X un Δ-schéma de caractéristique nulle radiciellement noethérien. Alors, toute chaîne décroissante de Δ-fermés*

$$Z_0 \supset Z_1 \supset \cdots \supset Z_n \supset \cdots$$

est stationnaire.

Démonstration. — Le résultat recherché est une conséquence immédiate de la correspondance biunivoque entre les Δ-idéaux radiciels d'une $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbre et les Δ-fermés de son spectre. ∎

Corollaire 3.1.21. — *Soient A une $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbre. Alors,* $\operatorname{Spec}(A)$ *est radiciellement noethérien si et seulement si A est radiciellement noethérienne.*

Démonstration. — La condition est clairement suffisante. Sa nécessité découle de la proposition 3.1.20. ∎

Définition 3.1.22. — *Soit S un Δ-schéma. Un (S,Δ)-schéma X est dit* localement de type fini *s'il existe un recouvrement par des ouverts affines $(T_i)_{i\in I}$ de S et des recouvrements par des ouverts affines $(Y_{ij})_{j\in J_i}$ de $X\times_S T_i$, tels que les $(\mathcal{O}(T_i),\Delta)$-algèbres $\mathcal{O}(Y_{ij})$ sont de type fini.*

On dit que le (S,Δ)-schéma X est de type fini *si de plus le S-schéma X est quasi-compact. (Lorsque S est quasi-compact, ceci équivaut à dire que X est quasi-compact.)*

Proposition 3.1.23. — *Soient A un Δ-anneau et B une (A,Δ)-algèbre. Alors,* $\operatorname{Spec}(B)$ *est un (A,Δ)-schéma de type fini si et seulement si la (A,Δ)-algèbre B est de type fini.*

Démonstration. — La preuve pour les anneaux s'étend aux Δ-anneaux sans difficulté. ∎

Proposition 3.1.24. — *Soient S un Δ-schéma de caractéristique nulle et X un (S,Δ)-schéma (localement) de type fini. Si S est (localement) radiciellement noethérien, il en est de même de X.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du théorème 1.1.15. ∎

La définition suivante qui est motiviée par le théorème de l'involutivité générique de Malgrange (théorème 1.2.1).

Définition 3.1.25. —

(a) *Soit S un schéma quasi-compact. Un morphisme de schémas $T\longrightarrow S$ est dit* en involution *si le $S_{\text{réd}}$-schéma $T_{\text{réd}}$ est isomorphe à la limite projective d'une tour de $S_{\text{réd}}$-schémas $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que Q_0 est quasi-compact lisse et les morphismes de transition $Q_n\longrightarrow Q_{n-1}$, pour $n\geqslant 1$, sont des projections de fibrés vectoriels de rang fini.*

(b) *Soit X un $(\mathbb{Q},\Delta)$-schéma quasi-compact. Un morphisme de $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas $Y\longrightarrow X$ est dit* en involution *s'il en est ainsi du morphisme de schémas sous-jacent.*

Lemme 3.1.26. — *Si $T\longrightarrow S$ et $P\longrightarrow T$ sont des morphismes de schémas en involution, alors le morphisme composé $P\longrightarrow S$ est aussi en involution. Si $Y\longrightarrow X$ et $Z\longrightarrow Y$ sont des morphismes de $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas en involution, alors le morphisme composé $Z\longrightarrow X$ est aussi en involution.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que S, T et P sont réduits. Écrivons $T=\lim_n T_n$ et $P=\lim_n P_n$ avec $T_0\longrightarrow S$ et $P_0\longrightarrow T$ quasi-compacts lisses, et $T_n\longrightarrow T_{n-1}$ et $P_n\longrightarrow P_{n-1}$ des projections de fibrés vectoriels. On peut trouver une fonction strictement croissante $\theta:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, un $T_{\theta(n)}$-schéma P'_n tel que $P'_n\times_{T_{\theta(n)}}T\simeq P_n$. Quitte à raffiner θ, on peut supposer que le $T_{\theta(0)}$-schéma P'_0 est lisse et que les projections $P_n\longrightarrow P_{n-1}$, pour $n\geqslant 1$, proviennent de morphismes $P'_n\longrightarrow P'_{n-1}\times_{T_{\theta(n-1)}} T_{\theta(n)}$ qui sont des projections de fibrés vectoriels. Or, le S-schéma P est clairement la limite projective de la tour

$$\cdots\longrightarrow P'_1\times_{T_{\theta(1)}}T_{\theta(1)+1}\longrightarrow P'_1\longrightarrow P'_0\times_{T_{\theta(0)}}T_{\theta(1)}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P'_0\times_{T_{\theta(0)}}T_{\theta(0)+1}\longrightarrow P'_0.$$

Ceci termine la preuve. ∎

Proposition 3.1.27. — *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de type fini de $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas. On suppose que X possède un nombre fini de composantes irréductibles. Il existe alors un ouvert dense $U \subset X$ et un ouvert dense $V \subset f^{-1}(U)$ tel que le morphisme $f|_V : V \longrightarrow U$ est en involution.*

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence directe du théorème 1.2.1. ∎

Proposition 3.1.28. — *Soient X un Δ-schéma de caractéristique nulle et $f : Y \longrightarrow X$ un Δ-morphisme localement de type fini. Soit $\xi \in X$ un point générique possédant un voisinage ouvert irréductible. (Ceci est automatique si X est localement radiciellement noethérien.) Si l'image de f contient ξ, alors elle contient aussi un voisinage ouvert de ξ.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que X et Y sont réduits. Quitte à remplacer X par un voisinage ouvert de ξ, on peut supposer que X est affine et intègre. Dire que ξ est dans l'image de f, revient à dire que le Δ-schéma $Y_\xi = Y \times_X \operatorname{Spec}(\kappa(\xi))$ est non vide. Il possède donc des Δ-points. On peut alors remplacer Y par l'adhérence (dans Y) d'un Δ-point de Y_ξ et supposer que Y est aussi intègre. Quitte à remplacer Y par un ouvert non vide, on peut supposer qu'il est affine. Ainsi, on est ramené au cas où $X = \operatorname{Spec}(A)$, $Y = \operatorname{Spec}(B)$ et f est induit par un morphisme injectif de $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbres $A \longrightarrow B$.

On peut maintenant appliquer le théorème 1.2.1. En particulier, quitte à remplacer Y par un ouvert affine standard non vide, on peut supposer que $f : Y \longrightarrow X$ est ouvert. Ceci permet de conclure. ∎

Le prochain résultat est un analogue différentiel du théorème de constructibilité de Chevalley. Pour l'énoncer, nous avons besoin de la définition suivante. (On se restreint au cas radiciellement noethérien pour simplifier.)

Définition 3.1.29. — *Soit X un Δ-schéma de caractéristique nulle radiciellement noethérien. Une partie $T \subset X$ est dite* Δ-constructible *si elle appartient au plus petit ensemble de parties de X contenant les Δ-fermés, et stable par intersection finie et passage au complémentaire (et donc aussi réunion finie).*

Remarque 3.1.30. — Gardons les hypothèses de la définition 3.1.29.

(a) Toute partie Δ-constructible de X peut s'écrire comme une réunion disjointe de parties de la forme $Z \smallsetminus T$ avec $Z \subset X$ un Δ-fermé irréductible et $T \subset Z$ un Δ-fermé strict.

(b) Si une partie Δ-constructible $Q \subset X$ contient le point générique d'un Δ-fermé irréductible Z, il existe un Δ-fermé strict $T \subset Z$ tel que $Z \smallsetminus T \subset Q$.

(c) Une partie Δ-constructible $Q \subset X$ est uniquement déterminée par les Δ-points qu'elle contient. (Si $Q' \subset X$ est une autre partie Δ-constructible ayant les mêmes Δ-points que Q, on démontre que $Q = Q'$ par récurrence noethérienne sur X en utilisant (b).) □

Théorème 3.1.31. — *Soient X un Δ-schéma de caractéristique nulle radiciellement noethérien et $f : Y \longrightarrow X$ un Δ-morphisme de type fini. Alors, il existe une unique partie Δ-constructible $Q \subset X$ caractérisée par la propriété suivante : un Δ-point de X appartient à Q si et seulement si il est dans l'image de f. De plus, on a $f(Y) \subset Q$.*

Démonstration. — L'uncité découle de la remarque 3.1.30(c). Pour l'existence, on raisonne par récurrence noethérienne sur X en utilisant les propositions 3.1.15 et 3.1.28. ∎

3.2. Quotient discret d'un Δ-schéma. Théorème d'existence. —

Dans cette sous-section, on fixe un Δ-corps K de caractéristique nulle et on note $C = K^{\Delta=0}$ son corps des constantes. Étant donné un C-schéma X, le produit fibré $K \otimes_C X = \operatorname{Spec}(K) \times_{\operatorname{Spec}(C)} X$ est naturellement un (K,Δ)-schéma. (Appliquer la proposition 3.1.5 avec $\operatorname{Spec}(C)$ et X considérés comme des Δ-schémas au moyen de l'action identiquement nulle de Δ.) On commence avec le résultat suivant.

Proposition 3.2.1. — *Le foncteur $X \rightsquigarrow K \otimes_C X$, de la catégorie des C-schémas dans celle des (K,Δ)-schémas, est pleinement fidèle.*

Démonstration. — Le foncteur $K \otimes_C -$ est fidèle car la C-algèbre K est fidèlement plate. Pour montrer qu'il est plein, on se donne deux C-schémas X et Y ainsi qu'un (K,Δ)-morphisme $\varphi : K \otimes_C Y \longrightarrow K \otimes_C X$, et on cherche un morphisme de C-schémas $f : Y \longrightarrow X$ tel que $\varphi = K \otimes_C f$. Soit $(V_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert de Y et supposons que les $\varphi_j = \varphi|_{K\otimes_C V_j}$ proviennent de morphismes de C-schémas $f_j : V_j \longrightarrow X$. Alors, puisque notre foncteur est fidèle, les morphismes f_j se recollent pour fournir le morphisme f recherché. Ainsi, nous pouvons travailler localement sur Y.

Soit $U \subset X$ un ouvert affine. Nous allons montrer que l'image inverse de $K \otimes_C U$ par φ est de la forme $K \otimes_C V$ pour un ouvert $V \subset Y$. Posons $W = \varphi^{-1}(K \otimes_C U)$. Puisque U est affine, le morphisme $\varphi|_W : W \longrightarrow K \otimes_C U$ correspond à un morphisme de (K, Δ)-algèbres $\varphi^* : K \otimes_C \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(W)$. Ce morphisme envoie $\mathcal{O}(U)$ dans $\mathcal{O}(W)^{\Delta=0}$. D'après le lemme 3.2.2 ci-dessous, $\mathcal{O}(V) \simeq \mathcal{O}(W)^{\Delta=0}$ où V est l'image de W par la projection $K\otimes_C Y \longrightarrow Y$. Nous disposons donc d'un carré commutatif de (C, Δ)-algèbres

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(W) & K \otimes_C \mathcal{O}(U) \arrow[l] \\ \mathcal{O}(V) \arrow[u] & \mathcal{O}(U) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

qui induit la factorisation suivante du morphisme de (K, Δ)-algèbres φ^* :

$$\begin{tikzcd} K \otimes_C \mathcal{O}(U) \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "\varphi^*"'] & K \otimes_C \mathcal{O}(V) \arrow[d] \\ & \mathcal{O}(W). \end{tikzcd}$$

Autrement dit, le morphisme de (K, Δ)-schémas $\varphi|_W : W \longrightarrow K \otimes_C U$ s'étend en un morphisme $\varphi'_U : K \otimes_C V \longrightarrow K \otimes_C U$ provenant d'un morphisme de C-schémas $f_U : V \longrightarrow U$. Or, W est un ouvert dense dans $K\otimes_C V$. (En effet, par construction, l'ouvert W rencontre toutes les fibres du morphisme $K\otimes_C V \longrightarrow V$ et ces fibres sont des schémas intègres d'après la première assertion de la proposition 1.3.7.) Puisque φ et φ'_U coïncident sur W, nous déduisons que $(\varphi|_{K\otimes_C V})_{\text{réd}} : (K \otimes_C V)_{\text{réd}} \longrightarrow (K \otimes_C X)_{\text{réd}}$ coïncide avec $(\varphi'_U)_{\text{réd}} : (K \otimes_C V)_{\text{réd}} \longrightarrow (K \otimes_C X)_{\text{réd}}$. Ceci suffit pour entraîner que $K \otimes_C V \subset \varphi^{-1}(K \otimes_C U) = W$, ce qui donne l'égalité désirée : $W = K \otimes_C V$. En plus de cela, on sait maintenant que le morphisme $\varphi|_{K\otimes_C V} : K \otimes_C V \longrightarrow K \otimes_C X$ provient d'un morphisme de C-schémas $f_U : V \longrightarrow X$. En faisant varier l'ouvert affine $U \subset X$, on obtient un recouvrement de Y par des ouverts V tels que $\varphi|_{K\otimes_C V}$ provient d'un morphisme de C-schémas. Ceci permet de conclure (voir le début de la preuve). ■

Le lemme ci-dessous généralise le corollaire 1.3.4. Il a servi dans la preuve de la proposition 3.2.1.

Lemme 3.2.2. — *Soit E une C-algèbre et soit $W \subset \mathrm{Spec}(K \otimes_C E)$ un ouvert. L'image de W par la projection $\mathrm{Spec}(K \otimes_C E) \longrightarrow \mathrm{Spec}(E)$ est un ouvert $V \subset \mathrm{Spec}(E)$ et on a un isomorphisme canonique $\mathcal{O}(V) \simeq \mathcal{O}(W)^{\Delta=0}$.*

Démonstration. — La première assertion est mise pour mémoire ; voir le lemme 1.3.14. Le morphisme de (C, Δ)-schémas $p : W \longrightarrow V$ induit un morphisme de C-algèbres $\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(W)^{\Delta=0}$ et nous cherchons à montrer que ce morphisme est inversible. Il est plus précis de montrer que le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_V \longrightarrow p_*\mathcal{O}_W^{\Delta=0}$ est inversible (voir le lemme 3.1.6). Il suffit de montrer cela après évaluation sur les ouverts affines de V. On retombe alors sur l'énoncé initial dans le cas particulier où $V = \mathrm{Spec}(E)$. Autrement dit, on peut supposer que la projection $W \longrightarrow \mathrm{Spec}(E)$ est surjective, et c'est ce que nous ferons dans la suite.

Soit $W' \subset W$ un ouvert qui s'envoie surjectivement sur $\mathrm{Spec}(E)$. Alors W' est schématiquement dense dans W (voir par exemple [**2**, Exposé IX, Corollaire 4.6]) ce qui entraîne que le morphisme $\mathcal{O}(W) \longrightarrow \mathcal{O}(W')$ est injectif. On en déduit les inclusions suivantes :

$$E \hookrightarrow \mathcal{O}(W)^{\Delta=0} \hookrightarrow \mathcal{O}(W')^{\Delta=0}.$$

Ceci montre qu'il est suffisant de traiter le cas de l'ouvert W', i.e., de montrer que $E \simeq \mathcal{O}(W')^{\Delta=0}$. Comme application de ce principe, nous pouvons supposer que W est un ouvert affine standard. En effet, puisque le schéma $\mathrm{Spec}(E)$ est quasi-compact, on peut d'abord trouver un ouvert quasi-compact $W' \subset W$ qui s'envoie surjectivement sur $\mathrm{Spec}(E)$. Un argument de passage à la limite montre que, pour des sous-C-algèbres de type fini suffisamment grandes $K_0 \subset K$ et $E_0 \subset E$, W' provient d'un ouvert $W'_0 \subset \mathrm{Spec}(K_0 \otimes_C E_0)$ qui s'envoie surjectivement sur $\mathrm{Spec}(E_0)$. On peut alors appliquer le sous-lemme 3.2.3 ci-dessous pour conclure. (À moins que Δ ne soit vide, auquel cas le lemme qu'on est entrain de démontrer est évident, le degré de transcendance de l'extension K/C est non nul et on peut supposer que le C-schéma $\mathrm{Spec}(K_0)$ est de dimension non nulle comme il se doit pour pouvoir appliquer ledit sous-lemme.)

Fixons $g \in K\otimes_C E$ tel que $W = \mathrm{D}(g)$ et notons $E' = (K\otimes_C E[g^{-1}])^{\Delta=0}$. Nous devons montrer que $E = E'$. Puisque la C-algèbre K est plate et grâce à la proposition 1.3.3, nous avons une chaîne d'inclusions :

$$K \otimes_C E \hookrightarrow K \otimes_C E' \hookrightarrow K \otimes_C E[g^{-1}].$$

En inversant g dans les deux premiers anneaux, nous obtenons l'égalité $K \otimes_C E[g^{-1}] = K \otimes_C E'[g^{-1}]$. Puisque la E-algèbre $K \otimes_C E[g^{-1}]$ est fidèlement plate, l'inclusion $E \hookrightarrow E'$ est donc bien une égalité comme désiré. ∎

Sous-lemme 3.2.3. — *Soient X et Y des schémas de type fini sur un corps k, et soit $f : Y \longrightarrow X$ un k-morphisme. On suppose que Y est affine, et que f est surjectif à fibres irréductibles et de dimension non nulle. Soit $W \subset Y$ un ouvert tel que $f(W) = X$. Il existe alors un ouvert affine standard $D \subset Y$, contenu dans W et tel que $f(D) = X$.*

Démonstration. — Notons $Z = Y \smallsetminus W$. Il suffit de construire un fermé $T \subset Y$ tel que $Z \cap T = \varnothing$ et $f(T) = X$. En effet, puisque Y est affine, on peut alors trouver une section $a \in \mathcal{O}(Y)$ qui s'annule sur Z et qui vaut 1 sur T. Il s'ensuit que $T \subset \mathrm{D}(a) \subset W$ et $D = \mathrm{D}(a)$ convient. Pour construire T, on raisonne par récurrence noethérienne sur X. On peut donc supposer que si $F \subsetneq X$ est un fermé strict, alors il existe un fermé $G \subset Y$, ne rencontrant pas Z et tel que $f(G) = F$.

Soient $X' \subset X$ et $Y' \subset Y$ les lieux réguliers de $X_{\text{réd}}$ et $f^{-1}(X')_{\text{réd}}$, et notons $f' : Y' \longrightarrow X'$ le morphisme induit. Ce morphisme est dominant puisqu'il en est ainsi de f. De plus, les fibres génériques de f' sont irréductibles et de dimension non nulles.

Soit $x \in X'$ un point fermé tel que $f_{\text{réd}}$ est plat en tout point de $f^{-1}(x)$ et tel que $f'^{-1}(x) \neq \varnothing$. Soient y_0 et y_1 deux points fermés distincts appartenant à $f'^{-1}(x) \smallsetminus Z$. (L'existence de ces points découle de l'hypothèse que $f^{-1}(x)$ est irréductible et de dimension non nulle, et du fait que $f'^{-1}(x) \smallsetminus Z$ est un ouvert non vide de $f^{-1}(x)$.) Soit $t \in \mathcal{O}(Y)$ une section qui s'annule sur y_0 et qui vaut 1 sur $\{y_1\} \sqcup Z$. Posons $T_0 = \mathrm{Z}(t) \subset Y$. Nous allons montrer que $f(T_0)$ contient un ouvert non vide de X; ceci et la récurrence noethérienne terminera la preuve du sous-lemme. Pour ce faire, on procède par l'absurde, ce qui revient à supposer que le fermé $\overline{f(T_0)}$ est partout de codimension non nulle dans X. (On utilise bien entendu le théorème de Chevalley qui assure que $f(T_0)$ est une partie constructible de X.) En particulier, pour tout ouvert $U \subset X$ contenant x, $S = \overline{f(T_0)} \cap U$ est de codimension non nulle dans U. Notons V l'image inverse de U dans Y. Quitte à rétrécir U, on peut supposer que U est irréductible et que $f_{\text{réd}} : V_{\text{réd}} \longrightarrow U_{\text{réd}}$ est plat. La condition sur les fibres de f entraîne alors que V est irréductible. Plus généralement, si $P \subset U$ est un fermé irréductible de codimension c, il en est de même de $f^{-1}(P)$. Il s'ensuit que $f^{-1}(S) \subset V$ est une partie fermée de codimension non nulle et que ses composantes irréductibles de codimension 1 dans V sont toutes de la forme $f^{-1}(P)$ avec $P \subset S$ une composante irréductible de codimension 1 dans U. Étant donné que $T_0 \cap V \subset f^{-1}(S)$ est un diviseur de Cartier de V, il s'ensuit qu'une composante irréductible de $T_0 \cap V$ contenant y_0 contient nécessairement y_1, ce qui est impossible par construction. ∎

Dans le reste de cette sous-section, on s'intéresse à l'adjoint à gauche du foncteur $K\otimes_C -$ de la proposition 3.2.1. Il est peu probable qu'un tel adjoint soit défini en tous les (K, Δ)-schémas, même si on se restreint aux (K, Δ)-schémas réduits de type fini. (Cependant, nous n'avons pas de contrexemples à proposer.) En revanche, le théorème 3.2.10 ci-dessous montre que tout (K, Δ)-schéma réduit de type fini possède un ouvert dense, dont le complémentaire est Δ-fermé, et en lequel cet adjoint est défini.

Sauf mention explicite du contraire un C-schéma sera considéré comme un (C, Δ)-schéma au moyen de l'action identiquement nulle de Δ.

Définition 3.2.4. — *Soient Y un (K, Δ)-schéma, X un C-schéma et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de (C, Δ)-schémas.*

(a) *Nous dirons que $f : Y \longrightarrow X$ (ou X si aucune confusion n'est à craindre) est un* quotient discret catégorique *du (K, Δ)-schéma Y si, pour tout C-schéma T, l'application*

$$- \circ f : \mathrm{Hom}_C(X, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C,\Delta}(Y, T) \tag{3.1}$$

est bijective.

(b) *Nous dirons que $f : Y \longrightarrow X$ (ou X si aucune confusion n'est à craindre) est un* quotient discret effectif *du (K, Δ)-schéma Y si les conditions suivantes sont réunies.*

(i) *Le morphisme f est ouvert et surjectif.*

(ii) *Pour tout ouvert $V \subset Y$ d'image $U = f(V)$, le morphisme $\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(V)^{\Delta=0}$ est un isomorphisme.*

(c) *Nous dirons que $f : Y \longrightarrow X$ (ou X si aucune confusion n'est à craindre) est un* quotient discret pseudo-effectif *du (K, Δ)-schéma Y s'il existe un ouvert schématiquement dense $Y_0 \subset Y$ tel que $f|_{Y_0}$ est un quotient discret effectif du (K, Δ)-schéma Y_0.*

Remarque 3.2.5. — Gardons les notations de la définition 3.2.4. Dire que X est un quotient discret catégorique de Y équivaut à dire que le copréfaisceau $\mathrm{Hom}_{C,\Delta}(Y, -)$, défini sur la catégorie des C-schémas, est coreprésentable par X. En particulier, lorsqu'il existe, un quotient discret catégorique est unique à un isomorphisme unique près; on le notera $Y_{\Delta=0}$. (Lorsque Y est affine, on retrouve ainsi la construction 2.6.8.) Remarquons aussi qu'on a une bijection évidente

$$\mathrm{Hom}_{C,\Delta}(Y, T) \simeq \mathrm{Hom}_{K,\Delta}(Y, K \otimes_C T)$$

pour tout C-schéma T. Ainsi, le (K, Δ)-schéma Y admet un quotient discret catégorique si et seulement si l'adjoint à gauche du foncteur $K \otimes_C -$ de la proposition 3.2.1 est défini en Y. □

Exemple 3.2.6. — Soit X un C-schéma. On peut reformuler la proposition 3.2.1 en disant que X est le quotient discret catégorique de $K \otimes_C X$. Le lemme 3.2.2 montre aussi que X est un quotient discret effectif de $K \otimes_C X$. Ceci n'est pas une coïncidence. En effet, un quotient discret effectif est catégorique d'après la proposition 3.2.7 ci-dessous. □

Proposition 3.2.7. — *Entre les différents type de quotients discrets introduits dans la définition 3.2.4, on a les implications suivantes :*

$$\text{(effectif)} \Rightarrow \text{(pseudo-effectif)} \Rightarrow \text{(catégorique)}.$$

Démonstration. — L'implication (effectif) ⇒ (pseudo-effectif) étant évidente, il s'agit de montrer l'implication (pseudo-effectif) ⇒ (catégorique). Supposons donc que le morphisme $f : Y \longrightarrow X$ est un quotient discret pseudo-effectif et soit $Y_0 \subset Y$ un ouvert schématiquement dense tel que $f|_{Y_0}$ satisfait aux conditions (i) et (ii) de la définition 3.2.4.

Soit T un C-schéma. On doit montrer que l'application (3.1) est bijective. La composition de

$$\mathrm{Hom}_C(X, T) \xrightarrow{(3.1)} \mathrm{Hom}_{C,\Delta}(Y, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C,\Delta}(Y_0, T) \tag{3.2}$$

est injective puisque, d'après (i) et (ii), $f|_{Y_0}$ est surjectif et induit des injections sur les anneaux locaux. La densité schématique de $Y_0 \subset Y$ entraîne que l'application $\mathrm{Hom}_{C,\Delta}(Y, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C,\Delta}(Y_0, T)$ est aussi injective. Pour conclure, il suffit donc de montrer que la composition de (3.2) est surjective. Ainsi, on peut remplacer Y par Y_0 et supposer que $f : Y \longrightarrow X$ est un quotient discret effectif du (K, Δ)-schéma Y; étant donné un morphisme de (C, Δ)-schémas $g : Y \longrightarrow T$, on doit montrer qu'il se factorise par f.

Le reste de la preuve est calqué sur les preuves du corollaire 2.6.9 et de la proposition 3.2.1.

Soit $(T_i)_{i \in I}$ un recouvrement de T par des ouverts affines et notons $V_i = g^{-1}(T_i)$ et $g_i : V_i \longrightarrow T_i$ les morphismes induits. Puisque g est un morphisme de (C, Δ)-schémas, le morphisme $\mathcal{O}(T_i) \longrightarrow \mathcal{O}(V_i)$ se factorise par le sous-anneau $\mathcal{O}(V_i)^{\Delta=0}$. Notons $U_i = f(V_i)$ et $f_i : V_i \longrightarrow U_i$ le morphisme déduit de f. D'après (ii), on a un isomorphisme $\mathcal{O}(U_i) \simeq \mathcal{O}(V_i)^{\Delta=0}$. Comme dans la preuve de la proposition 3.2.1, on obtient alors un morphisme de C-schémas $h_i : U_i \longrightarrow T_i$ tel que $g_i = h_i \circ f_i$. Ceci entraîne également que $V_i = f^{-1}(U_i)$. En effet, les morphismes

$$g|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i)_{\text{réd}} \longrightarrow T_{\text{réd}} \qquad \text{et} \qquad f^{-1}(U_i)_{\text{réd}} \xrightarrow{f} (U_i)_{\text{réd}} \xrightarrow{h_i} T_{\text{réd}}$$

coïncident sur l'ouvert V_i qui est dense dans $f^{-1}(U_i)$; ces morphismes sont donc égaux et en particulier, l'image inverse de T_i contient $f^{-1}(U_i)$. (Le fait que V_i est dense dans $f^{-1}(U_i)$ provient du fait que $f : Y_{\text{réd}} \longrightarrow X_{\text{réd}}$ envoie un point générique sur un point générique et que ses fibres génériques sont intègres, ce qui découle du lemme 1.3.6.)

Il est maintenant facile de conclure. En effet, on doit montrer que les morphismes h_i se recollent sur X. Or, pour $i,\ j \in I$, on a

$$f(V_i \cap V_j) = f(f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j)) = f(f^{-1}(U_i \cap U_j)) = U_i \cap U_j.$$

En particulier, le morphisme $V_i \cap V_j \longrightarrow U_i \cap U_j$ est surjectif. Or, il induit des injections sur les anneaux locaux d'après (ii). Puisque $g_i|_{V_i \cap V_j} = g_j|_{V_i \cap V_j}$, on a nécessairement $h_i|_{U_i \cap U_j} = h_j|_{U_i \cap U_j}$. ■

Proposition 3.2.8. — *Soit Y un (K, Δ)-schéma réduit de type fini. Il existe alors un ouvert dense $Y' \subset Y$ admettant un quotient discret effectif X'. Le C-schéma X' est alors réduit et, quitte à rétrécir Y', on peut le supposer affine de type fini.*

Démonstration. — Lorsqu'il existe, le quotient discret effectif d'un (K, Δ)-schéma réduit est un C-schéma réduit. Ceci découle aussitôt de la définition 3.2.4. Le reste de la proposition est essentiellement une reformulation du théorème 1.3.11.

On ne restreint pas la généralité en supposant que $Y = \mathrm{Spec}(A)$ avec A une (K, Δ)-algèbre intègre de type fini. On prendra $Y' = \mathrm{D}(f)$, avec $f \in A$ comme dans l'énoncé du théorème 1.3.11, et on montrera que le quotient discret effectif de Y' est donné par $X' = \mathrm{Spec}(B)$, avec $B = (A[f^{-1}])^{\Delta=0}$. En fait, il reste à établir la propriété (ii) de la définition 3.2.4 qui, en apparence, est plus forte que la propriété (c) du théorème 1.3.11.

Supposons d'abord que l'ouvert $V \subset Y'$ est standard, i.e., de la forme $\mathrm{D}(fg)$ avec $g \in A$. Notons $U \subset \mathrm{Spec}(B)$ l'image de V par la projection $\mathrm{Spec}(A[f^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$. D'après la preuve de la propriété (c) du théorème 1.3.11, pour tout $h \in B$ tel que $\mathrm{D}(h) \subset U$, on a bien $B[h^{-1}] = (A[(fgh)^{-1}])^{\Delta=0}$. En appliquant ceci à un recouvrement de U par des ouverts standards, on déduit facilement que $\mathcal{O}(U) \simeq \mathcal{O}(V)^{\Delta=0}$.

On suppose maintenant que $V \subset Y'$ est arbitraire et on note comme avant U son image dans X'. Puisque X' est un schéma noethérien, l'ouvert U est quasi-compact et on peut trouver un ouvert quasi-compact de Y' contenu dans V et ayant même image dans X'. Il est donc suffisant de considérer le cas où V est quasi-compact. Par une récurrence sur le nombre d'ouverts standards nécessaires à couvrir V, on se ramène à montrer la propriété suivante. Soient V_1 et V_2 deux ouverts non vides de V tels que $V = V_1 \cup V_2$ et tels que la propriété (ii) de la définition 3.2.4 est vraie pour les ouverts V_1, V_2 et $V_1 \cap V_2$. Alors, cette propriété (ii) est aussi vraie pour l'ouvert V.

En effet, notons U_1, U_2 et U_{12} les images de V_1, V_2 et $V_1 \cap V_2$ dans X'. Par hypothèse, nous avons les identifications suivantes :

$$\mathcal{O}(U_1) = \mathcal{O}(V_1)^{\Delta=0}, \quad \mathcal{O}(U_2) = \mathcal{O}(V_2)^{\Delta=0} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(U_{12}) = \mathcal{O}(V_1 \cap V_2)^{\Delta=0}.$$

Puisque $\mathcal{O}^{\Delta=0}$ est un faisceau, il s'ensuit que $\mathcal{O}(V)^{\Delta=0}$ est l'égalisateur de la paire de flèches

$$\mathcal{O}(U_1) \times \mathcal{O}(U_2) \rightrightarrows \mathcal{O}(U_{12}). \tag{3.3}$$

Puisque Y' est irréductible, l'ouvert $V_1 \cap V_2$ est non vide. Il en est donc de même de l'ouvert U_{12}. Puisque X' est également intègre, il s'ensuit que U_{12} est dense dans $U_1 \cap U_2$ de sorte que le morphisme de restriction $\mathcal{O}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \mathcal{O}(U_{12})$ est injectif. On peut donc remplacer U_{12} par $U_1 \cap U_2$ dans la paire (3.3) sans changer son égalisateur. On retrouve ainsi l'isomorphisme recherché. ■

Corollaire 3.2.9. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et $(L_i/K)_{i \in I}$ une famille finie de Δ-extensions pseudo-normales de type fini. Alors, le Δ-schéma* $\mathrm{Spec}(\otimes_{i \in I} L_i/K)$ *possède un quotient discret effectif.*

Démonstration. — Par descente galoisienne on peut supposer que $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos. Pour $i \in I$, notons $L'_i = L_i^{\mathrm{td}}$ le noyau totalement décomposable de la Δ-extension L_i/K. Alors, le morphisme

$$\mathrm{Spec}(\otimes_{i \in I} L_i/K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\otimes_{i \in I} L'_i/K)$$

est fidèlement plat et ouvert. (Le fait que le morphisme est ouvert découle du lemme 1.3.14 par récurrence.) Par ailleurs, nous avons $\mathrm{Frac}(\otimes_{i \in I} L_i/K)^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(\otimes_{i \in I} L'_i/K)^{\Delta=0}$. (Ceci découle de la remarque 2.2.6(iii) par récurrence.) Il s'ensuit aussitôt qu'un quotient discret effectif de $\mathrm{Spec}(\otimes_{i\in I}L'_i/K)$ est aussi un quotient discret effectif de $\mathrm{Spec}(\otimes_{i\in I}L_i/K)$. (Utiliser le corollaire 1.3.13.) Ainsi, nous pouvons supposer que les Δ-extensions L_i/K sont normales.

D'après la proposition 3.2.8, il existe un ouvert dense $U \subset \mathrm{Spec}(\otimes_{i\in I}L_i/K)$ admettant un quotient discret effectif. Or, le groupe de $K^{\Delta=0}$-points de $\prod_{i\in I}\mathrm{Gal}^{\Delta}(L_i/K)$ agit sur le Δ-schéma $\mathrm{Spec}(\otimes_{i\in I}L_i/K)$ qui est alors recouvert par des translatés de U. (Utiliser la proposition 2.5.25.) On conclut ensuite en utilisant l'argument qui a servi dans la preuve du corollaire 2.7.5(ii). ∎

On arrive maintenant au théorème principal de cette sous-section.

Théorème 3.2.10. — *Soit Y un (K,Δ)-schéma réduit de type fini. Il existe alors un Δ-fermé $Z \subset Y$, partout de codimension non nulle, tel que le (K,Δ)-schéma $Y \smallsetminus Z$ admet un quotient discret pseudo-effectif X. De plus, quitte à élargir le Δ-fermé Z, on peut supposer que X est un C-schéma affine de type fini.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.2.8, on peut trouver un ouvert dense $V \subset Y$ admettant un quotient discret effectif que l'on note $q : V \longrightarrow U$. Quitte à rétrécir V, on peut supposer que U est un C-schéma affine de type fini. On fixe une compactification $j : U \hookrightarrow \overline{U}$ avec $\overline{U}$ un C-schéma projectif et réduit, et on note Y' l'image fermée schématique de l'immersion diagonale $(\iota_V, j\circ q) : V \hookrightarrow Y \times_C \overline{U}$. Alors, Y' est un (K,Δ)-schéma réduit. La projection sur le premier facteur fournit un morphisme de (K,Δ)-schémas $e : Y' \longrightarrow Y$ qui est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert V. En tant que morphisme de schémas, e est projectif (et en particulier de type fini).

D'après le lemme 3.2.11 ci-dessous, il existe un Δ-fermé $Z'_1 \subset Y'$, disjoint de l'ouvert $e^{-1}(V)$, et tel que le morphisme de schémas $e|_{Y'\smallsetminus Z'_1} : Y' \smallsetminus Z'_1 \longrightarrow Y$ est formellement non ramifié (au sens de [**40**, Définition 17.1.1]). D'après le corollaire 3.1.16 et puisque e est projectif, $Z_1 = e(Z'_1)$ est un Δ-fermé de Y. Quitte à élargir Z'_1, on peut supposer que $Z'_1 = e^{-1}(Z_1)$. On obtient ainsi un morphisme de (K,Δ)-schémas $e_1 : Y' \smallsetminus Z'_1 \longrightarrow Y \smallsetminus Z_1$ qui est projectif et formellement non ramifié.

D'après [**40**, Théorème 17.4.1 et Remarque 17.4.1.2], le morphisme e_1 est localement quasi-fini. Puisqu'il est projectif, e_1 est en fait un morphisme fini. Considérons le $\mathcal{O}_{Y\smallsetminus Z_1}$-module

$$\mathcal{M} = \mathrm{coker}\{\mathcal{O}_{Y\smallsetminus Z_1} \longrightarrow (e_1)_*\mathcal{O}_{Y'\smallsetminus Z'_1}\}.$$

Il s'agit clairement d'un $(\mathcal{O}_{Y\smallsetminus Z_1},\Delta)$-module qui est quasi-cohérent et localement de type fini en tant que $\mathcal{O}_{Y\smallsetminus Z_1}$-module. On note $Z_2 \subset Y \smallsetminus Z_1$ son support, un Δ-fermé d'après le lemme 3.1.13. On pose $Z_3 = Z_1 \cup Z_2$; c'est un Δ-fermé de Y. Puisque e_1 est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert V, on a encore $V \subset Y \smallsetminus Z_3$. Aussi, par construction, le morphisme e est un isomorphisme au-dessus de $Y \smallsetminus Z_3$. En effet, si $Z'_3 = e^{-1}(Z_3)$, le morphisme fini $e_3 : Y' \smallsetminus Z'_3 \longrightarrow Y \smallsetminus Z_3$ induit une surjection $\mathcal{O}_{Y\smallsetminus Z_3} \twoheadrightarrow (e_3)_*\mathcal{O}_{Y'\smallsetminus Z'_3}$. C'est donc une immersion fermée. Puisque son image contient l'ouvert dense V, le morphisme e_3 est surjectif. Enfin, puisque le schéma Y est réduit, e_3 est nécessairement un isomorphisme.

Il est maintenant facile de conclure. En effet, l'isomorphisme $Y' \smallsetminus Z'_3 \simeq Y \smallsetminus Z_3$ et la projection sur le second facteur de $Y \times_C \overline{U}$ induisent un morphisme de (C,Δ)-schémas $p : Y \smallsetminus Z_3 \longrightarrow \overline{U}$ qui coïncide avec q sur V. On pose $Z = Z_3 \sqcup p^{-1}(\overline{U} \smallsetminus U)$. Alors, Z est un Δ-fermé et le morphisme $p : Y \smallsetminus Z \longrightarrow U$ est un quotient discret pseudo-effectif, puisque U est le quotient discret effectif de l'ouvert dense $V \subset Y \smallsetminus Z$. ∎

Lemme 3.2.11. — *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de Δ-schémas. On suppose que f est localement de type fini en tant que morphisme de schémas. Alors, l'ensemble des points $y \in Y$ au voisinage desquels le morphisme f est formellement non ramifié est le complémentaire d'un Δ-fermé de Y.*

Démonstration. — Puisque f est localement de type fini, le $\mathcal{O}_Y$-module quasi-cohérent Ω_f est localement de type fini. D'après [**40**, Proposition 17.2.1], le morphisme f est donc formellement non ramifié sur un voisinage d'un point $y \in Y$ si et seulement si le $\mathcal{O}_{Y,y}$-module $(\Omega_f)_y$ est nul. Il s'agit donc de montrer que le support du $\mathcal{O}_Y$-module Ω_f est un Δ-fermé de Y. Étant donné que Ω_f est naturellement un $(\mathcal{O}_Y,\Delta)$-module (voir l'exemple 3.1.9), ceci découle du lemme 3.1.13. ∎

3.3. Topologie feuilletée de type fini. Définition et premières propriétés. —

Dans cette sous-section, nous introduisons une nouvelle topologie de Grothendieck que nous appelons la *topologie feuilletée de type fini*. L'étude de cette topologie et de ses variantes occupe une place importante dans cet article.

Notations 3.3.1. — Étant donné un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma X, on note Fttf^{Δ}/X la catégorie des (X, Δ)-schémas localement de type fini. On note aussi $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{qc}}$ (resp. $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{af}}$, $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{réd}}$) la sous-catégorie pleine de Fttf^{Δ}/X formée des (X, Δ)-schémas qui sont quasi-compacts (resp. affines, réduits) en tant que $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schémas. On note enfin $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{qc,\,réd}}$ (resp. $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{af,\,réd}}$) l'intersection de $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{qc}}$ (resp. $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{af}}$) avec $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{réd}}$. □

Définition 3.3.2. —

(a) On dit qu'une famille de morphismes de $(\mathbb{Q}, \Delta)$*-schémas* $(f_i : Y_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ *est un* recouvrement feuilleté de type fini *de Y si les f_i sont localement de type fini et si* $Y = \bigcup_{i\in I} f_i(Y_i)$.

(b) Soit X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$*-schéma. La* topologie feuilletée de type fini *sur* Fttf^{Δ}/X *est la topologie de Grothendieck engendrée par les recouvrements feuilletés de type fini d'objets de* Fttf^{Δ}/X. *Elle sera désignée par «* fttf *» et son foncteur « faisceau associé » sera noté* $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}$.

Remarques 3.3.3. —

(i) Clairement, les recouvrements feuilletés de type fini, qu'on appellera aussi recouvrements fttf, forment une prétopologie sur la catégorie Fttf^{Δ}/X (au sens de [**4**, Définition 1.3]).

(ii) Le site $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X, \mathrm{fttf})$ est appelé le *petit site feuilleté de type fini* du Δ-schéma X. Le caractère « petit » de ce site n'est peut-être pas tout à fait évident à ce stade mais il le deviendra dans le contexte des feuilletages schématiques. La terminologie de « petit site feuilleté » sera en parfait accord avec celle de « petit site étale ». (Voir la définition 6.5.14.) □

Remarque 3.3.4. — Dans [**43**], Raymond Hoobler introduit une topologie apparentée à la topologie fttf. La topologie de Hoobler est un analogue différentiel de la topologie fppf : les familles couvrantes sont les familles de morphismes localement de type fini de (X, Δ)-schémas qui deviennent couvrantes pour la topologie fpqc après oubli de l'action de Δ. Je remercie Carlos Arreche et Sergey Gorchinskiĭ de m'avoir signalé l'article [**43**]. □

Lemme 3.3.5. — *Soit X un* $(\mathbb{Q}, \Delta)$*-schéma. Pour* $\dagger \in \{\mathrm{qc}, \mathrm{af}, \mathrm{réd}, \{\mathrm{qc}, \mathrm{réd}\}, \{\mathrm{af}, \mathrm{réd}\}\}$, *on munit la catégorie* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\dagger}$ *de la topologie induite de celle du site* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X, \mathrm{fttf})$ *; cette topologie induite sera encore appelée* topologie feuilletée de type fini *et désignée par «* fttf *».*

(a) Le foncteur d'inclusion $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\dagger} \hookrightarrow \mathrm{Fttf}^{\Delta}/X$ *induit une équivalence de topos* $\mathbf{Shv}_{\mathrm{fttf}}(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X) \simeq \mathbf{Shv}_{\mathrm{fttf}}((\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\dagger})$.

(b) Pour $\ddagger \in \{\varnothing, \mathrm{qc}, \mathrm{af}\}$, *le foncteur* $(-)_{\mathrm{réd}} : (\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\ddagger} \longrightarrow (\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\ddagger,\,\mathrm{réd}}$ *induit une équivalence de topos* $\mathbf{Shv}_{\mathrm{fttf}}((\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\ddagger,\,\mathrm{réd}}) \simeq \mathbf{Shv}_{\mathrm{fttf}}((\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\ddagger})$.

Démonstration. — La partie (a) est un cas particulier de [**4**, Exposé III, Théorème 4.1]. La partie (b) se déduit facilement de la partie (a). ■

Dans le reste de la sous-section, par « faisceau » on entend un faisceau pour la topologie feuilletée de type fini.

Proposition 3.3.6. — *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de* $(\mathbb{Q}, \Delta)$*-schémas. Alors, le foncteur de changement de base* $Y \times_X - : \mathrm{Fttf}^{\Delta}/X \longrightarrow \mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y$ *induit un morphisme de sites*

$$f : (\mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y, \mathrm{fttf}) \longrightarrow (\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X, \mathrm{fttf}).$$

Autrement dit, le foncteur « image inverse » $f^* : \mathbf{Shv}_{\mathrm{fttf}}(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\mathrm{fttf}}(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y)$ *est exact.*

Démonstration. — Notons $\alpha_f : \mathrm{Fttf}^{\Delta}/X \longrightarrow \mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y$ le foncteur donné par $\alpha_f(-) = Y \times_X -$. Puisque α_f commute aux limites finies, il découle de [**4**, Exposé I, Proposition 5.4(4)] que le foncteur « image inverse » sur les préfaisceaux α_f^* est exact. Puisque α_f respecte les prétopologies des recouvrements fttf, il découle de [**4**, Exposé III, Proposition 1.6] qu'il est continu, i.e., que $(\alpha_f)_*$ préserve les faisceaux. Enfin, on applique [**4**, Exposé III, Proposition 1.3] pour déduire que le foncteur $f^* = \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}} \circ (\alpha_f)^*$ est exact. ■

Lemme 3.3.7. — *Gardons les hypothèses et les notations de la proposition 3.3.6. Si le morphisme de Δ-schémas f est localement de type fini, alors le foncteur f^* coïncide avec le foncteur « image directe » suivant le foncteur $f \circ -$: $\mathrm{Fttf}^\Delta/Y \longrightarrow \mathrm{Fttf}^\Delta/X$ qui envoie un (Y,Δ)-schéma localement de type fini Y' sur lui-même vu comme (X,Δ)-schéma. Autrement dit, si F est un faisceau sur Fttf^Δ/X, alors pour tout $Y'/Y \in \mathrm{Fttf}^\Delta/Y$, on a $(f^*F)(Y'/Y) = F(Y'/X)$.*

Démonstration. — Il s'agit d'un fait standard valable pour un site général. (Voir [**5**, Exposé VII, §1.6] pour le cas du petit site étale d'un schéma.) ■

On fixe un système d'indéterminées $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_m)$. Étant donné un anneau R, la R-algèbre $R[[\mathbf{t}]] = R[[t_1, \cdots, t_m]]$ admet une structure de Δ-anneau telle que ∂_i est la dérivation partielle par rapport à t_i. Ainsi, si $F = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{N}^m} a_\mathbf{r} \cdot \mathbf{t}^\mathbf{r}$ est une série formelle à coefficients dans R, alors

$$\partial_i F = \frac{\partial F}{\partial t_i} = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{N}^m} r_i \cdot a_\mathbf{r} \cdot \mathbf{t}^{\mathbf{r}-1_i}$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$. (Bien entendu, 1_i désigne le m-uplet nul sauf à la i-ième place où il vaut 1.) Le résultat suivant est bien connu.

Proposition 3.3.8. — *Soient X un Δ-schéma, C un corps de caractéristique nulle et c : $\mathrm{Spec}(C) \longrightarrow X$ un C-point de X. Il existe alors un unique morphisme de Δ-schémas ϕ_c : $\mathrm{Spec}(C[[\mathbf{t}]]) \longrightarrow X$ rendant commutatif le triangle de schémas*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(C) \arrow[r, "o"] \arrow[dr, "c"'] & \mathrm{Spec}(C[[\mathbf{t}]]) \arrow[d, "\phi_c"] \\ & X. \end{tikzcd}$$

Si $x \in X$ est l'image de c, le morphisme de Δ-anneaux ϕ_c^* : $\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow C[[\mathbf{t}]]$ est l'application « série de Taylor » donnée par

$$\phi_c^*(f) = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{N}^m} \frac{c^*(\partial^\mathbf{r} f)}{\mathbf{r}!} \cdot \mathbf{t}^\mathbf{r}. \tag{3.4}$$

Démonstration. — L'existence est facile : il s'agit de montrer que le morphisme $\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow C[[\mathbf{t}]]$, donné par (3.4), est un morphisme de Δ-anneaux. Ce morphisme est additif et commute clairement à l'action des $\partial \in \Delta$. Pour voir qu'il commute à la multiplication, on utilise la formule de Leibniz généralisée

$$\partial^\mathbf{r}(f \cdot g) = \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{r}} \frac{\mathbf{r}!}{\mathbf{p}!\mathbf{q}!} \cdot \partial^\mathbf{p} f \cdot \partial^\mathbf{q} g.$$

L'unicité est tout aussi facile. En effet, soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ et notons $F = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{N}} a_\mathbf{r} \cdot \mathbf{t}^\mathbf{r}$ l'image de f par ϕ_c^*. Alors, pour tout $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^m$, on a les égalités :

$$\mathbf{r}! \cdot a_\mathbf{r} = o^*(\partial^\mathbf{r} F) = o^*(\partial^\mathbf{r} \phi_c^* f) = o^* \phi_c^*(\partial^\mathbf{r} f) = c^*(\partial^\mathbf{r} f).$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

Remarque 3.3.9. — La proposition 3.3.8 est encore valable, avec les modifications évidentes, si le point c est remplacé par un morphisme de schémas r : $\mathrm{Spec}(R) \longrightarrow X$, avec R un $\mathbb{Q}$-algèbre, qui se factorise par un ouvert affine de X (ce qui est automatique si R est locale). □

Proposition 3.3.10. — *Soit $C/\mathbb{Q}$ une extension algébriquement close de degré de transcendance indénombrable. Soit f : $Y \longrightarrow \mathrm{Spec}(C[[\mathbf{t}]])$ un morphisme de Δ-schémas. On suppose que f est localement de type fini et que son image contient le point fermé du schéma local $\mathrm{Spec}(C[[\mathbf{t}]])$. Alors, f admet une section.*

Démonstration. — On peut supposer que $Y = \mathrm{Spec}(A)$ avec A une $(C[[\mathbf{t}]], \Delta)$-algèbre de type fini. Il existe un sous-corps $C_0 \subset C$ de degré de transcendance dénombrable sur $\mathbb{Q}$ et une $(C_0[[\mathbf{t}]], \Delta)$-algèbre de type fini A_0 telle que $A = A_0 \otimes_{C_0[[\mathbf{t}]]} C[[\mathbf{t}]]$. (En effet, une présentation de la $(C[[\mathbf{t}]], \Delta)$-algèbre A dépend d'un ensemble dénombrable de séries formelles à coefficients dans C ; il suffit alors de prendre pour C_0 le sous-corps engendré par les coefficients de ces séries.) La $C_0[[\mathbf{t}]]$-algèbre A_0 est de type dénombrable, i.e., engendrée par une famille dénombrable d'élements. Il en est de même de la C_0-algèbre $B_0 = A_0 \otimes_{C_0[[\mathbf{t}]]} C_0$.

L'hypothèse que l'image de f contient le point fermé de $\mathrm{Spec}(C[[\mathbf{t}]])$ entraîne que la C_0-algèbre B_0 est non nulle. Ainsi, si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B_0, l'extension $\kappa(\mathfrak{q})/C_0$ est de degré de transcendance au plus dénombrable et se plonge donc dans l'extension C/C_0. Autrement dit, le schéma $\mathrm{Spec}(B_0)$ admet des C-points. Un C-point de $\mathrm{Spec}(B_0)$ induit clairement un C-point $c : \mathrm{Spec}(C) \longrightarrow Y$ telle que la composition avec $Y \longrightarrow \mathrm{Spec}(C[[\mathbf{t}]])$ est l'inclusion du point fermé de $\mathrm{Spec}(C[[\mathbf{t}]])$. La proposition 3.3.8 fournit alors un morphisme canonique de Δ-schémas $\phi_c : \mathrm{Spec}(C[[\mathbf{t}]]) \longrightarrow Y$. Puisque $f \circ \phi_c$ est un endomorphisme du Δ-schéma $\mathrm{Spec}(C[[\mathbf{t}]])$ qui induit l'identitié sur le point fermé, l'unicité dans la proposition 3.3.8 entraîne que $f \circ \phi_c = \mathrm{id}$. ■

Corollaire 3.3.11. — *Soit $C/\mathbb{Q}$ une extension algébriquement close de degré de transcendance indénombrable. Soient X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma et c : $\mathrm{Spec}(C) \longrightarrow X$ un C-point. Alors, pour tout morphisme localement de type fini de Δ-schémas $f : X' \longrightarrow X$ tel que l'image de c est contenue dans l'image de f, il existe un triangle commutatif de Δ-schémas*

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(C[[\mathbf{t}]]) \arrow[ur, bend left] \arrow[r, "\phi_c"] & X. \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence immédiate de la proposition 3.3.10. ■

Construction 3.3.12. — Soient X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma et c : $\mathrm{Spec}(C) \longrightarrow X$ un C-point avec $C/\mathbb{Q}$ une extension algébriquement close de degré de transcendance indénombrable. On note $\mathscr{V}_c(X)$ la catégorie des couples (X', c') constitués d'un (X, Δ)-schéma localement de type fini X' et d'un C-point c' : $\mathrm{Spec}(C) \longrightarrow X'$ dont l'image dans X est c. Étant donné un préfaisceau F sur Fttf^{Δ}/X, on pose

$$\Phi_c(F) = \underset{(X',c')\in\mathscr{V}_c(X)}{\mathrm{colim}} F(X').$$

L'ensemble $\Phi_c(F)$ est appelé la *fibre* de F en c. □

Lemme 3.3.13. — *On garde les notations et les hypothèses de la construction 3.3.12. Soit $U \subset X$ un ouvert affine contenant l'image de c. D'après la proposition 3.3.8, on dispose d'un morphisme naturel de Δ-anneaux $\mathcal{O}(U) \longrightarrow C[[\mathbf{t}]]$, i.e., d'une structure de $(\mathcal{O}(U), \Delta)$-algèbre sur $C[[\mathbf{t}]]$. Considérons l'ensemble ordonné $\mathscr{A}_c(U)$ des sous-$(\mathcal{O}(U), \Delta)$-algèbres de type fini de $C[[\mathbf{t}]]$. Alors, $\mathscr{A}_c(U)$ est filtrant et le foncteur $\mathscr{A}_c(U)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathscr{V}_c(X)$, qui envoie $A \subset C[[\mathbf{t}]]$ sur le (X, Δ)-schéma $\mathrm{Spec}(A)$ muni du C-point correspondant à la composition de $A \hookrightarrow C[[\mathbf{t}]] \twoheadrightarrow C$, est cofinal. En particulier, $\mathscr{V}_c(X)$ est une catégorie cofiltrante.*

Démonstration. — Il est clair que $\mathscr{A}_c(U)$ est filtrant. Pour voir que le foncteur $\mathscr{A}_c(U)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathscr{V}_c(X)$ est cofinal, on utilise la proposition 3.3.8. ■

Corollaire 3.3.14. — *On garde les notations de la construction 3.3.12 et du lemme 3.3.13. Étant donné un préfaisceau F sur Fttf^{Δ}/X, on a*

$$\Phi_c(F) = \underset{A\in\mathscr{A}_c(U)}{\mathrm{colim}} F(\mathrm{Spec}(A)).$$

De plus, le foncteur Φ_c, défini sur la catégorie des préfaisceaux sur Fttf^{Δ}/X, est exact.

Démonstration. — C'est une conséquence directe du lemme 3.3.13. ■

Lemme 3.3.15. — *On garde les notations de la construction 3.3.12. Soit $F \longrightarrow G$ un morphisme de préfaisceaux sur Fttf^{Δ}/X qui induit un isomorphisme $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(F) \simeq \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(G)$ sur les faisceaux associés. Alors, l'application $\Phi_c(F) \longrightarrow \Phi_c(G)$ est bijective.*

Démonstration. — Ceci découle aussitôt de la proposition 3.3.10 qui entraîne que tout recouvrement fttf de $\mathrm{Spec}(C[[\mathbf{t}]])$ est scindé. (Les détails sont standards et sont omis.) ■

Théorème 3.3.16. — *Soit X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma. Pour chaque $x \in X$, fixons une extension $C_x/\mathbb{Q}$ algébriquement close de degré de transcendance indénombrable et un morphisme de schémas $c_x : \mathrm{Spec}(C_x) \longrightarrow X$ d'image x tel que le degré de transcendance de $C_x/\kappa(x)$ est infini. Soit $f : F \longrightarrow G$ un morphisme de préfaisceaux sur Fttf^{Δ}/X. Alors, $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(f)$ est injectif (resp. surjectif, un isomorphisme) si et seulement si il en est* *ainsi des $\Phi_{c_x}(f)$ pour tout $x \in X$. Autrement dit, les foncteurs Φ_{c_x} forment un famille conservative de points du topos* fttf *de X.*

Démonstration. — On traite d'abord l'assertion concernant l'injectivité. Supposons que $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(f)$ est injectif. Puisque les foncteurs Φ_{c_x} sont exacts (voir le corollaire 3.3.14), les applications $\Phi_{c_x}(\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(f))$ sont injectives et il en est de même des applications $\Phi_{c_x}(f)$ d'après le lemme 3.3.15. Réciproquement, supposons que les applications $\Phi_{c_x}(f)$ sont injectives pour tout $x \in X$ et montrons que le morphisme de faisceaux $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(f)$ est injectif. D'après le lemme 3.3.15, on ne restreint pas la généralité en supposant que F et G sont des faisceaux. Soit Y un (X,Δ)-schéma localement de type fini et soient $u,\ v \in F(Y)$ deux sections qui s'envoient sur la même section par f. Pour tout $y \in Y$ d'image $x \in X$, choisissons un C_x-point $c_y : \mathrm{Spec}(C_x) \longrightarrow Y$ d'image y et tel que $(Y \to X) \circ c_y = c_x$. (Ceci est possible car l'extension $C_x/\kappa(x)$ est algébriquement close de degré de transcendance infini.) On obtient ainsi un objet $(Y, c_y) \in \mathscr{V}_{c_x}(X)$, ce qui permet d'associer les classes $\bar{u}$ et $\bar{v}$ de u et v dans $\Phi_{c_x}(F)$. Puisque l'application $\Phi_{c_x}(f)$ est supposée injective, il s'ensuit que $\bar{u} = \bar{v}$. Il existe donc un raffinement $(Y'_y, c'_y) \longrightarrow (Y, c_y)$ dans $\mathscr{V}_{c_x}(X)$ tel que $u|_{Y'_y} = v|_{Y'_y}$. Or, la famille $(Y'_y \longrightarrow Y)_{y\in Y}$ est couvrante pour la topologie fttf. Puisque F est un faisceau, et un particulier séparé, il s'ensuit que $u = v$.

L'assertion concernant la surjectivité se démontre en utilisant l'assertion concernant l'injectivité. En effet, considérons la somme amalgamée $G \coprod_F \star$ prise dans la catégorie des préfaisceaux (avec $\star$ le préfaisceau final). Dire que $f : F \longrightarrow G$ est surjectif (dans la catégorie des faisceaux) revient à dire que $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(G \coprod_F \star) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(\star)$ est injectif. D'après ce qui précède, ceci équivaut à l'injectivité des applications $\Phi_{c_x}(G) \coprod_{\Phi_{c_x}(F)} \star \longrightarrow \star$ pour tout $x \in X$. (On utilise ici le corollaire 3.3.14 et le lemme 3.3.15.) Or, l'injectivité de l'application $\Phi_{c_x}(G) \coprod_{\Phi_{c_x}(F)} \star \longrightarrow \star$ équivaut à la surjectivité de $\Phi_{c_x}(G) \longrightarrow \Phi_{c_x}(F)$. ∎

La convention ci-dessous est pratique sera souvent employée dans la suite.

Convention 3.3.17. — Soient X un $(\mathbb{Q},\Delta)$-schéma et Y un (X,Δ)-schéma. On suppose que Y est affine au-dessus d'un (X,Δ)-schéma Y_0 appartement à $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{qc}}$, i.e., Y_0 est de type fini en tant que (X,Δ)-schéma et quasi-compact en tant que $(\mathbb{Q},\Delta)$-schéma. (Cette condition est automatique si Y est local.) Alors, le (X,Δ)-schéma Y est limite projective d'un pro-(X,Δ)-schéma de type fini donné par $(\mathrm{Spec}(\mathcal{A}))_{\mathcal{A}\subset\mathcal{O}_Y}$ où $\mathcal{A}$ parcourt l'ensemble filtrant des sous-$(\mathcal{O}_{Y_0},\Delta)$-algèbres quasi-cohérentes de type fini de $\mathcal{O}_Y$. De plus, ce pro-(X,Δ)-schéma est indépendant du choix de Y_0. Ceci dit, étant donné un préfaisceau F sur Fttf^{Δ}/X, on pose

$$F(Y) = \operatorname*{colim}_{\substack{\mathcal{A}\subset\mathcal{O}_Y,\ \text{sous-}(\mathcal{O}_{Y_0},\Delta)\text{-algèbre} \\ \text{de type fini}}} F(\mathrm{Spec}(\mathcal{A})).$$

Le cas le plus souvent utilisé est le suivant : $Y = \mathrm{Spec}(R)$ où R une $(\mathcal{O}(U),\Delta)$-algèbre avec $U \subset X$ un ouvert affine. Dans ce cas, on écrit simplement $F(R)$ au lieu de $F(\mathrm{Spec}(R))$. Vu le corollaire 3.3.14, le foncteur fibre Φ_c de la construction 3.3.12 est donné simplement par : $F \rightsquigarrow F(C[[\mathbf{t}]])$. □

3.4. Faisceaux $\mathfrak{f}$-invariants. —

Dans cette sous-section, nous étudions une classe de faisceaux sur le petit site fttf d'un $(\mathbb{Q},\Delta)$-schéma jouissant d'une propriété d'invariance le long des feuilles (voir la définition 3.4.5 ci-dessous). On commence avec la notion de « $\mathfrak{f}$-densité ».

Lemme 3.4.1. — *Soient X un $(\mathbb{Q},\Delta)$-schéma et $U \subset X$ un ouvert. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $Z \cap U$ est dense dans Z pour tout Δ-fermé $Z \subset X$.

(ii) $Z \cap U$ est non vide pour tout Δ-fermé non vide $Z \subset X$.

(iii) U contient tous les Δ-points de X.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que U est un ouvert $\mathfrak{f}$-dense *de X. On dira aussi que l'inclusion $U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte* $\mathfrak{f}$-dense.

Démonstration. — L'implication (i) ⇒ (ii) est évidente. Soit $x \in X$ un Δ-point. D'après le lemme 3.1.18(c), $Z = \overline{\{x\}}$ est un Δ-fermé. Il est en plus irréductible et x est son point générique de sorte que $Z \cap U \neq \varnothing$ si et seulement si $x \in U$. Ceci montre l'implication (ii) ⇒ (iii).

Il reste à montrer l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons donc que U contient tous les Δ-points de X et soit $Z \subset X$ un Δ-fermé de X. D'après le lemme 3.1.18(d), les points génériques de Z sont des Δ-points. Il s'ensuit que U contient tous les points génériques de Z. Autrement dit, $Z \cap U$ est dense dans Z. ■

Corollaire 3.4.2. —

(a) Si U et U' sont deux ouverts $\mathfrak{f}$-denses d'un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma X, alors l'ouvert $U \cap U'$ est aussi $\mathfrak{f}$-dense.

(b) Soient $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schémas et $U \subset X$ un ouvert $\mathfrak{f}$-dense. Alors, l'ouvert $f^{-1}(U) \subset Y$ est $\mathfrak{f}$-dense. En particulier, si Y est non vide, il en est de même de $f^{-1}(U)$.

Démonstration. — C'est évident si on utilise la caractérisation (iii) dans le lemme 3.4.1. ■

Lemme 3.4.3. — *Soit C un corps de caractéristique nulle. Alors, le Δ-anneau $C[[\mathbf{t}]]$ est simple. En particulier, tout ouvert non vide de* $\mathrm{Spec}(C[[\mathbf{t}]])$ *est $\mathfrak{f}$-dense.*

Démonstration. — En effet, si $F \in C[[\mathbf{t}]]$ est une série formelle non nulle, il existe $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^m$ tel que $\partial^{\mathbf{r}} F$ est inversible (ce qui équivaut à demander que son terme constant est non nul). ■

Lemme 3.4.4. — *Soient X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma et $U \subset X$ un ouvert. Il existe alors un unique Δ-fermé $Z \subset X$ tel que $Z \cap U = \varnothing$ et U est $\mathfrak{f}$-dense dans $X \smallsetminus Z$. Si $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ est un idéal quasi-cohérent tel que $\mathrm{Z}(\mathcal{I}) = X \smallsetminus U$, alors $Z = \mathrm{Z}((\mathcal{I})^{\Delta})$ avec $(\mathcal{I})^{\Delta}$ le Δ-idéal engendré par $\mathcal{I}$.*

Démonstration. — En effet, si $T \subset X$ est un Δ-fermé, alors $T \cap U = \varnothing$ si et seulement si $T \subset \mathrm{Z}(\mathcal{I})$ ce qui équivaut à dire que $T \subset \mathrm{Z}((\mathcal{I})^{\Delta})$. Ceci permet de conclure (utiliser la caractérisation (ii) dans le lemme 3.4.1). ■

Définition 3.4.5. — *Soit X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma. On dit qu'un préfaisceau F sur* Fttf^{Δ}/X *est* $\mathfrak{f}$-invariant *(resp.* $\mathfrak{f}$-séparé*) si l'application $F(Y) \longrightarrow F(V)$ est bijective (resp. injective) pour tout (X, Δ)-schéma localement de type fini Y et tout ouvert $\mathfrak{f}$-dense $V \subset Y$.*

Proposition 3.4.6. — *Soient X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma et F un préfaisceau sur* Fttf^{Δ}/X. *On suppose que F est un faisceau pour la topologie de Zariski. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) F est $\mathfrak{f}$-invariant (resp. $\mathfrak{f}$-séparé).

(b) Pour tout (X, Δ)-schéma de type fini $Y = \mathrm{Spec}(B)$, avec B une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre, et pour tout $f \in B$, l'application

$$F(Y \smallsetminus \mathrm{Z}((f)^{\Delta})) \longrightarrow F(Y \smallsetminus \mathrm{Z}(f))$$

est bijective (resp. injective).

Démonstration. — L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) est claire puisque $Y \smallsetminus \mathrm{Z}((f)^{\Delta})$ est $\mathfrak{f}$-dense dans $Y \smallsetminus \mathrm{Z}(f)$ d'après le lemme 3.4.4. Pour la réciproque, on se concentre sur le cas non respé, le cas respé étant plus facile. Supposons la condition (b) satisfaite pour F, et fixons un (X, Δ)-schéma localement de type fini Y et un ouvert $\mathfrak{f}$-dense $V \subset Y$. Nous cherchons à montrer que l'application $F(Y) \longrightarrow F(V)$ est bijective. Puisque F est un faisceau Zariski, la question est locale sur Y et nous pouvons supposer que $Y = \mathrm{Spec}(B)$ est affine. Supposons que le fermé $Y \smallsetminus V$ est défini par un idéal de B engendré par une famille $(f_i)_{i \in I}$. La condition que V est $\mathfrak{f}$-dense se traduit alors par l'égalité $(f_i;\, i \in I)^{\Delta} = B$. Ainsi, nous disposons d'un recouvrement Zariski de Y donné par les ouverts $Y_i = Y \smallsetminus \mathrm{Z}((f_i)^{\Delta})$ pour $i \in I$. De plus, d'après le lemme 1.1.10, l'intersection $Y_{ij} = Y_i \cap Y_j$ est donnée par $Y \smallsetminus \mathrm{Z}((f_i f_j)^{\Delta})$ pour tout $i, j \in I$. On pose $V_i = Y \smallsetminus \mathrm{Z}(f_i)$ et $V_{ij} = V_i \cap V_j = Y \smallsetminus \mathrm{Z}(f_i f_j)$. Puisque F est un faisceau Zariski, on a

$$F(Y) \simeq \mathrm{eq}\left\{\prod_{i \in I} F(Y_i) \rightrightarrows \prod_{i,\, j \in I} F(Y_{ij})\right\} \qquad \text{et} \qquad F(V) \simeq \mathrm{eq}\left\{\prod_{i \in I} F(V_i) \rightrightarrows \prod_{i,\, j \in I} F(V_{ij})\right\}.$$

La condition (b) fournit les bijections $F(Y_i) \simeq F(V_i)$ et $F(Y_{ij}) \simeq F(V_{ij})$, ce qui permet de conclure. ■

Lemme 3.4.7. — *Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$ un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma affine et F un préfaisceau $\mathfrak{f}$-invariant (resp. $\mathfrak{f}$-séparé) sur* Fttf^{Δ}/X. *Soient $Y = \mathrm{Spec}(B)$ un (X, Δ)-schéma affine (non nécessairement de type fini) et $V = \mathrm{Spec}(B[f^{-1}])$ un ouvert affine standard de Y. On suppose que V est $\mathfrak{f}$-dense dans Y. Alors, avec la convention 3.3.17, l'application $F(Y) \longrightarrow F(V)$ est bijective (resp. injective).*

Démonstration. — Rappelons que $F(Y)$ est la colimite des $F(\mathrm{Spec}(R))$ où $R \subset B$ parcourt l'ensemble filtrant des sous-(A,Δ)-algèbres de type fini de B. De même, $F(V)$ est la colimite des $F(\mathrm{Spec}(R[f^{-1}]))$ où $R \subset B$ parcourt l'ensemble filtrant des sous-(A,Δ)-algèbres de type fini de B contenant f. D'après le lemme 3.4.4, le morphisme

$$F(\mathrm{Spec}(R[f^{-1}])) \longrightarrow F(\mathrm{Spec}(R) \smallsetminus \mathrm{Z}((f)^{\Delta}))$$

est bijectif (resp. injectif). Ainsi, le corollaire sera établi si nous montrons que, pour R suffisamment grande, le fermé $\mathrm{Z}((f)^{\Delta}) \subset \mathrm{Spec}(R)$ est vide. Or, ceci est clair puisque dans B l'élément f engendre le Δ-idéal B. (Utiliser que l'ouvert V est $\mathfrak{f}$-dense dans Y.) ■

Proposition 3.4.8. — *Soit X un $(\mathbb{Q},\Delta)$-schéma. Pour chaque $x \in X$, fixons une extension $C_x/\mathbb{Q}$ algébriquement close de degré de transcendance indénombrable et un morphisme de schémas $c_x : \mathrm{Spec}(C_x) \longrightarrow X$ d'image x tel que le degré de transcendance de $C_x/\kappa(x)$ est infini. Soit F un faisceau sur* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X, \mathrm{fttf})$. *Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) F est $\mathfrak{f}$-invariant (resp. $\mathfrak{f}$-séparé).

(b) Pour tout $x \in X$ et tout $f \in C_x[[\mathbf{t}]] \smallsetminus \{0\}$, l'application $F(C_x[[\mathbf{t}]]) \longrightarrow F(C_x[[\mathbf{t}]][f^{-1}])$ est bijective (resp. injective).

(c) Pour tout $x \in X$, l'application $F(C_x[[\mathbf{t}]]) \longrightarrow F(\mathrm{Frac}(C_x[[\mathbf{t}]]))$ est bijective (resp. injective).

Démonstration. — L'implication (a) ⇒ (b) découle des lemmes 3.4.3 et 3.4.7. L'implication (b) ⇒ (c) est évidente. On divise le reste de la preuve en deux parties où l'on traite respectivement les implications (c) ⇒ (b) et (b) ⇒ (a). (On note que l'implication (c) ⇒ (b) est évidente dans le cas respé.)

Partie A. — Supposons que F vérifie (c) et montrons qu'il vérifie (b). Clairement, il suffit de montrer que les applications $F(C_x[[\mathbf{t}]][f^{-1}]) \longrightarrow F(C_X[[\mathbf{t}]][(fg)^{-1}])$ sont injectives pour tout $f, g \in C_x[[\mathbf{t}]] \smallsetminus \{0\}$. Grâce au lemme 3.4.7, on se ramène à montrer que F est $\mathfrak{f}$-séparé. Soit $V \subset Y$ un ouvert $\mathfrak{f}$-dense d'un (X,Δ)-schéma localement de type fini Y. Si s_1, $s_2 \in F(Y)$ sont deux sections distinctes, il existe un point $x \in X$ et un morphisme de (X,Δ)-schémas $u : \mathrm{Spec}(C_x[[\mathbf{t}]]) \longrightarrow Y$ tels que $s_1|_{C_x[[\mathbf{t}]]} \neq s_2|_{C_x[[\mathbf{t}]]}$. (Utiliser le théorème 3.3.16.) La condition (c) entraîne alors que $s_1|_{\mathrm{Frac}(C_x[[\mathbf{t}]])} \neq s_2|_{\mathrm{Frac}(C_x[[\mathbf{t}]])}$, ce qui force l'inégalité $s_1|_V \neq s_2|_V$ puisque, d'après le corollaire 3.4.2, le morphisme u envoie le point générique de $\mathrm{Spec}(C_x[[\mathbf{t}]])$ dans V.

Partie B. — Supposons que F vérifie (b) et montrons qu'il est $\mathfrak{f}$-invariant (resp. $\mathfrak{f}$-séparé). Grâce à la proposition 3.4.6, il suffit de montrer que l'application $F(Y \smallsetminus \mathrm{Z}((f)^{\Delta})) \longrightarrow F(Y \smallsetminus \mathrm{Z}(f))$ est bijective (resp. injective) avec Y un (X,Δ)-schéma localement de type fini et $f \in \mathcal{O}(Y)$. Or, la restriction de F à Fttf^{Δ}/Y vérifie encore la condition (b) pour un choix judicieux de points c_y. (Plus précisément, pour tout point $y \in Y$ d'image $x \in X$, on se donne un relèvement $c_y : \mathrm{Spec}(C_x) \longrightarrow Y$ du point c_x tel que le degré de transcendance de $C_x/\kappa(y)$ est encore infini.) Ainsi, quitte à remplacer F par sa restriction à Fttf^{Δ}/Y, on peut supposer que $Y = X$.

On fixe $f \in \mathcal{O}(X)$ et on note $f_x \in C_x[[\mathbf{t}]]$ les images de f. On pose $U = X \smallsetminus \mathrm{Z}(f)$, $\overline{U} = X \smallsetminus \mathrm{Z}((f)^{\Delta})$, et on note $j : U \hookrightarrow X$ et $\overline{j} : \overline{U} \hookrightarrow X$ les inclusions évidentes. Il est suffisant de montrer que le morphisme de faisceaux $\overline{j}_*\overline{j}^*F \longrightarrow j_*j^*F$ est un isomorphisme (resp. est injectif). En appliquant le théorème 3.3.16 on se ramène à montrer que les applications

$$F(\mathrm{Spec}(C_x[[\mathbf{t}]]) \smallsetminus \mathrm{Z}((f_x)^{\Delta})) \longrightarrow F(\mathrm{Spec}(C_x[[\mathbf{t}]]) \smallsetminus \mathrm{Z}(f_x))$$

sont bijectives (resp. injectives). Il y a deux cas à considérer. Si $f_x = 0$, il n'y a rien à démontrer. Si $f_x \neq 0$, alors $\mathrm{Z}((f_x)^{\Delta}) = \varnothing$ et la condition (b) permet de conclure. ■

Les faisceaux pour la topologie fttf qui sont $\mathfrak{f}$-invariants sont en fait des faisceaux pour une topologie de Grothendieck que nous introduisons maintenant.

Définition 3.4.9. —

(a) On dit qu'une famille de morphismes de $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas $(f_i : Y_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ est un recouvrement $\mathfrak{f}$-feuilleté de type fini *de Y si les f_i sont localement de type fini et si tout Δ-point de Y est dans l'image de l'un des f_i.*

(b) *Soit X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma. La* topologie $\mathfrak{f}$-feuilletée de type fini *sur* Fttf^{Δ}/X *est la topologie de Grothendieck engendrée par les recouvrements $\mathfrak{f}$-feuilletés de type fini d'objets de* Fttf^{Δ}/X. *Elle sera désignée par « $\mathfrak{f}$-fttf » et son foncteur « faisceau associé » sera noté* $\mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}$.

Clairement, un recouvrement fttf est un recouvrement $\mathfrak{f}$-fttf et un faisceau pour la topologie $\mathfrak{f}$-fttf est un faisceau pour la topologie fttf.

Lemme 3.4.10. — *L'analogue du lemme 3.3.5 où «* fttf *» est remplacé par «* $\mathfrak{f}$-fttf *» est encore vrai.*

Proposition 3.4.11. — *Soit X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma. Alors, la topologie* $\mathfrak{f}$-fttf *sur* Fttf^{Δ}/X *est engendrée par les recouvrements* fttf *(voir la définition 3.3.2(a)) et les immersions ouvertes $\mathfrak{f}$-denses de (X, Δ)-schémas localement de type fini.*

Démonstration. — Clairement, les recouvrements fttf et les immersions ouvertes $\mathfrak{f}$-denses sont des recouvrements $\mathfrak{f}$-fttf. Il s'agit de montrer que, inversement, tout recouvrement $\mathfrak{f}$-fttf se raffine par une composition de recouvrements fttf et d'immersions ouvertes $\mathfrak{f}$-denses. Fixons donc un recouvrement $\mathfrak{f}$-fttf $(f_i : Y_i \longrightarrow Y)_{i \in I}$ d'un (X, Δ)-schéma localement de type fini Y.

Étant donné un sous-Δ-schéma fermé intègre $Z \subset Y$, on peut trouver un indice $i_0 \in I$ tel que l'image de f_{i_0} contient le point générique de Z. (Utiliser le lemme 3.1.18(d).) Soit $Y'_Z \subset Y_{i_0} \times_X Z$ un sous-Δ-schéma localement fermé, intègre et tel que la projection $Y'_Z \longrightarrow Z$ est dominante. D'après le théorème 1.2.1, quitte à remplacer Y'_Z par un ouvert non vide, on peut supposer que le morphisme de schémas $Y'_Z \longrightarrow Z$ est ouvert ; appelons $U_Z \subset Z$ l'image de ce morphisme. Notons aussi $U'_Z \subset Z$ l'ouvert de Z dans lequel U_Z est $\mathfrak{f}$-dense et dont le complémentaire est un Δ-fermé (voir le lemme 3.4.4).

Clairement, la famille $(Y'_Z \longrightarrow Y)_Z$ domine la famille $(Y_i \longrightarrow Y)_{i \in I}$. Par ailleurs, pour chaque Z, le morphisme $Y'_Z \longrightarrow U'_Z$ est la composition du morphisme $Y'_Z \longrightarrow U_Z$, couvrant pour la topologie fttf, et de l'immersion ouverte $\mathfrak{f}$-dense $U_Z \hookrightarrow U'_Z$. Ainsi, pour conclure, il suffit de montrer que la famille $(U'_Z \hookrightarrow Y)_Z$ est couvrante pour la topologie fttf. Autrement dit, il faut montrer que $Y = \bigcup_Z U'_Z$, ensemblistement.

Pour ce faire, on se donne un point $y \in Y$. Il existe alors un plus petit Δ-fermé $T \subset Y$ contenant y. (C'est l'intersection de tous les Δ-fermés contenant y.) Clairement T est irréductible. De plus, $y \in U'_T$ car le complémentaire $T \setminus U'_T$ est un Δ-fermé strict de T qui ne peut pas contenir y par minimalité de T. ■

Corollaire 3.4.12. — *Soient X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma et F un préfaisceau sur* Fttf^{Δ}/X. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *F est un faisceau pour la topologie* $\mathfrak{f}$-fttf.

(b) *F est un faisceau pour la topologie* fttf *et il est $\mathfrak{f}$-invariant.*

Démonstration. — Dire que F est $\mathfrak{f}$-invariant revient à dire que F est un faisceau pour la topologie sur Fttf^{Δ}/X engendrée par les immersions ouvertes $\mathfrak{f}$-denses. Le résultat découle alors immédiatement de la proposition 3.4.11. ■

On termine la sous-section avec quelques résultats techniques sur la topologie $\mathfrak{f}$-fttf qui serviront dans les sous-sections 3.5 et 3.6.

Proposition 3.4.13. — *Soit Y un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma radiciellement noethérien. Si $(f_i : Y_i \longrightarrow Y)_{i \in I}$ est un recouvrement* $\mathfrak{f}$-fttf *de Y, il existe un sous-ensemble fini $I_0 \subset I$ tel que $(f_i : Y_i \longrightarrow Y)_{i \in I_0}$ est encore un recouvrement* $\mathfrak{f}$-fttf *de Y.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence noethérienne sur Y ce qui permet de supposer que la propriété à démontrer est vraie pour tout Δ-fermé strict de Y (muni de sa structure de sous-Δ-schéma fermé réduit). Soient $\xi \in Y$ un point générique et $i_0 \in I$ tel que ξ est dans l'image de f_{i_0}. D'après la proposition 3.1.28, on peut trouver un ouvert V contenant ξ et contenu dans l'image de f_{i_0}. Soit $V' \subset Y$ l'ouvert de Y dans lequel V est $\mathfrak{f}$-dense et tel que $Z = Y \setminus V'$ est un Δ-fermé (voir le lemme 3.4.4). Par construction, tout Δ-point de V' est dans l'image de f_{i_0}. L'hypothèse de récurrence appliquée au recouvrement $\mathfrak{f}$-fttf $(Y_i \times_Y Z \longrightarrow Z)_{i \in I}$ fournit un sous-ensemble fini $I_1 \subset I$ tel que $(Y_i \times_Y Z \longrightarrow Z)_{i \in I_1}$ est encore un recouvrement $\mathfrak{f}$-fttf. Clairement $I_0 = I_1 \cup \{i_0\}$ convient. ■

Pour la notion de « topos cohérent », on renvoie le lecteur à [**5**, Exposé VI, Définition 2.3].

Corollaire 3.4.14. — *Soit X un $(\mathbb{Q},\Delta)$-schéma (localement) radiciellement noethérien. Alors, le topos associé au site* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X, \mathfrak{f}\text{-fttf})$ *est (localement) cohérent.*

Démonstration. — D'après le lemme 3.4.10, le topos associé à $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X, \mathfrak{f}\text{-fttf})$ est équivalent à celui associé à $((\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{qc}}, \mathfrak{f}\text{-fttf})$. Les (X,Δ)-schémas appartenant à $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{qc}}$ sont radiciellement noethériens en tant que $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas. La proposition 3.4.13 permet donc de conclure. ■

D'après [**5**, Exposé VI, Proposition 9.0], tout topos localement cohérent, et en particulier $\mathbf{Shv}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)$ pour X localement radiciellement noethérien, admet suffisamment de points. Toutefois, le résultat simple suivant sera plus utile pour nous.

Lemme 3.4.15. — *Soit X un $(\mathbb{Q},\Delta)$-schéma et soit $F \longrightarrow G$ un morphisme de préfaisceaux sur* Fttf^{Δ}/X. *On suppose que pour tout morphisme de Δ-schémas* $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow X$, *avec K un Δ-corps, l'application $F(K) \longrightarrow G(K)$ est bijective. Alors,* $\mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(F) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(G)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soit τ la topologie sur Fttf^{Δ}/X engendrée par les familles d'immersions localement fermées $(s_i : Y_i \hookrightarrow Y)_{i\in I}$ telles que tout Δ-point de Y est dans l'image de l'un des s_i. Clairement, la topologie τ est moins fine que la topologie $\mathfrak{f}$-fttf et elle admet une famille conservative de points donnée par les évaluations $F \rightsquigarrow F(K)$, avec $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow X$ comme dans l'énoncé. Ceci permet de conclure. ■

Proposition 3.4.16. — *Soient X et Y des $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas affines radiciellement noethériens, et soit $f : Y \longrightarrow X$ un Δ-morphisme. Soit $(Y_j \longrightarrow Y)_{j\in J}$ un recouvrement* $\mathfrak{f}$-fttf. *Il existe alors :*

(i) un (X,Δ)-schéma affine de type fini X' muni d'un (X,Δ)-morphisme $g : Y \longrightarrow X'$, et

(ii) un recouvrement $\mathfrak{f}$-fttf $(X'_i \longrightarrow X')_{i\in I}$,

tels que la famille $((X'_i \times_{X'} Y)_{\mathrm{réd}} \longrightarrow Y)_{i\in I}$ domine $(Y_j \longrightarrow Y)_{j\in J}$.

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que les Y_j sont affines. Grâce à la proposition 3.4.13, on peut aussi supposer que l'ensemble J est fini. Les (Y,Δ)-schémas Y_j sont de type fini. Puisque Y est radiciellement noethérien, on peut supposer que chaque Y_j est défini par un Δ-idéal radiciellement de type fini dans une $(\mathcal{O}(Y),\Delta)$-algèbre de polynômes différentiels. Ainsi, on peut trouver une sous-$(\mathcal{O}(X),\Delta)$-algèbre de type fini $B \subset \mathcal{O}(Y)$ et des (B,Δ)-schémas affines de type fini X'_j, pour $j \in J$, tels que $(Y_j)_{\mathrm{réd}} \simeq (X'_j \times_{X'} Y)_{\mathrm{réd}}$, avec $X' = \mathrm{Spec}(B)$.

Par ailleurs, d'après le théorème 3.1.31 appliqué à $\coprod_{j\in J} X'_j \longrightarrow X$, il existe une famille finie d'immersions localement fermées de Δ-schémas $(Z_k \hookrightarrow X')_{k\in K}$ telle que la réunion des deux familles $(X'_j \longrightarrow X')_{j\in J}$ et $(Z_k \hookrightarrow X')_{k\in K}$ est un recouvrement $\mathfrak{f}$-fttf de X', et $Z_k \times_{X'} X'_j = \varnothing$, pour tout $(j,k) \in J \times K$. (On prendra les Z_k de sorte que $\bigcup_k Z_k$ est la partie Δ-constructible complémentaire de la partie Q fournie par le théorème 3.1.31.) Pour conclure, il reste à montrer que $Z_k \times_{X'} Y = \varnothing$, pour tout $k \in K$. Pour ce faire, on remarque que la famille $(Z_k \times_{X'} Y_j \longrightarrow Z_k \times_{X'} Y)_{j\in J}$ est un recouvrement $\mathfrak{f}$-fttf et que $Z_k \times_{X'} Y_j \simeq Z_k \times_{X'} X'_j \times_{X'} Y = \varnothing$. ■

Corollaire 3.4.17. — *Soit X un $(\mathbb{Q},\Delta)$-schéma affine radiciellement noethérien. Soient $(Y_\alpha)_\alpha$ un pro-objet dans la catégorie des (X,Δ)-schémas affines de type fini et $Y = \lim_\alpha Y_\alpha$. Alors, le site* $((\mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y)^{\mathrm{af,réd}}, \mathfrak{f}\text{-fttf})$ *est, à équivalence de catégories près, la limite projective des sites* $((\mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y_\alpha)^{\mathrm{af,réd}}, \mathfrak{f}\text{-fttf})$.

Démonstration. — Ceci découle de la proposition 3.4.16. (Voir [**5**, Exposé VI, Définition 8.2.4].) ■

Proposition 3.4.18. — *Soient X et Y des $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas affines radiciellement noethériens, et soit $f : Y \longrightarrow X$ un Δ-morphisme. Soit F un préfaisceau sur* Fttf^{Δ}/X *et considérons le préfaisceau f^*F sur* Fttf^{Δ}/Y *(l'image inverse étant prise au sens des préfaisceaux). Supposons que F est un faisceau pour la topologie* $\mathfrak{f}$-fttf. *Alors, pour tout (Y,Δ)-schéma affine de type fini Y', on a des bijections évidentes*

$$F(Y') \simeq f^*F(Y') \simeq \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(f^*F)(Y').$$

(Ci-dessus, $F(Y')$ est comme dans la convention 3.3.17.)

Démonstration. — Appelons F' la restriction du préfaisceau F à $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{af}}$. Alors, la restriction du préfaisceau f^*F à $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y)^{\mathrm{af}}$ est égale à f^*F', l'image inverse du préfaisceau F' suivant le foncteur de changement de base $\alpha_f : (\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{af}} \longrightarrow (\mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y)^{\mathrm{af}}$. De plus, pour $Y' \in (\mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y)^{\mathrm{af}}$ on a bien $f^*F'(Y') = F'(Y')$ (où l'on utilise la convention 3.3.17). Ainsi, pour conclure, il suffit de montrer que si F' est un faisceau pour la topologie $\mathfrak{f}$-fttf, il en est de même de f^*F'. (Utiliser le lemme 3.4.10.)

L'hypothèse que F' est un faisceau pour la topologie $\mathfrak{f}$-fttf entraîne que $F'(U) = F'(U_{\text{réd}})$ pour tout (X, Δ)-schéma affine de type fini U. Il s'ensuit aussitôt que $f^*F'(V) = f^*F'(V_{\text{réd}})$ pour tout (Y, Δ)-schéma affine de type fini V. (En effet, le foncteur qui à une sous-$(\mathcal{O}(X), \Delta)$-algèbre de type fini de $\mathcal{O}(V)$ associe son image dans $\mathcal{O}(V_{\text{réd}})$ est surjectif.) On peut donc considérer F' et f^*F' comme des préfaisceaux sur $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\text{af, réd}}$ et $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y)^{\text{af, réd}}$. De plus, f^*F' est alors l'image inverse de F' suivant le foncteur de changement de base

$$(\alpha_f(-))_{\text{réd}} : (\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\text{af, réd}} \longrightarrow (\mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y)^{\text{af, réd}}.$$

Ceci nous ramène à montrer que le foncteur « image inverse » suivant $(\alpha_f(-))_{\text{réd}}$ préserve les faisceaux pour la topologie $\mathfrak{f}$-fttf.

On peut écrire Y comme une limite projective d'un pro-objet de la catégorie des (X, Δ)-schémas affines de type fini : $Y = \lim_{\alpha} Y_{\alpha}$. D'après le corollaire 3.4.17, le site $((\mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y)^{\text{af, réd}}, \mathfrak{f}\text{-fttf})$ est la limite projective des sites $((\mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y_i)^{\text{af, réd}}, \mathfrak{f}\text{-fttf})$. Le résultat recherché est maintenant un cas très particulier de [**5**, Exposé VI, Proposition 8.5.9] que le lecteur ne trouvera aucune peine à démontrer directement. ■

Remarque 3.4.19. — Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et L/K une Δ-extension. Notons $f : \mathrm{Spec}(L) \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$ le morphisme de Δ-schémas associé à cette Δ-extension. Soit F un faisceau sur $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf})$ (non nécessairement $\mathfrak{f}$-invariant). On verra plus loin, comme conséquence facile du lemme magique (voir le théorème 4.1.3), que l'application $F(L) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(f^*F)(L)$ est bijective. À présent et pour une future utilisation, on note que l'injectivité de cette application découle de la proposition 3.4.18. En effet, l'application $F(K) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(F)(K)$ est injective puisqu'un recouvrement $\mathfrak{f}$-fttf de $\mathrm{Spec}(K)$ est aussi un recouvrement fttf. On peut donc supposer que F est un faisceau pour la topologie $\mathfrak{f}$-fttf. Dans ce cas, la composition de

$$F(L) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(f^*F)(L) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(f^*F)(L)$$

est bijective d'après la proposition 3.4.18, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 3.4.20. — *Soient X et Y des $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schémas localement radiciellement noethériens, et soit $f : Y \longrightarrow X$ un Δ-morphisme. Soit F un faisceau $\mathfrak{f}$-invariant sur* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X, \mathrm{fttf})$. *Alors, le faisceau* $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(f^*F)$ *est aussi $\mathfrak{f}$-invariant.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que le morphisme évident $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(f^*F) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(f^*F)$ est un isomorphisme. La question étant locale pour la topologie de Zariski sur Y, on peut supposer que X et Y sont des $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schémas affines. D'après la proposition 3.4.18, la restriction du préfaisceau f^*F à $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/Y)^{\mathrm{af}}$ est un faisceau $\mathfrak{f}$-fttf, ce qui permet de conclure. ■

3.5. Faisceaux discrets. —

Dans cette sous-section, nous introduisons la classe des faisceaux fttf discrets qui doit être considérée comme l'analogue de la classe des faisceaux étales constants. Nous commençons par une reformulation du théorème 3.2.10.

Proposition 3.5.1. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et notons $C = K^{\Delta=0}$ son corps des constantes. Pour tout (K, Δ)-schéma localement de type fini Y, il existe un recouvrement* fttf $(f_i : Y_i \longrightarrow Y)_{i \in I}$ *tel que chaque Y_i admet un quotient discret pseudo-effectif qui est un C-schéma de type fini.*

Démonstration. — Clairement, on peut supposer que Y est de type fini. Le théorème 3.2.10, joint à la proposition 3.1.20, entraîne l'existence d'une suite finie de Δ-fermés

$$Y = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_n \supset Y_{n+1} = \varnothing$$

telle que $Y_i \smallsetminus Y_{i+1}$, muni de sa structure de sous-Δ-schéma réduit, admet un quotient discret pseudo-effectif pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$. La famille des immersions localement fermées $(Y_i \smallsetminus Y_{i+1} \hookrightarrow Y)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est un recouvrement fttf qui convient. ■

Notation 3.5.2. — Étant donné un schéma S, on note Ct/S la catégorie des S-schémas localement de type fini. On note aussi $(\mathrm{Ct}/S)^{\mathrm{qc}}$ (resp. $(\mathrm{Ct}/S)^{\mathrm{af}}$, $(\mathrm{Ct}/S)^{\text{réd}}$) la sous-catégorie pleine de Ct/S formée des S-schémas qui sont quasi-compacts (resp. affines, réduits) en tant que $\mathbb{Z}$-schémas. On note enfin $(\mathrm{Ct}/S)^{\text{qc, réd}}$ (resp. $(\mathrm{Ct}/S)^{\text{af, réd}}$) l'intersection de $(\mathrm{Ct}/S)^{\mathrm{qc}}$ (resp. $(\mathrm{Ct}/S)^{\mathrm{af}}$) avec $(\mathrm{Ct}/S)^{\text{réd}}$. □

Définition 3.5.3. —

(a) *On dit qu'une famille de morphismes de schémas* $(f_i : T_i \longrightarrow T)_{i\in I}$ *est un* recouvrement constructible *de* T *si les* f_i *sont localement de type fini et si* $T = \bigcup_{i\in I} f_i(T_i)$.

(b) *Soit* S *un schéma. La* topologie constructible *sur* Ct/S *est la topologie de Grothendieck engendrée par les recouvrements constructibles d'objets de* Ct/S. *Elle sera désignée par « ct » et son foncteur « faisceau associé » sera noté* a_{ct}.

Remarque 3.5.4. — La définition 3.5.3 est un cas particulier commun aux définitions 3.3.2 et 3.4.9 qu'on obtient en prenant $\Delta = \varnothing$. On attire aussi l'attention du lecteur sur le fait que dans la littérature l'expression « topologie constructible » correspond souvent à une autre topologie, à savoir celle engendrée par les familles surjectives d'immersions localement fermées. □

Théorème 3.5.5. — *Soit* K *un* Δ*-corps de carcatéristique nulle et notons* $C = K^{\Delta=0}$ *son corps des constantes. Le foncteur* $K \otimes_C - : \mathrm{Ct}/C \longrightarrow \mathrm{Fttf}^{\Delta}/K$ *de la proposition 3.2.1 induit des morphismes de sites*

$$\delta_K : (\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf}) \longrightarrow (\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct}) \quad \textit{et} \quad \delta'_K : (\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathfrak{f}\text{-}\mathrm{fttf}) \longrightarrow (\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct}).$$

De plus, les foncteurs « image inverse »

$$\delta_K^* : \mathbf{Shv}_{\mathrm{ct}}(\mathrm{Ct}/C) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\mathrm{fttf}}(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K) \quad \textit{et} \quad \delta_K'^* : \mathbf{Shv}_{\mathrm{ct}}(\mathrm{Ct}/C) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\mathfrak{f}\text{-}\mathrm{fttf}}(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K)$$

sont pleinement fidèles. En particulier, si G *est un faisceau sur* $(\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct})$ *et si* T *est un* C*-schéma localement de type fini, on a des bijections évidentes* $G(T) \simeq \delta_K^*(G)(K \otimes_C T) \simeq \delta_K'^*(G)(K \otimes_C T)$.

Avant de donner la preuve du théorème 3.5.5, nous introduisons une notation qui sera couramment utilisée dans la suite.

Notation 3.5.6. — Avec K et C comme dans le théorème 3.5.5, on note

$$(-)^{\delta} : \mathbf{PSh}(\mathrm{Ct}/C) \longrightarrow \mathbf{PSh}(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K)$$

le foncteur « image inverse » suivant $K \otimes_C -$ sur les préfaisceaux. Étant donné un faisceau F sur $(\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct})$, on a alors $\delta_K^*(F) = \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(F^{\delta})$ et $\delta_K'^*(F) = \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-}\mathrm{fttf}}(F^{\delta})$. Lorsqu'il y a besoin de préciser la dépendance en K, on écrit alors « $(-)^{\delta_K}$ » au lieu de « $(-)^{\delta}$ ». □

Démonstration du théorème 3.5.5. — Puisque le foncteur $K \otimes_C -$ commute aux limites finies, il découle de [**4**, Exposé I, Proposition 5.4(4)] que le foncteur $(-)^{\delta}$ est exact. Puisque le foncteur $K \otimes_C -$ envoie un recouvrement constructible sur un recouvrement fttf (et donc aussi $\mathfrak{f}$-fttf), il découle de [**4**, Exposé III, Proposition 1.6] qu'il est continu. Enfin, on applique [**4**, Exposé III, Proposition 1.3] pour déduire que les foncteurs δ_K^* et $\delta_K'^*$ sont exacts, ce qui démontre la première assertion de l'énoncé.

Le reste de la preuve est consacré à la pleine fidélité des foncteurs δ_K^* et $\delta_K'^*$. Il revient au même de montrer que les morphismes d'unité $\mathrm{id} \longrightarrow (\delta_K)_*\delta_K^*$ et $\mathrm{id} \longrightarrow (\delta'_K)_*\delta_K'^*$ sont inversibles. Pour ce faire, on se donne un faisceau G sur $(\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct})$ et on cherche à montrer que les applications

$$G(T) \longrightarrow \delta_K^*(G)(K \otimes_C T) \qquad \text{et} \qquad G(T) \longrightarrow \delta_K'^*(G)(K \otimes_C T) \tag{3.5}$$

sont bijectives pour tout C-schéma localement de type fini T. D'après le lemme 3.5.7 ci-dessous, les applications (3.5) s'identifient à

$$G^{\delta}(K \otimes_C T) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(G^{\delta})(K \otimes_C T) \quad \text{et} \quad G^{\delta}(K \otimes_C T) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-}\mathrm{fttf}}(G^{\delta})(K \otimes_C T). \tag{3.6}$$

(On utilise ici la proposition 3.2.1 qui entraîne que T est le quotient discret catégorique de $K \otimes_C T$. Plus tard, on utilisera implicitement le fait que T est même le quotient discret effectif de $K \otimes_C T$; voir l'exemple 3.2.6.) On divise la preuve de la bijectivité des applications (3.6) en deux parties.

Partie A. — Notons H et H' les préfaisceaux séparés pour les topologies fttf et $\mathfrak{f}$-fttf associés au préfaisceau G^δ. Dans cette partie, nous allons vérifier que les surjections $G^\delta \twoheadrightarrow H \twoheadrightarrow H'$ induisent des bijections sur les (K,Δ)-schémas localement de type fini X possédant un quotient discret pseudo-effectif T qui est un C-schéma localement de type fini. Clairement, il suffit de montrer que la surjection composée $G^\delta \twoheadrightarrow H'$ induit des injections sur de tels X.

On fixe deux sections $u, v \in G^\delta(X)$ qui ont même image dans $H'(X)$. Il existe donc un recouvrement $\mathfrak{f}$-fttf $(f_i : X_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ tel que $u|_{X_i} = v|_{X_i}$ pour tout $i \in I$. D'après la proposition 3.5.1 et quitte à raffiner ce recouvrement, on peut supposer que chaque X_i admet un quotient discret pseudo-effectif T_i qui est un C-schéma de type fini. D'après le lemme 3.5.7 ci-dessus, on a $G^\delta(X) = G(T)$ et $G^\delta(X_i) = G(T_i)$. Les sections $u, v \in G(T)$ vérifient donc $u|_{T_i} = v|_{T_i}$ pour tout $i \in I$. Or, la famille $(T_i \longrightarrow T)_{i\in I}$ est couvrante pour la topologie constructible. En effet, le morphisme $\coprod_{i\in I} T_i \longrightarrow T$ factorise le morphisme $\coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow T$ qui est surjectif puisque tout point de T est l'image d'un Δ-point de X. Étant donné que G est un faisceau pour la topologie constructible, il s'ensuit que $u = v$ comme désiré.

Partie B. — Nous vérifions ici que les applications

$$H(K \otimes_C T) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(G^\delta)(K \otimes_C T) \quad \text{et} \quad H'(K \otimes_C T) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(G^\delta)(K \otimes_C T) \tag{3.7}$$

sont bijectives pour tout $T \in \mathrm{Ct}/C$. Puisque H et H' sont séparés pour les topologies fttf et $\mathfrak{f}$-fttf, seule la surjectivité nécessite une preuve. On traite uniquement le cas de la topologie $\mathfrak{f}$-fttf ; le cas de la topologie fttf se démontre de la même manière.

Fixons une section $u \in \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(G^\delta)(K \otimes_C T)$. Il existe un recouvrement $\mathfrak{f}$-fttf $(X_i \longrightarrow K \otimes_C T)_{i\in I}$ tel que $u|_{X_i} \in H'(X_i)$ pour tout $i \in I$. D'après la proposition 3.5.1 et quitte à raffiner ce recouvrement, on peut supposer que chaque X_i admet un quotient discret pseudo-effectif T_i qui est un C-schéma de type fini. D'après le lemme 3.5.7 ci-dessous et l'étape précédente, on a des bijections

$$G(T_i) \simeq G^\delta(X_i) \simeq H'(X_i).$$

On note $u'_i \in G(T_i)$ l'antécédent de $u|_{X_i}$ par la composition de ces bijections.

Pour $i, j \in I$, on fixe un recouvrement $\mathfrak{f}$-fttf $(X_{ijl} \longrightarrow X_{ij} = X_i \times_{K\otimes_C T} X_j)_{l\in L_{ij}}$ tel que chaque X_{ijl} possède un quotient discret pseudo-effectif T_{ijl} qui est un C-schéma de type fini. D'après le lemme 3.5.7 ci-dessous et l'étape précédente, on a des bijections

$$G(T_{ijl}) \simeq G^\delta(X_{ijl}) \simeq H'(X_{ijl})$$

et leur composition envoie $u'_i|_{T_{ijl}}$ et $u'_j|_{T_{ijl}}$ sur le même élément, à savoir $u|_{X_{ijl}}$, ce qui montre que $u'_i|_{T_{ijl}} = u'_j|_{T_{ijl}}$. Or, la famille $(T_{ijl} \longrightarrow T_{ij} = T_i \times_T T_j)_{l\in L_{ij}}$ est couvrante pour la topologie constructible. En effet, le morphisme $\coprod_{l\in L_{ij}} T_{ijl} \longrightarrow T_{ij}$ factorise le morphisme $\coprod_{l\in L_{ij}} X_{ijl} \longrightarrow T_{ij}$ qui est surjectif puisque, d'une part, le morphisme $\coprod_{l\in L_{ij}} X_{ijl} \longrightarrow X_{ij}$ est surjectif sur les Δ-points et, d'autre part, le morphisme $X_{ij} \longrightarrow T_{ij}$ est surjectif d'après le lemme 3.5.9 ci-dessous entraînant aussitôt que tout point de T_{ij} est l'image d'un Δ-point de X_{ij}. Puisque G est un faisceau pour la topologie constructible, il s'ensuit que $u'_i|_{T_{ij}} = u'_j|_{T_{ij}}$ et les sections u'_i se recollent en une section $u' \in G(T)$. L'image de u' par la composition des bijections

$$G(T) \simeq G^\delta(K \otimes_C T) \simeq H'(K \otimes_C T)$$

coïncide avec u modulo la seconde injection de (3.7). ∎

Les lemmes 3.5.7 et 3.5.9 ci-dessous ont servi dans la preuve du théorème 3.5.5.

Lemme 3.5.7. — *Gardons les notations et les hypothèses du théorème 3.5.5. Soit X un (K,Δ)-schéma localement de type fini admettant un quotient discret catégorique $X_{\Delta=0}$ qui est un C-schéma localement de type fini. Alors, pour tout préfaisceau G sur* Ct/C*, l'application évidente $G(X_{\Delta=0}) \longrightarrow G^\delta(X)$ est bijective.*

Démonstration. — La source et le but de l'application $G(X_{\Delta=0}) \longrightarrow G^\delta(X)$ commutent aux colimites en G. On peut donc supposer que G est représentable par un C-schéma localement de type fini T. L'application qui nous intéresse s'identifie alors à $\mathrm{Hom}_C(X_{\Delta=0}, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K,\Delta}(X, K \otimes_C T)$. ∎

Pour des références futures, on note la conséquence suivante du lemme 3.5.7.

Corollaire 3.5.8. — *Gardons les notations et les hypothèses du théorème 3.5.5. Soit S une (K,Δ)-algèbre simple (non nécessairement de type fini). Alors, pour tout préfaisceau G sur* Ct/C, *l'application évidente $G(S^{\Delta=0}) \longrightarrow G^{\delta}(S)$ est bijective.*

Démonstration. — Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ avec $A \subset S$ une sous-(K,Δ)-algèbre de type fini. D'après le théorème 3.2.10, il existe un Δ-fermé $Z \subset X$ de codimension partout non nulle tel que $X \smallsetminus Z$ possède un quotient discret pseudo-effectif qui est un C-schéma affine de type fini. Puisque S est simple, le morphisme $\mathrm{Spec}(S) \longrightarrow X$ se factorise par l'ouvert $X \smallsetminus Z$. On peut alors trouver un ouvert quasi-compact $X' \subset X \smallsetminus Z$ qui contient l'image de $\mathrm{Spec}(S)$ et qui admet le même quotient discret pseudo-effectif que $X \smallsetminus Z$. Ceci montre que le pro-(K,Δ)-schéma $\{\mathrm{Spec}(A)\}_{A\subset S}$, où A parcourt l'ensemble des sous-(K,Δ)-algèbres de type fini de S, est isomorphe (au sens des pro-objets) à un pro-(K,Δ)-schéma $(X'_\alpha)_\alpha$ tel que chaque X'_α possède un quotient discret pseudo-effectif qui est un C-schéma affine de type fini. Puisque $\mathrm{Spec}(S^{\Delta=0})$ est la limite du pro-C-schéma $((X'_\alpha)_{\Delta=0})_\alpha$, le résultat recherché découle aussitôt du lemme 3.5.7. ∎

Lemme 3.5.9. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et notons $C = K^{\Delta=0}$ son corps des constantes. On suppose donnés deux (K,Δ)-schémas X et Y, trois C-schémas P, Q et T, et un diagramme de (C,Δ)-schémas*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & & Y \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[r, "m"] & T & Q \arrow[l, "n"'] \end{tikzcd}$$

tel que f et g sont surjectifs. Alors, le morphisme évident

$$f \times g : X \times_{K\otimes_C T} Y \longrightarrow P \times_T Q \tag{3.8}$$

est surjectif.

Démonstration. — Soit D/C une extension, et soient $p \in P(D)$, $q \in Q(D)$ et $t \in T(D)$ des D-points tels que $m(p) = n(q) = t$. Ceci définit un D-point $(p,q) \in P \times_T Q(D)$. Nous allons montrer que la fibre en (p,q) du morphisme (3.8) est non vide, ce qui terminera la preuve du lemme. Pour ce faire, on peut remplacer les C-schémas P, Q et T par $\mathrm{Spec}(D)$, et les (K,Δ)-schémas X et Y par les (K,Δ)-schémas $X \times_P \mathrm{Spec}(D)$ et $Y \times_Q \mathrm{Spec}(D)$. Ces derniers sont non vides puisque f et g sont surjectifs. On se ramène ainsi à montrer l'assertion suivante. Si D/C est une extension et si X et Y sont des $(K \otimes_C D, \Delta)$-schémas non vides, alors $X \times_{K\otimes_C D} Y$ est non vide.

On ne restreint pas la généralité en supposant que $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$ avec A et B des $(K\otimes_C D, \Delta)$-algèbres non nulles. Puisque D est un corps, on a alors des inclusions $D \hookrightarrow A^{\Delta=0}$ et $D \hookrightarrow B^{\Delta=0}$. La proposition 1.3.3 entraîne que les morphismes $K \otimes_C D \longrightarrow A$ et $K \otimes_C D \longrightarrow B$ sont injectifs. Il s'ensuit que $A \otimes_{K\otimes_C D} B$ est non nulle, comme désiré. ∎

Définition 3.5.10. — *Gardons les notations et les hypothèses du théorème 3.5.5. Un faisceau F sur* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf})$ *est dit* discret *s'il est dans l'image essentielle du foncteur pleinement fidèle*

$$\delta_K^* : \mathbf{Shv}_{\mathrm{ct}}(\mathrm{Ct}/C) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\mathrm{fttf}}(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K).$$

Autrement dit, F est discret si et seulement si le morphisme de counité $\delta_K^*(\delta_K)_*F \longrightarrow F$ est un isomorphisme.

Proposition 3.5.11. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et notons $C = K^{\Delta=0}$ son corps des constantes. Alors, un faisceau discret sur* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf})$ *est automatiquement $\mathfrak{f}$-invariant (ce qui revient à dire qu'il est un faisceau* $\mathfrak{f}$-fttf*). Ainsi, si G est un faisceau sur* $(\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct})$, *on a $\delta_K^*(G) \simeq \delta_K'^*(G)$.*

Démonstration. — (Dans cette preuve, on écrit « $(-)^{\delta_K}$ » au lieu de « $(-)^{\delta}$ » car il y aura besoin de préciser la dépendance en K.) Soit G un faisceau sur $(\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct})$ et montrons que le morphisme de faisceaux fttf

$$\delta_K^*(G) = \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(G^{\delta_K}) \longrightarrow \delta_K'^*(G) = \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-}\mathrm{fttf}}(G^{\delta_K}) \tag{3.9}$$

est un isomorphisme. Pour ce faire, nous appliquons le théorème 3.3.16. Soit D/K une extension algébriquement close de degré de transcendance indénombrable et munissons $\mathrm{Spec}(D[[\mathbf{t}]])$ de la structure de (K,Δ)-schéma de la proposition 3.3.8. Il faut montrer que l'application obtenue en évaluant (3.9) sur $\mathrm{Spec}(D[[\mathbf{t}]])$

est bijective. En posant $L = \mathrm{Frac}(D[[\mathbf{t}]])$, et en utilisant le lemme 3.3.15 et la proposition 3.4.8, cette application s'écrit :
$$G^{\delta_K}(D[[\mathbf{t}]]) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(G^{\delta_K})(L). \tag{3.10}$$
D'une part, grâce au corollaire 3.5.8, on a $G(D) \simeq G^{\delta_K}(D[[\mathbf{t}]])$. D'autre part, grâce à la proposition 3.4.18, on a $\mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(G^{\delta_K})(L) \simeq \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(f^*G^{\delta_K})(L)$, où f est le morphisme $\mathrm{Spec}(L) \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$. Or, on a $f^*G^{\delta_K} \simeq (f_0^*G)^{\delta_L}$, où f_0 est le morphisme $\mathrm{Spec}(D) \longrightarrow \mathrm{Spec}(C)$. (On précise que f^* et f_0^* désignent ici les foncteurs « image inverse » sur les préfaisceaux, et on remarque aussi que $L^{\Delta=0} = D$.) Au final, on est donc ramené à montrer que l'application évidente
$$G(D) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}((f_0^*G)^{\delta_L})(L) \simeq \delta_L'^*(\mathrm{a}_{\mathrm{ct}}(f_0^*G))(L) \tag{3.11}$$
est bijective. Or, d'après le théorème 3.5.5 appliqué au Δ-corps L, on a $\delta_L'^*(\mathrm{a}_{\mathrm{ct}}(f_0^*G))(L) \simeq \mathrm{a}_{\mathrm{ct}}(f_0^*G)(D)$. Puisque G est un faisceau pour la topologie constructible, on a aussi $\mathrm{a}_{\mathrm{ct}}(f_0^*G)(D) \simeq f_0^*G(D) \simeq G(D)$. (Utiliser la proposition 3.4.18 dans le cas $\Delta = \varnothing$.) Ceci permet de conclure. ■

Corollaire 3.5.12. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et soit G un faisceau sur* $(\mathrm{Ct}/K^{\Delta=0}, \mathrm{ct})$. *Alors, pour toute Δ-extension L/K et tout $L^{\Delta=0}$-schéma affine T, l'application évidente*
$$G(T) \longrightarrow \delta_K^*(G)(L \otimes_{L^{\Delta=0}} T)$$
est bijective.

Démonstration. — On pose $C = K^{\Delta=0}$ et $D = L^{\Delta=0}$, et on appelle $f_0 : \mathrm{Spec}(D) \longrightarrow \mathrm{Spec}(C)$ le morphisme évident. On ne restreint pas la généralité en supposant que le D-schéma T est de type fini. En utilisant la proposition 3.4.18 et puis le théorème 3.5.5, on obtient les bijections évidentes
$$\delta_K'^*(G)(L \otimes_D T) \simeq \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(G^{\delta_K})(L \otimes_D T) \simeq \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}((f_0^*G)^{\delta_L})(L \otimes_D T) \simeq \mathrm{a}_{\mathrm{ct}}(f_0^*G)(T) \simeq G(T).$$
Puisque $\delta_K^*(G) \simeq \delta_K'^*(G)$, ceci permet de conclure. ■

Les deux propositions suivantes fournissent des caractérisations intéressantes des faisceaux fttf discrets.

Proposition 3.5.13. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et notons $C = K^{\Delta=0}$ son corps des constantes. Soit F un faisceau sur* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) F est discret.

(b) Pour toute extension D/K, l'application $F(K \otimes_C D) \longrightarrow F(D[[\mathbf{t}]])$ est bijective. (Bien entendu, le morphisme de (K, Δ)-algèbres $K \otimes_C D \longrightarrow D[[\mathbf{t}]]$ est celui de la proposition 3.3.8.)

(c) La conclusion du (b) est satisfaite pour une extension D/K algébriquement close de degré de transcendance indénombrable.

Démonstration. — L'implication (a) ⇒ (b) est facile. En effet, supposons que $F = \delta_K^*(F_0)$ avec F_0 un faisceau sur $(\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct})$. D'une part, le théorème 3.5.5, entraîne que $F(K \otimes_C D) \simeq F_0(D)$. D'autre part, puisque $\delta_K^*(F_0)$ est le faisceau fttf associé à F_0^{δ}, le lemme 3.3.15 et le corollaire 3.5.8 entraînent que $F(D[[\mathbf{t}]]) \simeq F_0^{\delta}(D[[\mathbf{t}]]) \simeq F_0(D)$. Ceci permet de conclure.

L'implication (b) ⇒ (c) étant évidente, il reste à montrer que (c) ⇒ (a). Ainsi, supposons que F est un faisceau sur $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf})$ vérifiant (c) et notons $F_0 = (\delta_K)_*F$. D'après le théorème 3.3.16, il suffit de montrer que le morphisme de préfaisceaux $F_0^{\delta} \longrightarrow F$ induit un isomorphisme sur le point associé à D/K. Autrement dit, il faut montrer que l'application $F_0^{\delta}(D[[\mathbf{t}]]) \longrightarrow F(D[[\mathbf{t}]])$ est bijective. Or, d'après le corollaire 3.5.8, nous avons $F_0^{\delta}(D[[\mathbf{t}]]) \simeq F_0(D) = F(K \otimes_C D)$ et, d'après la propriété (c), nous avons $F(K \otimes_C D) \simeq F(D[[\mathbf{t}]])$. Ceci permet de conclure. ■

Proposition 3.5.14. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et soit F un faisceau sur* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) F est discret.

(b) F est $\mathfrak{f}$-invariant et, pour toute Δ-extension L/K, l'application $F(K \otimes_{K^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}) \longrightarrow F(L)$ est bijective.

(c) F est $\mathfrak{f}$-invariant et, pour tous morphismes de Δ-extensions $L/K \hookrightarrow L'/K$ induisant un isomorphisme $L^{\Delta=0} \simeq L'^{\Delta=0}$, l'application $F(L) \longrightarrow F(L')$ est bijective.

De plus, dans (b), on peut se restreindre à $L = \mathrm{Frac}(D[[\mathbf{t}]])$ *avec* D/K *une extension algébriquement close de degré de transcendance indénombrable.*

Démonstration. — Considérons la variante suivante de (b) :

(b′) F est $\mathfrak{f}$-invariant et, pour toute Δ-extension L/K, l'application $F(\mathrm{Frac}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} L^{\Delta=0})) \longrightarrow F(L)$ est bijective.

Clairement, la condition (b′) est équivalente à (c). De plus, on a l'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (b′) qui découle du lemme 3.4.7 et du fait que le Δ-anneau $K \otimes_{K^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}$ est simple, de sorte que tout ouvert non vide de $\mathrm{Spec}(K \otimes_{K^{\Delta=0}} L^{\Delta=0})$ est $\mathfrak{f}$-dense. Ceci montre l'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (c).

L'implication (a) $\Rightarrow$ (c) découle de la proposition 3.5.11 et du corollaire 3.5.12. Pour montrer l'implication (b) $\Rightarrow$ (a), on utilise la proposition 3.5.13. Plus précisément, nous vérifions que la condition (b) de l'énoncé à démontrer entraîne la condition (b) de la proposition 3.5.13. Soit D/K une extension et considérons le (K, Δ)-corps $L = \mathrm{Frac}(D[[\mathbf{t}]])$. Puisque F est $\mathfrak{f}$-invariant, nous avons $F(D[[\mathbf{t}]]) \simeq F(L)$. Par ailleurs, nous avons par hypothèse $F(K \otimes_{K^{\Delta=0}} L^{\Delta=0}) \simeq F(L)$. Puisque $L^{\Delta=0} = D$, l'application $F(K \otimes_C D) \longrightarrow F(D[[\mathbf{t}]])$ est donc bijective comme désiré. ■

Corollaire 3.5.15. — *Soit* K *un* Δ*-corps de carcatéristique nulle et soit* F *un faisceau sur* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf})$ *que l'on suppose discret.*

(i) Soit $E \subset F$ *un sous-faisceau* $\mathfrak{f}$-fttf. *Alors,* E *est discret.*

(ii) Soit $F \twoheadrightarrow G$ *une surjection de faisceaux* $\mathfrak{f}$-fttf. *Alors,* G *est discret et* $F \twoheadrightarrow G$ *est aussi une surjection de faisceaux* fttf.

Démonstration. — Pour (i), on montre que E vérifie la propriété (c) de la proposition 3.5.14. Soient donc $L/K \hookrightarrow L'/K$ un morphisme de Δ-extensions induisant un isomorphisme sur les corps de constantes. On doit montrer que l'application $E(L) \longrightarrow E(L')$ est bijective. L'injectivité est claire. Pour la surjectivité, fixons $s \in E(L')$. Puisque E est un faisceau fttf, pour montrer que la section s provient de $E(L)$, il suffit de montrer qu'elle est dans $\mathrm{eq}\{E(L') \rightrightarrows E(L' \otimes_L L')\}$. (En effet, le Δ-morphisme $\mathrm{Spec}(L') \longrightarrow \mathrm{Spec}(L)$ est une limite projective de morphismes surjectifs de (K, Δ)-schémas affines de type fini.) Puisque E est un sous-faisceau de F, il suffit de montrer que $s \in \mathrm{eq}\{F(L') \rightrightarrows F(L' \otimes_L L')\}$. Or, puisque F est discret, on a $F(L) \simeq F(L')$ ce qui entraîne que les deux applications évidentes de $F(L')$ dans $F(L' \otimes_L L')$ sont égales.

On peut déduire (ii) de (i) de la manière suivante. Le faisceau $\mathfrak{f}$-fttf G est le coégalisateur d'une paire de flèches $(u, v) : H \rightrightarrows F$ avec H un sous-faisceau $\mathfrak{f}$-fttf de $F \times F$, et u et v les restrictions à H des deux projections évidentes. D'après (i), H est un faisceau fttf discret. Ainsi, on peut écrire $F = \delta_K^*(F_0)$ et $H = \delta_K^*(H_0)$ avec F_0 et H_0 des faisceaux sur $(\mathrm{Ct}/K^{\Delta=0}, \mathrm{ct})$. De plus, d'après le théorème 3.5.5, la paire (u, v) est l'image par δ_K^* d'une paire de flèches $(u_0, v_0) : H_0 \rightrightarrows F_0$. Puisque δ_K^* commute aux colimites, l'image par δ_K^* du coégalisateur G_0 de la paire (u_0, v_0) est le coégalisateur de la paire (u, v) dans la catégorie des faisceaux fttf. Puisque $\delta_K^*(G_0)$ est aussi un faisceau $\mathfrak{f}$-fttf (voir la proposition 3.5.11), il est encore le coégalisateur de la paire (u, v) dans la catégorie des faisceaux $\mathfrak{f}$-fttf, ce qui montre que $G \simeq \delta_K^*(G_0)$ et permet de conclure. ■

3.6. Faisceaux localement discrets. —

Dans cette sous-section, nous introduisons la classe des faisceaux fttf localement discrets qui doit être considérée comme l'analogue de la classe des faisceaux étales localement constants. Étant donnée une Δ-extension L/K entre $(\mathbb{Q}, \Delta)$-corps, on note $(L/K) : \mathrm{Spec}(L) \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$ le morphisme de Δ-schémas correspondant. Dans cette sous-section, sauf mention explicite du contraire, $(L/K)^*$ désignera le foncteur « image inverse » sur les faisceaux fttf suivant le Δ-morphisme (L/K).

Définition 3.6.1. — *Soit* K *un* Δ*-corps de caractéristique nulle. Un faisceau* F *sur* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf})$ *est dit* localement discret *s'il existe une* Δ*-extension* L/K *telle que* $(L/K)^*(F)$ *est un faisceau discret sur* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/L, \mathrm{fttf})$. *Nous dirons alors que* F *est* trivialisé *par la* Δ*-extension* L/K.

Clairement, un faisceau fttf discret est localement discret. La proposition 3.5.11 s'étend aux faisceaux localement discrets comme suit.

Lemme 3.6.2. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et soit F un faisceau localement discret sur* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf})$. *Alors, F est $\mathfrak{f}$-invariant (ce qui revient à dire que F est un faisceau $\mathfrak{f}$-fttf).*

Démonstration. — Nous allons vérifier la condition (c) de la proposition 3.4.8. Soient L/K une Δ-extension qui trivialise F et D/L une extension algébriquement close de degré de transcendance indénombrable. On doit montrer que l'application

$$F(D[[\mathbf{t}]]) \longrightarrow F(\mathrm{Frac}(D[[\mathbf{t}]]))$$

est bijective. Puisque l'évaluation en $\mathrm{Spec}(D[[\mathbf{t}]])$ est un point des topos fttf de K et L, on a une bijection évidente $F(D[[\mathbf{t}]]) \simeq ((L/K)^*F)(D[[\mathbf{t}]])$. Par ailleurs, la remarque 3.4.19 fournit une injection

$$F(\mathrm{Frac}(D[[\mathbf{t}]])) \hookrightarrow ((L/K)^*F)(\mathrm{Frac}(D[[\mathbf{t}]])).$$

(Il s'agit en fait d'une bijection, mais nous ne le saurons qu'après coup.) Ainsi, nous sommes ramenés à montrer que l'application

$$((L/K)^*F)(D[[\mathbf{t}]]) \longrightarrow ((L/K)^*F)(\mathrm{Frac}(D[[\mathbf{t}]]))$$

est bijective. Puisque $(L/K)^*F$ est supposé discret, la proposition 3.5.11 permet de conclure. ■

Un des résultats importants sur les faisceaux localement discrets est le théorème 3.6.8 ci-dessous qui affirme que tout faisceau localement discret est trivialisé par une clôture normale. Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de quelques préparations. On commence par introduire une notation.

Notation 3.6.3. — Soient S un schéma et T un S-schéma. On note $\mathscr{D}_S(T)$ l'ensemble ordonné des ouverts de T quasi-compacts et denses relativement à S. (Rappelons qu'un ouvert $V \subset T$ est dit dense relativement à S si pour tout $s \in S$ l'ouvert $V_s \subset T_s$ est dense ; il est dit quasi-compact relativement à S si le morphisme $V \longrightarrow S$ est quasi-compact.) L'ensemble ordonné $\mathscr{D}_S(T)$ est cofiltrant (car stable par intersections finies étant donné que tous nos schémas sont séparés). De plus, un morphisme de schémas $S' \longrightarrow S$ induit, par changement de base, une application croissante $\mathscr{D}_S(T) \longrightarrow \mathscr{D}_{S'}(T \times_S S')$. □

On regroupe quelques propriétés des ensembles ordonnés $\mathscr{D}_S(T)$ dans l'énoncé suivant.

Lemme 3.6.4. — *Soit S un schéma.*

(i) Soit $f : T' \longrightarrow T$ un S-morphisme quasi-compact et génériquement ouvert fibre par fibre (i.e., pour tout $s \in S$, le morphisme $f_s : T'_s \longrightarrow T_s$ est génériquement ouvert au sens de la remarque 2.5.13). Alors, l'image inverse par f induit une application croissante $\mathscr{D}_S(T) \longrightarrow \mathscr{D}_S(T')$.

(ii) Supposons que S est quasi-compact. Soit T un S-schéma donné comme limite projective d'un pro-S-schéma $(T_\alpha)_\alpha$ ayant ses morphismes de transition affines, génériquement ouverts fibre par fibre et dominants fibre par fibre. Alors, on a une bijection croissante

$$\operatorname*{colim}_{\alpha} \mathscr{D}_S(T_\alpha) \simeq \mathscr{D}_S(T).$$

(iii) Soit S' un S-schéma donné comme limite projective d'un pro-S-schéma $(S'_\beta)_\beta$ ayant ses morphismes de transition affines et tel que l'un des S'_β est quasi-compact en tant que $\mathbb{Z}$-schéma. Soit T un S-schéma de présentation finie. Alors, on a une bijection croissante

$$\operatorname*{colim}_{\beta} \mathscr{D}_{S'_\beta}(T \times_S S'_\beta) \simeq \mathscr{D}_{S'}(T \times_S S').$$

Démonstration. — L'assertion (i) est évidente. Sous les hypothèses de (ii), un ouvert quasi-compact $V \subset T$ est l'image inverse d'un ouvert quasi-compact $V_\alpha \subset T_\alpha$, pour un certain indice α. Si V est relativement dense il en est de même de V_α car $T_s \longrightarrow (T_\alpha)_s$ est génériquement ouvert et dominant pour tout $s \in S$. Ceci démontre (ii). Sous les hypothèses de (iii), un ouvert quasi-compact $V' \subset T \times_S S'$ est l'image inverse d'un ouvert quasi-compact $V'_\beta \subset T \times_S S'_\beta$, pour un certain indice β. De plus, d'après [**39**, Chapitre IV, Proposition 9.6.1], l'ensemble des points $s \in S'_\beta$ tel que l'ouvert $(V'_\beta)_s \subset (T \times_S S'_\beta)_s$ n'est pas dense est une partie constructible $P_\beta \subset T \times_S S'_\beta$. Si $V' \subset T \times_S S'$ est dense relativement à S', l'image inverse de P_β dans $T \times_S S'$ est vide. D'après [**39**, Chapitre IV, Corollaire 8.3.3], il existe un indice γ plus fin que β

tel que l'image inverse de P_β dans $T\times_S S'_\gamma$ soit vide. Autrement dit, $V'_\gamma = V'_\beta \times_{S'_\beta} S'_\gamma \subset T\times_S S'_\gamma$ est dense relativement à S'_γ. Ceci permet de conclure. ∎

Construction 3.6.5. — Soit $f : T \longrightarrow S$ un morphisme de $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas. Étant donné un préfaisceau G sur Fttf^Δ/T, on pose

$$f'_\flat(G)(X) = \operatorname*{colim}_{V\in\mathscr{D}_X(T\times_S X)} G(V)$$

pour tout $X\in\mathrm{Fttf}^\Delta/S$. Ceci définit un préfaisceau $f'_\flat(G)$ sur Fttf^Δ/S et on note $f_\flat(G) = \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(f'_\flat(G))$. Clairement, on dispose de transformations naturelles évidentes $f_* \longrightarrow f'_\flat \longrightarrow f_\flat$.

Soient T' un autre (S,Δ)-schéma et soit $g : T' \longrightarrow T$ un S-morphisme génériquement ouvert fibre par fibre. Pour $X\in\mathrm{Fttf}^\Delta/S$, on dispose alors d'une application croissante évidente

$$\operatorname*{colim}_{V\in\mathscr{D}_X(T\times_S X)} \mathscr{D}_V(T'\times_T V) \longrightarrow \mathscr{D}_X(T'\times_S X).$$

En effet, puisque le X-morphisme $T'\times_S X\longrightarrow T\times_S X$ est génériquement ouvert fibre par fibre, pour tout $V\in\mathscr{D}_X(T\times_S X)$ l'immersion ouverte $T'\times_T V\hookrightarrow T'\times_S X$, obtenue par changement de base de $V\hookrightarrow T\times_S X$, est dense relativement à X. Par ailleurs, pour tout $W\in\mathscr{D}_V(T'\times_T V)$, l'immersion ouverte $W\hookrightarrow T'\times_T V$ est dense relativement à X. (En effet, la densité relativement à V entraîne la densité relativement à X.) Il s'ensuit que l'immersion ouverte composée $W\hookrightarrow T'\times_S X$ est elle-aussi dense relativement à X ; elle définit donc un élément de $\mathscr{D}_X(T'\times_S X)$. Ceci dit, l'application ci-dessus induit une transformation naturelle évidente $f'_\flat\circ g'_\flat \longrightarrow (f\circ g)'_\flat$. □

Ci-dessous, on sera surtout intéressé par le cas où f est un morphisme $(L/K) : \mathrm{Spec}(L)\longrightarrow\mathrm{Spec}(K)$ associé à une Δ-extension L/K entre $(\mathbb{Q},\Delta)$-corps.

Proposition 3.6.6. — *Soit M/K une Δ-extension entre $(\mathbb{Q},\Delta)$-corps et notons $N\subset M$ son noyau totalement décomposable (voir la définition 2.2.5). Soit F un faisceau discret sur* $(\mathrm{Fttf}^\Delta/N,\mathrm{fttf})$. *Alors, le morphisme canonique*

$$(N/K)_\flat F \longrightarrow (M/K)_\flat(M/N)^*F$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Le morphisme de l'énoncé est obtenu en appliquant $\mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}$ à la composition de

$$\begin{array}{c} (N/K)'_\flat F \longrightarrow (N/K)'_\flat(M/N)_*(M/N)^*F \\ \big\downarrow \\ (N/K)'_\flat(M/N)'_\flat(M/N)^*F \longrightarrow (M/K)'_\flat(M/N)^*F. \end{array} \tag{3.12}$$

Pour démontrer que (3.12) induit un isomorphisme sur les faisceaux $\mathfrak{f}$-fttf associés, on utilise le lemme 3.4.15. Ceci nous ramène à vérifier que l'application

$$F(\mathrm{Frac}(N\otimes_K K')) \longrightarrow ((M/N)^*F)(\mathrm{Frac}(M\otimes_K K')) \tag{3.13}$$

est bijective pour toute Δ-extension de type fini K'/K.

Puisque le faisceau fttf F est discret, on peut supposer que $F = \delta_N^*(F_0)$ avec F_0 un faisceau sur $(\mathrm{Ct}/N^{\Delta=0},\mathrm{ct})$. Puisque $N^{\Delta=0} = M^{\Delta=0}$, on a aussi $(M/N)^*F\simeq\delta_M^*(F_0)$. Étant donné que $\mathrm{Frac}(N\otimes_K K')$ et $\mathrm{Frac}(M\otimes_K K')$ sont des produits finis de Δ-corps, l'application (3.13) s'identifie à

$$F_0(\mathrm{Frac}(N\otimes_K K')^{\Delta=0}) \longrightarrow F_0(\mathrm{Frac}(M\otimes_K K')^{\Delta=0}) \tag{3.14}$$

grâce au corollaire 3.5.12. Or, $\mathrm{Frac}(N\otimes_K K')^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(M\otimes_K K')^{\Delta=0}$ car N/K est le noyau totalement décomposable de M/K. ∎

Proposition 3.6.7. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, L/K une Δ-extension et M/K une Δ-extension maximalement décomposée par L/K. Soit G un faisceau discret sur* $(\mathrm{Fttf}^\Delta/M,\mathrm{fttf})$. *Alors, $(M/K)_\flat G$ est un faisceau localement discret sur* $(\mathrm{Fttf}^\Delta/K,\mathrm{fttf})$ *et il est trivialisé par la Δ-extension L/K.*

Démonstration. — Soit $N\subset M$ le noyau totalement décomposable de M/K. Il existe alors un unique faisceau discret F sur $(\mathrm{Fttf}^\Delta/N,\mathrm{fttf})$ tel que $G=(M/N)^*F$. (En effet, étant donné que $N^{\Delta=0} = M^{\Delta=0}$, on a $\delta_M^* = (M/N)^* \circ \delta_N^*$.) Grâce à la proposition 3.6.6, on peut donc remplacer M/K par N/K et G par F. Autrement dit, on peut supposer que la Δ-extension M/K est totalement décomposée par L/K.

Nous devons montrer que $(L/K)^*(M/K)_\flat G$ est un faisceau discret sur $(\mathrm{Fttf}^\Delta/L, \mathrm{fttf})$. Puisque $(M/K)_\flat G$ est un faisceau $\mathfrak{f}$-fttf par construction, il en est de même de $(L/K)^*(M/K)_\flat G$ par le corollaire 3.4.20. Il s'ensuit que $(L/K)^*(M/K)_\flat G \simeq \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(E)$ avec $E \in \mathbf{PSh}(\mathrm{Fttf}^\Delta/L)$ le préfaisceau image inverse de $(M/K)'_\flat G \in \mathbf{PSh}(\mathrm{Fttf}^\Delta/K)$ suivant le Δ-morphisme (L/K). Si Y est un (L,Δ)-schéma affine de type fini, on a grâce au lemme 3.6.4(iii) :

$$E(Y) = ((M/K)'_\flat G)(Y) = \operatorname*{colim}_{V \in \mathscr{D}_Y(M \otimes_K Y)} G(V).$$

On pose $H = \mathrm{Frac}(M \otimes_K L)$. Étant donné que l'inclusion $H \otimes_L Y \hookrightarrow M \otimes_K Y$ est dense relativement à Y, on peut réécrire la colimite ci-dessus pour obtenir une bijection naturelle

$$E(Y) \simeq \operatorname*{colim}_{W \in \mathscr{D}_Y(H \otimes_L Y)} G(W). \tag{3.15}$$

Appelons G_0 le faisceau sur $(\mathrm{Ct}/M^{\Delta=0}, \mathrm{ct})$ tel que $G = \delta_M^*(G_0)$. Considérons le préfaisceau E_0 sur $\mathrm{Ct}/L^{\Delta=0}$ défini par

$$E_0(T) = \operatorname*{colim}_{Q \in \mathscr{D}_T(H^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} T)} G_0(Q) \tag{3.16}$$

pour tout $L^{\Delta=0}$-schéma localement de type fini T. Nous allons construire un morphisme de préfaisceaux $E_0 \longrightarrow (\delta_L)_*(E)$ sur $(\mathrm{Ct}/L^{\Delta=0})^{\mathrm{af}}$. Pour T un $L^{\Delta=0}$-schéma affine de type fini, on dispose d'une application croissante

$$\mathscr{D}_T(H^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} T) \longrightarrow \mathscr{D}_{L \otimes_{L^{\Delta=0}} T}(H \otimes_L (L \otimes_{L^{\Delta=0}} T)) \simeq \mathscr{D}_{L \otimes_{L^{\Delta=0}} T}(H \otimes_{L^{\Delta=0}} T)$$

qui à $Q \in \mathscr{D}_T(H^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} T)$ associe l'ouvert $H \otimes_{H^{\Delta=0}} Q$. (Pour voir que ceci est bien défini, remarquons que l'ouvert

$$L \otimes_{L^{\Delta=0}} Q \subset L \otimes_{L^{\Delta=0}} (H^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} T) \simeq (L \otimes_{L^{\Delta=0}} H^{\Delta=0}) \otimes_L (L \otimes_{L^{\Delta=0}} T)$$

est dense relativement à $L \otimes_{L^{\Delta=0}} T$. Puisque la Δ-extension M/K est totalement décomposée par L/K, on a $H \simeq \mathrm{Frac}(L \otimes_{L^{\Delta=0}} H^{\Delta=0})$ et le morphisme $H \otimes_L Y \longrightarrow (L \otimes_{L^{\Delta=0}} H^{\Delta=0}) \otimes_L Y$ est une inclusion dense relativement à Y, pour tout (L,Δ)-schéma Y. En prenant $Y = L \otimes_{L^{\Delta=0}} T$, ceci montre que l'ouvert

$$H \otimes_{H^{\Delta=0}} Q \simeq H \otimes_{L \otimes_{L^{\Delta=0}} H^{\Delta=0}} (L \otimes_{L^{\Delta=0}} Q) \subset H \otimes_L (L \otimes_{L^{\Delta=0}} T)$$

est dense relativement à $L \otimes_{L^{\Delta=0}} T$ comme désiré.) On peut donc prendre la colimite des applications composées $G_0(Q) \longrightarrow G(M \otimes_{M^{\Delta=0}} Q) \longrightarrow G(H \otimes_{H^{\Delta=0}} Q)$ pour obtenir une application $E_0(T) \longrightarrow E(L \otimes_{L^{\Delta=0}} T)$ (utiliser les formules (3.15) et (3.16)). Ces applications définissent le morphisme $E_0 \longrightarrow (\delta_L)_*(E)$ recherché.

Considérons le morphisme de préfaisceaux $E_0^{\delta_L} \longrightarrow E$, déduit par adjonction du morphisme que l'on vient de construire. Nous allons maintenant montrer que le morphisme $E_0^{\delta_L} \longrightarrow E$ induit des bijections après évaluation sur les Δ-extensions de type fini de L. (D'après le lemme 3.4.15, ceci entraîne que $\mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(E_0^{\delta_L}) \simeq \mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(E)$, ce qui montre en particulier que le faisceau $\mathrm{a}_{\mathfrak{f}\text{-fttf}}(E)$, que l'on sait isomorphe à $(L/K)^*(M/K)_\flat G$, est discret comme souhaité.) Si L'/L est une Δ-extension de type fini, on a

$$E_0^{\delta_L}(L') \simeq E_0(L'^{\Delta=0}) \simeq G_0(\mathrm{Frac}(H^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} L'^{\Delta=0})).$$

Par ailleurs, en utilisant la formule (3.15) et le corollaire 3.5.12, on a

$$E(L') \simeq G(\mathrm{Frac}(H \otimes_L L')) \simeq G_0(\mathrm{Frac}(H \otimes_L L')^{\Delta=0}).$$

Puisque L/K décompose totalement M/K, on a $\mathrm{Frac}(H \otimes_L L')^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(H^{\Delta=0} \otimes_{L^{\Delta=0}} L'^{\Delta=0})$ ce qui permet de conclure. ■

On est maintenant en mesure de montrer le résultat essentiel suivant.

Théorème 3.6.8. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et soit F un faisceau localement discret sur* $(\mathrm{Fttf}^\Delta/K, \mathrm{fttf})$. *Alors F est trivialisé par une clôture normale de K (voir la définition 2.9.10).*

Démonstration. — Soit L/K une Δ-extension qui trivialise F et posons $G = (L/K)^*F$. Puisque F est un faisceau fttf, il découle de la construction 3.6.5 que le morphisme évident $F \longrightarrow (L/K)'_\flat G$ est injectif. Puisque F est un faisceau $\mathfrak{f}$-fttf (voir le lemme 3.6.2), le morphisme $F \longrightarrow (L/K)_\flat G$ est également injectif. Ceci permet d'identifier F à un sous-faisceau de $(L/K)_\flat G$.

D'après la proposition 3.6.7, $(L/K)_\flat G$ est un faisceau fttf localement constant qui est trivialisé par toute Δ-extension L'/K qui décompose maximalement la Δ-extension L/K. Puisque toute Δ-extension est maximalement décomposée par une clôture normale $\widehat{K}/K$ de K, il s'ensuit que $(\widehat{K}/K)^*(L/K)_\flat G$ est discret. Ainsi, $(\widehat{K}/K)^*F$ est un sous-faisceau fttf d'un faisceau fttf discret. Il est également $\mathfrak{f}$-invariant d'après le corollaire 3.4.20. On utilise maintenant le corollaire 3.5.15(i) pour conclure. ■

Corollaire 3.6.9. — *Soit K un corps de caractéristique nulle et soit F un faisceau localement discret sur* $(\mathrm{Fttf}^\Delta/K, \mathrm{fttf})$. *Si N/K est une Δ-extension normale, il existe un plus grand sous-faisceau localement discret $F_N \subset F$ qui est trivialisé par N/K. Il est donné par le produit fibré suivant :*

$$F_N = F \times_{(N/K)_*(N/K)^*F} (N/K)_*\delta_N^*(\delta_N)_*(N/K)^*F. \tag{3.17}$$

De plus, F est l'union filtrante des F_N lorsque N/K parcourt l'ensemble des sous-Δ-extensions normales de type fini d'une clôture normale $\widehat{K}/K$.

Démonstration. — Montrons d'abord que la formule (3.17) définit bien un sous-faisceau de F. Puisque F est un faisceau fttf, le morphisme $F \longrightarrow (N/K)_*(N/K)^*F$ est injectif. Par ailleurs, si G est un faisceau sur $(\mathrm{Fttf}^\Delta/N, \mathfrak{f}\text{-fttf})$, le morphisme de préfaisceaux $((\delta_N)_*G)^{\delta_N} \longrightarrow G$ est injectif sur les (N,Δ)-schémas localement de type fini X possédant un quotient pseudo-effectif $X_{\Delta=0}$ qui est un $N^{\Delta=0}$-schéma de type fini. (Utiliser le lemme 3.5.7 et le fait que le morphisme $X \longrightarrow N \otimes_{N^{\Delta=0}} X_{\Delta=0}$ est couvrant pour la topologie $\mathfrak{f}$-fttf puisqu'il est surjectif sur les Δ-points.) Grâce à la proposition 3.5.1, il s'ensuit que le morphisme $\delta_N^*(\delta_N)_*G \longrightarrow G$ est injectif. Appliquant ceci à $G = (N/K)^*F$ (ce qui est loisible d'après le lemme 3.6.2), on déduit que le morphisme $\delta_N^*(\delta_N)_*(N/K)^*F \longrightarrow (N/K)^*F$ est injectif, et il reste ainsi après application de $(N/K)_*$. Ceci montre bien que F_N est un sous-faisceau de F.

Clairement, F_N est un faisceau pour la topologie $\mathfrak{f}$-fttf. Étant donné qu'il est isomorphe à un sous-faisceau d'un faisceau de la forme $(N/K)_*\delta_N^*(\dagger)$, avec $\dagger \in \mathbf{Shv}_{\mathrm{ct}}(\mathrm{Ct}/N^{\Delta=0})$, il est localement discret et trivialisé par N/K. (Utiliser la proposition 3.6.7 et puis le corollaire 3.5.15(i).) Réciproquement, soit $E \subset F$ un sous-faisceau localement discret trivialisé par N/K. On a clairement $E_N \subset F_N$. Or, puisque $(N/K)^*E$ est discret, il est isomorphe à $\delta_N^*(\delta_N)_*(N/K)^*E$. Il s'ensuit que $E_N = E$, ce qui donne l'inclusion $E \subset F_N$. Ceci montre que F_N est le plus grand sous-faisceau localement discret de F trivialisé par N/K.

Il reste à montrer la dernière assertion. Étant donnée une sous-Δ-extension normale $N/K \subset \widehat{K}/K$, on pose $\overline{N} = N \otimes_{N^{\Delta=0}} \widehat{K}^{\Delta=0}$. Un faisceau localement discret est trivialisé par N si et seulement si il est trivialisé par $\overline{N}$, ce qui entraîne que $F_N = F_{\overline{N}}$. On a un isomorphisme canonique de faisceaux sur $(\mathrm{Ct}/\widehat{K}^{\Delta=0}, \mathrm{ct})$:

$$\operatorname*{colim}_{N/K \subset \widehat{K}/K \text{ normale de type fini}} (\delta_{\overline{N}})_*(\overline{N}/K)^*F \simeq (\delta_{\widehat{K}})_*(\widehat{K}/K)^*F.$$

Il s'ensuit aussitôt que $F_{\widehat{K}}$ est l'union filtrante des $F_{\overline{N}} = F_N$ lorsque N/K parcourt l'ensemble des sous-Δ-extensions normales de type fini de $\widehat{K}/K$. Or, grâce au théorème 3.6.8, on a $F_{\widehat{K}} = F$. ■

Le théorème 3.6.8 et son corollaire 3.6.9 suggèrent la construction suivante. (Voir aussi la construction 2.9.17.)

Construction 3.6.10. — Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale de type fini telle que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0} = C$. Soit F un faisceau localement discret sur $(\mathrm{Fttf}^\Delta/K, \mathrm{fttf})$ trivialisé par N/K. Nous allons construire une action du groupe de Galois différentiel $\mathrm{Gal}^\Delta(N/K)$ (voir la définition 2.6.12) sur $E = (\delta_N)_*(N/K)^*F$, un faisceau sur $(\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct})$. Autrement dit, nous allons construire des applications

$$E(T) \longrightarrow E(\mathrm{Gal}^\Delta(N/K) \times_C T) \tag{3.18}$$

naturelles en $T \in \mathrm{Ct}/C$ et vérifiant les conditions usuelles d'unitarité et d'associativité. En tant que C-schéma, $\mathrm{Gal}^\Delta(N/K)$ est donné par $\mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0}$. D'après le théorème 2.6.7(b, d, e), le morphisme évident

$$\mathrm{Spec}(N \otimes_K N) \longrightarrow N \otimes_C \mathrm{Spec}(N \otimes_K N)_{\Delta=0} = N \otimes_C \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$$

est une limite projective d'immersions ouvertes $\mathfrak{f}$-denses. Puisque F est $\mathfrak{f}$-invariant, on a donc une bijection évidente

$$F(N \otimes_C \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) \times_C T) \xrightarrow{\sim} F(N \otimes_K N \otimes_C T)$$

naturelle en T. On prendra pour (3.18) la composition de

$$E(T) \simeq F(N \otimes_C T) \xrightarrow{d^0} F(N \otimes_K N \otimes_C T) \simeq F(N \otimes_C \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) \times_C T) \simeq E(\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) \times_C T),$$

où d_0 désigne le morphisme induit par $N \simeq K \otimes_K N \hookrightarrow N \otimes_K N$. (Pour la première et la dernière bijection, on utilise le théorème 3.5.5.) La vérification que ceci définit une action est laissée au lecteur. □

Théorème 3.6.11. — *La construction 3.6.10 fournit une équivalence de catégories entre, d'une part, la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Shv}_{\mathrm{fttf}}(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K)$ *formée des faisceaux localement discrets trivialisés par N/K et, d'autre part, la catégorie des faisceaux sur* $(\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct})$ *munis d'une action de* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$.

Démonstration. — On divise la preuve en plusieurs étapes.

Étape A. — Soit F un faisceau localement discret sur $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf})$ trivialisé par N/K auquel on associe le faisceau E sur $(\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct})$ muni d'une action de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$ comme dans la construction 3.6.10. Par ailleurs, soit E' un faisceau sur $(\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct})$ et notons $G' = \delta_N^*(E')$. D'après le lemme 3.6.13 ci-dessous, la construction 3.6.10 fait correspondre au faisceau localement discret $(N/K)_*G'$ le faisceau

$$\widetilde{E}' = E'(\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) \times_C -)$$

muni de l'action naturelle de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$ induite par la composition du groupe. Clairement, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)}(E, \widetilde{E}')$, des morphismes équivariants de faisceaux de E dans $\widetilde{E}'$, s'identifie à l'ensemble $\mathrm{Hom}(E, E')$, des morphismes de faisceaux de E dans E'. Similairement, on a

$$\mathrm{Hom}(F, (N/K)_*G') \simeq \mathrm{Hom}((N/K)^*F, G') \simeq \mathrm{Hom}(E, E').$$

(Utiliser le théorème 3.5.5 pour la deuxième bijection.) Il s'ensuit aussitôt que la construction 3.6.10 induit une bijection

$$\mathrm{Hom}(F, (N/K)_*G') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)}(E, \widetilde{E}').$$

En particulier, cette construction est pleinement fidèle sur les objets de la forme $(N/K)_*G$ avec G un faisceau discret sur $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/N, \mathrm{fttf})$.

Étape B. — Soit F' un faisceau localement discret sur $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf})$ trivialisé par N/K. On a alors

$$F' = \mathrm{eq}\{(N/K)_*(N/K)^*F' \rightrightarrows (N/K)_*(N/K)^*(N/K)_*(N/K)^*F'\}. \tag{3.19}$$

(Pour vérifier cela, on peut appliquer le foncteur exact et conservatif $(N/K)^*$ et utiliser la rétraction

$$(N/K)^*(N/K)_*(N/K)^*F' \longrightarrow (N/K)^*F'$$

induite par la counité de l'adjonction.)

Similairement, si E' est le faisceau sur $(\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct})$ associé à F' par la construction 3.6.10, on a une identification $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$-équivariante

$$E' = \mathrm{eq}\left\{E'(\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) \times_C -) \rightrightarrows E'(\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) \times_C \mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K) \times_C -)\right\}. \tag{3.20}$$

L'une des flèches ci-dessus est induite par l'action de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$ sur E' et l'autre par la composition de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$. En utilisant l'étape A, les lemmes 3.6.12 et 3.6.13, et les isomorphismes (3.19) et (3.20), on voit aussitôt que la construction 3.6.10 induit une bijection $\mathrm{Hom}(F, F') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)}(E, E')$. Autrement dit, cette construction est un foncteur pleinement fidèle.

Étape C. — Pour terminer la preuve, il reste à montrer que la construction 3.6.10 est essentiellement surjective, i.e., qu'elle permet d'obtenir, à isomorphisme près, toutes les actions de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$ sur des faisceaux E' sur $(\mathrm{Ct}/C,\mathrm{ct})$.

Ceci découle de l'étape précédente et plus précisément de l'isomorphisme (3.20). En effet, puisque la construction 3.6.10 est un foncteur exact, il est facile de voir qu'en l'appliquant au faisceau localement discret

$$F' = \mathrm{eq}\{(N/K)_*\delta_N^*(E') \rightrightarrows (N/K)_*(N/K)^*(N/K)_*\delta_N^*(E')\} \tag{3.21}$$

on retrouve le faisceau E' et son action de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$. Dans (3.21), une des flèches est donnée par l'unité de l'adjonction $((N/K)^*,(N/K)_*)$ et l'autre flèche est induite par la flèche

$$\delta_N^*(E') \longrightarrow (N/K)^*(N/K)_*\delta_N^*(E')$$

qui correspond (modulo le lemme 3.6.12 ci-dessous et le théorème 3.5.5) à l'action de $\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)$ sur E' :

$$E'(-) \longrightarrow E'(\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)\times_C -).$$

Ceci termine la preuve du théorème. ■

Les deux lemmes suivants ont servi dans la preuve du théorème 3.6.11.

Lemme 3.6.12. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle, N/K une Δ-extension normale de type fini et G un faisceau discret sur* $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/N,\mathrm{fttf})$. *Alors, $(N/K)_*G$ est localement discret et il est trivialisé par N/K. Supposons de plus que $K^{\Delta=0}=L^{\Delta=0}=C$ et soit E un faisceau sur* $(\mathrm{Ct}/C,\mathrm{ct})$ *tel que $G=\delta_N^*(E)$. Alors, on dispose d'un isomorphisme canonique*

$$(N/K)^*(N/K)_*G \simeq \delta_N^*\left(E(\mathrm{Gal}^{\Delta}(N/K)\times_C -)\right). \tag{3.22}$$

Démonstration. — Pour simplifier, nous supposerons que $K^{\Delta=0}=N^{\Delta=0}=C$ depuis le départ. (Ceci est suffisant pour les besoins de la preuve du théorème 3.6.11.) Dans ce cas, il existe un faisceau discret F sur $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K,\mathrm{fttf})$ tel que $G=(N/K)^*F$; il est simplement donné par $F=\delta_K^*(E)$.

Montrons d'abord que le faisceau $(N/K)^*(N/K)_*G$ est discret. Puisque G est un faisceau $\mathfrak{f}$-fttf, il en est de même de $(N/K)^*(N/K)_*G$. (Utiliser le corollaire 3.4.20.) Soit L/N une Δ-extension de type fini, et posons $D=L^{\Delta=0}$ et $H=\delta_L^*((D/C)^*E)$. Grâce à la proposition 3.4.18, on a les bijections

$$(N/K)^*(N/K)_*G(L)\simeq G(N\otimes_K L)\simeq F(N\otimes_K L)\simeq H(N\otimes_K L).$$

Puisque N/K est normale, le théorème 2.6.7(b, d, e) entraîne que le morphisme évident

$$\mathrm{Spec}(N\otimes_K L)\longrightarrow \mathrm{Spec}(N\otimes_K N)_{\Delta=0}\otimes_C L$$

est une limite projective d'immersions ouvertes $\mathfrak{f}$-denses. Puisque H est $\mathfrak{f}$-invariant, ce morphisme induit une bijection

$$H(N\otimes_K L)\simeq H(\mathrm{Spec}(N\otimes_K N)_{\Delta=0}\otimes_C L).$$

En appliquant le théorème 3.5.5, on trouve en fin de compte une bijection naturelle

$$(N/K)^*(N/K)_*G(L)\simeq E(\mathrm{Spec}(N\otimes_K N)_{\Delta=0}\otimes_C D).$$

Il s'ensuit aussitôt que la condition (c) de la proposition 3.5.14 est satisfaite pour le faisceau $(N/K)^*(N/K)_*G$, ce qui entraîne qu'il est discret comme souhaité.

Sachant que $(N/K)^*(N/K)_*G$ est discret, pour construire l'isomorphisme (3.22), il revient au même de construire un isomorphisme

$$(\delta_N)_*(N/K)^*(N/K)_*G\simeq E(\mathrm{Spec}(N\otimes_K N)_{\Delta=0}\times_C -).$$

Si T est un C-schéma affine de type fini, on prendra la composition des bijections

$$\begin{aligned}(N/K)^*(N/K)_*G(N\otimes_C T) &\simeq G(N\otimes_K N\otimes_C T)\\ &\simeq F(N\otimes_K N\otimes_C T)\\ &\simeq F(N\otimes_C \mathrm{Spec}(N\otimes_K N)_{\Delta=0}\times_C T)\\ &\simeq E(\mathrm{Spec}(N\otimes_K N)_{\Delta=0}\times_C T),\end{aligned}$$

que l'on obtient en raisonnant comme ci-dessus. ■

Lemme 3.6.13. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et N/K une Δ-extension normale de type fini telle que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0} = C$.*

(i) Soient E un faisceau sur $(\mathrm{Ct}/C, \mathrm{ct})$ et $G = \delta_N^*(E)$ le faisceau discret sur $(\mathrm{Fttf}^\Delta/N, \mathrm{fttf})$ associé à E. Alors, le faisceau $(N/K)_*G$ est localement discret et il est trivialisé par N/K. De plus, la construction 3.6.10 appliquée à $(N/K)_*G$ donne le faisceau $E(\mathrm{Gal}^\Delta(N/K) \times_C -)$ muni de l'action évidente, à savoir celle induite par la composition de $\mathrm{Gal}^\Delta(N/K)$.

(ii) Soient F un faisceau localement discret sur $(\mathrm{Fttf}^\Delta/K, \mathrm{fttf})$ trivialisé par N/K et $G = (N/K)^*F$. Notons $E = (\delta_N)_*(N/K)^*F$ de sorte que $G = \delta_N^*(E)$. Alors, la construction 3.6.10 appliquée au morphisme naturel $F \longrightarrow (N/K)_*G$ fournit un morphisme de faisceaux $E(-) \longrightarrow E(\mathrm{Gal}^\Delta(N/K) \times_C -)$ qui n'est autre que celui définissant l'action de $\mathrm{Gal}^\Delta(N/K)$ sur E.

Démonstration. — Mis à part la première assertion de (i), qui a été établie dans le lemme 3.6.12, la vérification est facile mais fastidieuse. ■

On termine la sous-section avec un exemple important de faisceaux localement discrets.

Proposition 3.6.14. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et M un (K, Δ)-module de rang fini.*

(a) On note M^δ le préfaisceau sur Fttf^Δ/K donné par

$$X \in \mathrm{Fttf}^\Delta/K \rightsquigarrow M^\delta(X) = \Gamma(X, M \otimes_K \mathcal{O}_X)^{\Delta=0}.$$

Alors, le faisceau $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(M^\delta)$ est localement discret.

(b) Supposons que M est trivialisé par une Δ-extension normale N/K telle que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0} = C$ et notons $V = (M \otimes_K N)^{\Delta=0}$ la représentation algébrique de $\mathrm{Gal}^\Delta(N/K)$ associée à M par le théorème 2.9.18. On note $\widetilde{V}$ le préfaisceau sur Ct/C donné par

$$T \in \mathrm{Ct}/C \rightsquigarrow \widetilde{V}(T) = \Gamma(T, V \otimes_C \mathcal{O}_T).$$

Alors, le faisceau $\mathrm{a}_{\mathrm{ct}}(\widetilde{V})$, muni de l'action de $\mathrm{Gal}^\Delta(N/K)$ déduite de son action sur V, correspond au faisceau localement discret $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(M^\delta)$ par le théorème 3.6.11.

Démonstration. — Soit N/K une Δ-extension normale qui trivialise M et notons $\alpha_{N/K}^*$ le foncteur « image inverse » sur les préfaisceaux. Si Y est un (N, Δ)-schéma affine de type fini, on a

$$(\alpha_{N/K}^* M^\delta)(Y) \simeq M^\delta(Y) \simeq \Gamma(Y, M \otimes_K \mathcal{O}_Y)^{\Delta=0} \simeq (M \otimes_K N)^{\Delta=0} \otimes_{N^{\Delta=0}} \mathcal{O}(Y)^{\Delta=0}.$$

Ainsi, en posant $V = (M \otimes_K N)^{\Delta=0}$, on obtient un isomorphisme de préfaisceaux $\alpha_{N/K}^* M^\delta \simeq (V \otimes_{N^{\Delta=0}} \mathcal{O})^{\delta_N}$. Il s'ensuit un isomorphisme de faisceaux fttf

$$(N/K)^* \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(M^\delta) \simeq \delta_N^*(\mathrm{a}_{\mathrm{ct}}(V \otimes_{N^{\Delta=0}} \mathcal{O})), \tag{3.23}$$

ce qui montre que $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(M^\delta)$ est localement discret et trivialisé par N/K. L'assertion (a) est démontrée.

Supposons maintenant que $K^{\Delta=0} = N^{\Delta=0} = C$. D'après (3.23), la construction 3.6.10, appliquée au faisceau localement discret $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(M^\delta)$, fournit le faisceau $\mathrm{a}_{\mathrm{ct}}(\widetilde{V}) = \mathrm{a}_{\mathrm{ct}}(V \otimes_C \mathcal{O})$. Pour établir l'assertion (b), il reste à vérifier que les actions du groupe $\mathrm{Gal}^\Delta(N/K)$ sur V et $\mathrm{a}_{\mathrm{ct}}(\widetilde{V})$ sont compatibles. Ceci se démontre facilement en comparant les constructions 2.9.17 et 3.6.10. ■

4. Théorie de Galois différentielle supérieure

Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle qu'on supposera, pour simplifier, algébriquement clos. Dans la section 2, nous avons développé la théorie de Galois différentielle classique qui permet d'associer à K son pro-groupe de Galois différentiel absolu $\widehat{\mathrm{Gal}}_K^\Delta = (\mathrm{Gal}^\Delta(N/K))_{N/K}$, où le système projectif est indexé par les sous-Δ-extensions normales de type fini N/K d'une clôture normale $\widehat{K}/K$ fixée à l'avance. Dans cette section, on verra que $\widehat{\mathrm{Gal}}_K^{\Delta}$ est le pro-groupe fondamental (i.e., le premier groupe d'homotopie) d'un pro-schéma semi-simplicial naturellement attaché à K et que nous appellerons son *type d'homotopie feuilletée*. Le type d'homotopie feuilletée de K possède également des groupes d'homotopie supérieurs (les groupes de Galois différentiels supérieurs de K) et on montrera que ces derniers admettent des structures naturelles de pro-groupe algébrique sur $K^{\Delta=0}$.

Les sous-sections 4.1 et 4.2 sont consacrées au « lemme magique » (i.e., le théorème 4.1.3) qui joue un rôle fondamental dans la construction du type d'homotopie feuilletée et qui est, plus généralement, d'un grand secours dans l'étude de la topologie feuilletée. La sous-section 4.3 regroupe quelques rappels sur les foncteurs « cosquelette » qui seront d'un usage constant dans le reste de la section. Dans la sous-section 4.4, nous introduisons la notion d'« hyper-recouvrement générique ». Dans la sous-section 4.6, nous introduisons enfin le type d'homotopie feuilletée du Δ-corps K. (Un résultat géométrique important utilisé ici est le théorème 4.5.1 dont la preuve occupe la sous-section 4.5.) Enfin, les sous-sections 4.7, 4.8 et 4.10 contiennent une étude détaillée de la tour de Postnikov du type d'homotopie feuilletée. Cette étude sera complétée à la section 5.

4.1. Lemme magique, I. Démonstration. —

On fixe un site $(\mathcal{C},\tau)$ et on suppose que le topos $\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C})$ possède suffisamment de points. (Cette hypothèse est certainement superflue mais simplifiera grandement certaines démonstrations ; de plus elle est satisfaite dans les contextes qui nous intéressent.) Un morphisme de faisceaux simpliciaux $f_\bullet : F_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ (i.e., une flèche de $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C})$) est une équivalence τ-locale si la fibre $x^*(f_\bullet)$ est une équivalence d'homotopie pour tout point x du topos $\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C})$. (Cette notion n'est raisonnable qu'en présence de suffisamment de points ; voir [**45**] pour une définition qui marche en toute généralité.) De même, un morphisme de préfaisceaux simpliciaux est une équivalence τ-locale s'il en est ainsi du morphisme induit sur les faisceaux simpliciaux associés.

Rappelons que la catégorie $\mathbf{\Delta}_+$ est obtenue à partir de $\mathbf{\Delta}$ en rajoutant un objet initial $\underline{-\mathbf{1}} = \varnothing$ vérifiant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}_+}(\underline{\mathbf{m}}, \underline{-\mathbf{1}}) = \varnothing$ pour $m \geqslant 0$. Les foncteurs contravariants définis sur $\mathbf{\Delta}_+$ sont appelés les objets simpliciaux augmentés.

Notation 4.1.1. — Étant donné un morphisme $X \longrightarrow S$ dans une catégorie possédant les produits fibrés, on note $\check{C}_\bullet(X/S)$ l'objet simplicial de Čech associé (voir la construction 2.6.1 dans le cas où $\mathcal{M}$ est la catégorie des S-objets). Rappelons que

$$\check{C}_n(X/S) = \overbrace{X \times_S \cdots \times_S X}^{n+1 \text{ fois}},$$

et que les faces et les dégénérescences sont induites par les projections et les diagonales partielles. L'objet simplicial $\check{C}_\bullet(X/S)$ admet une augmentation évidente, i.e., une extension à $\mathbf{\Delta}_+$, donnée par $\check{C}_{-1}(X/S) = S$. On note encore $\check{C}_\bullet(X/S)$ l'objet simplicial augmenté obtenu de cette manière. Dans la suite, il sera toujours clair si $\check{C}_\bullet(X/S)$ désigne l'objet simplicial de Čech ou sa version augmentée. □

Le résultat suivant est bien connu (voir par exemple [**58**, §2.1, Lemma 1.15]).

Lemme 4.1.2. — *Soit $X \longrightarrow S$ un morphisme surjectif dans $\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C})$. Alors, le morphisme de faisceaux simpliciaux $\check{C}_\bullet(X/S) \longrightarrow S$ est une équivalence τ-locale.*

Le théorème ci-dessous est le « lemme magique » auquel nous faisions référence dans le titre de cette sous-section. On peut le considérer comme une généralisation du lemme 4.1.2.

Théorème 4.1.3. — *Soient $X \longrightarrow S$ un morphisme surjectif dans $\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C})$ et $U_\bullet \subset \check{C}_\bullet(X/S)$ un sous-faisceau simplicial augmenté. On suppose que les conditions $(\boldsymbol{C}_n)$ ci-dessous sont satisfaites pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

$(\boldsymbol{C}_n)$ Soit $(m_\alpha)_{\alpha\in I} \in (\mathbb{N} \sqcup \{-1\})^I$ une famille d'entiers et, pour chaque $\alpha \in I$, soit $r_\alpha : \underline{\mathbf{m}}_\alpha \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ une flèche strictement croissante dans $\mathbf{\Delta}_+$. On note $r'_\alpha : \underline{\mathbf{m}_\alpha + \mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}+\mathbf{1}}$ l'extension de r_α telle que $r'_\alpha(m_\alpha + 1) = n + 1$. Alors, le morphisme de faisceaux

$$d_{n+1} : \bigcap_{\alpha\in I} (r'^*_\alpha)^{-1}(U_{m_\alpha+1}) \longrightarrow \bigcap_{\alpha\in I} (r^*_\alpha)^{-1}(U_{m_\alpha}), \tag{4.1}$$

induit par $d_{n+1} : \check{C}_{n+1}(X/S) \longrightarrow \check{C}_n(X/S)$, est surjectif. (Ci-dessus, r_α^* et $r_\alpha'^*$ désignent les morphismes structuraux de l'objet simplicial augmenté $\check{C}_\bullet(X/S)$.)

Alors, le morphisme de faisceaux simpliciaux $U_\bullet \longrightarrow U_{-1}$ est une équivalence τ-locale.

Remarques 4.1.4. —

(a) Si dans la condition $(\boldsymbol{C}_n)$, il existe un indice $\alpha_0 \in I$ tel que $m_{\alpha_0} = n$, alors le morphisme (4.1) s'identifie à $d_{n+1} : U_{n+1} \longrightarrow U_n$ et il est automatiquement surjectif (car il possède une section). Ainsi, on peut se restreindre dans $(\boldsymbol{C}_n)$ aux familles $(m_\alpha)_{\alpha\in I}$ dans $\{-1, \cdots, n-1\}^I$.

(b) D'après (a), la condition $(\boldsymbol{C}_0)$ équivaut à dire que le morphisme $X \times_S U_0 \longrightarrow X \times_S U_{-1}$ est surjectif. Étant donné que $X \longrightarrow S$ est surjectif, ceci équivaut à la surjectivité du morphisme $U_0 \longrightarrow U_{-1}$.

(c) Un cas particulier de la condition $(\boldsymbol{C}_n)$ affirme que le morphisme

$$d_{n+1} : \bigcap_{i=0}^{n} d_i^{-1}(U_n) \longrightarrow \bigcap_{i=0}^{n} d_i^{-1}(U_{n-1}) \tag{4.2}$$

est surjectif. □

La preuve du théorème 4.1.3 comporte plusieurs étapes. On note d'abord la réduction suivante.

Lemme 4.1.5. — *Il suffit de montrer le théorème 4.1.3 dans le cas où $\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C})$ est le topos ponctuel.*

Démonstration. — Les conditions $(\boldsymbol{C}_n)$ sont préservées par les morphismes de topos et nous avons supposé que $\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C})$ possède suffisamment de points. ■

Ainsi, jusqu'à la fin de la preuve du théorème 4.1.3, X et S seront des ensembles, $f : X \longrightarrow S$ une application surjective et $U_\bullet \subset \check{C}_\bullet(X/S)$ sera un sous-ensemble simplicial augmenté vérifiant les conditions $(\boldsymbol{C}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 4.1.6. — *L'application évidente $\pi_0(U) \longrightarrow U_{-1}$ est bijective.*

Démonstration. — D'après la remarque 4.1.4(b), la condition $(\boldsymbol{C}_0)$ équivaut à la surjectivité de l'application $U_0 \longrightarrow U_{-1}$. Ceci entraîne la surjectivité de l'application $\pi_0(U) \longrightarrow U_{-1}$.

Pour établir l'injectivité, on rappelle que $\pi_0(U)$ est le quotient de U_0 par la relation d'équivalence engendrée par la relation suivante : $x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in U_1$. Étant donné que U_{-1} est un sous-ensemble de S, il est donc suffisant de montrer que si $f(x) = f(y)$, pour $x,\ y \in U_0$, il existe $z \in U_0$ tel que (x, z) et (y, z) sont dans U_1. Or, d'après la condition $(\boldsymbol{C}_1)$, l'application $d_2 : X \times_S X \times_S X \longrightarrow X \times_S X$ envoie $d_0^{-1}(U_1) \cap d_1^{-1}(U_1)$ surjectivement sur $d_0^{-1}(U_0) \cap d_1^{-1}(U_0) = U_0 \times_S U_0$. Puisque $(x, y) \in d_0^{-1}(U_0) \cap d_1^{-1}(U_0)$, il existe bien $z \in U_0$ tel que $(x, y, z) \in d_0^{-1}(U_1) \cap d_1^{-1}(U_1)$ comme désiré. ■

Proposition 4.1.7. — *Les composantes connexes de l'ensemble simplicial $U_\bullet$ sont simplement connexes. Autrement dit, le groupoïde fondamental de $U_\bullet$ est équivalent à un groupoïde discret.*

Démonstration. — On a les décompositions évidentes suivantes :

$$\check{C}_\bullet(X/S) = \coprod_{s\in S} \check{C}_\bullet(f^{-1}(s)/\{s\}) \qquad \text{et} \qquad U_\bullet = \coprod_{s\in S} U_\bullet \cap \check{C}_\bullet(f^{-1}(s)/\{s\}).$$

De plus, les conditions $(\boldsymbol{C}_n)$ sont encore satisfaites pour chaque $U_\bullet \cap \check{C}_\bullet(f^{-1}(s)/\{s\})$ considéré comme sous-ensemble simplicial augmenté de $\check{C}_\bullet(f^{-1}(s)/\{s\})$. Il est donc suffisant de considérer le cas où S est un singleton et $U_{-1} = S$ (car si $U_{-1} = \varnothing$, il n'y a rien à démontrer). D'après la proposition 4.1.6, l'ensemble simplicial $U_\bullet$ est alors connexe. Dans la suite, on note $\check{C}_\bullet(X)$ l'ensemble simplicial augmenté de Čech associé à l'application constante de X vers le singleton S.

Nous utiliserons la présentation suivante du groupoïde fondamental $\Pi(U)$ (voir [**32**, Chapter III, Theorem 1.1] ainsi que [**32**, Chapter I, page 42] pour la description du modèle de Gabriel–Zisman). Ses objets sont les éléments de U_0 et à chaque $(x, y) \in U_1$ correspond une flèche $(yx) : x \to y$. Les flèches de $\Pi(U)$ sont des compositions de telles flèches et de leurs inverses. Les relations entres les flèches de $\Pi(U)$ sont engendrées par les relations

$$(zy) \circ (yx) = (zx)$$

valables pour tous les triplets $(x, y, z) \in U_2$. Étant donné un $m+1$-uplet $(x_0, \cdots, x_m)$ tel que $(x_i, x_{i+1}) \in U_1$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant m-1$, nous poserons

$$(x_m \cdots x_0) = (x_m x_{m-1}) \circ \cdots \circ (x_1 x_0).$$

Le reste de la preuve est divisé en deux étapes.

Étape 1. — Soient x, y, $z \in U_0$, et supposons que (y, z), (x, z) et (x, y) sont dans U_1. Alors, on a la relation $(zx) = (zy) \circ (yx)$ dans $\Pi(U)$.

Lorsque $(x, y, z) \in U_2$, ceci est vrai par la description du groupoïde $\Pi(U)$ donnée ci-dessus. En général, on peut trouver $t \in U_0$ tel que (y, z, t), (x, z, t) et (x, y, t) sont dans U_2. En effet, d'après la condition $(\boldsymbol{C}_2)$, l'application $d_3 : X^4 \longrightarrow X^3$ induit une surjection

$$d_0^{-1}(U_2) \cap d_1^{-1}(U_2) \cap d_2^{-1}(U_2) \xrightarrow{d_3} d_0^{-1}(U_1) \cap d_1^{-1}(U_1) \cap d_2^{-1}(U_1),$$

et il suffit de prendre t tel que (x, y, z, t) est un antécédant de (x, y, z) par cette surjection. Il s'ensuit, qu'on a les relations suivantes dans $\Pi(U)$:

$$(ty) = (tz) \circ (zy), \qquad (tx) = (tz) \circ (zx) \qquad \text{et} \qquad (tx) = (ty) \circ (yx).$$

Il en découle aussitôt que

$$(zx) = (tz)^{-1} \circ (tx) = (zy) \circ (ty)^{-1} \circ (tx) = (zy) \circ (yx).$$

C'est ce qu'on cherchait à démontrer.

Étape 2. — Soit $(u_0, \cdots, u_s)$ un $s+1$-uplet tel que $u_e \in U_0$ pour tout $0 \leqslant e \leqslant s$. Il existe alors $z \in U_0$ tel que $(u_e, z) \in U_1$ pour tout $0 \leqslant e \leqslant s$. En effet, d'après la condition $(\boldsymbol{C}_s)$, l'application $d_{s+1} : X^{s+2} \longrightarrow X^{s+1}$ induit une surjection

$$\bigcap_{r' : \underline{\mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{s+1}},\, r'(1) = s+1} (r'^*)^{-1}(U_1) \twoheadrightarrow \bigcap_{r : \underline{\mathbf{0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{s}}} (r^*)^{-1}(U_0) = U_0^{s+1}.$$

Il suffit alors de prendre $z \in U_0$ tel que $(u_0, \cdots, u_s, z)$ est un antécédent de $(u_0, \cdots, u_s)$ par cette surjection.

Soient maintenant $(x_0, \cdots, x_m)$ et $(y_0, \cdots, y_n)$ deux uplets tels que (x_i, x_{i+1}) et (y_j, y_{j+1}) sont dans U_1 pour tout $0 \leqslant i \leqslant m-1$ et $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Supposons aussi que $x_0 = y_0$ et $x_m = y_n$. Nous allons montrer que $(x_m \cdots x_0) = (y_n \cdots y_0)$, ce qui permettra de conclure. D'après la discussion précédente dans le cas du $m+n+2$-uplet $(x_0, \cdots, x_m, y_0, \cdots, y_n)$, on peut trouver $z \in U_0$ tel que les (x_i, z) et les (y_j, z) sont tous dans U_1. D'après l'étape précédente appliquée aux triplets (x_i, x_{i+1}, z) et (y_j, y_{j+1}, z), on obtient les relations

$$(x_{i+1} x_i) = (z x_{i+1})^{-1} \circ (z x_i) \qquad \text{et} \qquad (y_{j+1} y_j) = (z y_{j+1})^{-1} \circ (z y_j).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (x_m \cdots x_0) &= (x_m x_{m-1}) \circ \cdots \circ (x_1 x_0) = (z x_m)^{-1} \circ (z x_0) \\ \text{et} \quad (y_n \cdots y_0) &= (y_n y_{n-1}) \circ \cdots \circ (y_1 y_0) = (z y_n)^{-1} \circ (z y_0), \end{aligned}$$

ce qui entraîne l'égalité $(x_m \cdots x_0) = (y_n \cdots y_0)$. ■

L'étape suivante consiste à analyser l'homologie de l'ensemble simplicial $U_\bullet$. Par abus de language, on désigne ci-dessous par le même symbole un groupe abélien simplicial et le complexe qui lui est associé.

Proposition 4.1.8. — *Considérons le groupe abélien simplicial $U_\bullet \otimes \mathbb{Z}$ librement engendré par l'ensemble simplicial $U_\bullet$. Alors, le morphisme $U_\bullet \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow U_{-1} \otimes \mathbb{Z}$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — Étant donné un groupe simplicial augmenté $A_\bullet$, on note $\mathrm{S}_\bullet^+(A)$ (ou $\mathrm{S}^+(A_\bullet)$) le complexe associé, i.e., tel que $\mathrm{S}_n^+(A) = A_n$ pour $n \geqslant -1$ et $\mathrm{S}_n^+(A) = 0$ pour $n < -1$, et tel que la différentielle est donnée par la somme alternée des morphismes « faces ». (Si $\mathrm{S}_\bullet(A)$ désigne le complexe associé au groupe simplicial $A_\bullet$, on a $\mathrm{S}_\bullet^+(A) = \text{Cône}\{\mathrm{S}_\bullet(A) \to A_{-1}\}[-1]$.) Dans cette preuve, on considère $U_\bullet \otimes \mathbb{Z}$ comme un groupe abélien simplicial augmenté et on cherche à montrer que le complexe $\mathrm{S}_\bullet^+(U \otimes \mathbb{Z})$ est acyclique.

Nous allons montrer par récurrence sur $e \in \mathbb{N}$ que le complexe $\mathrm{S}_\bullet^+(U \otimes \mathbb{Z})$ est e-connexe, i.e., que son homologie est nulle en degrés plus petits ou égaux à e. Lorsque $e = 0$, ceci est une conséquence de la proposition 4.1.6 qui fournit un isomorphisme canonique $\mathrm{H}_0(U\otimes\mathbb{Z})\simeq U_{-1}\otimes\mathbb{Z}$. Supposons que $e\geqslant 1$ et que la $e-1$-connexité est établie pour les complexes $\mathrm{S}^+_\bullet(U\otimes\mathbb{Z})$, quelque soit le sous-ensemble simplicial augmenté $U_\bullet\subset\check{C}_\bullet(X/S)$ satisfaisant aux conditions $(\boldsymbol{C}_n)$ du théorème 4.1.3 (avec X et S variables). Nous divisons la preuve en trois étapes.

Étape 1. — Considérons le morphisme d'ensembles simpliciaux augmentés $U_{1+\bullet}\longrightarrow U_\bullet$ donné par d_0 en chaque degré et formons l'objet simplicial de Čech $V_{\bullet,\bullet}=\check{C}_\bullet(U_{1+\bullet}/U_\bullet)$. Ainsi, $V_{\bullet,\bullet}$ est un foncteur contravariant de $\boldsymbol{\Delta}\times\boldsymbol{\Delta}_+$ dans la catégorie des ensembles et, pour $p\geqslant 0$ et $q\geqslant -1$, on a

$$V_{p,q}=\overbrace{U_{1+q}\times_{U_q}\cdots\times_{U_q}U_{1+q}}^{p+1\text{ fois}}.$$

Bien entendu, on dispose d'une augmentation évidente (en la première variable) $V_{\bullet,\bullet}\longrightarrow U_\bullet$, mais dans la suite on veut considérer $V_{\bullet,\bullet}$ sans cette augmentation. On dispose aussi d'un morphisme d'ensembles bisimpliciaux augmentés en la deuxième variable

$$V_{\bullet,\bullet}\longrightarrow\check{C}_\bullet(X/S)\times_S\check{C}_\bullet(X/S)=\check{C}_{\bullet+1+\bullet}(X/S)\tag{4.3}$$

obtenu via l'identification $\check{C}_\bullet(\check{C}_{1+\bullet}(X/S)/\check{C}_\bullet(X/S))\simeq\check{C}_\bullet(X/S)\times_S\check{C}_\bullet(X/S)$. Il est immédiat que le morphisme (4.3) est injectif. En fait, pour $p\geqslant 0$ et $q\geqslant -1$, on a

$$V_{p,q}=\bigcap_{\substack{t:\underline{\mathbf{1+q}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p+1+q}},\\ t(1+i)=p+1+i\text{ pour }0\leqslant i\leqslant q}}(t^*)^{-1}(U_{1+q})\ \subset\check{C}_{p+1+q}(X/S).\tag{4.4}$$

(On note que pour $q=-1$, la condition sur t est vide de sorte que l'intersection ci-dessus est indexée par toutes les applications $t:\underline{\mathbf{0}}\to\underline{\mathbf{p}}$.)

Étape 2. — Pour tout $p\in\mathbb{N}$, le sous-ensemble simplicial augmenté $V_{p,\bullet}\subset\check{C}_p(X/S)\times_S\check{C}_\bullet(X/S)$ satisfait aux conditions $(\boldsymbol{C}_n)$ du théorème 4.1.3. (Bien entendu, nous identifions $S'\times_S\check{C}_\bullet(X/S)$ à l'ensemble simplicial de Čech associé à l'application $\mathrm{pr}_1:S'\times_S X\longrightarrow S'$ obtenue par changement de base.)

En effet, donnons-nous un entier $n\in\mathbb{N}$ et des flèches injectives $r_\alpha:\underline{\mathbf{m}}_\alpha\hookrightarrow\underline{\mathbf{n}}$ dans $\boldsymbol{\Delta}_+$, et notons $r'_\alpha:\underline{\mathbf{m}_\alpha+\mathbf{1}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{n}+\mathbf{1}}$ les flèches de $\boldsymbol{\Delta}$ obtenues comme dans l'énoncé du théorème 4.1.3. Notons

$$s_\alpha:\underline{\mathbf{p}+\mathbf{1}+\mathbf{m}_\alpha}\to\underline{\mathbf{p}+\mathbf{1}+\mathbf{n}}\qquad(\text{resp.}\quad s'_\alpha:\underline{\mathbf{p}+\mathbf{1}+\mathbf{m}_\alpha+\mathbf{1}}\to\underline{\mathbf{p}+\mathbf{1}+\mathbf{n}+\mathbf{1}})$$

l'application de $\boldsymbol{\Delta}$ qui est l'identité sur $0\leqslant a\leqslant p$ et qui envoie $p+1+b$ (resp. $p+1+b'$) sur $p+1+r_\alpha(b)$ (resp. $p+1+r'_\alpha(b')$) pour $0\leqslant b\leqslant m_\alpha$ (resp. $0\leqslant b'\leqslant m_\alpha+1$).

Grâce à la formule (4.4), l'application $d_{n+1}:\bigcap_{\alpha\in I}(r'^*_\alpha)^{-1}(V_{p,m_\alpha+1})\longrightarrow\bigcap_{\alpha\in I}(r^*_\alpha)^{-1}(V_{p,m_\alpha})$ s'identifie à

$$\bigcap_{\alpha\in I}\ \bigcap_{\substack{t':\underline{\mathbf{1+m_\alpha+1}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p+1+m_\alpha+1}},\\ t'(1+i)=p+1+i\text{ pour }0\leqslant i\leqslant m_\alpha+1}}(s'^*_\alpha)^{-1}(t'^*)^{-1}(U_{1+m_\alpha+1})$$

$$\xrightarrow{d_{p+1+n+1}}\bigcap_{\alpha\in I}\ \bigcap_{\substack{t:\underline{\mathbf{1+m_\alpha}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p+1+m_\alpha}},\\ t(1+i)=p+1+i\text{ pour }0\leqslant i\leqslant m_\alpha}}(s^*_\alpha)^{-1}(t^*)^{-1}(U_{1+m_\alpha}).\tag{4.5}$$

Cette application est bien surjective d'après $(\boldsymbol{C}_{p+1+n})$. En effet, l'association $r\rightsquigarrow r'$ dans les conditions $(\boldsymbol{C}_n)$ du théorème 4.1.3 est compatible à la composition dans $\boldsymbol{\Delta}$ et elle induit une bijection entre, d'une part, l'ensemble des injections $t:\underline{\mathbf{1}+\mathbf{m}_\alpha}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p}+\mathbf{1}+\mathbf{m}_\alpha}$, vérifiant $t(1+i)=p+1+i$ pour $0\leqslant i\leqslant m_\alpha$, et, d'autre part, l'ensemble des injections $t':\underline{\mathbf{1}+\mathbf{m}_\alpha+\mathbf{1}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p}+\mathbf{1}+\mathbf{m}_\alpha+\mathbf{1}}$, vérifiant $t'(1+i)=p+1+i$ pour $0\leqslant i\leqslant m_\alpha+1$. (Noter que ceci est vrai même si $m_\alpha=-1$.)

Étape 3. — Nous sommes maintenant en mesure de terminer la preuve de la proposition. D'après l'hypothèse de récurrence et l'étape précédente, les complexes $\mathrm{S}^+(V_{p,\bullet} \otimes \mathbb{Z})$ sont $e-1$-connexes pour tout $p \geqslant 0$. En fait, pour $p = 0$, on a mieux : d'après le lemme 4.1.9 ci-dessous et puisque $V_{0,\bullet} = U_{1+\bullet}$, le complexe $\mathrm{S}^+(V_{0,\bullet} \otimes \mathbb{Z})$ est acyclique. Ceci entraîne que le complexe simple

$$L_\bullet = \mathrm{Tot}(\mathrm{S}^+(V_{\bullet,\bullet} \otimes \mathbb{Z}))$$

est e-connexe. (Rappelons que $V_{\bullet,\bullet}$ est un foncteur contravariant de $\mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}_+$ et il n'y a donc pas de confusion possible sur la signification du bicomplexe $\mathrm{S}^+(V_{\bullet,\bullet} \otimes \mathbb{Z})$.) Pour voir cela, on utilse la suite spectrale de bicomplexes

$$\mathrm{E}^1_{p,q} = \mathrm{H}_q(\mathrm{S}^+(V_{p,\bullet} \otimes \mathbb{Z})) \Rightarrow \mathrm{H}_{p+q}(L_\bullet)$$

et on remarque que $\mathrm{E}^1_{p,q} = 0$ si $p \leqslant 0$ ou $q \leqslant e-1$, et en particulier si $p+q \leqslant e$. Pour établir la e-ième étape de la récurrence, nous allons montrer que le complexe $\mathrm{S}^+_\bullet(U \otimes \mathbb{Z})$ est quasi-isomorphe à $L_\bullet$.

L'augmentation $V_{\bullet,\bullet} \longrightarrow U_\bullet$ induit un morphisme de complexes $L_\bullet \longrightarrow \mathrm{S}^+_\bullet(U_\bullet \otimes \mathbb{Z})$. Pour que ce morphisme soit un quasi-isomorphisme, il suffit d'après [**71**, Lemma 2.7.3] que les augmentations $V_{\bullet,q} = \check{C}_\bullet(U_{1+q}/U_q) \longrightarrow U_q$ induisent des quasi-isomorphismes $V_{\bullet,q} \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow U_q \otimes \mathbb{Z}$ pour tout $q \geqslant -1$. Ceci découle du lemme 4.1.2 et du fait que les applications $U_{1+q} \longrightarrow U_q$ sont surjectives. ■

Le lemme standard suivant a servi dans la preuve de la proposition 4.1.8.

Lemme 4.1.9. — *Soit $A_\bullet$ un groupe abélien simplicial et considérons le groupe abélien simplicial augmenté $A_{1+\bullet}$. Alors, le complexe $\mathrm{S}^+(A_{1+\bullet})$ est acyclique. Autrement dit, si $A_{1+\bullet}$ est considéré comme un groupe abélien simplicial (non augmenté), le morphisme $A_{1+\bullet} \longrightarrow A_0$, induit par $d_1 : A_1 \longrightarrow A_0$, est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — Les dégénérescences $s_0 : A_n \longrightarrow A_{1+n}$, pour $n \geqslant 0$, fournissent une homotopie entre l'identité et l'endomorphisme nul de $\mathrm{S}^+(A_{1+\bullet})$. ■

Démonstration du théorème 4.1.3. — Vu la proposition 4.1.6, il reste à voir que les composantes connexes de l'ensemble simplicial $U_\bullet$ sont contractiles, i.e., que les groupes d'homotopies $\pi_i(U, o)$ sont triviaux pour tout $o \in U_0$ et $i \geqslant 1$. La proposition 4.1.7 garantit ceci pour $i = 1$. Supposons par l'absurde que $\pi_i(U, o)$ est non nul pour un certain $i \geqslant 2$ et supposons que l'entier i est minimal pour cette propriété. Sous ces conditions, le théorème de Hurewicz (voir [**32**, Chapter III, Theorem 3.7]) affirme que le groupe abélien $\pi_i(U, o)$ est isomorphe au i-ième groupe d'homologie singulière de la composante connexe de U contenant o. Ainsi, $\pi_i(U, o)$ est un facteur direct du groupe $\mathrm{H}_i(U \otimes \mathbb{Z})$, ce qui contredit la proposition 4.1.8. ■

4.2. Lemme magique, II. Forme applicable. —

Nous développons ici une forme applicable du théorème 4.1.3 (i.e., le « lemme magique »). Pour ce faire, on aura besoin de quelques préparatifs : on donne d'abord des préliminaires sur les objets simpliciaux et semi-simpliciaux, et on introduit ensuite la notion de « D-structure » qui formalise quelques propriétés familières des ouverts denses et relativement denses. Tout au long de cette sous-section, $\mathcal{C}$ désignera une catégorie.

Hypothèse 4.2.1. —

(i) La catégorie $\mathcal{C}$ admet les coproduits finis et les produits fibrés.

(ii) Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille finie d'objets de $\mathcal{C}$ et notons $X = \coprod_{i \in I} X_i$. Si $Y \longrightarrow X$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, alors le morphisme évident

$$\coprod_{i \in I} Y \times_X X_i \longrightarrow Y$$

est inversible. (Dans le cas de la famille vide, cette condition affirme que les objets initiaux de $\mathcal{C}$ sont stricts ; ils seront qualifiés de *vides* et seront désignés par $\varnothing$.) □

Lemme 4.2.2. — *Supposons que $\mathcal{C}$ satisfait l'hypothèse 4.2.1. Soit X un objet de $\mathcal{C}$ et soient A, A', B et B' des sous-objets de X tels que $X \simeq A \coprod B$ et $X \simeq A' \coprod B'$. Supposons que $A \cap B' \simeq \varnothing$ et $A' \cap B \simeq \varnothing$. Alors, $A = A'$ et $B = B'$ (en tant que sous-objets de X).*

Démonstration. — C'est évident. ■

Ci-dessous, nous rappelons la notion de scindage et nous introduisons la notion de scindage strict.

Définition 4.2.3. — *Supposons que $\mathcal{C}$ admet les coproduits finis et soit $X_\bullet$ un objet simplicial de $\mathcal{C}$.*

(i) *Un* scindage *de $X_\bullet$ est la donnée d'un sous-objet $N_m \subset X_m$ pour chaque $m \in \mathbb{N}$ tel que le morphisme évident $\coprod_{\underline{\mathbf{n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{m}}} N_m \longrightarrow X_n$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Un scindage est dit* strict *si le morphisme $d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ envoie N_n dans N_{n-1} pour tout $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant i \leqslant n$.*

Un scindage d'un objet simplicial augmenté $X_\bullet$ est simplement un scindage de $X_\bullet$ vu comme un objet simplicial.

Lemme 4.2.4. — *Supposons que $\mathcal{C}$ satisfait l'hypothèse 4.2.1.*

(a) *Un objet simplicial de $\mathcal{C}$ admet au plus un scindage.*

(b) *Soit $X_\bullet$ un objet simplicial scindé. Alors, le scindage de $X_\bullet$ est strict si et seulement si l'objet simplicial $X_\bullet$ vérifie la condition suivante. Pour tout $0 \leqslant i < j \leqslant n$, on a un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{s_{i,j}} & X_n \\ \big\downarrow{\scriptstyle p_i} & & \big\downarrow{\scriptstyle p_{i,j}} \\ X_0 & \xrightarrow{s_0} & X_1, \end{array}$$

en prenant :
- *$s_{i,j}$ le morphisme correspondant à la surjection croissante $\sigma^{i,j} : \underline{\mathbf{n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{m}} = \underline{\mathbf{n-j+i}}$ qui envoie l'intervalle $\{i, \cdots, j\}$ sur le singleton $\{i\}$,*
- *p_i et $p_{i,j}$ les morphismes correspondant aux injections croissantes $\underline{\mathbf{0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{m}}$ et $\underline{\mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ d'images respectives $\{i\}$ et $\{i, j\}$.*

Démonstration. — L'assertion (a) est claire. En effet, si $X_\bullet$ admet deux scindages donnés par des sous-objets $N_n, M_n \subset X_n$, on a

$$N_n \cap \left(\coprod_{\underline{\mathbf{n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{m}},\, m<n} M_m \right) \simeq \varnothing \qquad \text{et} \qquad M_n \cap \left(\coprod_{\underline{\mathbf{n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{m}},\, m<n} N_m \right) \simeq \varnothing.$$

(Ceci déoule du fait que $N_n \times_{X_n, s*} X_m = \varnothing$ et $M_n \times_{X_n, s*} X_m = \varnothing$ pour toute surjection $s : \underline{\mathbf{n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{m}}$ avec $m < n$.) Le lemme 4.2.2 permet de conclure.

Pour démontrer (b), remarquons que

$$X_n \simeq X_m \coprod Y, \qquad \text{avec} \qquad Y = \left(\coprod_{r : \underline{\mathbf{n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{p}},\, r(i) \neq r(j)} N_p \right).$$

Si X est strictement scindé, alors le sous-objet $Y \subset X_n$ s'envoie dans $N_1 \subset X_1$ par le morphisme $p_{i,j} : X_n \longrightarrow X_1$. Ainsi, le carré de (b) s'identifie à

$$\begin{array}{ccc} X_{n-1} & \longrightarrow & X_{n-1} \coprod Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X_0 & \longrightarrow & X_0 \coprod N_1 \end{array}$$

qui est évidement cartésien.

Réciproquement, supposons que les carrés de (b) sont cartésiens. Pour montrer que $d_k : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ envoie N_n dans N_{n-1} pour un certain $0 \leqslant k \leqslant n$, il suffit de montrer que $N_n \times_{d_k, X_{n-1}, s_l} X_{n-2}$ est vide pour tout

$0 \leqslant l \leqslant n-2$. (Remarquons que nous pouvons supposer $n \geqslant 2$: le cas $n = 1$ étant évident car $N_0 = X_0$.) Puisque le carré

$$\begin{array}{ccc} X_{n-2} & \xrightarrow{s_l} & X_{n-1} \\ \big\downarrow{\scriptstyle p_l} & & \big\downarrow{\scriptstyle p_{l,l+1}} \\ X_0 & \xrightarrow{s_0} & X_1 \end{array}$$

est cartésien, il revient au même de montrer que $N_n \times_{p_{i,j}, X_1, s_0} X_0$ est vide avec $p_{i,j} = p_{l,l+1} \circ d_k$. En utilisant encore une fois un carré cartésien comme dans (b), on trouve $N_n \times_{p_{i,j}, X_1, s_0} X_0 \simeq N_n \times_{X_n, s_{i,j}} X_m = \varnothing$. ■

Notation 4.2.5. — Sous les conditions du lemme 4.2.4, nous noterons $\mathrm{N}_n(X) \subset X_n$, pour $n \in \mathbb{N}$, les sous-objets qui déterminent l'unique scindage de $X_\bullet$ lorsque ce scindage existe. Clairement, $\mathrm{N}_0(X) = X_0$ et, si $X_\bullet$ est augmenté, on pose $\mathrm{N}_{-1}(X) = X_{-1}$. □

Proposition 4.2.6. — *Supposons que $\mathcal{C}$ satisfait l'hypothèse 4.2.1.*

(a) Soit $X_\bullet$ un objet simplicial strictement scindé de $\mathcal{C}$. Alors, $\mathrm{N}_\bullet(X)$ est un sous-objet semi-simplicial de X.

(b) Si $Y_\bullet$ est un objet semi-simplicial de $\mathcal{C}$, il existe, à un unique isomorphisme près, un objet simplicial strictement scindé $X_\bullet = \mathrm{E}_\bullet(Y)$ muni d'un isomorphisme d'objets semi-simpliciaux $\mathrm{N}_\bullet(X) \simeq Y_\bullet$. Ceci définit un foncteur

$$\mathrm{E} : \mathbf{\Delta}'^{\mathrm{op}}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{C}$$

qui est un adjoint à gauche du foncteur « restriction à $\mathbf{\Delta}'$ ».

(c) Soient $X_\bullet$ un objet simplicial de $\mathcal{C}$, $Y_\bullet$ un objet semi-simplicial de $\mathcal{C}$ et $Y_\bullet \hookrightarrow X_\bullet$ un monomorphisme d'objets semi-simpliciaux. Pour que le morphisme canonique $\mathrm{E}_\bullet(Y) \longrightarrow X_\bullet$ soit un monomorphisme il suffit que le produit fibré $Y_1 \times_{X_1, s_0} X_0$ soit vide.

Démonstration. — L'assertion (a) est évidente. Lorsque les colimites pertinentes sont représentables dans $\mathcal{C}$, le foncteur évident $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{\Delta}'^{\mathrm{op}}\mathcal{C}$ possède un adjoint à gauche qui envoie un objet semi-simplicial $Y_\bullet$ sur l'objet simplicial $X_\bullet$ donné par

$$X_n = \operatorname*{colim}_{\underline{\mathbf{n}} \to \underline{\mathbf{m}} \in (\underline{\mathbf{n}} \backslash \mathbf{\Delta}')} Y_m.$$

Or, l'inclusion de l'ensemble discret des surjections croissantes $\underline{\mathbf{n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{m}}$ dans $(\underline{\mathbf{n}}\backslash\mathbf{\Delta}')$ est un foncteur cofinal car il admet un adjoint à droite. Il s'ensuit que $X_n \simeq \coprod_{\underline{\mathbf{n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{m}}} Y_m$. Ceci prouve l'assertion (b).

Pour démontrer (c), on vérifie que $Y_p \times_{u^*, X_n, v^*} Y_q$ est vide pour toute paire de surjections croissantes distinctes $u : \underline{\mathbf{n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{p}}$ et $v : \underline{\mathbf{n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{q}}$. On peut trouver $0 \leqslant i \leqslant n-1$ tel que $u(i) \neq u(i+1)$ et $v(i) = v(i+1)$. Il suffit alors de montrer que $Y_p \times_{u^*, X_n, s_i} X_{n-1}$ est vide. Le morphisme $s_i : X_{n-1} \longrightarrow X_n$ se factorise par la projection $\mathrm{pr}_1 : X_n \times_{p_{i,i+1}, X_1, s_0} X_0 \longrightarrow X_n$. (Comme ci-dessus, on note $p_{i,i+1} : X_n \longrightarrow X_1$ le morphisme correspondant à l'inclusion $\underline{\mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ d'image $\{i, i+1\}$.) Il est donc suffisant de montrer que $Y_p \times_{p_{i,i+1} \circ u^*, X_1, s_0} X_0$ est vide. Or, étant donné que $u(i) \neq u(i+1)$, le morphisme $p_{i,i+1} \circ u^* : X_p \longrightarrow X_1$ correspond à une injection $\underline{\mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{p}}$. Il envoie donc $Y_p \subset X_p$ dans $Y_1 \subset X_1$. En particulier, il existe un morphisme de $Y_p \times_{p_{i,i+1} \circ u^*, X_1, s_0} X_0$ vers $Y_1 \times_{X_1, s_0} X_0$. Puisque ce dernier est supposé vide, ceci permet de conclure. ■

Remarque 4.2.7. — On fera attention que l'association $X_\bullet \rightsquigarrow \mathrm{N}_\bullet(X)$ n'est pas fonctorielle. Autrement dit, si $f_\bullet : X_\bullet \longrightarrow X'_\bullet$ est un morphisme d'objets simpliciaux de $\mathcal{C}$, et si X et X' sont strictement scindés, alors f n'envoie pas nécessairement $\mathrm{N}_\bullet(X) \subset X_\bullet$ dans $\mathrm{N}_\bullet(X')$. □

On introduit maintenant la notion de « D-structure » qui sert à formaliser une partie des propriétés habituelles des ouverts denses et relativement denses.

Définition 4.2.8. — *Supposons que $\mathcal{C}$ admet les produits fibrés. Une D-*structure *$\mathscr{D}$ sur la catégorie $\mathcal{C}$ consiste en les données suivantes :*

— *pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, un ensemble $\mathscr{D}(X)$ de sous-objets de X ;*

— *une classe de morphismes dans $\mathcal{C}$, appelés $\mathscr{D}$-*permis*;*

— *pour chaque morphisme $\mathscr{D}$-permis $f : X \longrightarrow S$ dans $\mathcal{C}$, un sous-ensemble $\mathscr{D}_f(X) \subset \mathscr{D}(X)$ (qu'on note souvent $\mathscr{D}_S(X)$).*

Ces données doivent satisfaire les conditions suivantes.

(A) •) *Les morphismes $\mathscr{D}$-permis sont stables par composition et changement de base.*
•) *L'inclusion $U \hookrightarrow X$ est $\mathscr{D}$-permise pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $U \in \mathscr{D}(X)$.*

(D1) •) *Pour tout objet X, l'ensemble $\mathscr{D}(X)$ est stable par intersection finie et contient X.*
•) *Si $X \longrightarrow S$ est un morphisme $\mathscr{D}$-permis et si $U \in \mathscr{D}_S(X)$, alors $U \times_S S' \in \mathscr{D}_{S'}(X \times_S S')$ pour tout morphisme $S' \longrightarrow S$.*

(D2) *Pour tout morphisme $\mathscr{D}$-permis $X \longrightarrow S$ et tout $T \in \mathscr{D}(S)$, on a $X \times_S T \in \mathscr{D}(X)$.*

(D3) *Pour tout morphisme $\mathscr{D}$-permis $X \longrightarrow S$, et tout $X' \in \mathscr{D}(X)$ et $U \in \mathscr{D}_S(X)$, on a $X' \cap U \in \mathscr{D}_S(X')$.*

(D4) *Pour tout morphisme $\mathscr{D}$-permis $X \longrightarrow S$ et tout $U \in \mathscr{D}(X)$, il existe $T \in \mathscr{D}(S)$ tel que $U \times_S T \in \mathscr{D}_T(X \times_S T)$.*

Exemple 4.2.9. — La catégorie des $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schémas quasi-compacts possède une *D*-structure donnée comme suit.

— Si X est un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma quasi-compact, $\mathscr{D}(X)$ est l'ensemble des ouverts quasi-compacts denses de X.
— Un morphisme de $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schémas quasi-compacts $X \longrightarrow S$ est $\mathscr{D}$-permis s'il est en involution (voir la définition 3.1.25).
— Si $X \longrightarrow S$ est un morphisme $\mathscr{D}$-permis de $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schémas quasi-compacts, alors $\mathscr{D}_S(X)$ est l'ensemble des ouverts quasi-compacts de X denses relativement à S. (Ceci est compatible avec la notation 3.6.3.)

Les propriétés (D1)–(D3) sont trivialement satisfaites. La propriété (D4) découle du fait que, pour un ouvert dense $V \subset Y$ d'un S-schéma quasi-compact lisse Y, le lieu des $s \in S$ où $V_s \subset Y_s$ est dense contient un ouvert dense $T \subset S$. (En effet, ce lieu est constructible d'après [**39**, Chapitre IV, Proposition 9.6.1]. Or, il contient tous les points génériques de S car si $\eta \in S$ est un point générique tous les points génériques de Y_η sont aussi des points génériques de Y et appartiennent donc à V.) □

Exemple 4.2.10. — La catégorie des schémas quasi-compacts possède une *D*-structure donnée comme suit.

— Si X est un schéma quasi-compact, $\mathscr{D}(X)$ est l'ensemble des ouverts quasi-compacts denses de X.
— Un morphisme de schémas quasi-compacts $X \longrightarrow S$ est $\mathscr{D}$-permis s'il est en involution.
— Si $X \longrightarrow S$ est un morphisme $\mathscr{D}$-permis de schémas quasi-compacts, alors $\mathscr{D}_S(X)$ est l'ensemble des ouverts quasi-compacts de X denses relativement à S.

Les propriétés (D1)–(D3) sont trivialement satisfaites. Pour la propriété (D4), on raisonne comme ci-dessus. □

Exemple 4.2.11. — Si X est un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma, on dispose d'une *D*-structure sur la catégorie $(\mathrm{Fttf}^\Delta/X)^{\mathrm{qc}}$ obtenue par restriction de la *D*-structure de l'exemple 4.2.9. De même, si S est un schéma, on dispose d'une *D*-structure sur la catégorie $(\mathrm{Ct}/S)^{\mathrm{qc}}$ obtenue par restriction de la *D*-structure de l'exemple 4.2.10. □

Définition 4.2.12. — *Supposons que $\mathcal{C}$ admet les produits fibrés et qu'elle est munie d'une D-structure $\mathscr{D}$. On dit qu'une famille de morphismes $(Y_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ dans $\mathcal{C}$ est $\mathscr{D}$-*permise *si I est fini et si les $Y_i \longrightarrow X$ sont $\mathscr{D}$-permis. Une topologie de Grothendieck τ sur $\mathcal{C}$ est $\mathscr{D}$-*bonne *si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

(B0) *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille finie d'objets de $\mathcal{C}$ et notons $X = \coprod_{i\in I} X_i$. Alors la famille $(X_i \hookrightarrow X)_{i\in I}$ est τ-couvrante.*

(B1) *Si $(Y_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ est une famille $\mathscr{D}$-permise et τ-couvrante, et si $V_i \in \mathscr{D}_X(Y_i)$, alors $(V_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ est encore τ-couvrante.*

Exemple 4.2.13. — La topologie fttf est $\mathscr{D}$-bonne pour la *D*-structure de l'exemple 4.2.9. De même, la topologie ct est $\mathscr{D}$-bonne pour la *D*-structure de l'exemple 4.2.10. □

Remarque 4.2.14. — La propriété (B1) est équivalente à la propriété suivante (voir le lemme 2.5.21).

Soit $X \longrightarrow B$ un morphisme dans $\mathcal{C}$ et soit $(Y_i \longrightarrow B)_{i\in I}$ une famille $\mathscr{D}$-permise. On suppose donnés $W_i \in \mathscr{D}(Y_i \times_B X)$ tels que la famille $(W_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ est τ-couvrante. Alors, pour tout $V_i \in \mathscr{D}_B(Y_i)$, la famille $(V_i \times_{Y_i} W_i = \mathrm{pr}_1^{-1}(V_i) \cap W_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ est encore τ-couvrante.

En effet, $\mathrm{pr}_1^{-1}(V_i) \in \mathscr{D}_X(Y_i \times_B X)$ ce qui entraîne, grâce à (D3), que $\mathrm{pr}_1^{-1}(V_i) \cap W_i \in \mathscr{D}_X(W_i)$. D'après (B1), la famille $(\mathrm{pr}_1^{-1}(V_i) \cap W_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ est donc τ-couvrante comme souhaité. Réciproquement, la propriété (B1) est un cas particulier de la propriété ci-dessus. (Prendre $X = B$ et $W_i = Y_i$.) □

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de la sous-section, on fixe un site $(\mathcal{C}, \tau)$. On supposera que la catégorie $\mathcal{C}$ satisfait l'hypothèse 4.2.1 et qu'elle est munie d'une D-structure $\mathscr{D}$ telle la topologie τ est $\mathscr{D}$-bonne. La proposition suivante est le résultat technique clef de cette sous-section.

Proposition 4.2.15. — *Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme $\mathscr{D}$-permis et τ-couvrant de $\mathcal{C}$. Supposons que la diagonale relative de f est disjointe de Q (i.e., $Q \times_{X\times_S X} X = \varnothing$) lorsque $Q \in \mathscr{D}(X \times_S X)$ est suffisamment petit. Donnons-nous des sous-objets $Q_m \in \mathscr{D}(\check{C}_m(X/S))$, pour $-1 \leqslant m \leqslant d$ (avec d un entier fixé à l'avance). Il existe alors un sous-objet simplicial augmenté $U_\bullet \subset \check{C}_\bullet(X/S)$ tel que :*

- *(a) $U_\bullet$ est strictement scindé, $\mathrm{N}_n(U) \in \mathscr{D}(\check{C}_n(X/S))$ pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$ et $\mathrm{N}_m(U) \subset Q_m$ pour tout $-1 \leqslant m \leqslant d$;*
- *(b) $U_\bullet$ satisfait aux conditons $(\boldsymbol{C}_n)$ du théorème 4.1.3, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

En particulier, le morphisme de préfaisceaux simpliciaux $U_\bullet \longrightarrow U_{-1}$ est une équivalence τ-locale.

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que $d \geqslant 1$. (Ceci sera utile pour obtenir le scindage strict de $U_\bullet$.) Quitte à remplacer les Q_m par des sous-objets plus petits, on peut supposer que les deux propriétés suivantes sont satisfaites.

- (i) Pour tout $1 \leqslant m \leqslant d$, le sous-objet $Q_m \subset \check{C}_m(X/S)$ ne rencontre pas les dégénérescences, i.e., $s_i^{-1}(Q_m) = \varnothing$ pour $0 \leqslant i \leqslant m-1$.
- (ii) Pour tout $0 \leqslant i \leqslant m \leqslant d$, on a $Q_m \cap d_i^{-1}(Q_{m-1}) \in \mathscr{D}_{Q_{m-1}}(d_i^{-1}(Q_{m-1}))$, ce qu'on peut écrire plus explicitement :

$$Q_m \times_{d_i, \check{C}_{m-1}(X/S)} Q_{m-1} \in \mathscr{D}_{Q_{m-1}}(\check{C}_m(X/S) \times_{d_i, \check{C}_{m-1}(X/S)} Q_{m-1}).$$

  (En fait, nous aurons besoin de cette dernière propriété uniquement dans le cas $i = m$.) Étant donné que $d_i^{-1}(Q_{m-1}) \longrightarrow Q_{m-1}$ est τ-couvrant, il s'ensuit, grâce à (B1), que $Q_m \cap d_i^{-1}(Q_{m-1}) \longrightarrow Q_{m-1}$ est aussi τ-couvrant.

La propriété (i) est facile à assurer : si $Q \in \mathscr{D}(\check{C}_1(X/S))$ ne recontre pas la diagonale relative, alors $\bigcap_{r:\underline{\mathbf{1}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{m}}}(r^*)^{-1}Q$ est un élément de $\mathscr{D}(\check{C}_m(X/S))$ qui ne rencontre pas les dégénérescences. (On utilise ici (D2) pour les morphismes $\mathscr{D}$-permis r^*.) Pour assurer la propriété (ii), on emploie une récurrence descendante : on suppose que des Q_l sont construits pour $m \leqslant l \leqslant d$ et on choisit Q_{m-1} suffisamment petit pour que (ii) soit satisfaite. Ceci est possible grâce à (D4).

Pour $n \geqslant -1$, on pose :

$$\mathrm{N}_n(U) = \bigcap_{\substack{t:\underline{\mathbf{m}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{n}} \\ -1\leqslant m\leqslant d}} (t^*)^{-1}Q_m. \tag{4.6}$$

Par construction, $\mathrm{N}_\bullet(U)$ est un sous-objet semi-simplicial augmenté de $\check{C}_\bullet(X/S)$. De plus, pour $n \geqslant -1$, $\mathrm{N}_n(U) \in \mathscr{D}(\check{C}_n(X/S))$ et, pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{N}_n(U)$ ne rencontre pas les dégénérescences.

On pose $U_{-1} = \mathrm{N}_{-1}(U)$ et, pour $n \geqslant 0$, on pose :

$$U_n = \coprod_{s:\underline{\mathbf{n}}\twoheadrightarrow\underline{\mathbf{r}}} \mathrm{N}_r(U). \tag{4.7}$$

D'après la proposition 4.2.6(b, c), $U_\bullet$ est naturellement un sous-objet simplicial augmenté strictement scindé de $\check{C}_\bullet(X/S)$.

Dans le reste de la preuve, nous allons vérifier les conditions $(\boldsymbol{C}_n)$ du théorème 4.1.3. Nous raisonnons par récurrence sur n, i.e., si $n \geqslant 1$, nous supposerons que $(\boldsymbol{C}_{n-1})$ est connue.

Fixons $n \geqslant 0$ et des injections croissantes $r_\alpha : \underline{\mathbf{m}}_\alpha \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$, avec α variant dans un ensemble fini I. Notons $r'_\alpha : \underline{\mathbf{m}_\alpha + \mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}+\mathbf{1}}$ l'extension de r_α telle que $r'_\alpha(m_\alpha + 1) = n+1$. Nous devons vérifier que le morphisme

$$d_{n+1} : \bigcap_{\alpha \in I} (r'^*_\alpha)^{-1}(U_{m_\alpha+1}) \longrightarrow \bigcap_{\alpha\in I} (r^*_\alpha)^{-1}(U_{m_\alpha}), \tag{4.8}$$

induit par $d_{n+1} : \check{C}_{n+1}(X/S) \longrightarrow \check{C}_n(X/S)$, est τ-couvrant. Vu les décompositions (4.7), $\bigcap_{\alpha\in I} (r^*_\alpha)^{-1}(U_{m_\alpha})$ est union disjointe de sous-objets qui sont soit contenus dans $\bigcap_{\alpha\in I} (r^*_\alpha)^{-1}(\mathrm{N}_{m_\alpha}(U))$, soit contenus dans une diagonale partielle $\check{C}_{n-1}(X/S) \subset \check{C}_n(X/S)$ (seulement possible si $n \geqslant 1$). Grâce à (B0), il est donc suffisant de montrer que le morphisme

$$d_{n+1} : \bigcap_{\alpha\in I} (r'^*_\alpha)^{-1}(\mathrm{N}_{m_\alpha+1}(U)) \longrightarrow \bigcap_{\alpha\in I} (r^*_\alpha)^{-1}(\mathrm{N}_{m_\alpha}(U)) \tag{4.9}$$

est τ-couvrant ainsi que les morphismes obtenus de (4.8) par changement de base suivant les dégénérescences $s_i : \check{C}_{n-1}(X/S) \hookrightarrow \check{C}_n(X/S)$ (seulement si $n \geqslant 1$). Le cas de ces changements de base découle de la récurrence sur n. (Utiliser que $s_k^{-1}(U_{m_\alpha}) = U_{m_\alpha - 1}$ pour $0 \leqslant k \leqslant m_\alpha - 1$.)

Montrons que le morphisme (4.9) est τ-couvrant. En utilisant (4.6), nous pouvons réécrire ce morphisme de la manière suivante :

$$d_{n+1} : \bigcap_{\alpha\in I} \bigcap_{\substack{h : \underline{\mathbf{m}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{m}_\alpha + \mathbf{1}},\\ -1\leqslant m\leqslant d}} (h^* \circ r'^*_\alpha)^{-1}(Q_m) \longrightarrow \bigcap_{\alpha\in I} \bigcap_{\substack{t : \underline{\mathbf{m}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{m}}_\alpha,\\ -1\leqslant m\leqslant d}} (t^* \circ r^*_\alpha)^{-1}(Q_m). \tag{4.10}$$

Notons $Y = \bigcap_\alpha \bigcap_t (t^* \circ r^*_\alpha)^{-1}(Q_m)$ le second membre de (4.10). Le premier membre de (4.10) se réécrit alors plus suggestivement de la manière suivante :

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} \bigcap_{\substack{t : \underline{\mathbf{m}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{m}}_\alpha,\\ -1\leqslant m\leqslant d-1}} (t'^* \circ r'^*_\alpha)^{-1}(Q_{m+1}) \right) \cap d_{n+1}^{-1}(Y)$$

où $t' : \underline{\mathbf{m}+\mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{m}_\alpha + \mathbf{1}}$ est l'extension de t donnée par $t'(m+1) = m_\alpha + 1$. Listons les applications $r_\alpha \circ t$ pour $\alpha \in I$ et $t : \underline{\mathbf{m}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{m}}_\alpha$ avec $-1 \leqslant m \leqslant d-1$:

$$u_1 : \underline{\mathbf{m}}_1 \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}, \cdots, u_g : \underline{\mathbf{m}}_g \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}.$$

Nous allons montrer par récurrence sur $0 \leqslant k \leqslant g$ que le morphisme

$$d_{n+1} : \left(\bigcap_{l=1}^{k} (u'^*_l)^{-1}(Q_{m_l+1}) \right) \cap d_{n+1}^{-1}(Y) \longrightarrow Y$$

est τ-couvrant. (Ici encore, u'_l est l'extension de u_l donnée par $u'_l(m_l + 1) = n + 1$.) Notons que pour tout $1 \leqslant k \leqslant g$, Y est contenu dans $(u^*_k)^{-1}(Q_{m_k})$; c'est tout ce dont nous aurons besoin de savoir sur Y.

Lorsque $k = 0$, il n'y a rien à montrer puisque $d_{n+1} : \check{C}_{n+1}(X/S) \longrightarrow \check{C}_n(X/S)$ est τ-couvrant. Supposons que $1 \leqslant k \leqslant g$ et que le résultat est connu pour $k-1$. Formons le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
d_{n+1}^{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "d_{n+1}"] & \check{C}_{n+1}(X/S) \arrow[r, "u'^*_k"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & \check{C}_{m_k+1}(X/S) \arrow[d, "d_{m_k+1}"] \\
Y \arrow[r] & \check{C}_n(X/S) \arrow[r, "u^*_k"] & \check{C}_{m_k}(X/S).
\end{tikzcd}$$

La condition (ii) du début de la preuve nous dit que $Q_{m_k+1} \cap d_{m_k+1}^{-1}(Q_{m_k}) \in \mathscr{D}_{Q_{m_k}}(d_{m_k+1}^{-1}(Q_{m_k}))$. Puisque $Y \subset (u^*_k)^{-1}(Q_{m_k})$, il s'ensuit, grâce à (D2), que

$$(u'^*_k)^{-1}(Q_{m_k+1}) \cap d_{n+1}^{-1}(Y) \in \mathscr{D}_Y(d_{n+1}^{-1}(Y)).$$

On utilise maintenant la propriété (D3), et ensuite l'hypothèse de récurrence et (B1) pour conclure. ■

Notation 4.2.16. — Pour un objet $X \in \mathcal{C}$, on note η_X le pro-objet $(U)_{U\in\mathscr{D}(X)}$. Pour un préfaisceau F sur $\mathcal{C}$, $F(\eta_X)$ désigne la colimite filtrante des $F(U)$ pour $U \in \mathscr{D}(X)$. D'après (D2), un morphisme $\mathscr{D}$-permis $f : Y \longrightarrow X$ dans $\mathcal{C}$ induit un morphisme de pro-objets $\eta_f : \eta_Y \longrightarrow \eta_X$. □

Par abus de language, on désigne ci-dessous par le même symbole un objet semi-cosimplicial à valeurs dans une catégorie additive et le complexe qui lui est associé.

Théorème 4.2.17. — *Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme $\mathscr{D}$-permis et τ-couvrant de $\mathcal{C}$. On suppose que la diagonale relative de f est disjointe de $Q \in \mathscr{D}(X \times_S X)$ suffisamment petit. Soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathcal{C}$. On suppose que $F^\bullet$ est projectivement τ-fibrant et qu'il est borné à gauche, i.e., $F^n = 0$ pour n suffisamment petit. Alors, le morphisme évident*

$$F^\bullet(\eta_S) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{\check{C}_\bullet(X/S)}) \tag{4.11}$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que le complexe de préfaisceaux $F^\bullet$ est additif au sens que $F^\bullet(\coprod_i X_i) \simeq \prod_{i\in I} F^\bullet(X_i)$ pour toute famille finie $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$. En effet, puisque $F^\bullet$ est projectivement τ-fibrant, il est quasi-isomorphe à un complexe de τ-faisceaux qui est projectivement τ-fibrant. (Utiliser [**10**, Corollaire 4.4.42].)

Notons $\mathscr{Q}$ l'ensemble des uplets $(d, Q_{-1}, \cdots, Q_d)$ où $d \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ et où les Q_m sont des sous-objets de $\check{C}_m(X/S)$ appartenant à $\mathscr{D}(\check{C}_m(X/S))$ et vérifiant les conditions (i) et (ii) du début de la preuve de la proposition 4.2.15. L'ensemble $\mathscr{Q}$ est ordonné de la manière suivante :

$$(d, Q_{-1}, \cdots, Q_d) \leqslant (d', Q'_{-1}, \cdots, Q'_{d'})$$

si $d \geqslant d'$ et si $Q_m \subset Q'_m$ pour tout $-1 \leqslant m \leqslant d'$. L'ensemble ordonné $\mathscr{Q}$ est cofiltrant. La preuve de la proposition 4.2.15 fournit une application croissante $\gamma \rightsquigarrow U^\gamma_\bullet$ qui à $\gamma = (d, Q_{-1}, \cdots, Q_d) \in \mathscr{Q}$ associe le sous-objet simplicial augmenté strictement scindé $U^\gamma_\bullet \subset \check{C}_\bullet(X/S)$ donné par les formules (4.6) et (4.7). D'après la proposition 4.2.15 (et, bien entendu, le théorème 4.1.3), le morphisme de préfaisceau simpliciaux

$$U^\gamma_\bullet \longrightarrow U^\gamma_{-1}$$

est une équivalence τ-locale. Puisque $F^\bullet$ est projectivement τ-fibrant, il s'ensuit un quasi-isomorphisme de complexes de Λ-modules

$$\mathrm{Hom}^\bullet(U^\gamma_{-1} \otimes \Lambda, F) = F^\bullet(U^\gamma_{-1}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, \mathrm{N}^\bullet(F^\bullet(U^\gamma)) = \mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{N}(U^\gamma \otimes \Lambda), F),$$

où $\mathrm{N}(-)$ est le foncteur « complexe normalisé associé ». Puisque l'objet simplicial $U^\gamma_\bullet$ est strictement scindé et que le complexe de préfaisceaux $F^\bullet$ est additif, le bicomplexe $\mathrm{N}^\bullet(F^\bullet(U^\gamma))$ s'identifie à $F^\bullet(\mathrm{N}_\bullet(U^\gamma))$. (Voir la notation 4.2.5.) On obtient en fin de compte un quasi-isomorphisme naturel

$$F^\bullet(U^\gamma_{-1}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\mathrm{N}_\bullet(U^\gamma)). \tag{4.12}$$

En prenant la colimite suivant les $\gamma \in \mathscr{Q}$ des quasi-isomorphismes (4.12), on obtient le quasi-isomorphisme (4.11) recherché. ■

On termine la sous-section en spécialisant le théorème 4.2.17 au cas des petits sites fttf tout en y apportant une petite amélioration.

Théorème 4.2.18. — *Soit X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma quasi-compact admettant un nombre fini de composantes irréductibles et soit $f : Y \longrightarrow X$ un Δ-morphisme de type fini, en involution et dominant. Soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Fttf^Δ/X. *On suppose que $F^\bullet$ est projectivement* fttf*-fibrant et borné à gauche. Alors, le morphisme évident*

$$F^\bullet(\eta_X) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{\check{C}_\bullet(Y/X)}) \tag{4.13}$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — On ne restreint donc pas la généralité en supposant que X est intègre. Soit $X' \longrightarrow X$ un morphisme étale et posons $Y' = Y \times_X X'$. (Alors, $f' : Y' \longrightarrow X'$ est un morphisme de (X, Δ)-schémas ; voir le lemme 1.1.21.) On suppose que X' est intègre et que l'extension finie $\kappa_{X'}/\kappa_X$ est galoisienne, et on note G son groupe de Galois. Le morphisme (4.13) s'obtient (à un isomorphisme près dans $\mathbf{D}(\Lambda)$) du morphisme

$$F^{\bullet}(\eta_{X'}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^{\bullet}(\eta_{\check{C}_{\bullet}(Y'/X')}) \tag{4.14}$$

par passage aux « G-invariants », i.e., en appliquant le foncteur $\mathrm{R}\Gamma(G;-)$. Il est donc suffisant de montrer que (4.14) est un quasi-isomorphisme. Autrement dit, il est loisible de remplacer X par un X-schéma étale dominant. On distingue maintenant deux cas.

Cas 1. — Supposons que Y admet une composante connexe qui est étale au-dessus de X. D'après la discussion précédente, on peut supposer que cette composante connexe est isomorphe à X. Ceci fournit une section $t : X \longrightarrow Y$ telle que les morphismes

$$t_n : \check{C}_n(Y/X) = X \times_X \check{C}_n(Y/X) \xrightarrow{(t,\mathrm{id})} \check{C}_{n+1}(Y/X)$$

induisent des morphismes $t_n : \eta_{\check{C}_n(Y/X)} \longrightarrow \eta_{\check{C}_{n+1}(Y/X)}$, pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. Il est immédiat que les morphismes induits $t_n^* : F(\eta_{\check{C}_{n+1}(Y/X)}) \longrightarrow F(\eta_{\check{C}_n(Y/X)})$ définissent une homotopie entre l'identité et l'endomorphisme nul du complexe $\mathrm{S}^+(F(\eta_{\check{C}_{\bullet}(Y/X)}))$. (Bien entendu, $\mathrm{S}^+(-)$ désigne le complexe associé à un objet semi-simplicial augmenté à valeurs dans une catégorie additive ; voir le début de la preuve de la proposition 4.1.8.)

Cas 2. — On suppose maintenant qu'aucune composante connexe de Y n'est étale au-dessus de X. Puisque le morphisme $Y \longrightarrow X$ est en involution, il s'ensuit que les fibres de ce morphisme sont soit vides, soit purement de dimension non nulle. Dans ce cas, $Y \times_X Y$ contient un ouvert quasi-compact dense disjoint de la diagonale relative de f. Or, puisque le morphisme f est dominant, on peut le supposer surjectif quitte à rétrécir X. Le résultat recherché devient alors un cas particulier du théorème 4.2.17. ■

4.3. Rappels sur les foncteurs « cosquelette ». —

Cette sous-section contient des rappels sur les foncteurs « cosquelette ». Ces rappels seront utilisés dans la sous-section 4.4 pour définir et étudier les hyper-recouvrements génériques. Nous nous restreignons au cas semi-simplicial car nos hyper-recouvrements génériques seront des objets semi-simpliciaux. Rappelons que $\mathbf{\Delta}'$ désigne la sous-catégorie de $\mathbf{\Delta} = \{\underline{\mathbf{n}};\, n \in \mathbb{N}\}$ où l'on ne retient que les applications strictement croissantes entre les ordinaux. Étant donné $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{\Delta}'_{\leqslant p}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Delta}'$ dont les objets sont les ordinaux $\underline{\mathbf{n}}$ pour $0 \leqslant n \leqslant p$. Un foncteur contravariant de source $\mathbf{\Delta}'_{\leqslant p}$ est appelé un objet *semi-simplicial p-tronqué*. (On définit de même la sous-catégorie $\mathbf{\Delta}_{\leqslant p} \subset \mathbf{\Delta}$ et les objets simpliciaux p-tronqués, mais ces derniers ne seront pas utilisés dans la suite.)

On fixe une catégorie $\mathcal{C}$ admettant les limites finies. Comme d'habitude, on note $\mathbf{\Delta}'^{\mathrm{op}}\mathcal{C}$ (resp. $\mathbf{\Delta}'^{\mathrm{op}}_{\leqslant p}\mathcal{C}$) la catégorie des objets semi-simpliciaux (resp. semi-simpliciaux p-tronqués) de $\mathcal{C}$. L'inclusion $\iota_p : \mathbf{\Delta}'_{\leqslant p} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}'$ induit un foncteur du type « image direct »

$$(\iota_p)_* : \mathbf{\Delta}'^{\mathrm{op}}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{\Delta}'^{\mathrm{op}}_{\leqslant p}\mathcal{C}.$$

Ce foncteur possède un adjoint à droite

$$\iota_p^! : \mathbf{\Delta}'^{\mathrm{op}}_{\leqslant p}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{\Delta}'^{\mathrm{op}}\mathcal{C}.$$

Pour tout objet semi-simplicial p-tronqué X de $\mathcal{C}$, on a la formule suivante :

$$(\iota_p^! X)_n = \lim_{\underline{\mathbf{r}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}},\, 0 \leqslant r \leqslant p} X_r. \tag{4.15}$$

En particulier, on a $(\iota_p^! X)_n = X_n$ pour tout $0 \leqslant n \leqslant p$.

Lemme 4.3.1. — *Soit B un objet de $\mathcal{C}$ et soit X/B un objet semi-simplicial p-tronqué de $\mathcal{C}/B$. Alors, si $p \geqslant 1$, l'objet semi-simplicial $\iota_p^!(X/B)$ est canoniquement isomorphe à $\iota_p^!(X)$.*

Démonstration. — On dispose d'un monomorphisme évident $\iota_p^!(X/B) \hookrightarrow \iota_p^!(X)$. On montrera que $\iota_p^!(X)$ est naturellement un objet de $\mathcal{C}/B$, ce qui fournit une section à ce monomorphisme. Pour ce faire, on considère B comme un objet semi-simplicial p-tronqué constant. Le morphisme $X \longrightarrow B$ induit alors un morphisme

$\iota_p^! X \longrightarrow \iota_p^! B$. Or, pour $p \geqslant 1$, les catégories $\boldsymbol{\Delta}'_{\leqslant p}/\underline{\mathbf{n}}$ sont connexes. Grâce à la formule (4.15), il s'ensuit que $\iota_p^! B$ est l'objet semi-simplicial constant associé à $B \in \mathcal{C}$. Ceci permet de conclure. ■

Le résultat suivant donne une description un peu plus concrète de la limite dans (4.15).

Lemme 4.3.2. — *Soit X un objet semi-simplicial p-tronqué de $\mathcal{C}$. Alors, pour $n \geqslant p \geqslant 1$, l'objet $(\iota_p^! X)_n$ s'inscrit dans un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc}
(\iota_p^! X)_n & \longrightarrow & \prod_{r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}} X_p \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle \prod_r (d_0, \cdots, d_p)} \\
\prod_{u : \underline{\mathbf{p-1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}} X_{p-1} & \xrightarrow{\text{diag}} & \prod_{r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}},\ \delta^i : \underline{\mathbf{p-1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{p}}} X_{p-1}.
\end{array}$$

(Ci-dessus, le morphisme « diagonal » est induit par l'application $(r, \delta^i) \rightsquigarrow r \circ \delta^i$.)

Démonstration. — On se ramène aussitôt au cas où X est un ensemble semi-simplicial p-tronqué. Alors, par construction $(\iota_p^! X)_n$ est l'ensemble des familles $(x_r)_{r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}}$ de X_p telle que pour tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\mathbf{s}} & \xrightarrow{u'} & \underline{\mathbf{p}} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle u} & & \Big\downarrow {\scriptstyle r'} \\
\underline{\mathbf{p}} & \xrightarrow{r} & \underline{\mathbf{n}}
\end{array} \tag{4.16}$$

dans $\boldsymbol{\Delta}'$, on a l'égalité $u^*(x_r) = u'^*(x_{r'})$ dans X_s. Pour démontrer le lemme, il s'agit de voir que ces égalités sont satisfaites pour tout $\underline{\mathbf{s}}$, avec $0 \leqslant s \leqslant p-1$, si elles le sont pour $\underline{\mathbf{p-1}}$. On raisonne par récurrence descendante sur $0 \leqslant s \leqslant p-2$ en supposant que ces relations sont satisfaites pour $s+1$.

On se donne un carré commutatif (4.16). On peut supposer que $r(\underline{\mathbf{p}}) \cap r'(\underline{\mathbf{p}})$ contient exactement $s+1$ éléments (car sinon le résultat est clair par induction). En remplaçant dans $r(\underline{\mathbf{p}})$ un élément de $r(\underline{\mathbf{p}}) \smallsetminus r(\underline{\mathbf{p}}) \cap r'(\underline{\mathbf{p}})$ par un élément de $r'(\underline{\mathbf{p}}) \smallsetminus r(\underline{\mathbf{p}}) \cap r'(\underline{\mathbf{p}})$, on trouve une injection $e : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ telle que $r(\underline{\mathbf{p}}) \cap e(\underline{\mathbf{p}})$ et $e(\underline{\mathbf{p}}) \cap r'(\underline{\mathbf{p}})$ contiennent chacun au moins $s+2$ éléments. (On utilise ici que $p \geqslant s+2$.) On obtient ainsi un diagramme commutatif dans $\boldsymbol{\Delta}'$

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\mathbf{s}} \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, "w'"] & \\
\underline{\mathbf{s+1}} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "c"] & \underline{\mathbf{p}} \arrow[d, "e"] & \underline{\mathbf{s+1}} \arrow[l, "v'"'] \arrow[d, "c'"] \\
\underline{\mathbf{p}} \arrow[r, "r"] & \underline{\mathbf{n}} & \underline{\mathbf{p}} \arrow[l, "r'"']
\end{tikzcd}$$

avec $u = c \circ w$ et $u' = c' \circ w'$. D'après l'hypothèse de récurrence, $c^*(x_r) = v^*(x_e)$ et $v'^*(x_e) = c'^*(x_{r'})$. Il s'ensuit que

$$u^*(x_r) = w^* c^*(x_r) = w^* v^*(x_e) = d^*(x_e) = w'^* v'^*(x_e) = w'^* c'^*(x_{r'}) = u'^*(x_{r'}).$$

Ceci termine la preuve du lemme. ■

Définition 4.3.3. — *Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose* $\mathrm{cosk}_p = \iota_p^! \circ (\iota_p)_*$. *C'est un endofoncteur de $\boldsymbol{\Delta}'^{\mathrm{op}}\mathcal{C}$. Si X est un objet semi-simplicial de $\mathcal{C}$, $\mathrm{cosk}_p(X)$ est appelé le p-ième* cosquelette *de X. On conviendra aussi que* $\mathrm{cosk}_{-1}(X)$ *est l'objet semi-simplicial final de $\mathcal{C}$.*

Remarque 4.3.4. — Pour $p \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, on dispose d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{cosk}_p$ qui est donnée par l'unité de l'adjonction $((\iota_p)_*, \iota_p^!)$ lorsque $p \geqslant 0$. Soit X un objet semi-cosimplicial de $\mathcal{C}$. Alors, le morphisme $X \longrightarrow \mathrm{cosk}_p(X)$ induit des isomorphismes $X_r \simeq (\mathrm{cosk}_p(X))_r$ pour tout $0 \leqslant r \leqslant p$. Si le morphisme $X \longrightarrow \mathrm{cosk}_p(X)$ est un isomorphisme, on dit par abus de language que X est p-tronqué. □

Lemme 4.3.5. — *Pour p, $q \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, on a* $\mathrm{cosk}_p \circ \mathrm{cosk}_q = \mathrm{cosk}_{\min(p,q)}$.

Démonstration. — Si $p \leqslant q$ ou $q = -1$, c'est clair. Si $p > q \geqslant 0$, le résultat découle du fait que $(\iota_p)_* \iota_q^!$ est l'adjoint à droite du foncteur « image directe » $\boldsymbol{\Delta}'^{\mathrm{op}}_{\leqslant p}\mathcal{C} \longrightarrow \boldsymbol{\Delta}'^{\mathrm{op}}_{\leqslant q}\mathcal{C}$. ■

Lemme 4.3.6. — *Soit B un objet de $\mathcal{C}$ et soit X/B un objet semi-simplicial de $\mathcal{C}/B$. Alors, si $p \geqslant 1$, l'objet semi-simplicial* $\operatorname{cosk}_p(X/B)$ *est canoniquement isomorphe à* $\operatorname{cosk}_p(X)$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme 4.3.1. ■

Notation 4.3.7. — Soient B un objet de $\mathcal{C}$ et X un objet semi-simplicial de $\mathcal{C}/B$. Le p-ième cosquelette de X calculé dans $\mathcal{C}/B$ (au lieu de $\mathcal{C}$) sera noté $\operatorname{cosk}^B_p(X)$. (En particulier, $\operatorname{cosk}^B_{-1}(X) = B$ est l'objet semi-simplicial constant de valeur B.) Vu le lemme 4.3.6, cette distinction n'est pertinente que si $p \in \{-1, 0\}$. Néanmoins, l'usage de cette notation nous épargnera parfois de distinguer les cas $p \in \{-1, 0\}$ et $p \geqslant 1$. □

Les deux résultats suivants sont très utiles pour travailler avec les foncteurs « cosquelette ».

Proposition 4.3.8. — *Soit X un objet semi-simplicial de $\mathcal{C}$. Alors, pour $0 \leqslant p \leqslant q$, nous avons un isomorphisme canonique*

$$(\operatorname{cosk}_p X)_q \simeq \prod_{r:\underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q}}} \left(X_p \times_{(\operatorname{cosk}_{p-1}X)_p,\, r^*} (\operatorname{cosk}_{p-1}X)_q/(\operatorname{cosk}_{p-1}X)_q\right).$$

(Ci-dessus, le produit est fibré au-dessus de $(\operatorname{cosk}_{p-1}X)_q$.*)*

Démonstration. — Lorsque $p = 0$, le résultat est clair. On peut donc supposer que $p \geqslant 1$. D'après le lemme 4.3.2 appliqué à $(\iota_p)_*X$ et $(\iota_p)_*\operatorname{cosk}_{p-1}X$, on a deux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
(\operatorname{cosk}_p X)_q \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{r:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{q}}} X_p \arrow[d, "\prod_r (d_0,\cdots,d_p)"] \\
\prod_{u:\underline{\mathbf{p-1}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{q}}} X_{p-1} \arrow[r, "\mathrm{diag}"] & \prod_{r:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{q}},\, \delta^i:\underline{\mathbf{p-1}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p}}} X_{p-1}
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
(\operatorname{cosk}_{p-1} X)_q \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{r:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{q}}} (\operatorname{cosk}_{p-1}X)_p \arrow[d, "\prod_r (d_0,\cdots,d_p)"] \\
\prod_{u:\underline{\mathbf{p-1}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{q}}} X_{p-1} \arrow[r, "\mathrm{diag}"] & \prod_{r:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{q}},\, \delta^i:\underline{\mathbf{p-1}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p}}} X_{p-1}.
\end{tikzcd}$$

(Bien entendu, pour le second carré, on a utilisé aussi le lemme 4.3.5.) Il s'ensuit que le carré

$$\begin{tikzcd}
(\operatorname{cosk}_p X)_q \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{r:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{q}}} X_p \arrow[d] \\
(\operatorname{cosk}_{p-1} X)_q \arrow[r] & \prod_{r:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{q}}} (\operatorname{cosk}_{p-1}X)_p
\end{tikzcd}$$

est également cartésien. Ceci permet de conclure. ■

Proposition 4.3.9. — *Soit $X_\bullet$ un objet semi-simplicial de $\mathcal{C}$. Alors, pour $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 1$, on a un isomorphisme canonique*

$$(\operatorname{cosk}_p X_\bullet)_q \simeq (\operatorname{cosk}^{X_0}_{p-1} X_{1+\bullet})_{q-1} \times_{(\operatorname{cosk}_{p-1}X_\bullet)_{q-1}} (\operatorname{cosk}_p X_\bullet)_{q-1}. \tag{4.17}$$

En particulier, en prenant $q = p + 1$, on obtient un isomorphisme canonique

$$(\operatorname{cosk}_p X_\bullet)_{p+1} \simeq (\operatorname{cosk}^{X_0}_{p-1} X_{1+\bullet})_p \times_{(\operatorname{cosk}_{p-1}X_\bullet)_p} X_p. \tag{4.18}$$

Démonstration. — Si $p = 0$ ou si $p \geqslant q$, il n'y a rien à démontrer. On supposera donc pour fixer les idées que $1 \leqslant p < q$. On note $\mathscr{D}$ le diagramme de catégories

$$\overbrace{(\mathbf{\Delta}'_{\leqslant p-1})_+/\underline{\mathbf{q-1}}}^{(1,0)} \longleftarrow \overbrace{\mathbf{\Delta}'_{\leqslant p-1}/\underline{\mathbf{q-1}}}^{(0,0)} \hookrightarrow \overbrace{\mathbf{\Delta}'_{\leqslant p}/\underline{\mathbf{q-1}}}^{(0,1)}$$

indexé par l'ensemble ordonné $\ulcorner = \underline{\mathbf{1}} \times \underline{\mathbf{1}} \smallsetminus \{(1,1)\}$. (Bien entendu, $(\mathbf{\Delta}'_{\leqslant p-1})_+$ désigne la catégorie $\mathbf{\Delta}'_{\leqslant p-1}$ augmenté d'un objet initial strict $\underline{-\mathbf{1}}$.) On dispose d'un foncteur

$$\int_{\ulcorner} \mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{\Delta}'_{\leqslant p}/\underline{\mathbf{q}} \tag{4.19}$$

qui envoie :

(1) un objet $((1,0), s : \underline{\mathbf{r}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q-1}})$, avec $-1 \leqslant r \leqslant p-1$, sur la flèche $s' : \underline{\mathbf{r+1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q}}$ donnée par $s'(0) = 0$ et $s'(a) = s(a-1) + 1$ pour $1 \leqslant a \leqslant r+1$;

(2) un objet $((0,0), s : \underline{\mathbf{r}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q}-\mathbf{1}})$, avec $0 \leqslant r \leqslant p-1$, sur la flèche composée $\delta^0 \circ s : \underline{\mathbf{r}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q}}$;

(3) un objet $((0,1), s : \underline{\mathbf{r}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q}-\mathbf{1}})$, avec $0 \leqslant r \leqslant p$, sur la flèche composée $\delta^0 \circ s : \underline{\mathbf{r}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q}}$.

Le foncteur (4.19) induit une surjection sur les ensembles de flèches et ses fibres sont connexes. (En fait, ses fibres sont isomorphes soit à $\underline{\mathbf{0}}$, soit à $\underline{\mathbf{1}}$.) Il s'ensuit que la limite d'un système projectif indexé par $\mathbf{\Delta}'_{\leqslant p}/\underline{\mathbf{q}}$ est canoniquement isomorphe à la limite du système projectif obtenu en précomposant avec (4.19). En particulier, la limite du système projectif $(X_r)_{\underline{\mathbf{r}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q}},\, 0 \leqslant r \leqslant p} = (X_r)_{\underline{\mathbf{r}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q}} \in \mathbf{\Delta}'_{\leqslant p}/\underline{\mathbf{q}}}$ se calcule comme la limite suivant $\ulcorner$ (i.e., le produit fibré) du diagramme

$$\lim_{\underline{\mathbf{r}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q}-\mathbf{1}},\, -1 \leqslant r \leqslant p-1} X_{1+r} \longrightarrow \lim_{\underline{\mathbf{r}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q}-\mathbf{1}},\, 0 \leqslant r \leqslant p-1} X_r \longleftarrow \lim_{\underline{\mathbf{r}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q}-\mathbf{1}},\, 0 \leqslant r \leqslant p} X_r.$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

Corollaire 4.3.10. — *Soit $X_\bullet$ un objet semi-simplicial p-tronqué de $\mathcal{C}$, avec $p \geqslant 0$. Alors, $X_{1+\bullet}$, vu comme objet semi-simplicial de $\mathcal{C}/X_0$, est également p-tronqué.*

Démonstration. — L'objet semi-simplicial $X_\bullet$ est $p+1$-tronqué puisqu'il est p-tronqué. La proposition 4.3.9 fournit alors pour $n \geqslant 0$ un isomorphisme

$$X_{1+n} = (\mathrm{cosk}_{p+1}X)_{n+1} \simeq (\mathrm{cosk}_p^{X_0} X_{1+\bullet})_n \times_{(\mathrm{cosk}_p X)_n} (\mathrm{cosk}_{p+1}X)_n.$$

Puisque $\mathrm{cosk}_p X = \mathrm{cosk}_{p+1} X = X$, le produit fibré ci-dessus s'identifie à $(\mathrm{cosk}_p^{X_0} X_{1+\bullet})_n$. ■

Définition 4.3.11. — *Soit $Y \longrightarrow X$ un morphisme d'objets semi-simpliciaux de $\mathcal{C}$. Nous dirons que f est* p-élémentaire, *avec $p \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, si les conditions suivantes sont satisfaites.*

(i) Pour tout $0 \leqslant r \leqslant p-1$, le morphisme $Y_r \longrightarrow X_r$ est un isomorphisme.

(ii) Le morphisme d'objets semi-simpliciaux $Y \longrightarrow X \times_{\mathrm{cosk}_p X} \mathrm{cosk}_p Y$ est un isomorphisme.

(Ainsi, $Y \longrightarrow X$ est -1-élémentaire si et seulement si c'est un isomorphisme.)

Remarque 4.3.12. — Pour $p \geqslant 0$, un morphisme p-élémentaire $Y \longrightarrow X$ est déterminé, à un unique isomorphisme près, par l'objet semi-simplicial X et le morphisme $Y_p \longrightarrow X_p$. Pour cette raison, il est loisible de parler du morphisme p-élémentaire associé à un objet semi-simplicial X muni d'un X_p-objet Y_p. □

Lemme 4.3.13. —

(a) Soit X un objet semi-simplicial. Alors, le morphisme évident $\mathrm{cosk}_p X \longrightarrow \mathrm{cosk}_{p-1} X$ est p-élémentaire pour tout $p \geqslant 0$.

(b) Soient $Y \longrightarrow X$ un morphisme p-élémentaire et $X' \longrightarrow X$ un morphisme quelconque d'objets semi-simpliciaux. Alors, le morphisme $Y \times_X X' \longrightarrow X'$ est p-élémentaire.

(c) Si $f : Y \longrightarrow X$ et $g : Z \longrightarrow Y$ sont deux morphismes d'objets semi-simpliciaux, et si f et g (resp. f et $f \circ g$) sont p-élémentaires, il en est de même de $f \circ g$ (resp. g).

Démonstration. — Pour (a), on utilise le lemme 4.3.5. Pour (b), on utilise la commutation du foncteur cosk_p aux produits fibrés. La propriété (c) découle immédiatement de la définition. ■

Lemme 4.3.14. — *Soit $Y \longrightarrow X$ un morphisme d'objets semi-simpliciaux dans $\mathcal{C}$. Alors, Y s'identifie à la limite projective de la tour*

$$\cdots \longrightarrow X \times_{\mathrm{cosk}_p X} \mathrm{cosk}_p Y \longrightarrow X \times_{\mathrm{cosk}_{p-1} X} \mathrm{cosk}_{p-1} Y \longrightarrow \cdots \longrightarrow X \times_{\mathrm{cosk}_0 X} \mathrm{cosk}_0 Y \longrightarrow X \tag{4.20}$$

où le p-ième morphisme de transition

$$X \times_{\mathrm{cosk}_p X} \mathrm{cosk}_p Y \longrightarrow X \times_{\mathrm{cosk}_{p-1} X} \mathrm{cosk}_{p-1} Y \tag{4.21}$$

est p-élémentaire associé au morphisme $Y_p \longrightarrow X_p \times_{(\mathrm{cosk}_{p-1}X)_p} (\mathrm{cosk}_{p-1}Y)_p$.

Démonstration. — Le fait que Y s'identifie à la limite de la tour (4.20) est clair. En utilisant le lemme 4.3.13(a, b, c), on trouve que le morphisme

$$\mathrm{cosk}_p Y \longrightarrow \mathrm{cosk}_p X \times_{\mathrm{cosk}_{p-1} X} \mathrm{cosk}_{p-1} Y$$

est p-élémentaire. Or, le morphisme (4.21) s'obtient du morphisme ci-dessus par changement de base. ■

Proposition 4.3.15. — *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme p-élémentaire avec $p \geqslant 0$. Alors, pour tout $q \geqslant p$, on a un isomorphisme canonique*

$$Y_q \simeq \prod_{r:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{q}}} (Y_p \times_{X_p, r^*} X_q/X_q). \tag{4.22}$$

(Ci-dessus, le produit est fibré au-dessus de X_q.)

Démonstration. — Puisque f est p-élémentaire, on a l'isomorphisme $Y_q \simeq (\mathrm{cosk}_p Y)_q \times_{(\mathrm{cosk}_p X)_q} X_q$. En y remplaçant $(\mathrm{cosk}_p X)_q$ et $(\mathrm{cosk}_p Y)_q$ par les formules de la proposition 4.3.8, et en utilisant le fait que $\mathrm{cosk}_{p-1}(Y) \simeq \mathrm{cosk}_{p-1}(X)$, on obtient l'isomorphisme (4.22). ∎

Dans le reste de la sous-section, nous allons expliquer comment munir certains objets semi-simpliciaux d'une structure cyclique (à la Connes [**29**]). Rappelons d'abord de quoi il s'agit.

Définition 4.3.16. — *Une* structure cyclique *sur un objet semi-simplicial X est la donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un automorphisme $c_n : X_n \xrightarrow{\sim} X_n$ telle que la condition suivante est satisfaite. Pour toute flèche $r : \underline{\mathbf{m}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ de $\mathbf{\Delta}'$ avec $r(m) \leqslant n-1$ (resp. $r(m) = n$), le carré suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{c_n} & X_n \\ \downarrow{\scriptstyle r_+^*} & & \downarrow{\scriptstyle r^*} \\ X_m & \xrightarrow{\mathrm{id}} & X_m \end{array} \qquad \textit{(resp.}\ \begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{c_n} & X_n \\ \downarrow{\scriptstyle r_+^*} & & \downarrow{\scriptstyle r^*} \\ X_m & \xrightarrow{c_m} & X_m \end{array}\textit{)}$$

si l'on prend pour $r_+ : \underline{\mathbf{m}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ l'unique injection croissante d'image $\{r(i)+1;\ 0 \leqslant i \leqslant m\}$ (resp. $\{0\} \cup \{r(i)+1;\ 0 \leqslant i \leqslant m-1\}$). Un objet semi-simplicial cyclique *est un objet semi-simplicial muni d'une structure cyclique.*

Remarque 4.3.17. — Certains auteurs demandent que l'automorphisme c_n soit d'ordre $n+1$. Il s'agit d'une condition naturelle, mais elle ne sera pas satisfaite dans les exemples qui nous intéressent. □

Proposition 4.3.18. — *Soit X un objet semi-simplicial p-tronqué et supposons donnés, pour $0 \leqslant n \leqslant p$, des automorphismes $c_n : X_n \xrightarrow{\sim} X_n$ satisfaisant à la condition de la définition 4.3.16. Alors, ces automorphismes s'étendent d'une manière canonique en une structure cyclique sur X qui satisfait à la condition universelle suivante. Étant donnés un morphisme d'objets semi-simpliciaux $f : Y \longrightarrow X$ et une structure cyclique sur Y, si les f_n commutent aux c_n pour $0 \leqslant n \leqslant p$, alors f est un morphisme d'objets semi-simpliciaux cycliques.*

Démonstration. — Le cas où $p = 0$ est évident ; dans la suite on suppose que $p \geqslant 1$. Pour $n \geqslant p$, on utilise le lemme 4.3.2 pour identifier X_n à un sous-objet de $\prod_{r:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{n}}} X_p$. Nous allons définir un automorphisme $\bar{c}_n$ de $\prod_{r:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{n}}} X_p$ qui préserve X_n ; l'automorphisme c_n sera la restriction de $\bar{c}_n$ à X_n.

On prend pour $\bar{c}_n$ l'automorphisme donné (sur les foncteurs de points) par

$$\bar{c}_n((x_r)_{r:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{n}}}) = (c'_r(x_{r_+}))_{r:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{n}}}$$

avec $c'_r = \mathrm{id}_{X_p}$ si $r(p) \leqslant n-1$ et $c'_r = c_p$ si $r(p) = n$. Montrons que le sous-objet X_n est préservé par $\bar{c}_n$. Donnons-nous un uplet $(x_r)_{r:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{n}}}$ dans X ainsi qu'un carré commutatif dans $\mathbf{\Delta}'$:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{p-1}} & \xrightarrow{\delta^i} & \underline{\mathbf{p}} \\ \downarrow{\scriptstyle \delta^j} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \underline{\mathbf{p}} & \xrightarrow{s} & \underline{\mathbf{n}} \end{array}$$

avec $0 \leqslant i < j \leqslant p$. Notons que $s(\underline{\mathbf{p}} \smallsetminus \{j\}) = r(\underline{\mathbf{p}} \smallsetminus \{i\})$. Nous devons montrer que

$$d_i(c'_r(x_{r_+})) = d_j(c'_s(x_{s_+})). \tag{4.23}$$

Il y a plusieurs cas à considérer suivant que n appartient ou non à l'image de r ou s.

Lorsque $r(p) \leqslant n-1$ et $s(p) \leqslant n-1$, nous avons $r_+ \circ \delta^i = s_+ \circ \delta^j$ et $c'_r = c'_s = \mathrm{id}$, ce qui donne aussitôt (4.23). Le cas $r(p) = n$ et $s(p) \leqslant n-1$ n'est pas possible sous l'hypothèse $0 \leqslant i < j \leqslant p$.

Supposons maintenant que $r(p) \leqslant n-1$ et $s(p) = n$. Nous devons vérifier que $d_i(x_{r_+}) = d_j(c_p(x_{s_+}))$. Or, dans ce cas, on a $j = p$ et $d_j \circ c_p = d_0$. Il suffit donc de vérifier que $r_+ \circ \delta^i = s_+ \circ \delta^0$, ce qui est immédiat.

Enfin, supposons que $r(p) = s(p) = n$. Nous devons vérifier que $d_i(c_p(x_{r_+})) = d_j(c_p(x_{s_+}))$. Or, dans ce cas, on a $i,\ j \leqslant p-1$. Il s'ensuit que $d_i \circ c_p = c_{p-1} \circ d_{i+1}$ et $d_j \circ c_p = c_{p-1} \circ d_{j+1}$. Il suffit donc de vérifier que $r_+ \circ \delta^{i+1} = s_+ \circ \delta^{j+1}$, ce qui est immédiat. ■

Remarque 4.3.19. — Gardons les hypothèses et les notations de la proposition 4.3.18. Pour que les automorphismes $c_n : X_n \xrightarrow{\sim} X_n$ soient d'ordre $n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est suffisant qu'il en soit ainsi pour $0 \leqslant n \leqslant p$. En effet, si c_p est d'ordre $p+1$, l'automorphisme $\bar{c}_n$ de la preuve ci-dessus est d'ordre $n+1$ (pour tout $n \geqslant p$). Pour voir cela, on remarque que l'opérateur $r \rightsquigarrow r_+$ est d'ordre $n+1$ et que, dans l'orbite d'une application $r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$, il y exactement $p+1$ applications dont l'image contient $n \in \underline{\mathbf{n}}$. □

4.4. Hyper-recouvrements génériques. —

On introduit ici une variante générique de la notion d'« hyper-recouvrement » (voir [**5**, Exposé V, §7.3]). On travaillera dans un cadre abstrait sauf pour le théorème principal de cette sous-section (i.e., le théorème 4.4.16) pour lequel on spécialise aux petits sites fttf. [2] Sauf mention explicite du contraire, on travaillera dans la situation suivante.

Situation 4.4.1. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui admet les limites finies et qui est munie de deux classes de morphismes appelés *admissibles* et *dominants*. On suppose que les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) les morphismes admissibles sont stables par composition et changement de base ;

(ii) les morphismes dominants sont stables par composition et changement de base suivant les morphismes admissibles. □

Exemples 4.4.2. —

(1) La situation qui nous intéresse le plus est la suivante : $\mathcal{C}$ est la catégorie des $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schémas quasi-compacts, les morphismes admissibles sont les Δ-morphismes de type fini en involution, et « dominant » admet la signification usuelle.

(2) Une autre situation possible est la suivante : $\mathcal{C}$ est la catégorie des schémas quasi-compacts, les morphismes admissibles sont les morphismes plats et « dominant » admet la signification usuelle. (Ceci sera utile notamment dans la sous-section 4.5.)

(3) Étant données deux classes comme dans la situation 4.4.1, on peut remplacer la classe des morphismes dominants par celle de toutes les flèches de $\mathcal{C}$ tout en gardant la validité des propriétés (i) et (ii). □

Définition 4.4.3. —

(a) Un hyper-recouvrement générique *d'un objet X de $\mathcal{C}$ est un morphisme d'objets semi-simpliciaux $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le morphisme*

$$Y_p \longrightarrow (\mathrm{cosk}^X_{p-1} Y)_p$$

est admissible et dominant.

(b) Un hyper-recouvrement générique relatif *d'un objet semi-simplicial $U_\bullet$ de $\mathcal{C}$ est un morphisme d'objets semi-simpliciaux $h_\bullet : V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le morphisme*

$$V_p \longrightarrow U_p \times_{(\mathrm{cosk}_{p-1} U)_p} (\mathrm{cosk}_{p-1} V)_p$$

est admissible et dominant.

Clairement, un hyper-recouvrement générique d'un objet X est un hyper-recouvrement générique relatif de l'objet semi-simplicial constant de valeur X.

Lemme 4.4.4. —

2. Il ne fait pas de doute que le théorème 4.4.16 est valable dans une généralité bien plus grande. Malheureursement, l'axiomatique introduite dans la sous-section 4.2 ne suffit pas pour énoncer un résultat général : il aurait fallu introduire de nouveaux axiomes afin de pouvoir reproduire l'argument pour le « Cas 1 » de la preuve du théorème 4.2.18 dans un contexte abstrait. Nous avons renoncé à cette tâche.

(a) *Soit $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X$ un hyper-recouvrement générique et soit $X' \longrightarrow X$ un morphisme admissible. Alors, $f'_\bullet : Y_\bullet \times_X X' \longrightarrow X'$ est un hyper-recouvrement générique.*

(b) *Soit $h_\bullet : V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ un hyper-recouvrement générique relatif et soit $U'_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ un morphisme admissible en chaque degré. Alors, $h'_\bullet : V_\bullet \times_{U_\bullet} U'_\bullet \longrightarrow U'_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique relatif.*

Démonstration. — C'est immédiat. ∎

Proposition 4.4.5. — *Soit $U_\bullet$ un objet semi-simplicial de $\mathcal{C}$. Soit $h_\bullet : V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ un morphisme q-élémentaire, pour un $q \in \mathbb{N}$, tel que le morphisme $V_q \longrightarrow U_q$ est admissible et dominant. Alors, $h_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique relatif.*

Démonstration. — En effet, le morphisme

$$V_p \longrightarrow U_p \times_{(\mathrm{cosk}_{p-1}U)_p} (\mathrm{cosk}_{p-1}V)_p$$

est un isomorphisme pour $p \neq q$ et, pour $p = q$, il est donné par $V_q \longrightarrow U_q$. ∎

Définition 4.4.6. — *Gardons les notations et les hypothèses de la proposition 4.4.5. Le morphisme $h_\bullet : V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ est appelé l'*hyper-recouvrement générique q-élémentaire *associé au morphisme admissible et dominant $V_q \longrightarrow U_q$.*

Lemme 4.4.7. — *Soit $h_\bullet : V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ un hyper-recouvrement générique relatif. Alors, $h_\bullet$ est la composition infinie de la tour*

$$\cdots \longrightarrow U \times_{\mathrm{cosk}_p U} \mathrm{cosk}_p V \longrightarrow U \times_{\mathrm{cosk}_{p-1} U} \mathrm{cosk}_{p-1} V \longrightarrow \cdots \longrightarrow U \times_{\mathrm{cosk}_0 U} \mathrm{cosk}_0 V \longrightarrow U$$

où le p-ième morphisme de transition

$$U \times_{\mathrm{cosk}_p U} \mathrm{cosk}_p V \longrightarrow U \times_{\mathrm{cosk}_{p-1} U} \mathrm{cosk}_{p-1} V$$

est un hyper-recouvrement générique p-élémentaire.

Démonstration. — On utilise le lemme 4.3.14 en on remarque que le morphisme p-élémentaire de l'énoncé est associé au morphisme $V_p \longrightarrow U_p \times_{(\mathrm{cosk}_{p-1}U)_p} (\mathrm{cosk}_{p-1}V)_p$ qui est admissible et dominant car $h_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique relatif. ∎

Lemme 4.4.8. — *Soit $h_\bullet : V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ un hyper-recouvrement générique relatif. Alors, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, le morphisme $(\mathrm{cosk}_p V)_q \longrightarrow (\mathrm{cosk}_p U)_q$ est admissible.*

Démonstration. — Vu le lemme 4.4.7, il suffit de traiter le cas où $h_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique r-élémentaire, pour un certain $r \in \mathbb{N}$, associé à un morphisme admissible et dominant $V_r \longrightarrow U_r$. (En fait, seule l'admissibilité servira.) On suppose que $r \leqslant p$ car sinon il n'y a rien à démontrer.

Le morphisme $\mathrm{cosk}_p V \longrightarrow \mathrm{cosk}_p U$ est encore un hyper-recouvrement générique r-élémentaire associé à $V_r \longrightarrow U_r$. Il est donc suffisant de montrer que $V_q \longrightarrow U_q$ est admissible sachant que $V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique r-élémentaire. On peut supposer que $r \leqslant q$. Le résultat recherché découle de la proposition 4.3.15 et du fait que les morphismes admissibles sont stables par changement de base et composition. (On note que ceci ne s'applique pas aux morphismes dominants pour lesquels la stabilité par changement de base n'est pas toujours satisfaite.) ∎

Proposition 4.4.9. — *Soient $h_\bullet : V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ et $k_\bullet : W_\bullet \longrightarrow V_\bullet$ deux hyper-recouvrements génériques relatifs. Alors $h_\bullet \circ k_\bullet : W_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ est aussi un hyper-recouvrement générique relatif.*

Démonstration. — En effet, le morphisme $W_p \longrightarrow U_p \times_{(\mathrm{cosk}_{p-1}U)_p} (\mathrm{cosk}_{p-1}W)_p$ se factorise de la manière suivante :

$$W_p \longrightarrow V_p \times_{(\mathrm{cosk}_{p-1}V)_p, k} (\mathrm{cosk}_{p-1}W)_p \longrightarrow U_p \times_{(\mathrm{cosk}_{p-1}U)_p, h\circ k} (\mathrm{cosk}_{p-1}W)_p.$$

Le premier morphisme est admissible et dominant car $k_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique relatif. Il en est de même du second morphisme. En effet, c'est le changement de base du morphisme

$$V_p \longrightarrow U_p \times_{(\mathrm{cosk}_{p-1}U)_p, h} (\mathrm{cosk}_{p-1}V)_p,$$

qui est admissible et dominant car $h_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique relatif, suivant le morphisme $(\mathrm{cosk}_{p-1}W)_p \longrightarrow (\mathrm{cosk}_{p-1}V)_p$, qui est admissible d'après le lemme 4.4.8. ∎

Corollaire 4.4.10. — *Soient $Y'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ et $Y''_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ deux hyper-recouvrements génériques relatifs. Alors, $Y'_\bullet \times_{Y_\bullet} Y''_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ est aussi un hyper-recouvrement générique relatif.*

Démonstration. — D'après le lemme 4.4.8, le morphisme $Y'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ est admissible en chaque degré. D'après le lemme 4.4.4(b), la projection $\mathrm{pr}_1 : Y'_\bullet \times_{Y_\bullet} Y''_\bullet \longrightarrow Y'_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique relatif. La proposition 4.4.9 alors permet de conclure. ■

On aura besoin d'une variante amplifiée du corollaire précédent.

Corollaire 4.4.11. — *Supposons donné un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} Y_\bullet \arrow[r, "b_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"] & T_\bullet \arrow[d, "p_\bullet"] & Y'_\bullet \arrow[l, "b'_\bullet"'] \arrow[d, "f'_\bullet"] \\ X \arrow[r, "a"] & S & X' \arrow[l, "a'"'] \end{tikzcd}$$

tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) a et a' sont admissibles ;

(ii) $(f_\bullet, b_\bullet) : Y_\bullet \longrightarrow X \times_S T_\bullet$ et $(f'_\bullet, b'_\bullet) : Y'_\bullet \longrightarrow X' \times_S T_\bullet$ sont des hyper-recouvrements génériques relatifs.

Alors, le morphisme évident

$$Y_\bullet \times_{T_\bullet} Y'_\bullet \longrightarrow (X \times_S X') \times_S T_\bullet \tag{4.24}$$

est un hyper-recouvrement générique relatif.

Démonstration. — D'après le lemme 4.4.8, le morphisme $(f'_\bullet, b'_\bullet) : Y'_\bullet \longrightarrow X' \times_S T_\bullet$ est admissible en chaque degré. Puisqu'il en est de même de la projection $\mathrm{pr}_2 : X' \times_S T_\bullet \longrightarrow T_\bullet$ (car a' est admissible), on déduit que le morphisme $b'_\bullet : Y'_\bullet \longrightarrow T_\bullet$ est aussi admissible en chaque degré.

Le morphisme (4.24) est la composition de

$$Y_\bullet \times_{T_\bullet} Y'_\bullet \longrightarrow (X \times_S T_\bullet) \times_{T_\bullet} Y'_\bullet = X \times_S Y'_\bullet \longrightarrow (X \times_S X') \times_S T_\bullet. \tag{4.25}$$

Le premier morphisme dans (4.25) est le changement de base de l'hyper-recouvrement générique relatif $(f_\bullet, b_\bullet) : Y_\bullet \longrightarrow X \times_S T_\bullet$ suivant le morphisme $b'_\bullet : Y'_\bullet \longrightarrow T_\bullet$ qui est admissible en chaque degré d'après la discussion précédente. Le second morphisme est le changement de base de l'hyper-recouvrement générique relatif $(f'_\bullet, b'_\bullet) : Y'_\bullet \longrightarrow X' \times_S T_\bullet$ suivant le morphisme admissible $a : X \longrightarrow S$. Le lemme 4.4.4(b) et la proposition 4.4.9 permettent de conclure. ■

Lemme 4.4.12. —

(a) *Soit $Y_\bullet \longrightarrow X$ un hyper-recouvrement générique. Alors, pour tout $q \geqslant -1$, $\mathrm{cosk}_q^X Y \longrightarrow X$ est aussi un hyper-recouvrement générique.*

(b) *Soit $V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ un hyper-recouvrement générique relatif. Alors, pour tout $q \geqslant -1$, les morphismes*

$$\mathrm{cosk}_q V \longrightarrow \mathrm{cosk}_q U, \quad V \longrightarrow U \times_{\mathrm{cosk}_q U} \mathrm{cosk}_q V \quad \textit{et} \quad U \times_{\mathrm{cosk}_q U} \mathrm{cosk}_q V \longrightarrow U$$

sont des hyper-recouvrements génériques relatifs.

Démonstration. — Il suffit bien entendu de traiter la partie (b). Les deux derniers morphismes sont des compositions partielles, l'une infinie et l'autre finie, de la tour d'hyper-recouvrements génériques élémentaires du lemme 4.4.7. La proposition 4.4.9 permet de conclure pour ces deux morphismes.

Il reste à traiter le cas de $\mathrm{cosk}_q V \longrightarrow \mathrm{cosk}_q U$. On utilise encore le lemme 4.4.7 et la proposition 4.4.9 mais, cette fois, pour se ramener au cas où $V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique p-élémentaire. Dans ce cas, le morphisme $\mathrm{cosk}_q V \longrightarrow \mathrm{cosk}_q U$ est un isomorphisme pour $q \leqslant p-1$ et il est p-élémentaire associé à $V_p \longrightarrow U_p$ pour $q \geqslant p$. Puisque $V_p \longrightarrow U_p$ est admissible et couvrant, ceci permet de conclure. ■

Proposition 4.4.13. — *Soit $Y_\bullet \longrightarrow X$ un hyper-recouvrement générique d'un objet X de $\mathcal{C}$.*

(a) *Pour toute injection croissante $r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{q}}$ dans $\mathbf{\Delta}'$, le morphisme $r^* : Y_q \longrightarrow Y_p$ est admissible et dominant.*

(b) Si $Y'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ un hyper-recouvrement générique relatif de $Y_\bullet$, alors le morphisme $Y'_p \longrightarrow Y_p$ est admissible et dominant pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Démonstration. — Vu le lemme 4.4.7, pour démontrer (a), il suffit d'établir l'assertion suivante : si la propriété (a) est vérifiée pour un objet semi-simplicial $Y_\bullet$ et si $Y'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique élémentaire, alors la propriété (a) est également satisfaite pour $Y'_\bullet$.

Supposons donc que $Y_\bullet$ vérifie (a) et donnons-nous un hyper-recouvrement générique e-élémentaire $Y'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$, avec $e \geqslant 0$. (Ainsi, le morphisme $Y'_e \longrightarrow Y_e$ est admissible et dominant.) Pour toute injection croissante $\underline{\mathbf{s}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{e}}$, le morphisme associé $Y'_e \longrightarrow Y'_s$ est admissible et dominant car c'est la composition de $Y'_e \longrightarrow Y_e \longrightarrow Y_s$. Pour montrer que $Y'_\bullet$ vérifie (a), peut donc supposer que $e \leqslant p \leqslant q$. D'après la proposition 4.3.15, on a

$$Y'_p \simeq \prod_{a:\underline{\mathbf{e}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p}}} (Y'_e \times_{Y_e,a^*} Y_p/Y_p) \qquad \text{et} \qquad Y'_q \simeq \prod_{b:\underline{\mathbf{e}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{q}}} (Y'_e \times_{Y_e,b^*} Y_q/Y_q).$$

Le morphisme qui nous intéresse admet la décomposition suivante :

$$\prod_{b:\underline{\mathbf{e}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{q}}} (Y'_e \times_{Y_e,b^*} Y_q/Y_q) \longrightarrow \prod_{a:\underline{\mathbf{e}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p}}} (Y'_e \times_{Y_e,a^*\circ r^*} Y_q/Y_q) \longrightarrow \prod_{a:\underline{\mathbf{e}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p}}} (Y'_e \times_{Y_e,a^*} Y_p/Y_p). \tag{4.26}$$

Puisque les morphismes $a^* : Y_p \longrightarrow Y_e$ et $b^* : Y_q \longrightarrow Y_e$ sont admissibles, les projections

$$Y'_e \times_{Y_e,a^*} Y_p \longrightarrow Y_p \qquad \text{et} \qquad Y'_e \times_{Y_e,b^*} Y_q \longrightarrow Y_q$$

sont admissibles et dominantes. Le premier morphisme dans (4.26) est une projection partielle (sur les facteurs correspondants aux injections b telles que $b(\underline{\mathbf{e}}) \subset r(\underline{\mathbf{p}})$) ; il est donc admissible et dominant. Le second morphisme dans (4.26) est un changement de base du morphisme admissible et dominant $Y_q \longrightarrow Y_p$ suivant le morphisme admissible $\prod_a (Y'_e \times_{Y_e,a^*} Y_p/Y_p) \longrightarrow Y_p$; il est donc aussi admissible et dominant. Ceci termine la preuve de (a).

Passons maintenant à (b). Vu le lemme 4.4.7, on peut supposer (en utilisant la proposition 4.4.9) que $Y'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ est e-élémentaire. Si $p < e$ il n'y a rien à démontrer, et on peut supposer que $p \geqslant e$. Le résultat recherché découle de la proposition 4.3.15 et du fait, démontré ci-dessus, que $a^* : Y_p \longrightarrow Y_e$ est admissible pour toute injection croissante $a : \underline{\mathbf{e}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{p}}$. ∎

Lemme 4.4.14. — *Soit $Y_\bullet \longrightarrow X$ un hyper-recouvrement générique d'un objet X de $\mathcal{C}$. Alors, le morphisme évident $Y_{1+\bullet} \longrightarrow Y_0 \times_X Y_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique relatif. De plus, $Y_{1+\bullet} \longrightarrow Y_0$ est un hyper-recouvrement générique de Y_0.*

Démonstration. — La seconde assertion découle de la première grâce à la proposition 4.4.9. Pour la première assertion, nous allons vérifier que le morphisme

$$Y_{1+p} \longrightarrow (\mathrm{cosk}^{Y_0}_{p-1} Y_{1+\bullet})_p \times_{(\mathrm{cosk}^{Y_0}_{p-1}(Y_0\times_X Y_\bullet))_p} (Y_0 \times_X Y_p)$$

est admissible et dominant pour tout $p \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathrm{cosk}^{Y_0}_{p-1}(Y_0 \times_X Y) \simeq Y_0 \times_X \mathrm{cosk}^X_{p-1} Y$, on peut réécrire ce morphisme de la manière suivante :

$$Y_{1+p} \longrightarrow (\mathrm{cosk}^{Y_0}_{p-1} Y_{1+\bullet})_p \times_{(\mathrm{cosk}^X_{p-1} Y_\bullet)_p} Y_p. \tag{4.27}$$

D'après la proposition 4.3.9, le morphisme (4.27) s'identifie au morphisme $Y_{p+1} \longrightarrow (\mathrm{cosk}^X_p Y)_{p+1}$ qui est admissible et dominant car $Y_\bullet \longrightarrow X$ est un hyper-recouvrement générique. ∎

Proposition 4.4.15. — *Soit $Y_\bullet \longrightarrow X$ un hyper-recouvrement générique d'un objet X de $\mathcal{C}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme*

$$\check{C}_n(Y_{1+\bullet}/Y_\bullet) \longrightarrow \check{C}_n(Y_0/X)$$

est un hyper-recouvrement générique de $\check{C}_n(Y_0/X)$.

Démonstration. — D'après le lemme 4.4.14, le morphisme $Y_{1+\bullet} \longrightarrow Y_0 \times_X Y_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique relatif. Le corollaire 4.4.11 entraîne, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que le morphisme

$$\check{C}_n(Y_{1+\bullet}/Y_\bullet) \longrightarrow \check{C}_n(Y_0/X) \times_X Y_\bullet$$

est un hyper-recouvrement générique relatif. Puisque le morphisme, $\check{C}_n(Y_0/X) \longrightarrow X$ est admissible, il s'ensuit que $\check{C}_n(Y_0/X) \times_X Y_\bullet \longrightarrow \check{C}_n(Y_0/X)$ est un hyper-recouvrement générique de l'objet $\check{C}_n(Y_0/X)$. On conclut à l'aide de la proposition 4.4.9. ■

Nous arrivons maintenant au résultat principal de cette sous-section. Il s'agit de la généralisation suivante du théorème 4.2.18. Ci-dessous, on spécialise à la situation de l'exemple 4.4.2(a) ; plus précisément, on prendra $\mathcal{C} = (\mathrm{Fttf}^{\Delta}/X)^{\mathrm{qc}}$.

Théorème 4.4.16. — *Soit X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma quasi-compact admettant un nombre fini de composantes irréductibles. Soit $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X$ un hyper-recouvrement générique de X au sens suivant : pour tout $p \in \mathbb{N}$, le morphisme $Y_p \longrightarrow (\mathrm{cosk}^X_{p-1} Y)_p$ est de type fini, en involution et dominant. Soit $F^\bullet$ un complexe de pré-faisceaux de Λ-modules sur* Fttf^{Δ}/X. *On suppose que $F^\bullet$ est projectivement* fttf*-fibrant et borné à gauche. Alors, le morphisme évident*

$$F^\bullet(\eta_X) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{Y_\bullet}) \tag{4.28}$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — On divise la preuve en deux étapes. Dans la première étape, on obtient une réduction qui n'est pas strictement nécessaire, mais qui permet de simplifier l'exposition. La seconde étape est similaire à la troisième étape de la preuve de la proposition 4.1.8 ; toutefois, on fera appel, d'une manière essentielle, au théorème 4.2.18.

Étape 1. — On montre ici qu'il suffit de prouver le théorème lorsque $F^\bullet = I[0]$, avec I un faisceau projectivement fttf-fibrant (ce qui revient à dire que I est un faisceau fttf tel que les préfaisceaux $\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(-; I)$ sont nuls pour $i \geqslant 1$).

Puisque le complexe $F^\bullet$ est borné à gauche, il existe une équivalence τ-locale $F^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ avec $I^\bullet$ un complexe de faisceaux injectifs borné à gauche. Puisque le complexe $F^\bullet$ est projectivement τ-fibrant, le morphisme $F^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux. Il revient donc au même de démontrer le théorème pour $F^\bullet$ ou pour $I^\bullet$.

On peut écrire $I^\bullet$ comme la limite de ses tronqués bêtes : $I^\bullet = \lim_{n \in \mathbb{N}} {}^nJ^\bullet$ avec ${}^nJ = \sigma^{\leqslant n} I$. De plus, cette limite est une limite homotopique. Une inspection facile donne alors

$$I^\bullet(\eta_X) = \lim_{n \in \mathbb{N}} {}^nJ^\bullet(\eta_X) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tot}\, I^\bullet(\eta_{Y_\bullet}) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Tot}\, {}^nJ^\bullet(\eta_{Y_\bullet}),$$

et ces limites sont aussi des limites homotopiques. Il est donc suffisant de montrer le théorème pour les ${}^nJ^\bullet$. Autrement dit, on peut supposer que $I^\bullet$ est borné. Un récurrence sur la longueur de $I^\bullet$ nous ramène enfin au cas d'un complexe concentré en un seul degré.

Étape 2. — Dans cette étape, nous démontrons le théorème dans le cas où $F = I[0]$ avec I un faisceau projectivement τ-fibrant. Étant donné un hyper-recouvrement générique $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X$, il sera pratique de noter Y^+ le Δ-schéma semi-simplicial augmenté donné par $Y^+_{-1} = X$ et $Y^+_r = Y_r$ pour $r \geqslant 0$.

On procède par l'absurde. On peut donc trouver un hyper-recouvrement générique $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X$ et un faisceau projectivement τ-fibrant I sur Fttf^{Δ}/X tels que le complexe

$$I(\eta_{Y^+_\bullet}) \ : \qquad [0 \longrightarrow I(\eta_X) \longrightarrow I(\eta_{Y_0}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow I(\eta_{Y_n}) \longrightarrow \cdots],$$

où $I(\eta_X)$ est placé en degré cohomologique -1, n'est pas acyclique. On supposera que $f_\bullet$ et I sont choisis de sorte que $\mathrm{H}^r(I(\eta_{Y^+_\bullet})) \neq 0$ avec $r \geqslant -1$ minimal (lorsque $f_\bullet$ et I varient).

Considérons le bicomplexe $D^{\bullet,\bullet} = I(\eta_{\check{C}_\bullet(Y^+_{1+\bullet}/Y^+_\bullet)})$ donné par :

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
I(\eta_{\check{C}_m(Y_0/X)}) \arrow[r] \arrow[u] & I(\eta_{\check{C}_m(Y_1/Y_0)}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & I(\eta_{\check{C}_m(Y_{1+n}/Y_n)}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] & \\
I(\eta_{\check{C}_1(Y_0/X)}) \arrow[r] \arrow[u] & I(\eta_{\check{C}_1(Y_1/Y_0)}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & I(\eta_{\check{C}_1(Y_{1+n}/Y_n)}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
I(\eta_{Y_0}) \arrow[r] \arrow[u] & I(\eta_{Y_1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & I(\eta_{Y_{1+n}}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

avec $I(\eta_{Y_0})$ placé en bidegrés cohomologiques $(-1, 0)$. D'après la proposition 4.4.13(a), les Δ-morphismes $Y_{1+n} \longrightarrow Y_n$ sont de type fini, en involution et dominants. Grâce au théorème 4.2.18, les colonnes $D^{n,\bullet}$ de ce bicomplexe sont donc quasi-isomorphes à $I(\eta_{Y_n})$ (avec $Y_{-1} = X$). Il en découle un quasi-isomorphisme

$$I(\eta_{Y^+_\bullet}) \xrightarrow{\text{q.i.}} \text{Tot } D^{\bullet,\bullet}. \tag{4.29}$$

Par ailleurs, d'après la proposition 4.4.15, les morphismes $\check{C}_m(Y_{1+\bullet}/Y_\bullet) \longrightarrow \check{C}_m(Y_0/X)$ sont des hyper-recouvrements génériques. De plus, la restriction de I au petit site fttf du Δ-schéma $\check{C}_m(Y_0/X)$ est encore un faisceau projectivement fttf-fibrant. Puisque r a été choisi minimal, nous déduisons que les lignes $D^{\bullet,m}$ de notre bicomplexe n'ont pas de cohomologie en degrés strictement inférieurs à r, i.e., $\mathrm{H}^s(D^{\bullet,m}) = 0$ pour $s < r$. Un argument de suite spectral montre alors que le morphisme évident

$$\mathrm{H}^r(\text{Tot } D) \longrightarrow \mathrm{H}^r(I(\eta_{Y^+_{1+\bullet}}))$$

est injectif. Vu le quasi-isomorphisme (4.29), il en découle que le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^r(I(\eta_{Y^+_\bullet})) \longrightarrow \mathrm{H}^r(I(\eta_{Y^+_{1+\bullet}}))$$

est injectif. Or, le morphisme de complexes $I(\eta_{Y^+_\bullet}) \longrightarrow I(\eta_{Y^+_{1+\bullet}})$ est homotope au morphisme nul ; une homotopie est donnée par les morphismes identiques. Il en découle que $\mathrm{H}^r(I(\eta_{Y^+_\bullet}))$ est nul, ce qui contredit notre hypothèse de départ. ∎

4.5. Un résultat remarquable. —

Le but de cette sous-section est d'établir le théorème 4.5.1 ci-dessous qui servira, dans la sous-section 4.6, pour construire le type d'homotopie feuilletée générique. On donnera ensuite quelques compléments qui serviront plus tard. (Précisons qu'un morphisme de schémas $T \longrightarrow S$ est dit génériquement géométriquement intègre si ses fibres au-dessus des points géométriques génériques de S sont des schémas intègres.)

Théorème 4.5.1. — *Les propriétés suivantes sont satisfaites pour tout $p \in \mathbb{N}$.*

(A_p) *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et soit $X_\bullet$ un k-schéma semi-simplicial p-tronqué vérifiant les conditions suivantes.*

(i) Pour tout $0 \leqslant m \leqslant p$, le morphisme $X_m \longrightarrow (\mathrm{cosk}^k_{m-1} X)_m$ est plat et dominant.

(ii) Pour tout $0 \leqslant m \leqslant p$, X_m est le spectre d'une extension algébriquement close de k.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le schéma X_n est intègre.

(B_p) *Soit l/k une extension de corps algébriquement clos de caractéristique nulle et soit*

$$\begin{tikzcd} Y_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f_\bullet"] & \mathrm{Spec}(l) \arrow[d] \\ X_\bullet \arrow[r] & \mathrm{Spec}(k) \end{tikzcd}$$

un carré commutatif de schémas semi-simpliciaux. Supposons que $X_\bullet/k$ et $Y_\bullet/l$ sont p-tronqués et vérifient les conditions (i) et (ii) ci-dessus, et que le morphisme $f_\bullet$ vérifie la condition suivante.

(iii) Pour tout $0 \leqslant m \leqslant p$, le morphisme $Y_m \longrightarrow X_m \times_{(\mathrm{cosk}^k_{m-1}X)_m} (\mathrm{cosk}^l_{m-1}Y)_m$ est plat et dominant.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $f_n : Y_n \longrightarrow X_n$ est plat, dominant et génériquement géométriquement intègre.

Remarque 4.5.2. — Spécialisons la situation 4.4.1 comme suit : $\mathcal{C}$ est la catégorie des schémas quasi-compacts, les morphismes admissibles sont les morphismes plats et « dominant » admet la signification usuelle. Alors, la propriété (i) ci-dessus affirme que $X_\bullet \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ est un hyper-recouvrement générique au sens de la définition 4.4.3(a). De même, la propriété (iii) ci-dessus affirme que $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet \otimes_k l$ est un hyper-recouvrement générique relatif au sens de la définition 4.4.3(b). Dans cette sous-section, les « hyper-recouvrements génériques » seront toujours pris au sens de cette spécialisation de la situation 4.4.1. □

Lemme 4.5.3. — *La propriété (A_0) est vraie.*

Démonstration. — Le schéma $X_n = (X_0/k)^{n+1}$ est intègre car X_0 est géométriquement intègre sur k. ■

Lemme 4.5.4. — *Pour tout $p \geqslant 1$, on a l'implication $(\mathrm{B}_{p-1}) \Rightarrow (\mathrm{A}_p)$.*

Démonstration. — Supposons que la propriété (B_{p-1}) est connue et montrons que les X_n sont intègres par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $n \leqslant p$, il n'y a rien à montrer. Si $n > p$, nous avons d'après la proposition 4.3.9 un isomorphisme canonique

$$X_n \simeq (\mathrm{cosk}^{X_0}_{p-1}X_{1+\bullet})_{n-1} \times_{(\mathrm{cosk}^k_{p-1}X_\bullet)_{n-1}} X_{n-1}. \tag{4.30}$$

Les schémas semi-simpliciaux $\mathrm{cosk}^k_{p-1}X_\bullet$ et $\mathrm{cosk}^{X_0}_{p-1}X_{1+\bullet}$ satisfont aux conditions (i) et (ii) de (A_{p-1}) (avec $l = \mathcal{O}(X_0)$ pour le second), et le morphisme

$$d_0 : \mathrm{cosk}^{X_0}_{p-1}X_{1+\bullet} \longrightarrow \mathrm{cosk}^k_{p-1}X_\bullet \tag{4.31}$$

satisfait à la condition (iii) de (B_{p-1}). (En effet, les propriétés (i) et (ii) pour $\mathrm{cosk}^k_{p-1}X_\bullet$ sont évidentes. Il en est de même de la propriété (ii) pour $\mathrm{cosk}^{X_0}_{p-1}X_{1+\bullet}$ et la propriété (i) découle aussitôt des lemmes 4.4.14 et 4.4.12(a). Enfin, la propriété (iii) pour le morphisme 4.31 découle des lemmes 4.4.14 et 4.4.12(b).)

D'après la propriété (B_{p-1}) appliquée à (4.31), le morphisme $(\mathrm{cosk}^{X_0}_{p-1}X_{1+\bullet})_{n-1} \longrightarrow (\mathrm{cosk}^k_{p-1}X_\bullet)_{n-1}$ est plat, dominant et génériquement géométriquement intègre. Vu l'isomorphisme (4.30) et étant donné que le morphisme $X_{n-1} \longrightarrow (\mathrm{cosk}^k_{p-1}X_\bullet)_{n-1}$ est plat (utiliser le lemme 4.4.8), il s'ensuit que le morphisme $d_0 : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ est plat, dominant et génériquement géométriquement intègre. La recurrence sur n permet alors de conclure que X_n est intègre. ■

Corollaire 4.5.5. — *Pour prouver le théorème 4.5.1 il suffit de montrer l'implication $(\mathrm{A}_p) \Rightarrow (\mathrm{B}_p)$ pour tout $p \geqslant 0$.*

Lemme 4.5.6. — *Soit $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ un morphisme de schémas semi-simpliciaux tel que $X_\bullet/k$ et $Y_\bullet/l$ vérifient les conditions (i) et (ii) de (A_p), et $f_\bullet$ vérifie la condition (iii) de (B_p). Il existe alors un k-schéma semi-simplicial augmenté $A_\bullet$ qui est un espace affine (possiblement de dimension infinie) en chaque degré ainsi qu'un triangle commutatif de k-schémas semi-simpliciaux augmentés (X et Y étant augmentés de* $\mathrm{Spec}(k)$ *et* $\mathrm{Spec}(l)$*)*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "e"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & X \times_k A \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & X \end{tikzcd}$$

tel que le morphisme e est pro-étale en chaque degré.

Démonstration. — On note A_{-1} le spectre d'une sous-k-algèbre de l/k engendrée par une famille maximale d'éléments algébriquement indépendants sur k. En particulier, le morphisme $\mathrm{Spec}(l) \longrightarrow A_{-1}$ est pro-étale. Nous allons construire une suite d'hyper-recouvrements génériques relatifs

$$A_\bullet^{(p)} \longrightarrow A_\bullet^{(p-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_\bullet^{(0)} \longrightarrow A_\bullet^{(-1)} = A_{-1}$$

et, pour $-1 \leqslant q \leqslant p$, des morphismes pro-étales en chaque degré

$$Y_\bullet^{(q)} \longrightarrow (X \times_k A^{(q)})_\bullet$$

avec $Y_\bullet^{(q)} = X \times_{\mathrm{cosk}_q^k} \mathrm{cosk}_q^l Y$.

Soit $0 \leqslant q \leqslant p$ et supposons que $A_\bullet^{(q-1)}$ est construit. Considérons le morphisme $Y_q \longrightarrow X_q \times_k A_q^{(q-1)}$. Il admet la factorisation

$$Y_q \longrightarrow Y_q^{(q-1)} \longrightarrow X_q \times_k A_q^{(q-1)}$$

qui montre aussitôt que ce morphisme est plat et dominant. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille maximale d'éléments de $\mathcal{O}(Y_q)$ qui est algébriquement indépendante sur le corps des fonctions rationnelles de $X_q \times_k A_q^{(q-1)}$. (On rappelle que $\mathcal{O}(Y_q)$ est un corps algébriquement clos.) On prend alors pour $A_\bullet^{(q)}$ la source du morphisme q-élémentaire $A_\bullet^{(q)} \longrightarrow A_\bullet^{(q-1)}$ associé à la projection $A_q^{(q-1)}[x_i;\ i \in I] \longrightarrow A_q^{(q-1)}$. Puisque $Y_\bullet^{(q)} \longrightarrow Y_\bullet^{(q-1)}$ est q-élémentaire, le morphisme de k-schémas semi-simpliciaux $Y_q \longrightarrow X_q \times_k A_q^{(q-1)}[x_i;\ i \in I]$ induit un morphisme $Y_\bullet^{(q)} \longrightarrow (X \times_k A^{(q)})_\bullet$ qui est pro-étale en chaque degré. Enfin, on pose $A_\bullet = A_\bullet^{(p)}$. Les propriétés requises découlent aussitôt de la construction. ■

Démonstration du théorème 4.5.1. — D'après le corollaire 4.5.5, nous devons montrer que $(\mathrm{A}_p) \Rightarrow (\mathrm{B})_p$. On fixe donc un entier $p \geqslant 0$ et on suppose que la propriété (A_p) est connue. On se donne un morphisme de schémas semi-simpliciaux $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ tel que $X_\bullet/k$ et $Y_\bullet/l$ vérifient les conditions (i) et (ii) de (A_p), et $f_\bullet$ vérifie la condition (iii) de (B_p). Si $n \leqslant p$, les morphismes $f_n : Y_n \longrightarrow X_n$ sont géométriquement intègres puisque X_n et Y_n sont des spectres de corps algébriquement clos. Dans la suite, on supposera que $n \geqslant p+1$.

D'après (A_p), les schémas X_n et Y_n sont intègres. Remarquons aussi que X_n et Y_n sont des schémas affines, et que le morphisme $f_n : Y_n \longrightarrow X_n$ est dominant et pro-lisse (utiliser par exemple le lemme 4.5.6). Ainsi, pour montrer que f_n est génériquement géométriquement intègre, il suffit de montrer que si $\phi \in \mathcal{O}(Y_n)$ est algébrique sur le corps des fonctions rationnelles de X_n, alors $\phi \in \mathcal{O}(X_n)$. (Ici et dans la suite, on identifie $\mathcal{O}(X_n)$ à une sous-algèbre de $\mathcal{O}(Y_n)$.) Puisque le schéma semi-simplicial $Y_\bullet$ est p-tronqué, il existe un ensemble fini I et des fonctions $\phi_{i,r} \in \mathcal{O}(Y_p)$, pour $i \in I$ et $r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$, telles que

$$\phi = \sum_{i\in I} \prod_{r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}} \phi_{i,r} \circ r^*. \tag{4.32}$$

Dans la suite de la preuve, on fixe un k-schéma semi-simplicial $A_\bullet$ et un triangle commutatif comme dans le lemme 4.5.6. On pose $Q = X \times_k A$ et on note $g_\bullet : Q_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ la projection sur le premier facteur. (On continue de noter $e_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ le morphisme pro-étale tel que $f_\bullet = g_\bullet \circ e_\bullet$.) On peut trouver des factorisations

$$\begin{tikzcd} Y_p \arrow[r] \arrow[dr, "e_p"'] & U \arrow[d, "u"] \\ & Q_p \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y_n \arrow[r] \arrow[dr, "e_n"'] & V \arrow[d, "v"] \\ & Q_n \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} \eta_{Y_n} \arrow[r] \arrow[dr, "f_n"'] & W \arrow[d, "w"] \\ & X_n \end{tikzcd}$$

avec U, V et W des schémas affines et intègres, u, v et w des morphismes étales (et donc de présentation finie), et tels que :

(1) la sous-algèbre $\mathcal{O}(U) \subset \mathcal{O}(Y_p)$ contient les fonctions $\phi_{i,r}$ et la sous-algèbre $\mathcal{O}(V) \subset \mathcal{O}(Y_n)$ contient la fonction ϕ ;

(2) pour tout $r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$, le morphisme $Y_n \longrightarrow U \times_{Q_p, r^*} Q_n$ se factorise (uniquement) par V ;

(3) le morphisme $V \longrightarrow X_n$ se factorise (uniquement) par un morphisme $h : V \longrightarrow W$ tel que $\phi \in \mathcal{O}(V)$ appartient à la sous-algèbre $\mathcal{O}(W) \subset \mathcal{O}(V)$.

D'après la propriété (2), pour tout $r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$, il existe un unique morphisme $r^* : V \longrightarrow U$ rendant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
Y_n \arrow[r] \arrow[d, "r^*"] & V \arrow[r, "v"] \arrow[d, "r^*"] & Q_n \arrow[d, "r^*"] \\
Y_p \arrow[r] & U \arrow[r, "u"] & Q_p
\end{tikzcd}$$

commutatif.

Rappelons à ce stade que $Q_n = X_n \times_k A_n$. Les sections du morphisme $g_n : Q_n \longrightarrow X_n$ induites par les points rationnels du k-schéma A_n sont denses dans Q_n. (Voir le lemme 2.3.9.) Il existe donc une telle section $t : X_n \longrightarrow Q_n$ qui rencontre l'image du morphisme v. Pour chaque $r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$, il existe une section $t_r : X_p \longrightarrow Q_p$ telle que $r^* \circ t = t_r \circ r^*$. (Elle est induite par le point rationnel du k-schéma A_p image du point rationnel utilisé pour t par le morphisme $r^* : A_n \longrightarrow A_p$.) En particulier, l'image de t_r rencontre celle du morphisme u. Fixons une composante connexe V' de $V \times_{Q_n, t} X_n$.

D'après ce qui précède, nous avons un morphisme $r^* \times r^* : V \times_{Q_n,t} X_n \longrightarrow U \times_{Q_p,t_r} X_p$ pour chaque $r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$. Or, le schéma X_p est le spectre d'un corps algébriquement clos et $u : U \longrightarrow Q_p$ est étale. Il s'ensuit que le but de ce morphisme est une somme disjointe de copies de X_p. Puisque $V' \subset V \times_{Q_n,t} X_n$ est connexe, il existe alors un unique morphisme $t'_r : X_p \longrightarrow U$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "v'"] \arrow[ddr, "r^*"] & V \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "r^*"] & \\
X_n \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "r^*"'] & Q_n \arrow[dr, "r^*"] & U \arrow[d, "u"] \\
& X_p \arrow[ur, "t'_r"] \arrow[r, "t_r"] & Q_p.
\end{tikzcd} \tag{4.33}$$

Fixons une clôture algébrique Ω du corps des fonctions rationnelles de Q_n et un plongement $\mathcal{O}(Y_n) \hookrightarrow \Omega$. Notons $\omega : \mathrm{Spec}(\Omega) \longrightarrow V$ le morphisme induit par l'inclusion $\mathcal{O}(V) \hookrightarrow \Omega$. Fixons aussi un morphisme de X_n-schémas $\omega' : \mathrm{Spec}(\Omega) \longrightarrow V'$ tel que le carré suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\Omega) \arrow[r, "\omega'"] \arrow[d, "\omega"] & V' \arrow[r, "t'"] & V \arrow[d, "h"] \\
V \arrow[rr, "h"] & & W
\end{tikzcd}$$

commute. (Un tel morphisme existe car $V' \longrightarrow W$ est étale et $h \circ \omega$ est un point géométrique générique de W.) Puisque $\phi \in \mathcal{O}(W)$, il s'ensuit que $\phi \circ \omega = \phi \circ t' \circ \omega'$ dans Ω. En utilisant l'égalité (4.32) et le diagramme commutatif (4.33), nous déduisons que

$$\phi \circ \omega = \sum_{i \in I} \prod_{r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}} \phi_{i,r} \circ r^* \circ t' \circ \omega' = \sum_{i \in I} \prod_{r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}} \phi_{i,r} \circ t'_r \circ r^* \circ v' \circ \omega'.$$

Or, $\phi_{i,r} \circ t'_r$ sont des fonctions régulières sur X_p. Il s'ensuit que le dernier membre dans les égalités ci-dessus est une fonction régulière sur X_n. C'est ce que nous cherchions à démontrer. ■

Pour des références futures, on inclut le complément suivant du théorème 4.5.1.

Proposition 4.5.7. — *Soit $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ un morphisme de schémas semi-simpliciaux tel que $X_\bullet/k$ et $Y_\bullet/l$ vérifient les conditions (i) et (ii) de (A_p), et $f_\bullet$ vérifie la condition (iii) de (B_p). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $Y_n \longrightarrow X_n$ est surjectif. (Vu le théorème 4.5.1, ce morphisme est donc fidèlement plat.)*

Démonstration. — La preuve repose sur la méthode utilisée pour démontrer le théorème 4.5.1.

On fixe un k-schéma semi-simplicial augmenté $A_\bullet$ et un triangle commutatif comme dans le lemme 4.5.6. On pose $Q = X \times_k A$, $K = \kappa_{A_{-1}}$ et $R = \mathrm{cosk}_p^K(\eta_Q)$ que l'on augmente de $\mathrm{Spec}(K)$. On dispose alors d'un morphisme de schémas semi-simpliciaux augmentés $Y_\bullet \longrightarrow R_\bullet$ qui est clairement fini étale en chaque degré. Or, Y_n et R_n sont intègres pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Pour Y_n, il s'agit de la première partie du théorème 4.5.1, alors que pour R_n c'est évident.) Il s'ensuit que le morphisme $Y_\bullet \longrightarrow R_\bullet$ est surjectif en chaque degré. Il est donc suffisant de montrer que $R_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est surjectif en chaque degré.

Pour ce faire, on se donne un sous-schéma semi-simplicial p-tronqué $V_\bullet \subset Q_\bullet$ ouvert et dense en chaque degré, et on montre que $V_n \longrightarrow X_n$ admet une section pour tout $n \geqslant p$. (Clairement, ceci suffit pour conclure.) Il sera utile de noter que l'ouvert $V_n \subset Y_n$ est l'intersection des ouverts $(r^*)^{-1}V_p$ pour $r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$.

Comme ci-dessus, on fixe une section $t : X_n \longrightarrow Q_n$ induite par un point k-rationnel du k-schéma A_n et qui rencontre l'ouvert V_n. Pour $r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$, on note $t_r : X_p \longrightarrow Q_p$ la section telle que $r^* \circ t = t_r \circ r^*$. Puisque $t(X_n) \cap V_n \neq \varnothing$, il s'ensuit que $t_r(X_p) \cap V_p \neq \varnothing$. Puisque X_p est le spectre d'un corps, on déduit que $t_r(X_p) \subset V_p$, i.e., que les sections $t_r : X_p \longrightarrow Q_p$ se factorisent par V_p pour tout $r : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$. La relation $r^* \circ t = t_r \circ r^*$ entraîne alors que la composition de

$$X_n \xrightarrow{t} Q_n \xrightarrow{r^*} Q_p$$

se factorise par V_p. Il s'ensuit que $t(X_n) \subset \bigcap_{r:\underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}} r^*(V_p) = V_n$ comme souhaité. ∎

Dans le reste de la sous-section, on donne quelques compléments techniques concernant la situation considérée dans le théorème 4.5.1.

Lemme 4.5.8. — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, l/k une extension et $\bar{l}/l$ un clôture algébrique de l.*

(a) On suppose donnés des hyper-recouvrements génériques p-tronqués $X_\bullet$ et $R_\bullet$ de $\mathrm{Spec}(k)$ *et* $\mathrm{Spec}(l)$, *ainsi qu'un morphisme $R_\bullet \longrightarrow X_\bullet \otimes_k l$ qui est hyper-recouvrement générique relatif. On suppose que, pour $0 \leqslant m \leqslant p$, X_m est le spectre d'une extension algébriquement close de k. Il existe alors un morphisme de $\bar{l}$-schémas semi-simpliciaux p-tronqués $\overline{R}_\bullet \longrightarrow R_\bullet \otimes_l \bar{l}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) le morphisme $\overline{R}_\bullet \longrightarrow R_\bullet$ est pro-étale (à nil-immersion près) en chaque degré et, pour $0 \leqslant m \leqslant p$, $\overline{R}_m$ est le spectre d'une extension algébriquement close de k ;

(2) $\overline{R}_\bullet \longrightarrow X_\bullet \otimes_k \bar{l}$ est un hyper-recouvrement générique relatif.

(b) On suppose donnés en plus un $\bar{l}$-schéma semi-simplicial $Y_\bullet$ ainsi qu'un morphisme $Y_\bullet \longrightarrow R_\bullet \otimes_l \bar{l}$. Pour $0 \leqslant m \leqslant p$, on suppose que Y_m est le spectre d'une extension algébriquement close de $\bar{l}$ et que le morphisme $Y_m \longrightarrow R_m$ est plat. Alors, on peut choisir $\overline{R}_\bullet \longrightarrow R_\bullet \otimes_l \bar{l}$ dans (a) de sorte qu'il factorise le morphisme $Y_\bullet \longrightarrow R_\bullet \otimes_l \bar{l}$.

Démonstration. — On traite d'abord (a). Pour $-1 \leqslant q \leqslant p$, on pose

$$R^{(q)} = X \times_{\mathrm{cosk}_q^k X} \mathrm{cosk}_q^l R.$$

D'après le lemme 4.3.14, le morphisme $R_\bullet \longrightarrow X_\bullet \otimes_k l$ admet la factorisation

$$R = R_\bullet^{(p)} \longrightarrow R_\bullet^{(p-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_\bullet^{(0)} \longrightarrow R_\bullet^{(-1)} = X_\bullet \otimes_k l$$

et le morphisme $R_\bullet^{(q)} \longrightarrow R_\bullet^{(q-1)}$ est q-élémentaire pour tout $0 \leqslant q \leqslant p$. De plus, puisque $R_\bullet \longrightarrow X_\bullet \otimes_k l$ est un hyper-recouvrement générique relatif, les morphismes $R_q = R_q^{(q)} \longrightarrow R_q^{(q-1)}$ sont plats et dominants.

Nous allons construire un diagramme commutatif de schémas semi-simpliciaux

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \overline{R}_\bullet^{(p)} & \longrightarrow & \overline{R}_\bullet^{(p-1)} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \overline{R}_\bullet^{(0)} & \longrightarrow & \overline{R}_\bullet^{(-1)} & = & X_\bullet \otimes_k \bar{l} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R_\bullet & = & R_\bullet^{(p)} & \longrightarrow & R_\bullet^{(p-1)} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & R_\bullet^{(0)} & \longrightarrow & R_\bullet^{(-1)} & = & X_\bullet \otimes_k l \end{array} \tag{4.34}$$

vérifiant les conditions suivantes :

— les morphismes verticaux sont pro-étales (aux nil-immersions près) ;
— pour $0 \leqslant q \leqslant p$, le morphisme $\overline{R}_\bullet^{(q)} \longrightarrow \overline{R}_\bullet^{(q-1)}$ est q-élémentaire ;
— pour $0 \leqslant r \leqslant q \leqslant p$, $\overline{R}_r^{(q)}$ est le spectre d'une extension algébriquement close de $\overline{l}$.

Soit $0 \leqslant q \leqslant p$ et supposons que $\overline{R}_\bullet^{(q-1)}$ est construit. Puisque le morphisme $\overline{R}_\bullet^{(q-1)} \longrightarrow X_\bullet \otimes_k \overline{l}$ est une composition de morphismes e-élémentaires avec $-1 \leqslant e \leqslant q-1$, on déduit que

$$\overline{R}^{(q-1)} \simeq X \times_{\mathrm{cosk}_{q-1}^k X} \mathrm{cosk}_{q-1}^{\overline{l}} \overline{R}^{(q-1)}.$$

Grâce à (B_{q-1}) et étant donné que le morphisme $X_q \longrightarrow (\mathrm{cosk}_{q-1}^k X)_q$ est plat, il s'ensuit que le schéma $\overline{R}_q^{(q-1)}$ est intègre. On peut donc trouver une extension algébriquement close de $\kappa(\overline{R}_q^{(q-1)})$ dont le spectre $\overline{R}_q^{(q)}$ s'insère dans un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{R}_q^{(q)} & \longrightarrow & \overline{R}_q^{(q-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_q & \longrightarrow & R_q^{(q-1)} \end{array}$$

tel que le morphisme vertical à gauche est pro-étale. (On utilise ici que la flèche horizontale inférieure est plate et dominante et que la flèche verticale à droite est pro-étale.) Appelons $\overline{R}_\bullet^{(q)}$ la source du morphisme q-élémentaire $\overline{R}_\bullet^{(q)} \longrightarrow \overline{R}_\bullet^{(q-1)}$ associé à $\overline{R}_q^{(q)} \longrightarrow \overline{R}_q^{(q-1)}$. Puisque $R_\bullet^{(q)} \longrightarrow R_\bullet^{(q-1)}$ est aussi q-élémentaire, le carré précédent induit un morphisme de schémas semi-simpliciaux $\overline{R}_\bullet^{(q)} \longrightarrow R_\bullet^{(q)}$ et il est immédiat que ce morphisme est pro-étale en chaque degré. Ceci termine la construction du diagramme commutatif (4.34). Clairement, $\overline{R}_\bullet = \overline{R}_\bullet^{(p)}$ convient pour (a).

On passe maintenant à (b). On pose $Y^{(q)} = X \times_{\mathrm{cosk}^k X} \mathrm{cosk}^{\overline{l}} Y$ et on construit, simultanément, $\overline{R}_\bullet^{(q)}$ et une factorisation $Y_\bullet^{(q)} \longrightarrow \overline{R}_\bullet^{(q)}$ de $Y_\bullet^{(q)} \longrightarrow R_\bullet^{(q)}$ par récurrence sur q. Lorsque $q = -1$, il n'y a rien à faire. Supposons que $0 \leqslant q \leqslant p$ et que $Y_\bullet^{(q-1)} \longrightarrow \overline{R}_\bullet^{(q-1)}$ est construit. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Y_q & & \xrightarrow{\quad (1) \quad} & & R_q \\ \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle (2)} \\ Y_q^{(q-1)} & \longrightarrow & \overline{R}_q^{(q-1)} & \xrightarrow{(3)} & R_q^{(q-1)}. \end{array}$$

Les morphismes (1) et (2) sont plats et (3) est pro-étale. Il s'ensuit que $Y_q \longrightarrow \overline{R}_q^{(q-1)}$ est plat et dominant. Si $A \subset \mathcal{O}(Y_q)$ désigne l'image de $\mathcal{O}(R_q)$ dans $\mathcal{O}(Y_q)$, on prend pour $\overline{R}_q^{(q)}$ le spectre de la clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(A)$ dans le corps algébriquement clos $\mathcal{O}(Y_q)$. En utilisant encore une fois que (3) est pro-étale, on voit que le morphisme $Y_q \longrightarrow \overline{R}_q^{(q-1)}$ se factorise d'une manière unique par un morphisme $\overline{R}_q^{(q)} \longrightarrow \overline{R}_q^{(q-1)}$. Il est maintenant aisé de conclure. ∎

Le résultat suivant généralise la propriété (B_p) du théorème 4.5.1.

Corollaire 4.5.9. — *Gardons les hypothèses du lemme 4.5.8 et supposons en plus que le schéma semi-simplicial $R_\bullet$ est intègre en chaque degré. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $R_n \longrightarrow X_n$ est fidèlement plat et génériquement géométriquement intègre.*

Démonstration. — Les morphismes $R_n \longrightarrow X_n$ sont plats d'après le lemme 4.4.8. Il reste donc à montrer qu'ils sont surjectifs et génériquement géométriquement intègres. Pour ce faire, on considère le morphisme $\overline{R}_\bullet \longrightarrow R_\bullet \otimes_l \overline{l}$ fourni par le lemme 4.5.8(a). Puisque les R_n sont supposés intègres, les morphismes pro-étales $\overline{R}_n \longrightarrow R_n$ sont dominants. Il est donc suffisant de montrer que les morphismes $\overline{R}_n \longrightarrow X_n$ sont surjectifs et génériquement géométriquement intègres. Ceci découle de la propriété (B_p) du théorème 4.5.1 et de la proposition 4.5.7. ∎

Corollaire 4.5.10. — *Supposons donné un morphisme de schémas semi-simpliciaux p-tronqués $f_\bullet$: $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ tel que $X_\bullet/k$ et $Y_\bullet/l$ vérifient les conditions (i) et (ii) de (A_p), et $f_\bullet$ vérifie la condition (iii) de*

(B_p). *Il existe alors une suite d'hyper-recouvrements génériques relatifs*

$$Y_\bullet = Y_\bullet^{[p]} \longrightarrow Y_\bullet^{[p-1]} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_\bullet^{[-1]} \longrightarrow X_\bullet \otimes_k l$$

vérifiant les conditions suivantes.

(i) Pour tout $-1 \leqslant q \leqslant p$ *et tout* $0 \leqslant r \leqslant p$, $Y_r^{[q]}$ *est le spectre d'une extension algébriquement close de* l.

(ii) Pour $0 \leqslant q \leqslant p$, $Y_r^{[q]} \longrightarrow Y_r^{[q-1]}$ *est un isomorphisme pour tout* $0 \leqslant r \leqslant q-1$.

(iii) On pose $E_\bullet^{[-1]} = X_\bullet \otimes_k l$ *et, pour* $0 \leqslant q \leqslant p$, *on note* $E_\bullet^{[q]}$ *la source du morphisme q-élémentaire* $E_\bullet^{[q]} \longrightarrow Y_\bullet^{[q-1]}$ *associé au morphisme* $Y_q \longrightarrow Y_q^{[q-1]}$. *Alors, pour* $-1 \leqslant q \leqslant p$, *le morphisme évident* $Y_\bullet^{[q]} \longrightarrow E_\bullet^{[q]}$ *est un hyper-recouvrement générique qui est pro-étale en tout degré.*

De plus, pour $-1 \leqslant q \leqslant p$, *le morphisme évident* $Y_\bullet^{[q]} \longrightarrow Y^{(q)} = X \times_{\mathrm{cosk}_q^k X} \mathrm{cosk}_q^l Y$ *est pro-étale en chaque degré.*

Démonstration. — On procède par récurrence pour construire les $Y_\bullet^{[q]}$ et vérifier les propriétés requises sauf celle qui affirme que $Y_\bullet^{[q]} \longrightarrow E_\bullet^{[q]}$ est un hyper-recouvrement générique relatif. Cette propriété sera établie dans une étape à part. (3)

Étape 1. — Le schéma semi-simplicial $Y_\bullet^{[-1]}$ s'obtient en appliquant le lemme 4.5.8 avec $R_\bullet = X_\bullet \otimes_k l$. (Notons que $Y_\bullet^{[-1]} \longrightarrow X_\bullet \otimes_k l$ est un hyper-recouvrement générique relatif mais que, à ce stade de la preuve, on ne sais pas qu'il en est de même du morphisme $Y_\bullet \longrightarrow Y_\bullet^{[-1]}$.) Soit $0 \leqslant q \leqslant p$ et supposons que les hyper-recouvrements génériques

$$Y_\bullet^{[q-1]} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_\bullet^{[-1]} \longrightarrow X_\bullet \otimes_k l$$

sont construits et que, pour $0 \leqslant r \leqslant q-1$, le morphisme $Y_\bullet \longrightarrow Y_\bullet^{[r]}$ induit un isomorphisme en degrés $\leqslant r$. Soit $E_\bullet^{[q]}$ comme dans l'énoncé. Puisque $Y_\bullet^{[q-1]} \longrightarrow Y^{(q-1)}$ est pro-étale en chaque degré, il en est de même de $E_\bullet^{[q]} \longrightarrow Y^{(q)}$. Grâce au lemme 4.4.8, on déduit que le morphisme évident $Y_\bullet \longrightarrow E_\bullet^{[q]}$ est plat en chaque degré. On peut maintenant appliquer le lemme 4.5.8 avec $R_\bullet = E_\bullet^{[q]}$ et en prenant $Y^{[q-1]}/l$ au lieu de X/k : on appelle $Y_\bullet^{[q]}$ le schéma semi-simplicial $\overline{R}_\bullet$ qui en résulte. (Autrement dit, pour $0 \leqslant r \leqslant p$, $\mathcal{O}(Y_r^{[q]})$ est la clôture algébrique dans $\mathcal{O}(Y_r)$ du corps des fractions de l'image de $\mathcal{O}(E_r^{[q]}) \longrightarrow \mathcal{O}(Y_r)$.) Il est clair que $Y_\bullet^{[q]}$, ainsi construit, possède les propriétés requises. Par construction, il est aussi clair que $Y_\bullet^{[p]} = Y_\bullet$. (Comme conséquence, on peut maintenant conclure que les morphismes $Y_\bullet \longrightarrow Y_\bullet^{[q]}$ sont des hyper-recouvrements génériques relatifs pour tout $-1 \leqslant q \leqslant p$.)

Étape 2. — Fixons un entier $-1 \leqslant q \leqslant p$ et vérifions que $Y_\bullet^{[q]} \longrightarrow E_\bullet^{[q]}$ est un hyper-recouvrement générique relatif. Pour cela, on remarque que dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y_\bullet \arrow[r, "u_\bullet"'] \arrow[rr, bend left, "v_\bullet \circ u_\bullet"] & Y_\bullet^{[q]} \arrow[r, "v_\bullet"'] & E_\bullet^{[q]} \end{tikzcd}$$

les morphismes $u_\bullet$ et $v_\bullet \circ u_\bullet$ sont des hyper-recouvrements génériques. (Pour $u_\bullet$, c'est clair d'après l'étape précédente. Si $q = -1$, c'est aussi clair pour $v_\bullet \circ u_\bullet$. Si $0 \leqslant q \leqslant p$, on utilise le fait que $Y_\bullet \longrightarrow Y_\bullet^{[q-1]}$ est un hyper-recouvrement générique relatif et on lui applique le lemme 4.4.12(b).) Le résultat recherché découle du lemme 4.5.11 ci-dessous. ∎

Le résultat suivant a servi dans la preuve du corollaire 4.5.10. Pour des références futures, on l'énonce dans une généralité plus grande que nécessaire pour ladite preuve.

Lemme 4.5.11. — *On suppose donnés des morphismes de schémas semi-simpliciaux augmentés* $h_\bullet : V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ *et* $k_\bullet : W_\bullet \longrightarrow V_\bullet$ *vérifiant les conditions suivantes.*

3. La preuve que nous présentons ici est pour le moins insatisfaisante. Nous n'avons pas réussi à trouver un argument plus simple et plus direct de cette propriété.

(i) Le morphisme $h_{-1} : V_{-1} \longrightarrow U_{-1}$ est plat. Le morphisme $k_\bullet : W_\bullet \longrightarrow V_\bullet$ est fidèlement plat en chaque degré (resp. en degrés $\leqslant p$).

(ii) Le morphisme de schémas semi-simpliciaux $U_\bullet \longrightarrow U_{-1}$ est un hyper-recouvrement générique.

(iii) Les morphismes de schémas semi-simpliciaux $W_\bullet \longrightarrow V_\bullet \times_{V_{-1}} W_{-1}$ et $W_\bullet \longrightarrow U_\bullet \times_{U_{-1}} W_{-1}$ sont des hyper-recouvrements génériques relatifs.

Alors, $V_\bullet \longrightarrow U_\bullet \times_{U_{-1}} V_{-1}$ (resp. $\operatorname{cosk}_p^{V_{-1}} V \longrightarrow \operatorname{cosk}_p^{U_{-1}} U \times_{U_{-1}} V_{-1}$) est aussi un hyper-recouvrement générique relatif.

Démonstration. — Pour $q \in \mathbb{N}$, considérons le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} W_q & \longrightarrow & U_q \times_{(\operatorname{cosk}_{q-1}^{U_{-1}} U)_q} (\operatorname{cosk}_{q-1}^{W_{-1}} W)_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_q & \longrightarrow & U_q \times_{(\operatorname{cosk}_{q-1}^{U_{-1}} U)_q} (\operatorname{cosk}_{q-1}^{V_{-1}} V)_q. \end{array}$$

Le morphisme horizontal supérieur est plat et dominant car $W_\bullet \longrightarrow V_\bullet \times_{V_{-1}} W_{-1}$ est un hyper-recouvrement générique relatif. Le morphisme vertical à droite est aussi plat et dominant. En effet, c'est un changement de base du morphisme $(\operatorname{cosk}_{q-1}^{W_{-1}} W)_q \longrightarrow (\operatorname{cosk}_{q-1}^{V_{-1}} V)_q$, qui est plat et dominant grâce à la proposition 4.4.13(a) (jointe au lemme 4.4.12(b)), suivant le morphisme plat $U_q \longrightarrow (\operatorname{cosk}_{q-1}^{U_{-1}} U)_q$. Puisque $W_q \longrightarrow V_q$ est fidèlement plat, ceci entraîne que le morphisme horizontal inférieur est plat et dominant. ■

4.6. Hyper-enveloppes différentielles et types d'homotopie feuilletée. —

Dans cette sous-section, on introduit le *type d'homotopie feuilletée générique* d'un Δ-corps algébriquement clos de caractéristique nulle. [4] Il s'agit en quelque sorte d'une variante générique et feuilletée du type d'homotopie étale d'Artin–Mazur [**8**]. (Voir aussi la remarque 4.6.26 ci-dessous.) On commence avec quelques notions d'algèbre différentielle.

Définition 4.6.1. — *Un Δ-corps de caractéristique nulle K est dit* différentiellement clos *si toute (K,Δ)-algèbre de type fini non nulle A admet une rétraction, i.e., un morphisme de (K,Δ)-algèbres $A \longrightarrow K$. Il revient au même de demander que toute (K,Δ)-algèbre simple de type fini est isomorphe à K.*

Définition 4.6.2. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle.*

(a) Une enveloppe différentielle *de K est une Δ-extension L/K telle que le Δ-corps L est différentiellement clos.*

(b) Une enveloppe universelle *de K est une Δ-extension L/K telle que, pour tout sous-(K,Δ)-corps de type fini $K_1 \subset L$ et toute Δ-extension de type fini K_2/K_1, il existe un morphisme de (K_1,Δ)-corps $K_2 \hookrightarrow L$.*

Remarque 4.6.3. — D'après la proposition 2.3.2, toute Δ-extension normale de K est ind-simple (i.e., union filtrante de ses sous (K,Δ)-algèbres de type fini simples). On en déduit qu'une enveloppe différentielle de K contient, à isomorphisme près, toute Δ-extension normale de K. (Utiliser la proposition 2.8.6.) En particulier, une enveloppe différentielle contient une clôture normale. Par ailleurs, si L/K est une enveloppe universelle de K, le Δ-corps L est différentiellement clos. Autrement dit, L/K est aussi une enveloppe différentielle de K. □

4. La restriction aux Δ-corps algébriquement clos vise à simplifier notre étude et nous sommes certains qu'il devrait y avoir une version plus générale valable pour tout Δ-corps de caractéristique nulle. Cependant, on ne perd pas beaucoup en se restreignant aux Δ-corps algébriquement clos. Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle tel que $K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos. Soit $\overline{K}/K$ une clôture algébrique de K et notons G son groupe de Galois. Alors, moralement, le type d'homotopie feuilletée de K admet un morphisme vers l'espace classifiant de G et la fibre homtopique de ce morphisme est précisément le type d'homotopie feuilletée de $\overline{K}$. Autrement dit, la différence entre les types d'homotopie feuilletée de K et $\overline{K}$ est « contrôlée » par le groupe de Galois classique de l'extension algébrique $\overline{K}/K$.

Remarque 4.6.4. — Tout Δ-corps K de caractéristique nulle admet une enveloppe universelle. (On en construit une en prenant l'union d'une suite de Δ-corps $(K^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, avec $K^{(0)} = K$, et $K^{(n+1)}$ un $(K^{(n)},\Delta)$-corps qui contient une copie de toutes les Δ-extensions de type fini de $K^{(n)}$.) □

Lemme 4.6.5. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle muni d'un Δ-automorphisme u. Alors, il existe une enveloppe universelle L/K et un Δ-automorphisme v de L qui étend u.*

Démonstration. — Nous allons construire par récurrence une suite de Δ-extensions K_{n+1}/K_n et des automorphismes u_n de K_n tel que $u_{n+1}|_{K_n} = u_n$. On pose $K_0 = K$. Si $n \geqslant 0$ et si K_n est construit, on choisit une enveloppe universelle L_n/K_n et on pose

$$K_{n+1} \quad = \quad \mathrm{Frac}\left(\cdots \underset{\iota,\,K_n,\,\iota\circ u_n}{\otimes} L_n \underset{\iota,\,K_n,\,\iota\circ u_n}{\otimes} L_n \underset{\iota,\,K_n,\,\iota\circ u_n}{\otimes} L_n \underset{\iota,\,K_n,\,\iota\circ u_n}{\otimes} \cdots\right)$$

avec $\iota : K_n \hookrightarrow L_n$ l'inclusion évidente. (Un élément de K_n est une combinaison linéaire de tenseurs $\otimes_{i\in\mathbb{Z}} b_i$ tels que $b_j = 1$ sauf pour un ensemble fini d'entiers relatifs $j \in \mathbb{Z}$.) Le Δ-corps K_{n+1} possède un automorphisme évident u_{n+1} qui étend u_n. (Il est donné par $u_{n+1}(\otimes_{i\in\mathbb{Z}} b_i) = \otimes_{i\in\mathbb{Z}} b_{i+1}$.) L'union des K_n convient clairement. ■

Nous arrivons à la première notion importante de cette sous-section.

Définition 4.6.6. — *Soit K un Δ-corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Une* hyper-enveloppe différentielle *de K est un (K,Δ)-schéma semi-simplicial $Q_\bullet$ qui satisfait aux propriétés suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

(i) le morphisme $Q_n \longrightarrow (\mathrm{cosk}^K_{n-1} Q)_n$ est plat et dominant ;

(ii) le (K,Δ)-schéma Q_n est le spectre d'un Δ-corps différentiellement clos.

*Si de plus, $\mathcal{O}(Q_n)$ est une enveloppe universelle du Δ-corps des fonctions rationnels de $(\mathrm{cosk}^K_{n-1} Q)_n$, on parle alors d'*hyper-enveloppe universelle *de K.*

Théorème 4.6.7. — *Tout Δ-corps algébriquement clos de caractéristique nulle possède des hyper-enveloppes universelles (et donc aussi des hyper-enveloppes différentielles).*

Démonstration. — Soit K un Δ-corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Nous allons obtenir une hyper-enveloppe universelle de K en prenant la composition infinie d'une tour de (K,Δ)-schémas semi-simpliciaux

$$\cdots \xrightarrow{g_\bullet^{(p+1)}} Q_\bullet^{(p+1)} \xrightarrow{g_\bullet^{(p)}} Q_\bullet^{(p)} \xrightarrow{g_\bullet^{(p-1)}} \cdots \xrightarrow{g_\bullet^{(1)}} Q_\bullet^{(0)} \xrightarrow{g_\bullet^{(0)}} Q_\bullet^{(-1)} = \mathrm{Spec}(K) \tag{4.35}$$

qui satisfait aux propriétés suivantes pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(1) Le (K,Δ)-schéma semi-simplicial $Q_\bullet^{(p)}$ est p-tronqué et le morphisme $g_\bullet^{(p)}$ est p-élémentaire.

(2) Pour $0 \leqslant n \leqslant p$, le Δ-schéma $Q_n^{(p)}$ est le spectre d'un Δ-corps différentiellement clos. De plus, le morphisme $Q_p^{(p)} \longrightarrow Q_p^{(p-1)}$ est plat et dominant et identifie $\mathcal{O}(Q_p^{(p)})$ avec une enveloppe universelle du Δ-corps des fonctions rationnelles de $Q_p^{(p-1)}$.

On construit (4.35) par récurrence. Pour $p = 0$, on choisit une enveloppe universelle de K et on note Q_0 son spectre. On pose alors $Q_\bullet^{(0)} = \check{C}_\bullet(Q_0/K)$. Supposons maintenant que $p \geqslant 0$ et que les $Q_\bullet^{(q)}$ sont construits pour $0 \leqslant q \leqslant p$. Alors, grâce à (1), on a $\mathrm{cosk}_q Q^{(p)} = Q^{(q)}$. Ainsi, pour $0 \leqslant n \leqslant p$, les morphismes $Q_n^{(p)} \longrightarrow (\mathrm{cosk}^K_{n-1} Q^{(p)})_n$ s'identifient à $Q_n^{(n)} \longrightarrow Q_n^{(n-1)}$ et, d'après (2), ils sont plats et dominants. On est donc en mesure d'appliquer le théorème 4.5.1. Il s'ensuit que le Δ-schéma $Q_{p+1}^{(p)}$ est intègre. On choisit une enveloppe universelle du Δ-corps des fonctions rationnelles de $Q_{p+1}^{(p)}$ et on note Q_{p+1} son spectre. On prend alors pour $Q_\bullet^{(p+1)}$ le but du morphisme $(p+1)$-élémentaire $g_\bullet^{(p+1)} : Q_\bullet^{(p+1)} \longrightarrow Q_\bullet^{(p)}$ associé à $Q_{p+1} \longrightarrow Q_{p+1}^{(p)}$. Les propriétés (1) et (2) ci-dessus sont clairement vraies au rang $p+1$. ■

Remarque 4.6.8. — Il est immédiat que la construction utilisée dans la preuve du théorème 4.6.7 fournit toutes les hyper-enveloppes universelles de K. En remplaçant dans l'hypothèse (2) « enveloppe universelle » par « enveloppe différentielle », on obtient également une construction qui fournit toutes les hyper-enveloppes différentielles de K. □

Nous aurons besoin du complément suivant au théorème 4.6.7.

Théorème 4.6.9. — *Tout Δ-corps algébriquement clos de caractéristique nulle K possède une hyper-enveloppe universelle cyclique $Q_\bullet$ (i.e., une hyper-enveloppe cyclique munie d'une structure cyclique au sens de la définition 4.3.16).*

Démonstration. — On procède comme pour le théorème 4.6.7 en construisant une tour (4.35) de (K,Δ)-schémas semi-simpliciaux cycliques. Si que le (K,Δ)-schéma semi-simplicial cyclique $Q_\bullet^{(p)}$ est construit, alors $\mathcal{O}(Q_{p+1}^{(p)})$ est un Δ-corps muni d'un automorphisme c_{p+1}^*. D'après le lemme 4.6.5, on peut trouver une enveloppe universelle de $\mathcal{O}(Q_{p+1}^{(p)})$ munie d'un Δ-automorphisme qui étend c_{p+1}^*. On note Q_{p+1} son spectre. Ainsi, Q_{p+1} admet un automorphisme compatible à celui de $Q_{p+1}^{(p)}$. On forme alors le morphisme $p+1$-élémentaire $Q_\bullet^{(p+1)} \longrightarrow Q_\bullet^{(p)}$ associé à $Q_{p+1} \longrightarrow Q_{p+1}^{(p)}$. D'après la proposition 4.3.18, $Q_\bullet^{(p+1)}$ admet une structure cyclique compatible à celle de $Q_\bullet^{(p)}$. ■

Lemme 4.6.10. — *Soient K un Δ-corps algébriquement clos de caractéristique nulle et $Q_\bullet$ une hyper-enveloppe universelle de K. Alors, $Q_{1+\bullet}$ est une hyper-enveloppe universelle du Δ-corps $\mathcal{O}(Q_0)$.*

Démonstration. — En effet, pour $p \in \mathbb{N}$, le morphisme $Q_{1+p} \longrightarrow (\operatorname{cosk}_{p-1}^{Q_0} Q_{1+\bullet})_p$ est la composition de

$$Q_{p+1} \xrightarrow{a} (\operatorname{cosk}_p^K Q)_{p+1} \simeq (\operatorname{cosk}_{p-1}^{Q_0} Q_{1+\bullet})_p \times_{(\operatorname{cosk}_{p-1}^K Q_\bullet)_p} Q_p \xrightarrow{b} (\operatorname{cosk}_{p-1}^{Q_0} Q_{1+\bullet})_p$$

où l'isomorphisme au milieu est celui de la proposition 4.3.9. Les deux morphismes a et b sont plats et dominants. De plus, a fait de $\mathcal{O}(Q_{p+1})$ une enveloppe universelle du Δ-corps des fonctions rationnelles sur $(\operatorname{cosk}_p^K Q)_{p+1}$. Il s'ensuit que $b \circ a$ fait de $\mathcal{O}(Q_{p+1})$ une enveloppe universelle du Δ-corps des fonctions rationnelles sur $(\operatorname{cosk}_{p-1}^{Q_0} Q)_p$ comme désiré. ■

Dorénavant, l'expression « hyper-recouvrement générique » sera toujours comprise au sens de la définition suivante (i.e., en spécialisant la situation 4.4.1 comme suit : $\mathcal{C}$ est la catégorie des $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas quasi-compacts, les morphismes admissibles sont les morphismes de type fini et en involution, et « dominant » admet la signification usuelle.)

Définition 4.6.11. —

(a) Un hyper-recouvrement générique *d'un $(\mathbb{Q},\Delta)$-schéma quasi-compact X est un morphisme de $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas semi-simpliciaux $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le morphisme*

$$Y_p \longrightarrow (\operatorname{cosk}_{p-1}^X Y)_p \tag{4.36}$$

est de type fini, en involution et dominant.

(b) Un hyper-recouvrement générique relatif *d'un $(\mathbb{Q},\Delta)$-schéma semi-simplicial $U_\bullet$ quasi-compact en chaque degré est un morphisme de $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas semi-simpliciaux $h_\bullet : V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le morphisme*

$$V_p \longrightarrow U_p \times_{(\operatorname{cosk}_{p-1} U)_p} (\operatorname{cosk}_{p-1} V)_p \tag{4.37}$$

est de type fini, en involution et dominant.

Remarque 4.6.12. — Malheureusement, dans la suite, on sera obligé de considérer les variantes où « admissible » signifie « plat » au lieu de « de type fini en involution ». Afin de ne pas être obligé à chaque fois d'expliciter les conditions, on introduit la terminologie suivante. Un morphisme de $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas semi-simpliciaux quasi-compacts $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X$ est appelé un *hyper-recouvrement pro-générique* de X si les morphismes $(4.36)_{\text{réd}}$ sont plats et dominants. De même un morphisme de $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas semi-simpliciaux quasi-compacts $h_\bullet : V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ est appelé un *hyper-recouvrement pro-générique relatif* si les morphismes

$(4.37)_{\text{réd}}$ sont plats et dominants. Ainsi, une hyper-enveloppe différentielle comme dans la définition 4.6.6 est un hyper-recouvrement pro-générique de $\mathrm{Spec}(K)$. □

Lemme 4.6.13. — *Soit $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ un morphisme de $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schémas semi-simpliciaux augmentés vérifiant les conditions suivantes (avec $p \geqslant -1$ un entier fixé à l'avance).*

(i) X_{-1} est irréductible quasi-compact et le (X_{-1}, Δ)-schéma semi-simplicial $X_\bullet$ est p-tronqué. De plus, le morphisme $X_\bullet \longrightarrow X_{-1}$ est un hyper-recouvrement pro-générique de X_{-1}.

(ii) Y_q est le spectre d'un Δ-corps pour tout $-1 \leqslant q \leqslant p$ et le morphisme $Y_{-1} \longrightarrow X_{-1}$ est dominant. Le (Y_{-1}, Δ)-schéma semi-simplicial $Y_\bullet$ est p-tronqué. De plus, le morphisme $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet \times_{X_{-1}} Y_{-1}$ est un hyper-recouvrement pro-générique relatif.

Appelons $\mathscr{R} = \mathscr{R}_p(f)$ la catégorie ayant pour objets les factorisations

$$\begin{tikzcd} Y_\bullet \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & R_\bullet \arrow[r] & X_\bullet \end{tikzcd} \tag{4.38}$$

de $f_\bullet$ vérifiant les propriétés suivantes :

— *R_{-1} est un (X_{-1}, Δ)-schéma de type fini en involution, le morphisme $Y_{-1} \longrightarrow R_{-1}$ est dominant et le (R_{-1}, Δ)-schéma semi-simplicial $R_\bullet$ est p-tronqué ;*

— *le morphisme de Δ-schémas semi-simpliciaux $R_\bullet \longrightarrow X_\bullet \times_{X_{-1}} R_{-1}$ est un hyper-recouvrement générique relatif ;*

— *le morphisme de Δ-schémas semi-simpliciaux $Y_\bullet \longrightarrow R_\bullet \times_{R_{-1}} Y_{-1}$ est un hyper-recouvrement pro-générique relatif.*

Alors $\mathscr{R}$ est équivalente à un ensemble ordonné cofiltrant et le morphisme évident

$$Y_\bullet \longrightarrow \lim_{Y \to R \to X \in \mathscr{R}} R_\bullet$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur p. Lorsque $p = 1$, le résultat découle trivialement de la proposition 3.1.27. Supposons que $p \geqslant 0$ et que le résultat est connu pour $p - 1$.

Considérons la catégorie $\mathscr{R}'$ ayant pour objets les factorisations (4.38) pour lesquelles on ne retient que les conditions suivantes : $R_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est de type fini en chaque degré et le (R_{-1}, Δ)-schéma semi-simplicial $R_\bullet$ est p-tronqué. Clairement $\mathscr{R}'$ satisfait les conclusions de l'énoncé, et il est suffisant de montrer que l'inclusion $\mathscr{R} \subset \mathscr{R}'$ est cofinale. Pour ce faire, on fixe un objet $Y \longrightarrow Z \longrightarrow X$ dans $\mathscr{R}'$ et on construit un objet de $\mathscr{R}$ qui le domine. Par l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que la factorisation

$$\mathrm{cosk}_{p-1}^{Y_{-1}} Y \longrightarrow \mathrm{cosk}_{p-1}^{Z_{-1}} Z \longrightarrow \mathrm{cosk}_{p-1}^{X_{-1}} X$$

de $\mathrm{cosk}_{p-1}(f) : \mathrm{cosk}_{p-1}^{Y_{-1}} Y \longrightarrow \mathrm{cosk}_{p-1}^{X_{-1}} X$ satisfait aux hypothèses de l'énoncé au rang $p - 1$, i.e., définit un objet de la catégorie $\mathscr{R}_{p-1} = \mathscr{R}_{p-1}(\mathrm{cosk}_{p-1} f)$. (En effet, si $R'_\bullet \in \mathscr{R}_{p-1}$ domine $\mathrm{cosk}_{p-1}^{Z_{-1}} Z$, on remplace Z par $Z \times_{\mathrm{cosk}_{p-1}^{Z_{-1}} Z} R'$.) Dans le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} Y_p \arrow[r, "b"] \arrow[d, "v"] & (\mathrm{cosk}_{p-1}^{Y_{-1}} Y)_p \arrow[d, "u"] \\ Z_p \arrow[r, "a"] & (\mathrm{cosk}_{p-1}^{Z_{-1}} Z)_p, \end{tikzcd}$$

les morphismes u et b sont plats (à nil-immersion près) et dominants. (Utiliser le lemme 4.4.8.) En particulier, tous les Δ-schémas dans ce carré, sauf peut-être Z_p, sont irréductibles. Notons

$$U = \eta_{(\mathrm{cosk}_{p-1}^{Z_{-1}} Z)_p}, \quad V = \eta_{(\mathrm{cosk}_{p-1}^{Y_{-1}} Y)_p} \quad \text{et} \quad W = Z_p \times_{(\mathrm{cosk}_{p-1}^{Z_{-1}} Z)_p} U.$$

Nous avons un morphisme évident $w : Y_p \longrightarrow W \times_U V$ et le Δ-schéma $W \times_U V$ est radiciellement noethérien (car de type fini sur V). En particulier, l'adhérence de l'image de w est définie par l'annulation d'un nombre fini de fonctions régulières $\phi_1, \cdots, \phi_n \in \mathcal{O}(W \times_U V)$. D'après l'hypothèse de récurrence et quitte à remplacer Z par $Z \times_{\operatorname{cosk}_{p-1}^{Z_{-1}} Z} R'$ avec $R' \in \mathscr{R}_{p-1}$ suffisamment fin, nous pouvons supposer que les ϕ_i proviennent de fonctions régulières sur W. En se débarrassant des dénominateurs, nous pouvons même supposer que les ϕ_i proviennent de fonctions régulières $\phi'_1, \cdots, \phi'_n \in \mathcal{O}(Z_p)$.

Quitte à remplacer Z_p par le Δ-schéma fermé défini par l'annulation des ϕ'_i, nous pouvons supposer que le morphisme w est dominant. Puisque Y_p est le spectre d'un Δ-corps, il s'ensuit que w est également plat (à nil-immersion près). Quitte à remplacer Z_p par un ouvert convenable, nous pouvons supposer que le morphisme a est en involution. (Voir la proposition 3.1.27.) Dans ce cas, $Z_\bullet$ est lui-même un objet de $\mathscr{R}$. ■

Définition 4.6.14. — *Soient K un Δ-corps algébriquement clos de caractéristique nulle et $Q_\bullet$ une hyper-enveloppe différentielle de K. Un* hyper-recouvrement Q-pointé *(p-tronqué) de K est la donnée d'un hyper-recouvrement générique (p-tronqué) $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow \operatorname{Spec}(K)$ et d'un morphisme de (K,Δ)-schémas semi-simpliciaux $Q_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ qui est un hyper-recouvrement pro-générique relatif.*

Notations 4.6.15. — Gardons les hypothèses de la définition 4.6.14.

(i) La catégorie des hyper-recouvrements Q-pointés p-tronqués sera désignée par $\underline{\mathrm{HR}}^Q_p(K)$. L'union de ces catégories, lorsque p parcourt $\mathbb{N}$, est notée $\underline{\mathrm{HR}}^Q(K)$. (Avec les notations du lemme 4.6.13, on a évidemment $\underline{\mathrm{HR}}^Q(K) = \mathscr{R}_p(\operatorname{cosk}^K_p Q \to \operatorname{Spec}(K))$.)

(ii) On suppose donné un morphisme dominant de $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas $\operatorname{Spec}(K) \longrightarrow X$ avec X quasi-compact. On note $\underline{\mathrm{HR}}^Q_p(K/X)$ la catégorie dont les objets sont des morphismes $Q_\bullet \longrightarrow R_\bullet$ de (X,Δ)-schémas semi-simpliciaux augmentés ($Q_\bullet$ étant augmenté par $\operatorname{Spec}(K)$) tels que :
- le (X,Δ)-schéma R_{-1} est de type fini en involution, le morphisme $\operatorname{Spec}(K) \longrightarrow R_{-1}$ est dominant et le (R_{-1},Δ)-schéma semi-simplicial $R_\bullet$ est p-tronqué ;
- le morphisme de Δ-schémas semi-simpliciaux $R_\bullet \longrightarrow R_{-1}$ est un hyper-recouvrement générique ;
- le morphisme de Δ-schémas semi-simpliciaux $Q_\bullet \longrightarrow R_\bullet \times_{R_{-1}} \operatorname{Spec}(K)$ fait de $R_\bullet \times_{R_{-1}} \operatorname{Spec}(K)$ un hyper-recouvrement Q-pointé de K.

L'union de ces catégories, lorsque p parcourt $\mathbb{N}$, est notée $\underline{\mathrm{HR}}^Q(K/X)$. (Avec les notations du lemme 4.6.13, on a évidemment $\underline{\mathrm{HR}}^Q_p(K/X) = \mathscr{R}_p(\operatorname{cosk}^K_p Q \to X)$.)

On dispose d'un foncteur $\underline{\mathrm{HR}}^Q(K/X) \longrightarrow \underline{\mathrm{HR}}^Q(K)$ qui à $R_\bullet$, comme ci-dessus, associe $R_\bullet \times_{R_{-1}} \operatorname{Spec}(K)$. (Lorsque $X = \operatorname{Spec}(K)$, ce foncteur est l'identité.) □

Proposition 4.6.16. — *Soient K un Δ-corps algébriquement clos de caractéristique nulle et $Q_\bullet$ une hyper-enveloppe différentielle de K. On suppose donné un morphisme dominant de $(\mathbb{Q},\Delta)$-schémas $\operatorname{Spec}(K) \longrightarrow X$ avec X quasi-compact. Alors, les catégories $\underline{\mathrm{HR}}^Q_p(K)$ et $\underline{\mathrm{HR}}^Q_p(K/X)$ sont équivalentes à des ensembles ordonnés cofiltrants et le foncteur naturel $\underline{\mathrm{HR}}^Q_p(K/X) \longrightarrow \underline{\mathrm{HR}}^Q_p(K)$ est cofinal. De plus, le morphisme évident*

$$\operatorname{cosk}_p Q \longrightarrow \lim_{Q \to R \in \underline{\mathrm{HR}}^Q_p(K/X)} R$$

est un isomorphisme de (K,Δ)-schémas semi-simpliciaux.

Démonstration. — Ceci découle aussitôt du lemme 4.6.13. ■

Corollaire 4.6.17. — *Gardons les hypothèses de la proposition 4.6.16. La catégorie $\underline{\mathrm{HR}}^Q(K/X)$ est équivalente à un ensemble ordonné cofiltrant et le morphisme évident*

$$Q_\bullet \longrightarrow \lim_{Q \to R \in \underline{\mathrm{HR}}^Q(K/X)} R_\bullet$$

est un isomorphisme de (K,Δ)-schémas semi-simpliciaux.

Le résultat suivant est un analogue générique de [**5**, Exposé V, Théorème 7.4.1] pour la topologie fttf.

Théorème 4.6.18. — *Soient X un $(\mathbb{Q},\Delta)$-schéma et $\operatorname{Spec}(K) \longrightarrow X$ un Δ-morphisme avec K un Δ-corps algébriquement clos. Soit $Q_\bullet$ une hyper-enveloppe différentielle de K. Enfin, soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur Fttf^Δ/X borné à gauche. Alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K, F^\bullet) \simeq \mathrm{H}^i(\operatorname{Tot} F^\bullet(Q_\bullet)). \tag{4.39}$$

(Ci-dessus, $\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K, F^\bullet)$ *est l'évaluation du préfaisceau* $\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(-, F^\bullet)$ *en K au sens de la convention 3.3.17.)*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en remplaçant X par un ouvert non vide de l'adhérence de l'image de $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow X$. On peut donc supposer que X est intègre et affine, et que $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow X$ est plat et dominant.

Fixons une équivalence fttf-locale $F^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ avec $I^\bullet$ un complexe fttf-fibrant borné à gauche. On montre d'abord que le morphisme évident

$$I^\bullet(K) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, I^\bullet(Q_\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme. Vu le corollaire 4.6.17, il suffit de montrer que le morphisme évident

$$I^\bullet(\eta_{R_{-1}}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, I^\bullet(\eta_{R_\bullet})$$

est un quasi-isomorphisme pour R_{-1} un (X, Δ)-schéma de type fini en involution et $R_\bullet \longrightarrow R_{-1}$ un hyper-recouvrement générique. Ceci est bien le cas grâce au théorème 4.4.16.

Il est maintenant facile de conclure. En effet, par définition, on a $\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K, F^\bullet) = H^i(I^\bullet(K))$. Il reste donc à voir que le morphisme évident

$$\mathrm{Tot}\, F^\bullet(Q_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, I^\bullet(Q_\bullet) \tag{4.40}$$

est un quasi-isomorphisme. Puisque Q_n est le spectre d'un Δ-corps différentiellement clos, tout recouvrement fttf de Q_n est scindé. Il s'ensuit que l'évaluation en Q_n transforme les équivalences fttf-locales en quasi-isomorphismes. En particulier, les morphismes $F^\bullet(Q_n) \longrightarrow I^\bullet(Q_n)$ sont des quasi-isomorphismes pour tout $n \in \mathbb{N}$. Grâce à [**71**, Lemma 2.7.3], il en est de même de (4.40). ■

Corollaire 4.6.19. — *On suppose donné un triangle commutatif de* $(\mathbb{Q}, \Delta)$*-schémas*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[dr, bend right] & Y \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

avec K un Δ*-corps de caractéristique nulle. Soit* $F^\bullet$ *un complexe de préfaisceaux de* Λ*-modules sur* Fttf^Δ/X *borné à gauche. Alors, pour tout* $i \in \mathbb{Z}$*, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K, F^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K, f^*F^\bullet). \tag{4.41}$$

Démonstration. — On peut supposer que X et Y sont affines. On se ramène au cas où K est algébriquement clos à l'aide de la suite spectral de Hoschschild–Serre. On applique ensuite le théorème 4.6.18 pour conclure. (Utiliser que $(f^*F^\bullet)(Z) \simeq F^\bullet(Z)$ pour tout (Y, Δ)-schéma affine Z.) ■

Remarque 4.6.20. — Le corollaire 4.6.19 n'est pas immédiat même pour un préfaisceau placé en degré zéro et $i = 0$. La difficulté réside dans le fait que la topologie fttf n'est pas quasi-compacte. □

Définition 4.6.21. — *Soit K un* Δ*-corps algébriquement clos de caractéristique nulle et soit* $Q_\bullet$ *une hyper-enveloppe différentielle de K. Le* $K^{\Delta=0}$*-schéma semi-simplicial* $(Q_\bullet)_{\Delta=0}$ *est appelé le* type d'homotopie feuilletée générique *de K.*

La définition ci-dessus est motivée par le résultat suivant ainsi que sa variante « tordue » (voir la proposition 4.6.25 ci-dessous).

Corollaire 4.6.22. — *Soit K un* Δ*-corps algébriquement clos de caractéristique nulle et soit* $Q_\bullet$ *une hyper-enveloppe différentielle de K. Soit* $G^\bullet$ *un complexe de préfaisceaux de* Λ*-modules sur* $\mathrm{Ct}/K^{\Delta=0}$ *borné à gauche. Alors, pour* $i \in \mathbb{Z}$*, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K, (G^\bullet)^\delta) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{Tot}\, G^\bullet((Q_\bullet)_{\Delta=0})). \tag{4.42}$$

(Voir la notation 3.5.6.)

Démonstration. — Le morphisme de bicomplexes $G_\bullet((Q_\bullet)_{\Delta=0}) \longrightarrow (G^\bullet)^\delta(Q_\bullet)$ est un isomorphisme car les Q_n sont des spectres de Δ-extensions de K. (Utiliser le corollaire 3.5.8.) Le résultat recherché est donc un cas particulier du théorème 4.6.18. ■

Nous aurons besoin de développer une variante « tordue » du corollaire 4.6.22. On note d'abord le lemme suivant.

Lemme 4.6.23. — *Soit K un Δ-corps algébriquement clos de caractéristique et soit $Q_\bullet$ une hyper-enveloppe différentielle de K. Soit N/K une Δ-extension normale de type fini de K munie d'un plongement $N/K \hookrightarrow \kappa(Q_0)/K$. Alors, il existe un morphisme évident de $K^{\Delta=0}$-schémas semi-simpliciaux*

$$(Q_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Gal}^\Delta_\bullet(N/K) \tag{4.43}$$

où $\mathrm{Gal}^\Delta_\bullet(N/K)$ est le classifiant du groupe de Galois différentiel de la Δ-extension N/K.

Démonstration. — C'est évident puisque $\mathrm{Gal}^\Delta_\bullet(N/K) = \mathrm{Spec}(\check{C}^\bullet(N/K))_{\Delta=0}$ (voir la définition 2.6.12). ■

Construction 4.6.24. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant les produits directs finis. Soient G un objet en groupes de $\mathcal{C}$ et $X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ un morphisme d'objets semi-simpliciaux de $\mathcal{C}$, avec $G_\bullet$ le classifiant de G. Soit F un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ (à valeurs dans une catégorie quelconque). On suppose que F est muni d'une action de G, i.e., d'une transformation naturelle $a^* : F(-) \longrightarrow F(G \times -)$ qui satisfait aux conditions usuelles d'unitarité et d'associativité. On définit alors un objet semi-cosimplicial $\Gamma^G(X_\bullet; F)$ comme suit.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Gamma^G(X_n; F) = F(X_n)$.

(2) Si $r : \underline{\mathbf{m}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ est un injection croissante telle que $r(0) = 0$, alors $r_* : \Gamma^G(X_m; F) \longrightarrow \Gamma^G(X_n; F)$ est le morphisme $F(X_m) \longrightarrow F(X_n)$ induit par le morphisme $r^* : X_n \longrightarrow X_m$.

(3) Si $r : \underline{\mathbf{m}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ est un injection croissante telle que $r(0) > 0$, notons $r' : \underline{\mathbf{1+m}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ l'unique injection croissante d'image $\{0\} \cup r(\underline{\mathbf{m}})$. Alors, $r_* : \Gamma^G(X_m; F) \longrightarrow \Gamma^G(X_n; F)$ est la composition de

$$F(X_m) \xrightarrow{a^*} F(G \times X_m) \xrightarrow{(\star)} F(X_{1+m}) \xrightarrow{r'_*} F(X_n)$$

où $(\star)$ est induite par le morphisme composé $X_{1+m} \xrightarrow{(p_{01}, d_0)} X_1 \times X_m \longrightarrow G \times X_m$ (avec p_{01} le morphisme correspondant à l'injection croissante $\underline{\mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{1+m}}$ d'image $\{0, 1\}$).

La vérification que ceci définit bien un objet semi-cosimplicial est immédiate. □

On est maintenant en mesure d'énoncer la variante « tordue » du corollaire 4.6.22.

Proposition 4.6.25. — *Soit K un Δ-corps algébriquement clos de caractéristique nulle et soit $Q_\bullet$ une hyper-enveloppe différentielle de K. Soit $F^\bullet$ un complexe de faisceaux de Λ-modules sur $(\mathrm{Fttf}^\Delta/K, \mathrm{fttf})$ borné à gauche. On suppose que $F^\bullet$ est localement discret trivialisé par une Δ-extension normale de type fini N/K et on fixe un plongement $N/K \hookrightarrow \kappa(Q_0)/K$. Appelons $E^\bullet$ le complexe de faisceaux sur $(\mathrm{Ct}/K^{\Delta=0}, \mathrm{ct})$ muni d'une action de $\mathrm{Gal}^\Delta(N/K)$ associé à $F^\bullet$ par la construction 3.6.10. Alors, pour $i \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K, F^\bullet) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{Tot}\, \Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta(N/K)}((Q_\bullet)_{\Delta=0}; E^\bullet)). \tag{4.44}$$

(Dans l'isomorphisme ci-dessus, on utilise le morphisme de $K^{\Delta=0}$-schémas semi-simpliciaux (4.43) *du lemme 4.6.23.)*

Démonstration. — Grâce au théorème 4.6.18, il suffit de montrer que les objets semi-cosimpliciaux $F(Q_\bullet)$ et $\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta(N/K)}((Q_\bullet)_{\Delta=0}; E)$ sont canoniquement isomorphes. Le plongement $N/K \hookrightarrow \kappa(Q_0)/K$ fournit un morphisme de Δ-schémas semi-simpliciaux $Q_{1+\bullet} \longrightarrow \mathrm{Spec}(N)$. On en déduit des isomorphismes d'objets semi-cosimpliciaux

$$F(Q_{1+\bullet}) \simeq ((N/K)^* F)(Q_{1+\bullet}) \simeq (\delta^*_N E)(Q_{1+\bullet}) \simeq E((Q_{1+\bullet})_{\Delta=0}).$$

Il reste à voir que les différentielles $d^0 : F(Q_n) \longrightarrow F(Q_{n+1})$ coïncident, modulo ces identifications, aux différentielles du type (3) de la construction 4.6.24. Ceci découle aussitôt de la construction de l'action de $\mathrm{Gal}^\Delta(N/K)$ sur E ; voir la construction 3.6.10. ■

Remarque 4.6.26. — Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et notons $C = K^{\Delta=0}$ son corps des constantes. Étant donné un (K, Δ)-schéma localement de type fini X, on peut lui associer un pro-schéma simplicial qui mérite le nom de « type d'homotopie feuilletée de X ». Esquissons cette construction. On considère les hyper-recouvrements fttf de X, i.e., les morphismes de (K, Δ)-schémas simpliciaux $Y_\bullet \longrightarrow X$

tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le morphisme $Y_p \longrightarrow (\mathrm{cosk}^X_{p-1} Y)_p$ est localement de type fini et couvrant pour la topologie fttf. En prenant les classes d'homotopie simpliciale de morphismes de (X, Δ)-schémas simpliciaux, les hyper-recouvrements fttf de X forment une catégorie cofiltrante. (Voir [**8**, corollary 8.13].) D'après la proposition 3.5.1, quitte à raffiner un hyper-recouvrement fttf $Y_\bullet$, on peut supposer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, Y_p admet un quotient discret pseudo-effectif $(Y_p)_{\Delta=0}$ qui est un C-schéma localement de type fini. Ceci permet de construire un pro-objet $\Pi^\Delta(X) = ((Y_\bullet)_{\Delta=0})_{Y_\bullet \to X}$ dans la catégorie des C-schémas simpliciaux (et des morphismes à homotopie simpliciale près). C'est le *type d'homotopie feuilletée* de X. Comparé avec la version générique de la définition 4.6.21, le type d'homotopie feuilletée est une extension bien plus immédiate du type d'homotopie étale d'Artin–Mazur [**8**, §9]. Malheureusement, le type d'homotopie feuilletée, ainsi défini, ne sera d'aucune utilité pour nous : c'est un objet bien trop compliqué et l'étudier directement semble impossible. En revanche, le type d'homotopie feuilletée générique de la définition 4.6.21 est, relativement, un objet bien plus simple et nous serons en mesure de l'expliciter complètement dans beaucoup de cas. Ceci dit, lorsque K est algébriquement clos et $X = \mathrm{Spec}(K)$, on s'attend à ce que le type d'homotopie feuilletée $\Pi^\Delta(K)$ et le type d'homotopie feuilletée générique $(Q_\bullet)_{\Delta=0}$ de la définition 4.6.21 soient équivalents à homotopie près. (Reste, bien entendu, à préciser ce que l'on entend par « équivalent » dans ce contexte.) On note que le corollaire 4.6.22 montre que ces deux objets ont même cohomologie. En effet, sous les hypothèses de ce corollaire, on a aussi $\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K, (G^\bullet)^\delta) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{Tot}\, G^\bullet(\Pi^\Delta(K)))$. (Contrairement à l'isomorphisme (4.42), il s'agit cette fois d'une tautologie : la preuve de [**8**, Corollary 9.3] s'étend sans modifications.) Plus généralement, en utilisant la proposition 4.6.25, on montre que $\Pi^\Delta(K)$ et $(Q_\bullet)_{\Delta=0}$ ont même « systèmes locaux » et cohomologie « tordue ». □

4.7. Tour de Postnikov du type d'homotopie feuilletée, I. Préliminaires. —

C'est la première d'une série de six sous-sections (4.7, 4.8, 4.10, 5.10, 5.11 et 5.12) consacrées à l'analyse de la tour de Postnikov du type d'homotopie feuilletée générique de la définition 4.6.21. La présente sous-section contient des préliminaires nécessaires à la construction et à l'étude de cette tour de Postnikov.

Il sera utile d'introduire une variante p-tronquée de la définition 4.6.6. Ainsi, si K est un Δ-corps algébriquement clos de caractéristique nulle, une *hyper-enveloppe différentielle* (resp. *universelle*) *p-tronquée* de K est un (K, Δ)-schéma semi-simplicial p-tronqué $Q_\bullet$ qui satisfait aux conditions de la définition 4.6.6 pour $0 \leqslant n \leqslant p$. La preuve du théorème 4.6.7 (voir aussi la remarque 4.6.8) montre que toute hyper-enveloppe différentielle (resp. universelle) p-tronquée est la p-troncation d'une hyper-enveloppe différentielle (resp. universelle).

On s'attend à ce que le résultat ci-dessous soit valable pour les hyper-enveloppes différentielles générales de Δ-corps différentiellement clos généraux. Malheureusement, nous n'avons pas réussi à l'établir dans cette généralité.

Proposition 4.7.1. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle qui est une enveloppe universelle d'un de ses sous-Δ-corps et $Q_\bullet$ une hyper-enveloppe universelle p-tronquée de K. Soient A une (K, Δ)-algèbre intègre, $P_\bullet$ un (A, Δ)-schéma semi-simplicial p-tronqué et intègre en chaque degré, et $P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet \otimes_K A$ un morphisme de (A, Δ)-schémas semi-simpliciaux qui est un hyper-recouvrement pro-générique relatif. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le noyau totalement décomposable de la Δ-extension $\kappa_{P_n}/\kappa_{Q_n}$ est engendré par $(\kappa_{P_n})^{\Delta=0}$.*

Démonstration. — On divise la preuve en quatre étapes. Dans les deux premières on donne des réductions. La troisième et la quatrième contiennent la preuve proprement dite.

Étape 1. — On se ramène ici au cas où les (Q_n, Δ)-schémas P_n sont de type fini en involution pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. (Bien entendu, $P_\bullet$ est augmenté de $\mathrm{Spec}(A)$.)

Si $L = \mathrm{Frac}(A)$ et si $P'_\bullet$ est le Δ-schéma semi-simplicial p-tronqué donné par $P'_\bullet = \mathrm{cosk}^L_p(\eta_P)$, alors le morphisme $P'_\bullet \longrightarrow P_\bullet$ est une immersion ouverte dense en chaque degré. (La densité découle du fait que $P'_\bullet \longrightarrow Q_\bullet \otimes_K L$ est encore un hyper-recouvrement pro-générique relatif – ce qui assure que $P'_\bullet$ est non vide en chaque degré – et de l'hypothèse que $P_\bullet$ est intègre en chaque degré.) Clairement, il revient au même de démontrer la proposition pour $P_\bullet$ ou $P'_\bullet$. Autrement dit, on peut supposer que P_q est le spectre d'un Δ-corps pour tout $-1 \leqslant q \leqslant p$. Écrivons « L » pour désigner le (K, Δ)-corps A.

D'après le lemme 4.6.13, le (K,Δ)-schéma semi-simplicial augmenté $P_\bullet$ est une limite projective cofiltrante de (K,Δ)-schémas semi-simpliciaux augmentés $R_\bullet$ suivant les factorisations

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[r, "b"] \arrow[rr, bend right] & R_\bullet \arrow[r, "a"] & Q_\bullet \end{tikzcd} \tag{4.45}$$

dans $\mathscr{R}_p(P \to Q)$. D'après la proposition 4.4.13(b), morphisme a est de type fini, en involution et dominant en chaque degré, alors que le morphisme b est plat et dominant en chaque degré. Il s'ensuit que R_n est intègre pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que κ_{P_n} est l'union des (κ_{Q_n},Δ)-corps de type fini κ_{R_n} quand on fait varier la factorisation (4.45). Il est donc suffisant de montrer que les noyaux totalement décomposables des Δ-extensions $\kappa_{R_n}/\kappa_{Q_n}$ sont engendrés par les constantes. C'est ce qu'on cherchait à démontrer.

Étape 2. — On suppose que $P_\bullet$ est comme dans l'étape précédente. Ici, nous expliquons comment construire les données suivantes.

— Un sous-Δ-corps $K_0 \subset K$ tel que la Δ-extension K/K_0 est une enveloppe universelle de K_0.

— Une (K_0,Δ)-algèbre de type fini A_0 telle que $A = A_0 \otimes_{K_0} K$.

— Un hyper-recouvrement Q-pointé p-tronqué de K de la forme

$$Q_\bullet \longrightarrow X_\bullet \otimes_{K_0} K \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$$

avec $X_\bullet$ un hyper-recouvrement générique p-tronqué de K_0.

— Un hyper-recouvrement générique relatif $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet \otimes_{K_0} A_0$, avec $Y_\bullet$ un (A_0,Δ)-schéma semi-simplicial p-tronqué, et une immersion ouverte $Y_\bullet \times_{X_\bullet} Q_\bullet \hookrightarrow P_\bullet$ dense en chaque degré.

Soit $E \subset K$ un sous-Δ-corps tel que la Δ-extension K/E est une clôture universelle. D'après la proposition 4.6.16, il existe une sous-Δ-extension de type fini $K_0/E \subset K/E$, une factorisation $Q_\bullet \longrightarrow X_\bullet \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$ dans $\underline{\mathrm{HR}}_p^Q(K/K_0)$, un morphisme de Δ-schémas semi-simpliciaux $Y'_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ et un isomorphisme $P_\bullet \simeq Y'_\bullet \times_{X_\bullet} Q_\bullet$. En utilisant la proposition 3.1.27, on montre alors qu'il existe un sous-Δ-schéma semi-simplicial $Y_\bullet \hookrightarrow Y'_\bullet$ qui est ouvert et dense en chaque degré, et tel que $Y_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique relatif de $X_\bullet$. Puisque K/K_0 est encore une clôture universelle, ceci permet de conclure.

Étape 3. — On suppose à partir de maintenant que $P_\bullet = Y_\bullet \times_{X_\bullet} Q_\bullet$ avec $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ comme dans l'étape précédente. Fixons un entier $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. Si H/κ_{Q_n} est une sous-Δ-extension de type fini de $\kappa_{P_n}/\kappa_{Q_n}$, on peut, quitte à modifier les données de l'étape précédente, supposer qu'elle est de la forme $\mathrm{Frac}(\kappa_{Q_n} \otimes_{\kappa_{X_n}} M)$ avec M/κ_{X_n} une sous-Δ-extension de type fini de $\kappa_{Y_n}/\kappa_{X_n}$. Il est donc suffisant de montrer que si M/κ_{X_n} est une sous-Δ-extension totalement décomposable de type fini de $\kappa_{Y_n}/\kappa_{X_n}$, alors M est totalement décomposée par $\kappa_{Q_n}/\kappa_{X_n}$. Fixons pour la suite de la preuve une sous-Δ-extension totalement décomposable de type fini $M/\kappa_{X_n} \subset \kappa_{Y_n}/\kappa_{X_n}$.

Remarquons tout d'abord que le X_n-schéma Y_n est génériquement géométriquement intègre pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, vu que $P_\bullet = Y_\bullet \times_{X_\bullet} Q_\bullet$, il suffit de vérifier que les P_n sont des Q_n-schémas génériquement géométriquement intègres, ce qui est assuré par le corollaire 4.5.9 appliqué au morphisme $\mathrm{cosk}_p^{\mathrm{Frac}(A)}(\eta_P) \longrightarrow Q$. Ceci étant, considérons, pour $r \in \mathbb{N}$, les morphismes

$$(Y_\bullet/X_\bullet)^r \longrightarrow X_\bullet \otimes_{K_0} (A_0/K_0)^r.$$

Le Δ-schéma semi-simplicial augmenté $(Y_\bullet/X_\bullet)^r$ est donc intègre en chaque degré. De plus, d'après le corollaire 4.4.11, le morphisme ci-dessus est un hyper-recouvrement générique relatif. D'après le lemme 4.7.2 ci-dessous, pour r suffisamment grand, la Δ-extension M/κ_{X_n} est totalement décomposée par $\kappa_{Z_n}/\kappa_{X_n}$ si l'on pose $Z_\bullet = (Y_\bullet/X_\bullet)^r$. Pour terminer la preuve, il est donc suffisant de montrer qu'il existe un morphisme de $(X_\bullet,\Delta)$-schémas semi-simpliciaux augmentés $Q_\bullet \longrightarrow Z_\bullet$ qui est plat (à nil-immersion près) en chaque degré. Ceci fera l'objet de la quatrième et dernière étape.

Étape 4. — Pour $-1 \leqslant q \leqslant p$, on pose

$$Q^{(q)} = X \times_{\mathrm{cosk}_q^{K_0} X} \mathrm{cosk}_q^K Q \qquad \text{et} \qquad Z^{(q)} = X \times_{\mathrm{cosk}_q^{K_0} X} \mathrm{cosk}_q^{Z_{-1}} Z.$$

Nous allons construire par récurrence sur q des morphismes de $(X_\bullet, \Delta)$-schémas semi-simpliciaux augmentés $Q_\bullet^{(q)} \longrightarrow Z_\bullet^{(q)}$ tel que les morphismes induits $Q_\bullet^{(q)} \longrightarrow Z_\bullet^{(q)} \times_{Z_{-1}} \mathrm{Spec}(K)$ sont plats (aux nil-immersions près) en chaque degré. (En fait, ces morphismes seront des hyper-recouvrements génériques relatifs au sens généralisé de la définition 4.4.3 pour une situation 4.4.1 dégénérée, comme dans l'exemple 4.4.2(3). Cette information, qui, d'après le lemme 4.4.8, est plus précise que la platitude en chaque degré, est nécessaire pour faire fonctionner la récurrence.)

Pour $q = -1$, il s'agit de spécifier un morphisme dominant de (K_0, Δ)-schémas $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow Z_{-1}$. Un tel morphisme existe car K/K_0 est une enveloppe universelle de K_0 et que $\kappa_{Z_{-1}}/K_0$ est une Δ-extension de type fini. Soit $0 \leqslant q \leqslant p$ et supposons que le morphisme $Q_\bullet^{(q-1)} \longrightarrow Z_\bullet^{(q-1)}$ est construit. Puisque le morphisme $Q_\bullet^{(q)} \longrightarrow Q_\bullet^{(q-1)}$ est q-élémentaire, il nous faut spécifier un morphisme plat (à nil-immersion près)

$$Q_q \longrightarrow Z_q \times_{Z_q^{(q-1)}} Q_q^{(q-1)}. \tag{4.46}$$

Étant donné que $Z_\bullet \longrightarrow X_\bullet \otimes_{K_0} Z_{-1}$ est un hyper-recouvrement générique relatif, le morphisme $Z_q \longrightarrow Z_q^{(q-1)}$ est de type fini. En particulier, si $\xi \in Z_q \times_{Z_q^{(q-1)}} Q_q^{(q-1)}$ est un point générique, $\kappa(\xi)/\kappa_{Q_q^{(q-1)}}$ est une Δ-extension de type fini. Or, $\kappa_{Q_q^{(q-1)}}$ est elle-même une Δ-extension de type fini de $\kappa_{(\mathrm{cosk}^K_{q-1} Q)_q}$. Étant donné que $Q_\bullet$ est une hyper-enveloppe universelle de K, ceci entraîne que κ_{Q_q} est une enveloppe universelle de $\kappa_{Q_q^{(q-1)}}$. Il existe donc un morphisme de $\kappa_{Q_q^{(q-1)}}$-corps $\kappa(\xi) \hookrightarrow \kappa_{Q_q}$. Ceci fournit le morphisme plat (à nil-immersion près) (4.46) recherché. ∎

Le résultat suivant concernant la décomposition maximale des Δ-extensions a servi dans la preuve de la proposition 4.7.1. Il est aussi intéressant en soi.

Lemme 4.7.2. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle et M/K une Δ-extension de type fini. On suppose que K est algébriquement clos dans M. Alors, pour $r \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, la Δ-extension M/K est maximalement décomposée par* $\mathrm{Frac}((M/K)^{\otimes r})/K$.

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que $C = K^{\Delta=0}$ est algébriquement clos et que M/K est totalement décomposable. Soit N'/K une Δ-extension normale de type fini qui décompose totalement M. (Voir la proposition 2.4.3.) Soit D/C une extension de type fini telle que $N = \mathrm{Frac}(N' \otimes_C D)$ contient une copie de M. (On peut prendre par exemple $N = \mathrm{Frac}(N' \otimes_K M)$.) On fixe une (K, Δ)-injection $M \hookrightarrow N$. Pour $r \in \mathbb{N}$, on considère les (K, Δ)-corps

$$M_r = \mathrm{Frac}(\overbrace{M \otimes_K \cdots \otimes_K M}^{r \text{ fois}}) \qquad \text{et} \qquad N_r = \mathrm{Frac}(\overbrace{N \otimes_K \cdots \otimes_K N}^{r \text{ fois}}).$$

L'association $x \rightsquigarrow x \otimes 1$ induit des injections $M_r \hookrightarrow M_{r+1}$ et $N_r \hookrightarrow N_{r+1}$. On pose $M_\infty = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} M_r$ et $N_\infty = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} N_r$. L'injection $M \hookrightarrow N$ induit des injections $M_r \hookrightarrow N_r$ et $M_\infty \hookrightarrow N_\infty$. On a aussi une injection

$$\mathrm{Frac}(M_\infty \otimes_{M_\infty^{\Delta=0}} N_\infty^{\Delta=0}) \hookrightarrow N_\infty.$$

Or, puisque la Δ-extension N'/K est normale, l'extension $N_\infty/\mathrm{Frac}(K \otimes_C N_\infty^{\Delta=0})$ est de type fini. Il en est donc de même de l'extension $\mathrm{Frac}(M_\infty \otimes_{M_\infty^{\Delta=0}} N_\infty^{\Delta=0})/\mathrm{Frac}(K \otimes_C N_\infty^{\Delta=0})$. Il s'ensuit aussitôt que l'extension $M_\infty/\mathrm{Frac}(K \otimes_C M_\infty^{\Delta=0})$ est de type fini. On en déduit que la chaîne d'inclusions

$$K \otimes_C M_\infty^{\Delta=0} \hookrightarrow M \otimes_{M^{\Delta=0}} M_\infty^{\Delta=0} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow M_r \otimes_{M_r^{\Delta=0}} M_\infty^{\Delta=0} \hookrightarrow M_{r+1} \otimes_{M_{r+1}^{\Delta=0}} M_\infty^{\Delta=0} \hookrightarrow \cdots$$

est stationnaire pour r suffisamment grand. On obtient alors un isomorphisme

$$\mathrm{Frac}(M_r \otimes_{M_r^{\Delta=0}} M_{r+1}^{\Delta=0}) \simeq M_{r+1} = \mathrm{Frac}(M_r \otimes_K M)$$

montrant que M est totalement décomposée par M_r comme souhaité. ∎

Nous utiliserons la proposition 4.7.1 pour établir le résultat clef suivant.

Théorème 4.7.3. — *On fixe un entier $p \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle qui est une enveloppe universelle d'un de ses sous-Δ-corps et $Q_\bullet$ une hyper-enveloppe universelle p-tronquée de K. Alors, les propriétés suivantes sont satisfaites.*

(a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n possède un quotient discret catégorique $(Q_n)_{\Delta=0}$ qui est affine, et tel que $Q_n \longrightarrow (Q_n)_{\Delta=0}$ est fidèlement plat et induit un isomorphisme $(\kappa_{Q_n})^{\Delta=0} \simeq \kappa_{(Q_n)_{\Delta=0}}$.*

(b) *Le $K^{\Delta=0}$-schéma semi-simplicial $(Q_\bullet)_{\Delta=0}$ est p-tronqué et c'est un hyper-recouvrement pro-générique de* $\mathrm{Spec}(K^{\Delta=0})$. *De plus, le morphisme $Q_\bullet \longrightarrow K \otimes_{K^{\Delta=0}} (Q_\bullet)_{\Delta=0}$ est un hyper-recouvrement pro-générique relatif.*

Démonstration. — On pose $C = K^{\Delta=0}$. On divise la démonstration en trois étapes. Le point saillant est la preuve que le C-schéma semi-simplicial $(\eta_{Q_\bullet})_{\Delta=0}$ est rationnellement p-tronqué, i.e., que le morphisme évident

$$(\eta_Q)_{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{cosk}_p^C(\eta_Q)_{\Delta=0} \tag{4.47}$$

est un isomorphisme birationnel (ce qui, dans cette preuve, est synonyme de « pro-immersion ouverte dense ») en chaque degré. Ceci fera l'objet de la première étape. Dans les deux autres étapes, on explique comme ceci permet de conclure.

Étape 1. — On montre ici que (4.47) est un isomorphisme birationnel. On raisonne par récurrence sur p. Lorsque $p = -1$, il n'y a rien à montrer puisque le Δ-schéma semi-simplicial $Q_\bullet$ est alors constant égal à $\mathrm{Spec}(K)$. On suppose donc que $p \geqslant 0$ et que le résultat est connu pour $p-1$. D'après la proposition 4.3.9, on a, pour $n \in \mathbb{N}$, un isomorphisme canonique

$$Q_n \simeq (\mathrm{cosk}_{p-1}^{Q_0} Q_{1+\bullet})_{n-1} \times_{(\mathrm{cosk}_{p-1}^{K} Q_\bullet)_{n-1}} Q_{n-1}. \tag{4.48}$$

Notons $D = \kappa(Q_0)^{\Delta=0}$. La récurrence sur p fournit des isomorphismes birationnels

$$(\eta_{\mathrm{cosk}_{p-1}^K Q})_{\Delta=0} \xrightarrow{\text{bir}} \mathrm{cosk}_{p-1}^C(\eta_Q)_{\Delta=0} \qquad \text{et} \qquad (\eta_{\mathrm{cosk}_{p-1}^{Q_0} Q_{1+\bullet}})_{\Delta=0} \xrightarrow{\text{bir}} \mathrm{cosk}_{p-1}^D(\eta_{Q_{1+\bullet}})_{\Delta=0}. \tag{4.49}$$

(On utilise ici le lemme 4.6.10.) Or, d'après la proposition 4.7.1 appliquée à l'hyper-enveloppe universelle $p-1$-tronquée $\mathrm{cosk}_{p-1}^K Q$ et l'hyper-recouvrement pro-générique relatif $\mathrm{cosk}_{p-1}^{Q_0} Q_{1+\bullet} \longrightarrow \mathrm{cosk}_{p-1}^K Q \times_K Q_0$ (voir le lemme 4.4.14), le noyau totalement décomposable de la Δ-extension $\kappa_{(\mathrm{cosk}_{p-1}^{Q_0} Q_{1+\bullet})_{n-1}} / \kappa_{(\mathrm{cosk}_{p-1}^K Q_\bullet)_{n-1}}$ est engendré par les constantes. Il s'ensuit que l'isomorphisme (4.48) induit, modulo (4.49), un isomorphisme birationnel

$$(\eta_{Q_n})_{\Delta=0} \xrightarrow{\text{bir}} (\mathrm{cosk}_{p-1}^D(\eta_{Q_{1+\bullet}})_{\Delta=0})_{n-1} \times_{(\mathrm{cosk}_{p-1}^C(\eta_{Q_\bullet})_{\Delta=0})_{n-1}} (\eta_{Q_{n-1}})_{\Delta=0}. \tag{4.50}$$

En raisonnant par récurrence sur n, on peut supposer que le morphisme $(\eta_{Q_{n-1}})_{\Delta=0} \longrightarrow (\mathrm{cosk}_p^C(\eta_Q)_{\Delta=0})_{n-1}$ est un isomorphisme birationnel. Par une deuxième application de la proposition 4.3.9, on en déduit que le membre de droite de (4.50) est birationnellement isomorphe à $(\mathrm{cosk}_p^C(\eta_Q)_{\Delta=0})_n$. Ceci permet de conclure.

Étape 2. — On montre ici que le morphisme

$$Q \longrightarrow K \otimes_C \mathrm{cosk}_p^C(\eta_Q)_{\Delta=0}$$

est un hyper-recouvrement pro-générique relatif. On pose $U = \mathrm{cosk}_p^C(\eta_Q)_{\Delta=0}$. Il s'agit de vérifier que le morphisme

$$Q_q \longrightarrow U_q \times_{(\mathrm{cosk}_{q-1}^C U)_q} (\mathrm{cosk}_{q-1}^K Q)_q$$

est dominant pour $0 \leqslant q \leqslant p$. On pose $E = \kappa_{(\mathrm{cosk}_{q-1}^K Q)_q}$. D'après la conclusion de la première étape pour l'hyper-enveloppe universelle $\mathrm{cosk}_{q-1}^K Q$ de K, le morphisme

$$(\eta_{\mathrm{cosk}_{q-1}^K Q})_{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{cosk}_{q-1}^C(\eta_Q)_{\Delta=0} = \mathrm{cosk}_{q-1}^C U \tag{4.51}$$

est un isomorphisme birationnel en chaque degré. Il s'ensuit que $E^{\Delta=0} = \kappa_{(\mathrm{cosk}_{q-1}^C U)_q}$. Il est donc suffisant de montrer que le morphisme $\kappa_{U_q} \otimes_{E^{\Delta=0}} E \longrightarrow \kappa_{Q_q}$ est injectif. Ceci découle de la proposition 1.3.3, appliquée à la Δ-extension κ_{Q_q}/E, et du fait que $\kappa_{U_q} = (\kappa_{Q_q})^{\Delta=0}$.

On termine cette étape en remarquant que, grâce au lemme 4.5.11, il découle de ce qui précède que $(\eta_{Q_\bullet})_{\Delta=0}$ est un hyper-recouvrement pro-générique rationnellement p-tronqué de $\mathrm{Spec}(C)$.

Étape 3. — Comme dans la seconde étape, on pose $U = \mathrm{cosk}_p(\eta_Q)_{\Delta=0}$. On a alors un morphisme canonique $Q_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $Q_n \longrightarrow U_n$ est fidèlement plat d'après la proposition 4.5.7. Les schémas Q_n et U_n sont affines et d'après la première étape, le morphisme $\eta_{Q_n} \longrightarrow \eta_{U_n}$ induit un isomorphisme $(\eta_{Q_n})_{\Delta=0} \simeq \eta_{U_n}$.

Pour terminer, il reste à montrer que U_n est le quotient discret catégorique de Q_n. Étant donné que ceci ne servira pas d'une manière essentielle dans la suite, nous nous contenterons d'une esquisse de preuve. On applique d'abord le lemme 4.6.13 à l'hyper-recouvrement pro-générique relatif $Q_\bullet \longrightarrow K \otimes_C U_\bullet$. Ceci permet d'écrire $Q_\bullet$ comme une limite projective cofiltrante de (K, Δ)-schémas semi-simpliciaux $R_\bullet$ munis d'un hyper-recouvrement générique relatif $R_\bullet \longrightarrow K \otimes_C U_\bullet$, et tel que le morphisme $Q_\bullet \longrightarrow R_\bullet$ est plat et dominant en chaque degré. En particulier, les $(K \otimes_C U_n, \Delta)$-schémas R_n sont de type fini en involution. Le morphisme $R_n \longrightarrow U_n$ est encore fidèlement plat et, en plus, il est ouvert. Puisque $Q_n \longrightarrow R_n$ est dominant, le morphisme $(\eta_{R_n})_{\Delta=0} \longrightarrow \eta_{U_n}$ est un isomorphisme. On peut maintenant reprendre la preuve du théorème 1.3.11(b) et ensuite celle de la proposition 3.2.8 pour déduire que U_n est le quotient discret effectif de R_n. En passant à la limite projective, on conclut que U_n est le quotient discret catégorique de Q_n. ■

Corollaire 4.7.4. — *Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle qui est une enveloppe universelle d'un de ses sous-Δ-corps et $Q_\bullet$ une hyper-enveloppe universelle de K. Alors, $(Q_\bullet)_{\Delta=0}$ est un hyper-recouvrement pro-générique de* $\mathrm{Spec}(K^{\Delta=0})$.

Nous aurons besoin d'une légère généralisation du théorème 4.7.3.

Corollaire 4.7.5. — *On fixe un entier $p \in \mathbb{N}$. Soient K un Δ-corps de caractéristique nulle qui est une enveloppe universelle d'un de ses sous-Δ-corps et $Q_\bullet$ une hyper-enveloppe universelle $p-1$-tronquée de K. Soit $R_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ un morphisme p-élémentaire de Δ-schémas semi-simpliciaux avec R_p le spectre d'une Δ-extension du corps des fonctions rationnelles de Q_p. Alors, les propriétés (a) et (b) du théorème 4.7.3 sont satisfaites avec « R » au lieu de « Q ».*

Démonstration. — En raisonnant comme dans les étapes 2 et 3 de la preuve du théorème 4.7.3, on se ramène à montrer que C-schéma $(\eta_{R_\bullet})_{\Delta=0}$ est rationnellement p-tronqué.

Soit $Q'_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ le morphisme p-élémentaire associé à la composition de $Q'_p \longrightarrow R_p \longrightarrow Q_p$ où Q'_p est le spectre d'une enveloppe universelle de $\kappa(R_p)$. Notons R'_p le spectre du corps des fonctions rationnelles de $R_p \times_{(R_p)_{\Delta=0}} (Q'_p)_{\Delta=0}$. Il s'ensuit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Q'_\bullet \arrow[r] \arrow[rrd, bend right] & R'_\bullet \arrow[r] \arrow[rd] & R_\bullet \arrow[d] \\ & & Q_\bullet \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches vers $Q_\bullet$ sont p-élémentaires et les deux flèches horizontales sont des hyper-recouvrements pro-génériques.

Le morphisme $(\eta_{Q'_\bullet})_{\Delta=0} \longrightarrow (\eta_{R'_\bullet})_{\Delta=0}$ est un isomorphisme. En effet, ce morphisme est un isomorphisme en degrés $\leqslant p$. Or, d'après le théorème 4.7.3, $(\eta_{Q'_\bullet})_{\Delta=0}$ est rationnellement p-tronqué. Le morphisme en question admet donc une rétraction, ce qui permet de conclure. On retient de cela que $(\eta_{R'_\bullet})_{\Delta=0}$ est rationnellement tronqué. Or, par construction, le morphisme $(\eta_{R'_\bullet})_{\Delta=0} \longrightarrow (\eta_{R_\bullet})_{\Delta=0}$ est rationnellement p-élémentaire associé au morphisme $(Q'_p)_{\Delta=0} \longrightarrow (R_p)_{\Delta=0}$. Ceci force le C-schéma semi-simplicial $(\eta_{R_\bullet})_{\Delta=0}$ d'être lui-même rationnellement p-tronqué. ■

4.8. Tour de Postnikov du type d'homotopie feuilletée, II. Construction et étude. —

Dans cette sous-section, on introduit la tour de Postnikov du type d'homotopie feuilletée générique (voir la définition 4.6.21) et on démontre le théorème 4.8.17 qui fournit des renseignements préliminaires sur les morphismes de cette tour. Tout au long de cette sous-section, on fixe un Δ-corps de caractéristique nulle K et on note $C = K^{\Delta=0}$ son corps des constantes. Sauf mention explicite du contraire, K sera supposé algébriquement clos.

Définition 4.8.1. — *Soit $Q_\bullet$ une hyper-enveloppe différentielle de K. La* tour de Postnikov *du type d'homotopie feuilletée générique de K est la tour de C-schémas semi-simpliciaux*

$$\left(\mathrm{P}_\bullet^{(n+1)}(K) \longrightarrow \mathrm{P}_\bullet^{(n)}(K)\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.52}$$

donnée par $\mathrm{P}_\bullet^{(n)}(K) = (\eta_{\mathrm{cosk}^K_{n-1}Q})_{\Delta=0}$. *Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur K, on écrira « $\mathrm{P}_\bullet^{(n)}$ » au lieu de « $\mathrm{P}_\bullet^{(n)}(K)$ ».*

On commence par introduire quelques notations qui seront constamment utilisées dans cette sous-section.

Notations 4.8.2. — Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{Q}_\bullet^{(n)} = \eta(\mathrm{cosk}^K_{n-1}Q)$ de sorte que $\mathrm{P}_\bullet^{(n)} = (\mathrm{Q}_\bullet^{(n)})_{\Delta=0}$. Soit $\widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)}$ le spectre du sous-$(\kappa(\mathrm{Q}_n^{(n)}), \Delta)$-corps de $\kappa(\mathrm{Q}_n^{(n+1)}) = \kappa(Q_n)$ engendrée par les constantes, i.e.,

$$\widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)} = \eta(\mathrm{Q}_n^{(n)} \times_{\mathrm{P}_n^{(n)}} (Q_n)_{\Delta=0}) = \eta(\mathrm{Q}_n^{(n)} \times_{\mathrm{P}_n^{(n)}} \mathrm{P}_n^{(n+1)}).$$

On note alors $\widetilde{\mathrm{Q}}_\bullet^{(n)}$ le Δ-schéma semi-simplicial obtenu en appliquant $\eta(-)$ à la source du morphisme n-élémentaire de but $\mathrm{Q}_\bullet^{(n)}$ associé à $\widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)} \longrightarrow \mathrm{Q}_n^{(n)}$. Clairement, on a un morphisme évident $\mathrm{Q}_\bullet^{(n+1)} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Q}}_\bullet^{(n)}$ qui est un hyper-recouvrement pro-générique relatif, ce qui entraîne que $\widetilde{\mathrm{Q}}_\bullet^{(n)}$ est le spectre d'un sous-Δ-corps semi-cosimplicial de $\kappa(\mathrm{Q}_\bullet^{(n+1)})$. Les morphismes $\mathrm{Q}_\bullet^{(n+1)} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Q}}_\bullet^{(n)}$ et $\widetilde{\mathrm{Q}}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \mathrm{Q}_\bullet^{(n)}$ sont rationnellement n-élémentaires. (Voir la remarque 4.8.3 ci-dessous.) On pose enfin $\widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)} = (\widetilde{\mathrm{Q}}_\bullet^{(n)})_{\Delta=0}$. On dispose de morphismes canoniques $\mathrm{P}_\bullet^{(n+1)} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)}$ et $\widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \mathrm{P}_\bullet^{(n)}$ qui factorisent les morphismes de la tour (4.52). □

Remarque 4.8.3. — Comme dans la preuve du théorème 4.7.3, il sera pratique d'employer l'expression « isomorphisme birationnel » pour désigner une pro-immersion ouverte dense. Un schéma (ou Δ-schéma) semi-simplicial augmenté $X_\bullet$ sera dit *rationnellement p-tronqué* si le morphisme $X \longrightarrow \mathrm{cosk}_p^{X_{-1}}X$ est un isomorphisme birationnel en chaque degré. Un morphisme de schémas (ou Δ-schémas) semi-simpliciaux $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est dit *rationnellement p-élémentaire* si, en formant le morphisme p-élémentaire $Y'_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ associé à $Y_p \longrightarrow X_p$, le morphisme évident $Y_\bullet \longrightarrow Y'_\bullet$ est un isomorphisme birationnel en chaque degré. □

Lemme 4.8.4. — *On a les identifications :*

$$\mathrm{P}_\bullet^{(0)} = \mathrm{Spec}(C), \qquad \mathrm{Q}_\bullet^{(0)} = \mathrm{Spec}(K), \qquad \widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(0)} = \eta(\check{C}_\bullet((Q_0)_{\Delta=0}/C))$$

$$\textit{et} \qquad \widetilde{\mathrm{Q}}_\bullet^{(0)} = \eta(K \otimes_C \check{C}_\bullet((Q_0)_{\Delta=0}/C)).$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $\widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \mathrm{P}_\bullet^{(n)}$ est rationnellement n-élémentaire.

Démonstration. — Seule la dernière assertion demande une preuve. Par construction et grâce à la proposition 4.3.15, on a pour $p \geqslant n$:

$$\widetilde{\mathrm{Q}}_p^{(n)} = \eta\left(\prod_{r:\underline{\mathbf{n}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p}}} \widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)} \times_{\mathrm{Q}_n^{(n)}, r*} \mathrm{Q}_p^{(n)}/\mathrm{Q}_p^{(n)}\right).$$

Étant donné que la Δ-extension $\kappa(\widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)})/\kappa(\mathrm{Q}_n^{(n)})$ est engendrée par ses constantes, il s'ensuit que

$$(\widetilde{\mathrm{Q}}_p^{(n)})_{\Delta=0} = \eta\left(\prod_{r:\underline{\mathbf{n}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p}}} \widetilde{\mathrm{P}}_n^{(n)} \times_{\mathrm{P}_n^{(n)}, r*} \mathrm{P}_p^{(n)}/\mathrm{P}_p^{(n)}\right).$$

Une deuxième application de la proposition 4.3.15 permet de conclure. ■

Proposition 4.8.5. — *Soit $\widehat{K}/K$ une clôture normale de K et choisissons un plongement de (K, Δ)-corps $\widehat{K} \hookrightarrow \mathcal{O}(Q_0)$. Alors, il existe un isomorphisme de C-schémas semi-simpliciaux*

$$\mathrm{P}_\bullet^{(1)} \xrightarrow{\sim} \eta\left(\mathrm{Gal}_\bullet^\Delta(\widehat{K}/K) \times_C \widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(0)}\right).$$

(Ci-dessus, $\mathrm{Gal}_\bullet^\Delta(\widehat{K}/K)$ est le classifiant du pro-groupe de Galois différentiel de $\widehat{K}/K$; voir la définition 2.6.12.)

Démonstration. — En effet, le plongement $\widehat{K} \hookrightarrow \mathcal{O}(Q_0)$ induit un isomorphisme
$$\mathrm{Frac}(\widehat{K} \otimes_C \mathcal{O}(Q_0)^{\Delta=0}) \simeq \mathcal{O}(Q_0)^{\mathrm{td}}.$$
Or, si $(Q_0)_{\mathrm{td}}$ est le spectre du Δ-corps $\mathcal{O}(Q_0)^{\mathrm{td}}$, on a $\eta(\check{C}_\bullet(Q_0/K))_{\Delta=0} \simeq \eta(\check{C}_\bullet((Q_0)_{\mathrm{td}}/K))_{\Delta=0}$ grâce à la remarque 2.2.6(iii). Le résultat s'ensuit aussitôt. ■

Pour aller plus loin, nous devons malheureusement imposer quelques conditions techniques sur le choix de l'hyper-enveloppe différentielle $Q_\bullet$ de K. Ainsi, dans le reste de la sous-section, nous travaillerons sous l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.8.6. — L'hyper-enveloppe différentielle $Q_\bullet$ est une hyper-enveloppe universelle (voir la définition 4.6.6) et elle admet une structure cyclique (au sens de la définition 4.3.16). □

Remarque 4.8.7. — Vu le théorème 4.6.9, l'hypothèse 4.8.6 est, moralement, non restrictive car on s'attend à ce que le type d'homotopie feuilletée générique de K soit indépendant, à homotopie près, du choix de l'hyper-enveloppe différentielle de K. □

Le résultat suivant jouera un rôle fondamental dans l'analyse de la tour de Postnikov (4.52).

Proposition 4.8.8. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les schémas semi-simpliciaux $\widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}_{1+\bullet}$ et $\mathrm{P}^{(n+1)}_{1+\bullet}$ sont des hyper-recouvrements pro-génériques de $(Q_0)_{\Delta=0}$. De plus, il sont rationnellement n-tronqués et le morphisme canonique $\mathrm{P}^{(n+1)}_{1+\bullet} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}_{1+\bullet}$ est rationnellement n-élémentaire.*

Démonstration. — On a $\widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}_{1+\bullet} = (\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{1+\bullet})_{\Delta=0}$ et $\mathrm{P}^{(n+1)}_{1+\bullet} = (\mathrm{Q}^{(n+1)}_{1+\bullet})_{\Delta=0}$. Par construction, $\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_\bullet$ et $\mathrm{Q}^{(n+1)}_\bullet$ sont des hyper-recouvrements pro-génériques rationnellement n-tronqués de $\mathrm{Spec}(K)$. D'après le lemme 4.4.14 et le corollaire 4.3.10, il s'ensuit que $\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{1+\bullet}$ et $\mathrm{Q}^{(n+1)}_{1+\bullet}$ sont des hyper-recouvrements pro-génériques rationnellement n-tronqués de Q_0. Or, Q_0 est le spectre d'une enveloppe universelle de K et, d'après le lemme 4.6.10, $\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}\mathrm{Q}^{(n+1)}_{1+\bullet} = \mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{1+\bullet} = \mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}Q_{1+\bullet}$ est une hyper-enveloppe universelle $n-1$-tronquée de Q_0. En appliquant le corollaire 4.7.5 aux morphismes rationnellement n-élémentaires $\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{1+\bullet} \longrightarrow \mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}Q_{1+\bullet}$ et $\mathrm{Q}^{(n+1)}_{1+\bullet} \longrightarrow \mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}Q_{1+\bullet}$, on obtient que $\widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}_{1+\bullet}$ et $\mathrm{P}^{(n+1)}_{1+\bullet}$ sont des hyper-recouvrements pro-génériques de $(Q_0)_{\Delta=0}$ rationnellement n-tronqués. Ceci étant, le fait que $\mathrm{P}^{(n+1)}_{1+\bullet} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}_{1+\bullet}$ est rationnellement n-élémentaire découle aussitôt du fait qu'il induit des isomorphismes en degrés $\leqslant n-1$. ■

Proposition 4.8.9. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons des isomorphismes canoniques*
$$\eta(\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}\mathrm{Q}^{(n+1)}_{1+\bullet})_{\Delta=0} \simeq \eta(\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{1+\bullet})_{\Delta=0} \simeq \eta(\mathrm{cosk}^{(Q_0)_{\Delta=0}}_{n-1}\,\mathrm{P}^{(n+1)}_{1+\bullet}).$$

Démonstration. — En effet, comme on l'a remarqué dans la preuve de la proposition 4.8.8, $\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}\mathrm{Q}^{(n+1)}_{1+\bullet} = \mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}Q_{1+\bullet}$ est une hyper-enveloppe universelle $n-1$-tronquée de Q_0. Le théorème 4.7.3 entraîne que le $(Q_0)_{\Delta=0}$-schéma semi-simplicial $\eta(\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}Q^{(n+1)}_{1+\bullet})_{\Delta=0}$ est rationnellement $n-1$-tronqué. Il s'ensuit un isomorphisme birationnel en chaque degré
$$\eta(\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}Q^{(n+1)}_{1+\bullet})_{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{cosk}^{(Q_0)_{\Delta=0}}_{n-1}\left(\eta(\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}Q^{(n+1)}_{1+\bullet})_{\Delta=0}\right) = \mathrm{cosk}^{(Q_0)_{\Delta=0}}_{n-1}\,\mathrm{P}^{(n+1)}_{1+\bullet}.$$
Par ailleurs, le morphisme évident
$$\eta(\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}\mathrm{Q}^{(n+1)}_{1+\bullet})_{\Delta=0} \longrightarrow \eta(\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{1+\bullet})_{\Delta=0}$$
et dominant en chaque degré et induit un isomorphisme en degré $\leqslant n-1$. Étant donné que la source est rationnellement $n-1$-tronquée, ce morphisme est nécessairement inversible. ■

Nous avons supposé que notre hyper-enveloppe universelle $Q_\bullet$ est munie d'une structure cyclique pour les besoins de la preuve du résultat suivant.

Théorème 4.8.10. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant i_0 \leqslant n+1$, on a un isomorphisme canonique*
$$\eta\left(\prod_{0\leqslant i\leqslant n+1,\, i\neq i_0}\left(\mathrm{Q}^{(n+1)}_n \times_{\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_n,\, d_i} \widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1}/\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1}\right)\right)_{\Delta=0} \simeq \left(\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1}\right)_{\Delta=0} = \widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}_{n+1}.$$

Démonstration. — Le cas $i_0 = 0$ découle de la proposition 4.8.9. En effet, considérons les morphismes

$$\eta(\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}\mathrm{Q}^{(n+1)}_{1+\bullet}) \longrightarrow \eta(\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{1+\bullet}) \longrightarrow \eta(\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}\mathrm{Q}^{(n)}_{1+\bullet}) = \mathrm{Q}^{(n)}_{1+\bullet}. \tag{4.53}$$

(La dernière égalité provient du corollaire 4.3.10 et du fait que le (K,Δ)-schéma semi-simplicial $\mathrm{Q}^{(n)}_\bullet$ est rationnellement $n-1$-tronqué.) Ces morphismes sont rationnellement $n-1$-élémentaires. En notant $U_\bullet = \eta(\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{1+\bullet})$, nous avons donc, d'après la proposition 4.3.15,

$$\eta\left(\mathrm{cosk}^{Q_0}_{n-1}\mathrm{Q}^{(n+1)}_{1+\bullet}\right)_n = \eta\left(\prod_{0\leqslant i\leqslant n}\left(\mathrm{Q}^{(n+1)}_n \times_{U_{n-1},d_i} U_n/U_n\right)\right).$$

Ainsi, la proposition 4.8.9 fournit un isomorphisme canonique

$$\eta\left(\prod_{0\leqslant i\leqslant n}\left(\mathrm{Q}^{(n+1)}_n \times_{U_{n-1},d_i} U_n/U_n\right)\right)_{\Delta=0} \simeq (U_n)_{\Delta=0}. \tag{4.54}$$

D'autre part, le morphisme $\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1} \longrightarrow U_n$ correspond à une Δ-extension engendrée par les constantes. (En effet, il est en ainsi de la Δ-extension $\kappa(\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1})/\kappa(\mathrm{Q}^{(n)}_{n+1})$ et $\kappa(U_n)$ contient $\kappa(\mathrm{Q}^{(n)}_{n+1})$ d'après (4.53).) Il est donc loisible de faire un chagement de base suivant $\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1} \longrightarrow U_n$ dans (4.54), pour obtenir l'isomorphisme recherché :

$$\eta\left(\prod_{0\leqslant i\leqslant n}\left(\mathrm{Q}^{(n+1)}_n \times_{\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_n,d_{1+i}} \widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1}/\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1}\right)\right)_{\Delta=0} \simeq \left(\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1}\right)_{\Delta=0}.$$

Ceci termine la preuve dans le cas $i_0 = 0$.

Supposons maintenant que $1 \leqslant i_0 \leqslant n+1$ et expliquons comment se ramener au cas précédent en utilisant la structure cyclique sur $Q_\bullet$. D'après la proposition 4.3.18, on dispose de structures cycliques induites sur les (K,Δ)-schémas semi-simpliciaux $\mathrm{Q}^{(r)}_\bullet$ et $\widetilde{\mathrm{Q}}^{(r)}_\bullet$, pour tout $r \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour chaque $1 \leqslant j \leqslant n+1$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Q}^{(n+1)}_n & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_n & \xleftarrow{d_{j+i_0}} & \widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1} \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \wr\downarrow (c_{n+1})^{\circ i_0} \\
\mathrm{Q}^{(n+1)}_n & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_n & \xleftarrow{d_j} & \widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1}
\end{array}$$

où les deux flèches verticaux non nommées sont des composées d'un même nombre de c_n. (Ci-dessus, nous avons noté d_{j+i_0} au lieu de $d_{j+i_0 \bmod n+1}$.) Nous en déduisons un isomorphisme de Δ-schémas

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant n+1}\left(\mathrm{Q}^{(n+1)}_n \times_{\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_n,d_{j+i_0}} \widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1}/\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1}\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{1\leqslant j\leqslant n+1}\left(\mathrm{Q}^{(n+1)}_n \times_{\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_n,d_j} \widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1}/\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1}\right)$$

au-dessus du Δ-automorphisme $(c_{n+1})^{\circ i_0}$ de $\widetilde{\mathrm{Q}}^{(n)}_{n+1}$. Ceci permet de conclure. ■

Avan aller plus loin, on doit faire une petite digression. Ainsi, dans l'énoncé suivant et jusqu'au corollaire 4.8.14, il n'y a pas besoin de supposer que K est algébriquement clos.

Proposition 4.8.11. — *Soit K un Δ-corps de caractéristique nulle et, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soit L_i/K une Δ-extension pseudo-normale de type fini avec $L_i^{\Delta=0} = K^{\Delta=0}$. On suppose que* $\mathrm{Frac}(L_i \otimes_K L_j)^{\Delta=0} = K^{\Delta=0}$ *pour* $1 \leqslant i < j \leqslant 3$. *Alors, le (K,Δ)-schéma $X = \mathrm{Spec}(L_1 \otimes_K L_2 \otimes_K L_3)$ possède un quotient discret effectif $X_{\Delta=0}$ et l'action rationnelle de $\prod_{i=1}^3 \mathrm{Gal}^\Delta(L_i^{\mathrm{td}}/K)$ sur $X_{\mathrm{td}} = \mathrm{Spec}(L_1^{\mathrm{td}} \otimes_K L_2^{\mathrm{td}} \otimes_K L_3^{\mathrm{td}})$ induit une action régulière de ce groupe sur $X_{\Delta=0}$. Cette dernière action admet un factorisation à travers d'un morphisme de $K^{\Delta=0}$-groupes algébriques*

$$\phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i : \prod_{i=1}^3 \mathrm{Gal}^\Delta(L_i^{\mathrm{td}}/K) \longrightarrow A$$

qui fait de $X_{\Delta=0}$ un A-torseur. De plus, A est commutatif et les $\phi_i : \mathrm{Gal}^{\Delta}(L_i^{\mathrm{td}}/K) \longrightarrow A$ sont surjectifs.

Démonstration. — L'existence du quotient discret effectif $X_{\Delta=0}$ est assurée par le corollaire 3.2.9. Quitte à remplacer les L_i par leurs noyaux totalement décomposables, on peut supposer que les Δ-extensions L_i/K sont normales. (Ceci ne change pas $X_{\Delta=0}$; voir la preuve du corollaire 3.2.9.) D'après la proposition 2.6.5, X est alors un torseur rationnel sous $G = \prod_{i=1}^{3} \mathrm{Gal}^{\Delta}(L_i/K)$ défini sur K. Il s'ensuit que $X_{\Delta=0}$ est un G-schéma rationnel défini sur $K^{\Delta=0}$. Or, le théorème 2.6.17 assure que tout point de G à valeur dans une extension finie de $K^{\Delta=0}$ agit sur $X_{\Delta=0}$. Ceci montre que l'action de G sur $X_{\Delta=0}$ est régulière.

Soit L'/K une Δ-extension normale de type fini qui domine les L_i/K. On pose $K' = K \otimes_{K^{\Delta=0}} L'^{\Delta=0}$ et $L'_i = L_i \otimes_{K^{\Delta=0}} L'^{\Delta=0}$. Fixons des plongements de (K, Δ)-corps $L_i \hookrightarrow L'$. Nous en déduisons des plongements de (K', Δ)-corps $L'_i \hookrightarrow L'$. Grâce au théorème 2.8.1, on obtient des morphismes surjectifs de $K'^{\Delta=0}$-groupes algébriques

$$\psi_i : \mathrm{Gal}^{\Delta}(L'/K') \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}^{\Delta}(L'_i/K') = \mathrm{Gal}^{\Delta}(L_i/K) \otimes_{K^{\Delta=0}} K'^{\Delta=0}.$$

Fixons des entiers $1 \leqslant i < j \leqslant 3$. L'hypothèse $\mathrm{Frac}(L_i \otimes_K L_j)^{\Delta=0} = K^{\Delta=0}$ entraîne que la (K, Δ)-algèbre $L_i \otimes_K L_j$ est simple. (En effet, si $\mathfrak{p} \subset L_i \otimes_K L_j$ est un Δ-idéal, la Δ-extension $\mathrm{Frac}(L_i \otimes_K L_j)/K$ est totalement décomposée par $\kappa(\mathfrak{p})$. D'après la proposition 2.3.8(a), le degré de transcendance de $\kappa(\mathfrak{p})/K$ est plus grand ou égal à celui de $\mathrm{Frac}(L_i \otimes_K L_j)/K$, ce qui n'est possible que si $\mathfrak{p}$ est l'idéal nul.) Il s'ensuit que les sous-Δ-corps L'_i, $L'_j \subset L'$ engendrent une copie de $\mathrm{Frac}(L'_i \otimes_{K'} L'_j)$ dans L'. Le morphisme

$$(\psi_i, \psi_j) : \mathrm{Gal}^{\Delta}(L'/K') \longrightarrow \mathrm{Gal}^{\Delta}(L'_i/K') \times_{K'^{\Delta=0}} \mathrm{Gal}^{\Delta}(L'_j/K')$$

est donc surjectif. Ceci étant vrai pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, on peut appliquer le lemme 4.8.12 ci-dessous. Il existe donc un $K'^{\Delta=0}$-groupe commutatif A' et des morphismes surjectifs $\phi_i : \mathrm{Gal}^{\Delta}(L'_i/K') \twoheadrightarrow A'$ tels que la suite

$$\mathrm{Gal}^{\Delta}(L'/K') \xrightarrow{(\psi_i)_i} \prod_{i=1}^{3} \mathrm{Gal}^{\Delta}(L'_i/K') \xrightarrow{\sum_i \phi_i} A' \longrightarrow 0 \tag{4.55}$$

est exacte.

On ne restreint pas la généralité en supposant que la Δ-extension L'/K' est engendrée par les sous-Δ-extensions L'_i/K'. (Cette propriété se traduit par l'injectivité du premier morphisme dans (4.55).) Le morphisme $X \longrightarrow X_{\Delta=0}$ est un épimorphisme G-équivariant. On dispose d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(L') & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(K'^{\Delta=0}) & \xrightarrow{u} & X_{\Delta=0} \end{array} \tag{4.56}$$

où la flèche horizontale supérieure correspond au Δ-morphisme évident $\otimes_{i=1}^{3}(L_i/K) \longrightarrow L'$. Le morphisme

$$\mathrm{Spec}(L') \longrightarrow X \times_{X_{\Delta=0}, u} \mathrm{Spec}(K'^{\Delta=0}),$$

induit par le carré (4.56), est un isomorphisme birationnel. (Ceci découle du fait que le corps des fonctions rationnelles de $X \times_{X_{\Delta=0}, u} \mathrm{Spec}(K'^{\Delta=0})$ est une Δ-extension de K' engendrée par les L'_i/K'.) D'autre part, le carré (4.56) est $\mathrm{Gal}^{\Delta}(L'/K')$-équivariant et $\mathrm{Spec}(L')$ est un $\mathrm{Gal}^{\Delta}(L'/K')$-torseur rationnel défini sur K'. Il s'ensuit que le stabilisateur du $K'^{\Delta=0}$-point u de $X_{\Delta=0}$ est donné par $\mathrm{Gal}^{\Delta}(L'/K')$, identifié à un sous-groupe de $G' = G \otimes_{K^{\Delta=0}} K'^{\Delta=0}$ par $(\psi_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$. Ce sous-groupe étant normal, nous déduisons que l'action de G' sur $X_{\Delta=0} \otimes_{K^{\Delta=0}} K'^{\Delta=0}$ se factorise par A' et qu'elle en fait un torseur sous A'. Le quotient A' de G' provient alors du quotient A de G par le noyau du morphisme $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X_{\Delta=0})$. Toutes les assertions de la proposition sont maintenant démontrées. ■

Le lemme suivant a servi dans la preuve de la proposition 4.8.11.

Lemme 4.8.12. — *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soient G_1, G_2, G_3 et H des k-groupes. On suppose donné un morphisme de k-groupes*

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : H \longrightarrow G_1 \times_k G_2 \times_k G_3$$

tel que les morphismes $(\psi_i, \psi_j) : H \longrightarrow G_i \times_k G_j$ *sont surjectifs pour* $1 \leqslant i < j \leqslant 3$. *Alors, il existe un k-groupe commutatif A et des morphismes surjectifs de k-groupes* $\phi_i : G_i \twoheadrightarrow A$ *tels que*

$$H \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^{3} G_i \xrightarrow{\sum_{i=1}^{3}\phi_i} A \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de k-groupes.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que l'image de ψ est un sous-groupe distingué de $\prod_{i=1}^{3} G_i$, que le conoyau de ψ est un k-groupe commutatif A et que les k-morphismes induits $G_i \longrightarrow A$ sont surjectifs. Tout ceci se vérifie après passage à la clôture algébrique du corps de base. (On utilise ici que k est de caractéristique nulle.) Ainsi, nous supposerons que k est algébriquement clos et nous identifierons un k-groupe avec le groupe de ses k-points.

Notons $G = G_1 \times_k G_2 \times_k G_3$ et identifions les G_i à des sous-k-groupes de G. On ne restreint pas la généralité en supposant que ψ est l'inclusion d'un sous-groupe $H \subset G$. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, le sous-lemme 4.8.13 ci-dessous entraîne que $H_i = H \cap G_i$ est distingué dans G_i. Ainsi, quitte à remplacer G_i par G_i/H_i et H par $H/H_1H_2H_3$, on peut supposer que $H \cap G_i = 1$. Les morphismes $(\psi_i, \psi_j) : H \longrightarrow G_i \times_k G_j$ sont alors des isomorphismes pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant 3$.

Considérons le morphisme $u : G_1 \times_k G_2 \longrightarrow G_3$ donné par la composition $\psi_3 \circ (\psi_1, \psi_2)^{-1}$. On a alors

$$H = \{(g_1, g_2, u(g_1, g_2));\ g_1 \in G_1 \text{ et } g_2 \in G_2\}.$$

Dire que $(\psi_1, \psi_3) : H \longrightarrow G_1 \times_k G_3$ est surjectif, revient à dire que le morphisme $u(1, -) : G_2 \longrightarrow G_3$ est surjectif. De même, $u(-, 1) : G_1 \longrightarrow G_3$ est surjectif. Étant donné que u est un homomorphisme de groupes, tout élément de l'image de $u(1, -)$ commute avec tout élément de l'image de $u(-, 1)$. Ceci entraîne que G_3 est commutatif. Par symétrie, il en est de même de G_1 et G_2. En particulier, H est distingué dans G et nous pouvons considérer $A = G/H$ et les morphismes $\phi_i : G_i \longrightarrow A$ tels que la projection canonique $\phi : G \longrightarrow A$ est égale à $\sum_{i=1}^{3} \phi_i$.

Il reste à voir que les ϕ_i sont surjectifs : on traite seulement le cas $i = 1$. Si $a \in A$, il existe $(g_1, g_2, g_3) \in G$ tel que $a = \sum_{i=1}^{3} \phi_i(g_i)$. Or, par construction, on a

$$H = \{(h_1, h_2, h_3) \in G;\ \phi_1(h_1) + \phi_2(h_2) + \phi_3(h_3) = 0\}.$$

Étant donné que $(\psi_2, \psi_3) : H \longrightarrow G_2 \times_k G_3$ est surjectif, il existe un triplet de la forme (h_1, g_2, g_3) dans H. Il s'ensuit que $a = \phi_1(g_1 - h_1)$. ∎

Sous-lemme 4.8.13. — *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soient* G_1 *et* G_2 *des k-groupes. On pose* $G = G_1 \times_k G_2$, *et on identifie* G_1 *et* G_2 *à des sous-k-groupes de G. Soit* $H \subset G$ *un sous-k-groupe tel que le morphisme* $\mathrm{pr}_1|_H : H \longrightarrow G_1$ *est surjectif. Alors,* $H \cap G_1$ *est distingué dans* G_1.

Démonstration. — Il est suffisant de traiter le cas où k est algébriquement clos et nous identifions un k-groupe avec son groupe des k-points. Soient $h_1 \in H \cap G_1$ et $g_1 \in G_1$ et vérifions que $g_1 h_1 g_1^{-1} \in H \cap G_1$. L'application $H \longrightarrow G_1$ étant surjective, on peut trouver $g_2 \in G_2$ tel que $g = g_1 g_2 \in H$. Puisque h_1 commute avec g_2, on a $g_1 h_1 g_1^{-1} = g h_1 g^{-1}$. Ceci permet de conclure puisque $g_1 h_1 g_1^{-1} \in G_1$ et $g h_1 g^{-1} \in H$. ∎

Nous aurons besoin d'une généralisation immédiate de la proposition 4.8.11 qui s'en déduit par récurrence.

Corollaire 4.8.14. — *Soit K un* Δ*-corps de caractéristique nulle et soit* $(L_i/K)_{i\in I}$ *une famille finie de* Δ*-extensions pseudo-normales de type fini avec* $L_i^{\Delta=0} = K^{\Delta=0}$. *On suppose que I contient au moins 3 éléments et que, pour tout* $i_0 \in I$, $\mathrm{Frac}(\otimes_{i\in I\smallsetminus\{i_0\}} L_i/K)^{\Delta=0} = K^{\Delta=0}$. *Alors, le* (K, Δ)*-schéma* $X = \mathrm{Spec}(\otimes_{i\in I} L_i/K)$ *possède un quotient discret effectif* $X_{\Delta=0}$ *et l'action rationnelle de* $\prod_{i\in I} \mathrm{Gal}^{\Delta}(L_i^{\mathrm{td}}/K)$ *sur* $X_{\mathrm{td}} = \mathrm{Spec}(\otimes_{i\in I} L_i^{\mathrm{td}}/K)$ *induit une action régulière de ce groupe sur* $X_{\Delta=0}$. *Cette dernière action admet une factorisation à travers d'un morphisme de* $K^{\Delta=0}$*-groupes algébriques*

$$\phi = \sum_{i\in I} \phi_i : \prod_{i\in I} \mathrm{Gal}^{\Delta}(L_i^{\mathrm{td}}/K) \longrightarrow A$$

qui fait de $X_{\Delta=0}$ *un A-torseur. De plus, A est commutatif et les* $\phi_i : \mathrm{Gal}^{\Delta}(L_i^{\mathrm{td}}/K) \longrightarrow A$ *sont surjectifs.*

Reprenons les notations et les hypothèses du début de cette sous-section (et notamment les notations 4.8.2 et l'hypothèse 4.8.6). Nous allons appliquer le corollaire 4.8.14 à la situation décrite dans le théorème 4.8.10 pour déduire des informations sur la tour de Postnikov du type d'homotopie feuilletée (voir la définition 4.8.1). Tout d'abord, introduisons quelques notations.

Notations 4.8.15. — Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons le noyau totalement décomposable $\kappa(\mathrm{Q}_n^{(n+1)})^{\mathrm{td}}$ de la Δ-extension $\kappa(\mathrm{Q}_n^{(n+1)})/\kappa(\widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)})$. Étant donné que $\kappa(\mathrm{Q}_n^{(n+1)})$ est différentiellement clos et que $\kappa(\widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)})^{\Delta=0} = \kappa(\mathrm{Q}_n^{(n+1)})^{\Delta=0}$, le Δ-corps $\kappa(\mathrm{Q}_n^{(n+1)})^{\mathrm{td}}$ est une clôture normale de $\kappa(\widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)})$. On note

$$\mathrm{G}_n^{(n+1)} = \mathrm{Gal}^{\Delta}(\kappa(\mathrm{Q}_n^{(n+1)})^{\mathrm{td}}/\kappa(\widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)}))$$

son groupe de Galois différentiel ; il s'agit en fait d'un pro-groupe algébrique défini sur $\kappa(\widetilde{\mathrm{P}}_n^{(n)})$. On note aussi $(\mathrm{Q}_n^{(n+1)})_{\mathrm{td}}$ le spectre du Δ-corps $\kappa(\mathrm{Q}_n^{(n+1)})^{\mathrm{td}}$. Ainsi, $(\mathrm{Q}_n^{(n+1)})_{\mathrm{td}}$ est un torseur rationnel sous $\mathrm{G}_n^{(n+1)}$ défini sur $\kappa(\widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)})$.

On définit le pro-schéma semi-simplicial $\mathrm{G}_\bullet^{(n+1)}$ comme étant la source du morphisme n-élémentaire $\mathrm{G}_\bullet^{(n+1)} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)}$ associé à $\mathrm{G}_n^{(n+1)} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}_n^{(n)}$. De même, on définit le pro-schéma semi-simplicial $(\mathrm{Q}_\bullet^{(n+1)})_{\mathrm{td}}$ en appliquant $\eta(-)$ à la source du morphisme n-élémentaire de but $\widetilde{\mathrm{Q}}_\bullet^{(n)}$ associé à $(\mathrm{Q}_n^{(n+1)})_{\mathrm{td}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)}$. Clairement, on a un morphisme évident $\mathrm{Q}_\bullet^{(n+1)} \longrightarrow (\mathrm{Q}_\bullet^{(n+1)})_{\mathrm{td}}$ qui est un hyper-recouvrement pro-générique relatif, ce qui entraîne que $(\mathrm{Q}_\bullet^{(n+1)})_{\mathrm{td}}$ est le spectre d'un sous-Δ-corps semi-cosimplicial de $\kappa(\mathrm{Q}_\bullet^{(n+1)})$. Les morphismes $\mathrm{Q}_\bullet^{(n+1)} \longrightarrow (\mathrm{Q}_\bullet^{(n+1)})_{\mathrm{td}}$ et $(\mathrm{Q}_\bullet^{(n+1)})_{\mathrm{td}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Q}}_\bullet^{(n)}$ sont rationnellement n-élémentaires. □

Lemme 4.8.16. — *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{G}_p^{(n+1)}$ est un pro-schéma en groupes défini sur $\widetilde{\mathrm{P}}_p^{(n)}$ et $(\mathrm{Q}_p^{(n+1)})_{\mathrm{td}}$ est un torseur rationnel sous $\mathrm{G}_p^{(n+1)}$ défini sur $\widetilde{\mathrm{Q}}_p^{(n)}$. De plus, $\kappa((\mathrm{Q}_p^{(n+1)})_{\mathrm{td}})$ s'identifie naturellement au noyau totalement décomposable de la Δ-extension $\kappa(\mathrm{Q}_p^{(n+1)})/\kappa(\widetilde{\mathrm{Q}}_p^{(n)})$, i.e., on a $\kappa((\mathrm{Q}_p^{(n+1)})_{\mathrm{td}}) = \kappa(\mathrm{Q}_p^{(n+1)})^{\mathrm{td}}$.*

Démonstration. — Lorsque $p \leqslant n$, il n'y a rien à montrer. Grâce à la proposition 4.3.15, on a pour $p \geqslant n$:

$$\mathrm{G}_p^{(n+1)} = \prod_{r:\underline{\mathbf{n}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p}}} \left(\mathrm{G}_n^{(n+1)} \times_{\widetilde{\mathrm{P}}_n^{(n)},r*} \widetilde{\mathrm{P}}_p^{(n)}/\widetilde{\mathrm{P}}_p^{(n)}\right) \qquad \mathrm{Q}_p^{(n+1)} = \eta\left(\prod_{r:\underline{\mathbf{n}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p}}} \left(\mathrm{Q}_n^{(n+1)} \times_{\widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)},r*} \widetilde{\mathrm{Q}}_p^{(n)}/\widetilde{\mathrm{Q}}_p^{(n)}\right)\right)$$

$$\text{et} \qquad (\mathrm{Q}_p^{(n+1)})_{\mathrm{td}} = \eta\left(\prod_{r:\underline{\mathbf{n}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{p}}} \left((\mathrm{Q}_n^{(n+1)})_{\mathrm{td}} \times_{\widetilde{\mathrm{Q}}_n^{(n)},r*} \widetilde{\mathrm{Q}}_p^{(n)}/\widetilde{\mathrm{Q}}_p^{(n)}\right)\right).$$

La première assertion découle de la première et troisième formule ci-dessus. Le fait que $\kappa((\mathrm{Q}_p^{(n+1)})_{\mathrm{td}})$ est le noyau totalement décomposable de la Δ-extension $\kappa(\mathrm{Q}_p^{(n+1)})/\kappa(\widetilde{\mathrm{Q}}_p^{(n)})$ découle du lemme 2.2.11, du corollaire 2.2.12, et de la deuxième et troisième formule ci-dessus. ■

On arrive maintenant au résultat principal de cette sous-section. Ce résultat sera précisé et amélioré dans la sous-section 4.10.

Théorème 4.8.17. — *Pour tout $n \geqslant 1$ et $p \in \mathbb{N}$, le pro-$\widetilde{\mathrm{P}}_p^{(n)}$-schéma en groupes $\mathrm{G}_p^{(n+1)}$ agit rationnellement sur le $\widetilde{\mathrm{P}}_p^{(n)}$-schéma $\mathrm{P}_p^{(n+1)}$. Cette action se factorise par un quotient commutatif*

$$\phi_p^{(n+1)} : \mathrm{G}_p^{(n+1)} \twoheadrightarrow \mathrm{A}_p^{(n+1)} \tag{4.57}$$

de telle sorte que $\mathrm{P}_p^{(n+1)}$ devient un torseur rationnel sous $\mathrm{A}_p^{(n+1)}$. De plus, les propriétés suivantes sont satisfaites.

(a) *Les pro-schémas* $\mathrm{A}_p^{(n+1)}$ *s'organisent naturellement en un pro-schéma semi-simplicial* $\mathrm{A}_\bullet^{(n+1)}$ *fournissant ainsi un triangle commutatif de pro-schémas semi-simpliciaux*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_\bullet^{(n+1)} \arrow[r, "\phi_\bullet^{(n+1)}"] \arrow[dr, bend right] & \mathrm{A}_\bullet^{(n+1)} \arrow[d] \\ & \widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)}. \end{tikzcd}$$

(b) *Le pro-*$\widetilde{\mathrm{P}}_n^{(n)}$*-schéma en groupes* $\mathrm{A}_n^{(n+1)}$ *est trivial, i.e.,* $\mathrm{A}_n^{(n+1)} = \widetilde{\mathrm{P}}_n^{(n)}$. *De plus, pour tout* $0 \leqslant s \leqslant n+1$, *la composition de*

$$\mathrm{G}_n^{(n+1)} \times_{\widetilde{\mathrm{P}}_n^{(n)}, d_s} \widetilde{\mathrm{P}}_{n+1}^{(n)} \hookrightarrow \left(\prod_{0 \leqslant i \leqslant n+1} \left(\mathrm{G}_n^{(n+1)} \times_{\widetilde{\mathrm{P}}_n^{(n)}, d_i} \widetilde{\mathrm{P}}_{n+1}^{(n)} / \widetilde{\mathrm{P}}_{n+1}^{(n)} \right) \right) \simeq \mathrm{G}_{n+1}^{(n+1)} \longrightarrow \mathrm{A}_{n+1}^{(n+1)}$$

est surjective.

(c) *Le schéma semi-simplicial* $\eta(\mathrm{A}_{1+\bullet}^{(n+1)})$ *est un hyper-recouvrement pro-générique de* $(Q_0)_{\Delta=0}$ *qui est rationnellement n-tronqué. De plus, le morphisme* $\mathrm{A}_{1+\bullet}^{(n+1)} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}_{1+\bullet}^{(n)}$ *est n-élémentaire.*

Démonstration. — Puisque le $\widetilde{\mathrm{P}}_p^{(n)}$-schéma en groupes $\mathrm{G}_p^{(n+1)}$ agit rationnellement sur le $(\widetilde{\mathrm{Q}}_p^{(n)}, \Delta)$-schéma $(\mathrm{Q}_p^{(n+1)})_{\mathrm{td}}$, il agit rationnellement sur le $\widetilde{\mathrm{P}}_p^{(n)}$-schéma $\mathrm{P}_p^{(n+1)}$. (En effet, on a $\mathrm{P}_p^{(n+1)} = ((\mathrm{Q}_p^{(n+1)})_{\mathrm{td}})_{\Delta=0}$ et $\widetilde{\mathrm{P}}_p^{(n)} = (\widetilde{\mathrm{Q}}_p^{(n)})_{\Delta=0}$.) Puisque $\mathrm{P}_n^{(n+1)} = \widetilde{\mathrm{P}}_n^{(n)}$, cette action est triviale si $p = n$ et le groupe $\mathrm{A}_n^{(n+1)}$ est nécessairement trivial. Lorsque $p = n+1$, le théorème 4.8.10 et le corollaire 4.8.14 fournissent un quotient commutatif $\mathrm{A}_{n+1}^{(n+1)}$ par lequel $\mathrm{G}_{n+1}^{(n+1)}$ agit sur $\mathrm{P}_{n+1}^{(n+1)} = (\mathrm{Q}_{n+1}^{(n+1)})_{\Delta=0}$. Aussi, la seconde assertion dans (b) est satisfaite.

D'après la proposition 4.8.8, $\mathrm{P}_{1+\bullet}^{(n+1)}$ est rationnellement n-tronqué. De même, $\mathrm{P}_{1+\bullet}^{(n)}$ est rationnellement $n-1$-tronqué et puisque $\widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \mathrm{P}_\bullet^{(n)}$ et $\mathrm{G}_\bullet^{(n+1)} \longrightarrow \mathrm{P}_\bullet^{(n)}$ sont rationnellement n-élémentaires, il s'ensuit que $\widetilde{\mathrm{P}}_{1+\bullet}^{(n)}$ et $\mathrm{G}_{1+\bullet}^{(n+1)}$ sont rationnellement n-tronqués. Ainsi, d'après ce qui précède, le morphisme rationnel

$$\mathrm{G}_{1+\bullet}^{(n+1)} \times_{\widetilde{\mathrm{P}}_{1+\bullet}^{(n)}} \mathrm{P}_{1+\bullet}^{(n+1)} \dashrightarrow \mathrm{P}_{1+\bullet}^{(n+1)},$$

donné en degré $q \in \mathbb{N}$ par l'action rationnelle de $\mathrm{G}_{1+q}^{(n+1)}$ sur $\mathrm{P}_{1+q}^{(n+1)}$, se factorise par

$$\iota_n^!((\mathrm{A}_{1+\bullet}^{(n+1)})_{\bullet \leqslant n}) \times_{\widetilde{\mathrm{P}}_{1+\bullet}^{(n)}} \mathrm{P}_{1+\bullet}^{(n+1)} \dashrightarrow \mathrm{P}_{1+\bullet}^{(n+1)}.$$

De plus, en degré $q \in \mathbb{N}$, ce nouveau morphisme fait de $\mathrm{P}_{1+q}^{(n+1)}$ un torseur rationnel sous un schéma en groupes commutatif, puisque c'est ainsi lorsque $q = n$. Ceci démontre la première assertion de l'énoncé, i.e., l'existence des épimorphismes (4.57). La partie (a) est alors une conséquence immédiate de l'unicité de ces épimorphismes et du fait que les actions rationnelles de $\mathrm{G}_p^{(n+1)}$ sur $\mathrm{P}_p^{(n+1)}$ sont compatibles aux structures semi-simpliciales.

Il reste à montrer la partie (c). D'après la proposition 4.8.8, on dispose de propriétés similiares pour le schéma semi-simplicial $\mathrm{P}_{1+\bullet}^{(n+1)}$. Puisque ce dernier est un torseur rationnel en chaque degré sous $\mathrm{A}_{1+\bullet}^{(n+1)}$, il s'ensuit aussitôt que $\eta(\mathrm{A}_{1+\bullet}^{(n+1)})$ est un hyper-recouvrement pro-générique de $(Q_0)_{\Delta=0}$ rationnellement n-tronqué et que le morphisme $\eta(\mathrm{A}_{1+\bullet}^{(n+1)}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}_{1+\bullet}^{(n)}$ est rationnellement n-élémentaire. Il reste à voir que cette dernière propriété entraîne que $\mathrm{A}_{1+\bullet}^{(n+1)} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}_{1+\bullet}^{(n)}$ est n-élémentaire. Ceci découle aussitôt du fait qu'un morphisme de pro-schémas en groupes est un isomorphisme s'il est un isomorphisme birationnel. ■

Remarque 4.8.18. — Si $S_\bullet$ est un schéma semi-simplicial, on utilisera l'expression « $S_\bullet$-schéma semi-simplicial en groupes » pour signifier un objet en groupes dans la catégorie des $S_\bullet$-schémas semi-simpliciaux. Il est clair que $\mathrm{A}_\bullet^{(n+1)}$ est un pro-$\widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)}$-schéma simplicial en groupes commutatif et que $\phi_\bullet^{(n+1)}$ est un morphisme de pro-$\widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)}$-schémas simpliciaux en groupes. □

4.9. Autour de la descente fidèlement plate. —

Dans cette sous-section, nous regroupons quelques résultats autour de la descente fidèlement plate (au sens de [**3**, Exposé VIII]). Ces résultats serviront dans la sous-section 4.10.

Définition 4.9.1. — *Soit $X_\bullet$ un schéma semi-simplicial. Étant donné un X_n-schéma Y (pour un entier fixé $n \in \mathbb{N}$), on note $Y(i) = Y \times_{X_n, d_i} X_{n+1}$ (pour $0 \leqslant i \leqslant n+1$) et $Y(i,j) = Y \times_{X_n, d_{i,j}} X_{n+2}$ (pour $0 \leqslant i < j \leqslant n+2$) avec $d_{i,j} = d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i$.*

Une donnée de descente *sur un X_n-schéma Y est une famille $(u_{rs} : Y(s) \xrightarrow{\sim} Y(r))_{0 \leqslant r,s \leqslant n+1}$ d'isomorphismes de X_{n+1}-schémas telle que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *$u_{rr} = \mathrm{id}_{Y(r)}$ et $u_{rs} \circ u_{st} = u_{rt}$ pour tout $0 \leqslant r,\ s,\ t \leqslant n+1$;*

(ii) *pour tout $0 \leqslant r < s < t \leqslant n+2$, le triangle*

$$\begin{tikzcd} Y(s,t) \arrow[rr, "u_{r,t-1}"] \arrow[dr, "u_{rs}"'] & & Y(r,s) \\ & Y(r,t) \arrow[ur, "u_{s-1,t-1}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.58}$$

est commutatif (conditon de cocycle).

Les X_n-schémas munis d'une donnée de descente forment une catégorie d'une manière évidente ; elle sera notée $\mathrm{Desc}_n(X)$.

Remarque 4.9.2. — Gardons les notations de la définition 4.9.1. Si le schéma semi-simplicial $X_\bullet$ est augmenté, on dispose d'un foncteur évident de la catégorie Sch/X_{-1} des X_{-1}-schémas dans $\mathrm{Desc}_n(X)$ qui envoie un X_{-1}-schéma B sur le X_n-schéma $B \times_{X_{-1}} X_n$ et la famille des isomorphismes composés

$$(B \times_{X_{-1}} X_n) \times_{X_n, d_s} X_{n+1} \simeq B \times_{X_{-1}} X_{n+1} \simeq (B \times_{X_{-1}} X_n) \times_{X_n, d_r} X_{n+1}$$

pour tout $0 \leqslant r,\ s \leqslant n+1$. □

Remarque 4.9.3. — On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ un morphisme de schémas semi-simpliciaux vérifiant les conditions suivantes :

(a) pour tout $0 \leqslant m \leqslant n-1$, f_m est un isomorphisme ;

(b) pour toute injection croissante $r : \underline{\mathbf{n}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{p}}$, le carré

$$\begin{tikzcd} Y_p \arrow[r, "r^*"] \arrow[d, "f_p"'] & Y_n \arrow[d, "f_n"] \\ X_p \arrow[r, "r^*"] & X_n \end{tikzcd}$$

est cartésien.

On peut alors munir le X_n-schéma $Y = Y_n$ d'une donnée de descente en prenant pour $u_{rs} : Y(s) \xrightarrow{\sim} Y(r)$ la composition de

$$Y(s) = Y_n \times_{X_n, d_s} X_{n+1} \xrightarrow{(d_s, f_{n+1})^{-1}} Y_{n+1} \xrightarrow{(d_r, f_{n+1})} Y_n \times_{X_n, d_r} X_{n+1} = Y(r).$$

Réciproquement, étant donné un X_n-schéma Y muni d'une donnée de descente, on construit un morphisme $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ vérifiant les conditions (a) et (b) ci-dessus et tel que, pour tout $p \geqslant n$,

$$Y_p = Y \times_{X_n, d_{n+1} \circ \cdots \circ d_p} X_p.$$

Lorsque $n+1 \leqslant i \leqslant p+1$, le morphisme $d_i : Y_{p+1} \longrightarrow Y_p$ est induit de $d_i : X_{p+1} \longrightarrow X_p$ (qui est alors un morphisme de X_n-schémas relativement aux morphismes structuraux $d_{p+1} \circ \cdots \circ d_{n+1}$ et $d_p \circ \cdots \circ d_{n+1}$).

Lorsque $0 \leqslant i \leqslant n$, le morphisme $d_i : Y_{p+1} \longrightarrow Y_p$ est donné par la composition de

$$\begin{aligned}
Y \times_{X_n, d_{n+1}\circ\cdots\circ d_{p+1}} X_{p+1} &\simeq (Y \times_{X_n, d_{n+1}} X_{n+1}) \times_{X_{n+1}, d_{n+2}\circ\cdots\circ d_{p+1}} X_{p+1} \\
&= Y(n+1) \times_{X_{n+1}, d_{n+2}\circ\cdots\circ d_{p+1}} X_{p+1} \\
&\xrightarrow[\sim]{u_{i,n+1}} Y(i) \times_{X_{n+1}, d_{n+2}\circ\cdots\circ d_{p+1}} X_{p+1} \\
&= (Y \times_{X_n, d_i} X_{n+1}) \times_{X_{n+1}, d_{n+2}\circ\cdots\circ d_{p+1}} X_{p+1} \\
&\simeq Y \times_{X_n, d_{n+1}\circ\cdots\circ d_p \circ d_i} X_{p+1} \xrightarrow{(\mathrm{id}_Y, d_i)} Y \times_{X_n, d_{n+1}\circ\cdots\circ d_p} X_p.
\end{aligned}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre et définissent des équivalences de catégories entre $\mathrm{Desc}_n(X)$ et la catégorie des $X_\bullet$-schémas semi-simpliciaux vérifiant les conditions (a) et (b) ci-dessus. □

Proposition 4.9.4. — *Soit k un corps de caractéristique nulle et soit $X_\bullet$ un hyper-recouvrement pro-générique de* $\mathrm{Spec}(k)$ *qui est le spectre d'une extension de k en chaque degré. Alors, le foncteur évident* $\mathrm{Sch}/k \longrightarrow \mathrm{Desc}_n(X)$ *induit une équivalence de catégories entre, d'une part, la sous-catégorie pleine des k-schémas quasi-projectifs et, d'autre part, la sous-catégorie pleine des X_n-schémas quasi-projectifs munis d'une donnée de descente.*

Démonstration. — La preuve sera divisée en trois parties. Dans la première on décrit un résultat préliminaire. Dans la seconde, on traite le cas $n = 0$; il s'agit essentiellement d'une reformulation d'un théorème d'effectivité bien connu en théorie de descente fidèlement plate. Dans la troisième, on traite le cas $n \geqslant 1$ par récurrence. Aussi on traitera uniquement l'« essentielle surjectivité » et on laisse la « pleine fidélité » au lecteur.

Partie 1. — On se donne un carré commutatif de schémas quasi-compacts

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & V \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

tel que $f : U \longrightarrow S$, $g : V \longrightarrow S$ et $(p,q) : W \longrightarrow U \times_S V$ sont plats et schématiquement dominants, [(5)] et $f \cup g : U \coprod V \longrightarrow S$ est surjectif. Soient T un S-schéma plat et T' un S-schéma quelconque. Soient $u : T \times_S U \longrightarrow T' \times_S U$ un morphisme de U-schémas et $v : T \times_S V \longrightarrow T' \times_S V$ un morphisme de V-schémas. On suppose que les morphismes

$$u \times_U W \text{ et } v \times_V W : T \times_S W \longrightarrow T' \times_S W$$

coïncident. Il existe alors un unique morphisme de S-schémas $a : T \longrightarrow T'$ tel que $u = a \times_S U$ et $v = a \times_S V$.

L'unicité découle du fait que $\mathrm{pr}_1 : T \times_S U \longrightarrow T$ (ou $\mathrm{pr}_1 : T \times_S V \longrightarrow T$) est schématiquement dominant (ce qui est une conséquence de la platitude du S-schéma T). Pour démontrer l'existence, on utilise le fait que l'association $R \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_R(T \times_S R, T' \times_S R)$ définit un faisceau fpqc sur Sch/S. (Ceci découle aussitôt du fait que le préfaisceau représenté par T' est un faisceau fpqc; voir [**68**, Theorem 2.55].) Étant donné que $(f : U \longrightarrow S, g : V \longrightarrow S)$ est un recouvrement fpqc, on est donc ramené à vérifier les égalités pour les paires de morphismes :

— $u \times_{U,\mathrm{pr}_1} (U \times_S U)$ et $u \times_{U,\mathrm{pr}_2} (U \times_S U) : T \times_S U \times_S U \longrightarrow T' \times_S U \times_S U$;
— $u \times_{U,\mathrm{pr}_1} (U \times_S V)$ et $v \times_{V,\mathrm{pr}_2} (U \times_S V) : T \times_S U \times_S V \longrightarrow T' \times_S U \times_S V$;
— $v \times_{V,\mathrm{pr}_1} (V \times_S V)$ et $v \times_{V,\mathrm{pr}_2} (V \times_S V) : T \times_S V \times_S V \longrightarrow T' \times_S V \times_S V$.

On traite d'abord la paire du milieu. Le morphisme $T \times_S W \longrightarrow T \times_S (U \times_S V)$ est schématiquement dominant (utiliser que le S-schéma T est plat). Il est donc suffisant de montrer que $u \times_{U,\mathrm{pr}_1} (U \times_S V)$

5. On rappelle qu'un morphisme de schémas quasi-compacts $Y \longrightarrow X$ est *schématiquement dominant* si son image fermée schématique est égale à X. (Voir [**41**, Chapitre I, Définition 5.4.2].)

et $v \times_{V,\mathrm{pr}_2} (U \times_S V)$ sont égaux après changement de base suivant $W \longrightarrow U \times_S V$. On trouve alors les morphismes $u \times_U W$ et $v \times_V W$ qui sont égaux par hypothèse.

Enfin, expliquons comment montrer que $u \times_{U,\mathrm{pr}_1} (U \times_S U)$ et $u \times_{U,\mathrm{pr}_2} (U \times_S U)$ sont égaux. (Le cas de $v \times_{V,\mathrm{pr}_1} (V \times_S V)$ et $v \times_{V,\mathrm{pr}_2} (V \times_S V)$ se traite de la même façon.) Puisque $\mathrm{pr}_{12} : U \times_S U \times_S V \longrightarrow U \times_S U$ est schématiquement dense (utiliser que le S-schéma $U \times_S U$ est plat), il suffit de montrer que $u \times_{U,\mathrm{pr}_1} (U \times_S U)$ et $u \times_{U,\mathrm{pr}_2} (U \times_S U)$ sont égaux après changement de base suivant $V \longrightarrow S$. Ceci découle aussitôt de l'égalité $u \times_{U,\mathrm{pr}_1} (U \times_S V) = v \times_{V,\mathrm{pr}_2} (U \times_S V)$ que l'on vient d'établir.

Partie 2. — On traite ici le cas $n = 0$. Pour cela, on considère le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "(d_2,d_0)"] \arrow[d, "d_1"] & X_1 \times_{d_0,X_0,d_1} X_1 \arrow[d, "d_1 \times d_0"] \\ X_1 \arrow[r, "(d_1,d_0)"] & X_0 \times_k X_0. \end{tikzcd}$$

On note $S = X_0 \times_k X_0$, $U = X_1$, $V = X_1 \times_{d_0,X_0,d_1} X_1$ et $W = X_2$. Les morphismes $U \longrightarrow S$ et $W \longrightarrow U \times_S V$ sont plats et dominants. (En effet, $S = (\mathrm{cosk}_0^k X)_1$ et $U \times_S V = (\mathrm{cosk}_1^k X)_2$; l'assertion découle donc de l'hypothèse que $X_\bullet$ est un hyper-recouvrement pro-générique de $\mathrm{Spec}(k)$.) De plus, grâce au lemme 4.9.5 ci-dessous, le morphisme $V \longrightarrow S$ est fidèlement plat.

Soit Y un X_0-schéma quasi-projectif muni d'une donnée de descente $(u_{rs})_{0 \leqslant r,s \leqslant 1}$. On pose $T = Y \times_k X_0$ et $T' = X_0 \times_k Y$. Clairement $T \times_S U = Y(1)$ et $T' \times_S U = Y(0)$; la donnée de descente fournit donc un isomorphisme $u = u_{01} : T \times_S U \xrightarrow{\sim} T' \times_S U$. De plus, on a

$$T \times_S V = Y \times_{X_0,d_1} X_1 \times_{d_0,X_0,d_1} X_1 \qquad \text{et} \qquad T' \times_S V = X_1 \times_{d_0,X_0,d_1} X_1 \times_{d_0,X_0} Y.$$

On définit un isomorphisme $v : T \times_S V \xrightarrow{\sim} T' \times_S V$ par la composition de

$$Y \times_{X_0,d_1} X_1 \times_{d_0,X_0,d_1} X_1 \xrightarrow[\sim]{u_{01}} Y \times_{X_0,d_0} X_1 \times_{d_0,X_0,d_1} X_1 = Y \times_{X_0} (X_1 \times_{d_0,X_0,d_1} X_1)$$

$$\simeq (X_1 \times_{d_0,X_0,d_1} X_1) \times_{X_0} Y = X_1 \times_{d_0,X_0,d_1} X_1 \times_{d_1,X_0} Y \xrightarrow[\sim]{u_{01}} X_1 \times_{d_0,X_0,d_1} X_1 \times_{d_0,X_0} Y.$$

La commutation du triangle (4.58) dans le cas $n = 0$ et $(r,s,t) = (0,1,2)$ équivaut à l'égalité : $u \times_U W = v \times_V W$. D'après la première partie de la preuve, il existe alors un isomorphisme de $X_0 \times_k X_0$-schémas $a : Y \times_k X_0 \xrightarrow{\sim} X_0 \times_k Y$ tel que $a \times_S U = u$ et $a \times_S V = v$. En particulier, u_{01} se déduit de a ce qui entraîne que a vérifie la condition de cocycle usuelle. (Utiliser le fait que le morphisme $(d_{01}, d_{0,2}, d_{1,2}) : X_2 \longrightarrow X_0 \times_k X_0 \times_k X_0$ est dominant.) Le critère d'effectivité pour la descente fidèlement plate [**3**, Exposé VIII, Corollaire 7.7] permet de conclure. [(6)]

Partie 3. — On suppose ici que $n \geqslant 1$ et que le résultat est connu pour $n-1$. Soit Y un X_n-schéma quasi-projectif muni d'une donnée de descente $(u_{rs})_{1 \leqslant r,s \leqslant n+1}$. On considère le diagramme de schémas semi-simpliciaux

$$X_{2+\bullet} \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} X_{1+\bullet} \xrightarrow{d_0} X_\bullet.$$

Puisque $X_\bullet$ est un hyper-recouvrement pro-générique de $\mathrm{Spec}(k)$, le lemme 4.4.14 entraîne que $X_{1+\bullet}$ et $X_{2+\bullet}$ sont des hyper-recouvrements pro-génériques de X_0 et X_1.

Écrivons « Z » pour désigner Y considéré comme schéma au-dessus de $X_{1+n-1} = (X_{1+\bullet})_{n-1}$. On a alors $Z(i) = Y(1+i)$ et $Z(i,j) = Y(1+i, 1+j)$ pour $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$. On note aussi $v_{st} : Z(t) \longrightarrow Z(s)$ le

6. Ce critère ne s'applique pas tel quel à notre situation et un petit argument standard est nécessaire ; expliquons-le. Puisque Y est quasi-projectif (et donc de présentation finie), on peut remplacer X_0 par un k-schéma de type fini. Il est toujours possible de descendre Y en un faisceau fpqc sur les k-schémas et il s'agit de vérifier que ce faisceau est représentable. Pour ce faire, nous pouvons remplacer X_0 par n'importe quel sous-schéma non vide. Ainsi, on est ramené au cas où X_0 est le spectre d'une extension finie de k, et le critère [**3**, Exposé VIII, Corollaire 7.7] est maintenant applicable tel quel.

morphisme donné par $u_{1+s,1+t}$. La famille $(v_{st})_{0\leqslant s,t\leqslant n}$ est clairement une donnée de descente sur le X_{1+n-1}-schéma Z relativement au schéma semi-simplicial $X_{1+\bullet}$.

De même, on note $Z' = Y(0)$ et $Z'' = Y(1)$. Les X_{2+n-1}-schémas Z' et Z'' sont munis de données de descentes $(v'_{st})_{0\leqslant s,t\leqslant n}$ et $(v''_{st})_{0\leqslant s,t\leqslant n}$ définies respectivement par

$$\begin{aligned} v'_{st} &: Z'(t) = Y(0,2+t) \xrightarrow{u_{1+s,1+t}} Y(0,2+s) = Z'(s) \\ \text{et}\quad v''_{st} &: Z''(t) = Y(1,2+t) \xrightarrow{u_{1+s,1+t}} Y(1,2+s) = Z''(s). \end{aligned}$$

Il découle des triangles commutatifs (4.58) que l'isomorphisme $w = u_{01} : Z'' \xrightarrow{\sim} Z'$ est compatible à ces données de descente. Autrement dit, il définit un isomorphisme dans la catégorie $\mathrm{Desc}_{n-1}(X_{2+\bullet})$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à Z, on trouve un X_0-schéma quasi-projectif D. En appliquant l'hypothèse de récurrence à Z', Z'' et à l'isomorphisme w, on trouve des X_1-schémas quasi-projectifs D', D'' et un isomorphisme de X_1-schémas $e : D'' \xrightarrow{\sim} D'$. De plus, on a des isomorphismes canoniques $D' \simeq D(0)$ et $D'' \simeq D(1)$, et l'isomorphisme $e : D(1) \xrightarrow{\sim} D(0)$ satisfait la condition de cocycle. On peut donc appliquer la deuxième partie de la preuve pour descendre D en un k-schéma quasi-projectif B. Il est alors clair que le foncteur $\mathrm{Sch}/k \longrightarrow \mathrm{Desc}_n(X)$ envoie, à isomorphisme près, le k-schéma B sur le X_n-schéma Y muni de sa donnée de descente $(u_{rs})_{0\leqslant r,s\leqslant n+1}$. ■

Le lemme suivant a servi dans la preuve de la proposition 4.9.4. Pour faire vite, nous en donnons une preuve qui consiste à se ramener au cas $p = 0$ de la proposition 4.5.7. Une preuve directe existe certainement ; nous laissons au lecteur intéressé le soin de la dégager.

Lemme 4.9.5. — *On suppose donné un diagramme commutatif de corps de caractéristique nulle*

$$\begin{tikzcd} L_1 & l \arrow[l] \arrow[r] & L_2 \\ K_1 \arrow[u] & k \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & K_2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

tel que les morphismes $K_i \otimes_k l \longrightarrow L_i$ sont injectifs, pour $i \in \{1,2\}$, et l'anneau $K_1 \otimes_k K_2$ est intègre. Alors, la $K_1 \otimes_k K_2$-algèbre $L_1 \otimes_l L_2$ est fidèlement plate.

Démonstration. — Il est loisible de remplacer K_1 et L_1 par des extensions transcendantes pures de la forme $K_1(x_\alpha;\ \alpha \in I)$ et $L_1(x_\alpha, y_\beta;\ \alpha \in I,\ \beta \in J)$, et de même pour K_2 et L_2. On peut donc supposer que les extensions K_1/k et K_2/k ont même degré de transcendance, et de même pour les extensions $L_1/\mathrm{Frac}(K_1 \otimes_k l)$ et $L_2/\mathrm{Frac}(K_2 \otimes_k l)$. Par ailleurs, on peut trouver un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \overline{L}_1 & \bar{l} \arrow[l] \arrow[r] & \overline{L}_2 \\ \overline{K}_1 \arrow[u] & \bar{k} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & \overline{K}_2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

formé de clôtures algébriques des corps dans le diagramme de l'énoncé. Les morphismes

$$\mathrm{Spec}(\overline{K}_1 \otimes_{\bar{k}} \overline{K}_2) \longrightarrow \mathrm{Spec}(K_1 \otimes_k K_2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Spec}(\overline{L}_1 \otimes_{\bar{l}} \overline{L}_2) \longrightarrow \mathrm{Spec}(L_1 \otimes_l L_2)$$

sont alors pro-finis étales et, puisque $K_1 \otimes_k K_2$ est intègre, le premier morphisme est également surjectif. Il est donc suffisant de montrer que la $\overline{K}_1 \otimes_{\bar{k}} \overline{K}_2$-algèbre $\overline{L}_1 \otimes_{\bar{l}} \overline{L}_2$ est fidèlement plate. Autrement dit, on peut supposer que tous les corps de l'énoncé sont algébriquement clos. Vu les conditions sur les degrés de transcendance, on peut aussi supposer que $K_1/k = K_2/k$ et $L_1/l = L_2/l$ et que les deux inclusions $K_1 \hookrightarrow L_1$ et $K_2 \hookrightarrow L_2$ sont les mêmes. Le résultat recherché découle alors de la proposition 4.5.7 appliquée au morphisme $\mathrm{Spec}(\check{C}^\bullet(L/l)) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\check{C}^\bullet(K/k))$. ■

L'énoncé suivant, qui est en fait un corollaire de la preuve de la proposition 4.9.4, est mieux adapté à nos besoins.

Corollaire 4.9.6. — *Soit k un corps de caractéristique nulle et soit $X_\bullet$ un k-schéma semi-simplicial qui est le spectre d'une extension de k en tout degré. On suppose que $X_{1+\bullet}$ est un hyper-recouvrement pro-générique de* $\mathrm{Spec}(k)$. *Alors, pour tout $n \geqslant 0$, il existe un foncteur* $\mathrm{Desc}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Desc}_n(X)$ *induisant une équivalence de catégories entre, d'une part, la sous-catégorie pleine des X_0-schémas quasi-projectifs munis d'une donnée de descente et, d'autre part, la sous-catégorie pleine des X_n-schémas quasi-projectifs munis d'une donnée de descente.*

Démonstration. — Décrivons d'abord le foncteur $\mathrm{Desc}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Desc}_n(X)$. Soit Y un X_0-schéma muni d'une donnée de descente $u_{01} : Y(1) \xrightarrow{\sim} Y(0)$. On pose $Z = Y \times_{X_0, p} X_n$ où le morphisme $p : X_n \longrightarrow X_0$ correspond à l'application $\underline{\mathbf{0}} \to \underline{\mathbf{n}}$ d'image $\{0\} \subset \underline{\mathbf{n}}$. Nous allons munir Z d'une donnée de descente comme suit. Si $1 \leqslant r \leqslant n+1$, le X_{n+1}-schéma $Z(r)$ s'identifie à $Y \times_{X_0, q} X_{n+1}$ où $q : X_{n+1} \longrightarrow X_0$ correspond à l'application $\underline{\mathbf{0}} \to \underline{\mathbf{n+1}}$ d'image $\{0\} \subset \underline{\mathbf{n+1}}$. Ceci permet de définir les isomorphismes $v_{rs} : Z(s) \xrightarrow{\sim} Z(r)$, pour $1 \leqslant r, s \leqslant n+1$: ce sont l'identité de $Y \times_{X_0, q} X_{n+1}$ modulo ces identifications. Il reste à définir les isomorphismes $v_{0i} : Z(i) \xrightarrow{\sim} Z(0)$, pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$: nous prendrons la composition de

$$Z(i) \simeq Y \times_{X_0, q} X_{n+1} \simeq Y(1) \times_{X_1, q'} X_{n+1} \xrightarrow{u_{01}} Y(0) \times_{X_1, q'} X_{n+1} \simeq Z(0),$$

où $q' : X_{n+1} \longrightarrow X_1$ correspond à l'application $\underline{\mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n+1}}$ d'image $\{0, 1\} \subset \underline{\mathbf{n+1}}$. (Modulo l'équivalence de la remarque 4.9.3, le foncteur $\mathrm{Desc}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Desc}_n(X)$ admet une description très simple : si $Y_\bullet$ est le $X_\bullet$-schéma semi-simplicial associé au X_0-schéma Y et sa donnée de descente, ce foncteur consiste à remplacer Y_i par X_i pour chaque $0 \leqslant i \leqslant n-1$.)

Réciproquement, soit Y un X_n-schéma quasi-projectif muni d'une donnée de descente $(u_{rs})_{0 \leqslant r, s \leqslant n+1}$. Comme dans la troisième partie de la preuve de la proposition 4.9.4, nous pouvons associer à Y un X_0-schéma quasi-projectif D muni d'une donnée de descente, i.e., d'un isomorphisme $u_{01} : D(1) \xrightarrow{\sim} D(0)$ qui satisfait à la condition de cocycle. ∎

Lemme 4.9.7. — *Soient k un corps et G un k-schéma en groupes de type fini. Comme d'habitude, on note $G_\bullet$ le classifiant de G.*

(i) Il y a une équivalence de catégories entre $\mathrm{Desc}_0(G_\bullet)$ *et la catégorie des k-schémas munis d'une action à gauche de G. À un G_0-schéma Y muni d'une donnée de descente, cette équivalence associe le k-schéma Y muni de l'action à gauche donnée par la composition de*

$$Y \times_k G = Y(1) \xrightarrow{u_{01}} Y(0) = G \times_k Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Y.$$

(ii) Le foncteur de changement de base $\mathrm{Desc}_0(G_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Desc}_0(\eta_{G_\bullet})$ *est une équivalence de catégories.*

Démonstration. — L'assertion (i) est évidente. (On peut par exemple utiliser la remarque 4.9.3 et le lemme 2.5.7.) Pour démontrer (ii), on remarque que $\mathrm{Desc}_0(\eta_{G_\bullet})$ est équivalente à la catégorie des k-schémas Y munis d'un morphisme $Y \times_k \eta_G \longrightarrow Y$ qui en fait un G-schéma rationnel. Or, une action rationnelle de G définie partout sur Y provient d'une unique action régulière de G sur Y. ∎

Proposition 4.9.8. — *Soient k un corps et G un k-schéma en groupes de type fini. On suppose donné un hyper-recouvrement pro-générique relatif $X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ tel que $X_\bullet$ est le spectre d'une extension de k en chaque degré. (Ceci entraîne en particulier que G est connexe.) Alors, le foncteur évident* $\mathrm{Desc}_0(G_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Desc}_0(X_\bullet)$ *induit une équivalence de catégories entre, d'une part, la sous-catégorie pleine des G_0-schémas quasi-projectifs munis d'une donnée de descente et, d'autre part, la sous-catégorie pleine des X_0-schémas quasi-projectifs munis d'une donnée de descente.*

Démonstration. — On pose $X'_\bullet = \eta(X_\bullet \times_{G_\bullet} G_{1+\bullet})$ et $X''_\bullet = \eta(X_\bullet \times_{G_\bullet} G_{2+\bullet})$. On a un diagramme de schémas semi-simpliciaux

$$X''_\bullet \overset{d_1}{\underset{d_0}{\rightrightarrows}} X'_\bullet \xrightarrow{d_0} X_\bullet.$$

Les morphismes $X'_\bullet \longrightarrow G_{1+\bullet}$ et $X''_\bullet \longrightarrow G_{2+\bullet}$ sont des hyper-recouvrements pro-génériques relatifs. Étant donné que $G_{1+\bullet}$ et $G_{2+\bullet}$ sont des hyper-recouvrements génériques de $\mathrm{Spec}(k)$ et G respectivement, il s'ensuit que $X'_\bullet$ et $X''_\bullet$ sont des hyper-recouvrements pro-génériques de $\mathrm{Spec}(k)$ et η_G respectivement.

Soit Y un X_0-schéma quasi-projectif muni d'une donnée de descente. On note Y' et Y'' les images de Y par les foncteurs de changement de base $\mathrm{Desc}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Desc}_0(X')$ et $\mathrm{Desc}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Desc}_0(X'')$. En appliquant la proposition 4.9.4, on obtient un k-schéma Z' et un η_G-schéma Z'' qui s'envoient sur Y' et Y'' par les foncteurs évidents. En considérant $Y'' \in \mathrm{Desc}_0(X'')$ comme étant le changement de base de $Y' \in \mathrm{Desc}_0(X')$ suivant, d'abord, $d_0 : X''_\bullet \longrightarrow X'_\bullet$ et, ensuite, $d_1 : X''_\bullet \longrightarrow X'_\bullet$, on déduit deux isomorphismes $Z'' \simeq Z'(0)$ et $Z'' \simeq Z'(1)$, avec $Z'(i) = Z' \times_{\eta_{G_0}, d_i} \eta_{G_1} = Z' \times_k \eta_G$, pour $i \in \{0, 1\}$. L'isomorphisme composé $Z'(1) \simeq Z'' \simeq Z'(0)$, est une donnée de descente sur Z'. On a donc associé à $Y \in \mathrm{Desc}_0(X_\bullet)$ un objet $Z' \in \mathrm{Desc}_0(\eta_{G_\bullet})$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que ceci fournit un quasi-inverse à droite et à gauche au foncteur de changement de base. ■

L'énoncé suivant est suffisamment général pour suffire à tous nos besoins dans la sous-section 4.10.

Proposition 4.9.9. — *Soient k un corps de caractéristique nulle et G un k-schéma en groupes de type fini. On suppose donnés des morphismes de k-schémas semi-simpliciaux*

$$X_\bullet \longrightarrow P_\bullet \longrightarrow G_\bullet$$

tels que les conditions suivantes sont satisfaites.

(i) En chaque degré, $X_\bullet$ est le spectre d'une extension de k. De plus, $X_{1+\bullet}$ est un hyper-recouvrement pro-générique de X_0.

(ii) En chaque degré, $P_\bullet$ est le spectre d'une extension de k. De plus, le morphisme $P_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ est un hyper-recouvrement pro-générique relatif.

(iii) Le morphisme $X_i \longrightarrow P_i$ est un isomorphisme pour $i \in \{0, 1\}$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une équivalence de catégories entre, d'une part, la catégorie des X_n-schémas quasi-projectifs munis d'une donnée de descente et, d'autre part, la catégorie des k-schémas quasi-projectifs munis d'une action à gauche de G. Modulo l'équivalence du lemme 4.9.7(i), cette équivalence est induite par le foncteur évident $\mathrm{Desc}_0(G_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Desc}_n(X_\bullet)$.

Démonstration. — D'après le corollaire 4.9.6, on dispose d'une équivalence de catégories entre, d'une part, la catégorie des X_n-schémas quasi-projectifs munis d'une donnée de descente et, d'autre part, la catégorie des X_0-schémas quasi-projectifs munis d'une donnée de descente. On peut donc supposer que $n = 0$. Grâce au lemme 4.9.7 et à la proposition 4.9.8, il est alors suffisant de montrer que le foncteur de changement de base $\mathrm{Desc}_0(P_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Desc}_0(X_\bullet)$ est une équivalence de catégories. Ceci découle aussitôt de la propriété (iii) et du fait que le morphisme $X_2 \longrightarrow P_2$ est fidèlement plat (car il correspond à une extension de corps). ■

4.10. Tour de Postnikov du type d'homotopie feuilletée, III. Étude (suite). —

L'objectif de cette sous-section est de raffiner le théorème 4.8.17. On montera en particulier que le morphisme $\mathrm{A}^{(n+1)}_\bullet \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}_\bullet$ dudit théorème est la projection d'un espace d'Eilenberg–Mac Lane tordu associé à un pro-schéma en groupes commutatif muni d'une action du groupe de Galois différentiel. Ce pro-schéma en groupes commutatif est, par définition, le $n+1$-ième groupe fondamental différentiel.

Afin d'alléger les notations, nous étudierons la situation générale ci-dessous modelée sur des propriétés établies dans la sous-section 4.8 et notamment le théorème 4.8.17.

Situation 4.10.1. — Soient k un corps de caractéristique nulle et $X_\bullet$ un k-schéma semi-simplicial. On suppose que $X_\bullet$ est le spectre d'une extension de k en chaque degré. On fixe un entier $n \geqslant 1$.

On suppose donné un X_n-schéma en groupes B_n et on forme le morphisme n-élémentaire $B_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ associé à la projection $B_n \longrightarrow X_n$. Pour $0 \leqslant i \leqslant n+1$, on pose $B_n(i) = B_n \times_{X_n, d_i} X_{n+1}$ de sorte que $B_{n+1} = \prod_{i=0}^{n+1} B_n(i)/X_{n+1}$. On suppose donnée une factorisation

$$B_\bullet \xrightarrow{\phi_\bullet} A_\bullet \longrightarrow X_\bullet$$

où, pour tout $m \in \mathbb{N}$, A_m est un X_m-schéma en groupes commutatif et ϕ_m est un morphisme surjectif de X_m-schémas en groupes. (Ceci entraîne que $A_\bullet$ est un $X_\bullet$-schéma simplicial en groupes commutatif et que $\phi_\bullet$ est un morphisme de $X_\bullet$-schémas simpliciaux en groupes ; voir la remarque 4.8.18.) On suppose que les conditions suivantes sont réunies.

(a) Le X_n-schéma en groupes A_n est trivial, i.e., $A_n = X_n$.

(b) Pour tout $0 \leqslant s \leqslant n+1$, le morphisme $\phi_{n+1}(s) : B_n(s) \longrightarrow A_{n+1}$, donné par la composition de
$$B_n(s) \hookrightarrow B_{n+1} \xrightarrow{\phi_{n+1}} A_{n+1},$$
est surjectif.

(c) Le schéma semi-simplicial $X_{1+\bullet}$ est un hyper-recouvrement pro-générique de X_0 et le morphisme $A_{1+\bullet} \longrightarrow X_{1+\bullet}$ est n-élémentaire.

De plus, on suppose donné un k-schéma en groupes G et des morphismes de k-schémas semi-simpliciaux
$$X_\bullet \longrightarrow P_\bullet \longrightarrow G_\bullet$$
tel que la condition suivante est satisfaite (voir la proposition 4.9.9).

(d) En chaque degré, $P_\bullet$ est le spectre d'un corps, le morphisme $P_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ est un hyper-recouvrement pro-générique relatif et les morphismes $X_i \longrightarrow P_i$ sont des isomorphismes pour $i \in \{0, 1\}$. □

Sauf mention explicite du contraire, les notations et les conditions de la situation 4.10.1 seront en vigueur tout au long de cette sous-section. (Les schémas semi-simpliciaux $P_\bullet$ et $G_\bullet$ et la condition (d) n'interviendront qu'à partir du corollaire 4.10.10.) On a besoin d'introduire quelques notations supplémentaires.

Notation 4.10.2. — Étant donnée une suite d'entiers $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n+r$, on pose $B_n(i_1, \cdots, i_r) = B_n \times_{X_n} X_{n+r}$ où le morphisme $X_{n+r} \longrightarrow X_n$ utilisé correspond à l'injection croissante $\underline{\mathbf{n}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n+r}}$ ayant pour image le complémentaire du sous-ensemble $\{i_1, \cdots, i_r\} \subset \underline{\mathbf{n+r}}$. De même, étant donnée une suite d'entiers $0 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n+r+1$, on pose $A_{n+1}(j_1, \cdots, j_r) = A_{n+1} \times_{X_{n+1}} X_{n+r+1}$ où le morphisme $X_{n+r+1} \longrightarrow X_{n+1}$ utilisé correspond à l'injection croissante $\underline{\mathbf{n+1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n+r+1}}$ ayant pour image le complémentaire du sous-ensemble $\{j_1, \cdots, j_r\} \subset \underline{\mathbf{n+r+1}}$. □

Dans cette sous-section, il sera pratique d'utiliser le symbole « $\bigoplus$ » pour désigner le produit fibré de schémas en groupes. (Ceci n'est pas très standard lorsque les schémas en groupes ne sont pas commutatifs.) Avec la notation 4.10.2, on a les décompositions
$$B_{n+r} = \bigoplus_{0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n+r} B_n(i_1, \cdots, i_r) \quad \text{et} \quad A_{n+r+1} = \bigoplus_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n+r+1} A_{n+1}(j_1, \cdots, j_r) \tag{4.59}$$
qui découlent du fait que les morphismes $B_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ et $A_{1+\bullet} \longrightarrow X_{1+\bullet}$ sont n-élémentaires.

Lemme 4.10.3. — *Pour* $0 \leqslant i < j \leqslant n+2$, *on dispose de deux morphismes*
$$\phi_{n+1}(i) : B_n(i,j) \longrightarrow A_{n+1}(j) \qquad \text{et} \qquad \phi_{n+1}(j-1) : B_n(i,j) \longrightarrow A_{n+1}(i)$$
déduits des morphismes dans la condition (b) de la situation 4.10.1. De plus, pour $0 \leqslant l \leqslant n+2$, *la composition de*
$$B_n(i,j) \hookrightarrow B_{n+2} \xrightarrow{\phi_{n+2}} A_{n+2} \longrightarrow A_{n+1}(l)$$
est nulle si $l \notin \{i,j\}$; *elle vaut* $\phi_{n+1}(i)$ *si* $l = j$ *et* $\phi_{n+1}(j-1)$ *si* $l = i$.

Démonstration. — Le premier morphisme est en vérité $\phi_{n+1}(i) \times_{X_{n+1}, d_j} X_{n+2}$. Le second morphisme est en vérité $\phi_{n+1}(j-1) \times_{X_{n+1}, d_i} X_{n+2}$. Pour la dernière assertion, on utilise le diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd}
B_{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "d_l"] & A_{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "d_l"] & A_{n+1}(l) \arrow[dl, bend left] \\
B_{n+1} \arrow[r] & A_{n+1} &
\end{tikzcd}$$

et le fait que la restriction de $d_l : B_{n+2} \longrightarrow B_{n+1}$ à $B_n(i,j)$ se factorise par le sous-groupe trivial de B_{n+1} à moins que l ne soit dans $\{i,j\}$ auquel cas on a : si $l = j$, cette restriction se déduit de $B_n(i) \hookrightarrow B_{n+1}$ et, si $l = i$, elle se déduit de $B_n(j-1) \hookrightarrow B_{n+1}$. ■

Proposition 4.10.4. — *Pour tout entier* $0 \leqslant i_0 \leqslant n+2$, *le morphisme évident*

$$A_{n+2} \longrightarrow \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n+2,\, i \neq i_0} A_{n+1}(i)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur i_0. Lorsque $i_0 = 0$, ceci découle de la condition (b) de la situation 4.10.1. On suppose donc que $1 \leqslant i_0 \leqslant n+2$ et que la proposition est connue pour $i_0 - 1$, i.e., qu'on a un isomorphisme évident $A_{n+2} \simeq \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n+2,\, i \neq i_0 - 1} A_{n+1}(i)$. On considère alors le morphisme $u : A_{n+1}(i_0) \longrightarrow A_{n+1}(i_0 - 1)$ donné par la composition de

$$A_{n+1}(i_0) \hookrightarrow \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n+2,\, i \neq i_0 - 1} A_{n+1}(i) \simeq A_{n+2} \longrightarrow A_{n+1}(i_0 - 1).$$

La matrice de la compositon de

$$\bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n+2,\, i \neq i_0 - 1} A_{n+1}(i) \simeq A_{n+2} \longrightarrow \bigoplus_{0 \leqslant j \leqslant n+2,\, j \neq i_0} A_{n+1}(j)$$

contient une sous-matrice identitée de taille $(n+1) \times (n+1)$ qui correspond aux indices (j,i) avec $i \neq i_0$ et $j \neq i_0 - 1$, et ses coefficients correspondant aux indices (j, i_0) avec $j \neq i_0 - 1$ sont tous nuls. Ainsi, pour démontrer la proposition au rang i_0, il suffit de montrer que u est un isomorphisme.

En utilisant le lemme 4.10.3 et la construction du morphisme u, il est aisé de voir que le triangle

$$\begin{tikzcd} B_n(i_0 - 1, i_0) \arrow[r, "\phi_{n+1}(i_0-1)"] \arrow[dr, "\phi_{n+1}(i_0-1)"'] & A_{n+1}(i_0) \arrow[d, "u"] \\ & A_{n+1}(i_0 - 1) \end{tikzcd}$$

est commutatif. La condition (b) de la situation 4.10.1 entraîne alors que le morphisme u est surjectif. Pour montrer que u est injectif, il suffit de montrer que l'injection évidente

$$\begin{tikzcd} \ker\{\phi_{n+1}(i_0 - 1) : B_n(i_0 - 1, i_0) \to A_{n+1}(i_0)\} \arrow[d, hook] \\ \ker\{\phi_{n+1}(i_0 - 1) : B_n(i_0 - 1, i_0) \to A_{n+1}(i_0 - 1)\} \end{tikzcd} \tag{4.60}$$

est un isomorphisme. Or, la source et le but de cette injection sont des X_{n+2}-schémas en groupes de même dimension, à savoir la différence des dimensions de B_n et A_{n+1}. Pour conclure, il est donc suffisant de montrer que la source et le but de l'injection (4.60) ont, géométriquement, le même nombre de composantes connexes. Or, ces groupes s'obtiennent de $\ker\{\phi_{n+1}(i_0 - 1) : B_n(i_0 - 1) \to A_{n+1}\}$ par changement de base suivant $d_{i_0} : X_{n+2} \longrightarrow X_{n+1}$ et $d_{i_0 - 1} : X_{n+2} \longrightarrow X_{n+1}$ respectivement. Ceci permet de conclure. ■

Construction 4.10.5. — Pour $0 \leqslant r, s \leqslant n+2$ avec $r \neq s$, la proposition 4.10.4 permet de définir un morphisme $u'_{rs} : A_{n+1}(s) \longrightarrow A_{n+1}(r)$ par la composition de

$$A_{n+1}(s) \hookrightarrow \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n+2,\, i \neq r} A_{n+1}(i) \simeq A_{n+2} \longrightarrow A_{n+1}(r). \tag{4.61}$$

Pour $0 \leqslant r < s \leqslant n+2$, le lemme 4.10.3 entraîne que les triangles

$$\begin{tikzcd} B_n(r,s) \arrow[r, "\phi_{n+1}(r)"] \arrow[dr, "\phi_{n+1}(s-1)"'] & A_{n+1}(s) \arrow[d, "u'_{rs}"] \\ & A_{n+1}(r) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} B_n(r,s) \arrow[r, "\phi_{n+1}(s-1)"] \arrow[dr, "\phi_{n+1}(r)"'] & A_{n+1}(r) \arrow[d, "u'_{sr}"] \\ & A_{n+1}(s) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Vu la condition (b) de la situation 4.10.1, il découle que u'_{rs} et u'_{sr} sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. □

Proposition 4.10.6. — *Pour* $0 \leqslant r < s < t \leqslant n+2$*, on a la relation* $u'_{rs} \circ u'_{st} = -u'_{rt}$*.*

Démonstration. — On identifie, à l'aide de la proposition 4.10.4, A_{n+2} avec $\bigoplus_{0\leqslant j\leqslant n+2,\, j\neq r} A_{n+1}(j)$. La projection $A_{n+2} \longrightarrow A_{n+1}(r)$ est alors donnée par la matrice ligne $(u'_{rj})_{0\leqslant j\leqslant n+2,\, j\neq r}$. Il s'ensuit que l'isomorphisme $A_{n+2} \simeq \bigoplus_{0\leqslant i\leqslant n+2,\, i\neq s} A_{n+1}(i)$ est donné par la matrice carrée

$$(m_{ij}) : \bigoplus_{0\leqslant j\leqslant n+2,\, j\neq r} A_{n+1}(j) \longrightarrow \bigoplus_{0\leqslant i\leqslant n+2,\, i\neq s} A_{n+1}(i) \qquad \text{où} \qquad m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \notin \{j, r\}, \\ \mathrm{id} & \text{si} \quad i = j, \\ u'_{rj} & \text{si} \quad i = r. \end{cases}$$

En revenant à la construction 4.10.5, nous obtenons que l'isomorphisme u'_{st} est donné par la composition de

$$A_{n+1}(t) \hookrightarrow \bigoplus\nolimits_{0\leqslant i\leqslant n+2,\, i\neq s} A_{n+1}(i) \xrightarrow{(m_{ij})^{-1}} \bigoplus\nolimits_{0\leqslant j\leqslant n+2,\, j\neq r} A_{n+1}(j) \twoheadrightarrow A_{n+1}(s).$$

Autrement dit, u'_{st} est le (s,t)-ième coefficient de la matrice $(n_{ji}) = (m_{ij})^{-1}$. Or, la matrice (m_{ij}) est triangulaire supérieure pour les numérotations suivantes des ensembles d'indices :

$$\begin{array}{rcl} \{0, n+2\} \smallsetminus \{s\} & = & \{r, 1, \cdots, r-1, r+1, \cdots, r-1, r+1, \cdots, n+2\}, \\ \{0, n+2\} \smallsetminus \{r\} & = & \{s, 1, \cdots, r-1, r+1, \cdots, s-1, s+1, \cdots, n+2\}. \end{array}$$

Sur la diagonale, elle est donnée par l'identité sauf en (r, s) où elle vaut u'_{rs}. Ailleurs, elle est nulle sauf sur la ligne correspondante à $i = r$ où elle est donnée par les u'_{rj}. La matrice $(n_{ji}) = (m_{ij})^{-1}$ est alors donnée par

$$n_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \notin \{i, s\}, \\ \mathrm{id} & \text{si} \quad j = i, \\ u'^{-1}_{rs} & \text{si} \quad (j, i) = (s, r), \\ -u'^{-1}_{rs} \circ u_{ri} & \text{si} \quad j = s \text{ et } i \neq r. \end{cases}$$

Ceci fournit la relation recherchée. ■

Proposition 4.10.7. — *Pour tout* $0 \leqslant r < s < t \leqslant n+3$*, le triangle*

$$\begin{tikzcd} A_{n+1}(s,t) \arrow[rr, "u'_{r,t-1}"] \arrow[dr, "u'_{rs}"'] & & A_{n+1}(r,s) \\ & A_{n+1}(r,t) \arrow[ur, "u'_{s-1,t-1}"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. — On raisonne comme dans la preuve de la proposition 4.10.6. On utilise le lemme 4.10.8 ci-dessous pour identifier A_{n+3} avec la somme directe $\bigoplus_{0\leqslant i<j\leqslant n+3,\, s\notin\{i,j\}} A_{n+1}(i,j)$. Pour $0 \leqslant a < s$, la projection $A_{n+3} \longrightarrow A_{n+1}(a,s)$ est alors donnée par $u'_{s-1,i} : A_{n+1}(i,a) \longrightarrow A_{n+1}(a,s)$ si $0 \leqslant i < a$, par $u'_{s-1,i-1} : A_{n+1}(a,i) \longrightarrow A_{n+1}(a,s)$ si $a < i \leqslant n+3$ et elle est nulle sur les autres facteurs. De même, pour $s < b \leqslant n+3$, la projection $A_{n+3} \longrightarrow A_{n+1}(s,b)$ est donnée par $u'_{si} : A_{n+1}(i,b) \longrightarrow A_{n+1}(s,b)$ si $0 \leqslant i < b$, par $u'_{s,i-1} : A_{n+1}(b,i) \longrightarrow A_{n+1}(s,b)$ si $b < i < n+3$ et elle est nulle sur les autres facteurs.

Une fois l'identification ci-dessus fixée, l'isomorphisme $A_{n+3} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{0\leqslant i'<j'\leqslant n+3,\, r\notin\{i',j'\}} A_{n+1}(i',j')$ est alors donné par la matrice

$$M = (M_{(i',j'),(i,j)}) : \bigoplus_{0\leqslant i<j\leqslant n+3,\, s\notin\{i,j\}} A_{n+1}(i,j) \longrightarrow \bigoplus_{0\leqslant i'<j'\leqslant n+3,\, r\notin\{i',j'\}} A_{n+1}(i',j')$$

avec $M_{(i,s),(i,j)} = u'_{s-1,j-1}$, $M_{(j,s),(i,j)} = u'_{s-1,i}$, $M_{(s,i),(i,j)} = u'_{s,j-1}$, $M_{(s,j),(i,j)} = u'_{si}$, $M_{(i,j),(i,j)} = \mathrm{id}$ et $M_{(i',j'),(i,j)} = 0$ sinon. Le morphisme $u'_{r,t-1} : A_{n+1}(s,t) \longrightarrow A_{n+1}(r,s)$ est la composition de

$$A_{n+1}(s,t) \hookrightarrow \bigoplus_{0\leqslant i'<j'\leqslant n+3,\, r\notin\{i',j'\}} A_{n+1}(i',j') \xrightarrow{M^{-1}} \bigoplus_{0\leqslant i<j\leqslant n+3,\, s\notin\{i,j\}} A_{n+1}(i,j) \xrightarrow{L} A_{n+1}(r,s) \tag{4.62}$$

où L est la matrice ligne donnée par $L_{(i,r)} = u'_{s-1,i}$ si $0 \leqslant i < r$, $L_{(r,j)} = u'_{s-1,j-1}$ si $r < j \leqslant n+3$ et $L_{(i,j)} = 0$ sinon.

Notons $I = \{(i,j);\ 0 \leqslant i < j \leqslant n+3,\ s \notin \{i,j\}\}$ et $I' = \{(i',j');\ 0 \leqslant i' < j' \leqslant n+3,\ r \notin \{i',j'\}\}$. Notons $J \subset I$ et $J' \subset I'$ les sous-ensembles $J = \{(i,j);\ r \in \{i,j\}\}$ et $J' = \{(i',j');\ s \in \{i',j'\}\}$. Clairement, nous avons $I \smallsetminus J = I' \smallsetminus J'$; notons E cet ensemble. La sous-matrice $(M_{\beta',\beta})_{\beta',\beta\in E}$ est la matrice identité. Aussi, on a $M_{\beta',\alpha} = 0$ si $\beta' \in E$ et $\alpha \in J$. Il s'ensuit que M est une matrice triangulaire par blocs. Sa matrice inverse $N = (N_{(i,j),(i',j')})$ est donc donnée par

$$N = \begin{pmatrix} [(M_{\alpha',\alpha})_{\alpha'\in J',\alpha\in J}]^{-1} & -[(M_{\alpha',\alpha})_{\alpha'\in J',\alpha\in J}]^{-1} \circ (M_{\alpha',\beta})_{\alpha'\in J',\beta\in E} \\ 0 & [(\mathrm{id})_{\beta\in E,\,\beta'\in E}] \end{pmatrix}.$$

Numérotons les éléments de J et J' de la manière suivante

$$\begin{aligned} J &= \{(0,r),\cdots,(r-1,r),(r,r+1),\cdots,(r,s-1),(r,s+1),\cdots,(r,n+3)\}, \\ J' &= \{(0,s),\cdots,(r-1,s),(r+1,s),\cdots,(s-1,s),(s,s+1),\cdots,(s,n+3)\}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit une bijection $J \simeq J'$; elle envoie $(i,j) \in J$ sur l'unique couple $(i',j') \in J'$ tel que $\{i,j\} \cap \{i',j'\} \neq \varnothing$. Pour ces numérotations, la matrice $(M_{\alpha',\alpha})_{\alpha'\in J',\alpha\in J}$ est diagonale. Sa matrice inverse $(N_{\alpha,\alpha'})_{\alpha\in J,\alpha'\in J'}$ est donc donnée par $N_{(i,r),(i,s)} = u'_{r-1,s-1}$, $N_{(r,j),(j,s)} = u'_{r,s-1}$, $N_{(r,j),(s,j)} = u'_{rs}$ et 0 sinon.

Enfin, rappelons que nous cherchons à calculer $u'_{r,t-1} : A_{n+1}(s,t) \longrightarrow A_{n+1}(r,s)$ à l'aide de la composition de (4.62). La matrice ligne $L = ((L_\alpha)_{\alpha\in J},(L_\beta)_{\beta\in E})$ est telle que $L_\beta = 0$ pour tout $\beta \in E$. D'après ce qui précède et on remarquant que $(s,t) \in J'$, on obtient

$$u'_{r,t-1} = \sum_{\alpha\in J} L_\alpha \circ N_{\alpha,(s,t)} = L_{(r,t)} \circ N_{(r,t),(s,t)} = u'_{s-1,t-1} \circ u'_{rs}.$$

C'est ce qu'on cherchait à montrer. ■

Le lemme ci-dessous a servi dans la preuve de la proposition 4.10.7.

Lemme 4.10.8. — *Pour tout $0 \leqslant i_0 \leqslant n+3$, le morphisme évident $A_{n+3} \longrightarrow \bigoplus_{0\leqslant i<j\leqslant n+3,\, i_0\notin\{i,j\}} A_{n+1}(i,j)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Le cas $i_0 = 0$ est disponible car c'est une conséquence de la condition (c) de la situation 4.10.1. Comme dans la preuve de la proposition 4.10.7, on peut identifier A_{n+3} avec $\bigoplus_{1\leqslant i<j\leqslant n+3} A_{n+1}(i,j)$ et former la matrice M de l'application $A_{n+3} \longrightarrow \bigoplus_{0\leqslant i'<j'\leqslant n+3,\, i_0\notin\{i',j'\}} A_{n+1}(i',j')$. Comme dans la preuve de la 4.10.7, la matrice M est triangulaire supérieure pour une numérotation convenable des indices et ses coefficients diagonaux sont tous inversibles. ■

Corollaire 4.10.9. — *Pour $0 \leqslant r \leqslant n+2$, posons $u_{rr} = \mathrm{id}_{A_{n+1}(r)}$ et, pour $0 \leqslant r, s \leqslant n+2$ avec $r \neq s$, posons $u_{rs} = (-1)^{r+s+1}u'_{rs}$. Alors, la famille d'isomorphismes $\{u_{rs} : A_{n+1}(s) \xrightarrow{\sim} A_{n+1}(r)\}_{0\leqslant r,s\leqslant n+2}$ est une donnée de descente sur le X_{n+1}-schéma en groupes A_{n+1}. (Voir la définition 4.9.1.)*

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence immédiate des propositions 4.10.6 et 4.10.7. ■

Corollaire 4.10.10. — *Il existe un k-schéma en groupes commutatif D muni d'une action à gauche du k-schéma en groupes G et d'un isomorphisme de X_{n+1}-schémas en groupes $a : A_{n+1} \xrightarrow{\sim} D \times_k X_{n+1}$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites.*

(i) Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n+2$*, le carré*

$$\begin{array}{ccc} A_{n+1} \times_{X_{n+1}, d_j} X_{n+2} & \xrightarrow[\sim]{a \times \mathrm{id}} & D \times_k X_{n+2} \\ \sim \downarrow u_{ij} & & \parallel \\ A_{n+1} \times_{X_{n+1}, d_i} X_{n+2} & \xrightarrow[\sim]{a \times \mathrm{id}} & D \times_k X_{n+2} \end{array}$$

est commutatif.

(ii) On note $v : D \times_k G \xrightarrow{\sim} D \times_k G$ *l'isomorphisme de G-schémas donné par* $v(x, g) = (g(x), g)$ *sur les points. Pour* $m \geqslant 1$*, on note encore* $v : D \times_k X_m \xrightarrow{\sim} D \times_k X_m$ *l'isomorphisme de* X_m*-schémas déduit du précédent par changement de base suivant la composition de*

$$X_{n+2} \longrightarrow X_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow G_1 = G$$

où le premier morphisme est celui correspondant à l'injection croissante $\underline{\mathbf{1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n+2}}$ *d'image* $\{0, 1\}$*. Alors, le carré*

$$\begin{array}{ccc} A_{n+1} \times_{X_{n+1}, d_1} X_{n+2} & \xrightarrow[\sim]{a \times \mathrm{id}} & D \times_k X_{n+2} \\ \sim \downarrow u_{01} & & \sim \downarrow v \\ A_{n+1} \times_{X_{n+1}, d_0} X_{n+2} & \xrightarrow[\sim]{a \times \mathrm{id}} & D \times_k X_{n+2} \end{array}$$

est commutatif.

De plus, le triplet (D, ρ, a) *est unique à un unique isomorphisme près.*

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence directe de la proposition 4.9.9 et du corollaire 4.10.9. ■

Proposition 4.10.11. — *Il existe un unique morphisme de* X_n*-schémas en groupes* $\tilde{\phi}_n : B_n \longrightarrow D \times_k X_n$ *vérifiant les conditions suivantes.*

(i) Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n+1$*, le carré*

$$\begin{array}{ccc} B_n \times_{X_n, d_i} X_{n+1} & \xrightarrow{(-1)^i \tilde{\phi}_n \times \mathrm{id}} & D \times_k X_{n+1} \\ \downarrow \phi_{n+1}(i) & & \parallel \\ A_{n+1} & \xrightarrow[\sim]{a} & D \times_k X_{n+1} \end{array}$$

est commutatif.

(ii) En prenant $v : D \times_k X_{n+1} \xrightarrow{\sim} D \times_k X_{n+1}$ *comme dans la condition (ii) du corollaire 4.10.10, le carré*

$$\begin{array}{ccc} B_n \times_{X_n, d_0} X_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{\phi}_n \times \mathrm{id}} & D \times_k X_{n+1} \\ \downarrow \phi_{n+1}(0) & & \sim \downarrow v^{-1} \\ A_{n+1} & \xrightarrow[\sim]{a} & D \times_k X_{n+1} \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — On divise la preuve en trois parties.

Partie 1. — Supposons d'abord que $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et considérons le digramme

$$X_{n+2} \underset{d_i}{\overset{d_{i+1}}{\rightrightarrows}} X_{n+1} \xrightarrow{d_i} X_n. \tag{4.63}$$

On dispose de deux X_n-schémas en groupes B_n et $D \times_k X_n$, et d'un morphisme de X_{n+1}-schémas en groupes

$$\tilde{\phi}_{n+1}(i) : B_n \times_{X_n, d_i} X_{n+1} \longrightarrow (D \times_k X_n) \times_{X_n, d_i} X_{n+1} \tag{4.64}$$

donné par $\phi_{n+1}(i) : B_n(i) \longrightarrow A_{n+1}$ modulo les isomorphismes $A_{n+1} \simeq D \times_k X_{n+1} \simeq (D \times_k X_n) \times_{X_n, d_i} X_{n+1}$. Montrons que le morphisme $\tilde{\phi}_{n+1}(i)$ descend en un morphisme de X_n-schémas. Puisque $X_{1+\bullet}$ est un hyper-recouvrement pro-générique de X_0, il s'ensuit que $(d_i, d_{i+1}) : X_{n+2} \longrightarrow X_{n+1} \times_{X_n} X_{n+1}$ est plat et dominant. Par descente fidèlement plate, il est donc suffisant de montrer que les morphismes

$$B_n \times_{X_n, d_i} X_{n+1} \times_{X_{n+1}, d_i} X_{n+2} \xrightarrow{\tilde{\phi}_{n+1}(i)} (D \times_k X_n) \times_{X_n, d_i} X_{n+1} \times_{X_{n+1}, d_i} X_{n+2}$$

$$B_n \times_{X_n, d_i} X_{n+1} \times_{X_{n+1}, d_{i+1}} X_{n+2} \xrightarrow{\tilde{\phi}_{n+1}(i)} (D \times_k X_n) \times_{X_n, d_i} X_{n+1} \times_{X_{n+1}, d_{i+1}} X_{n+2}$$

coïncident modulo les isomorphismes canoniques. Autrement dit, on doit comparer les compositions de

$$B_n(i, i+1) \xrightarrow{\phi_{n+1}(i)} A_{n+1}(i) \xrightarrow[\sim]{a} D \times_k X_{n+2} \quad \text{et de} \quad B_n(i, i+1) \xrightarrow{\phi_{n+1}(i)} A_{n+1}(i+1) \xrightarrow[\sim]{a} D \times_k X_{n+2}.$$

Or, d'après les triangles commutatifs de la construction 4.10.5 et le corollaire 4.10.10, nous disposons d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B_n(i, i+1) \arrow[r, "\phi_{n+1}(i)"] \arrow[dr, "\phi_{n+1}(i)"'] & A_{n+1}(i+1) \arrow[d, "u_{i,i+1}"] \arrow[dr, "a"] & \\ & A_{n+1}(i) \arrow[r, "a"] & D \times_k X_{n+2}. \end{tikzcd}$$

(Remarquer que $u_{i,i+1} = u'_{i,i+1}$.) Ceci permet de conclure : le morphisme $\tilde{\phi}_{n+1}(i)$ descend donc en un morphisme de X_n-schémas en groupes $\tilde{\phi}_n(i) : B_n \longrightarrow D \times_k X_n$.

Partie 2. — On montre ici que le morphisme $(-1)^i \tilde{\phi}_n(i)$ est indépendant de $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Pour ce faire, on fixe des entiers $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$ et on montre que

$$(-1)^i \tilde{\phi}_n(i) \times_{X_n, d_{i,j+1}} X_{n+2} = (-1)^j \tilde{\phi}_n(j) \times_{X_n, d_{i,j+1}} X_{n+2}.$$

(On rappelle que $d_{i,j+1} : X_{n+2} \longrightarrow X_n$ est le morphisme correspondant à l'injection croissante $\underline{\mathbf{n}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n+2}}$ d'image le complémentaire de $\{i, j+1\}$.) Par construction, ces morphismes sont égaux à

$$(-1)^i \tilde{\phi}_{n+1}(i) \times_{X_{n+1}, d_{j+1}} X_{n+2} \qquad \text{et} \qquad (-1)^j \tilde{\phi}_{n+1}(j) \times_{X_{n+1}, d_i} X_{n+2}.$$

On doit donc comparer les compositions de

$$B_n(i, j+1) \xrightarrow{\phi_{n+1}(i)} A_{n+1}(j+1) \xrightarrow[\sim]{a} D \times_k X_{n+2} \quad \text{et de} \quad B_n(i, j+1) \xrightarrow{\phi_{n+1}(j)} A_{n+1}(i) \xrightarrow[\sim]{a} D \times_k X_{n+2}.$$

Vu que les triangles

$$\begin{tikzcd} B_n(i, j+1) \arrow[r, "\phi_{n+1}(j)"] \arrow[dr, "\phi_{n+1}(i)"'] & A_{n+1}(i) \arrow[d, "u'_{i,j+1}"] \\ & A_{n+1}(j+1) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} A_{n+1}(i) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u_{i,j+1}"'] & D \times_k X_{n+2} \\ A_{n+1}(j+1) \arrow[ur, "a"'] & \end{tikzcd}$$

sont commutatifs d'après la construction 4.10.5 et le corollaire 4.10.10, le résultat recherché découle de l'égalité $u_{i,j+1} = (-1)^{i-j} u'_{i,j+1}$.

Partie 3. — Notons $\tilde{\phi}_n$ la valeur commune des $(-1)^i \tilde{\phi}_n(i)$. Clairement, les carrés de la condition (i) sont commutatifs et il reste à vérifier qu'il en est de même du carré de la condition (ii). Il suffit de faire ceci après changement de base suivant $d_2 : X_{n+2} \longrightarrow X_{n+1}$. Autrement dit, il suffit de montrer que le carré

$$\begin{tikzcd} B_n(0,2) \arrow[r, "\tilde{\phi}_n"] \arrow[d, "\phi_{n+1}(0)"] & D \times_k X_{n+2} \arrow[d, "v^{-1}"] \\ A_{n+1}(2) \arrow[r, "a", "\sim"'] & D \times_k X_{n+2} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Or, d'après la construction 4.10.5 et le corollaire 4.10.10, nous avons les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} B_n(0,2) \arrow[r, "\phi_{n+1}(1)"] \arrow[dr, "\phi_{n+1}(0)"'] & A_{n+1}(0) \arrow[d, "u'_{20}"] \\ & A_{n+1}(2) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} A_{n+1}(0) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u_{20}"] & D \times_k X_{n+2} \arrow[d, "v^{-1}"] \\ A_{n+1}(2) \arrow[r, "a"] & D \times_k X_{n+2}. \end{tikzcd}$$

Vu que $u'_{20} = -u_{20}$, ceci nous ramène à montrer que le carré

$$\begin{tikzcd} B_n(0,2) \arrow[r, "\tilde{\phi}_n"] \arrow[d, "-\phi_{n+1}(1)"] & D \times_k X_{n+2} \arrow[d, equal] \\ A_{n+1}(0) \arrow[r, "a", "\sim"'] & D \times_k X_{n+2} \end{tikzcd}$$

commute, ce qui est une conséquence de la construction du morphisme $\tilde{\phi}_n$. ■

Notation 4.10.12. — Soit U un objet d'une catégorie possédant les limites finies pertinentes. Pour $r \geqslant 1$, on note $\mathrm{E}_\bullet(U,r)$ l'objet simplicial $r-1$-tronqué tel que $\mathrm{E}_p(U,r) = \star$ si $0 \leqslant p \leqslant r-2$ et $\mathrm{E}_{r-1}(U,r) = r$. (Bien entendu, $\star$ désigne l'objet final.) Ainsi, le morphisme $\mathrm{E}_\bullet(U,r) \longrightarrow \star$ est $r-1$-élémentaire. Lorsque $r = 1$, on retrouve l'objet simplicial de Čech $\check{C}_\bullet(U)$. □

Théorème 4.10.13. — *Il existe un diagramme commutatif de $X_\bullet$-schémas semi-simpliciaux en groupes*

$$\begin{tikzcd} B_\bullet \arrow[r, "\tilde{\phi}_\bullet"] \arrow[rr, bend right, "\phi_\bullet"'] & \mathrm{E}_\bullet(D,n+1) \times_k X_\bullet \arrow[r, two heads, "e_\bullet"] \arrow[rr, bend left, "\rho_\bullet"] & A_\bullet \arrow[r, hook, "a_\bullet"] & \mathrm{E}_\bullet(D,n+2) \times_k X_\bullet \end{tikzcd}$$

tel que $\rho_\bullet$ est l'unique morphisme de $X_\bullet$-schémas semi-simpliciaux donné en degré $n+1$ par la matrice ligne

$$(v^{-1}, -\mathrm{id}, \mathrm{id}, \cdots, (-1)^{n+1}\mathrm{id}) : \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n+1} D \times_k X_{n+1} \longrightarrow D \times_k X_{n+1}.$$

De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, a_p (resp. e_p) est un monomorphisme (resp. épimorphisme) scindé de X_p-schémas en groupes commutatifs et A_p s'identifie à l'image du morphisme de X_p-schémas en groupes commutatifs $\rho_p : \mathrm{E}_p(D,n+1) \times_k X_p \longrightarrow \mathrm{E}_p(D,n+2) \times_k X_p$.

Démonstration. — D'après le corollaire 4.10.10, on a un isomorphisme de X_{n+1}-schémas en groupes $a : A_{n+1} \xrightarrow{\sim} D \times_k X_{n+1}$. Cet isomorphisme s'étend d'une manière unique en un morphisme de $X_\bullet$-schémas semi-simpliciaux $a_\bullet : A_\bullet \longrightarrow \mathrm{E}_\bullet(D,n+2)$. Étant donné que $A_{1+\bullet} \longrightarrow X_{1+\bullet}$ est n-élémentaire, il découle aussitôt que le morphisme $a_\bullet$ est un monomorphisme scindé en chaque degré.

D'autre part, le morphisme $\tilde{\phi}_n : B_n \longrightarrow D \times_k X_n$ de la proposition 4.10.11 induit un morphisme de $X_\bullet$-schémas semi-simpliciaux $\tilde{\phi}_\bullet : B_\bullet \longrightarrow \mathrm{E}_\bullet(D,n+1) \times_k X_\bullet$ qui est un épimorphisme en chaque degré. De plus, le morphisme $\phi_\bullet : B_\bullet \longrightarrow A_\bullet$ se factorise par un morphisme $e_\bullet : \mathrm{E}_\bullet(D,n+1) \times_k X_\bullet \longrightarrow A_\bullet$. Pour voir cela, on utilise encore une fois l'hypothèse que $A_{1+\bullet} \longrightarrow X_{1+\bullet}$ est n-élémentaire pour se ramener à vérifier que $B_{n+1} \longrightarrow A_{n+1}$ se factorise par $\mathrm{E}_{n+1}(D,n+1) \times_k X_{n+1}$ ce qui est une conséquence des carrés commutatifs de la proposition 4.10.11. Ces carrés commutatifs permettent aussi de déterminer le morphisme ρ_{n+1}. Le théorème est démontré. ■

Notre prochaine tâche consiste à reformuler le théorème 4.10.13 à l'aide des objets d'Eilenberg–Mac Lane. Rappelons d'abord de quoi il s'agit. (Dans la construction 4.10.14 et le lemme 4.10.15 ci-dessous, D et G ne désignent pas nécessairement les schémas D et G considérés auparavant.)

Construction 4.10.14. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les limites finies pertinentes. On fixe un entier $r \geqslant 1$.

(a) Soit D un objet en groupes commutatif dans $\mathcal{C}$. Le r-ième *objet d'Eilenberg–Mac Lane* $\mathrm{K}_\bullet(D,r)$ est l'objet simplicial de $\mathcal{C}$ défini comme suit. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{K}_p(D,r) = \bigoplus_{s:\underline{\mathbf{p}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{r}}} D$$

où la somme porte sur les surjections croissantes $s : \underline{\mathbf{p}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{r}}$. (Ainsi, si $p < r$ on a $\mathrm{K}_p(D,r) = 0$ et $\mathrm{K}_r(D,r) = D$.) Pour une application croissante $t : \underline{\mathbf{q}} \to \underline{\mathbf{p}}$, le morphisme $t^* : \mathrm{K}_p(D,r) \longrightarrow \mathrm{K}_q(D,r)$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes :
— si l'application $s \circ t$ n'est pas surjective (avec $s : \underline{\mathbf{p}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{r}}$), alors le morphisme t^* est nul sur le s-ième facteur direct de $\mathrm{K}_p(D,r)$;
— si l'application $s \circ t$ est surjective (avec $s : \underline{\mathbf{p}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{r}}$), alors le morphisme t^* envoie le s-ième facteur direct de $\mathrm{K}_p(D,r)$ identiquement sur le $s \circ t$-ième facteur direct de $\mathrm{K}_q(D,r)$.

(b) Soit G un objet en groupes de $\mathcal{C}$ agissant à gauche sur un objet U. On peut alors former l'objet simplicial $U \rtimes G_\bullet$ qui correspond à U via l'équivalence du lemme 2.5.7 (étendue, par le lemme de Yoneda, aux objets de $\mathcal{C}$). Le morphisme $d_i : U \rtimes G_{p+1} = U \times (G)^{\times p+1} \longrightarrow U \rtimes G_p = U \times (G)^{\times p}$ est donné par

$$d_i(u, g_1, \cdots, g_{p+1}) = (u, g_1, \cdots, g_{i-1}, g_{i+1} \circ g_i, g_{i+2}, \cdots, g_{p+1}),$$

pour $1 \leqslant i \leqslant p$, et sinon par

$$d_0(u, g_1, \cdots, g_{p+1}) = (g_1(u), g_2, \cdots, g_{p+1}) \quad \text{et} \quad d_{n+1}(u, g_1, \cdots, g_{p+1}) = (u, g_1, \cdots, g_p).$$

(c) Supposons que l'objet en groupes G agit à gauche sur l'objet en groupes commutatif D. Alors, G agit aussi à gauche sur l'objet simplicial $\mathrm{K}_\bullet(D,r)$ et on peut former l'objet bisimplicial $\mathrm{K}_\bullet(D,r) \rtimes G_\bullet$. La diagonale de cet objet bisimplicial est appelée le r-ième *objet d'Eilenberg–Mac Lane tordu* associé à D muni de l'action de G, et sera notée $\mathrm{K}^G_\bullet(D,r)$. On dispose d'un morphisme évident d'objets simpliciaux $\mathrm{K}^G_\bullet(D,r) \longrightarrow G_\bullet$. De plus, étant donné un morphisme d'objets en groupes $H \longrightarrow G$, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{K}^H_\bullet(D,r) \simeq \mathrm{K}^G_\bullet(D,r) \times_{G_\bullet} H_\bullet$. □

On résume quelques propriétés standards des objets d'Eilenberg–Mac Lane dans le lemme suivant.

Lemme 4.10.15. — *Gardons les hypothèses et les notations de la construction 4.10.14. Pour $p \geqslant 1$, appelons v l'automorphisme de $U \times G_p$ donné sur les points par $v(u, g_1, \cdots, g_p) = (g_1(u), g_1, \cdots, g_p)$.*

(a) Il existe un unique morphisme d'objets simpliciaux $e_\bullet : \mathrm{E}_\bullet(D,r) \times G_\bullet \longrightarrow \mathrm{K}^G_\bullet(D,r)$ donné en degré r par la matrice ligne

$$(v^{-1}, -\mathrm{id}, \mathrm{id}, \cdots, (-1)^r \mathrm{id}) : \mathrm{E}_r(D,r) \times G_r = \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant r} D \times G_r \longrightarrow \mathrm{K}^G_r(D,r) = D \times G_r. \tag{4.65}$$

De plus, le morphisme $e_\bullet$ est un épimorphisme scindé en tout degré.

(b) Il existe un unique morphisme d'objets simpliciaux $a_\bullet : \mathrm{K}^G_\bullet(D,r) \longrightarrow \mathrm{E}_\bullet(D,r+1) \times G_\bullet$ donné en degré r par l'identité de $D \times G_r$. De plus, le morphisme $a_\bullet$ est un monomorphisme scindé en tout degré.

(c) L'objet simplicial $\mathrm{K}^G_\bullet(D,r)$ est l'image de l'unique morphisme $\mathrm{E}_\bullet(D,r) \times G_\bullet \longrightarrow \mathrm{E}_\bullet(D,r+1) \times G_\bullet$ donné en degré r par la matrice (4.65). *(Ce morphisme n'est autre que $a_\bullet \circ e_\bullet$.)*

(d) Le morphisme d'objets simpliciaux $\mathrm{K}^G_{1+\bullet}(D,r) \longrightarrow G_{1+\bullet}$ est $r-1$-élémentaire et $\mathrm{K}^G_{1+\bullet}(D,r)$ s'identifie à $\mathrm{E}_\bullet(D,r) \times G_{1+\bullet}$.

Démonstration. — On divise la preuve en deux parties. Dans la première, on démontre la variante non tordue de l'énoncé, i.e., en supposant que l'objet en groupes G est trivial. Dans la seconde, on explique comment en déduire la variante tordue.

Partie 1. — On suppose ici que G est trivial. Pour démontrer le lemme dans ce cas, on utilisera la correspondance de Dold–Kan (voir, par exemple, [**32**, Chapter III, §2]). On rappelle que cette correspondance est une équivalence, notée N, entre la catégorie des objets simpliciaux en groupes commutatifs et la catégorie des complexes d'objets en groupes commutatifs concentrés en degrés homologiques positifs.

Si $J_\bullet$ est un objet simplicial en groupes commutatif, le complexe $\mathrm{N}_\bullet(J)$ admet deux descriptions équivalentes :

$$\mathrm{N}_p(J) = \ker\{\sqcap_i d_i : J_p \longrightarrow \oplus_{1\leqslant i\leqslant p} J_{p-1}\} \quad \text{ou} \quad \mathrm{N}_p(J) = \operatorname{coker}\{\sqcup_j s_j : \oplus_{0\leqslant j\leqslant p-1} J_{p-1} \to J_p\}. \tag{4.66}$$

En utilisant la première description, on voit que $\mathrm{N}_\bullet(\mathrm{E}(D,r)) = [\cdots 0 \to D = D \to 0 \cdots]$ où la première copie de D est placée en $r-1$. En utilisant la seconde description, on voit que $\mathrm{N}_\bullet(\mathrm{K}(D,r)) = D[r]$. Les morphismes $e_\bullet : \mathrm{N}_\bullet(\mathrm{E}(D,r)) \longrightarrow \mathrm{N}_\bullet(\mathrm{K}(D,r))$ et $a_\bullet : \mathrm{N}_\bullet(\mathrm{K}(D,r)) \longrightarrow \mathrm{N}_\bullet(\mathrm{E}(D,r+1))$ sont donnés par

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & D & = & D & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & D & = & D & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

respectivement. Les assertions (a)–(d) sont alors immédiates mis à part les deux points suivants :

(1) le calcul du morphisme $e_r : \mathrm{E}_r(D,r) \longrightarrow \mathrm{K}_r(D,r)$;

(2) le fait que $\mathrm{K}_{1+\bullet}(D,r)$ est $r-1$-tronqué.

Pour le point (1), considérons la matrice ligne

$$(l_0, \cdots, l_r) : \mathrm{E}_r(D,r) = \bigoplus_{0\leqslant i\leqslant r} D \longrightarrow \mathrm{K}_r(D,r) = D$$

du morphisme e_r. D'après la discussion précédente, on sait que $l_0 = \mathrm{id}$. Par ailleurs, puisque $e_\bullet$ est un morphisme d'objets simpliciaux et que $\mathrm{K}_{r-1}(D,r) = 0$, les compositions

$$s_j : D = \mathrm{E}_{r-1}(D,r) \longrightarrow \mathrm{E}_r(D,r) \longrightarrow \mathrm{K}_r(D,r)$$

sont nulles pour tout $0 \leqslant j \leqslant r-1$, ce qui donne les relations $l_j + l_{j+1} = 0$ et permet de conclure.

Pour le point (2), on calcule $\mathrm{N}(\mathrm{K}_{1+\bullet}(D,r))$ en utilisant la seconde formule dans (4.66). On trouve le complexe $[\cdots 0 \to D = D \to 0 \cdots]$ où la première copie de D est placée en $r-1$. Étant donné que N est une équivalence de catégories et que $\mathrm{N}(\mathrm{E}(D,r))$ est donné par le même complexe, on obtient un isomorphisme $\mathrm{K}_{1+\bullet}(D,r) \simeq \mathrm{E}_\bullet(D,r)$. Ceci permet de conclure puisque $\mathrm{E}_\bullet(D,r)$ est $r-1$-tronqué.

Partie 2. — On explique ici comment déduire la version tordue de la version non tordue. Les morphismes $e_\bullet : \mathrm{E}_\bullet(D,r) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(D,r)$ et $a_\bullet : \mathrm{K}_\bullet(D,r) \longrightarrow \mathrm{E}_\bullet(D,r+1)$ sont G-équivariants. Ils induisent donc des morphismes d'objets bisimpliciaux

$$e_{\bullet,\bullet} : \mathrm{E}_\bullet(D,r) \rtimes G_\bullet \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(D,r) \rtimes G_\bullet \qquad \text{et} \qquad a_{\bullet,\bullet} : \mathrm{K}_\bullet(D,r) \rtimes G_\bullet \longrightarrow \mathrm{E}_\bullet(D,r+1) \rtimes G_\bullet.$$

Comme dans la construction 4.10.14(c), appelons $\mathrm{E}^G_\bullet(D,r)$ la diagonale de l'objet bisimplicial $\mathrm{E}_\bullet(D,r) \rtimes G_\bullet$. Les deux morphismes précédents induisent donc des morphismes d'objets simpliciaux

$$e^G_\bullet : \mathrm{E}^G_\bullet(D,r) \longrightarrow \mathrm{K}^G_\bullet(D,r) \qquad \text{et} \qquad a^G_\bullet : \mathrm{K}^G_\bullet(D,r) \longrightarrow \mathrm{E}^G_\bullet(D,r+1). \tag{4.67}$$

Considérons l'unique morphisme de $G_\bullet$-objets simpliciaux

$$u_\bullet : \mathrm{E}^G_\bullet(D,r) \longrightarrow \mathrm{E}_\bullet(D,r) \times G_\bullet \tag{4.68}$$

donné en degré $r-1$ par l'identité de $D \times G_{r-1}$. En degré $p \geqslant r-1$, le morphisme u_p est la somme directe, suivant les injections croissantes $\iota : \underline{\mathbf{r-1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{p}}$, des morphismes $u_\iota : D \times G_p \longrightarrow D \times G_p$ donnés par

$$u_\iota(x, g_1, \cdots, g_p) = (g_{\iota(0)} \circ \cdots \circ g_1(x), g_1, \cdots, g_p).$$

Ceci montre que (4.68) est un isomorphisme. On déduit de (4.67) des morphismes d'objets simpliciaux

$$e_\bullet : \mathrm{E}_\bullet(D,r) \times G_\bullet \longrightarrow \mathrm{K}^G_\bullet(D,r) \qquad \text{et} \qquad a_\bullet : \mathrm{K}^G_\bullet(D,r) \longrightarrow \mathrm{E}_\bullet(D,r+1) \times G_\bullet. \tag{4.69}$$

Ces morphismes vérifient les propriétés (a)–(d). Seule la détermination de $e_r : \mathrm{E}_r(D,r) \longrightarrow \mathrm{K}_r^G(D,r)$ nécessite un argument. Par construction, le morphisme e_r est donné par la composition de

$$\bigoplus_{0\leqslant i\leqslant r} D \times G_r \xrightarrow{u_r^{-1}} \bigoplus_{0\leqslant i\leqslant r} D \times G_r \xrightarrow{(\mathrm{id},-\mathrm{id},\cdots,(-1)^r\mathrm{id})} D \times G_r$$

et u_r est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(v,\mathrm{id},\cdots,\mathrm{id})$. Ceci termine la preuve du lemme. ■

On reprend les notations d'avant la construction 4.10.14. On peut à présent reformuler le théorème 4.10.13 comme suit.

Théorème 4.10.16. — *Dans la situation 4.10.1, il existe un isomorphisme canonique de $X_\bullet$-schémas semi-simpliciaux en groupes commutatifs*

$$A_\bullet \simeq \mathrm{K}_\bullet^G(D,n+1) \times_{G_\bullet} X_\bullet. \tag{4.70}$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du théorème 4.10.13 et du lemme 4.10.15. ■

On termine cette sous-section en spécialisant les résultats obtenus à la situation qui nous intéresse.

Théorème 4.10.17. — *Reprenons les hypothèses et les notations de la sous-section 4.8, et notamment celles du théorème 4.8.17. Choisissons une clôture normale $\widehat{K}/K$ de K et un plongement de (K,Δ)-corps $\widehat{K} \hookrightarrow \mathcal{O}(Q_0)$, et posons* $\mathrm{Gal}^\Delta = \mathrm{Gal}^\Delta(\widehat{K}/K)$.

Pour tout $n \geqslant 0$, il existe, à un unique isomorphisme près, un pro-C-schéma en groupes commutatif $\Pi_{n+1}^\Delta = \Pi_{n+1}^\Delta(K)$ muni d'une action de Gal^Δ *et d'un isomorphisme de pro-$\widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)}$-schémas semi-simpliciaux en groupes commutatifs*

$$\mathrm{A}_\bullet^{(n+1)} \simeq \mathrm{K}_\bullet^{\mathrm{Gal}^\Delta}(\Pi_{n+1}^\Delta, n+1) \times_{\mathrm{Gal}_\bullet^\Delta} \widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)}. \tag{4.71}$$

Définition 4.10.18. — *Soit K un Δ-corps algébriquement clos de caractéristique nulle. On choisit une hyper-enveloppe universelle $Q_\bullet \longrightarrow$* $\mathrm{Spec}(K)$*, une clôture normale $\widehat{K}/K$ et un plongement de (K,Δ)-corps $\widehat{K} \hookrightarrow \mathcal{O}(Q_0)$. Pour $n \geqslant 2$, le pro-$K^{\Delta=0}$-schéma en groupes commutatif $\Pi_n^\Delta(K)$ fourni par le théorème 4.10.17 est appelé le n-ième* groupe fondamental différentiel *du Δ-corps K. On étend cette suite à $n = 1$ en posant $\Pi_1^\Delta(K) = \mathrm{Gal}^\Delta(\widehat{K}/K)$.*

Remarque 4.10.19. — Les groupes fondamentaux différentiels de la définition 4.10.18 dépendent des choix de $Q_\bullet$ et du plongement $\widehat{K} \hookrightarrow \mathcal{O}(Q_0)$. Toutefois, on s'attend à ce que cette dépendance soit seulement à un isomorphisme (non unique) près. □

5. Calculs de groupes fondamentaux différentiels et de types d'homotopie feuilletée

Dans la section 4, nous avons introduit le type d'homotopie feuilletée générique d'un Δ-corps algébriquement clos de caractéristique nulle K et nous avons analysé la tour de Postnikov associée. Ceci a permis de mettre en évidence des groupes fondamentaux différentiels attachés à K, qui sont en fait des pro-groupes algébriques définis sur le corps des constantes de K.

Le but de la présente section et de décrire le type d'homotopie feuilletée de K à l'aide d'objets plus classiques. Le résultat le plus complet dans cette direction sera obtenu lorsque le Δ-corps K est cohomologiquement basique (voir la définition 5.7.15) – une propriété qui est satisfaite par exemple par la clôture algébrique de $C(t_1,\cdots,t_m)$ muni de sa Δ-structure évidente. (Pour un énoncé précis, on renvoie le lecteur au théorème 5.12.3.) La possibilité d'une description complète et explicite du type d'homotopie feuilletée était pour le moins inattendue et cette description constitue l'un des résultats majeurs de cet article.

Les sous-sections 5.1, 5.2 et 5.4 regroupent des préliminaires généraux concernant la cohomologie étale « générique » de certains schémas semi-simpliciaux. En particulier, on montre que la cohomologie étale d'un schéma simplicial d'Eilenberg–Mac Lane tordu $\mathrm{K}_\bullet^G(A,r)$ coïncide avec la cohomologie étale du schéma semi-simplicial $\eta_{\mathrm{K}_\bullet^G(A,r)}$ (voir le corollaire 5.2.8). Un tel résultat est incontournable pour la suite et sa nécessité est fondamentalement liée à l'approche « générique » employée tout au long de la section

4. Dans la sous-section 5.3, on étudie les torseurs au-dessus de certains schémas semi-simpliciaux et on montre que ces derniers peuvent être classifiés par une classe de cohomologie ; il s'agit bien entendu d'une variante semi-simpliciale d'un fait bien standard concernant les torseurs. Ceci nous pousse à calculer la cohomologie de divers schémas simpliciaux d'Eilenberg–Mac Lane tordus à valeurs dans divers schémas en groupes commutatifs. Ces calculs occupent les sous-sections 5.5 et 5.6. Il s'agit en fait de calculs plutôt simples et assez jolis, et qui remontent en partie à l'article de Breen [**24**]. Les sous-sections 5.7 et 5.8 sont consacrées au lemme de Poincaré feuilleté (pour les modules différentiels, mais aussi pour les schémas en groupes commutatifs et connexes) et à ses applications. Le lemme de Poincaré feuilleté permet de calculer la cohomologie fttf d'un Δ-corps à valeurs dans divers faisceaux fttf discrets et localement discrets. Enfin, dans les sous-sections 5.10, 5.11 et 5.12 on utilise tous ces préliminaires pour confronter, d'une part, la cohomologie du type d'homotopie feuilletée comme décrit dans les théorèmes 4.8.17 et 4.10.17, et, d'autre part, la cohomologie fttf du Δ-corps, ce qui nous permet d'obtenir des informations très précises sur les groupes fondamentaux différentiels et les torseurs du théorème 4.8.17. Jointes aux constructions de la sous-section 5.9, ces informations nous permettent d'obtenir la description recherchée du type d'homotopie feuilletée.

5.1. Objets semi-cosimpliciaux robustes. —

Le but de cette sous-section est d'étendre à certains objets semi-bicosimpliciaux le théorème d'Eilenberg–Zilber (voir par exemple [**32**, Chapter IV, Theorem 2.5]). Il est facile de voir que l'extension naïve de ce théorème est fausse en général. Une partie de notre tâche consiste donc à identifier une bonne classe d'objets semi-bicosimpliciaux qui satisfont au théorème d'Eilenberg–Zilber.

Dans cette sous-section, $\mathcal{A}$ désignera une catégorie abélienne. Nous sommes intéressés par des objets semi-cosimpliciaux, semi-bicosimpliciaux, etc., à valeurs dans $\mathbf{Cpl}(\mathcal{A})$. De tels objets seront simplement appelés complexes semi-cosimpliciaux, semi-bicosimpliciaux, etc. Ils seront dits uniformément bornés à gauche s'ils prennent leurs valeurs dans $\mathbf{Cpl}_{\leqslant N}(\mathcal{A}) = \mathbf{Cpl}^{\geqslant -N}(\mathcal{A})$ pour $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

Notations 5.1.1. —

(a) On dispose d'une structure monoïdale associative unitaire (mais non commutative) sur $\mathbf{\Delta}'_+$ donnée par : $\underline{\mathbf{m}} + \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{1}}$. Si $A^\bullet$ est un objet semi-cosimplicial (resp. semi-cosimplicial coaugmenté), on note $A^{a+\bullet}$, pour $a \in \mathbb{N}$, l'objet semi-cosimplicial (resp. semi-cosimplicial coaugmenté) obtenu en composant le foncteur A avec l'endofoncteur $\underline{\mathbf{a}-\mathbf{1}} + (-)$ de $\mathbf{\Delta}'$ (resp. $\mathbf{\Delta}'_+$). Si $a \geqslant 1$, l'objet semi-cosimplicial $A^{a+\bullet}$ est toujours naturellement coaugmenté par A^{a-1}.

(b) Si A est un complexe semi-cosimplicial, semi-bicosimplicial, etc., on note $\mathrm{Tot}\, A$ le complexe simple associé au bicomplexe, tricomplexe, etc., qu'on obtient à partir de A en prenant la somme alternée des morphismes faces. Si A est un complexe semi-cosimplicial coaugmenté, semi-bicosimplicial bicoaugmenté, etc., on note $\mathrm{Tot}^+ A$ le complexe simple associé au bicomplexe, tricomplexe, etc., qu'on obtient à partir de A en tenant compte des coaugmentations. Nos complexes semi-cosimpliciaux, semi-bicosimpliciaux, etc., (coaugmentés, bicoaugmentés), seront toujours uniformément bornés à gauche de sorte que la formation de Tot (ou Tot^+) ne fait intervenir que des sommes directes finies. (En particulier, il n'y a pas d'ambiguité lorsqu'on parle du « complexe simple associé ».) □

Définition 5.1.2. — *Un complexe semi-cosimplicial coaugmenté uniformément borné à gauche $A^\bullet$ est dit* permanemment acyclique *si le complexe* $\mathrm{Tot}^+ (A^{a+\bullet}) \in \mathbf{Cpl}(\mathcal{A})$ *est acyclique pour tout $a \in \mathbb{N}$.*

Lemme 5.1.3. — *Soit $h^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ un morphisme de complexes semi-cosimpliciaux coaugmentés uniformément bornés à gauche. Si $A^\bullet$ et $B^\bullet$ sont permanemment acycliques, il en est de même de* $\mathrm{Cône}(h^\bullet)$.

Démonstration. — C'est évident. ■

Lemme 5.1.4. — *Soit $A^\bullet$ un complexe semi-cosimplicial coaugmenté uniformément borné à gauche. Supposons que $A^\bullet$ est permanemment acyclique. Soit $r \in \mathbb{Z}$ un entier tel que $\mathrm{H}^i(A^m) = 0$ pour tout $i < r$ et tout $m \in \mathbb{N}$. Alors, le morphisme $d^0 : \mathrm{H}^r(A^{a-1}) \longrightarrow \mathrm{H}^r(A^a)$ est injectif pour tout $a \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. — Le morphisme $d^0 : A^{a-1} \longrightarrow A^a$ est la coaugmentation du complexe semi-cosimplicial $A^{a+\bullet}$. Par hypothèse, cette coaugmentation induit un quasi-isomorphisme $A^{a-1} \longrightarrow \mathrm{Tot}\,(A^{a+\bullet})$. Par ailleurs, les annulations $\mathrm{H}^i(A^m) = 0$ pour $i < r$ et $m \geqslant a$ entraînent, par un argument de suite spectral, que le morphisme évident $\mathrm{H}^r(\mathrm{Tot}\,(A^{a+\bullet})) \longrightarrow \mathrm{H}^r(A^a)$ est injectif. Ceci permet de conclure. ■

Proposition 5.1.5. — *Soit $A^{\bullet,\bullet}$ un complexe semi-bicosimplicial bicoaugmenté uniformément borné à gauche. Supposons que les complexes semi-cosimpliciaux coaugmentés $A^{m,\bullet}$ et $A^{\bullet,n}$ sont permanemment acycliques pour tout $m, n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. (On dit que $A^{\bullet,\bullet}$ est bipermanemment acyclique.) Alors, le complexe semi-cosimplicial coaugmenté* $\mathrm{diag}(A)$ *est aussi permanemment acyclique.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que $\mathrm{H}^i(A^{m,n}) = 0$ pour $i < 0$ et m, $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. Vu que $\mathrm{diag}(A)^{a+\bullet} = \mathrm{diag}(A^{a+\bullet,a+\bullet})$, il est suffisant de montrer que le complexe $\mathrm{Tot}^+\,\mathrm{diag}(A)$ est acyclique. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un complexe semi-bicosimplicial bicoaugmenté bipermanemment acyclique $A^{\bullet,\bullet}$ tel que $\mathrm{H}^r(\mathrm{Tot}^+\,\mathrm{diag}(A)) \neq 0$ pour un certain $r \in \mathbb{Z}$. On suppose que $A^{\bullet,\bullet}$ et r sont choisis de sorte que r soit le plus petit possible tout en ayant les annulations $\mathrm{H}^i(A^{m,n}) = 0$ pour $i < 0$ et m, $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. On pose $B^{\bullet,\bullet} = \mathrm{Cône}\{d^{0,0} : A^{\bullet,\bullet} \longrightarrow A^{1+\bullet,1+\bullet}\}$. On a donc un triangle distingué de complexes semi-bicosimpliciaux bicoaugmentés

$$A^{\bullet,\bullet} \longrightarrow A^{1+\bullet,1+\bullet} \longrightarrow B^{\bullet,\bullet} \longrightarrow .$$

Clairement, $A^{1+\bullet,1+\bullet}$ est bipermanemment acyclique et vérifie les annulations $\mathrm{H}^i(A^{1+m,1+n}) = 0$ pour $i < 0$ et $m, n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. De même, le lemme 5.1.3 montre que $B^{\bullet,\bullet}$ est bipermanemment acyclique et le lemme 5.1.4 fournit les annulations $\mathrm{H}^i(B^{m,n}) = 0$ pour $i < 0$ et $m, n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$.

Par le choix de r, on a donc $\mathrm{H}^s(\mathrm{Tot}^+\,\mathrm{diag}(A^{1+\bullet,1+\bullet})) = 0$ et $\mathrm{H}^s(\mathrm{Tot}^+\,\mathrm{diag}(B)) = 0$ pour tout $s \leqslant r-1$. Or, le morphisme

$$\mathrm{Tot}^+\,\mathrm{diag}(A) \longrightarrow \mathrm{Tot}^+\,\mathrm{diag}(A^{1+\bullet,1+\bullet})$$

est homotope au morphisme nul ; une homotopie est donnée par les morphismes identiques. La suite exacte longue de cohomologie fournit alors un isomorphisme $\mathrm{H}^{r-1}(\mathrm{Tot}^+\,\mathrm{diag}(B)) \simeq \mathrm{H}^r(\mathrm{Tot}^+\,\mathrm{diag}(A))$ entre un objet nul et un objet non nul. C'est la contradiction recherchée. ■

Définition 5.1.6. — *Un complexe semi-cosimplicial uniformément borné à gauche $A^\bullet$ est dit* robuste *si le complexe semi-cosimplicial coaugmenté $A^{1+\bullet}$ est permanemment acyclique. Il revient au même de dire que le complexe* $\mathrm{Tot}^+\,(A^{a+\bullet})$ *est acyclique pour tout $a \geqslant 1$.*

Exemple 5.1.7. — Soit $A^\bullet$ est un complexe cosimplicial uniformément borné à gauche. Alors, le complexe semi-cosimplicial $A^\bullet$, obtenu en oubliant les dégénérescences, est robuste. En effet, pour $a \geqslant 1$, l'identité du complexe $\mathrm{Tot}^+(A^{a+\bullet})$ est homotope au morphisme nul ; une homotopie est donnée par les morphismes $s^{a-1} : A^{a+n} \longrightarrow A^{a+n-1}$ correspondant aux surjections croissantes $\sigma^{a-1} : \underline{\mathbf{a+n}} \twoheadrightarrow \underline{\mathbf{a+n-1}}$ qui prennent la même valeur en $a-1$ et a. □

Pour fixer les idées, rappelons la définition du morphisme d'Alexander–Whitney.

Définition 5.1.8. — *Soit $A^{\bullet,\bullet}$ un objet semi-bicosimplicial à valeurs dans une catégorie additive. Le morphisme d'Alexander–Whitney* $\mathrm{Tot}\,A \longrightarrow \mathrm{diag}\,A$ *est le morphisme de complexes qui est donné, en degré $n \in \mathbb{N}$, par la somme des morphismes $A^{i,n-i} \longrightarrow A^{n,n}$, pour $0 \leqslant i \leqslant n$, induits par les inclusions croissantes $\underline{\mathbf{i}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ et $\underline{\mathbf{n-i}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ d'images respectives $\{0, \ldots, i\}$ et $\{i, \ldots, n\}$.*

Proposition 5.1.9. — *Soit $A^{\bullet,\bullet}$ un complexe semi-bicosimplicial uniformément borné à gauche. On suppose que les complexes semi-cosimpliciaux $A^{m,\bullet}$ et $A^{\bullet,n}$ sont robustes pour tout m, $n \in \mathbb{N}$. Alors, le morphisme d'Alexandre–Whitney* $\mathrm{Tot}(A^{\bullet,\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathrm{diag}^\bullet A)$ *est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — À partir du complexe semi-bicosimplicial $A^{\bullet,\bullet}$, on peut définir un foncteur covariant

$$\widetilde{A} : \mathbf{\Delta}'_+ \times \mathbf{\Delta}'_+ \times \mathbf{\Delta}' \times \mathbf{\Delta}' \longrightarrow \mathbf{Cpl}(\mathcal{A})$$

en posant $\widetilde{A}(\underline{\mathbf{m}}, \underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}) = A(\underline{\mathbf{m}} + \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{n}} + \underline{\mathbf{b}}) = A^{m+1+a,n+1+b}$. (Voir la notation 5.1.1(a).) En fixant m, $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$ et en appliquant tantôt le foncteur $\mathrm{Tot}(-)$, tantôt le foncteur $\mathrm{Tot}(\mathrm{diag}(-))$, on obtient deux complexes

$$R^{m,n} = \mathrm{Tot}(A^{m+1+\bullet,n+1+\bullet}) \qquad \text{et} \qquad P^{m,n} = \mathrm{Tot}(\mathrm{diag}(A^{m+1+\bullet,n+1+\bullet})),$$

ainsi qu'un morphisme d'Alexander–Whitney $R^{m,n} \longrightarrow P^{m,n}$. En faisant varier m et n dans $\mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, on obtient alors deux complexes semi-bicosimpliciaux bicoaugmentés $R^{\bullet,\bullet}$ et $P^{\bullet,\bullet}$, ainsi qu'un morphisme

$R^{\bullet,\bullet} \longrightarrow P^{\bullet,\bullet}$. Les propriétés suivantes découlent immédiatement de la construction, des hypothèses de l'énoncé et de la proposition 5.1.5 :

(1) $R^{-1,-1} = \mathrm{Tot}(A^{\bullet,\bullet})$, $P^{-1,-1} = \mathrm{Tot}(\mathrm{diag}^{\bullet}(A))$ et $R^{-1,-1} \longrightarrow P^{-1,-1}$ est le morphisme d'Alexander–Whitney qui nous intéresse ;

(2) les complexes semi-cosimpliciaux coaugmentés $R^{m,\bullet}$, $R^{\bullet,n}$, $P^{m,\bullet}$ et $P^{\bullet,n}$ sont permanemment acycliques pour tout m, $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$;

(3) pour $m \geqslant 0$, on a des quasi-isomorphismes $A^{m,m} \longrightarrow R^{m,m}$ et $A^{m,m} \longrightarrow P^{m,m}$, induits par le morphisme $d^{0,0} : A^{m,m} \longrightarrow A^{1+m,1+m}$, ce qui entraîne en particulier que $R^{m,m} \longrightarrow P^{m,m}$ est un quasi-isomorphisme.

En utilisant encore une fois la proposition 5.1.5, on déduit de la propriété (2) ci-dessus que les complexes $\mathrm{Tot}^{+}(\mathrm{diag}^{\bullet}(R))$ et $\mathrm{Tot}^{+}(\mathrm{diag}^{\bullet}(P))$ sont acycliques. Autrement dit, les coaugmentations de $\mathrm{diag}(R)$ et $\mathrm{diag}(P)$ induisent des quasi-isomorphismes

$$R^{-1,-1} \xrightarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}(\mathrm{diag}^{\bullet}(R)) \qquad \text{et} \qquad P^{-1,-1} \xrightarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}(\mathrm{diag}^{\bullet}(P)).$$

Pour conclure, il est donc suffisant de montrer que le morphisme $\mathrm{Tot}(\mathrm{diag}^{\bullet}(R)) \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathrm{diag}^{\bullet}(P))$ est un quasi-isomorphisme, ce qui découle de la propriété (3) ci-dessus. ■

5.2. Préliminaires sur la cohomologie de certains schémas semi-simpliciaux, I. —

On regroupe ici quelques préliminaires qui serviront tout au long de cette section. On fixe un corps k qu'on suppose de caractéristique nulle. Dans cette sous-section l'expression « hyper-recouvrement générique » sera comprise en spécialisant la situation 4.4.1 comme suit : $\mathcal{C}$ est la catégorie des k-schémas de type fini, les morphismes admissibles sont les morphismes lisses, et « dominant » admet la signification usuelle. Aux nil-immersions près, ceci est compatible avec la définition 4.6.11 pour $\Delta = \varnothing$.

Lemme 5.2.1. — *Soient $X_{\bullet}$ et $Y_{\bullet}$ deux k-schémas semi-simpliciaux de type fini. On suppose que $X_{1+\bullet}$ et $Y_{1+\bullet}$ sont des hyper-recouvrements génériques de X_0 et Y_0 respectivement. On considère le k-schéma semi-bisimplicial $Z_{\bullet,\bullet} = X_{\bullet} \times_k Y_{\bullet}$. Soit $F^{\bullet}$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k *projectivement* ét*-fibrant et borné à gauche. Alors, le morphisme d'Alexander–Whitney*

$$\mathrm{Tot}\, F^{\bullet}(\eta_{Z_{\bullet,\bullet}}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^{\bullet}(\eta_{\mathrm{diag}_{\bullet}(Z)})$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — Vu la proposition 5.1.9, il suffit de vérifier que les complexes semi-cosimpliciaux $F(\eta_{Z_{m,\bullet}})$ et $F(\eta_{Z_{\bullet,n}})$ sont robustes pour tout $m,n \in \mathbb{N}$. Ainsi, il faut montrer que les complexes semi-cosimpliciaux coaugmentés $F(\eta_{Z_{m,b+\bullet}})$ et $F(\eta_{Z_{a+\bullet,n}})$ sont acycliques pour tout $a,b \geqslant 1$. Puisque les morphismes $X_m \times_k Y_{b+\bullet} \longrightarrow X_m \times_k Y_{b-1}$ et $X_{a+\bullet} \times_k Y_n \longrightarrow X_{a-1} \times_k Y_n$ sont des hyper-recouvrements génériques de $X_m \times_k Y_{b-1}$ et $X_{a-1} \times_k Y_n$, le résultat recherché découle du théorème 4.4.16 (cas $\Delta = \varnothing$). ■

Proposition 5.2.2. — *Soit $f_{\bullet} : Y_{\bullet} \longrightarrow X_{\bullet}$ un morphisme de k-schémas semi-simpliciaux de type fini. Supposons que $f_{\bullet}$ est un hyper-recouvrement générique relatif, et que $X_{1+\bullet}$ et $Y_{1+\bullet}$ sont des hyper-recouvrements génériques de X_0 et Y_0 respectivement. Soit $F^{\bullet}$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k *projectivement* ét*-fibrant et borné à gauche. Alors, le morphisme évident*

$$\mathrm{Tot}\, F^{\bullet}(\eta_{X_{\bullet}}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^{\bullet}(\eta_{Y_{\bullet}})$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — En raisonnant comme dans la première étape de la preuve du théorème 4.4.16, on se ramène au cas où $F^{\bullet} = I[0]$, avec I un faisceau projectivement ét-fibrant (ce qui revient à dire que I est un faisceau étale tel que les préfaisceaux $\mathrm{H}^{i}_{\text{ét}}(-;I)$ sont nuls pour $i \geqslant 1$). On procède par l'absurde en supposant que le complexe $J^{\bullet} = \mathrm{Cône}\{I(\eta_{X_{\bullet}}) \to I(\eta_{Y_{\bullet}})\}$ n'est pas acyclique. Soit r le plus petit entier tel que $\mathrm{H}^{r}(J) \neq 0$. Clairement $r \geqslant -1$. On supposera que le morphisme $f_{\bullet}$ est choisi de sorte que r est minimal.

Considérons le k-schéma semi-bisimplicial $\check{C}_{\bullet}(X_{1+\bullet}/X_{\bullet})$ et notons, pour $m \in \mathbb{N}$, $X^{(m)}_{\bullet} = \check{C}_m(X_{1+\bullet}/X_{\bullet})$. D'après la proposition 4.4.15, le schéma semi-simplicial $X^{(m)}_{1+\bullet}$ est un hyper-recouvrement générique de $X^{(m)}_0$. Posons $Y^{(m)}_{\bullet} = Y_{\bullet} \times_{X_{\bullet}} X^{(m)}_{\bullet}$. Le lemme 4.4.4(b) entraîne que $Y^{(m)}_{\bullet} \longrightarrow X^{(m)}_{\bullet}$ est un hyper-recouvrement générique relatif. De plus, $Y^{(m)}_{1+\bullet}$ est un hyper-recouvrement générique de $Y^{(m)}_0$. (Utiliser pour cela le fait que le morphisme $X^{(m)}_{1+\bullet} \longrightarrow X_{1+\bullet} \times_{X_0} X^{(m)}_0$ est un hyper-recouvrement générique relatif ; voir la preuve de la proposition 4.4.15.) D'après la minimalité de l'entier r, le complexe ${}^{(m)}J^\bullet = \text{Cône}\{I(\eta_{X^{(m)}_\bullet}) \to I(\eta_{Y^{(m)}_\bullet})\}$ est acyclique en degrés cohomologiques strictement inférieurs à r, i.e., $\mathrm{H}^i({}^{(m)}J^\bullet) = 0$ si $i < r$. De plus, le cas $m = 0$ est spécial puisque $X^{(0)}_\bullet$ et $Y^{(0)}_\bullet$ sont tous les deux des hyper-recouvrements génériques de X_0, et le théorème 4.4.16 (cas $\Delta = \varnothing$) permet d'affirmer que ${}^{(0)}J^\bullet$ est acyclique.

Pour terminer, considérons le double complexe $\tilde{J}^{\bullet,\bullet}$ donné par $\tilde{J}^{m,n} = {}^{(m)}J^n$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme $J^n \longrightarrow \tilde{J}^{\bullet,n}$ est un quasi-isomorphisme : ceci est une conséquence directe du théorème 4.2.18 (cas $\Delta = \varnothing$). Il s'ensuit un quasi-isomorphisme $J^\bullet \simeq \text{Tot } \tilde{J}^{\bullet,\bullet}$. En utilisant la suite spectrale convergente vers la cohomologie de Tot $\tilde{J}^{\bullet,\bullet}$ et en utilisant que $\mathrm{H}^i(\tilde{J}^{m,\bullet}) = 0$ si $i < r$ ou si $m = 0$, nous obtenons que $\mathrm{H}^r(J) = 0$. Ceci contredit notre hypothèse de départ. ∎

Nous aurons besoin d'une variante « tordue » de la proposition 5.2.2. Pour énoncer cette variante, on doit introduire la construction suivante (qui clarifie et précise aussi la construction 4.6.24).

Construction 5.2.3. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant les produits directs finis.

(a) Soit $S_\bullet$ un objet semi-simplicial de $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{C}/S_\bullet$ la catégorie ayant pour objets les couples (U, m) avec $m \in \mathbb{N}$ et U un S_m-objet. Une flèche $(f, r) : (V, n) \longrightarrow (U, m)$ est la donnée d'un injection croissante $r : \underline{\mathbf{m}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ et d'un morphisme $V \longrightarrow U$ dans $\mathcal{C}$ qui fait commuter le carré

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ S_n \arrow[r, "r^*"] & S_m. \end{tikzcd}$$

(b) Soient G un objet en groupes de $\mathcal{C}$ et $G_\bullet$ son classifiant. Soit F un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ (à valeurs dans une catégorie quelconque) muni d'une action de G, i.e., d'une transformation naturelle $a^* : F(-) \longrightarrow F(G \times -)$ qui satisfait aux conditions usuelles d'unitarité et d'associativité. Alors, F détermine un préfaisceau $\Gamma^G(-; F)$ sur $\mathcal{C}/G_\bullet$ comme suit. Pour $(U, m) \in \mathcal{C}/G_\bullet$, on a $\Gamma^G((U, m); F) = F(U)$. Étant donnée une flèche $(f, r) : (V, n) \longrightarrow (U, m)$ dans $\mathcal{C}/G_\bullet$, le morphisme

$$(f, r)^* : \Gamma^G((U, m); F) \longrightarrow \Gamma^G((V, n); F)$$

est simplement le morphisme de restriction $F(U) \longrightarrow F(V)$ si $r(0) = 0$. En général, ce morphisme est la composition de

$$F(U) \xrightarrow{(a^*)^{\circ r(0)}} F(G_{r(0)} \times U) \xrightarrow{(\star)} F(V)$$

où $(\star)$ est la restriction suivant $(p, f) : V \longrightarrow G_{r(0)} \times U$ avec p la composition de $V \longrightarrow G_n$ et de la projection $G_n = G^{\times n} \longrightarrow G_{r(0)} = G^{\times r(0)}$ sur les premiers $r(0)$ facteurs.

Clairement, si $X_\bullet$ est un objet semi-simplicial de $\mathcal{C}$ muni d'un morphisme $X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$, on peut évaluer le préfaisceau $\Gamma^G(-; F)$ sur $X_\bullet$ et on obtient alors l'objet semi-cosimplicial de la construction 4.6.24. □

On peut maintenant énoncer la variante « tordue » de la proposition 5.2.2.

Théorème 5.2.4. — *Soit $X_\bullet$ un k-schéma semi-simplicial de type fini muni d'un morphisme $X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ avec $G_\bullet$ le classifiant d'un k-schéma en groupes de type fini G. Soit $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ un hyper-recouvrement générique relatif. On suppose que $X_{1+\bullet}$ et $Y_{1+\bullet}$ sont des hyper-recouvrements génériques de X_0 et Y_0 respectivement. Soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k *borné à gauche et muni d'une action de G. On choisit un remplacement projectivement* ét*-fibrant $\Gamma^G(-; F^\bullet) \longrightarrow H^\bullet$ avec $H^\bullet$ borné à gauche. (Ainsi, $H^\bullet$ est un complexe de préfaisceaux sur* $(\mathrm{Sm}/k)/G_\bullet$*.) Alors, le morphisme évident*

$$\text{Tot } H^\bullet(\eta_{X_\bullet}) \longrightarrow \text{Tot } H^\bullet(\eta_{Y_\bullet})$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — Considérons les k-schémas semi-bisimpliciaux

$$P_{\bullet,\bullet} = \check{C}_\bullet(G_{1+\bullet}/G_\bullet), \quad Q_{\bullet,\bullet} = X_\bullet \times_{G_\bullet} P_{\bullet,\bullet} \quad \text{et} \quad R_{\bullet,\bullet} = Y_\bullet \times_{G_\bullet} P_{\bullet,\bullet}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, appelons ${}^{(n)}H^\bullet$ la restriction de $H^\bullet$ à $(\mathrm{Sm}/k)/G_n$. On a alors $\Gamma^G(\eta_{Q_{\bullet,n}}; H^\bullet) = {}^{(n)}H^\bullet(\eta_{Q_{\bullet,n}})$ et $\Gamma^G(\eta_{R_{\bullet,n}}; H^\bullet) = {}^{(n)}H^\bullet(\eta_{R_{\bullet,n}})$. Puisque $d_0 : G_{n+1} \longrightarrow G_n$ est couvrant pour la topologie étale, les morphismes évidents

$${}^{(n)}H^\bullet(\eta_{X_n}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ {}^{(n)}H^\bullet(\eta_{Q_{\bullet,n}}) \qquad \text{et} \qquad {}^{(n)}H^\bullet(\eta_{Y_n}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ {}^{(n)}H^\bullet(\eta_{R_{\bullet,n}})$$

sont des quasi-isomorphismes grâce au théorème 4.2.18 (cas $\Delta = \varnothing$). Il est donc suffisant de montrer que le morphisme

$$\mathrm{Tot}\ H^\bullet(\eta_{Q_{\bullet,\bullet}}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ H^\bullet(\eta_{R_{\bullet,\bullet}})$$

est un quasi-isomorphisme. En fin de compte, on est ramené à montrer que les morphismes

$$\mathrm{Tot}\ H^\bullet(\eta_{Q_{m,\bullet}}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ H^\bullet(\eta_{R_{m,\bullet}})$$

sont des quasi-isomorphismes pour tout $m \in \mathbb{N}$. Or, le morphisme $R_{m,\bullet} \longrightarrow Q_{m,\bullet}$ est un hyper-recouvrement générique relatif et $R_{m,1+\bullet}$ et $Q_{m,1+\bullet}$ sont des hyper-recouvrements génériques de $R_{m,0}$ et $Q_{m,0}$. On voit ainsi qu'il suffit de démontrer le théorème sous l'hypothèse supplémentaire que le morphisme $X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ se factorise par $G_{1+\bullet} \longrightarrow G_\bullet$.

Or, d'après le lemme 5.2.5 ci-dessous, la restriction de $\Gamma^G(-; F^\bullet)$ à $(\mathrm{Sm}/k)/G_{1+\bullet}$ est isomorphe à la restriction de $F^\bullet$. Ainsi, si $F'^\bullet$ est un remplacement projectivement ét-fibrant de $F^\bullet$ borné à gauche, le complexe de préfaisceaux $H^\bullet$, restreint à $(\mathrm{Sm}/k)/G_{1+\bullet}$, est quasi-isomorphe à la restriction de $F'^\bullet$. On est ainsi ramené à montrer que le morphisme

$$\mathrm{Tot}\ F'^\bullet(\eta_{X_\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ F'^\bullet(\eta_{Y_\bullet})$$

est un quasi-isomorphisme, ce qui est assuré par la proposition 5.2.2. ∎

Lemme 5.2.5. — *Reprenons les notations de la construction 5.2.3. La restriction de $\Gamma^G(-; F)$ à $\mathcal{C}/G_{1+\bullet}$ est isomorphe à la restriction de F (suivant le foncteur évident $\mathcal{C}/G_{1+\bullet} \longrightarrow \mathcal{C}$).*

Démonstration. — Étant donné un objet (U, n) de $\mathcal{C}/G_{1+\bullet}$, on définit un isomorphisme

$$\Gamma^G((U,n); F) \xrightarrow{\sim} F(U)$$

en prenant la composition de $F(U) \longrightarrow F(U \times G) \longrightarrow F(U)$ où la seconde flèche est la restriction suivant $(\mathrm{id}, p) : U \longrightarrow U \times G$ avec p la composition de $U \longrightarrow G_{1+n}$ et de la projection $G_{1+n} = G^{\times 1+n} \longrightarrow G$ sur le premier facteur. On laisse au lecteur le soin de vérifier des ces isomorphismes induisent un isomorphisme de préfaisceaux comme souhaité. ∎

Théorème 5.2.6. — *Soient G un k-schéma en groupes de type fini et $G_\bullet$ son classifiant. Soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k *projectivement* ét-*fibrant et borné à gauche. Alors, le morphisme évident*

$$\mathrm{Tot}\ F^\bullet(G_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{G_\bullet})$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — L'énoncé ci-dessus sera obtenu comme un cas particulier du théorème 4.2.17 appliqué à un site convenable $\mathcal{S}$. On divise la preuve en deux parties. Dans la première on introduit le site $\mathcal{S}$ et dans la seconde on applique le théorème 4.2.17.

Partie A. — On définit le site $\mathcal{S}$ de la manière suivante. Les objets de $\mathcal{S}$ sont les k-schémas lisses X munis d'une action à gauche de G et les morphismes sont les k-morphismes G-équivariants. La topologie de $\mathcal{S}$ est engendrée par la prétopologie des familles de k-morphismes G-équivariants $(f_i : X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ qui sont couvrantes pour la topologie étale (condition vérifiable après oubli de l'action de G).

On note $\psi : \mathrm{Sm}/k \longrightarrow \mathcal{S}$ le foncteur qui envoie un k-schéma lisse U sur $U \times_k G$ où G agit par l'identité sur le premier facteur et par composition sur le second. Ce foncteur est un adjoint à gauche du foncteur « oubli de l'action de G ». De plus, pour tout $X \in \mathcal{S}$, le morphisme de counité $X \times_k G \longrightarrow X$, égal au morphisme définissant l'action de G sur X, est couvrant pour la topologie étale.

La construction suivante fournit suffisamment de points pour le site $\mathcal{S}$. Soient X un k-schéma lisse et $\overline{x} \longrightarrow X$ un point géométrique. On note $X^{hs}_{\overline{x}}$ l'hensélisé strict de X en $\overline{x}$, qu'on considère aussi comme un pro-k-schéma lisse. Alors, $X^{hs}_{\overline{x}} \times_k G$, vu comme pro-objet de $\mathcal{S}$, est un point du site $\mathcal{S}$. Pour s'en convaincre, donnons-nous un morphisme G-équivariant de k-schémas $f : Y \longrightarrow X^{hs}_{\overline{x}} \times_k G$, couvrant pour la topologie étale. Alors, le morphisme $Y \longrightarrow X^{hs}_{\overline{x}}$ est aussi couvrant pour la topologie étale et, par conséquent, admet une section $s : X^{hs}_{\overline{x}} \longrightarrow Y$. Il s'ensuit un morphisme G-équivariant $s : X^{hs}_{\overline{x}} \times_k G \longrightarrow Y$ et la composition de

$$X^{hs}_{\overline{x}} \times_k G \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{f} X^{hs}_{\overline{x}} \times_k G$$

est un isomorphisme G-équivariant de $X^{hs}_{\overline{x}}$-schémas. Ceci étant, la première moitiée de l'assertion suivante s'ensuit aussitôt.

(a) Le foncteur $\psi_* : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathcal{S}, \Lambda)) \longrightarrow \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k, \Lambda))$ préserve les équivalences ét-locales et les objets projectivement ét-fibrants.

La seconde moitiée découle de [**10**, Théorème 4.4.60] qui assure que ψ_* est un foncteur de Quillen à gauche.

On note $\phi : \mathrm{Sm}/k \longrightarrow \mathcal{S}$ le foncteur qui envoie un k-schéma lisse U sur lui-même muni de l'action triviale de G. Si E est un préfaisceau sur Sm/k et X un k-schéma lisse, on a un isomorphisme canonique $(\phi^*E)(X \times_k G) \simeq E(X)$. En effet, par définition, $(\phi^*E)(X \times_k G)$ est la colimite, suivant les morphismes G-équivariantes $X \times_k G \longrightarrow U$, où U est muni de l'action triviale, des $E(U)$. Or, un tel morphisme G-équivariant $X \times_k G \longrightarrow U$ se factorise uniquement par $\mathrm{pr}_1 : X \times_k G \longrightarrow X$, ce qui permet de conclure. On a ainsi démontré l'assertion suivante.

(b) Il existe un isomorphisme canonique de foncteurs $\mathrm{id} \simeq \psi_* \circ \phi^*$.

Partie B. — La catégorie $\mathcal{S}$ possède une D-structure (au sens de la définition 4.2.8) donnée comme suit.

— Si X est un k-schéma lisse muni d'une action de G, $\mathscr{D}(X)$ est l'ensemble des ouverts G-équivariants denses de X.
— Un morphisme G-équivariant de k-schémas $X \longrightarrow S$ est $\mathscr{D}$-permis s'il est lisse.
— Si $X \longrightarrow S$ est $\mathscr{D}$-permis, alors $\mathscr{D}_S(X)$ est l'ensemble des ouverts G-équivariants de X denses relativement à S.

De plus, la topologie étale sur $\mathcal{S}$ est $\mathscr{D}$-bonne au sense de la définition 4.2.12.

Le morphisme $f : G \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$, où G agit sur lui-même par composition, est $\mathscr{D}$-permis et couvrant pour la topologie étale sur $\mathcal{S}$. On peut donc lui appliquer le théorème 4.2.17. (Lorsque le k-schéma en groupes G est fini, il n'y a rien à démontrer ; on peut donc supposer que $\dim(G) \geqslant 1$, ce qui entraîne que l'ouvert G-équivariant $G \times_k G \smallsetminus \mathrm{diag}(G)$ est dense.) Ainsi, si $L^{\bullet}$ est un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathcal{S}$ projectivement ét-fibrant et borné à gauche, le morphisme évident

$$L^{\bullet}(\mathrm{Spec}(k)) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, L^{\bullet}(\eta^G_{\check{C}_{\bullet}(G/k)}) \tag{5.1}$$

est un quasi-isomorphisme. (Ci-dessus, η^G_X désigne le pro-objet des ouverts denses G-équivariants d'un k-schéma X muni d'une action de G.)

On dispose d'un morphisme G-équivariant de k-schémas semi-simpliciaux $q_{\bullet} : \check{C}_{\bullet}(G/k) \longrightarrow G_{\bullet}$, où G agit trivialement sur $G_{\bullet}$. En degré $n \in \mathbb{N}$, il est donné par $q_n(x_0, \cdots, x_n) = (x_1^{-1}x_0, \cdots, x_n^{-1}x_{n-1})$. De plus, en chaque degré, on a des identifications G-équivariantes $\check{C}_n(G/k) \simeq G_n \times G$ qui dépendent du choix d'un entier $0 \leqslant i \leqslant n$; elles sont données par $(x_0, \cdots, x_n) \rightsquigarrow (x_1^{-1}x_0, \cdots, x_n^{-1}x_{n-1}, x_i)$. Il s'ensuit que le k-schéma semi-simplicial $\eta^G_{\check{C}_{\bullet}(G/k)}$ est canoniquement isomorphe à $\check{C}_{\bullet}(G/k) \times_{q, G_{\bullet}} \eta_{G_{\bullet}}$. Du quasi-isomorphisme (5.1) on déduit alors que le morphisme évident

$$\mathrm{Tot}\, L^{\bullet}(\check{C}_{\bullet}(G/k)) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, L^{\bullet}(\check{C}_{\bullet}(G/k) \times_{q, G_{\bullet}} \eta_{G_{\bullet}}) \tag{5.2}$$

est un quasi-isomorphisme.

Supposons maintenant que $L^{\bullet}$ est un remplacement projectivement ét-fibrant du complexe $\phi^*F^{\bullet}$ (avec $F^{\bullet}$ comme dans l'énoncé). L'équivalence ét-locale $\phi^*F^{\bullet} \longrightarrow L^{\bullet}$ induit des quasi-isomorphismes

$$F^{\bullet}(G_n) \longrightarrow L^{\bullet}(\check{C}_n(G/k)) \qquad \text{et} \qquad F^{\bullet}(\eta_{G_n}) \longrightarrow L^{\bullet}(\check{C}_n(G/k) \times_{G_n} \eta_{G_n}). \tag{5.3}$$

Pour vérifier cela, on peut utiliser l'un des isomorphismes G-équivariants $\check{C}_n(G/k) \simeq G_n \times_k G$ décrits ci-dessus. Grâce à la propriété (b) de l'étape précédente, les morphismes (5.3) s'écrivent alors comme suit :

$$F^\bullet(G_n) \simeq \psi_*\phi^* F^\bullet(G_n) \longrightarrow \psi_* L^\bullet(G_n) \qquad \text{et} \qquad F^\bullet(\eta_{G_n}) \simeq \psi_*\phi^* F^\bullet(\eta_{G_n}) \longrightarrow \psi_* L^\bullet(\eta_{G_n}). \tag{5.4}$$

D'après la propriété (a), le morphisme $F^\bullet \longrightarrow \psi_* L^\bullet$ est une équivalence ét-locale entre des complexes projectivement ét-fibrants. Ce morphisme est donc un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux. Ceci entraîne que les morphismes (5.4) sont des quasi-isomorphismes comme souhaité.

Il est maintenant aisé de conclure. En effet, d'après ce qui précède, on a des quasi-isomorphismes

$$\mathrm{Tot}\, F^\bullet(G_\bullet) \xrightarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}\, L^\bullet(\check{C}_\bullet(G/k)) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{G_\bullet}) \xrightarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}\, L^\bullet(\check{C}_\bullet(G/k) \times_{q, G_\bullet} \eta_{G_\bullet}).$$

Le résultat recherché découle alors du fait que (5.2) est un quasi-isomorphisme. ■

Corollaire 5.2.7. — *On fixe un entier $r \geqslant 1$. Soit B un k-schéma en groupes commutatif de type fini. Soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k *projectivement* ét*-fibrant et borné à gauche. Alors, le morphisme évident*

$$\mathrm{Tot}\, F^\bullet(\mathrm{K}_\bullet(B, r)) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{\mathrm{K}_\bullet(B,r)})$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur r. Lorsque $r = 1$, il s'agit du cas particulier « G commutatif » du théorème 5.2.6. Dans la suite, on suppose que $r \geqslant 2$ et que le résultat connu pour $r - 1$.

Notons $X_\bullet = \mathrm{K}_\bullet(B, r)$ et $Y_\bullet = \mathrm{E}_\bullet(B, r)$. D'après le lemme 4.10.15(a), on dispose d'un morphisme canonique de k-schémas en groupes commutatifs simpliciaux $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$. Il correspond, via Dold–Kan, au morphisme de complexes

$$[B = B] \longrightarrow [B \longrightarrow 0] \tag{5.5}$$

où les « B » sont placés en degrés homologiques r et $r - 1$ dans le premier complexe, et en degré r dans le second ; le morphisme en quesion est donné par l'identité en degré r.

Considérons le k-schéma semi-bisimplicial $\check{C}_\bullet(Y_\bullet/X_\bullet)$. Pour $m \in \mathbb{N}$, le k-schéma en groupes commutatif semi-simplicial $\check{C}_m(Y_\bullet/X_\bullet)$ correspond, via Dold–Kan, au produit fibré

$$\overbrace{[B = B] \times_{[B\to 0]} \cdots \times_{[B\to 0]} [B = B]}^{m+1 \text{ fois}} \simeq [B = B] \oplus [0 \longrightarrow B]^{\oplus m}. \tag{5.6}$$

Il s'ensuit un isomorphisme de k-schémas simpliciaux

$$\check{C}_m(Y_\bullet/X_\bullet) \simeq \mathrm{diag}_\bullet(Y \times_k \mathrm{K}(B^{\oplus m}, r - 1)). \tag{5.7}$$

Revenons à notre problème. Puisque le morphisme $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est couvrant pour la topologie étale en chaque degré, on a un quasi-isomorphisme $\mathrm{Tot}\, F^\bullet(X_\bullet) \simeq \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\check{C}_\bullet(Y_\bullet/X_\bullet))$. De même, le théorème 4.2.18 (cas $\Delta = \varnothing$) fournit un quasi-isomorphisme $\mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{X_\bullet}) \simeq \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{\check{C}_\bullet(Y_\bullet/X_\bullet)})$. Ainsi, pour conclure, il est suffisant de montrer que les morphismes

$$\mathrm{Tot}\, F^\bullet(\check{C}_m(Y_\bullet/X_\bullet)) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{\check{C}_m(Y_\bullet/X_\bullet)}) \tag{5.8}$$

sont des quasi-isomorphismes pour tout $m \geqslant 0$. Notons $Z_\bullet = \mathrm{K}_\bullet(B^{\oplus m}, r - 1)$. D'après (5.7), le morphisme (5.8) se réécrit

$$\mathrm{Tot}\, F^\bullet(\mathrm{diag}(Y_\bullet \times_k Z_\bullet)) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{\mathrm{diag}(Y_\bullet \times_k Z_\bullet)}). \tag{5.9}$$

D'après le théorème d'Eilenberg–Zilber usuel (i.e., pour les objets bicosimpliciaux), le premier membre de (5.9) est quasi-isomorphe à $\mathrm{Tot}\, F^\bullet(Y_\bullet \times_k Z_\bullet)$ et, puisque $Y_\bullet$ est un hyper-recouvrement étale de $\mathrm{Spec}(k)$, $\mathrm{Tot}\, F^\bullet(Y_\bullet \times_k Z_\bullet)$ est quasi-isomorphe à $\mathrm{Tot}\, F^\bullet(Z_\bullet)$. De même, le second membre de (5.9) est quasi-isomorphe à $\mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{Z_\bullet})$. On peut voir cela de la manière suivante : on utilise encore une fois le fait que $Y_\bullet$ est un hyper-recouvrement étale de $\mathrm{Spec}(k)$ pour déduire que $\mathrm{diag}(Y_\bullet \times_k Z_\bullet) \longrightarrow Z_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique relatif et on applique ensuite la proposition 5.2.2. Ceci nous ramène à montrer que le morphisme $\mathrm{Tot}\, F^\bullet(Z_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{Z_\bullet})$ est un quasi-isomorphisme, ce qui découle de l'hypothèse de récurrence. ■

La version tordue du corollaire 5.2.7 est également vraie.

Corollaire 5.2.8. — *On fixe un entier $r \geqslant 1$ et un k-schéma en groupes de type fini G. Soient B un k-schéma en groupes commutatif de type fini muni d'une action à gauche de G. Soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k *projectivement* ét*-fibrant et borné à gauche. Alors, le morphisme évident*

$$\mathrm{Tot}\ F^\bullet(\mathrm{K}^G_\bullet(B,r)) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{\mathrm{K}^G_\bullet(B,r)})$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — D'après le théorème d'Eilenberg–Zilber usuel (i.e., pour les objets bicosimpliciaux) $\mathrm{Tot}\ F^\bullet(\mathrm{K}^G_\bullet(B,r))$ est quasi-isomorphe à $\mathrm{Tot}\ F^\bullet(\mathrm{K}_\bullet(B,r) \rtimes G_\bullet)$ (voir la construction 4.10.14(c)). De même, $\mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{\mathrm{K}^G_\bullet(B,r)})$ est quasi-isomorphe à $\mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{\mathrm{K}_\bullet(B,r)\rtimes G_\bullet})$. Pour montrer ceci, on applique la proposition 5.1.9 ce qui nous ramène à vérifier que les complexes cosimpliciaux coaugmentés $F(\eta_{\mathrm{K}_m(B,r)\rtimes G_{b+\bullet}})$ et $F(\eta_{\mathrm{K}_{a+\bullet}(B,r)\rtimes G_n})$ sont acycliques pour $m,n \geqslant 0$ et $a,b \geqslant 1$. Ceci découle du théorème 4.4.16 (cas $\Delta = \varnothing$) et du fait que $\mathrm{K}_m(B,r) \rtimes G_{b+\bullet}$ et $\mathrm{K}_{a+\bullet}(B,r) \rtimes G_n$ sont des hyper-recouvrements génériques de $\mathrm{K}_m(B,r) \rtimes G_{b-1}$ et $\mathrm{K}_{a-1}(B,r) \rtimes G_n$ respectivement.

Ceci étant, on est ramené à montrer que le morphisme $\mathrm{Tot}\ F^\bullet(\mathrm{K}_\bullet(B,r) \rtimes G_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{\mathrm{K}_\bullet(B,r)\rtimes G_\bullet})$ est un quasi-isomorphe. Ce morphisme admet la factorisation suivante

$$\mathrm{Tot}\ F^\bullet(\mathrm{K}_\bullet(B,r) \rtimes G_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\mathrm{K}_\bullet(B,r) \rtimes \eta_{G_\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{\mathrm{K}_\bullet(B,r)\rtimes G_\bullet}).$$

(Ci-dessus, $(-) \rtimes \eta_{G_\bullet}$ désigne $((-) \rtimes G_\bullet) \times_{G_\bullet} \eta_{G_\bullet}$.) Le premier morphisme est un quasi-isomorphisme grâce au théorème 5.2.6 appliqué aux complexes de préfaisceaux $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{K}_m(B,r),F)$, pour $m \in \mathbb{N}$. Le second morphisme est un quasi-isomorphisme grâce au corollaire 5.2.7 appliqué aux images inverses de F suivant les extensions de k données par les corps résiduels des points génériques des G_n, pour $n \in \mathbb{N}$. ■

5.3. Torseurs sur des schémas semi-simpliciaux et cohomologie. —

Dans toute cette sous-section, on fixe un corps k de caractéristique nulle. Sauf mention explicite du contraire, tous les schémas en groupes seront supposés de type fini. On commence par préciser la notion de torseur dans le contexte des k-schémas semi-simpliciaux.

Définition 5.3.1. — *Soit $X_\bullet$ un k-schéma semi-simplicial et soit $D_\bullet$ un $X_\bullet$-schéma semi-simplicial en groupes. Un* $D_\bullet$-torseur *est un $X_\bullet$-schéma semi-simplicial $E_\bullet$ muni d'une action à gauche $E_\bullet \times_{X_\bullet} D_\bullet \longrightarrow E_\bullet$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est un D_n-torseur. Si $Y_\bullet$ est un $X_\bullet$-schéma semi-simplicial, on utilisera souvent les expressions « $D_\bullet$-torseur sur $Y_\bullet$ » ou « $D_\bullet$-torseur défini sur $Y_\bullet$ » pour parler de $D_\bullet \times_{X_\bullet} Y_\bullet$-torseurs.*

Notation 5.3.2. — Pour $X_\bullet$, $Y_\bullet$ et $D_\bullet$ comme dans la définition 5.3.1, on note $\mathrm{Tors}(Y_\bullet; D_\bullet)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $D_\bullet$-torseurs définis sur $Y_\bullet$. □

Lemme 5.3.3. — *L'ensemble* $\mathrm{Tors}(Y_\bullet; D_\bullet)$ *est contravariant en le $X_\bullet$-schéma semi-simplicial $Y_\bullet$ et covariant en le $X_\bullet$-schéma simplicial en groupes $D_\bullet$. Si $D_\bullet$ est commutatif, cet ensemble est naturellement un groupe abélien.*

Démonstration. — La contravariance en $Y_\bullet$ est induite par le changement de base. Si $u_\bullet : D_\bullet \longrightarrow D'_\bullet$ est un morphisme de $X_\bullet$-schémas semi-simpliciaux en groupes, l'application $\mathrm{Tors}(Y_\bullet; D_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tors}(Y_\bullet; D'_\bullet)$ envoie la classe d'isomorphisme d'un $D_\bullet$-torseur $E_\bullet$ sur celle du $D'_\bullet$-torseur $E_\bullet \times^{D_\bullet}_{X_\bullet} D'_\bullet$, appelé le « poussé en avant » de $E_\bullet$ suivant $u_\bullet$. (Rappelons que $E_n \times^{D_n}_{X_n} D'_n$ est le quotient du X_n-schéma $E_n \times_{X_n} D'_n$ par D_n agissant sur les points par la formule $b(e,b') = (b(e), b' \circ b^{-1})$ avec b, b' et e des points de D_n, D'_n et E_n respectivement.)

Lorsque $D_\bullet$ est commutatif, on dispose d'un morphisme de $X_\bullet$-schémas semi-simpliciaux en groupes $D_\bullet \times_{X_\bullet} D_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ donné par la composition de $D_\bullet$. Ceci permet de définir la somme de deux $D_\bullet$-torseurs $E_\bullet$ et $F_\bullet$ sur $Y_\bullet$: c'est le poussé en avant du $D_\bullet \times_{X_\bullet} D_\bullet$-torseur $E_\bullet \times_{Y_\bullet} F_\bullet$ par $D_\bullet \times_{X_\bullet} D_\bullet \longrightarrow D_\bullet$. Ceci fournit une structure de groupe abélien sur $\mathrm{Tors}(Y_\bullet; D_\bullet)$. ■

Remarque 5.3.4. — Soient $X_\bullet$ un k-schéma semi-simplicial, $Y_\bullet$ un $X_\bullet$-schéma semi-simplicial et $u_\bullet : D_\bullet \longrightarrow D'_\bullet$ un morphisme de $X_\bullet$-schémas semi-simpliciaux en groupes.

(a) Si $E_\bullet$ est un $D_\bullet$-torseur sur $Y_\bullet$ et $E'_\bullet = E_\bullet \times^{D_\bullet}_{X_\bullet} D'_\bullet$ son poussé en avant suivant $u_\bullet$, on a un morphisme évident $E_\bullet \longrightarrow E'_\bullet$ de $X_\bullet$-schémas semi-simpliciaux donné par la composition de

$$E_\bullet \simeq E_\bullet \times^{D_\bullet}_{X_\bullet} D_\bullet \longrightarrow E_\bullet \times^{D_\bullet}_{X_\bullet} D'_\bullet = E'_\bullet.$$

Clairement, ce morphisme est $D_\bullet$-équivariant.

(b) Réciproquement, soient $E_\bullet$ un $D_\bullet$-torseur et $E'_\bullet$ un $D'_\bullet$-torseur, les deux définis sur $Y_\bullet$. Alors, un morphisme $D_\bullet$-équivariant $E_\bullet \longrightarrow E'_\bullet$ de $Y_\bullet$-schémas semi-simpliciaux induit un isomorphisme $E_\bullet \times^{D_\bullet}_{X_\bullet} D'_\bullet \simeq E'_\bullet$ de $D'_\bullet$-torseurs sur $Y_\bullet$. Il est donné par la composition de

$$E_\bullet \times^{D_\bullet}_{X_\bullet} D'_\bullet \longrightarrow E'_\bullet \times^{D'_\bullet}_{X_\bullet} D'_\bullet \simeq E'_\bullet.$$

Ce morphisme est inversible puisqu'il en est ainsi de tout morphisme de torseurs. □

Dans la suite, on se concentre sur le cas où le schéma semi-simplicial en groupes est d'Eilenberg–Mac Lane, eventuellement tordu. On introduit des notations spéciales pour ce cas.

Notations 5.3.5. — Ci-dessous, r est un entier $\geqslant 1$.

(a) Soient $X_\bullet$ est un k-schéma semi-simplicial et B est un k-schéma en groupes commutatif. On note $\mathrm{Tors}(X_\bullet; B, r)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathrm{K}_\bullet(B,r)$-torseurs définis sur $X_\bullet$. (Autrement dit, on a $\mathrm{Tors}(X_\bullet; B, r) = \mathrm{Tors}(X_\bullet; \mathrm{K}_\bullet(B,r))$.)

(b) Soit $X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ un morphisme de k-schémas semi-simpliciaux avec $G_\bullet$ le classifiant d'un k-schéma en groupes G. Soit B un k-schéma en groupes commutatif muni d'une action à gauche de G. On note $\mathrm{Tor}^G(X_\bullet; B, r)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathrm{K}^G_\bullet(B,r)$-torseurs définis sur $X_\bullet$. (Autrement dit, on a $\mathrm{Tors}^G(X_\bullet; B, r) = \mathrm{Tors}(X_\bullet; \mathrm{K}^G_\bullet(B,r))$.) □

Situation 5.3.6. — On suppose donné un morphisme de k-schémas semi-simpliciaux $X_\bullet \longrightarrow G_\bullet$, avec $G_\bullet$ le classifiant d'un k-schéma en groupes G. Soit B un k-schéma en groupes commutatif muni d'une action à gauche de G. Pour $m \geqslant 1$, on note ν l'automorphisme de $B \times_k G_m$ donné sur les points par $\nu(a, g_1, \cdots, g_m) = (g_1(a), g_1, \cdots, g_m)$. On note encore ν l'automorphisme de $B \times_k X_m$ déduit du précédent par changement de base. (Ceci est en accord avec les notations du corollaire 4.10.10.) Enfin, on fixe un entier $r \geqslant 1$. □

Proposition 5.3.7. — *Considérons la situation 5.3.6. On note $\mathcal{T}^G(X_\bullet; B, r)$ le groupoïde des $\mathrm{K}^G_\bullet(B,r)$-torseurs sur $X_\bullet$. Par ailleurs, soit $\mathcal{Q}^G(X_\bullet; B, r)$ le groupoïde formé des couples (T, α) où T est un B-torseur sur X_r et*

$$\alpha : \prod_{0\leqslant i\leqslant r+1} (T \times_{X_r, d_i} X_{r+1}/X_{r+1}) \longrightarrow B \times_k X_{r+1} \tag{5.10}$$

est un X_{r+1}-morphisme $B^{r+2} \times_k X_{r+1}$-équivariant pour les actions définies comme suit.

— *L'action de $B^{r+2} \times_k X_{r+1}$ sur la source est le produit des actions de $B \times_k X_{r+1}$ sur chaque $T \times_{X_r, d_i} X_{r+1}$.*

— *L'action de $B^{r+2} \times_k X_{r+1}$ sur le but se déduit de l'action régulière de $B \times_k X_{r+1}$ sur lui-même en composant avec le morphisme $(\nu^{-1}, -\mathrm{id}, \cdots, (-1)^{r+1}\mathrm{id}) : B^{r+2} \times_k X_{r+1} \longrightarrow B \times_k X_{r+1}$.*

Il existe alors un foncteur pleinement fidèle $\mathcal{T}^G(X_\bullet; B, r) \longrightarrow \mathcal{Q}^G(X_\bullet; B, r)$. L'image essentielle de ce foncteur est formée par les couples (T, α) tels que la composition des X_{r+2}-morphismes

$$\prod_{0\leqslant s<t\leqslant r+2} (T \times_{X_r, d_{st}} X_{r+2}/X_{r+2}) \longrightarrow \prod_{0\leqslant j\leqslant r+2} \prod_{0\leqslant i\leqslant r+1} (T \times_{X_r, d_i\circ d_j} X_{r+2}/X_{r+2})$$

$$\xrightarrow{\prod_{j=0}^{r+2} \alpha \times_{X_{r+1}, d_j} X_{r+2}} \bigoplus_{0\leqslant j\leqslant r+2} B \times_k X_{r+2} \xrightarrow{(\nu^{-1}, -\mathrm{id}, \cdots, (-1)^{r+2}\mathrm{id})} B \times_k X_{r+2} \tag{5.11}$$

est nulle, i.e., se factorise par la section nulle du X_{r+2}-schéma en groupes commutatif $B \times_k X_{r+2}$.

Démonstration. — On dispose d'une suite exacte de $G_\bullet$-schémas simpliciaux en groupes commutatifs

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}^G_\bullet(B,r) \xrightarrow{(1)} \mathrm{E}_\bullet(B, r+1) \times_k G_\bullet \xrightarrow{(2)} \mathrm{E}_\bullet(B, r+2) \times_k G_\bullet \xrightarrow{(3)} \mathrm{E}_\bullet(B, r+3) \times_k G_\bullet \tag{5.12}$$

où les morphismes (1), (2) et (3) sont caractérisés par les propriétés suivantes. Le morphisme (1) est donné en degré r par l'identité de $B \times_k G_r$. Le morphisme (2) (resp. (3)) est donné en degré $r+1$ (resp. $r+2$) par la matrice ligne

$$(\nu^{-1}, -\mathrm{id}, \cdots, (-1)^{r+1}\mathrm{id}) \ : \ \textstyle\bigoplus_{i=0}^{r+1} B \times_k G_{r+1} \longrightarrow B \times_k G_{r+1}$$

$$(\text{resp. } (\nu^{-1}, -\mathrm{id}, \cdots, (-1)^{r+2}\mathrm{id}) \ : \ \textstyle\bigoplus_{j=0}^{r+2} B \times_k G_{r+2} \longrightarrow B \times_k G_{r+2}).$$

La suite exacte (5.12) s'obtient en raisonnant comme dans la preuve du lemme 4.10.15.

Étape 1. — Étant donné un $\mathrm{K}_\bullet^G(B,r)$-torseur $F_\bullet$ sur $X_\bullet$, on déduit, en poussant en avant suivant la suite (5.12), des morphismes de $X_\bullet$-schémas semi-simpliciaux

$$F_\bullet \hookrightarrow H_\bullet \xrightarrow{u_\bullet} \mathrm{E}_\bullet(B,r+2)\times_k X_\bullet \xrightarrow{(3)} \mathrm{E}_\bullet(B,r+3)\times_k X_\bullet. \tag{5.13}$$

Le point est que le poussé en avant d'un torseur par un morphisme nul est canoniquement isomorphe au torseur trivial.

Puisque $\mathrm{K}_r^G(B,r) = \mathrm{E}_r(B,r+1)\times G_r$, on a $F_r = H_r$. Puisque $\mathrm{E}_\bullet(B,r+1)$ est r-tronqué, le morphisme $H_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est r-élémentaire. Il s'ensuit alors une identification

$$H_{r+1} = \prod_{0\leqslant i\leqslant r+1} (F_r \times_{X_r,d_i} X_{r+1}/X_{r+1}).$$

Modulo cette identification, le foncteur $\mathcal{T}^G(X_\bullet;B,r) \longrightarrow \mathcal{Q}^G(X_\bullet;B,r)$ envoie $F_\bullet$ sur le couple (F_r,u_{r+1}). De plus, la dernière condition de l'énoncé est satisfaite : en effet, pour le couple (F_r,u_{r+1}), la composition de (5.11) est égale à la composition des morphismes

$$H_{r+2} \xrightarrow{u_{r+2}} \mathrm{E}_{r+2}(B,r+2)\times_k X_{r+2} \xrightarrow{(3)} \mathrm{E}_{r+2}(B,r+3)\times_k X_{r+2} = B\times_k X_{r+2}.$$

L'assertion recherchée découle donc de l'exactitude de la suite (5.12) et, plus précisément, du fait que la composition des deux dernières flèches est nulle.

Étape 2. — Réciproquement, soit (T,α) un objet de $\mathcal{Q}^G(X_\bullet;B,r)$ satisfaisant à la dernière condition de l'énoncé. On note $Y_\bullet$ la source du morphisme r-élémentaire $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ tel que $Y_r = T$. Clairement, le $X_\bullet$-schéma semi-simplicial $Y_\bullet$ est un $\mathrm{E}_\bullet(B,r+1)\times_k G_\bullet$-torseur. Puisque la projection $\mathrm{E}_\bullet(B,r+2)\times_k X_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est $r+1$-élémentaire, le morphisme $\alpha : Y_{r+1} \longrightarrow B\times_k X_{r+1}$ induit un morphisme de $X_\bullet$-schémas semi-simpliciaux $w_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow \mathrm{E}_\bullet(B,r+2)\times_k X_\bullet$. Ce morphisme est $\mathrm{E}_\bullet(B,r+1)\times_k X_\bullet$-équivariant étant donné que α est $\mathrm{E}_{r+1}(B,r+1)\times_k X_{r+1}$-équivariant. (D'après la remarque 5.3.4, ce morphisme permet donc d'identifier le torseur trivial avec le poussé en avant de $Y_\bullet$ par $\mathrm{E}_\bullet(B,r+1)\times_k G_\bullet \longrightarrow \mathrm{E}_\bullet(B,r+2)\times_k G_\bullet$.) La condition sur la composition de (5.11) se traduit par l'annulation de la composition de

$$Y_\bullet \longrightarrow \mathrm{E}_\bullet(B,r+2)\times_k X_\bullet \longrightarrow \mathrm{E}_\bullet(B,r+3)\times_k X_\bullet \tag{5.14}$$

en degré $r+2$. Étant donné que $\mathrm{E}_\bullet(B,r+3)$ est $(r+2)$-tronqué, cette composition est en fait nulle en tout degré. L'exactitude de la suite (5.12) montre alors que l'image de $Y_\bullet$ dans $\mathrm{E}_\bullet(B,r+2)\times_k X_\bullet$ est le noyau de la seconde flèche de (5.14) (qui n'est autre que le $X_\bullet$-schéma semi-simplicial en groupes $\mathrm{K}_\bullet^G(B,r+1)\times_{G_\bullet} X_\bullet$). En particulier, l'image de $Y_\bullet$ dans $\mathrm{E}_\bullet(B,r+2)\times_k X_\bullet$ contient la section nulle. Il s'ensuit que

$$F_\bullet = Y_\bullet \times_{\mathrm{K}_\bullet^G(B,r+1),0} G_\bullet = Y_\bullet \times_{\mathrm{E}_\bullet(B,r+2),0} \mathrm{Spec}(k)$$

est non vide en tout degré : c'est donc un $\mathrm{K}_\bullet^G(B,r)$-torseur défini sur $X_\bullet$. Cette construction fournit l'équivalence inverse du foncteur décrit dans la première étape. ■

Définition 5.3.8. — *Reprenons les notations de la définition 5.3.1. Nous dirons qu'un $D_\bullet$-torseur $E_\bullet$ sur $Y_\bullet$ est* essentiellement simplicial *si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le D_n-torseur E_n est trivial, i.e., isomorphe à $D_n\times_{X_n} Y_n$. On note* $\mathrm{Tors}_{es}(X_\bullet;D_\bullet)\subset\mathrm{Tors}(X_\bullet;D_\bullet)$ *le sous-ensemble des classes d'isomorphisme de $D_\bullet$-torseurs essentiellement simpliciaux.*

Notation 5.3.9. — Soient $X_\bullet$, B et G comme dans les notations 5.3.5. On note alors $\mathrm{Tors}_{es}(X_\bullet;B,r)$ et $\mathrm{Tors}_{es}^G(X_\bullet;B,r)$ les sous-ensembles de $\mathrm{Tors}(X_\bullet;B,r)$ et $\mathrm{Tors}^G(X_\bullet;B,r)$ formés des classes d'isomorphismes de torseurs essentiellement simpliciaux. Clairement, ce sont des sous-groupes de $\mathrm{Tors}(X_\bullet;B,r)$ et $\mathrm{Tors}^G(X_\bullet;B,r)$. □

Lemme 5.3.10. — *Reprenons les notations de la proposition 5.3.7. Soit $F_\bullet$ un $\mathrm{K}_\bullet^G(B,r)$-torseur sur $X_\bullet$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $F_\bullet$ est essentiellement simplicial ;

(b) le B-torseur F_r sur X_r est trivial ;

(c) l'image de $F_\bullet$ par le foncteur $\mathcal{T}^G(X_\bullet; B, r) \longrightarrow \mathcal{Q}^G(X_\bullet; B, r)$ est de la forme $(B \times_k X_r, \beta)$.

Démonstration. — L'implication (a)⇒(b) et l'équivalence (b)⇔(c) sont évidentes. L'implication (b)⇒(a) découle du fait que le morphisme $F_{1+\bullet} \longrightarrow X_{1+\bullet}$ est $r-1$-élémentaire (ce qui est une conséquence du fait que le morphisme $\mathrm{K}^G_{1+\bullet}(B, r) \longrightarrow G_{1+\bullet}$ est $r-1$-élémentaire ; voir le lemme 4.10.15(d).) ∎

Remarque 5.3.11. — Considérons la situation 5.3.6. L'action de G sur B fournit un transformation naturelle $a^* : B(-) \longrightarrow B(G \times_k -)$ sur le préfaisceau représenté par B. Pour un k-schéma U, cette transformation naturelle envoie un morphisme $l : U \longrightarrow B$ sur le morphisme $G \times_k U \longrightarrow B$ donné par $(g, u) \rightsquigarrow g^{-1}l(u)$ sur les points. Il est immédiat que a^* satisfait aux conditions usuelles d'unitarité et d'associativité comme demandé dans la construction 4.6.24. Ainsi, grâce à cette construction, on dispose d'un groupe cosimplicial $\Gamma^G(X_\bullet; B)$. (Voir aussi la construction 5.2.3.) Pour $m \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma^G(X_m; B) = B(X_m)$ et les morphismes $d^i : \Gamma^G(X_m; B) \longrightarrow \Gamma^G(X_{m+1}; B)$ sont décrits comme suit :

— pour $1 \leqslant i \leqslant m+1$, le morphisme d^i est la composition avec $d_i : X_{m+1} \longrightarrow X_m$;

— le morphisme d^0 envoie $f : X_m \longrightarrow B$ sur le morphisme $f' : X_{m+1} \longrightarrow B$ tel que $f'(x) = v_x^{-1} \circ f \circ d_0(x)$ pour tout point x de X_{m+1}.

Ci-dessus, on a noté v_x la fibre de l'automorphisme v de $B \times_k X_{m+1}$. On fera de même dans la suite. □

Construction 5.3.12. — Considérons la situation 5.3.6. Nous allons construire une application « classe caractéristique »

$$c\ell : \mathrm{Tors}^G_{es}(X_\bullet; B, r) \longrightarrow \mathrm{H}^{r+1}\Gamma^G(X_\bullet; B) \tag{5.15}$$

avec $\Gamma^G(X_\bullet; B)$ le groupe abélien cosimplicial décrit dans la remarque 5.3.11.

Considérons un $\mathrm{K}^G_\bullet(B, r)$-torseur $E_\bullet$ essentiellement simplicial sur $X_\bullet$ et notons (T, α) son image par le foncteur $\mathcal{T}^G(X_\bullet; B, r) \longrightarrow \mathcal{Q}^G(X_\bullet; B, r)$ de la proposition 5.3.7. Grâce au lemme 5.3.10, on peut fixer un isomorphisme $(T, \alpha) \simeq (B \times_k X_r, \beta)$.

Étant donné que le X_{r+1}-morphisme $\beta : B^{r+2} \times_k X_{r+1} \longrightarrow B \times_k X_{r+1}$ est B^{r+2}-équivariant, il est déterminé par sa restriction à la section nulle. Si $f \in B(X_{r+1})$ est cette restriction, on a

$$\beta(a_0, \cdots, a_{r+1}, x) = (v_x^{-1}(a_0) - a_1 + \cdots + (-1)^{r+1}a_{r+1} + f(x), x) \tag{5.16}$$

avec $a_0, \cdots, a_{r+1}$ des points de B, x un point de X_{r+1} et v_x la fibre en x de l'automorphisme v. On vérifie facilement que la dernière condition de l'énoncé de la proposition 5.3.7 est satisfaite pour $(B \times_k X_r, \beta)$ si et seulement si $f \in B(X_{r+1})$ est un cocycle du complexe $\Gamma^G(X_\bullet; B)$, i.e., si

$$v^{-1} \circ f \circ d_0 - f \circ d_1 + \cdots + (-1)^{r+2} f \circ d_{r+2} = 0$$

en tant que section du X_{r+2}-schéma en groupes $B \times_k X_{r+2}$.

Enfin, choisissons un autre isomorphisme $(T, \alpha) \simeq (B \times_k X_r, \beta')$. Il existe alors $g \in B(X_r)$ tel que $\beta'(a_0, \cdots, a_{r+1}, x) = \beta(a_0 + g, \cdots, a_{r+1} + g, x)$. Ainsi, si $f' \in B(X_{r+1})$ est la restriction de β' à la section nulle, on a l'égalité

$$f' = f + v^{-1} \circ g \circ d_0 - g \circ d_1 + \cdots + (-1)^{r+1} f \circ d_{r+1} \tag{5.17}$$

en tant que sections du X_{r+1}-schéma en groupes $B \times_k X_{r+1}$. La classe de f dans $\mathrm{H}^{r+1}\Gamma^G(X_\bullet; B)$ est donc indépendante du choix de l'isomorphisme $(T, \alpha) \simeq (B \times_k X_r, \beta)$. Ainsi, elle ne dépend que de la classe d'isomorphisme de $E_\bullet$ et elle sera notée $c\ell(E)$. □

Proposition 5.3.13. — *L'application* (5.15) *est un isomorphisme de groupes abéliens naturel en $X_\bullet$ et B.*

Démonstration. — La bijectivité est une conséquence de la proposition 5.3.7. En effet, si l'on part d'un élément $f \in B(X_{r+1}) = \Gamma^G(X_{r+1}; B)$, on peut définir un couple $(B \times_k X_r, \beta)$ par la formule (5.16). Si f est un cocycle, la dernière condition de l'énoncé de la proposition 5.3.7 est satisfaite pour $(B \times_k X_r, \beta)$ qui détermine alors un $\mathrm{K}^G_\bullet(B, r)$-torseur $E_\bullet$ sur $X_\bullet$. Il est immédiat que $c\ell(E)$ est représentée par f.

Par ailleurs, soient $E_\bullet$ et $E'_\bullet$ deux $\mathrm{K}^G_\bullet(B, r)$-torseurs essentiellement simpliciaux sur $X_\bullet$ correspondant à des couples $(B \times_k X_r, \beta)$ et $(B \times_k X_r, \beta')$ par le foncteur de la proposition 5.3.7. Notons $f, f' \in B(X_{r+1})$ les restrictions à la section nulle de β et β'. Si $c\ell(E) = c\ell(E')$, il existe $g \in B(X_r)$ tel que l'égalité (5.17) est satisfaite. La translation par g induit alors un isomorphisme $(B \times_k X_r, \beta) \simeq (B \times_k X_r, \beta')$ dans $\mathcal{Q}^G(X_\bullet; B, r)$. Les torseurs $E_\bullet$ et $E'_\bullet$ sont donc aussi isomorphes. ∎

Corollaire 5.3.14. — *Considérons la situation 5.3.6 et supposons en plus que $X_\bullet$ est le spectre d'une extension algébriquement close de k en chaque degré. Alors, on a un isomorphisme*

$$c\ell : \mathrm{Tors}^G(X_\bullet; B, r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{r+1}\Gamma^G(X_\bullet; B).$$

Démonstration. — En effet, tout $\mathrm{K}^G_\bullet(B,r)$-torseur sur $X_\bullet$ est essentiellement simplicial. ∎

Nous voudrions étendre la « classe caractéristique » aux torseurs qui ne sont pas nécessairement supposés essentiellement simpliciaux. Pour cela, nous utiliserons l'observation simple suivante.

Lemme 5.3.15. — *Considérons la situation 5.3.6. Pour tout $\mathrm{K}^G_\bullet(B,r)$-torseur $E_\bullet$ sur $X_\bullet$, il existe un hyper-recouvrement étale r-élémentaire $X'_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ tel que $E'_\bullet = E_\bullet \times_{X_\bullet} X'_\bullet$ est un $\mathrm{K}^G_\bullet(B,r)$-torseur essentiellement simplicial sur $X'_\bullet$.*

Démonstration. — En effet, on peut trouver un hyper-recouvrement étale r-élémentaire $X'_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ tel que le morphisme $X'_r \longrightarrow X_r$ trivialise le B-torseur E_r. Le lemme 5.3.10 entraîne que $E'_\bullet$ est alors essentiellement simplicial. ∎

Construction 5.3.16. — Considérons la situation 5.3.6. On définit un complexe de groupes abéliens $\mathrm{R}\Gamma^G_{\text{ét}}(\eta_{X_\bullet}; B)$ de la manière suivante. D'après la construction 5.2.3, le préfaisceau représenté par B muni de la transformation naturelle $B(-) \longrightarrow B(G \times_k -)$ de la remarque 5.3.11 détermine un préfaisceau $\Gamma^G(-; B)$ sur la catégorie $(\mathrm{Sm}/k)/B_\bullet$. On choisit alors un remplacement projectivement ét-fibrant borné à gauche $L^\bullet$ de $\Gamma^G(-; B)$, et on pose $\mathrm{R}\Gamma^G_{\text{ét}}(\eta_{X_\bullet}; B) = \mathrm{Tot}\, L^\bullet(\eta_{X_\bullet})$.

On suppose maintenant que $X_{1+\bullet}$ est un hyper-recouvrement générique de X_0. On construit une application « classe caractéristique »

$$c\ell_{\text{ét}} : \mathrm{Tors}(\eta_{X_\bullet}; B, r) \longrightarrow \mathrm{H}^{r+1}\mathrm{R}\Gamma^G_{\text{ét}}(\eta_{X_\bullet}; B). \tag{5.18}$$

Soit $E_\bullet$ un $\mathrm{K}_\bullet(B,r)$-torseur sur $\eta_{X_\bullet}$ et $X'_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ un hyper-recouvrement générique relatif tel que $E'_\bullet = E_\bullet \times_{\eta_{X_\bullet}} \eta_{X'_\bullet}$ est essentiellement simplicial. (Ceci existe d'après le lemme 5.3.15.) On définit alors $c\ell_{\text{ét}}(E)$ comme étant l'image de $c\ell(E')$ par la composition de

$$\mathrm{H}^{r+1}(\Gamma^G(\eta_{X'_\bullet}; B)) \longrightarrow \mathrm{H}^{r+1}(\mathrm{Tot}\, L_\bullet(\eta_{X'_\bullet})) \simeq \mathrm{H}^{r+1}(\mathrm{Tot}\, L_\bullet(\eta_{X_\bullet})) = \mathrm{H}^{r+1}\mathrm{R}\Gamma^G_{\text{ét}}(\eta_{X_\bullet}; B)$$

où l'isomorphisme du milieu est garanti par le théorème 5.2.4. Il est facile de voir que $c\ell_{\text{ét}}(E)$ ne dépend pas du choix de l'hyper-recouvrement générique relatif $X'_\bullet \longrightarrow X_\bullet$. □

On termine la sous-section avec le résultat simple suivant.

Proposition 5.3.17. — *Considérons la situation 5.3.6. Soit $E_\bullet$ un $\mathrm{K}_\bullet(B,r)$-torseur sur $\eta_{X_\bullet}$. Alors, $c\ell_{\text{ét}}(E)$ est dans le noyau du morphisme évident $\mathrm{H}^{r+1}\mathrm{R}\Gamma^G_{\text{ét}}(\eta_{X_\bullet}, B) \longrightarrow \mathrm{H}^{r+1}\mathrm{R}\Gamma^G_{\text{ét}}(\eta_{E_\bullet}, B)$.*

Démonstration. — En effet, l'image de $c\ell_{\text{ét}}(E)$ dans $\mathrm{H}^{r+1}\mathrm{R}\Gamma^G_{\text{ét}}(\eta_{E_\bullet}, B)$ est la classe caractéristique du torseur $E_\bullet \times_{\eta_{X_\bullet}} \eta_{E_\bullet}$ sur $\eta_{E_\bullet}$. Or, ce torseur est trivial car il admet une section donnée par la diagonale relative $\mathrm{diag} : \eta_{E_\bullet} \longrightarrow E_\bullet \times_{\eta_{X_\bullet}} \eta_{E_\bullet}$. ∎

5.4. Préliminaires sur la cohomologie de certains schémas semi-simpliciaux, II. —

On continue ici la liste des préliminaires commencée dans la sous-section 5.2. On note d'abord le résultat suivant qui généralise le corollaire 5.2.7.

Proposition 5.4.1. — *On fixe un entier $r \geqslant 1$. Soit $X_\bullet$ un k-schéma semi-simplicial tel que $X_{1+\bullet}$ est un hyper-recouvrement générique de X_0. Soient B un k-schéma en groupes commutatif et $Y_\bullet$ un $\mathrm{K}_\bullet(B,r)$-torseur sur $X_\bullet$. Enfin, soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k *projectivement* ét*-fibrant et borné à gauche. Alors, le morphisme évident*

$$\mathrm{Tot}\, F^\bullet(Y_\bullet \times_{X_\bullet} \eta_{X_\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{Y_\bullet})$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les morphismes évidents

$$F^\bullet(Y_n \times_{X_n} \eta_{X_n}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(Y_n \times_{X_n} \eta_{\check{C}_\bullet(Y_n/X_n)}) \qquad \text{et} \qquad F^\bullet(\eta_{Y_n}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{Y_n \times_{X_n} \check{C}_\bullet(Y_n/X_n)})$$

sont des quasi-isomorphismes ; ceci découle du théorème 4.2.18 (cas $\Delta = \varnothing$). (Pour obtenir le premier quasi-isomorphisme, on applique ledit théorème au complexe de préfaisceaux $\underline{\mathrm{Hom}}(Y_n, F^\bullet)$.) Il revient donc au même de montrer que le morphisme

$$\mathrm{Tot}\ F^\bullet(Y_\bullet \times_{X_\bullet} \eta_{\check{C}_\bullet(Y_\bullet/X_\bullet)}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{Y_\bullet \times_{X_\bullet} \check{C}_\bullet(Y_\bullet/X_\bullet)})$$

est un quasi-isomorphisme et, pour cela, il est suffisant de montrer que les morphismes

$$\mathrm{Tot}\ F^\bullet(Y_\bullet \times_{X_\bullet} \eta_{\check{C}_m(Y_\bullet/X_\bullet)}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{Y_\bullet \times_{X_\bullet} \check{C}_m(Y_\bullet/X_\bullet)})$$

sont des quasi-isomorphismes pour tout $m \in \mathbb{N}$. Or, les $\mathrm{K}_\bullet(B, r)$-torseurs $Y_\bullet \times_{X_\bullet} \check{C}_m(Y_\bullet/X_\bullet)$ sont triviaux. Ce raisonnement nous ramène à traiter le cas où le $\mathrm{K}_\bullet(B, r)$-torseur $Y_\bullet$ est lui-même trivial. (On utilise ici le corollaire 4.4.11 pour s'assurer que $\check{C}_m(Y_{1+\bullet}/X_{1+\bullet})$ est un hyper-recouvrement générique de $\check{C}_m(Y_0/X_0) = X_0$.) On peut donc supposer que $Y_\bullet = \mathrm{K}_\bullet(B, r) \times_k X_\bullet$.

Les complexes semi-bicosimpliciaux $F^\bullet(\mathrm{K}_\bullet(B, r) \times_k \eta_{X_\bullet})$ et $F^\bullet(\eta_{\mathrm{K}_\bullet(B,r)\times_k X_\bullet})$ sont clairement robustes. (C'est ici qu'on utilise l'hypothèse que $X_{1+\bullet}$ est un hyper-recouvrement générique de X_0.) D'après la proposition 5.1.9, on a des quasi-isomorphismes

$$\mathrm{Tot}\ F^\bullet(\mathrm{K}_\bullet(B, r) \times_k \eta_{X_\bullet}) \xrightarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}\ F^\bullet(Y_\bullet \times_{X_\bullet} \eta_{X_\bullet}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{\mathrm{K}_\bullet(B,r)\times_k X_\bullet}) \xrightarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{Y_\bullet}).$$

Pour conclure, il reste à voir que $\mathrm{Tot}\ F^\bullet(\mathrm{K}_\bullet(B, r) \times_k \eta_{X_n}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{\mathrm{K}_\bullet(B,r)\times_k X_n})$ est un quasi-isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui découle du corollaire 5.2.7. ■

Proposition 5.4.2. — *On fixe un entier $r \geqslant 1$. Soit $X_\bullet$ un k-schéma semi-simplicial tel que $X_{1+\bullet}$ est un hyper-recouvrement générique de X_0. Soient B un k-schéma en groupes, commutatif si $r \geqslant 2$, et $Y_\bullet$ un $\mathrm{K}_\bullet(B, r)$-torseur sur $X_\bullet$. Soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sm/k *projectivement* ét-*fibrant et borné à gauche. Si le k-schéma en groupes B est fini et si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, alors le morphisme évident*

$$\mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{X_\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{Y_\bullet})$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — En raisonnant comme au début de la preuve de la proposition 5.4.1, on se ramène au cas où le $\mathrm{K}_\bullet(B, r)$-torseur $Y_\bullet$ est trivial, i.e., on peut supposer que $Y_\bullet = \mathrm{K}_\bullet(B, r) \times_k X_\bullet$. Puisque B est fini, on a $\eta_{Y_\bullet} \simeq \mathrm{K}_\bullet(B, r) \times_k \eta_{X_\bullet}$. Le lemme 5.2.1 fournit alors un quasi-isomorphisme

$$\mathrm{Tot}\ H^\bullet(\eta_{X_\bullet}) = \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\mathrm{K}_\bullet(B, r) \times_k \eta_{X_\bullet}) \xrightarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}\ F^\bullet(\eta_{Y_\bullet})$$

avec $J^\bullet = \mathrm{Tot}\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r), F^\bullet)$. Ainsi, pour conclure, il est suffisant de montrer que le morphisme

$$F^\bullet \longrightarrow \mathrm{Tot}\ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r), F^\bullet)$$

est une équivalence ét-locale. La question étant locale pour la topologie étale, on peut supposer que k est algébriquement clos. Dans ce cas, B est un groupe discret fini et le résultat recherché découle du lemme 5.4.3 ci-dessous. ■

Le résultat suivant est bien connu ; il a servi dans la preuve de la proposition 5.4.2.

Lemme 5.4.3. — *On fixe $r \geqslant 1$. Soit A un groupe fini, commutatif si $r \geqslant 2$. Alors, la cohomologie rationnelle de l'ensemble simplicial d'Eilenberg–Mac Lane $\mathrm{K}_\bullet(A, r)$ est donnée par*

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{K}_\bullet(A, r); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & si \quad i = 0, \\ 0 & si \quad i \neq 0. \end{cases}$$

Démonstration. — Lorsque $r = 1$, les $\mathrm{H}^i(A_\bullet; \mathbb{Q})$ sont les groupes de cohomologie rationnelle du groupe A. Ils sont bien donnés comme dans l'énoncé. Le cas général s'en déduit par récurrence en utilisant la méthode de la preuve du corollaire 5.2.7. ■

Proposition 5.4.4. — *Soit $X_\bullet$ un k-schéma semi-simplicial tel que $X_{1+\bullet}$ est un hyper-recouvrement générique de X_0. Supposons donnés des entiers $r_1, \cdots, r_s \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ et des k-schémas en groupes $B_1, \cdots, B_s$ tels que B_i est commutatif si $r_i \geqslant 2$. Considérons le k-schéma semi-multisimplicial*

$$Z_{\bullet,\cdots,\bullet} = \mathrm{K}_\bullet(B_s, r_s) \times_k \cdots \times_k \mathrm{K}_\bullet(B_1, r_1) \times_k X_\bullet.$$

Soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur Sm$/k$ *projectivement* ét*-fibrant et borné à gauche. Alors, le morphisme canonique (composé d'un morphisme d'Alexandre–Whitney et d'un morphisme de restriction)*

$$\operatorname{Tot} F^\bullet(\mathrm{K}_\bullet(B_s, r_s) \times_k \cdots \times_k \mathrm{K}_\bullet(B_1, r_1) \times_k \eta_{X_\bullet}) \longrightarrow \operatorname{Tot} F^\bullet(\eta_{\mathrm{diag}_\bullet Z})$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur l'entier s. Lorsque $s = 0$, il n'y a rien à montrer. Si $s \geqslant 1$, on pose

$$Y_{\bullet,\cdots,\bullet} = \mathrm{K}_\bullet(B_{s-1}, r_{s-1}) \times_k \cdots \times_k \mathrm{K}_\bullet(B_1, r_1) \times_k X_\bullet.$$

D'après le lemme 5.2.1, le morphisme d'Alexander–Whitney

$$\operatorname{Tot} F^\bullet(\eta(\mathrm{K}_\bullet(B_s, r_s) \times_k \mathrm{diag}_\bullet Y)) \longrightarrow \operatorname{Tot} F^\bullet(\eta(\mathrm{diag}_\bullet Z)) \tag{5.19}$$

est un quasi-isomorphisme. Posons $F'^\bullet = \operatorname{Tot} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{K}_\bullet(B_s, r_s), F^\bullet)$. D'après le corollaire 5.2.7, pour tout $m \in \mathbb{N}$, le morphisme

$$\operatorname{Tot} F'^\bullet(\eta(\mathrm{diag}_m Y)) = \operatorname{Tot} F^\bullet(\mathrm{K}_\bullet(B_s, r_s) \times_k \eta(\mathrm{diag}_m Y)) \longrightarrow \operatorname{Tot} F^\bullet(\eta(\mathrm{K}_\bullet(B_s, r_s) \times_k \mathrm{diag}_m Y))$$

est un quasi-isomorphisme. Il s'ensuit que le morphisme canonique

$$\operatorname{Tot} F'^\bullet(\eta(\mathrm{diag}_\bullet Y)) = \operatorname{Tot} F^\bullet(\mathrm{K}_\bullet(B_s, r_s) \times_k \eta(\mathrm{diag}_\bullet Y)) \longrightarrow \operatorname{Tot} F^\bullet(\eta(\mathrm{K}_\bullet(B_s, r_s) \times_k \mathrm{diag}_\bullet Y)) \tag{5.20}$$

est un quasi-isomorphisme. En composant les deux quasi-isomorphismes (5.19) et (5.20), on déduit un quasi-isomorphisme canonique

$$\operatorname{Tot} F'^\bullet(\eta(\mathrm{diag}_\bullet Y)) \longrightarrow \operatorname{Tot} F^\bullet(\eta(\mathrm{diag}_\bullet Z)).$$

On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence au k-schéma semi-multisimplicial $Y_{\bullet,\cdots,\bullet}$. ■

5.5. Cohomologie des espaces d'Eilenberg–Mac Lane algébriques, I. —

On fixe un corps k de caractéristique nulle. Le but de cette sous-section et de celle qui suivra est de calculer, à torsion près, les groupes de cohomologie étale $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r); A)$ pour A et B des k-schémas en groupes commutatifs et $r \geqslant 1$. Le lecteur trouvera dans [**24**, §§7–9] des calculs très similaires et très liés aux nôtres. Dans cette sous-section, on traite le cas où A est une variété semi-abélienne. Le cas où A est un k-vectoriel sera traité dans la sous-section 5.6.

Notation 5.5.1. — Dans cette sous-section, il sera commode de distinguer un k-schéma en groupes commutatif du préfaisceau sur Sm$/k$ qu'il représente. Ainsi, si A est un k-schéma en groupes commutatif, on note $\underline{A}$ le préfaisceau de groupes abéliens sur Sm$/k$ représenté par A. On pose aussi $\underline{A}_{\mathbb{Q}} = \underline{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. □

Notation 5.5.2. — Soient A et B des k-schémas en groupes, et $i \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ des entiers. On suppose que A est commutatif et de même pour B si $r \geqslant 2$. On pose

$$\mathrm{H}^i(B, r; A) = \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r); \underline{A}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}^i_{\mathbb{Q}}(B, r; A) = \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r); \underline{A}_{\mathbb{Q}}).$$

On a alors $\mathrm{H}^i_{\mathbb{Q}}(B, r; A) \simeq \mathrm{H}^i(B, r; A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On note aussi $\underline{\mathrm{H}}^i(B, r; A)$ et $\underline{\mathrm{H}}^i_{\mathbb{Q}}(B, r; A)$ les faisceaux étales sur Sm$/k$ associés aux préfaisceaux

$$U \in \mathrm{Sm}/k \rightsquigarrow \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r) \times_k U; \underline{A}) \qquad \text{et} \qquad U \in \mathrm{Sm}/k \rightsquigarrow \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r) \times_k U; \underline{A}_{\mathbb{Q}}).$$

Comme avant, on a $\underline{\mathrm{H}}^i_{\mathbb{Q}}(B, r; A) \simeq \underline{\mathrm{H}}^i(B, r; A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. □

Remarque 5.5.3. — Il existe une suite spectrale de Hochschild–Serre reliant $\mathrm{H}^*(B, r; A)$ et les groupes de cohomologies galoisiennes $\mathrm{H}^*(k, \underline{\mathrm{H}}^*(B, r; A))$. À coefficients rationnels, cette suite spectrale dégénère et identifie $\mathrm{H}^i_{\mathbb{Q}}(B, r; A)$ avec $\Gamma(k, \underline{\mathrm{H}}^i_{\mathbb{Q}}(B, r; A))$, le $\mathbb{Q}$-vectoriel des sections globales du faisceau $\underline{\mathrm{H}}^i_{\mathbb{Q}}(B, r; A)$. □

On regroupe quelques sorites dans le lemme suivant.

Lemme 5.5.4. —

(a) *Les faisceaux* $\underline{\mathrm{H}}^i(B, r; A)$*, ainsi que leurs variantes rationnelles, sont covariants en* A *et contravariants en* B.

(b) *Étant donnée une suite exacte de* k*-schémas en groupes commutatifs* $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$*, on a une suite exacte longue*

$$\cdots \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^i(B, r; A') \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^i(B, r; A) \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^i(B, r; A'') \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^{i+1}(B, r; A') \longrightarrow \cdots$$

et de même pour la variante rationnelle.

(c) *Si* $A \longrightarrow A'$ *est un morphisme de* k*-schémas en groupes commutatifs à noyau et conoyau finis, le morphisme* $\underline{\mathrm{H}}^i_{\mathbb{Q}}(B, r; A) \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^i_{\mathbb{Q}}(B, r; A')$ *est un isomorphisme.*

(d) *Si* $B \longrightarrow B'$ *est un morphisme de* k*-schémas en groupes commutatifs à noyau et conoyau finis, le morphisme* $\underline{\mathrm{H}}^i_{\mathbb{Q}}(B', r; A) \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^i_{\mathbb{Q}}(B, r; A)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Les propriétés (a)–(c) sont évidentes. Seule la propriété (d) nécessite une preuve. On se donne donc un morphisme $f : B \longrightarrow B'$ à noyau et conoyau finis. Il existe un sous-schéma en groupes fini $C \subset B'$ tel que le k-schéma en groupes B'/C est géométriquement connexe ; on note $\iota : C \hookrightarrow B'$ l'inclusion. Le morphisme $(f, \iota) : B \times_k C \longrightarrow B'$ est surjectif à noyau fini. Clairement, il suffit de traiter les cas des morphismes (f, ι) et $\mathrm{pr}_1 : B \times_k C \longrightarrow B$. Il est donc suffisant de démontrer (d) lorsque le morphisme f est surjectif. Dans ce cas, le morphisme de k-schémas simpliciaux $\mathrm{K}_\bullet(B, r) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(B', r)$ est un torseur sous $\mathrm{K}_\bullet(\ker(f), r)$. La proposition 5.4.2 et le corollaire 5.2.7, appliqués aux complexes $F^\bullet = \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(U, \underline{A}_{\mathbb{Q}})$ pour $U \in \mathrm{Sm}/k$, fournissent le résultat recherché. ■

Notations 5.5.5. — Si X est un k-schéma lisse, on note $\mathrm{Alb}(X)$ son schéma d'Albanese, $\mathrm{NS}^1(X)$ son faisceau étale constructible de Néron–Severi (i.e., celui dont les sections sur une clôture algébrique de k sont les classes de diviseurs pour l'équivalence algébrique ; voir [**17**, Definition 3.6.1]) et $\mathrm{T}^1(X)$ le groupe de type multiplicatif ayant $\mathrm{NS}^1(X)$ pour faisceau de caractères (i.e., $\mathrm{T}^1(X) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{NS}^1(X), \mathbf{G}_m)$). On note aussi $\mathrm{Alb}_{\mathbb{Q}}(X)$, $\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(X)$ et $\mathrm{T}^1_{\mathbb{Q}}(X)$ les faisceaux de $\mathbb{Q}$-vectoriels sur Sm/k obtenus en tensorisant par $\mathbb{Q}$ les faisceaux de groupes abéliens représentés par $\mathrm{Alb}(X)$, $\mathrm{NS}^1(X)$ et $\mathrm{T}^1(X)$. □

Pour calculer les $\mathbb{Q}$-vectoriels $\mathrm{H}^i_{\mathbb{Q}}(B, r; A)$ lorsque A est semi-abélien, on aura besoin de quelques résultats tirés de [**16**]. Comme d'habitude, on note $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k; \mathbb{Q})$ la catégorie des motifs effectifs de Voevodsky à coefficients rationnels [**57**]. Pour $X \in \mathrm{Sm}/k$, on note $\mathrm{M}(X)$ son motif, i.e., le complexe de faisceaux avec transferts $\mathbb{Q}_{tr}(X)[0]$ vu comme objet de cette catégorie. La catégorie $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k; \mathbb{Q})$ est monoïdale symétrique fermée et on note $\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(-, -)$ son bifoncteur « homomorphismes internes ».

Le cœur de la t-structure homotopique sur $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k; \mathbb{Q})$ s'identifie à la catégorie $\mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}(k; \mathbb{Q})$ des faisceaux Nisnevich (ou étales) avec transferts, invariants par homotopie. Il s'ensuit un foncteur homologique

$$\left(h_i : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k; \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}(k; \mathbb{Q})\right)_{i \in \mathbb{Z}}$$

qui transforme triangles distingués de motifs en suites exactes longues de faisceaux avec transferts invariants par homotopie. Pour $X \in \mathrm{Sm}/k$, les faisceaux $h_i(\mathrm{M}(X))$ seront simplement notés $h_i(X)$.

On note $\mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}_{\leqslant 1}(k; \mathbb{Q}) \subset \mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}(k; \mathbb{Q})$ la plus petite sous-catégorie abélienne stable par colimites et contenant les objets de la forme $\underline{L}_{\mathbb{Q}}$, où L est un réseau, et $\underline{A}_{\mathbb{Q}}$, où A est une variété semi-abélienne. Les faisceaux dans $\mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}_{\leqslant 1}(k; \mathbb{Q})$ sont dits 1-*motiviques*. Le foncteur évident

$$\mathrm{R}\iota : \mathbf{D}(\mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}_{\leqslant 1}(k; \mathbb{Q})) \longrightarrow \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k; \mathbb{Q}) \tag{5.21}$$

est t-exacte (pour la t-structure homotopique), pleinement fidèle et son image essentielle est la plus petite sous-catégorie triangulée stable par sommes infinies et contenant les motifs des courbes lisses. Le foncteur (5.21) possède un adjoint à gauche

$$\mathrm{LAlb} : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k; \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}_{\leqslant 1}(k; \mathbb{Q})). \tag{5.22}$$

(Voir [**16**, Theorem 2.4.1].) On aura besoin du résultat suivant.

Lemme 5.5.6. — *Soit X un k-schéma lisse. Alors, on a :*

$$h_i(\mathrm{LAlb}(\mathrm{M}(X))) = \begin{cases} \mathrm{Alb}_{\mathbb{Q}}(X) & si \quad i = 0, \\ \mathrm{T}^1_{\mathbb{Q}}(X) & si \quad i = 1, \\ 0 & si \quad i \notin \{0, 1\}. \end{cases}$$

Démonstration. — Il s'agit de [**17**, Theorem 9.2.2]. ∎

Proposition 5.5.7. — *Soit $X_\bullet$ un k-schéma semi-simplicial lisse en chaque degré. Si $F_\bullet \in \mathbf{Cpl}(\mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}_{\leqslant 1}(k;\mathbb{Q}))$ est un complexe de faisceaux 1-motiviques (par exemple $F = \underline{A}_{\mathbb{Q}}[0]$ avec A une variété semi-abélienne), on a un triangle distingué*

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{Alb}_{\mathbb{Q}}(X_\bullet), F_\bullet) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{M}(X_\bullet), F_\bullet) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{T}^1_{\mathbb{Q}}(X_\bullet), F_\bullet[-1]) \longrightarrow$$

dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$. (Ci-dessus, $\mathrm{Alb}_{\mathbb{Q}}(X_\bullet)$ et $\mathrm{T}^1_{\mathbb{Q}}(X_\bullet)$ sont considérés comme des complexes de faisceaux avec transferts, i.e., des objets de la catégorie des motifs.) De plus, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$h_i(\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{M}(X_\bullet), F_\bullet)) = \underline{\mathrm{H}}^{-i}_{\text{ét}}(X_\bullet, F_\bullet)$$

où le second membre est le faisceau étale associé au préfaisceau $U \in \mathrm{Sm}/k \rightsquigarrow \mathrm{H}^{-i}_{\text{ét}}(X_\bullet \times_k U, F_\bullet)$.

Démonstration. — On a des isomorphismes évidents

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^{-i}_{\text{ét}}(X_\bullet \times_k U, F_\bullet) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X_\bullet \times_k U), F_\bullet[-i]) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X_\bullet) \otimes \mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(U), F_\bullet[-i]) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})}(\mathrm{M}(X_\bullet) \otimes \mathrm{M}(U), F_\bullet[-i]); \end{aligned} \tag{5.23}$$

le premier découle de [**57**, Lemma 6.23] et le second de la définition même du produit tensoriel dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$. Ceci fournit l'identification $\underline{\mathrm{H}}^{-i}_{\text{ét}}(X_\bullet, F_\bullet) = h_i(\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{M}(X_\bullet), F_\bullet))$.

Grâce à l'adjonction $(\mathrm{LAlb}, \mathrm{R}\iota)$, le dernier membre dans (5.23) se réécrit :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}_{\leqslant 1}(k;\mathbb{Q}))}\big(\mathrm{LAlb}(\mathrm{M}(X_\bullet) \otimes \mathrm{M}(U)), F_\bullet[-i]\big). \tag{5.24}$$

Or, pour tout M, $N \in \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$, le morphisme canonique

$$\mathrm{LAlb}(M \otimes N) \longrightarrow \mathrm{LAlb}(\mathrm{LAlb}(M) \otimes N)$$

est inversible. (Lorsque M et N sont compacts, il s'agit de [**17**, Proposition 7.1.2(a)], et le cas général s'ensuit par passage aux colimites homotopiques.) Le groupe (5.24) s'identifie donc à :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})}(\mathrm{LAlb}(\mathrm{M}(X_\bullet)) \otimes \mathrm{M}(U), F_\bullet[-i]). \tag{5.25}$$

Ceci étant vrai pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $U \in \mathrm{Sm}/k$, on déduit que le morphisme évident

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{LAlb}(\mathrm{M}(X_\bullet)), F_\bullet) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{M}(X_\bullet), F_\bullet) \tag{5.26}$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$. Grâce au lemme 5.5.6, nous disposons d'un triangle distingué

$$\mathrm{T}^1_{\mathbb{Q}}(X_\bullet)[1] \longrightarrow \mathrm{LAlb}(\mathrm{M}(X_\bullet)) \longrightarrow \mathrm{Alb}_{\mathbb{Q}}(X_\bullet) \longrightarrow$$

dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$. Ceci permet de conclure. ∎

Notation 5.5.8. — Si X est un k-schéma lisse, on note $\mathrm{Alb}^\circ(X)$ la composante connexe de l'élément neutre de $\mathrm{Alb}(X)$. C'est une variété semi-abélienne qui s'identifie au noyau du morphisme $\mathrm{Alb}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_{tr}(\pi_0(X))$ (avec $\pi_0(X)$ le k-schéma étale paramétrisant les composantes géométriquement connexes de X). On note $\mathrm{Alb}^\circ_{\mathbb{Q}}(X)$ le faisceau de $\mathbb{Q}$-vectoriels sur Sm/k obtenu en tensorisant par $\mathbb{Q}$ le faisceau de groupes abéliens représenté par $\mathrm{Alb}^\circ(X)$. (Clairement, $\mathrm{Alb}^\circ_{\mathbb{Q}}(X)$ est un objet de $\mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}_{\leqslant 1}(k;\mathbb{Q})$.) □

Proposition 5.5.9. — *Soit B un k-schéma en groupes géométriquement connexe. Alors, le morphisme $B \longrightarrow \mathrm{Alb}^\circ(B)$, envoyant le neutre de B sur le zéro de $\mathrm{Alb}^\circ(B)$, est un morphisme de k-schémas en groupes surjectif. De plus, son noyau est affine, extension d'un groupe semi-simple par un groupe unipotent.*

Démonstration. — La première partie de l'énoncé est une conséquence immédiate des propriétés universelles des schémas d'Albanese (voir [**64**]). Le fait que le noyau de $B \longrightarrow \mathrm{Alb}^{\circ}(B)$ soit affine résulte immédiatement du théorème de Chevalley (voir par exemple [**30**]). Puisque ce noyau ne possède aucun quotient isomorphe à un tore, il est une extension d'un groupe semi-simple par un groupe unipotent. ∎

Notation 5.5.10. — Sauf mention explicite du contraire, si A et B sont des k-schémas en groupes, $\underline{\mathrm{Hom}}(B,A)$ désigne le faisceau étale qui à $U \in \mathrm{Sm}/k$ associe l'ensemble des homomorphismes de U-schémas en groupes entre $B \times_k U$ et $A \times_k U$. Lorsque A est commutatif, $\underline{\mathrm{Hom}}(B,A)$ est un faisceau de groupes abéliens et on pose $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(B,A) = \underline{\mathrm{Hom}}(B,A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Lorsque A est une variété semi-abélienne et B est connexe, $\underline{\mathrm{Hom}}(B,A) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Alb}^{\circ}(B),A)$ est un réseau. □

Notation 5.5.11. — Si E est une variété abélienne sur k, on note $E^{\vee}$ sa variété abélienne duale. Le faisceau de $\mathbb{Q}$-vectoriels $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(E,E^{\vee})$ est muni de l'involution de Rosati $f \rightsquigarrow f^{\vee}$. (Le morphisme $f^{\vee}$ est vraiment le composé de $f^{\vee} : (E^{\vee})^{\vee} \longrightarrow E^{\vee}$ et de l'identification $E \simeq (E^{\vee})^{\vee}$.) Il s'ensuit une décomposition pour les valeurs propres -1 et $+1$:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(E,E^{\vee}) = \underline{\mathrm{Hom}}^{-}_{\mathbb{Q}}(E,E^{\vee}) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}^{+}_{\mathbb{Q}}(E,E^{\vee}).$$

Il est bien connu que le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}^{+}_{\mathbb{Q}}(E,E^{\vee})$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(E)$. (Ce résultat sera redémontré dans la preuve de la proposition 5.5.14 ci-dessous.) □

Notation 5.5.12. — Le bifoncteur $\underline{\mathrm{Hom}} : \mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$ préserve les sous-catégories des 1-faisceaux motiviques. (Ceci se vérifie facilement par dévissage aux cas des réseaux et des variétés semi-abéliennes.) Ainsi, pour tout $F \in \mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}_{\leqslant 1}(k;\mathbb{Q})$, on a un foncteur exact à droite

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\leqslant 1}(F,-) : \mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}_{\leqslant 1}(k;\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}_{\leqslant 1}(k;\mathbb{Q}).$$

Il se dérive en un foncteur

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\leqslant 1}(F,-) : \mathbf{D}(\mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}_{\leqslant 1}(k;\mathbb{Q})) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{HI}^{\mathrm{eff}}_{\leqslant 1}(k;\mathbb{Q})).$$

De plus, on a $\mathrm{R}\iota \circ \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\leqslant 1}(-,-) = \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{R}\iota(-),\mathrm{R}\iota(-))$. Il découle de [**16**, Proposition 2.4.10] (cas des coefficients rationnels) que $\mathrm{R}^i\underline{\mathrm{Hom}}_{\leqslant 1}(-,-) = 0$ pour $i \notin \{0,1\}$. Pour $i = 0$ et $i = 1$, ces bifoncteurs seront notés $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(-,-)$ et $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Q}}(-,-)$. Le premier généralise le bifoncteur de la notation 5.5.10. De plus, si A et A' sont des variétés semi-abéliennes, alors $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Q}}(\underline{A}_{\mathbb{Q}},\underline{A}'_{\mathbb{Q}})$ coïncide avec le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(A,A') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ où $\underline{\mathrm{Ext}}^1(A,A')$ est calculé dans la catégorie des faisceaux étales sur Sm/k. Pour cette raison, écrira $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Q}}(A,A')$ au lieu de $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Q}}(\underline{A}_{\mathbb{Q}},\underline{A}'_{\mathbb{Q}})$. □

Théorème 5.5.13. — *On fixe un entier $r \geqslant 1$. Soient A une k-variété semi-abélienne et B un k-schéma en groupes connexe, supposé commutatif si $r \geqslant 2$. Alors, on a :*

$$\underline{\mathrm{H}}^i_{\mathbb{Q}}(B,r;A) = \begin{cases} \underline{A}_{\mathbb{Q}} & \text{si} \quad i = 0, \\ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(B,A) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Alb}^{\circ}(B),A) & \text{si} \quad i = r, \\ \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Alb}^{\circ}(B),A) = \\ \qquad \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Alb}^{\circ}(B),\mathbf{G}_m) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}_m,A) & \text{si} \quad i = r+1, \\ \underline{\mathrm{Hom}}^{(-1)^r}_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}(B),\overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}(B)^{\vee}) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}_m,A) & \text{si} \quad i = 2r+1, \\ 0 & \text{si} \quad i \notin \{0,r,r+1,2r+1\}. \end{cases}$$

(Ci-dessus, $\overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}(B)$ désigne le plus grand quotient de $\mathrm{Alb}^{\circ}(B)$ qui soit une variété abélienne.) De plus, si B' est un quotient de B par un sous-groupe normal qui est une extension d'un groupe semi-simple par un groupe unipotent, alors le morphisme $\underline{\mathrm{H}}^i_{\mathbb{Q}}(B',r;A) \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^i_{\mathbb{Q}}(B,r;A)$ est inversible.

Démonstration. — Nous obtiendrons le théorème en calculant les motifs $\mathrm{Alb}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r))$ et $\mathrm{T}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r))$, et en appliquant ensuite la proposition 5.5.7. Le plus dur sera de calculer $\mathrm{T}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r))$ ou, d'une manière équivalente $\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r))$; ceci fera l'objet de la proposition 5.5.14 ci-dessous.

En chaque degré $n \geqslant 0$, l'élément neutre du groupe $\mathrm{K}_n(B,r)$ fournit une décomposition de k-schémas en groupes $\mathrm{Alb}(\mathrm{K}_n(B,r)) = \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Alb}^\circ(\mathrm{K}_n(B,r))$. Cette décomposition est compatible aux structures simpliciales. Il s'ensuit une décomposition $\mathrm{Alb}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)) = \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Alb}^\circ(\mathrm{K}_\bullet(B,r))$ de k-schémas simpliciaux en groupes commutatifs. Par ailleurs, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Alb}^\circ(B^m) = \mathrm{Alb}^\circ(B)^{\oplus m}$. En fin de compte, on obtient un isomorphisme canonique de complexes de faisceaux avec transferts

$$\mathrm{Alb}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)) \simeq \mathbb{Z}[0] \oplus \mathrm{K}_\bullet(\mathrm{Alb}^\circ(B),r).$$

Or, le complexe $\mathrm{K}_\bullet(\mathrm{Alb}^\circ(B),r)$ est quasi-isomorphe à $\mathrm{Alb}^\circ(B)[r]$. Il en découle les isomorphismes suivants dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$:

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{Alb}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)),\underline{A}_{\mathbb{Q}}) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Q}[0]\oplus \mathrm{Alb}^\circ_{\mathbb{Q}}(B)[r],\underline{A}_{\mathbb{Q}})\\ &\simeq \underline{A}_{\mathbb{Q}}[0]\oplus \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\leqslant 1}(\mathrm{Alb}^\circ_{\mathbb{Q}}(B),\underline{A}_{\mathbb{Q}})[-r].\end{aligned} \tag{5.27}$$

D'après la proposition 5.5.14 ci-dessous, on a un quasi-isomorphisme $\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)) \simeq L[-2r]$ avec $L = \underline{\mathrm{Hom}}^{(-1)^r}_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(B),\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(B)^\vee)$. Il s'ensuit que $\mathrm{T}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(L,\mathbf{G}_m)[2r] \simeq L^\vee \otimes \mathbf{G}_m[2r]$ où $L^\vee$ est le $\mathbb{Q}$-réseau dual de L. Il en découle les isomorphismes suivants dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$:

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{T}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)),\underline{A}_{\mathbb{Q}}) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(L^\vee\otimes \mathbf{G}_m[2r],\underline{A}_{\mathbb{Q}})\\ &\simeq L\otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}_m,A)[-2r].\end{aligned} \tag{5.28}$$

Vu les isomorphismes (5.27) et (5.28), la proposition 5.5.7 fournit maintenant un triangle distingué

$$\begin{aligned}&\underline{A}_{\mathbb{Q}}[0]\oplus \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\leqslant 1}(\mathrm{Alb}^\circ_{\mathbb{Q}}(B),\underline{A}_{\mathbb{Q}})[-r] \longrightarrow\\ &\qquad\qquad \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{M}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)),\underline{A}_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow L\otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}_m,A)[-2r-1] \longrightarrow .\end{aligned}$$

Il reste à appliquer le foncteur homologique $(h_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ pour obtenir le résultat recherché. ■

Le résultat suivant a servi dans la preuve du théorème 5.5.13.

Proposition 5.5.14. — *Soit B un k-schéma en groupes connexe, commutatif si $r \geqslant 2$. Alors, on a :*

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r))) = \begin{cases} \underline{\mathrm{Hom}}^{(-1)^r}_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(B),\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(B)^\vee) & si \quad i = 2r,\\ 0 & si \quad i \neq 2r.\end{cases}$$

Démonstration. — Si $Q = \overline{\mathrm{Alb}}^\circ(B)$, le morphisme canonique $\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(Q^n) \longrightarrow \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(B^n)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on peut donc supposer que B est une variété abélienne. (Le fait qu'on vient d'invoquer est classique : on peut l'obtenir en appliquant judicieusement [**63**, Lemme 6.9(iii), Proposition 6.10 et Corollaire 6.11] à la décomposition de Rosenlicht [**25**, Proposition 3.1] ; les détails sont laissés au lecteur.)

Soit A une variété abélienne. (On sera intéressé par le cas où A est un produit de copies de B.) On dispose d'un morphisme évident $\mathrm{M}(A) \longrightarrow \underline{A}_{\mathbb{Q}}$, du motif de A vers le faisceau avec transferts $\underline{A}_{\mathbb{Q}}$ vu comme un objet de $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$. (Voir [**6**, Definition 2.1.4] où ce morphisme est désigné par « α ».) Notons $\mathrm{Sym}^2(\underline{A}_{\mathbb{Q}})$ la deuxième puissance symétrique de $\underline{A}_{\mathbb{Q}}$, i.e., l'image du projecteur $\frac{1}{2}(\mathrm{id}+\tau) \in \mathbb{Q}[\Sigma_2]$ agissant sur $(\underline{A}_{\mathbb{Q}})^{\otimes 2} \in \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$. (Bien entendu, $\Sigma_2 = \{1,\tau\}$ est le groupe symétrique d'ordre 2.) Il existe alors un morphisme canonique $\gamma_A : \mathrm{M}(A) \longrightarrow \mathrm{Sym}^2(\underline{A}_{\mathbb{Q}})$ qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M}(A) \arrow[rr, "\gamma_A"] \arrow[d, "\mathrm{diag}"] & & \mathrm{Sym}^2(\underline{A}_{\mathbb{Q}}) \arrow[d] \\ \mathrm{M}(A\times_k A) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{M}(A)\otimes \mathrm{M}(A) \arrow[r] & \underline{A}_{\mathbb{Q}}\otimes \underline{A}_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd}$$

commutatif. (Voir [**6**, Definition 3.1.1] (cas $n = 2$) où ce morphisme est désigné par « φ^2 ».) La composition de

$$\begin{aligned} &\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{Sym}^2(\underline{A}_{\mathbb{Q}}), \mathbb{Q}(1)[2]) \xrightarrow{\gamma_A^*} \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{M}(A), \mathbb{Q}(1)[2]) \\ &\qquad \simeq \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{LAlb}(\mathrm{M}(A)), \mathbb{Q}(1)[2]) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(h_1\mathrm{LAlb}(\mathrm{M}(A)), \mathbb{Q}(1)[1]) \simeq \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A) \end{aligned} \tag{5.29}$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$. Ceci découle de la décomposition de Chow–Kunneth de [**31**]

$$\mathrm{M}(A) = \bigoplus_{i=0}^{2\dim(A)} \mathrm{Sym}^i(\underline{A}_{\mathbb{Q}}),$$

pour la variété abélienne A, et des annulations $\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{Sym}^i(\underline{A}_{\mathbb{Q}}), \mathbb{Q}(1)) = 0$ pour $i \geqslant 3$. (Il suffit de vérifier l'annulation de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}((\underline{A}_{\mathbb{Q}})^{\otimes 3}, \mathbb{Q}(1))$. Elle découle de l'annulation de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}((\underline{A}_{\mathbb{Q}})^{\otimes 2}, \underline{A}'_{\mathbb{Q}})$ pour toute variété abélienne A' qui découle, à son tour, de l'annulation de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\underline{A}_{\mathbb{Q}}, \underline{L}_{\mathbb{Q}})$ pour tout réseau L.) Étant donné que l'isomorphisme (5.29) est naturel en les morphismes de variétés abéliennes, on déduit un isomorphisme dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$:

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{Sym}^2(\mathrm{K}_\bullet(B,r)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}), \mathbb{Q}(1)[2]) \simeq \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)).$$

(Ci-dessus, nous avons préféré ne pas utiliser la notation 5.5.1.)

Considérons maintenant le motif simplicial $D_\bullet = \mathrm{diag}_\bullet((\mathrm{K}(B,r)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})^{\otimes 2})$ muni de l'involution τ consistant à permuter les facteurs. L'isomorphisme ci-dessus se réécrit :

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(D_\bullet^{\tau=\mathrm{id}}, \mathbb{Q}(1)[2]) \simeq \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)).$$

Il nous faut donc calculer le complexe $D_\bullet$ et son involution τ. Or, on dispose du quasi-isomorphisme d'Eilenberg–Zilber

$$(\mathrm{K}_\bullet(B,r)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})^{\otimes 2} \xrightarrow{\text{q.i.}} D_\bullet. \tag{5.30}$$

De plus, modulo le quasi-isomorphisme (5.30), τ correspond à la contrainte de commutativité dans la catégorie des complexes. Or, nous avons un quasi-isomorphisme canonique $\mathrm{K}_\bullet(B,r) \simeq B[r]$. Nous en déduisons la chaîne d'isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(((\underline{B}_{\mathbb{Q}}[r])^{\otimes 2})^{\tau=\mathrm{id}}, \mathbb{Q}(1)[2]) \\ &= \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(((\underline{B}_{\mathbb{Q}})^{\otimes 2})^{\tau=(-1)^r\mathrm{id}}[2r], \mathbb{Q}(1)[2]) \\ &= \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{eff}}(((\underline{B}_{\mathbb{Q}})^{\otimes 2})^{\tau=(-1)^r\mathrm{id}}, \mathbb{Q}(1)[2])[-2r] \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(B, B^\vee)^{\tau=(-1)^r\mathrm{id}}[-2r] = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}^{(-1)^r}(B, B^\vee)[-2r]. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ∎

Proposition 5.5.15. — *On fixe un entier $r \geqslant 1$. Soit B un k-schéma en groupes connexe, supposé commutatif si $r \geqslant 2$. On fixe un sous-réseau*

$$L \subset \underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(B), \overline{\mathrm{Alb}}^\circ(B)^\vee)$$

sur lequel l'involution de Rosati est la multiplication par $(-1)^r$ et qui est de rang maximal pour cette propriété. Soit $T = \underline{\mathrm{Hom}}(L, \mathbf{G}_m)$ le tore ayant L pour réseau de caractères. Alors, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^{2r+1}_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r); T)\otimes\mathbb{Q} \simeq \mathrm{End}(L)\otimes\mathbb{Q}. \tag{5.31}$$

De plus, il existe un $\mathrm{K}_\bullet(T,2r)$-torseur $\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r)$ sur $\mathrm{K}_\bullet(B,r)$ dont la classe caractéristique (au sens de la construction 5.3.16) est un multiple non nul de l'identité de L modulo l'identification (5.31).

Démonstration. — D'après le théorème 5.5.13, on a

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{H}}^{2r+1}_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r); T)\otimes\mathbb{Q} &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}^{(-1)^r}(\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(B), \overline{\mathrm{Alb}}^\circ(B)^\vee)\otimes\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(L,\mathbb{Z}) \\ &\simeq \underline{L}_{\mathbb{Q}}\otimes\underline{L}_{\mathbb{Q}}^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(L,L). \end{aligned}$$

L'isomorphisme (5.31) s'en déduit par passage aux sections globales.

Il reste à construire le $\mathrm{K}_\bullet(T, 2r)$-torseur $\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B, r)$. Plus généralement, pour tout k-tore T et toute classe $\gamma \in \mathrm{H}^{2r+1}_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r); T) \otimes \mathbb{Q}$, nous construirons un $\mathrm{K}_\bullet(T, 2r)$-torseur $\mathrm{K}^\gamma_\bullet(B, r)$ sur $\mathrm{K}_\bullet(B, r)$ dont la classe caractéristique est un multiple non nul de γ. Pour ce faire, on ne restreint pas la généralité en supposant que B est une variété abélienne. (En effet, γ provient de $\mathrm{H}^{2r+1}_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(B), r); T) \otimes \mathbb{Q}$ et si l'on dispose d'un tel torseur pour $\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(B)$, on en déduit un pour B par changement de base.)

D'après la preuve du théorème 5.5.13, on a un isomorphisme canonique :

$$\underline{\mathrm{H}}^{2r+1}_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r); T) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathrm{H}^{2r}(\mathrm{NS}^1(\mathrm{K}_\bullet(B, r))) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}_m, T).$$

Par ailleurs, si $\mathrm{K}^\bullet(B, r)^\vee$ désigne la k-variété abélienne cosimpliciale duale de la k-variété abélienne simpliciale $\mathrm{K}_\bullet(B, r)$, on a un quasi-isomorphisme $\mathrm{K}^\bullet(B, r)^\vee \simeq B^\vee[-r]$. Il s'ensuit que $\mathrm{H}^i(\mathrm{K}(B, r)^\vee) = 0$ pour $i \neq r$, et en particulier pour $i \in \{2r, 2r + 1\}$. Étant donnée la suite exacte courte de complexes de faisceaux étales avec transferts

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}^\bullet(B, r)^\vee \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^1_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r); \mathbf{G}_m) \longrightarrow \mathrm{NS}^1(\mathrm{K}_\bullet(B, r)) \longrightarrow 0,$$

on déduit un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^{2r}(\mathrm{NS}^1(\mathrm{K}_\bullet(B, r))) \simeq \mathrm{H}^{2r}(\underline{\mathrm{H}}^1_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r); \mathbf{G}_m)).$$

On obtient ainsi des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{H}}^{2r+1}_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r); T) \otimes \mathbb{Q} &\simeq \mathrm{H}^{2r}(\underline{\mathrm{H}}^1_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r); \mathbf{G}_m)) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}_m, T)\\ &\simeq \mathrm{H}^{2r}(\underline{\mathrm{H}}^1_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B, r); T)) \otimes \mathbb{Q}.\end{aligned}$$

L'image par la composition de ces isomorphismes d'un certain multiple non nul de γ fournit un élément $\xi \in \mathrm{H}^{\text{ét}}_1(\mathrm{K}_{2r}(B, r), T)$ qui est un cocycle dans le complexe $\mathrm{H}^{\text{ét}}_1(\mathrm{K}_\bullet(B, r), T)$. On supposera aussi que ξ est dans l'intersection des noyaux des dégénérescences, ce qui est loisible.

On considère un T-torseur $P_{2r} \longrightarrow \mathrm{K}_{2r}(B, r)$ de classe caractéristique ξ et on forme le morphisme $2r$-élémentaire $P_\bullet \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(B, r)$ qui lui est associé. La restriction de ξ à la section nulle de $\mathrm{K}_{2r}(B, r)$ étant nulle, le T-torseur $P_{2r} \times_{\mathrm{K}_{2r}(B,r),0} \mathrm{Spec}(k)$ est trivial ; on fixe un isomorphisme T-équivariant entre T et $P_{2r} \times_{\mathrm{K}_{2r}(B,r),0} \mathrm{Spec}(k)$. Il s'ensuit un isomorphisme $\mathrm{E}_\bullet(T, 2r + 1)$-équivariant

$$\mathrm{E}_\bullet(T, 2r + 1) \xrightarrow{\sim} P_\bullet \times_{\mathrm{K}_\bullet(B,r),0} \mathrm{Spec}(k).$$

Puisque l'image de ξ par le morphisme cobord $\mathrm{H}^{\text{ét}}_1(\mathrm{K}_{2r}(B, r); T) \longrightarrow \mathrm{H}^{\text{ét}}_1(\mathrm{K}_{2r+1}(B, r); T)$ est nulle, il existe un morphisme T^{2r+2}-équivariant de $\mathrm{K}_{2r+1}(B, r)$-schémas $\beta : P_{2r+1} \longrightarrow T \times_k \mathrm{K}_{2r+1}(B, r)$ où l'on fait agir un point $(t_0, \cdots, t_{2r+1})$ de T^{2r+2} sur T par translation suivant $\sum_{i=0}^{2r+1}(-1)^i t_i$. Puisque le k-schéma $\mathrm{K}_{2r+1}(B, r)$ est projectif et géométriquement connexe, l'ensemble de tels morphismes β est simplement transitivement permuté par $T(k)$. Il existe donc un unique tel morphisme $\alpha : P_{2r+1} \longrightarrow T \times_k \mathrm{K}_{2r+1}(B, r)$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}_{2r+1}(T, 2r + 1) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & P_{2r+1} \times_{\mathrm{K}_{2r+1}(B,r),0} \mathrm{Spec}(k) \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathrm{K}_{2r+1}(T, 2r + 1) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & T \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale à gauche est donnée sur les points par $(t_0, \cdots, t_{2r+1}) \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{2r+1}(-1)^i t_i$. Avec ce choix, il est facile de voir que le couple (T, α) définit un objet du groupoïde $\mathcal{Q}(\mathrm{K}_\bullet(B, r); T, 2r)$ de la proposition 5.3.7 (cas $G = \{1\}$) qui satisfait à la propriété concernant la composition de (5.11). D'après ladite proposition, ce couple détermine donc un T-torseur $\mathrm{K}^\gamma_\bullet(B, r)$ sur $\mathrm{K}_\bullet(B, r)$. Le calcul de la classe caractéristique de $\mathrm{K}^\gamma_\bullet(B, r)$ est omis. ■

Définition 5.5.16. — *Un torseur $\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B, r)$, comme celui construit dans la preuve de la proposition 5.5.15, sera appelé un* torseur universel de type multiplicatif *sur $\mathrm{K}_\bullet(B, r)$. On fera attention qu'un tel torseur n'est pas unique !*

Lemme 5.5.17. — *Gardons les hypothèses et les notations de la proposition 5.5.15. Alors, le complexe de faisceaux étales avec tranferts* $\mathrm{T}^1_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r))$ *est acyclique et s'insère dans une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{T}^1_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r)) \longrightarrow \mathrm{T}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(T,2r) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0. \tag{5.32}$$

De plus, le morphisme évident $\mathrm{Alb}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r)) \longrightarrow \mathrm{Alb}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r))$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Nous allons d'abord construire la suite exacte courte (5.32). Par dualité entre tores et réseaux, il est suffisant de construire une suite exacte courte de complexes de $\mathbb{Q}$-réseaux

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}^\bullet(L^\vee,2r)^\vee \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)) \longrightarrow \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r)) \longrightarrow 0. \tag{5.33}$$

(Ci-dessus, $\mathrm{K}^\bullet(L^\vee,2r)^\vee$ est le réseau cosimplicial dual du réseau simplicial $\mathrm{K}_\bullet(L^\vee,2r)$; c'est aussi l'image, par la correspondance de Dold–Kan, du complexe $L[2r]$ dans la catégorie additive *opposée* à la catégorie des réseaux.) Par construction, $\widehat{\mathrm{K}}_{2r}(B,r)$ est un T-torseur sur $\mathrm{K}_{2r}(B,r)$. Ainsi, le noyau du morphisme

$$\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_{2r}(B,r)) \longrightarrow \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathrm{K}}_{2r}(B,r))$$

est engendré par les classes caractéristiques de $\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}$-torseurs obtenus en poussant en avant le T-torseur $\widehat{\mathrm{K}}_{2r}(B,r)$ suivant des morphismes $T \longrightarrow \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}$. Autrement dit, ce noyau est l'image de la composition de

$$\zeta : L \otimes \mathbb{Q} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(T,\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \xrightarrow{\xi\otimes\mathrm{id}} \underline{\mathrm{H}}^1_{\text{ét}}(\mathrm{K}_{2r}(B,r);T) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(T,\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \longrightarrow \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_{2r}(B,r)).$$

(La classe de cohomologie $\xi \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{K}_{2r}(B,r),T)$ est celle construite dans la preuve de la proposition 5.5.15 en prenant pour $\gamma \in \mathrm{H}^{2r+1}_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r),T) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(L) \otimes \mathbb{Q}$ l'identité de L.) Par construction, le morphisme ζ induit un isomorphisme entre $L \otimes \mathbb{Q}$ et $\mathrm{H}^{2r}(\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)))$. En particulier, ζ est injectif.

Dans la preuve de la proposition 5.5.15, nous avons pris soin de supposer que ξ est dans l'intersection des noyaux des dégénérescences. Il en est donc de même pour toute section dans l'image du morphisme $\zeta : L \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_{2r}(B,r))$. Par la correspondance de Dold–Kan, le morphisme ζ s'étend alors d'une manière unique en un morphisme de réseaux cosimpliciaux

$$\zeta^\bullet : \mathrm{K}^\bullet(L^\vee,2r)^\vee \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)).$$

Ce morphisme est injectif puisqu'il en est ainsi du morphisme induit sur les complexes normalisés associés ; il constitue la deuxième flèche de (5.33). La composition des deuxième et troisième flèches est nulle : en effet, il suffit de vérifier cela en degré $2r$.

Par ailleurs, puisque $\widehat{\mathrm{K}}_n(B,r)$ est un $\mathrm{K}_n(T,2r)$-torseur sur $\mathrm{K}_n(B,r)$, on a une surjection entre les $\mathbb{Q}$-réseaux

$$\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_n(B,r)) \twoheadrightarrow \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathrm{K}}_n(B,r))$$

et l'estimation suivante de leurs rangs :

$$\mathrm{rang}(\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathrm{K}}_n(B,r))) \geqslant \mathrm{rang}(\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_n(B,r))) - \dim(\mathrm{K}_n(T,2r)).$$

Ceci montre que (5.33) est une suite exacte courte. Le complexe $\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r))$ est alors acyclique puisque $\mathrm{T}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(T,2r) \otimes \mathbb{Q}$ induit un isomorphisme en degré $2r$ et que les deux complexes n'ont pas de cohomologie en d'autres degrés (voir la proposition 5.5.14). Il s'ensuit que le complexe $\mathrm{T}^1_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r))$ est aussi acyclique.

Pour la dernière assertion on peut supposer k algébriquement clos. Il suffit alors de montrer que la classe caractéristique dans $\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_n(B,r))$ d'un $\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}$-torseur sur $\mathrm{K}_n(B,r)$, obtenu en poussant en avant $\widehat{\mathrm{K}}_n(B,r)$ par un morphisme $a : \mathrm{K}_n(T,2r) \longrightarrow \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}$, est nulle si et seulement si le morphisme a est nul. Notons $\overline{\xi}_n$ l'image de la classe caractéristique du $\mathrm{K}_n(T,2r)$-torseur $\widehat{\mathrm{K}}_n(B,r)$ par la composition de

$$\begin{array}{c}\underline{\mathrm{H}}^1_{\text{ét}}(\mathrm{K}_n(B,r);\mathrm{K}_n(T,2r)) \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^1_{\text{ét}}(\mathrm{K}_n(B,r),\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}},\mathrm{K}_n(T,2r)) \\ \downarrow \\ \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_n(B,r)) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}},\mathrm{K}_n(T,2r)).\end{array}$$

La propriété à vérifier équivaut alors à l'injectivité du morphisme

$$\overline{\xi}'_n : \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_n(T,2r),\mathbf{G}_m) \longrightarrow \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_n(B,r)),$$

déduit de $\overline{\xi}_n$ via la dualité entre $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_n(T,2r),\mathbf{G}_m)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}_m,\mathrm{K}_n(T,2r))$. Or, modulo les identifications évidentes, $\overline{\xi}'_n$ coïncide avec le morphisme

$$\mathrm{K}^n(L^\vee,2r)^\vee \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_n(B,r))$$

qui figure dans la suite exacte (5.33). En particulier, $\overline{\xi}'_n$ est bien injectif comme souhaité. ■

Corollaire 5.5.18. — *On fixe un entier $r \geqslant 1$. Soit B un k-schéma en groupes connexe, commutatif si $r \geqslant 2$, et soit $\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r)$ un torseur universel de type multiplicatif sur $\mathrm{K}_\bullet(B,r)$. Alors, le morphisme naturel*

$$\mathrm{LAlb}(\mathrm{M}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r))) \longrightarrow \mathrm{Alb}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r))$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$.

Démonstration. — En effet, d'après le lemme 5.5.6, on a un triangle distingué dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k;\mathbb{Q})$:

$$\mathrm{T}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r))[1] \longrightarrow \mathrm{LAlb}(\mathrm{M}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r))) \longrightarrow \mathrm{Alb}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r)) \longrightarrow .$$

Le lemme 5.5.17 permet de conclure. ■

Théorème 5.5.19. — *On fixe un entier $r \geqslant 1$. Soient A une k-variété semi-abélienne et B un k-schéma en groupes connexe, supposé commutatif si $r \geqslant 2$. Soit $\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r)$ un torseur universel de type multiplicatif sur $\mathrm{K}_\bullet(B,r)$. Alors, on a :*

$$\underline{\mathrm{H}}^i_{\text{ét}}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r);\underline{A}_{\mathbb{Q}}) = \begin{cases} \underline{A}_{\mathbb{Q}} & si \quad i=0,\\ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(B,A) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Alb}^\circ(B),A) & si \quad i=r,\\ \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Alb}^\circ(B),A) = \\ \qquad \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Alb}^\circ(B),\mathbf{G}_m)\otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}_m,A) & si \quad i=r+1,\\ 0 & si \quad i\notin\{0,r,r+1\}. \end{cases}$$

Démonstration. — C'est une conséquence facile du corollaire 5.5.18. (Utiliser le calcul de $\mathrm{Alb}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r))$ effectué dans la preuve du théorème 5.5.13.) ■

5.6. Cohomologie des espaces d'Eilenberg–Mac Lane algébriques, II. —

On termine ici l'étude de la cohomologie des espaces d'Eilenberg–Mac Lane algébriques commencée dans la sous-section 5.5. Dans la présente sous-section, on traite le cas où A un k-vectoriel V, i.e., isomorphe à une somme finie de copies de $\mathbf{G}_a$. Dans la suite, on désigne par le même symbole un k-vectoriel, le k-schéma en groupes associé et le faisceau étale représenté par ce dernier. Les faisceaux $\underline{\mathrm{H}}^i(B,r;V)$ sont naturellement des faisceaux de k-vectoriels et on a donc $\underline{\mathrm{H}}^i(B,r;V) = \underline{\mathrm{H}}^i_{\mathbb{Q}}(B,r;V)$; voir la notation 5.5.2. (On montrera ci-dessous que ces faisceaux sont représentés par des k-schémas en k-vectoriels de sorte qu'on peut aussi les désigner par $\mathrm{H}^i(B,r;V)$, d'après ce que l'on vient de convenir.)

Lemme 5.6.1. — *Supposons que le k-schéma en groupes B est affine et soit V un k-vectoriel. Alors, le morphisme évident*

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(B,r)))\otimes_k V \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^i_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r);V) = \underline{\mathrm{H}}^i(B,r;V) \tag{5.34}$$

est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — En effet, pour un k-schéma affine X on a

$$\underline{\mathrm{H}}^i_{\text{ét}}(X;V) = \begin{cases} \mathcal{O}(X)\otimes_k V & \text{si} \quad i=0,\\ 0 & \text{si} \quad i\neq 0. \end{cases} \tag{5.35}$$

Le résultat recherché en découle aussitôt. ■

Proposition 5.6.2. — *Soit U un k-vectoriel. Alors, il existe un quasi-isomorphisme canonique de complexes de k-vectoriels*
$$\mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(U,r)) \simeq \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Sym}^j(U^\vee[-r]). \tag{5.36}$$

Démonstration. — En effet, on a
$$\mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(U,r)) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Sym}^j(\mathrm{K}^\bullet(U,r)^\vee)$$
où $\mathrm{K}^\bullet(U,r)^\vee$ est le k-vectoriel cosimplicial dual du k-vectoriel simplicial $\mathrm{K}_\bullet(U,r)$. En utilisant le théorème d'Eilenberg–Zilber, on obtient des quasi-isomorphismes canoniques
$$\begin{aligned}\mathrm{diag}^\bullet(\overbrace{\mathrm{K}(U,r)^\vee\otimes_k\cdots\otimes_k\mathrm{K}(U,r)^\vee}^{j \text{ fois}}) &\simeq \overbrace{\mathrm{K}^\bullet(U,r)^\vee\otimes_k\cdots\otimes_k\mathrm{K}^\bullet(U,r)^\vee}^{j \text{ fois}}\\ &\simeq \overbrace{U^\vee[-r]\otimes_k\cdots\otimes_k U^\vee[-r]}^{j \text{ fois}}.\end{aligned} \tag{5.37}$$
Les quasi-isomorphismes (5.37) sont Σ_j-équivariants pour l'action du groupe symétrique par permutation des facteurs. Il s'ensuit que $\mathrm{Sym}^j(\mathrm{K}^\bullet(U,r)^\vee)$ est quasi-isomorphe à $\mathrm{Sym}^j(U^\vee[-r])$. ∎

Corollaire 5.6.3. — *Soient U et V des k-vectoriels. Alors, on a*
$$\underline{\mathrm{H}}^{rj}(U,r;V) = \begin{cases} \mathrm{Sym}^j(U^\vee)\otimes_k V & \text{si } r \text{ est pair},\\ \bigwedge^j(U^\vee)\otimes_k V & \text{si } r \text{ est impair},\end{cases}$$
et les faisceaux $\underline{\mathrm{H}}^i(U,r;V)$ sont nuls si r ne divise pas i.

Démonstration. — Compte tenu de la contrainte de commutativité pour le produit tensoriel des complexes, le résultat recherché découle du lemme 5.6.1 et de la proposition 5.6.2. ∎

On aura besoin d'une variante tordue du corollaire 5.6.3.

Proposition 5.6.4. — *On fixe un entier $r\geqslant 1$. Soit G un k-schéma en groupes affine de type fini agissant sur deux k-vectoriels U et V. Pour $j\geqslant 0$, on pose*
$$W^{(j)} = \begin{cases} \mathrm{Sym}^j(U^\vee)\otimes V & \text{si } r \text{ est pair},\\ \bigwedge^j(U^\vee)\otimes_k V & \text{si } r \text{ est impair},\end{cases}$$
muni de l'action induite de G. Il existe alors un quasi-isomorphisme canonique
$$\mathrm{R}\Gamma^G_{\text{ét}}(\mathrm{K}^G_\bullet(U,r);V) \simeq \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \Gamma^G(G_\bullet;W^{(j)})[-rj], \tag{5.38}$$
où $\mathrm{R}\Gamma^G_{\text{ét}}(\mathrm{K}^G_\bullet(U,r);V) = \mathrm{Tot}\ H^\bullet(\mathrm{K}^G_\bullet(U,r))$ avec $H^\bullet$ un remplacement projectivement ét*-fibrant borné à gauche du faisceau $\Gamma^G(-;V)$ sur $(\mathrm{Sm}/k)/G_\bullet$ associé à V par la construction 5.2.3, alors que $\Gamma^G(G_\bullet;W^{(j)})$ est le complexe associé à $W^{(j)}$ par la construction 4.6.24 et qui calcule la cohomologie du groupe G à valeurs dans la représentation $W^{(j)}$; voir aussi la remarque 5.3.11.*

Démonstration. — Étant donné que U et G sont des schémas affines et que V est un k-vectoriel, le morphisme évident $\Gamma^G(\mathrm{K}^G_\bullet(U,r);V)\longrightarrow \mathrm{R}\Gamma^G_{\text{ét}}(\mathrm{K}^G_\bullet(U,r);V)$ est un quasi-isomorphisme (grâce à (5.35)). Il est donc suffisant de construire un quasi-isomorphisme
$$\Gamma^G(\mathrm{K}^G_\bullet(U,r);V) \simeq \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \Gamma^G(G_\bullet;W^{(j)}).$$
Le complexe $V(\mathrm{K}_\bullet(U,r)) \simeq \mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(U,r))\otimes_k V$ est naturellement une représentation de G. De plus, une inspection facile montre que le complexe $\Gamma^G(\mathrm{K}^G_\bullet(U,r);V)$ s'identifie canoniquement à $\Gamma^G(G_\bullet;V(\mathrm{K}_\bullet(U,r)))$. Or, d'après la proposition 5.6.2 (et son corollaire 5.6.3), on dispose d'un quasi-isomorphisme G-équivariant $V(\mathrm{K}_\bullet(U,r)) \simeq \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} W^{(j)}[-rj]$. Ceci permet de conclure. ∎

Proposition 5.6.5. — *Soient T un k-tore et V un k-vectoriel. Alors, on a*

$$\underline{\mathrm{H}}^i(T,r;V)=\begin{cases} V & si \quad i=0,\\ 0 & si \quad i\neq 0.\end{cases}$$

Démonstration. — On divise la preuve en deux parties.

Partie 1. — On traite d'abord le cas $r=1$. Le problème est local pour la topologie étale sur Sm/k. On ne restreint donc pas la généralité en supposant que T est déployé, i.e., isomorphe à un produit de $\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}$. D'après le lemme 5.6.1, il suffit de montrer que le complexe de k-vectoriels $\mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(T,1))$ est quasi-isomorphe à $k[0]$. Étant donnée une décomposition $T=T_1\times_k T_2$, on a $\mathrm{K}_\bullet(T,1)=\mathrm{diag}_\bullet(\mathrm{K}(T_1,1)\times_k \mathrm{K}(T_2,1))$. Le théorème d'Eilenberg–Zilber fournit alors un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(T,1))\simeq \mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(T_1,1))\otimes_k \mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(T_2,1)).$$

Il est donc suffisant de traiter le cas de T_1 et T_2 séparément. Puisque T a été supposé déployé, on se ramène par récurrence au cas $T=\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}$. L'algèbre semi-cosimpliciale $\mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}},1))$ est donnée par la k-algèbre semi-cosimpliciale $L^\bullet$ du lemme 5.6.6. Ledit lemme permet donc de conclure.

Partie 2. — On traite maintenant le cas général. Vu le lemme 5.6.1, il faut montrer que le complexe de k-vectoriels $\mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(T,r))$ est quasi-isomorphe à $k[0]$. Par récurrence et vu l'étape précédente, on peut supposer que $r\geqslant 2$ et que cette propriété est établie au rang $r-1$.

Nous reprenons la méthode utilisée dans la preuve du corollaire 5.2.7. Notons $X_\bullet=\mathrm{K}_\bullet(T,r)$ et $Y_\bullet=\mathrm{E}_\bullet(T,r)$. D'après le lemme 4.10.15(a) (cas $G=\{1\}$), on dispose d'un morphisme canonique de k-schémas simpliciaux $Y_\bullet\longrightarrow X_\bullet$. Considérons le k-schéma bisimplicial $\check{C}_\bullet(Y_\bullet/X_\bullet)$. Nous avons un isomorphisme de k-schémas simpliciaux

$$\check{C}_m(Y_\bullet/X_\bullet)\simeq \mathrm{diag}_\bullet(Y\times_k \mathrm{K}(T^{\oplus m},r-1))$$

(voir la preuve du corollaire 5.2.7). Grâce au théorème d'Eilenberg–Zilber et à l'hypothèse de récurrence, on obtient des quasi-isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\check{C}_m(Y_\bullet/X_\bullet)) &\simeq \mathcal{O}(\mathrm{diag}_\bullet(Y\times_k \mathrm{K}(T^{\oplus m},r-1)))\\ &\simeq \mathcal{O}(Y_\bullet)\otimes_k \mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(T^{\oplus m},r-1))\simeq k[0].\end{aligned}$$

D'autre part, le morphisme $Y_\bullet\longrightarrow X_\bullet$ est couvrant pour la topologie étale en chaque degré. Il s'ensuit un quasi-isomorphisme $\mathcal{O}(X_\bullet)\simeq \mathrm{Tot}\ \mathcal{O}(\check{C}_\bullet(Y_\bullet/X_\bullet))$. D'après la discussion précédente, $\mathrm{Tot}\ \mathcal{O}(\check{C}_\bullet(Y_\bullet/X_\bullet))$ est quasi-isomorphe au complexe $\mathrm{H}_0(\mathcal{O}(\check{C}_\bullet(Y/X)))$ donné par une copie de k en chaque degré $\geqslant 0$. En inspéctant la différentielle de ce dernier complexe, on voit aussitôt qu'il est quasi-isomorphe à $k[0]$. Ceci termine la preuve de la proposition. ∎

Lemme 5.6.6. — *Soit $L^\bullet$ la k-algèbre semi-cosimpliciale définie de la manière suivante. Pour $n\in\mathbb{N}$,*

$$L^n=k[T_1^{\pm},\cdots,T_n^{\pm}]$$

est la k-algèbre des polynômes de Laurent à n indéterminées. Les morphismes δ^0, $\delta^{n+1}:L^n\longrightarrow L^{n+1}$ sont donnés par $\delta^0(T_j)=T_{j+1}$ et $\delta^{n+1}(T_j)=T_j$. Pour $1\leqslant i\leqslant n$, le morphisme $\delta^i:L_n\longrightarrow L_{n+1}$ est donné par

$$\delta^i(T_j)=\begin{cases} T_j & si \quad 1\leqslant j\leqslant i-1,\\ T_iT_{i+1} & si \quad j=i,\\ T_{j+1} & si \quad i+1\leqslant j\leqslant n.\end{cases}$$

Alors, $\mathrm{H}^0(L)=k$ *et* $\mathrm{H}^n(L)=0$ *pour* $n\neq 0$.

Démonstration. — Les morphismes $\delta^0,\delta^1:k\longrightarrow k[T_1^{\pm}]$ sont égaux ; ils sont donnés par l'inclusion des constantes dans la k-algèbre $k[T_1^{\pm}]$. Ceci montre que $\mathrm{H}^0(L)=k$.

Pour $n\geqslant 1$, soit $P(T_1,\cdots,T_n)\in L^n$ un polynôme de Laurent et supposons qu'il est un cocycle, i.e., qu'il est dans le noyau de la différentielle du complexe $L^\bullet$. Soit d le degré maximal et $-d'$ le degré minimal d'une indéterminée dans P. Si $d=d'=0$, le polynôme P est constant et il est facile de voir qu'il est un cobord.

Quitte à remplacer P par $P(T_1^{-1}, \cdots, T_n^{-1})$, on peut supposer que $d > 0$. Nous allons expliquer comment modifier P par un cobord afin de diminuer d sans changer d'. Ceci permettra de conclure par récurrence.

On appellera sous-polynôme de P un polynôme de Laurent Q obtenu à partir de P en gardant inchangés certains monômes dans P et en remplaçant les autres par zéro. Soit

$$M = T_j^d \cdots T_{j+r}^d \cdot Q(T_1, \cdots, T_{j-1}, T_{j+r+1}, \cdots, T_n) \tag{5.39}$$

un sous-polynôme non nul de P avec r maximal. En inspectant les différents types de monômes contenus dans l'expression $\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\delta^i(P)$, on trouve que

$$\sum_{i=j}^{j+r}(-1)^i\delta^i(M) = 0.$$

Il s'ensuit que $\sum_{i=j}^{j+r}(-1)^i Q = 0$, ce qui équivaut à la condition que r est impair. Ainsi, en modifiant P par le cobord associé à

$$N = T_j^d \cdots T_{j+r-1}^d \cdot Q(T_1, \cdots, T_{j-1}, T_{j+r}, \cdots, T_{n-1}),$$

on obtient un polynôme de Laurent ayant strictement moins de sous-polynômes de la forme (5.39). En itérant la construction précédente et en raisonnant par récurrence sur r, on arrive en fin de compte à diminuer le degré maximal d'une indéterminée dans P. ∎

Corollaire 5.6.7. — *Soit T un k-tore. Soient $X_\bullet$ un k-schéma simplicial et $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ un $\mathrm{K}_\bullet(T, r)$-torseur. Soit V un k-vectoriel. Alors, le morphsime évident $\underline{\mathrm{H}}^i_{\text{ét}}(X_\bullet; V) \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^i_{\text{ét}}(Y_\bullet; V)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Quitte à remplacer $X_\bullet$ par la source d'un hyper-recouvrement étale relatif, on peut supposer que $X_\bullet$ est affine en chaque degré. Dans ce cas, il est suffisant de montrer que $\mathcal{O}(X_\bullet) \longrightarrow \mathcal{O}(Y_\bullet)$ est un quasi-isomorphisme.

Lorsque le torseur $Y_\bullet$ est trivial, le résultat recherché est une conséquence immédiate de la proposition 5.6.5 et du théorème d'Eilenberg–Zilber. Pour le cas général, on reprend la méthode employée dans la preuve de la proposition 5.4.1.

Considérons le k-schéma bisimplicial $P_{\bullet,\bullet} = \check{C}_\bullet(Y_\bullet/X_\bullet)$ et notons $Q_{\bullet,\bullet} = Y_\bullet \times_{X_\bullet} P_{\bullet,\bullet}$. Pour $m \in \mathbb{N}$, $Q_{m,\bullet}$ est un $\mathrm{K}_\bullet(T, r)$-torseur sur $P_{m,\bullet}$ qui est trivial puisqu'il admet une section. D'après ce qui précède, nous savons que les morphismes $\mathcal{O}(P_{m,\bullet}) \longrightarrow \mathcal{O}(Q_{m,\bullet})$ sont des quasi-isomorphismes. Il en découle que le morphisme $\mathrm{Tot}\ \mathcal{O}(P_{\bullet,\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ \mathcal{O}(Q_{\bullet,\bullet})$ est un quasi-isomorphisme. Or, les complexes $\mathcal{O}(X_\bullet)$ et $\mathcal{O}(Y_\bullet)$ sont clairement quasi-isomorphes à $\mathrm{Tot}\ \mathcal{O}(P_{\bullet,\bullet})$ et $\mathrm{Tot}\ \mathcal{O}(Q_{\bullet,\bullet})$, ce qui permet de conclure. ∎

Le corollaire 5.6.7 admet la généralisation suivante.

Proposition 5.6.8. — *Soit $T_\bullet$ un k-schéma simplicial en groupes commutatif de type multiplicatif avec $\mathrm{H}_0(T) = 0$. Soient $X_\bullet$ un k-schéma simplicial et $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ un $T_\bullet$-torseur. Soit V un k-vectoriel. Alors, le morphisme évident $\underline{\mathrm{H}}^i_{\text{ét}}(X_\bullet; V) \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^i_{\text{ét}}(Y_\bullet; V)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Appelons $T'_\bullet = \mathrm{N}_\bullet(T)$ le complexe normalisé associé à $T_\bullet$ par la correspondance de Dold–Kan. Il existe une filtration décroissante $(F^nT'_\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$, sur le complexe $T'_\bullet$, finie et exhaustive en chaque degré, et telle que $\mathrm{gr}^n_F(T'_\bullet)$ admet l'une des formes suivantes :

(1) $[\cdots \to 0 \to A = A \to 0 \to \cdots]$ avec A un k-schéma en groupes de type multiplicatif placé en degrés homologiques $\geqslant 0$;

(2) $[\cdots \to 0 \to A \to 0 \to \cdots]$ avec A un k-tore placé en degré homologique $\geqslant 1$;

(3) $[\cdots \to 0 \to A \to 0 \to \cdots]$ avec A un k-schéma en groupes commutatif fini placé en degré homologique $\geqslant 1$.

Soit $(F^nT_\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration décroissante sur $T_\bullet$ déduite par la correspondance de Dold–Kan de la filtration qu'on s'est donnée sur $T'_\bullet$. La projection $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est la composition (finie en chaque degré) d'une tour

$$\cdots Y_\bullet^{(n+1)} \longrightarrow Y_\bullet^{(n)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_\bullet^{(0)} = X_\bullet$$

où $Y_\bullet^{(n)}$ est le poussé en avant de $Y_\bullet$ suivant le morphisme $T_\bullet \longrightarrow T_\bullet/F^nT_\bullet$. De plus, chaque morphisme $Y_\bullet^{(n+1)} \longrightarrow Y_\bullet^{(n)}$ est un $\mathrm{gr}^F_n(T_\bullet)$-torseur. Il est donc suffisant de montrer la proposition dans le cas où le complexe $T'_\bullet$ admet l'une des formes (1)–(3) ci-dessus. Dans le cas premier cas, $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est un hyper-recouvrement étale relatif, et il n'y a rien à démontrer. Dans le deuxième cas, on utilise le corollaire 5.6.7. Dans le troisième cas, on utilise la variante pour les schémas simpliciaux de la proposition 5.4.2. ∎

Définition 5.6.9. — *Suivant* [**25**], *on dit qu'un k-schéma en groupes connexe B est* anti-affine *si toute fonction régulière sur B est constante, i.e.,* $\mathcal{O}(B) \simeq k$.

Remarque 5.6.10. — Un k-schéma en groupes anti-affine B est automatiquement commutatif. (Ceci découle par exemple de [**25**, Lemma 1.1(iv)].) Dans [**25**, §2.3] on trouve une classification des k-schémas en groupes anti-affines : ce sont des extensions d'une k-variété abélienne $\overline{B}$ par un k-groupe affine $U \times_k T$ produit d'un k-vectoriel U par un k-tore T. La propriété d'être anti-affine est alors équivalente à une condition de « non trivialité totale » de cette extension (voir [**25**, Theorem 2.7(ii)]). □

On utilisera le résultat suivant concernant la cohomologie des k-schémas en groupes anti-affines.

Proposition 5.6.11. — *Soit B un k-schéma en groupes anti-affine. Il existe alors un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée des k-vectoriels :*

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \bigwedge^i \mathrm{H}^1(B;\mathcal{O})[-i] \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(B;\mathcal{O}). \tag{5.40}$$

On suppose que B est une extension d'une k-variété abélienne $\overline{B}$ par un k-groupe commutatif $U \times_k T$ avec U un k-vectoriel et T un k-tore. Alors, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^1(B/T;\mathcal{O}) \simeq \mathrm{H}^1(B;\mathcal{O})$ *et une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow U^\vee \longrightarrow \mathrm{H}^1(\overline{B};\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(B;\mathcal{O}) \longrightarrow 0.$$

En particulier, le k-vectoriel $\mathrm{H}^1(B;\mathcal{O})$ *est de dimension finie et les termes de la somme directe dans* (5.40) *sont nuls pour i strictement plus grand que cette dimension.*

Démonstration. — Tout ceci se trouve dans [**26**, §4]. ∎

Théorème 5.6.12. — *Soit B un k-schéma en groupes anti-affine. Alors, on a un quasi-isomorphisme*

$$\mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathbf{G}_a) \simeq \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Sym}^j(\underline{\mathrm{H}}^1(B;\mathcal{O})[-r-1]).$$

Démonstration. — Le site Zariski d'un k-schéma simplicial $S_\bullet$ a pour objets les couples (U,n) avec $n \in \mathbb{N}$ et $U \subset S_n$ un ouvert ; les flèches sont définies comme dans la construction 5.2.3(a).

Considérons la catégorie abélienne des faisceaux de $\mathcal{O}$-modules sur le site Zariski du k-schéma simplicial $\mathrm{K}_\bullet(B,r)$ qui sont quasi-cohérents en chaque degré. Il existe une extension « universelle »

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^1(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathcal{O}) \longrightarrow 0 \tag{5.41}$$

dans cette catégorie abélienne, et elle est donnée par l'extension universelle habituelle en chaque degré. (Ci-dessus, $\underline{\mathrm{H}}^1(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathcal{O})$ désigne le faisceau sur le site Zariski de $\mathrm{K}_\bullet(B,r)$ dont la restriction au site Zariski de $\mathrm{K}_n(B,r)$ est représenté par le k-vectoriel $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_n(B,r);\mathcal{O})$.) On peut construire l'extension (5.41) de la manière suivante. Considérons l'extension universelle par un k-vectoriel

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(B;\mathcal{O})^\vee \longrightarrow B^\sharp \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

du k-schéma en groupes anti-affine B. Notons $p : \mathrm{K}_\bullet(B^\sharp,r) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(B,r)$ le morphisme évident. Alors, le module quasi-cohérent $p_*(\mathcal{O})/\mathcal{O}$ admet $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathcal{O})$ pour complexe de sections globales en chaque degré. L'image inverse de $\underline{\mathrm{H}}^1(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathcal{O}) \subset p_*(\mathcal{O})/\mathcal{O}$ par la projection $p_*(\mathcal{O}) \twoheadrightarrow p_*(\mathcal{O})/\mathcal{O}$ est l'extension $\mathcal{E}$ recherchée.

La suite exacte (5.41) fournit un morphisme dans la catégorie dérivée des k-vectoriels

$$\underline{\mathrm{H}}^1(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathcal{O})[-1] \longrightarrow \mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathbf{G}_a).$$

(Ci-dessus, $\underline{\mathrm{H}}^1(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathcal{O})$ est le complexe de k-schémas en vectoriels associé au complexe de k-vectoriels $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathcal{O})$.) Le second membre étant une algèbre commutative, il s'ensuit un morphisme

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \bigwedge^i \underline{\mathrm{H}}^1(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathcal{O})[-i] \longrightarrow \mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathbf{G}_a). \tag{5.42}$$

La première assertion de la proposition 5.6.11 entraîne alors que (5.42) est un quasi-isomorphisme.

Notons $\mathrm{H}_1(B;\mathcal{O})$ le dual de $\mathrm{H}^1(B;\mathcal{O})$. Si B_1 et B_2 sont deux k-schémas en groupes anti-affines, alors $\mathrm{H}_1(B_1\times_k B_2;\mathcal{O})=\mathrm{H}_1(B_1;\mathcal{O})\oplus\mathrm{H}_1(B_2;\mathcal{O})$. Il en découle aussitôt que

$$\mathrm{H}_1(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathcal{O})=\mathrm{K}_\bullet(\mathrm{H}_1(B,\mathcal{O}),r).$$

Posons $V=\mathrm{H}_1(B;\mathcal{O})$. Le quasi-isomorphisme (5.42) se réécrit alors

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(\textstyle\bigwedge^i\mathrm{K}^\bullet(V,r)^\vee)[-i]\xrightarrow{\sim}\mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathbf{G}_a). \tag{5.43}$$

Par le théorème d'Eilenberg–Zilber, le complexe associé au k-vectoriel cosimplicial $\bigwedge^i(\mathrm{K}^\bullet(V,r)^\vee)$ est quasi-isomorphe au complexe $\bigwedge^i(V^\vee[-r])$. Il en découle en fin de compte que $\mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r);\mathbf{G}_a)$ est quasi-isomorphe à

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\textstyle\bigwedge^i(V^\vee[-r])[-i]=\displaystyle\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Sym}^i(V^\vee[-r-1]).$$

Ceci termine la preuve du théorème. ■

Corollaire 5.6.13. — *Soient B un k-schéma en groupes anti-affine et V un k-vectoriel. Alors, on a*

$$\underline{\mathrm{H}}^{rj+j}(B,r;V)=\begin{cases}\mathrm{Sym}^j(\mathrm{H}^1(B;\mathcal{O}))\otimes_k V & \text{si } r \text{ est impair},\\ \bigwedge^j(\mathrm{H}^1(B;\mathcal{O}))\otimes_k V & \text{si } r \text{ est pair},\end{cases}$$

et les faisceaux $\underline{\mathrm{H}}^i(B,r;V)$ sont nuls si $r+1$ ne divise par i.

Démonstration. — Compte tenu de la contrainte de commutativité pour le produit tensoriel des complexes, il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 5.6.12. ■

Pour une référence future, on note le résultat suivant.

Lemme 5.6.14. — *Soient B un k-schéma anti-affine et V un k-vectoriel. On rappelle que $\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r)$ désigne un torseur universel de type multiplicatif sur $\mathrm{K}_\bullet(B,r)$; voir la définition 5.5.16. Alors, le morphisme évident*

$$\underline{\mathrm{H}}^i(B,r;V)=\underline{\mathrm{H}}^i_{\text{ét}}(\mathrm{K}_\bullet(B,r);V)\longrightarrow\underline{\mathrm{H}}^i_{\text{ét}}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r);V)$$

est un isomorphisme. En particulier, les $\underline{\mathrm{H}}^i_{\text{ét}}(\widehat{\mathrm{K}}_\bullet(B,r);V)$ sont donnés comme dans le corollaire 5.6.13.

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence immédiate du corollaire 5.6.7. ■

5.7. Lemme de Poincaré feuilleté, I. Cas des modules différentiels. —

On reprend l'étude de la topologie fttf dans le contexte des Δ-schémas. Dans cette sous-section, on démontre un lemme de Poincaré pour la topologie fttf. Ceci permettra d'identifier la cohomologie de de Rham d'un Δ-corps avec sa cohomologie fttf à valeurs dans le faisceau discret (au sens de la définition 3.5.10) des fonctions « constantes sur les feuilles ». Ensuite, on invoquera un résultat de Beilinson qui permettra, dans certains cas, de lier directement la cohomologie de de Rham d'un Δ-corps à la cohomologie de son groupe de Galois différentiel linéaire absolu (voir la définition 2.9.14). Tout au long de cette sous-section, on fixe un Δ-corps K de caractéristique nulle et on note $C=K^{\Delta=0}$ son corps des constantes.

Définition 5.7.1. — *Nous dirons qu'un (K,Δ)-module M est* holonome *si le K-vectoriel sous-jacent à M est de dimension finie. Nous dirons que M est* ind-holonome *si M est l'union (filtrante) de ses sous-(K,Δ)-modules holonomes.*

Construction 5.7.2. — Étant donné un (K,Δ)-module M, on note $\mathcal{O}(-;M)$ le préfaisceau sur Fttf^Δ/K qui à un (K,Δ)-schéma localement de type fini X associe $\mathcal{O}(X)\otimes_K M$. Le préfaisceau $\mathcal{O}(-;M)$ est naturellement un $(\mathcal{O},\Delta)$-module (où Δ agit sur les tenseurs comme dans l'exemple 1.1.2). En particulier, on dispose d'un morphisme C-linéaire de préfaisceaux $\partial:\mathcal{O}(-;M)\longrightarrow\mathcal{O}(-;M)$ pour chaque $\partial\in\Delta$. Ceci permet de former le complexe de de Rham $\Omega^\bullet(-;M)$ donné en degré $i\geqslant 0$ par

$$\Omega^i(-;M)=\mathcal{O}(-;M)\otimes_{\mathbb{Z}}\textstyle\bigwedge^i(\mathbb{Z}^\Delta)$$

où $\mathbb{Z}^\Delta$ est le $\mathbb{Z}$-module libre des applications de Δ dans $\mathbb{Z}$. La différentielle de ce complexe est donnée par $d(m\otimes\omega)=\sum_{\partial\in\Delta}\partial(m)\otimes(\partial^\vee\wedge\omega)$ avec m une section de $\mathcal{O}(-;M)$, $\omega\in\bigwedge^i(\mathbb{Z}^\Delta)$ et $\partial^\vee$ l'application de

Δ dans $\mathbb{Z}$ qui vaut 1 en ∂ et 0 sur $\Delta \smallsetminus \{\partial\}$. Lorsque $M = K$, on note simplement $\Omega^\bullet(-)$ le complexe de de Rham associé. □

Notation 5.7.3. — Soit M un (K, Δ)-module. On note M^δ le préfaisceau sur Fttf^Δ/K donné par

$$M^\delta = \ker\{d : \mathcal{O}(-; M) \longrightarrow \Omega^1(-; M)\}.$$

Ceci coïncide avec la notation de la proposition 3.6.14(a). Lorsque $M = K$, on note $\mathcal{O}^\delta$ ce préfaisceau. Clairement, avec la notation du lemme 3.1.6, on a $\mathcal{O}^\delta(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X^{\Delta=0})$ pour tout $X \in \mathrm{Fttf}^\Delta/K$. De plus, $\mathcal{O}^\delta$ est l'image du préfaisceau $\mathcal{O}$ sur Ct/C par le foncteur $(-)^\delta$ de la notation 3.5.6. □

Le résultat qui suit est le lemme de Poincaré feuilleté dont il est question dans le titre de la sous-section.

Théorème 5.7.4. — *Supposons que le (K, Δ)-module M est ind-holonome. Alors, l'inclusion évidente*

$$M^\delta[0] \hookrightarrow \Omega^\bullet(-; M)$$

est une équivalence fttf*-locale. Autrement dit, pour tout $i \geqslant 1$, le faisceau* fttf *associé à $\mathrm{H}^i(\Omega(-; M))$ est nul. De plus, le faisceau $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(M^\delta)$ est localement discret (au sens de la définition 3.6.1).*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que M est holonome. La dernière assertion a été établie dans la proposition 3.6.14(a) ; elle est mise ici pour mémoire.

La question étant locale pour la topologie fttf, on peut remplacer K par une une Δ-extension L/K et M par le (L, Δ)-module $L \otimes_K M$. D'après la proposition 2.9.16, il est donc suffisant de traiter le cas où $M = K$, i.e., on doit montrer que l'inclusion $\mathcal{O}^\delta[0] \hookrightarrow \Omega^\bullet$ est une équivalence fttf-locale. Soit D/K une extension de degré de transcendance indénombrable, avec D un corps algébriquement, et considérons le (K, Δ)-schéma $\mathrm{Spec}(D[[\mathbf{t}]])$ qui lui est associé par la proposition 3.3.8. D'après le théorème 3.3.16, il est suffisant de montrer que le morphisme $\mathcal{O}^\delta[0] \hookrightarrow \Omega^\bullet$ induit un quasi-isomorphisme après évaluation en $\mathrm{Spec}(D[[\mathbf{t}]])$. On se ramène ainsi à vérifier que l'inclusion $D[0] \hookrightarrow \Omega^\bullet(D[[\mathbf{t}]])$ est un quasi-isomorphisme. Le résultat recherché est alors une conséquence du lemme de Poincaré formel, i.e., du le lemme 5.7.5 ci-dessous. ■

Le résultat suivant est bien connu. Pour la commodité du lecteur on inclut une preuve.

Lemme 5.7.5. — *Soit k un corps de caractéristique nulle. Alors, la cohomologie de de Rham formelle de la k-algèbre $A_n = k[[t_1, \cdots, t_n]]$ est donnée par*

$$\mathrm{H}^i(\Omega(A_n)) = \begin{cases} k & si \quad i = 0, \\ 0 & si \quad i \neq 0. \end{cases}$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur n. Lorsque $n = 0$, il n'y a rien à montrer. On suppose donc que $n \geqslant 1$. Alors, le complexe de de Rham $\Omega^\bullet(A_n)$ s'identifie à

$$\text{Cône}\,\{\partial_n : \Omega^\bullet(A_n/k[[t_n]]) \longrightarrow \Omega^\bullet(A_n/k[[t_n]])\}\,[-1] \tag{5.44}$$

où $\Omega^\bullet(A_n/k[[t_n]])$ est le complexe de de Rham relatif de la $k[[t_n]]$-algèbre formelle A_n. Or, il est clair que le morphisme $\partial_n : A_n \longrightarrow A_n$ est surjectif de noyau $A_{n-1} = k[[t_1, \cdots, t_{n-1}]]$. Il en découle que le complexe (5.44) est quasi-isomorphe à $\Omega^\bullet(A_{n-1})$ ce qui permet de conclure grâce à l'hypothèse de récurrence. ■

Notation 5.7.6. — Soit X un (K, Δ)-schéma localement de type fini. Étant donné un complexe de (K, Δ)-modules borné à gauche $M^\bullet$, on pose

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X; M) = \mathrm{H}^i\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(X; \mathrm{Tot}\,\Omega^\bullet(-; M^\bullet)).$$

Ce sont les groupes de cohomologie de de Rham de X à valeurs dans $M^\bullet$. Lorsque $M^\bullet = K[0]$, on note simplement $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X)$ ces groupes. Si X est affine (par exemple, si $X = \mathrm{Spec}(K)$), on a clairement $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X; M) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Tot}\,\Omega^\bullet(X; M^\bullet))$. □

Corollaire 5.7.7. — *Soit $M^\bullet$ un complexe de (K, Δ)-modules ind-holonomes borné à gauche. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K; M) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K; M^\delta).$$

Démonstration. — Le morphisme de complexes de préfaisceaux $(M^\bullet)^\delta \longrightarrow \mathrm{Tot}\,\Omega^\bullet(-;M^\bullet)$ est une équivalence fttf-locale d'après le théorème 5.7.4. On peut donc former le morphisme composé

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;M) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K;\mathrm{Tot}\,\Omega^\bullet(-;M^\bullet)) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K;M^\delta). \tag{5.45}$$

Pour montrer que (5.45) est un isomorphisme, il est suffisant de montrer que

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K,\mathcal{O}) = \begin{cases} K & \text{si} \quad i=0 \\ 0 & \text{si} \quad i\neq 0. \end{cases}$$

(On utilise ici que les composantes du bicomplexe $\Omega^\bullet(-;M^\bullet)$ sont isomorphes à des sommes directes de copies de $\mathcal{O}$.) Le résultat dont on a besoin est un cas particulier du lemme 5.7.8 ci-dessous. ∎

Pour des utilisations futures, nous avons énoncé le résultat suivant dans une généralité plus grande que celle nécessaire pour la preuve du corollaire 5.7.7.

Lemme 5.7.8. — *Soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* Sch/K *(la catégorie des K-schémas non nécessairement de type fini). Supposons que $F^\bullet$ est borné à gauche et qu'il est continu au sens suivant : si $(X_i)_{i\in I}$ est un pro-K-schéma affine, alors le morphisme évident* $\mathrm{colim}_{i\in I}F^\bullet(X_i) \longrightarrow F^\bullet(\lim_{i\in I}X_i)$ *est un quasi-isomorphisme. Considérons le foncteur* $\mathrm{o}_\Delta : \mathrm{Fttf}^\Delta/K \longrightarrow \mathrm{Sch}/K$ *qui consiste à oublier l'action de Δ. Alors, pour tout $i\in\mathbb{Z}$, le morphisme évident*

$$\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(K;F) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K;(\mathrm{o}_\Delta)_*F)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La question est locale pour la topologie étale sur K. On ne restreint donc pas la généralité en supposant que K est algébriquement clos.

Soit $Q_\bullet$ une hyper-enveloppe différentielle de K. Grâce au théorème 4.6.18, on sait que $\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K;(\mathrm{o}_\Delta)_*F^\bullet)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{H}^i(\mathrm{Tot}\ (\mathrm{o}_\Delta)_*F^\bullet(Q_\bullet)) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Tot}\ F^\bullet(Q_\bullet))$. Puisque le K-schéma semi-simplicial $Q_\bullet$ est le spectre d'un corps algébriquement clos en chaque degré, ce dernier groupe coïncide aussi avec $\mathrm{H}^i(\mathrm{Tot}\ G^\bullet(Q_\bullet))$, où $G^\bullet$ est un remplacement projectivement ét-fibrant borné à gauche de la restriction de $F^\bullet$ à Sm/k. (C'est ici qu'on utilise la continuité de $F^\bullet$.) Enfin, la proposition 5.2.2 (jointe au lemme 4.6.13 (cas $\Delta=\varnothing$)) fournit un isomorphisme $\mathrm{H}^i(G^\bullet(K)) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{Tot}\ G^\bullet(Q_\bullet))$, ce qui permet de conclure. ∎

Notation 5.7.9. — On note $\mathbf{Mod}^\Delta(K)$ la catégorie abélienne des (K,Δ)-modules et $\mathbf{Mod}^\Delta_{\mathrm{hol}}(K)$ sa sous-catégorie pleine formée des (K,Δ)-modules ind-holonomes. On note aussi $\mathbf{D}^+_{\mathrm{hol}}(\mathbf{Mod}^\Delta(K))$ la sous-catégorie triangulée de la catégorie dérivée $\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^\Delta(K))$ formée des complexes à cohomologie ind-holonome. On dispose d'un foncteur évident

$$\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^\Delta_{\mathrm{hol}}(K)) \longrightarrow \mathbf{D}^+_{\mathrm{hol}}(\mathbf{Mod}^\Delta(K)). \tag{5.46}$$

Ce foncteur n'est pas une équivalence de catégories en général. (Voir cependant le théorème 5.7.16.) □

Lemme 5.7.10. — *Soit $M^\bullet$ un complexe de (K,Δ)-modules borné à gauche. Alors, pour tout $i\in\mathbb{Z}$, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^\Delta(K))}(K,M[i]) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;M). \tag{5.47}$$

Démonstration. — Rappelons que l'algèbre de Weyl $\mathrm{W}(K)$ du Δ-corps K est donnée, en tant que K-vectoriel, par $\mathrm{W}(K) = \bigoplus_{\mathbf{r}\in\mathbb{N}^m} K\cdot\partial^{\mathbf{r}}$. La multiplication dans $\mathrm{W}(K)$ est uniquement déterminée par les formules : $[\partial,\partial']=0$ (pour tout ∂, $\partial'\in\Delta$) et $[\partial,f]=\partial(f)$ (pour tout $\partial\in\Delta$ et $f\in K$). Se donner un (K,Δ)-module équivaut à se donner un module à gauche sur $\mathrm{W}(K)$. Il s'ensuit que la catégorie abélienne $\mathbf{Mod}^\Delta(K)$ possède suffisamment de projectifs, à savoir les $\mathrm{W}(K)$-modules libres. On peut donc calculer les groupes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^\Delta(K))}(K,M[i])$ à l'aide d'une résolution libre du $\mathrm{W}(K)$-module K.

On dispose d'une résolution minimale libre de K. C'est la résolution de Koszul $\mathrm{Kosz}_\bullet(K;\Delta)$ obtenue en identifiant K au quotient de $\mathrm{W}(K)$ par l'idéal engendré par les $\partial\in\Delta$. Pour $e\geqslant 0$, on a

$$\mathrm{Kosz}_e(K;\Delta) = \bigoplus_{1\leqslant i_1<\cdots<i_e\leqslant m} \mathrm{W}(K)\otimes\partial_{i_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{i_e}$$

et la différentielle en degré e est donnée par la formule

$$d(w \otimes \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_e}) = \sum_{s=1}^{e} (-1)^{s+1} (w \cdot \partial_{i_s}) \otimes \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\partial_{i_s}} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_e},$$

avec $w \in \mathrm{W}(K)$. On obtient ainsi un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^\Delta(K))}(K, M[i]) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{Tot}\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}^\Delta(K)}(\mathrm{Kosz}_\bullet(K;\Delta), M^\bullet)).$$

Or, le bicomplexe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}^\Delta(K)}(\mathrm{Kosz}_\bullet(K;\Delta), M^\bullet)$ s'identifie à $\Omega^\bullet(K; M^\bullet)$. Le lemme est démontré. ■

Proposition 5.7.11. — *Supposons que K est algébriquement clos et fixons une hyper-enveloppe différentielle $Q_\bullet$ de K. Soit $M^\bullet$ un complexe de (K,Δ)-modules ind-holonomes borné à gauche. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^\Delta(K))}(K, M[i]) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{Tot}\ M^\delta(Q)). \tag{5.48}$$

Si $M^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ est une résolution injective bornée à gauche de M dans $\mathbf{Mod}^\Delta(K)$, cet isomorphisme est induit par la composition des quasi-isomorphismes

$$\mathrm{Hom}(K, I^\bullet) = (I^\bullet)^\delta(K) \xrightarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}\,(I^\bullet)^\delta(Q_\bullet) \xleftarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}\,(M^\bullet)^\delta(Q_\bullet).$$

Démonstration. — On a une chaîne d'isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^\Delta(K))}(K, M[i]) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K; M) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K; M^\delta) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{Tot}\ M^\delta(Q))$$

donnés respectivement par le lemme 5.7.10, le corollaire 5.7.7 et le théorème 4.6.18. Par construction, la composition des deux derniers isomorphismes est induite par les quasi-isomorphismes

$$\mathrm{Tot}\,\Omega(K; M) \xrightarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}\,\Omega(Q_\bullet; M) \xleftarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}\,M^\delta(Q).$$

Or, pour $I^\bullet$ comme dans l'énoncé, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tot}\,\Omega(K;M) \arrow[r, "\text{q.i.}"] \arrow[d, "\text{q.i.}"] & \mathrm{Tot}\,\Omega(Q;M) \arrow[d, "\text{q.i.}"] & \mathrm{Tot}\,M^\delta(Q) \arrow[l, "\text{q.i.}"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Tot}\,\Omega(K;I) \arrow[r, "\text{q.i.}"] & \mathrm{Tot}\,\Omega(Q;I) & \mathrm{Tot}\,I^\delta(Q) \arrow[l] \arrow[dl, equal] \\
I^\delta(K) \arrow[u, "\text{q.i.}"] \arrow[r] & \mathrm{Tot}\,I^\delta(Q) \arrow[u, "\text{q.i.}"] &
\end{tikzcd}$$

où les flèches désignées par « q.i. » sont des quasi-isomorphismes pour divers raisons : le théorème 5.7.4, le lemme 5.7.8 (voir aussi sa preuve), et le fait que la cohomologie de de Rham d'un (K,Δ)-module injectif dans $\mathbf{Mod}^\Delta(K)$ est nulle sauf en degré zéro. Il découle aussitôt que les autres flèches du diagramme ci-dessus sont également des quasi-isomorphismes. Étant donné que les deux quasi-isomorphismes verticaux à gauche induisent l'identification $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^\Delta(K))}(K, M[i]) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K; M)$, ceci permet de conclure. ■

Lemme 5.7.12. — *Supposons que C est algébriquement clos et soit $\widetilde{K}$ une clôture de Picard–Vessiot de K. Soit $M^\bullet$ un complexe de (K,Δ)-modules ind-holonomes borné à gauche et notons $V^\bullet$ le complexe de représentations ind-algébriques de $\mathrm{Gal}^\Delta(\widetilde{K}/K)$ associé à $M^\bullet$ par la construction 2.9.17. Alors, il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^\Delta_{\mathrm{hol}}(K))}(K, M[i]) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{Gal}^\Delta(\widetilde{K}/K); V). \tag{5.49}$$

Ci-dessus, $\mathrm{H}^i(\mathrm{Gal}^\Delta(\widetilde{K}/K); V)$ est la cohomologie du groupe $\mathrm{Gal}^\Delta(\widetilde{K}/K)$ à valeurs dans V qui coïncide avec la cohomologie du complexe $\mathrm{Tot}\,\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta(\widetilde{K}/K)}(\mathrm{Gal}^\Delta_\bullet(\widetilde{K}/K); V^\bullet)$. (Voir la construction 4.6.24 et la remarque 5.3.11.)

Démonstration. — D'après le théorème 2.9.18, il existe une équivalence entre, d'une part, la catégorie abélienne des (K,Δ)-modules ind-holonomes et, d'autre part, la catégorie abélienne des représentations linéaires ind-algébriques du pro-groupe algébrique $\mathrm{Gal}^{\Delta}(\widetilde{K}/K)$. Cette équivalence envoie le (K,Δ)-module K sur C (muni de l'action triviale) et le complexe $M^{\bullet}$ sur le complexe $V^{\bullet}$. Le résultat s'ensuit. ∎

Nous aurons besoin de préciser l'isomorphisme du lemme 5.7.12.

Proposition 5.7.13. — *Gardons les hypothèses et les notations du lemme 5.7.12. Alors, il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{Gal}^{\Delta}(\widetilde{K}/K); V) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{Tot}\, M^{\delta}(\check{C}_{\bullet}(\widetilde{K}/K)))$$

modulo lequel, l'isomorphisme (5.49) *admet la description suivante. Soit $M \longrightarrow J^{\bullet}$ une résolution injective de M dans $\mathbf{Mod}^{\Delta}_{\mathrm{hol}}(K)$. Alors, l'isomorphisme* (5.49) *est induit par la composition des quasi-isomorphismes*

$$\mathrm{Hom}(K, J^{\bullet}) = (J^{\bullet})^{\delta}(K) \xrightarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}\,(J^{\bullet})^{\delta}(\check{C}_{\bullet}(\widetilde{K}/K)) \xleftarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}\,(M^{\bullet})^{\delta}(\check{C}_{\bullet}(\widetilde{K}/K)).$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la construction 2.9.17. ∎

Théorème 5.7.14. — *Supposons que K est algébriquement clos. On fixe une hyper-enveloppe différentielle $Q_{\bullet}$ de K et un plongement $\widetilde{K}/K \hookrightarrow \mathcal{O}(Q_0)/K$ avec $\widetilde{K}/K$ une clôture de Picard–Vessiot de K. (On a donc un morphisme de C-schémas semi-simpliciaux $(Q_{\bullet})_{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{Gal}^{\Delta}_{\bullet}(\widetilde{K}/K)$.) Soit $M^{\bullet}$ un complexe de (K,Δ)-modules ind-holonomes. On note $V^{\bullet}$ le complexe de représentations ind-algébriques de* $\mathrm{Gal}^{\Delta}(\widetilde{K}/K)$ *associé à $M^{\bullet}$. Il existe alors un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^{\Delta}_{\mathrm{hol}}(K))}(K, M[i]) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^{\Delta}(K))}(K, M[i]) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathrm{H}^i\mathrm{Tot}\,\Gamma^{\mathrm{Gal}^{\Delta}(\widetilde{K}/K)}(\mathrm{Gal}^{\Delta}_{\bullet}(\widetilde{K}/K); V^{\bullet}) \arrow[r] & \mathrm{H}^i\mathrm{Tot}\,\Gamma^{\mathrm{Gal}^{\Delta}(\widetilde{K}/K)}((Q_{\bullet})_{\Delta=0}; V^{\bullet})
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes.

Démonstration. — Il est suffisant d'exhiber un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^{\Delta}_{\mathrm{hol}}(K))}(K, M[i]) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^{\Delta}(K))}(K, M[i]) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathrm{H}^i\mathrm{Tot}\, M^{\delta}(\check{C}_{\bullet}(\widetilde{K}/K)) \arrow[r] & \mathrm{H}^i\mathrm{Tot}\, M^{\delta}(Q_{\bullet}).
\end{tikzcd}$$

(Voir la preuve de la proposition 4.6.25.) Soit $M^{\bullet} \longrightarrow J^{\bullet}$ une résolution injective bornée à gauche dans $\mathbf{Mod}^{\Delta}_{\mathrm{hol}}(K)$ et $J^{\bullet} \longrightarrow I^{\bullet}$ une résolution injective bornée à gauche dans $\mathbf{Mod}^{\Delta}(K)$. La flèche horizontale supérieure du carré ci-dessus est induite par $\mathrm{Hom}(K, J^{\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K, I^{\bullet})$. Le résultat recherché découle des propositions 5.7.11 et 5.7.13. ∎

Définition 5.7.15. —

(i) On dira que le Δ-corps K est géométrique *si l'ensemble Δ forme une base du K-vectoriel* $\mathrm{Der}(K/C)$ *des dérivations C-linéaires de K dans lui-même, i.e., si l'application évidente*

$$K \otimes \Delta = \bigoplus_{\partial \in \Delta} K \cdot \partial \longrightarrow \mathrm{Der}(K/C)$$

est un isomorphisme. (Cette condition entraîne que le degré de transcendance de l'extension K/C est égal au cardinal de l'ensemble Δ.)

(ii) On dira que le Δ-corps K est cohomologiquement basique *(ou* de Beĭlinson*) si, pour tout (K,Δ)-modules holonomes L et M, et tout entier $i \in \mathbb{N}$, le morphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^{\Delta}_{\mathrm{hol}}(K))}(L, M[i]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}^{\Delta}(K))}(L, M[i])$$

est un isomorphisme. Il revient au même de demander que le foncteur (5.46) *soit une équivalence de catégories.*

L'appellation dans la définition 5.7.15(ii) est justifiée par le théorème suivant qui est une reformulation d'un résultat bien connu de Beĭlinson.

Théorème 5.7.16. — *Si le Δ-corps K est géométrique, alors le foncteur* (5.46) *est une équivalence de catégories. Autrement dit, K est cohomologiquement basique.*

Démonstration. — C'est essentiellement [**18**, Lemma 2.1.1]. Nous laissons au lecteur le soin de faire les traductions nécessaires. ■

Corollaire 5.7.17. — *Supposons que K est algébriquement clos et cohomologiquement basique. On fixe une hyper-enveloppe différentielle $Q_\bullet$ de K et un plongement $\widetilde{K}/K \hookrightarrow \mathcal{O}(Q_0)/K$ avec $\widetilde{K}/K$ une clôture de Picard–Vessiot de K. Alors, pour tout complexe $V^\bullet$ de représentations ind-algébriques de* $\mathrm{Gal}^\Delta(\widetilde{K}/K)$*, le morphisme évident*

$$\operatorname{Tot}\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta(\widetilde{K}/K)}(\mathrm{Gal}^\Delta_\bullet(\widetilde{K}/K);V^\bullet) \longrightarrow \operatorname{Tot}\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta(\widetilde{K}/K)}((Q_\bullet)_{\Delta=0};V^\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — C'est une conséquence directe du théorème 5.7.14 et de la définition 5.7.15(ii) étant donné que tout complexe $V^\bullet$ provient d'un complexe de (K,Δ)-modules ind-holonomes. ■

5.8. Lemme de Poincaré feuilleté, II. Cas des schémas en groupes commutatifs. —

On fixe un Δ-corps K de caractéristique nulle et on note $C = K^{\Delta=0}$ son corps des constantes. Dans cette sous-section on démontre une variante du lemme de Poincaré feuilleté (i.e., le théorème 5.7.4) où le (K,Δ)-module holonome est remplacé par un C-schéma en groupes commutatif. On donne aussi quelques conséquences de cette variante.

Notation 5.8.1. — Soit S un schéma. On note $\Omega^\bullet_{/S}$ le complexe de préfaisceaux sur Sch/S donné par $\Omega^\bullet_{/S}(X) = \Gamma(X;\Omega^\bullet_{X/S})$ où $\Omega^\bullet_{X/S}$ est le complexe de de Rham relatif du S-schéma X. Si $S = \mathrm{Spec}(R)$, on écrit aussi « $\Omega^\bullet_{/R}$ » au lieu de « $\Omega^\bullet_{/S}$ ». □

Construction 5.8.2. — Soit A un C-schéma en groupes commutatif. On note $\mathrm{Lie}(A)^\vee$ le sous-C-vectoriel de $\Omega^1_{/C}(A)$ formé des formes différentielles invariantes (à gauche ou à droite, cela revient au même car A est commutatif). On a $\Omega^1_{A/C} \simeq \mathcal{O}_A \otimes_C \mathrm{Lie}(A)^\vee$ et l'action de $\mathrm{Lie}(A)$ (l'algèbre de Lie de A) sur $\Omega^1_{A/C}$ fournit un accouplement parfait qui permet d'identifier $\mathrm{Lie}(A)^\vee$ au dual de $\mathrm{Lie}(A)$. De plus, pour $\omega \in \mathrm{Lie}(A)^\vee$, on a

$$(+)^*\omega = \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega \tag{5.50}$$

avec $+ : A \times_C A \longrightarrow A$ la loi de groupe de A. On définit un morphisme de préfaisceaux sur Sch/C :

$$A \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\mathrm{Lie}(A)^\vee, \Omega^1_{/C}) = \Omega^1_{/C}(-) \otimes_C \mathrm{Lie}(A) \tag{5.51}$$

comme suit. Soient X un C-schéma et $f : X \longrightarrow A$ un morphisme de C-schémas. Le morphisme de préfaisceaux (5.51) associe à f le morphisme de C-vectoriels $\mathrm{Lie}(A)^\vee \longrightarrow \Omega^1_{/C}(X)$ qui envoie une forme différentielle invariante $\omega \in \mathrm{Lie}(A)^\vee$ sur $f^*\omega \in \Omega^1_{/C}(X)$. L'identité (5.50) assure que (5.51) est un morphisme de préfaisceaux de groupes abéliens. Étant donné que les formes différentielles invariantes sur A sont fermées, la composition de

$$A \longrightarrow \Omega^1_{/C}(-) \otimes_C \mathrm{Lie}(A) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2_{/C}(-) \otimes_C \mathrm{Lie}(A)$$

est nulle. On peut donc former un complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{/C}(-;A)$, associé à A, en posant

$$\Omega^i_{/C}(-;A) = \begin{cases} A & \text{si} \quad i = 0, \\ \Omega^i_{/C}(-) \otimes_C \mathrm{Lie}(A) & \text{si} \quad i \neq 0. \end{cases}$$

La différentielle $\mathrm{d}_A : \Omega^i_{/C}(-;A) \longrightarrow \Omega^{i+1}_{\mathbb{C}}(-;A)$ est donnée par (5.51) si $i = 0$ et par $\mathrm{d} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(A)}$, avec d la différentielle de de Rham usuelle, si $i \geqslant 1$. □

Remarque 5.8.3. — On note, comme dans le lemme 5.7.8, o_Δ le foncteur d'oubli de l'action de Δ. On dispose d'un morphisme canonique de complexes de préfaisceaux sur Fttf^Δ/K :

$$(\mathrm{o}_\Delta)_*\Omega^\bullet_{/C}(-) \longrightarrow \Omega^\bullet(-). \tag{5.52}$$

Ce morphisme envoie $\mathrm{d}f \in \Omega^1_{/C}(\mathrm{o}_\Delta(X))$, avec $X \in \mathrm{Fttf}^\Delta/K$ et $f \in \mathcal{O}(X)$, sur $\sum_{\partial\in\Delta} \partial(f)\cdot\partial^\vee \in \Omega^1(X)$. □

Construction 5.8.4. — Soit A un C-schéma en groupes commutatif. En appliquant le foncteur $(\mathrm{o}_\Delta)_*$ à (5.51) et en composant ensuite avec (5.52), on obtient un morphisme de préfaisceaux sur Fttf^Δ/K :

$$(\mathrm{o}_\Delta)_*A \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\mathrm{Lie}(A)^\vee, \Omega^1(-)) = \Omega^1(-)\otimes_C \mathrm{Lie}(A). \tag{5.53}$$

Comme dans la construction 5.8.2, on peut former un complexe de de Rham $\Omega^\bullet(-;A)$, associé à A, en posant

$$\Omega^i(-;A) = \begin{cases} (\mathrm{o}_\Delta)_*A & \text{si } i=0,\\ \Omega^i(-)\otimes_C \mathrm{Lie}(A) & \text{si } i\neq 0.\end{cases}$$

On dispose alors d'un morphisme de complexes de préfaisceaux sur Fttf^Δ/K :

$$(\mathrm{o}_\Delta)_*\Omega^\bullet_{/C}(-;A) \longrightarrow \Omega^\bullet(-;A) \tag{5.54}$$

qui est l'analogue du morphisme (5.52) pour les complexes de de Rham associés à A. □

Notation 5.8.5. — Soit A un C-schéma en groupes commutatif et soit X un (K,Δ)-schéma localement de type fini. On pose

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X;A) = \mathrm{H}^i\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(X;\Omega^\bullet(-;A)).$$

Ce sont les groupes de cohomologie de de Rham de X à valeurs dans A. Si K est algébriquement clos, on a $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A) = \mathrm{H}^i(\Omega^\bullet(K;A))$. En général, on a $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A)\otimes\mathbb{Q} = \mathrm{H}^i(\Omega^\bullet(K;A))\otimes\mathbb{Q}$. □

Lemme 5.8.6. — *On garde les notations précédentes.*

(a) On a une identification $\Omega^\bullet(-) \simeq \Omega^\bullet(-;\mathbf{G}_a)$ qui induit des isomorphismes $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(-) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(-;\mathbf{G}_a)$ pour tout $i\in\mathbb{Z}$.

(b) Si X est un (K,Δ)-schéma affine de type fini, on a, pour $i \geqslant 2$, un morphisme naturel

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X)\otimes_C \mathrm{Lie}(A) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X;A). \tag{5.55}$$

Si X est le spectre d'une Δ-extension algébriquement close (resp. arbitraire) de K, le morphisme (5.55) *est un isomorphisme (resp. un isomorphisme à torsion près).*

(c) On a un isomorphisme canonique de préfaisceaux $\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(-;A) \simeq A^\delta$, avec A^δ l'image, par le foncteur $(-)^\delta$ de la notation 3.5.6, du préfaisceau sur Ct/C représenté par A.

Démonstration. — Seule la dernière assertion nécessite une preuve. On a une injection $A^\delta \hookrightarrow (\mathrm{o}_\Delta)_*A$ puisqu'un morphisme de (C,Δ)-schémas $X \longrightarrow A$ est en particulier un morphisme de C-schémas. Il est facile de voir que cette injection se factorise par le sous-préfaisceau $\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(-;A) \subset (\mathrm{o}_\Delta)_*A$.

Réciproquement, soit $f : X \longrightarrow A$ un morphisme de C-schémas de source un (K,Δ)-schéma localement de type fini et supposons que f est dans le noyau de la différentielle du complexe $\Omega^\bullet(X;A)$. Montrons que f est un morphisme de (C,Δ)-schémas (Δ agissant trivialement sur $\mathcal{O}_A$). Soient $U \subset A$ un ouvert et $u \in \mathcal{O}(U)$. Il s'agit de montrer que $\partial(u\circ f) = 0$ pour tout $\partial\in\Delta$. La dérivation ∂ induit un morphisme de préfaisceaux $\partial : (\mathrm{o}_\Delta)_*\Omega^1_{/C} \longrightarrow \mathcal{O}$. Ceci permet d'écrire $\partial(u\circ f) = \partial(f^*(\mathrm{d}u))$. Or, le C-vectoriel $\mathrm{Lie}(A)^\vee$ engendre le $\mathcal{O}_A$-module $\Omega^1_{A/C}$. On peut donc écrire $\mathrm{d}u = \sum_\alpha v_\alpha\cdot\omega_\alpha$ avec $v_\alpha\in\mathcal{O}(U)$ et $\omega_\alpha \in \mathrm{Lie}(A)^\vee$. Il s'ensuit que $f^*(\mathrm{d}u) = \sum_\alpha (v_\alpha\circ f)\cdot f^*\omega_\alpha$. La condition que f est dans le noyau de la différentielle de $\Omega^\bullet(X;A)$ entraîne que la classe de $f^*\omega_\alpha$ dans $\Omega^1(X)$ est nulle pour tout α. Puisque $\partial : (\mathrm{o}_\Delta)_*\Omega^1_C \longrightarrow \mathcal{O}$ se factorise par (5.52), on obtient l'annulation désirée. ■

On a pour les complexes $\Omega^\bullet(-;A)$ la version suivante du lemme de Poincaré feuilleté.

Théorème 5.8.7. — *Soit A un C-schéma en groupes commutatif. L'inclusion évidente $A^\delta[0] \hookrightarrow \Omega^\bullet(-;A)$ est une équivalence* fttf*-locale.*

Démonstration. — Vu le lemme 5.8.6(c), il suffit de montrer que le faisceau feuilleté associé à $\mathrm{H}^i(\Omega(-;A))$ est nul pour $i \geqslant 1$. Vu le théorème 5.7.4 et l'égalité $\mathrm{H}^i(\Omega(-;A)) \simeq \mathrm{H}^i(\Omega(-)) \otimes_C \mathrm{Lie}(A)$, il reste à traiter le cas $i = 1$. En utilisant le théorème 3.3.16, on se ramène à montrer que la suite

$$A(D[[\mathbf{t}]]) \xrightarrow{\mathrm{d}_A} \Omega^1(D[[\mathbf{t}]]) \otimes_C \mathrm{Lie}(A) \xrightarrow{\mathrm{d}_A} \Omega^2(D[[\mathbf{t}]]) \otimes_C \mathrm{Lie}(A)$$

est exacte, avec D/K est une extension algébriquement close de degré de transcendance indénombrable.

Considérons le C-schéma en vectoriels $\underline{\mathrm{Lie}}(A)$ associé au C-vectoriel $\mathrm{Lie}(A)$. On pose :

$$\begin{aligned} A(D[[\mathbf{t}]])^\circ &= \ker\{A(D[[\mathbf{t}]]) \to A(D)\} \\ \text{et} \quad \underline{\mathrm{Lie}}(A)(D[[\mathbf{t}]])^\circ &= \ker\{\underline{\mathrm{Lie}}(A)(D[[\mathbf{t}]]) \to \underline{\mathrm{Lie}}(A)(D)\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $\mathrm{d}_A(A(D[[\mathbf{t}]])^\circ) = \mathrm{d}_A(A(D[[\mathbf{t}]]))$ et de même pour A remplacé par $\underline{\mathrm{Lie}}(A)$. Ainsi, vu le lemme 5.7.5, il suffit de montrer que $\mathrm{d}_A(A(D[[\mathbf{t}]])^\circ) = \mathrm{d}_{\underline{\mathrm{Lie}}(A)}(\underline{\mathrm{Lie}}(A)(D[[\mathbf{t}]])^\circ)$.

Notons $A^{\hat{}}_e$ et $\underline{\mathrm{Lie}}(A)^{\hat{}}_0$ les complétions formelles de A et $\underline{\mathrm{Lie}}(A)$ en leurs éléments neutres e et 0. Ce sont des groupes formels et nous disposons d'un isomorphisme canonique (voir [**54**, page 37, §3])

$$\exp_A : \underline{\mathrm{Lie}}(A)^{\hat{}}_0 \xrightarrow{\sim} A^{\hat{}}_e$$

caractérisé par les deux propriétés suivantes : il est compatible aux lois de groupe formel et induit l'identité sur les espaces tangents en 0 et e. La composition avec $\exp_A$ induit un isomorphisme de groupes

$$\exp_A \circ (-) : \underline{\mathrm{Lie}}(A)(D[[\mathbf{t}]])^\circ \xrightarrow{\sim} A(D[[\mathbf{t}]])^\circ.$$

De plus, l'égalité $\mathrm{d}_{\underline{\mathrm{Lie}}(A)}(f) = \mathrm{d}_A(\exp_A(f))$ est satisfaite pour tout $f \in \underline{\mathrm{Lie}}(A)(D[[\mathbf{t}]])^\circ$. Ceci permet de conclure. ■

Corollaire 5.8.8. — *Soit A un C-schéma en groupes commutatif. Pour tout i* $\in \mathbb{Z}$*, il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K;A^\delta) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A). \tag{5.56}$$

Démonstration. — La preuve est la même que celle du corollaire 5.7.7. D'après le théorème 5.8.7, le morphisme de complexes de préfaisceaux $A^\delta[0] \hookrightarrow \Omega^\bullet(-;A)$ est une équivalence fttf-locale. On peut donc former le morphisme composé

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K;\Omega^\bullet(-;A)) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K;A^\delta).$$

Pour conclure, il est suffisant de montrer que $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(K;\Omega^j(-;A)) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K;\Omega^j(-;A))$ est un isomorphisme pour tout $i, j \geqslant 0$. Ceci découle du lemme 5.7.8. ■

Corollaire 5.8.9. — *Soit A un C-schéma en groupes commutatif. Notons V le C-schéma en vectoriels associé à* $\mathrm{Lie}(A)$*. Alors, il existe un isomorphisme canonique de faisceaux feuilletés*

$$\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(A/A^\delta) \simeq \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(V/V^\delta) = \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(\mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}/\mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}^\delta) \otimes_C \mathrm{Lie}(A).$$

(Ci-dessus, par abus de language, on a noté A, V, etc., au lieu de $(\mathrm{o}_\Delta)_*A$, $(\mathrm{o}_\Delta)_*V$, *etc.)*

Démonstration. — En effet, vu le théorème 5.8.7, les préfaisceaux A/A^δ et V/V^δ sont naturellement fttf-équivalents au préfaisceau $\ker\{\mathrm{d} : \Omega^1(-) \to \Omega^2(-)\} \otimes_C \mathrm{Lie}(A)$. ■

Pour une référence future, on note le lemme suivant.

Lemme 5.8.10. — *On suppose que K est algébriquement clos. Étant donnée une suite exacte courte de C-schémas en groupes commutatifs* $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$*, on a, pour chaque n* $\in \mathbb{N}$*, une suite exacte courte de groupes abéliens*

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^n_{\mathrm{fttf}}(K;A') \longrightarrow \mathrm{H}^n_{\mathrm{fttf}}(K;A) \longrightarrow \mathrm{H}^n_{\mathrm{fttf}}(K;A'') \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Pour $n = 0$, il s'agit de la suite

$$0 \longrightarrow A'(C) \longrightarrow A(C) \longrightarrow A''(C) \longrightarrow 0$$

qui est exacte car C est algébriquement clos. Pour $n \geqslant 2$, il s'agit de la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(K) \otimes_C \mathrm{Lie}(A') \longrightarrow \mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(K) \otimes_C \mathrm{Lie}(A) \longrightarrow \mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(K) \otimes_C \mathrm{Lie}(A'') \longrightarrow 0$$

qui est évidement exacte. Enfin, le cas $n = 1$, découle de la suite exacte longue de cohomologie fttf associée à la suite exacte courte de préfaisceaux

$$0 \longrightarrow A'^{\delta} \longrightarrow A^{\delta} \longrightarrow A''^{\delta} \longrightarrow 0.$$

Le lemme est démontré. ■

Remarque 5.8.11. — Soient A une C-variété abélienne et $A^{\vee}$ sa variété abélienne duale. On dispose d'un morphisme canonique

$$A \otimes A^{\vee} \longrightarrow \mathbf{G}_m[1], \tag{5.57}$$

dans la catégorie dérivée des faisceaux étales sur Sch/C qui correspond, par adjonction, au morphisme évident $A^{\vee} = \underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbf{G}_m) \longrightarrow \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathbf{G}_m[1])$. Le morphisme (5.57) induit un morphisme canonique

$$\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}(A^{\delta}) \otimes \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}((A^{\vee})^{\delta}) \longrightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}((\mathbf{G}_m)^{\delta})[1] \tag{5.58}$$

dans la catégorie dérivée des faisceaux sur $(\mathrm{Fttf}^{\Delta}/K, \mathrm{fttf})$. Il s'ensuit des accouplements naturels

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{fttf}}(K; A^{\delta}) \otimes \mathrm{H}^j_{\mathrm{fttf}}(K; (A^{\vee})^{\delta}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+j+1}_{\mathrm{fttf}}(K; (\mathbf{G}_m)^{\delta}). \tag{5.59}$$

Lorsque $i, j \geqslant 2$, grâce au lemme 5.8.6(b), les accouplements (5.59) tensorisés par $\mathbb{Q}$, se réécrivent de la manière suivante :

$$(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K) \otimes_C \mathrm{Lie}(A)) \otimes (\mathrm{H}^j_{\mathrm{dR}}(K) \otimes_C \mathrm{Lie}(A)^{\vee}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+j+1}_{\mathrm{dR}}(K). \tag{5.60}$$

Malheureusement, pour le moment, nous n'avons rien d'intéressant à dire concernant les accouplements (5.60). Contentons-nous de remarquer que certaines attentes en théorie des motifs (voir notamment [**15**, Conjecture 3.20] qui est une reformulation de [**12**, §2.4, Conjecture A]), indiquent que les accouplements (5.60) seraient identiquement nuls si le Δ-corps K est géométrique (au sens de la définition 5.7.15(i)). □

5.9. Quelques constructions universelles sur les variétés abéliennes. —

Nous présentons ici quelques constructions « universelles » qui interviendront dans les sous-sections 5.10 et 5.11 où nous terminerons notre étude des types d'homotopie feuilletée des Δ-corps. Certaines de ces constructions apparaissent aussi dans un ancien article de Serre [**65**] et dans un article récent de Brion [**27**] ; voir notamment la remarque 5.9.6 ci-dessous. Tout au long de la présente sous-section, on fixe un corps k de caractéristique nulle.

Notation 5.9.1. — Soit A un k-schéma en groupes commutatif. On note $\mathcal{T}(A)$ le pro-k-schéma en groupes défini comme suit. Il est indexé par l'ensemble $\mathbb{N}^{\times} = \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ ordonné par l'opposée de la relation de divisibilité. Pour $m \in \mathbb{N}^{\times}$, il est donné par une copie de A et, si n est divisible par m, le morphisme de transition de la n-ième vers la m-ième copie est la multiplication par n/m. Lorsque A est connexe, on peut penser au pro-k-schéma $\mathcal{T}(A)$ comme étant le revêtement universel pro-fini de A ; voir [**65**, §6.5, Proposition 9] et [**27**, Lemma 3.4]. □

Construction 5.9.2. — Soit A une k-variété abélienne. On définit une catégorie $\mathcal{E}_A$ de la manière suivante. Les objets de $\mathcal{E}_A$ sont des couples (G, ϕ) où G est un k-schéma en groupes commutatif et connexe, et $\phi \in \mathrm{Hom}(A, \overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}(G)) \otimes \mathbb{Q}$ un morphisme de k-variétés abéliennes à isogénie près. Une flèche u : $(G, \phi) \longrightarrow (G', \phi')$ est un morphisme de k-schémas en groupes $u : G \longrightarrow G'$ tel que $\phi' = \overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}(u) \circ \phi$. (Autrement dit, $\mathcal{E}_A$ est la catégorie « comma » $A\backslash(-)$ associée au foncteur $\overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}$ de la catégorie des k-schémas en groupes commutatifs et connexes dans celle des k-variétés abéliennes à isogénie près.) □

Proposition 5.9.3. — *La catégorie $\mathcal{E}_A$ est cofiltrante. En particulier, le foncteur qui à $(G, \phi) \in \mathcal{E}_A$ associe le k-schéma en groupes G, définit un pro-k-schéma en groupes commutatif que l'on notera $\mathcal{U}(A)$. De plus, la pro-k-variété abélienne $\overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}(\mathcal{U}(A))$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{T}(A)$.*

Démonstration. — Notons $\mathcal{E}'_A$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_A$ formée des couples (G, ϕ) tels que G est anti-affine et ϕ est l'inverse d'une isogénie $\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(G) \twoheadrightarrow A$. Nous allons montrer que $\mathcal{E}'_A$ est équivalente à un ensemble ordonné cofiltrant et que l'inclusion $\mathcal{E}'_A \hookrightarrow \mathcal{E}_A$ est cofinale.

Soient (G, ϕ) et (G', ϕ') deux objets de $\mathcal{E}'_A$. Montrons qu'il y a au plus une flèche $u : (G, \phi) \longrightarrow (G', \phi')$. Si v est une autre flèche, alors $\epsilon = v - u$ est un morphisme de G dans G' tel que $\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(\epsilon) = 0$. (En effet, un morphisme de k-variétés abéliennes qui est de torsion est nécessairement nul.) L'image du morphisme ϵ est donc contenue dans le sous-groupe $N' = \ker\{G' \to \overline{\mathrm{Alb}}^\circ(G')\}$. Puisque N' est affine et que G est anti-affine, tout morphisme $G \longrightarrow N'$ est nécessairement nul, ce qui prouve que $\epsilon = 0$.

Montrons à présent que l'inclusion $\mathcal{E}'_A \hookrightarrow \mathcal{E}_A$ possède un adjoint à droite. Soit (G, ϕ) un objet de $\mathcal{E}_A$. Notons $B \subset A \times_k \overline{\mathrm{Alb}}^\circ(G)$ le graphe de ϕ. (Ceci est bien défini : il suffit de prendre l'image du morphisme $(n \cdot \mathrm{id}, n \cdot \phi) : A \longrightarrow A \times_k \overline{\mathrm{Alb}}^\circ(G)$ pour $n \in \mathbb{N}^\times$ suffisamment divisible.) La projection de B sur A est une isogénie et on note $\phi_1 : A \xrightarrow{\sim} B$ son inverse (dans la catégorie des k-variétés abéliennes à isogénie près). On pose $G_1 = G \times_{\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(G)} B$: c'est un k-schéma en groupes tel que $\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(G_1) = B$. On dispose donc d'un objet $(G_1, \phi_1) \in \mathcal{E}_A$ et d'une flèche évidente $(G_1, \phi_1) \longrightarrow (G, \phi)$ dans $\mathcal{E}_A$. Cette flèche est universelle parmi les flèches de source un objet $(H, \psi) \in \mathcal{E}_A$ avec ψ l'inverse d'une isogénie $\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(H) \twoheadrightarrow A$. Notons $Q_1 = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(G_1))$: c'est le quotient maximal de G_1 qui soit un k-schéma en groupes affine. Le noyau $G_2 = \ker\{G_1 \to Q_1\}$ est un sous-groupe anti-affine de G_1 tel que $\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(G_2) = \overline{\mathrm{Alb}}^\circ(G_1) = B$. Le couple (G_2, ϕ_1) est donc un objet de $\mathcal{E}'_A$ et la flèche évidente $(G_2, \phi_1) \longrightarrow (G, \phi)$ est universelle parmi les flèches de source un objet de $\mathcal{E}'_A$.

L'existence de l'adjoint à droite établie ci-dessus entraîne que l'inclusion $\mathcal{E}'_A \hookrightarrow \mathcal{E}_A$ est cofinale. Elle entraîne aussi que l'ensemble ordonné $\mathcal{E}'_A$ est cofiltrant. En effet, si (G, ϕ) et (G', ϕ') sont deux objets de $\mathcal{E}'_A$, l'image de $(G \times_k G', (\phi, \phi'))$ par l'adjoint à droite de l'inclusion $\mathcal{E}'_A \hookrightarrow \mathcal{E}_A$ est un objet de $\mathcal{E}'_A$ qui s'envoie vers (G, ϕ) et (G', ϕ').

Pour terminer, il reste à voir que $\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(\mathcal{U}(A))$ est naturellement isomorphe à $\mathcal{T}(A)$. Appelons $\overline{\mathcal{E}}'_A$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}'_A$ formé des couples (A', ρ) tels que A' est une k-variété abélienne (et, rappelons-le, ρ l'inverse d'une isogénie $A' \twoheadrightarrow A$). Si $\overline{\mathcal{U}}'(A)$ désigne le pro-k-schéma en groupes donné par la restriction de $\mathcal{U}(A)$ à $\overline{\mathcal{E}}'_A$, on dispose d'un morphisme évident $\mathcal{U}(A) \longrightarrow \overline{\mathcal{U}}'(A)$ qui induit un isomorphisme de pro-objets entre $\overline{\mathcal{U}}'(A)$ et $\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(\mathcal{U}(A))$. (On utilise ici la cofinalité de l'inclusion $\mathcal{E}'_A \hookrightarrow \mathcal{E}_A$.) Par ailleurs, le sous-ensemble de $\overline{\mathcal{E}}'_A$ formé des couples $(A, n^{-1} \cdot \mathrm{id}_A)$, avec $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$, est cofinal. Ceci permet de conclure. ■

Définition 5.9.4. — *Soit A une k-variété abélienne. Le pro-schéma en groupes $\mathcal{U}(A)$ est appelé l'*extension anti-affine universelle *de A. On dispose d'un morphisme évident $\mathrm{p}_A : \mathcal{U}(A) \longrightarrow A$ dont le noyau est un pro-schéma en groupes affine. D'après la proposition 5.9.3, ce morphisme se factorise par $\mathcal{T}(A)$.*

Remarques 5.9.5. —

(a) L'association $A \rightsquigarrow \mathcal{U}(A)$ est naturellement un foncteur de la catégorie des k-variétés abéliennes à isogénie prés dans celle des pro-k-schémas en groupes commutatifs. Il en est de même de l'association $A \rightsquigarrow \mathcal{T}(A)$; ceci est une conséquence de la dernière assertion de la proposition 5.9.3, mais on peut aussi le voir directement.

(b) Par construction, le pro-k-schéma en groupes commutatif $\mathcal{U}(A)$ coreprésente le foncteur covariant $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathrm{Alb}}^\circ(-)) \otimes \mathbb{Q}$. Ceci caractérise $\mathcal{U}(A)$ à un unique isomorphisme près et montre que l'association $A \rightsquigarrow \mathcal{U}(A)$ est un foncteur additif de la catégorie des k-variétés abéliennes à isogénie près dans celle des pro-k-schémas en groupes commutatifs. □

Remarque 5.9.6. — L'extension anti-affine universelle $\mathcal{U}(A)$ d'une k-variété abélienne A n'est autre que son enveloppe projective (prise dans la catégorie abélienne des groupes pro-algébriques commutatifs). Ceci découle aussitôt du lemme 5.9.7 ci-dessous. L'enveloppe projective d'une k-variété abélienne a été considérée par Serre et Brion [**65**] et [**27**] qui en donnent une description explicite ; voir [**65**, §9.2, Proposition 3] et [**27**, Theorem 3.10]. □

Lemme 5.9.7. — *Soient A une k-variété abélienne et U un pro-k-schéma en groupes commutatif muni d'un morphisme $p : U \longrightarrow A$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Le couple (U, p) est isomorphe à $(\mathcal{U}(A), \mathrm{p}_A)$.

(ii) U est anti-affine (i.e., isomorphe à un pro-objet de la catégorie des k-schémas en groupes anti-affines), $\overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}(p)$ est un isomorphisme à isogénie près, et les groupes $\mathrm{Ext}^1(U, E)$ sont nuls pour tous les k-schémas en groupes affines commutatifs E.

De plus, si k est algébriquement clos, on peut se restreindre dans (ii) à $E = \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}$ ou $E = \mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}$.

Démonstration. — Pour l'implication (i)⇒(ii), il s'agit de montrer que le couple $(\mathcal{U}(A), \phi_A)$ satisfait aux propriétés dans (ii). L'identification à isogénie près de $\overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}(\mathcal{U}(A))$ et A découle de la dernière assertion dans la proposition 5.9.3. De même, la propriété que $\mathcal{U}(A)$ est anti-affine découle de la preuve de ladite proposition. Il reste donc à voir que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}(A), E) = 0$ pour tout k-schéma en groupes commutatif E. Supposons donnée une extension

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}(A) \longrightarrow 0 \tag{5.61}$$

et appelons $\mathcal{V}'$ la composante connexe de l'élément neutre de $\mathcal{V}$. Alors, on a $\overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}(\mathcal{V}') = \overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}(\mathcal{U}(A))$. Il s'ensuit que $\mathcal{V}'$ définit naturellement un pro-objet de $\mathcal{E}_A$. Il existe donc un unique morphisme de pro-schémas en groupes $\mathcal{U}(A) \longrightarrow \mathcal{V}'$ induisant l'identité après application de $\overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}(-)$. Ceci montre que la suite exacte (5.61) est scindée.

Réciproquement, soit (U, p) comme dans (ii). Alors, U détermine un pro-objet de $\mathcal{E}_A$, ce qui fournit un morphisme $u : \mathcal{U}(A) \longrightarrow U$ tel que $p \circ u = \mathrm{p}_A$. On doit montrer que u est inversible. Appelons Q le conoyau de u. Clairement, on a $\overline{\mathrm{Alb}}^{\circ}(Q) = 0$. Il s'ensuit que le pro-k-schéma en groupes Q est affine. Puisque U est anti-affine, le morphisme $U \twoheadrightarrow Q$ est nécessairement nul, ce qui montre que Q est nul. Autrement dit, u est surjectif. D'autre part, appelons N le noyau de u. Alors, N est un pro-schéma en groupes commutatif et affine. Supposons par l'absurde qu'il est non nul et fixons un morphisme surjectif $N \twoheadrightarrow E$ avec E non nul de type fini. Si N_0 désigne le noyau de ce morphisme, alors $\mathcal{U}(A)/N_0$ est une extension de U par E. Cette extension n'est pas triviale car E est affine alors que $\mathcal{U}(A)/N_0$ est anti-affine. Il s'ensuit que $\mathrm{Ext}^1(U, E) \neq 0$, ce qui contredit (ii).

Il reste à justifier la dernière assertion concernant le cas où k est algébriquement clos. On remarque pour cela que l'annulation de $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})$ entraîne l'annulation de $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{Z}/\ell)$, pour tout entier non nul ℓ, car ce dernier s'identifie, grâce à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell \longrightarrow \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}} \xrightarrow{(-)^{\ell}} \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}} \longrightarrow 0, \tag{5.62}$$

au sous-groupe de ℓ-torsion de $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})$. ∎

Corollaire 5.9.8. — *Soient A une k-variété abélienne et l/k une extension algébrique. Alors, il existe un isomorphisme canonique de pro-l-schémas en groupes*

$$\mathcal{U}(A \otimes_k l) \simeq \mathcal{U}(A) \otimes_k l.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\mathcal{U}(A) \otimes_k l$ vérifie les propriétés du lemme 5.9.7(ii) (avec l au lieu de k). Seule l'annulation de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}(A) \otimes_k l, F)$, pour F un l-schéma en groupes commutatif affine, nécessite une justification. Pour ce faire, on se ramène au cas où l/k est finie et on invoque l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}(A) \otimes_k l, F) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}(A), \mathrm{Res}_{l/k} F)$, avec $\mathrm{Res}_{l/k} F$ la restriction à la Weil de F. ∎

Corollaire 5.9.9. — *Soient A une k-variété abélienne et V un k-schéma en vectoriels. Alors, on a un quasi-isomorphisme de complexes de k-schémas en vectoriels*

$$\mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\text{ét}}(\mathcal{U}(A); V) \simeq V[0].$$

Démonstration. — Ceci découle du lemme 5.9.7 et de la proposition 5.6.11. ∎

Corollaire 5.9.10. — *Soit A une k-variété abélienne. Alors, on a des isomorphismes canoniques de $\mathbb{Q}$-réseaux*

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{U}(A)) \simeq \mathrm{NS}^1(\mathcal{U}(A)) \simeq \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A).$$

Démonstration. — Grâce au corollaire 5.9.8, on peut supposer k algébriquement clos. On a une suite exacte courte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}(A), \mathbf{G}_m) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{U}(A)) \longrightarrow \mathrm{NS}^1(\mathcal{U}(A)) \longrightarrow 0.$$

D'après le lemme 5.9.7, on a $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}(A), \mathbf{G}_m) = 0$, ce qui fournit le premier isomorphisme. Par ailleurs, on a la chaîne d'isomorphismes

$$\mathrm{NS}^1(\mathcal{U}(A)) \simeq \mathrm{NS}^1(\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(\mathcal{U}(A))) \simeq \mathrm{NS}^1(\mathcal{T}(A)).$$

De plus, $\mathrm{NS}^1(\mathcal{T}(A)) = \mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}^\times} \mathrm{NS}^1(A)$ où le morphisme de transition, pour n divisible par m, est la multiplication par $(n/m)^2$. Il s'ensuit que $\mathrm{NS}^1(\mathcal{T}(A)) \simeq \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A)$ comme souhaité. ■

Construction 5.9.11. — Soit A une k-variété abélienne. Étant donné un réseau $L \subset \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A)$, on choisit un $L^\vee \otimes \mathbf{G}_m$-torseur $\mathcal{V}_L(A)$ sur $\mathcal{U}(A)$ muni d'une trivialisation $\mathcal{V}_L(A) \times_{\mathcal{U}(A)} e \simeq L^\vee \otimes \mathbf{G}_m$ au-dessus de l'élément neutre $e \in \mathcal{U}(A)$ et ayant pour classe caractéristique l'inclusion $L \hookrightarrow \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A)$ modulo les identifications suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathcal{U}(A); L^\vee \otimes \mathbf{G}_m) &\simeq \Gamma(k; L^\vee \otimes \mathrm{Pic}(\mathcal{U}(A))) \\ &\simeq \Gamma(k; L^\vee \otimes \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A)) \simeq \mathrm{Hom}(L, \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A)). \end{aligned}$$

Étant donnée une inclusion $L \subset L'$ de réseaux dans $\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A)$, il existe un unique morphisme de $\mathcal{U}(A)$-schémas $\mathcal{V}_{L'}(A) \longrightarrow \mathcal{V}_L(A)$ qui soit $L'^\vee \otimes \mathbf{G}_m$-équivariant et qui soit compatible aux trivialisations, i.e., tel que le carré

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_{L'}(A) \times_{\mathcal{U}(A)} e \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & L'^\vee \otimes \mathbf{G}_m \arrow[d] \\ \mathcal{V}_L(A) \times_{\mathcal{U}(A)} e \arrow[r, "\sim"] & L^\vee \otimes \mathbf{G}_m \end{tikzcd}$$

est commutatif. (L'unicité découle du fait que le pro-k-schéma en groupes $\mathcal{U}(A)$ est anti-affine.) On obtient ainsi un pro-$\mathcal{U}(A)$-schéma $\mathcal{V}(A) = (\mathcal{V}_L(A))_{L \subset \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A)}$ qui est un torseur sous le pro-k-tore

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A), \mathbf{G}_m) = (L^\vee \otimes \mathbf{G}_m)_{L \subset \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A)}$$

et qui est muni d'une trivialisation au-dessus de e.

L'association $A \rightsquigarrow \mathcal{V}(A)$ s'étend naturellement en un foncteur de la catégorie des k-variétés abéliennes à isogénie près dans celles des pro-k-schémas. Étant donné un morphisme de variétés abéliennes $A \longrightarrow B$, le morphisme $\mathcal{V}(A) \longrightarrow \mathcal{V}(B)$ est caractérisé par les propriétés suivantes : il est $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A), \mathbf{G}_m)$-équivariant et il rend commutatif les carrés suivants

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{V}(B) \arrow[d] \\ \mathcal{U}(A) \arrow[r] & \mathcal{U}(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{V}(A) \times_{\mathcal{U}(A)} e \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A), \mathbf{G}_m) \arrow[d] \\ \mathcal{V}(B) \times_{\mathcal{U}(B)} e \arrow[r, "\sim"] & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(B), \mathbf{G}_m). \end{tikzcd}$$

(L'unicité d'un morphisme $\mathcal{V}(A) \longrightarrow \mathcal{V}(B)$ vérifiant les conditions ci-dessus découle du fait que le pro-k-schéma en groupes $\mathcal{U}(B)$ est anti-affine.) □

Proposition 5.9.12. — *Soient A une k-variété abélienne et E un k-schéma en groupes commutatif. On note E' la composante connexe de l'élément neutre de E et on suppose que E' est une variété semi-abélienne. Alors,* $\mathrm{H}^0_{\text{ét}}(\mathcal{V}(A); E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(A, \overline{\mathrm{Alb}}^\circ(E')) \oplus E(k)$ *et les morphismes* $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(k; E) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathcal{V}(A); E)$ *sont des isomorphismes pour tout $i \geqslant 1$.*

Démonstration. — Grâce à la suite spectrale de Hochschild–Serre, on peut supposer que k est algébriquement clos. Le k-schéma en groupes E est une extension successive de schémas en groupes finis, de tores et de variétés abéliennes, et on peut traiter chaque type séparément. (Utiliser que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(A, \overline{\mathrm{Alb}}^\circ(-))$ est exact.) On divise la preuve en deux étapes.

Étape 1. — On traite d'abord le cas où E est fini. Pour ce faire, on peut supposer que $E = \mathbb{Z}/\ell$ avec ℓ un entier non nul ; on doit montrer que $\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathcal{V}(A);\mathbb{Z}/\ell) \simeq \mathbb{Z}/\ell[0]$. Notons $p : \mathcal{V}(A) \longrightarrow \mathcal{U}(A)$, $q : \mathcal{U}(A) \longrightarrow \mathcal{T}(A)$ et $r : \mathcal{T}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ les morphismes évidents. Il suffira de montrer que $\mathrm{R}p_*\mathbb{Z}/\ell \simeq \mathbb{Z}/\ell$, $\mathrm{R}q_*\mathbb{Z}/\ell \simeq \mathbb{Z}/\ell$ et $\mathrm{R}r_*\mathbb{Z}/\ell \simeq \mathbb{Z}/\ell$. (Tous les foncteurs sont dérivés relativement à la topologie étale.) Or, p et q sont des torseurs sous des pro-tores, et il suffit donc de montrer que les deux premières identifications sont vraies fibres par fibres. On se ramène ainsi à montrer les annulations $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathcal{T}(\mathbf{G}_m),\mathbb{Z}/\ell) = 0$ et $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathcal{T}(A),\mathbb{Z}/\ell) = 0$ pour $i \geqslant 1$. Ceci est immédiat puisque les multiplications par n sur $\mathbf{G}_m$ et A induisent les multiplications par n^i sur les groupes de cohomologie étale $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathbf{G}_m,\mathbb{Z}/\ell)$ et $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(A,\mathbb{Z}/\ell)$. (Bien entendu, on utilise ici l'hypothèse que k est algébriquement clos.)

Étape 2. — Supposons d'abord que $E = \mathbf{G}_m$. On doit montrer que $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathcal{V}(A);\mathbf{G}_m) = 0$ pour $i \geqslant 1$. Lorsque $i = 1$, il s'agit d'une conséquence de la construction 5.9.11. En effet, on a $\mathrm{Pic}(\mathcal{V}_L(A)) \simeq \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A)/L$, pour tout $L \subset \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A)$. Lorsque $i \geqslant 2$, on sait que $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathcal{V}(A);\mathbf{G}_m)$ est de torsion car $\mathcal{V}(A)$ est pro-lisse. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathcal{V}(A);\mathbb{Z}/\ell) = 0$ pour tout entier $\ell \neq 0$. (Utiliser la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte (5.62).) L'étape 1 permet donc de conclure.

Supposons ensuite que E est une k-variété abélienne et montrons que $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathcal{V}(A);E) = 0$ pour $i \geqslant 1$. Puisque $\mathcal{V}(A)$ est pro-lisse, ces groupes sont de torsion. En utilisant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/\ell)^{2\dim(E)} \longrightarrow E \xrightarrow{\ell\cdot(-)} E \longrightarrow 0,$$

on se ramène encore une fois à montrer que $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathcal{V}(A);\mathbb{Z}/\ell) = 0$, pour $i \geqslant 1$. De nouveau, l'étape 1 permet de conclure. ■

Théorème 5.9.13. — *Soit $A_\bullet$ une k-variété abélienne simpliciale telle que* $\mathrm{H}_0(A) = 0$. *Considérons le pro-k-schéma simplicial $\mathcal{V}(A_\bullet)$ obtenu en appliquant la construction 5.9.11 terme à terme à $A_\bullet$. On a les propriétés suivante.*

(a) Supposons que k est algébriquement clos et soit E un k-schéma en groupes commutatif connexe. Alors, on a un quasi-isomorphisme naturel

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathcal{V}(A_\bullet);E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(A_\bullet,\overline{\mathrm{Alb}}^\circ(E)) \oplus E(k)[0].$$

(b) Il existe un quasi-isomorphisme de complexes de k-schémas en vectoriels $\mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\text{ét}}(\mathcal{V}(A_\bullet);\mathbf{G}_a) \simeq \mathbf{G}_a[0]$.

Démonstration. — Lorsque E est une k-variété semi-abélienne, la propriété (a) est une conséquence immédiate de la proposition 5.9.12. Ceci étant, le cas général de (a) découle de la propriété (b). Autrement dit, il reste à établir (b) pour conclure. Grâce à la proposition 5.6.8, le morphisme

$$\mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\text{ét}}(\mathcal{U}(A_\bullet);\mathbf{G}_a) \longrightarrow \mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\text{ét}}(\mathcal{V}(A_\bullet);\mathbf{G}_a)$$

est un quasi-isomorphisme. (Pour pouvoir appliquer ladite proposition, il faut d'abord s'assurer que le pro-tore simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A_\bullet),\mathbf{G}_m)$ n'a pas d'homomologie en degré zéro. Ceci découle de l'hypothèse $\mathrm{H}_0(A) = 0$ qui entraîne que le complexe $\mathrm{Tot}\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(A_\bullet,A^\vee_\bullet)$ n'a pas de cohomologie en degré zéro.) Par ailleurs, le corollaire 5.9.9 fournit un quasi-isomorphisme $\mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\text{ét}}(\mathcal{U}(A_\bullet);\mathbf{G}_a) \simeq \mathbf{G}_a[0]$. ■

Le foncteur $A \rightsquigarrow \mathcal{V}(A)$ ne commute pas au produit direct. Toutefois, on a un morphisme binaturel

$$\mathcal{V}(A \times_k B) \longrightarrow \mathcal{V}(A) \times_k \mathcal{V}(B) \tag{5.63}$$

qui est inversible dans certains cas, comme le montre le résultat suivant.

Lemme 5.9.14. — *Soient A et B des k-variétés abéliennes telles que* $\mathrm{Hom}(A,B) = 0$. *(Autrement dit, aucun facteur simple de A n'est isomorphe à isogénie près à un facteur simple de B.) Alors, le morphisme* (5.63) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que le morphisme évident

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{U}(A)) \oplus \mathrm{Pic}(\mathcal{U}(B)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{U}(A) \times_k \mathcal{U}(B)) = \mathrm{Pic}(\mathcal{U}(A \times_k B))$$

est inversible. Vu le corollaire 5.9.10, il revient au même de montrer que le morphisme

$$\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A) \oplus \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(B) \longrightarrow \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A \oplus B)$$

est inversible. Étant donné que $\mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}(A) = \mathrm{Hom}^+_{\mathbb{Q}}(A, A^\vee)$ et de même pour B (voir la notation 5.5.11), il est suffisant de montrer que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(A, A^\vee) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(B, B^\vee) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(A \oplus B, A^\vee \oplus B^\vee)$$

est inversible. Ceci est clair puisque la condition $\mathrm{Hom}(A, B) = 0$ entraîne que les groupes $\mathrm{Hom}(A, B^\vee)$, $\mathrm{Hom}(A^\vee, B)$ et $\mathrm{Hom}(A^\vee, B^\vee)$ sont également nuls. ■

Notation 5.9.15. — Soit A une k-variété semi-abélienne et soit $R \subset \mathrm{End}(A)$ un sous-anneau. Soit M un R-module à gauche de type fini. On note $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, A)$ le k-schéma en groupes commutatif qui représente le préfaisceau qui à un k-schéma X associe le groupe $\mathrm{Hom}_R(M, A(X))$ des applications R-linéaires de M dans $A(X)$. Ce préfaisceau est bien représentable puisqu'il s'écrit comme l'égalisateur d'une paire de flèches $\underline{\mathrm{Hom}}(M, A) \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}(R \otimes_{\mathbb{Z}} M, A)$. Lorsque le R-module M n'est plus supposé de type fini, $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, A)$ désignera le pro-k-schéma en groupes $(\underline{\mathrm{Hom}}_R(L, A))_{L \subset M}$ où L parcourt l'ensemble filtrant des sous-R-modules de type fini de M. □

Lemme 5.9.16. — *Supposons que A est une k-variété abélienne ou un k-tore. Supposons aussi que le sous-anneau $R \subset \mathrm{End}(A)$ est de rang maximal, i.e., $R \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$. Soit M un R-module à gauche (non nécessairement de type fini). Alors le morphisme évident*

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, A), A) \tag{5.64}$$

est inversible à torsion près (i.e., son noyau et conoyau sont de torsion). En particulier, si M est uniquement divisible en tant que groupe abélien, le morphisme (5.64) *est inversible.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où M est de type fini. Donnons-nous une présentation

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

du R-module M. Nous en déduisons une suite exacte de k-schémas en groupes commutatifs

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(M, A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(R^n, A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(R^m, A).$$

(Vérifier ceci sur les points !) Puisque la catégorie des k-variétés abéliennes (resp. des k-tores) à isogénie près est semi-simple, il s'ensuit que la suite

$$\mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Hom}}_R(R^m, A), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Hom}}_R(R^n, A), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, A), A) \longrightarrow 0$$

est exacte à torsion près. Il est donc suffisant de traiter le cas de $M = R^s$, avec $s \in \mathbb{N}$. Le résultat recherché est clair dans ce cas puisque $\underline{\mathrm{Hom}}_R(R^s, A) \simeq A^{\oplus s}$. ■

Situation 5.9.17. — Dans le reste de la sous-section, on fixe un foncteur exact L de la catégorie des k-schémas en groupes commutatifs à isogénie près dans celle des $\mathbb{Q}$-vectoriels. L'exemple qui nous intéresse le plus, est celui où $\mathrm{L}(-) = \mathrm{Lie}(-)$. Étant donné un k-schéma en groupes commutatif A, on s'intéresse au pro-k-schéma en groupes

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{L}(A), A). \tag{5.65}$$

On verra que si A est suffisamment « grand », le pro-k-schéma en groupes (5.65) admet une description simple qui dépend peu de A. (Voir le théorème 5.9.24 ci-dessous pour un énoncé précis.) □

Ci-dessous, on emploie l'expression « morphisme $\mathrm{L}(A) \longrightarrow A$ » pour signifier un morphisme de groupes $\mathrm{L}(A) \longrightarrow A(X)$, avec X un k-schéma.

Lemme 5.9.18. — *Soit $A \hookrightarrow D$ une injection scindée de k-schémas en groupes commutatifs. Il existe alors un morphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(D)}(\mathrm{L}(D), D) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{L}(A), A). \tag{5.66}$$

Démonstration. — Choisissons une décomposition $D = A \oplus B$ (i.e., un supplémentaire $B \subset D$ de A). Alors, tout morphisme $\mathrm{End}(D)$-équivariant $f : \mathrm{L}(D) \longrightarrow D$ est la somme directe d'un morphisme $\mathrm{End}(A)$-équivariant $f|_{\mathrm{L}(A)} : \mathrm{L}(A) \longrightarrow A$ et d'un morphisme $\mathrm{End}(B)$-équivariant $f|_{\mathrm{L}(B)} : \mathrm{L}(B) \longrightarrow B$. Ceci fournit le morphisme (5.66). Il reste à voir que $f|_{\mathrm{L}(A)}$ ne dépend pas de la décomposition choisie. Or, toute autre décomposition de D s'obtient de celle choisie par un automorphisme de D qui est l'identité sur A. On utilise la commutation de f à cet automorphisme pour conclure. ■

Lemme 5.9.19. — *Soient A et B des k-schémas en groupes commutatifs.*

(i) Le morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A\oplus B)}(\mathrm{L}(A\oplus B), A\oplus B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{L}(A), A) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(B)}(\mathrm{L}(B), B), \tag{5.67}$$

déduit du lemme 5.9.18, est injectif.

(ii) On suppose qu'il existe une surjection $A^{\oplus n} \twoheadrightarrow B$, avec $n \in \mathbb{N}$. Alors, le morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A\oplus B)}(\mathrm{L}(A\oplus B), A\oplus B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{L}(A), A) \tag{5.68}$$

est injectif.

Démonstration. — La partie (a) de l'énoncé est claire : avec les notations de la preuve du lemme 5.9.18, le morphisme f est nul si et seulement si $f|_{\mathrm{L}(A)}$ et $f|_{\mathrm{L}(B)}$ le sont.

On passe à la partie (b). Par récurrence, on peut supposer que $n = 1$. On se donne un morphisme $\mathrm{End}(A \oplus B)$-linéaire $f : \mathrm{L}(A \oplus B) \longrightarrow A \oplus B$. Dire que f est dans le noyau de (5.68) revient à dire que $f|_{\mathrm{L}(A)}$ est nulle. On cherche à montrer que $f|_{\mathrm{L}(B)}$ est nul. Fixons une surjection $s : A \twoheadrightarrow B$ et appelons $\widetilde{s} \in \mathrm{End}(A \oplus B)$ l'endomorphisme donné par la matrice

$$\widetilde{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix}.$$

La commutation $f \circ \mathrm{L}(\widetilde{s}) = \widetilde{s} \circ f$ entraîne que $f|_{\mathrm{L}(B)} \circ \mathrm{L}(s) = 0$, ce qui permet de conclure. ■

Lemme 5.9.20. — *Soient A et B des k-schémas en groupes commutatifs et connexes. On suppose que A et B sont isomorphes à isogénie près. Alors, il existe un isomorphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{L}(A), A) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(B)}(\mathrm{L}(B), B). \tag{5.69}$$

Démonstration. — On fixe une isogénie $A \twoheadrightarrow B$; elle induit un isomorphisme $\mathrm{L}(A) \simeq \mathrm{L}(B)$. Soit $f : \mathrm{L}(A) \longrightarrow A$ un morphisme $\mathrm{End}(A)$-linéaire. On associe à f un morphisme $\mathrm{End}(B)$-linéaire en prenant le morphisme composé

$$g : \mathrm{L}(B) \simeq \mathrm{L}(A) \xrightarrow{f} A \twoheadrightarrow B.$$

On vérifie aussitôt que g ne dépend pas du choix de l'isogénie. Ceci fournit le morphisme (5.69) et, en échangeant les rôles de A et B, on obtient aussi le morphisme inverse. ■

Notation 5.9.21. — On pose $L_a = \mathrm{L}(\mathbf{G}_{\boldsymbol{a}})$ et $L_m = \mathrm{L}(\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})$. Clairement, L_a est un k-vectoriel. □

Lemme 5.9.22. — *On suppose que k est algébriquement clos. Soit A un k-schéma en groupes affine, commutatif et connexe, contenant une copie de $\mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}$ et de $\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}$. Alors, il existe un isomorphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{L}(A), A) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_k(L_a, \mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}(L_m, \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}).$$

Démonstration. — On peut écrire $A = V \oplus T$ avec V un k-vectoriel et T un k-tore. Par hypothèse, V et T sont non nuls. Cette décomposition étant canonique, on a $\mathrm{End}(A) = \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(T)$. Il s'ensuit que

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{L}(A), A) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(V)}(\mathrm{L}(V), V) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(T)}(\mathrm{L}(T), T).$$

Nous allons calculer les deux facteurs indépendamment.

Le cas de V. — On a $\mathrm{L}(V) = V \otimes_k L_a$. Il s'ensuit que

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(V)}(\mathrm{L}(V), V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{End}(V)}(V, V) \otimes_k \underline{\mathrm{Hom}}_k(L_a, \mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}).$$

Le résultat découle du fait que le centre de la k-algèbre $\mathrm{End}(V)$ est la droite $k \cdot \mathrm{id}_V$.

Le cas de T. — Soit $R = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}, T)$ le $\mathbb{Z}$-module libre des cocaractères de T. On a alors $T = R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}$ et $\mathrm{L}(T) = R \otimes_{\mathbb{Z}} L_m$. Il s'ensuit que

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(T)}(\mathrm{L}(T), T) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{End}(R)}(R, R) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(L_m, \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}).$$

Le résultat découle du fait que le centre de la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathrm{End}(R)$ est le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \cdot \mathrm{id}_R$. ∎

Proposition 5.9.23. — *On suppose que k est algébriquement clos. Soit A un k-schéma en groupes commutatif et connexe, contenant une copie de $\mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}$ et de $\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}$ comme facteur direct. On pose $\overline{A} = \overline{\mathrm{Alb}}^\circ(A)$. Alors, il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{L}(\overline{A}), A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{L}(A), A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_k(L_a, \mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}(L_m, \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}).$$

Démonstration. — Par hypothèse, on dispose d'une injection scindée $V_0 \oplus T_0 \hookrightarrow A$ avec V_0 un k-vectoriel non nul et T_0 un k-tore non nul. D'après les lemmes 5.9.18 et 5.9.22, cette injection fournit un morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{L}(A), A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_k(L_a, \mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}(L_m, \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}).$$

Considérons la suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow V \oplus T \longrightarrow A \longrightarrow \overline{A} \longrightarrow 0$$

avec $\overline{A} = \overline{\mathrm{Alb}}^\circ(A)$, V un k-vectoriel et T un k-tore. Soit $f : \mathrm{L}(A) \longrightarrow A$ un morphisme $\mathrm{End}(A)$-linéaire, qui s'annule sur $\mathrm{L}(V_0) \oplus \mathrm{L}(T_0)$. Il s'agit de montrer que f s'annule aussi sur $\mathrm{L}(V) \oplus \mathrm{L}(T)$. Or, le $\mathbb{Q}$-vectoriel $\mathrm{L}(V) \oplus \mathrm{L}(T)$ est engendré par les images de $\mathrm{L}(V_0) \oplus \mathrm{L}(T_0)$ par des automorphismes de A. (On fixe une rétraction $A \twoheadrightarrow V_0 \oplus T_0$, et on note $V_1 \subset V$ et $T_1 \subset T$ les intersections de V et T avec son noyau ; ce sont des supplémentaires de V_0 et T_0. Tout morphisme $e : V_0 \oplus T_0 \longrightarrow V_1 \oplus T_1$ induit un endomorphisme nilpotent de A, à savoir le morphisme composé

$$n : A \twoheadrightarrow V_0 \oplus T_0 \xrightarrow{\ e\ } V_1 \oplus T_1 \hookrightarrow A.$$

Alors $\mathrm{id}_A + n$ est un automorphisme de A qui envoie $\mathrm{L}(V_0) \oplus \mathrm{L}(T_0)$ sur le graphe de $\mathrm{L}(e)$.) Or, si u est un automorphisme de A, la relation $f = u \circ f \circ \mathrm{L}(u^{-1})$ entraîne que f s'annule sur l'image de $\mathrm{L}(V_0) \oplus \mathrm{L}(T_0)$ par u. Ceci permet de conclure. ∎

Théorème 5.9.24. — *On suppose que k est algébriquement clos. Soit $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille finie de k-variétés abéliennes simples, deux à deux non isogènes. Pour chaque $\alpha \in I$, on suppose donnée une extension*

$$0 \longrightarrow V'_\alpha \oplus T'_\alpha \longrightarrow A'_\alpha \longrightarrow A_\alpha \longrightarrow 0$$

avec A'_α anti-affine, V'_α un k-vectoriel et T'_α un k-tore. On suppose aussi que le morphisme naturel

$$\mathrm{End}(A'_\alpha) \longrightarrow \mathrm{End}(A_\alpha)$$

est un isomorphisme pour tout $\alpha \in I$.

(a) *On pose $A = \bigoplus_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A' = \bigoplus_{\alpha \in I} A'_\alpha$ et $A'' = \mathbf{G}_{\boldsymbol{a}} \oplus \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}} \oplus A'$. Alors, on a une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A')}(\mathrm{L}(A), A') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A'')}(\mathrm{L}(A''), A'') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_k(L_a, \mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}(L_m, \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \longrightarrow 0.$$

De plus, on a une décomposition

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A')}(\mathrm{L}(A), A') \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A'_\alpha)}(\mathrm{L}(A_\alpha), A'_\alpha). \tag{5.70}$$

(b) *Soit B un k-schéma en groupes commutatif et connexe. On suppose que B est un quotient d'une somme directe de $\mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}$, $\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}$ et A'_α, pour $\alpha \in I$. Alors, le morphisme évident*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A''\oplus B)}(\mathrm{L}(A'' \oplus B), A'' \oplus B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A'')}(\mathrm{L}(A''), A'') \tag{5.71}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — On divise la preuve en plusieurs parties.

Partie 1. — On démontre d'abord l'assertion (a). On pose $V' = \bigoplus_\alpha V'_\alpha$, $T' = \bigoplus_\alpha T'_\alpha$, $V'' = \mathbf{G}_a \oplus V'$ et $T'' = \mathbf{G}_m \oplus T'$. Soit $g : \mathrm{L}(V'' \oplus T'') \longrightarrow V'' \oplus T''$ un morphisme $\mathrm{End}(V'' \oplus T'')$-linéaire, et expliquons comment étendre g en un morphisme $\mathrm{End}(A'')$-linéaire $\mathrm{L}(A'') \longrightarrow A''$. Puisque $\mathrm{L}(A')$ est stable par l'action de $\mathrm{End}(A'')$, il est suffisant d'étendre $g|_{\mathrm{L}(V' \oplus T')}$ en un morphisme $\mathrm{End}(A')$-linéaire $\mathrm{L}(A') \longrightarrow A'$. Or, $\mathrm{End}(A') \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ est un produit de $\mathbb{Q}$-algèbres centrales simples. Il s'ensuit que l'inclusion $\mathrm{L}(V' \oplus T') \hookrightarrow \mathrm{L}(A')$ possède une rétraction $\mathrm{End}(A')$-linéaire. On peut donc prendre comme extension de $g|_{\mathrm{L}(V' \oplus T')}$ le morphisme composé

$$\mathrm{L}(A') \twoheadrightarrow \mathrm{L}(V' \oplus T') \xrightarrow{g|_{\mathrm{L}(V' \oplus T')}} V' \oplus T' \hookrightarrow A'.$$

On a ainsi montré que la suite dans (a) est exacte à droite. Vu la proposition 5.9.23, il reste à identifier $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A')}(\mathrm{L}(A), A')$ avec $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A'')}(\mathrm{L}(A), A'')$. Ceci découle du fait que l'image d'un morphisme $\mathrm{End}(A'')$-linéaire $\mathrm{L}(A) \longrightarrow A''$ est contenue dans A'. (Utiliser l'idempotent de A'' donné par la composition de $A'' \twoheadrightarrow A' \hookrightarrow A''$.) Enfin, la décomposition (5.70) découle du fait que $\mathrm{End}(A')$ est le produit direct des $\mathrm{End}(A'_\alpha)$, pour $\alpha \in I$.

Partie 2. — On passe maintenant à l'assertion (b). D'après le lemme 5.9.19, on sait que le morphisme (5.71) est injectif. Il s'agit donc de montrer qu'il est surjectif. Grâce au lemme 5.9.20, on ne restreint pas la généralité en supposant que $\overline{B} = \overline{\mathrm{Alb}^\circ}(B)$ est une somme directe de copies de A_α, pour $\alpha \in I$. En particulier, on peut trouver une surjection

$$\theta : A''' = (\mathbf{G}_a)^{\oplus a} \oplus (\mathbf{G}_m)^{\oplus b} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in I} (A'_\alpha)^{\oplus c_\alpha}\right) \twoheadrightarrow B$$

telle que $\ker(\theta)$ est affine et connexe. De plus, grâce aux hypothèses de (b), pour chaque endomorphisme e de B, on peut trouver un endomorphisme $\widetilde{e}$ de A''' tel que $\theta \circ \widetilde{e} = e \circ \theta$.

Ceci étant, soit $f'' : \mathrm{L}(A'') \longrightarrow A''$ un morphisme $\mathrm{End}(A'')$-linéaire. Alors, f'' induit un morphisme $\mathrm{End}(A''')$-linéaire $f''' : \mathrm{L}(A''') \longrightarrow A'''$. De plus, d'après la preuve de la partie (a) de l'énoncé, la restriction de f''' à $\mathrm{L}(V''' \oplus T''')$ est $\mathrm{End}(V''' \oplus T''')$-linéaire. (Bien entendu, V''' et T''' sont les sous-groupes vectoriels et toriques maximaux de A'''.) Elle envoie donc le noyau de $\mathrm{L}(\theta)$ dans le noyau de θ. Le morphisme f''' induit donc un morphisme $g : \mathrm{L}(B) \longrightarrow B$. D'après la discussion précédente, le morphisme g est $\mathrm{End}(B)$-linéaire. Il est facile de voir que $f'' \oplus g$ est $\mathrm{End}(A'' \oplus B)$-linéaire, ce qui permet de conclure. ∎

Définition 5.9.25. — *On définit un pro-k-schéma en groupes commutatif $\mathscr{U}_{\mathrm{L}}$ de la manière suivante. Il est indexé par les ensembles finis de classes d'isomorphisme de k-schémas en groupes commutatifs. Si E est un tel ensemble,* $(\mathscr{U}_{\mathrm{L}})_E = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_E)}(\mathrm{L}(A_E); A_E)$ *avec* $A_E = \bigoplus_{A \in E} A$. *Si* $E \subset F$, *le morphisme* $(\mathscr{U}_{\mathrm{L}})_F \longrightarrow (\mathscr{U}_{\mathrm{L}})_E$ *est celui du lemme 5.9.18.*

Corollaire 5.9.26. — *On suppose que k est algébriquement clos. Soit* $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ *une famille représentative des classes d'isogénie de k-variétés abéliennes simples. Il existe alors une suite exacte courte de pro-k-schémas en groupes commutatifs*

$$0 \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{L}(A_\alpha), \mathfrak{U}(A_\alpha)) \longrightarrow \mathscr{U}_{\mathrm{L}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_k(L_a, \mathbf{G}_a) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}(L_m, \mathbf{G}_m) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 5.9.24. ∎

Proposition 5.9.27. — *On suppose que k est algébriquement clos. Pour tout k-schéma en groupes commutatif B, le morphisme évident*

$$\mathrm{L}(B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{U}_{\mathrm{L}}, B)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Grâce au corollaire 5.9.26 et au lemme 5.9.7, on voit aussitôt que $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{U}_{\mathrm{L}}, B) = 0$ pour tout k-schéma en groupes affine commutatif B. Il est donc suffisant de montrer la proposition pour $B = \mathbf{G}_a$, $B = \mathbf{G}_m$ ou $B = A_\alpha$, avec $\alpha \in I$ (avec les notations du corollaire 5.9.26).

Grâce au corollaire 5.9.26, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{U}_{\mathrm{L}}, \mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Hom}}_k(L_a, \mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}), \mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}) = L_a$$

comme souhaité. La même chose s'applique pour $\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}$ au lieu de $\mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}$. Supposons maintenant que $B = A_\alpha$, avec $\alpha \in I$. Toujours grâce au corollaire 5.9.26, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathscr{U}_{\mathrm{L}}, A_\alpha) &= \mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{L}(A_\alpha), \mathfrak{U}(A_\alpha)), A_\alpha) \\ &= \mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{L}(A_\alpha), A_\alpha), A_\alpha) \\ &= \mathrm{L}(A_\alpha) \end{aligned}$$

où la dernière égalité est assurée par le lemme 5.9.16. ∎

Remarque 5.9.28. — Les considérations précédentes admettent une variante où l'on se restreint aux k-variétés semi-abéliennes. Plus précisément, considérons la pro-k-variété semi-abélienne $\mathscr{U}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{sa}}$ définie de la manière suivante. Elle est indexée par les ensembles finis de classes d'isomorphisme de k-variétés semi-abéliennes. Si E est un tel ensemble, $(\mathscr{U}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{sa}})_E = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_E)}(\mathrm{L}(A_E); A_E)$ avec $A_E = \bigoplus_{A \in E} A$. Si $E \subset F$, le morphisme $(\mathscr{U}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{sa}})_F \longrightarrow (\mathscr{U}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{sa}})_E$ est celui du lemme 5.9.18. La preuve du corollaire 5.9.26 s'adapte sans difficulté pour fournir une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{L}(A_\alpha), \mathfrak{U}^{\mathrm{sa}}(A_\alpha)) \longrightarrow \mathscr{U}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{sa}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(L_m, \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \longrightarrow 0$$

où $\mathfrak{U}^{\mathrm{sa}}(A_\alpha) = \mathrm{Alb}^\circ(\mathfrak{U}(A_\alpha))$ est le quotient semi-abélien maximal de $\mathfrak{U}(A_\alpha)$. Il s'ensuit que $\mathscr{U}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{sa}}$ est le quotient semi-abélien maximal de $\mathscr{U}_{\mathrm{L}}$. □

5.10. Tour de Postnikov du type d'homotopie feuilletée, IV. Scindage. —

Dans cette sous-section et les deux qui suivront, nous reprenons l'étude du type d'homotopie feuilletée d'un Δ-corps. (Nous avions commencé cette étude dans la section 4 ; voir les sous-sections 4.7, 4.8 et 4.10.) On regroupe ici quelques constructions qui serviront dans les sous-sections 5.11 et 5.12 pour obtenir une approximation du type d'homotopie feuilletée par un schéma semi-simplicial explicite. Tout au long de cette sous-section, on fixe un corps C de caractéristique nulle sur lequel Δ agit trivialement.

Définition 5.10.1. — *Une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre R est dite* primitivement close *si pour tout élément $a \in R$, tout entier $1 \leqslant i \leqslant m$ et tout sous-ensemble $J \subset [\![1, m]\!] \smallsetminus \{i\}$ avec $\partial_j(a) = 0$, pour $j \in J$, il existe $b \in R$ tel que $\partial_i(b) = a$ et $\partial_j(b) = 0$ pour tout $j \in J$.*

Proposition 5.10.2. — *Soit R une $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre primitivement close. Alors, pour $i \geqslant 1$, on a $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(R) = 0$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le cardinal m de Δ. Lorsque $m = 0$, il n'y a rien à montrer. On suppose donc que $m \geqslant 1$ et que le résultat est démontré pour les $(\mathbb{Q}, \Delta \smallsetminus \{\partial_m\})$-algèbres.

On note R' la $(\mathbb{Q}, \Delta \smallsetminus \{\partial_m\})$-algèbre sous-jacente à R, i.e., obtenue par oubli de l'action de ∂_m. Alors, le complexe de de Rham $\Omega^\bullet(R)$ s'identifie à

$$\mathrm{Cône}\{\partial_m : \Omega^\bullet(R') \longrightarrow \Omega^\bullet(R')\}[-1]. \tag{5.72}$$

Puisque R est primitivement close, l'application $\partial_m : R' \longrightarrow R'$ est surjective. Il s'ensuit que (5.72) est naturellement quasi-isomorphe à son sous-complexe $\ker\{\partial_m : \Omega^\bullet(R') \to \Omega^\bullet(R')\}$ qui n'est autre que le complexe de de Rham $\Omega^\bullet(R^{\partial_m = 0})$ de la $(\mathbb{Q}, \Delta \smallsetminus \{\partial_m\})$-algèbre $R^{\partial_m = 0}$. Cette dernière étant encore primitivement close, l'hypothèse de récurrence permet de conclure. ∎

Notation 5.10.3. — Soit X un C-schéma. On note $\mathrm{f}_\Delta(X)$ le (C, Δ)-schéma qui représente le préfaisceau $\mathrm{Hom}_C(\mathrm{o}_\Delta(-), X) = (\mathrm{o}_\Delta)_* X$ sur la catégorie des (C, Δ)-schémas. Si X est affine donné par le spectre d'une C-algèbre de la forme $C[x_i;\ i \in I]/J$, avec $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'indéterminées et J un idéal, alors $\mathrm{f}_\Delta(X)$ est donné par le spectre de la (C, Δ)-algèbre $C\langle x_i;\ i \in I\rangle / J^\Delta$. Le cas général s'obtient du cas affine par recollement. Clairement, le foncteur f_Δ est un adjoint à droite du foncteur o_Δ. □

Notations 5.10.4. — Soit X un (C, Δ)-schéma. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{Z}^i_{\mathrm{dR}}(X) = \ker\{\Omega^i(X) \to \Omega^{i+1}(X)\}$. Si A est un C-schéma en groupes commutatif, on pose $\mathrm{Z}^i_{\mathrm{dR}}(X; A) = \ker\{\Omega^i(X; A) \to \Omega^{i+1}(X; A)\}$. Si $i \geqslant 1$, on a clairement $\mathrm{Z}^i_{\mathrm{dR}}(X; A) = \mathrm{Z}^i_{\mathrm{dR}}(X) \otimes_C \mathrm{Lie}(A)$. □

Proposition 5.10.5. — *Soit A un C-schéma en groupes commutatif. Pour $i \geqslant 0$, les préfaisceaux $\Omega^i(-;A)$ et $\mathrm{Z}^i_{\mathrm{dR}}(-;A)$ sont représentables par des (C,Δ)-schémas. De plus, le morphisme*

$$\mathrm{d}_A : \mathrm{f}_\Delta(A) \longrightarrow \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(-;A)$$

est un torseur sous A, et l'action de A sur $\mathrm{f}_\Delta(A)$ est compatible à sa structure de (C,Δ)-schéma.

Démonstration. — Le préfaisceau $\Omega^0(-;A)$ est représenté par $\mathrm{f}_\Delta(A)$ et, si $i \geqslant 1$, $\Omega^i(-;A)$ est représenté par un produit direct de copies de $\mathrm{f}_\Delta(\mathbf{G}_a)$ (ou, d'un manière plus canonique, par $\mathrm{f}_\Delta(\mathbf{G}_a \otimes \bigwedge^i \mathbb{Z}^\Delta \otimes \mathrm{Lie}(A))$). Ainsi, les différentielles du complexe de de Rham $\Omega^\bullet(-;A)$ fournissent des morphismes de (C,Δ)-schémas en groupes. Étant donné que les $\mathrm{Z}^i_{\mathrm{dR}}(-;A)$ sont les noyaux de ces morphismes, ils sont aussi représentables par des (C,Δ)-schémas.

Appelons, comme d'habitude, A^δ le (C,Δ)-schéma donné par A muni de l'action triviale de Δ. Alors, A^δ est un sous-groupe de $\mathrm{f}_\Delta(A)$. (L'inclusion $A^\delta \subset \mathrm{f}_\Delta(A)$ s'identifie à $\mathrm{Z}^0_{\mathrm{dR}}(-;A) \subset \Omega^0(-;A)$; voir le lemme 5.8.6(c).) On en déduit une action du C-schéma en groupes $A = \mathrm{o}_\Delta(A^\delta)$ sur le C-schéma $\mathrm{o}_\Delta(\mathrm{f}_\Delta(A))$ qui est compatible à la structure de Δ-schéma sur $\mathrm{f}_\Delta(A)$. Il s'ensuit que le C-schéma quotient $Q = \mathrm{o}_\Delta(\mathrm{f}_\Delta(A))/A$ est naturellement un (C,Δ)-schéma, et on obtient une factorisation de d_A comme suit :

$$\mathrm{f}_\Delta(A) \twoheadrightarrow Q \xrightarrow{h} \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(-;A).$$

Il reste à voir que h est un isomorphisme de (C,Δ)-schémas. Il suffit de montrer cela après oubli des actions de Δ. Nous allons vérifier que $\mathrm{o}_\Delta(Q)$ et $\mathrm{o}_\Delta(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(-;A))$ représentent le même préfaisceau sur les C-algèbres locales strictement henséliennes, ce qui suffit pour conclure.

Soit donc R une C-algèbre locale strictement hensélienne. D'après la proposition 3.3.8 (voir aussi la remarque 3.3.9), on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_C(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{o}_\Delta(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{C,\Delta}(\mathrm{Spec}(R[[\mathbf{t}]]), X)$$

pour tout (C,Δ)-schéma X. Par la construction de Q, on a donc la chaîne d'isomorphismes naturels

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_C(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{o}_\Delta(Q)) &\simeq \frac{\mathrm{Hom}_C(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{o}_\Delta(\mathrm{f}_\Delta(A)))}{\mathrm{Hom}_C(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{o}_\Delta(A^\delta))} \\ &\simeq \frac{\mathrm{Hom}_{C,\Delta}(\mathrm{Spec}(R[[\mathbf{t}]]), \mathrm{f}_\Delta(A))}{\mathrm{Hom}_{C,\Delta}(\mathrm{Spec}(R[[\mathbf{t}]]), A^\delta)} \simeq \frac{A(R[[\mathbf{t}]])}{A(R)}.\end{aligned}$$

De même, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_C(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{o}_\Delta(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(-;A))) \simeq \mathrm{Hom}_{C,\Delta}(\mathrm{Spec}(R[[\mathbf{t}]]), \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(-;A)). \tag{5.73}$$

Or, la preuve du théorème 5.8.7 s'étend sans modifications pour montrer que le complexe $\Omega^\bullet(R[[\mathbf{t}]];A)$ est acyclique sauf en degré zéro. Le second membre de (5.73) s'identifie donc également au quotient $A(R[[\mathbf{t}]])/A(R)$. Ceci termine la preuve. ∎

On utilise la proposition 5.10.5 dans la construction suivante.

Construction 5.10.6. — Soient A un C-schéma en groupes commutatif et X un (C,Δ)-schéma affine.

(a) Pour $\omega \in \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A)$, on forme un carré cartésien de (C,Δ)-schémas comme suit :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{f}_\Delta(A)_\omega \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{f}_\Delta(A) \arrow[d, "\mathrm{d}_A"] \\ X \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(-;A). \end{tikzcd}$$

Grâce à la proposition 5.10.5, le (X,Δ)-schéma $\mathrm{f}_\Delta(A)_\omega$ est naturellement un torseur sous le C-schéma en groupes A.

(b) On dispose aussi d'une variante universelle de (a) obtenue en formant le carré cartésien de (C, Δ)-schémas suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{J}_A(X) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A), \mathrm{f}_\Delta(A)) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{d}_A} \\ X & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A), \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(-;A)) \end{array}$$

où la flèche horizontale inférieure correspond au (X, Δ)-point $\mathrm{id}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A)}$ et où la flèche verticale à droite s'identifie à la différentielle de de Rham $\mathrm{d}_B : \mathrm{f}_\Delta(B) \longrightarrow \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(-;B)$, avec $B = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A), A)$. Grâce à la proposition 5.10.5, le (X, Δ)-schéma $\mathfrak{J}_A(X)$ est naturellement un torseur sous le pro-C-schéma en groupes $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A), A)$. □

Lemme 5.10.7. — *Gardons les notations et les hypothèses de la construction 5.10.6. Considérons le morphisme de pro-C-schémas en groupes*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A), A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A(X), A), \tag{5.74}$$

induit par l'homomorphisme $\mathrm{d}_A : A(X) \longrightarrow \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A)$. *Alors, le poussé en avant du torseur $\mathfrak{J}_A(X)$ suivant le morphisme* (5.74) *admet une trivialisation canonique en tant que (X, Δ)-schéma. Autrement dit, il existe un morphisme $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A), A)$-équivariant de (X, Δ)-schémas*

$$\mathfrak{J}_A(X) \longrightarrow X \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A(X), A). \tag{5.75}$$

De plus, le morphisme $\mathfrak{J}_A(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A(X), X)$, obtenu en composant (5.75) *avec la projection sur le second facteur, s'insère dans un carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{J}_A(X) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A(X), A) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A^\delta(X), A), \end{array} \tag{5.76}$$

où la flèche horizontale inférieure est le X-point $A^\delta(X) \hookrightarrow A(X)$.

Démonstration. — En effet, le poussé en avant du torseur $\mathfrak{J}_A(X)$ suivant le morphisme (5.74) peut se calculer comme la limite du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A(X), \mathrm{f}_\Delta(A)) \\ & & \big\downarrow \\ X & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A(X), \Omega^1(-;A)) \end{array}$$

où la flèche horizontale correspond au (X, Δ)-point $\mathrm{d}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{End}(A)}(A(X), \Omega^1(X;A))$. On dispose d'un (X, Δ)-point

$$X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A(X), \mathrm{f}_\Delta(A))$$

donné par $\mathrm{id}_{A(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{End}(A)}(A(X), A(X))$. Ceci fournit la trivialisation recherchée. ■

Notation 5.10.8. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive pseudo-abélienne (i.e., stable par facteur direct). D'après la correspondance de Dold–Kan, le foncteur « complexe normalisé » $\mathrm{N} : \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Cpl}_{\geqslant 0}(\mathcal{C})$ est une équivalence de catégories. Son quasi-inverse sera noté $\mathrm{K}_\bullet$. Étant donné un complexe $A_\bullet$ dans $\mathcal{C}$, concentré en degrés positifs ou nuls, l'objet simplicial $\mathrm{K}_\bullet(A)$ est appelé l'*objet d'Eilenberg–Mac Lane généralisé* associé à A. Pour $D \in \mathcal{C}$ et $r \geqslant 0$, on a $\mathrm{K}_\bullet(D[r]) = \mathrm{K}_\bullet(D, r)$ (voir la construction 4.10.14(a)). □

Ci-dessous, nous utiliserons une version naïve de la notion de « quotient discret » d'un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma (voir la définition 3.2.4). Ainsi, si X est un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma affine, le *quotient discret affine* de X est le $\mathbb{Q}$-schéma affine $X_{\Delta=0}$ caractérisé par la propriété $\mathcal{O}(X_{\Delta=0}) = \mathcal{O}(X)^{\Delta=0}$.

Proposition 5.10.9. — *Gardons les notations et les hypothèses de la construction 5.10.6. Supposons en plus que le morphisme évident $A(X_{\Delta=0}) \longrightarrow A^{\delta}(X)$, avec $X_{\Delta=0}$ le quotient discret affine de X, est un isomorphisme. Considérons le (X,Δ)-schéma simplicial $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X)$. Il existe alors un $X_{\Delta=0}$-schéma simplicial $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X)_{\Delta=0}$ et un $(X_{\Delta=0},\Delta)$-morphisme $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X) \longrightarrow \check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X)_{\Delta=0}$ (avec $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X)_{\Delta=0}$ muni de l'action triviale de Δ) tels que les deux propriétés suivantes sont satisfaites.*

(a) Le $X_{\Delta=0}$-schéma simplicial $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X)_{\Delta=0}$ est un torseur sous le pro-C-schéma en groupes simplicial

$$\mathrm{K}_{\bullet}\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}([A(X)/A^{\delta}(X) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A)], A)\right). \tag{5.77}$$

(b) Le morphisme $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X) \longrightarrow \check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X)_{\Delta=0}$ est $\check{C}_{\bullet}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A),A))$-équivariant relativement au morphisme de pro-C-schémas en groupes simpliciaux

$$\begin{aligned}\check{C}_{\bullet}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A),A)) \quad &= \quad \mathrm{K}_{\bullet}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}([\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A) = \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A)],A)) \\ &\longrightarrow \quad \mathrm{K}_{\bullet}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}([A(X)/A^{\delta}(X) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A)],A)).\end{aligned} \tag{5.78}$$

Supposons en plus que l'injection $A^{\delta}(X) \hookrightarrow A(X)$ admet une rétraction $\mathrm{End}(A)$*-linéaire. Alors le torseur $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X)_{\Delta=0}$ est trivial.*

Démonstration. — Appelons $P_{\bullet}$ le (X,Δ)-schéma simplicial obtenu de $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X)$ en poussant en avant suivant le morphisme (5.78). Il s'agit de montrer que $P_{\bullet}$ est de la forme $X \times_{X_{\Delta=0}} Q_{\bullet}$, avec $Q_{\bullet}$ un torseur sur $X_{\Delta=0}$ muni de l'action triviale de Δ.

Étant donné que $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X)$ est lui-même le poussé en avant du (X,Δ)-schéma simplicial constant $\mathfrak{J}_A(X)$ suivant l'immersion diagonale

$$\mathrm{diag} : \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A),A) \longrightarrow \check{C}_{\bullet}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A),A)),$$

on déduit que $P_{\bullet}$ est en fait le poussé en avant du (X,Δ)-schéma simplicial constant $\mathfrak{J}_A(X)$ suivant le morphisme composé (5.78) $\circ$ diag. Or, ce morphisme composé se factorise par le morphisme (simplicialement constant)

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A),A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A(X)/A^{\delta}(X),A). \tag{5.79}$$

Il est donc suffisant de montrer que P_0, qui est le poussé en avant de $\mathfrak{J}_A(X)$ par le morphisme (5.79), est de la forme souhaitée. Or, grâce au carré commutatif (5.76) du lemme 5.10.7, P_0 s'identifie à la limite du diagramme

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A(X),A) \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A^{\delta}(X),A). \end{tikzcd}$$

Puisque $A(X_{\Delta=0}) = A^{\delta}(X)$, la flèche horizontale dans le diagramme ci-dessus se factorise par $X_{\Delta=0}$ et il suffit de prendre pour Q_0 la limite du diagramme

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A(X),A) \arrow[d] \\ X_{\Delta=0} \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A)}(A^{\delta}(X),A). \end{tikzcd}$$

Enfin, remarquons qu'une rétraction $\mathrm{End}(A)$-linéaire à l'injection $A^{\delta}(X) \hookrightarrow A(X)$ fournit une trivialisation du torseur Q_0 et par conséquent une trivialisation du torseur $Q_{\bullet}$ (qui n'est autre que le torseur $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X)_{\Delta=0}$ de l'énoncé). ■

Remarque 5.10.10. — Soient k un corps, G un pro-k-schéma en groupes et Y un G-torseur défini sur un k-schéma X. On dit que Y est *pro-trivial* si les poussés en avant de Y par les morphismes de G vers des k-schémas en groupes de type fini sont tous triviaux. Si $G = (G_i)_{i\in I}$ et $Y = (Y_i)_{i\in I}$ avec Y_i le poussé en avant de Y par $G \longrightarrow G_i$, alors Y est pro-trivial si et seulement si les Y_i sont triviaux.

Nous aurons besoin d'une variante de la dernière assertion dans la proposition 5.10.9 qui se démontre de la même manière et qui s'énonce comme suit. Si l'injection de $\mathrm{End}(A)$-modules $A^{\delta}(X) \hookrightarrow A(X)$ est *ind-scindée*, i.e., $A(X)$ est l'union filtrante de ses sous-$\mathrm{End}(A)$-modules contenant $A^{\delta}(X)$ comme facteur direct, alors le torseur $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_A(X)/X)_{\Delta=0}$ est pro-trivial. □

Construction 5.10.11. — Soit X un (C,Δ)-schéma affine.

(a) On construit un pro-(X,Δ)-schéma $\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(X)$ de la manière suivante. Il est indéxé par les ensembles finis de classes d'isomorphisme de C-schémas en groupes commutatifs. Si E est un tel ensemble, $(\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(X))_E = \mathfrak{J}_{A_E}(X)$, avec $A_E = \bigoplus_{A\in E} A$. Si $E \subset F$, le morphisme $\mathfrak{J}_{A_F}(X) \longrightarrow \mathfrak{J}_{A_E}(X)$ est déduit du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_F)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A_F),\mathrm{f}_{\Delta}(A_F)) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_E)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A_E),\mathrm{f}_{\Delta}(A_E)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}_{A_F}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}_{A_E}} \\ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_F)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A_F),\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(-;A_F)) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_E)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A_E),\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(-;A_E)) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont construites comme dans la preuve du lemme 5.9.18. Grâce à la proposition 5.10.5, le pro-(X,Δ)-schéma $\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(X)$ est naturellement un torseur sous le pro-C-schéma en groupes $\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;-)} = (\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_E)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A_E),A_E))_E$ de la définition 5.9.25.

(b) On suppose que pour tout C-schéma en groupes commutatif A, on a $A(X_{\Delta=0}) \simeq A^{\delta}(X)$ et $A(X)/A^{\delta}(X)$ est uniquement divisible. On construit dans ce cas un pro-$X_{\Delta=0}$-schéma simplicial $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(X)/X)_{\Delta=0}$ de la manière suivante. Il est également indéxé par les ensembles finis de classes d'isomorphisme de C-schémas en groupes commutatifs. Si E est un tel ensemble, on a $(\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(X)/X)_{\Delta=0})_E = \check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_{A_E}(X)/X)_{\Delta=0}$, où le membre à droite est comme dans la proposition 5.10.9. Les morphismes de transition sont définis comme dans (a). Grâce à la proposition 5.10.9, le pro-$X_{\Delta=0}$-schéma simplicial $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(X)/X)_{\Delta=0}$ est naturellement un torseur sous le pro-C-schéma simplicial en groupes $\mathrm{K}_{\bullet}([\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;-)} \to \mathscr{U}_{\Gamma(X;-)/\Gamma(X;(-)^{\delta})}])$ donné plus explicitement par

$$(\mathrm{K}_{\bullet}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_E)}([A_E(X)/A_E^{\delta}(X) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A_E)],A_E)))_E.$$

Pour pouvoir appliquer ladite proposition, on utilise l'hypothèse que $\Gamma(X;-)/\Gamma(X_{\Delta=0};-)$ est à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, ce qui entraîne aussi qu'il est exact. □

Théorème 5.10.12. — *On suppose que C est algébriquement clos. Soit X un (C,Δ)-schéma vérifiant les conditions suivantes :*

(i) X est affine et connexe, et la (C,Δ)-algèbre $\mathcal{O}(X)$ est primitivement close ;

(ii) pour tout C-schéma en groupes commutatif A, le groupe $A(X)/A^{\delta}(X)$ est uniquement divisible ;

(iii) pour toute C-variété semi-abélienne A, le morphisme $A(C) \longrightarrow A^{\delta}(X)$ est un isomorphisme.

Alors, pour tout C-schéma en groupes commutatif A, les morphismes de complexes

$$A(\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(X)/X)_{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\,\Omega^{\bullet}(\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(X)/X);A) \longleftarrow \Omega^{\bullet}(X;A) \tag{5.80}$$

sont des quasi-isomorphismes.

Démonstration. — Grâce au lemme 5.10.13 ci-dessous, il est en effet loisible de considérer le torseur $\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(X)/X)_{\Delta=0}$ de la construction 5.10.11(b). Les morphismes $\Omega^i(X;A)[0] \longrightarrow \Omega^i(\check{C}_{\bullet}(\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(X)/X);A)$, pour $i \geqslant 0$, sont des quasi-isomorphismes. Ceci découle du fait que le pro-X-schéma $\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(X)$ admet des X-points. (Bien sûr, ces X-points ne sont pas en général des (X,Δ)-points !) Il s'ensuit que le second morphisme dans (5.80) est un quasi-isomorphisme.

Il reste à voir que le premier morphisme dans (5.80) est un quasi-isomorphisme. On divise la preuve de cela en trois parties. La première est une réduction au cas $A = \mathbf{G}_a$ et à celui où A est une variété semi-abélienne.

Partie A. — Puisque C est algébriquement clos, A est une somme directe d'un groupe commutatif fini et d'un C-schéma en groupes commutatif connexe. Le cas d'un groupe fini étant évident, on se ramène aussitôt au cas où A est connexe. On dispose alors d'une suite exacte courte de C-schémas en groupes commutatifs

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0, \tag{5.81}$$

où V est un C-vectoriel et B est une variété semi-abélienne. Grâce au lemme 5.10.14 ci-dessous, et en prenant en compte le corollaire 5.9.26 et les structures de torseurs fournies par la construction 5.10.11, on a

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\check{C}_n(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X)_{\Delta=0};\mathcal{O}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\check{C}_n(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X);\mathcal{O}) = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en découle des suites exacte courtes

$$0 \longrightarrow V(\check{C}_n(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X)_{\Delta=0}) \longrightarrow A(\check{C}_n(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X)_{\Delta=0}) \longrightarrow B(\check{C}_n(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X)_{\Delta=0}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Omega^i(\check{C}_n(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X);V) \longrightarrow \Omega^i(\check{C}_n(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X);A) \longrightarrow \Omega^i(\check{C}_n(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X);B) \longrightarrow 0.$$

Ainsi, pour montrer que le second morphisme dans (5.80) est un quasi-isomorphisme, il suffit de le faire pour V et B. Autrement dit, on peut supposer que $A = \mathbf{G}_a$ ou que A est une variété semi-abélienne.

Partie B. — Dans cette partie, on traite le cas de $\mathbf{G}_a$. D'après le début de la preuve, le second morphisme dans (5.80) est un quasi-isomorphisme. Puisque la (C,Δ)-algèbre $\mathcal{O}(X)$ est primitivement close, on a un quasi-isomorphisme $\mathcal{O}(X_{\Delta=0})[0] \simeq \Omega^\bullet(X;\mathbf{G}_a)$ d'après la proposition 5.10.2. Il nous faut donc montrer que le complexe $\mathcal{O}(\check{C}_\bullet(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X)_{\Delta=0})$ est également quasi-isomorphe à $\mathcal{O}(X_{\Delta=0})[0]$.

D'après le corollaire 5.9.26, on dispose d'un morphisme de pro-C-schémas en groupes simpliciaux

$$\mathrm{K}_\bullet([\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;-)} \to \mathscr{U}_{\Gamma(X;-)/\Gamma(X;(-)^\delta)}]) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(U) \oplus \mathrm{K}_\bullet(T) \tag{5.82}$$

avec $U_\bullet = \underline{\mathrm{Hom}}_C([\mathcal{O}(X)/\mathcal{O}(X_{\Delta=0}) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X)],\mathbf{G}_a)$ et $T_\bullet = \underline{\mathrm{Hom}}([\mathcal{O}^\times(X)/\mathcal{O}^\times(X_{\Delta=0}) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X)],\mathbf{G}_m)$. Le morphisme (5.82) est surjectif et son noyau est un pro-C-schéma en groupes anti-affine. Il s'ensuit que le complexe $\mathcal{O}(\check{C}_\bullet(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X)_{\Delta=0})$ est isomorphe à $\mathcal{O}(P_\bullet)$ où $P_\bullet$ est le poussé en avant de $\check{C}_\bullet(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X)_{\Delta=0}$ suivant (5.82). Appelons $D_\bullet$ le poussé en avant de $P_\bullet$ suivant la projection sur le premier facteur

$$\mathrm{pr}_1 : \mathrm{K}_\bullet(U) \oplus \mathrm{K}_\bullet(T) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(U).$$

Alors, $P_\bullet$ est un $\mathrm{K}_\bullet(T)$-torseur défini sur $D_\bullet$. Grâce à la proposition 5.6.8, on sait que le morphisme $\mathcal{O}(D_\bullet) \longrightarrow \mathcal{O}(P_\bullet)$ est un quasi-isomorphisme. Ainsi, pour conclure, il reste à montrer que le complexe $\mathcal{O}(D_\bullet)$ est quasi-isomorphe à $\mathcal{O}(X_{\Delta=0})[0]$.

Étant donné que $X_{\Delta=0}$ est affine, le $\mathrm{K}_\bullet(U)$-torseur $D_\bullet$ est trivial, i.e., il est isomorphe à $X_{\Delta=0} \times_C \mathrm{K}_\bullet(U)$. Il est donc suffisant de montrer que $\mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(U))$ est quasi-isomorphe à $C[0]$. Or, d'après la proposition 5.6.2, on a

$$\mathcal{O}(\mathrm{K}_\bullet(U)) \simeq \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Sym}^j\left([\mathcal{O}(X)/\mathcal{O}(X_{\Delta=0}) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X)]\right).$$

Or, étant donné que la (C,Δ)-algèbre $\mathcal{O}(X)$ est primitivement close, la proposition 5.10.2 entraîne que le complexe $[\mathcal{O}(X)/\mathcal{O}(X_{\Delta=0}) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X)]$ est acyclique. Ceci permet de conclure.

Partie C. — Dans cette partie, on traite le cas où A est une variété semi-abélienne. D'après le début de la preuve, le second morphisme dans (5.80) est un quasi-isomorphisme. Ceci fournit des morphismes canoniques

$$\mathrm{H}^i(A(\check{C}_\bullet(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X)_{\Delta=0})) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\Omega(X;A)),$$

et il reste à voir que ce sont des isomorphismes.

D'après les lemmes 5.10.15 et 5.10.16 ci-dessous et compte tenu des structures de torseurs fournies par la construction 5.10.11(b), on a un isomorphisme de groupes abéliens cosimpliciaux

$$\frac{A(\check{C}_\bullet(\mathcal{J}_{\text{univ}}(X)/X)_{\Delta=0})}{A(X_{\Delta=0})} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\left(\mathrm{K}_\bullet(\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;-)} \to \mathscr{U}_{\Gamma(X;-)/\Gamma(X_{\Delta=0};-)}),A\right).$$

Grâce à la proposition 5.9.27, le second membre de l'isomorphisme ci-dessus, s'identifie au groupe cosimplicial $\mathrm{K}^{\bullet}([A(X)/A(X_{\Delta=0}) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;A)])$. Il s'ensuit aussitôt que

$$\mathrm{H}^i(A(\check{C}_{\bullet}(\mathcal{J}_{\mathrm{univ}}(X)/X)_{\Delta=0})) = \begin{cases} A(X_{\Delta=0}) & \text{si } i=0, \\ \mathrm{H}^1(\Omega(X;A)) & \text{si } i=1, \\ 0 & \text{si } i \geqslant 2. \end{cases}$$

Par ailleurs, puisque la $(\mathbb{Q},\Delta)$-algèbre $\mathcal{O}(X)$ est primitivement close, la proposition 5.10.2 entraîne que $\mathrm{H}^i(\Omega(X;A)) = 0$ pour $i \geqslant 2$. Ceci permet de conclure. ■

Lemme 5.10.13. — *Sous les hypothèses du théorème 5.10.12, le morphisme $A(X_{\Delta=0}) \longrightarrow A^{\delta}(X)$ est inversible pour tout C-schéma en groupes commutatif A.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où A est connexe. Considérons la suite exacte courte (5.81). Puisque X est affine, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow V(X) \longrightarrow A(X) \longrightarrow B(X) \longrightarrow 0.$$

Il s'ensuit une suite exacte à gauche

$$0 \longrightarrow V^{\delta}(X) \longrightarrow A^{\delta}(X) \longrightarrow B^{\delta}(X).$$

Puisque V est affine, on a $V^{\delta}(X) = V(X_{\Delta=0})$. Grâce à la propriété (iii) du théorème 5.10.12, on a aussi $A^{\delta}(X) = A(X_{\Delta=0})$. Par ailleurs, puisque $X_{\Delta=0}$ est affine, on a aussi une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow V(X_{\Delta=0}) \longrightarrow A(X_{\Delta=0}) \longrightarrow B(X_{\Delta=0}) \longrightarrow 0.$$

Ceci fournit une inclusion $A^{\delta}(X) \subset A(X_{\Delta=0})$. L'inclusion réciproque est évidente. ■

Lemme 5.10.14. — *Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k-schéma affine et $p : Y \longrightarrow X$ un torseur sous un k-schéma en groupes commutatif B tel que* $\mathrm{Ext}^1(B,\mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}) = 0$. *Alors, on a* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(Y;\mathcal{O}) = 0$.

Démonstration. — Il revient au même de démontrer que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(Y;\mathcal{O}) = 0$. Étant donné que X est affine, il suffit de montrer que $\mathrm{R}p_*\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}[0]$. Le problème étant local pour la topologie étale sur X, on se ramène au cas où Y est un B-torseur trivial. Il suffit dans ce cas de montrer que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(B;\mathcal{O}) = 0$. Or, B est isomorphe, à isogénie près, à un produit $A \oplus B'$ avec A affine et B' anti-affine. La condition $\mathrm{Ext}^1(B,\mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}) = 0$ entraîne que $\mathrm{Ext}^1(B',\mathbf{G}_{\boldsymbol{a}}) = 0$. D'après la proposition 5.6.11, il s'ensuit que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(B';\mathcal{O}) = 0$. Ceci entraîne que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(B;\mathcal{O}) = 0$ comme souhaité. ■

Lemme 5.10.15. — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, X un k-schéma connexe, et A et B des k-schémas en groupes commutatifs et connexes. On suppose que A est une variété semi-abélienne. Soit Y un B-torseur trivial sur X. Alors, il existe une suite exacte canonique (i.e., indépendante de la trivialisation)*

$$0 \longrightarrow A(X) \longrightarrow A(Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,A) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Il s'agit d'un fait bien connu qui découle facilement de la propriété suivante des variétés semi-abéliennes : tout morphisme de k-schémas $B \longrightarrow A$ qui envoie le zéro de B sur le zéro de A est un morphisme de k-schémas en groupes. (Utiliser la connexité de X pour déduire que tout morphisme de X-schémas en groupes de $X \times_k B$ vers $X \times_k A$ provient d'un morphisme de B vers A.) ■

Lemme 5.10.16. — *Considérons le morphisme de pro-C-schémas semi-simpliciaux*

$$\mathrm{K}_{\bullet}([\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;-)} \to \mathscr{U}_{\Gamma(X;-)/\Gamma(X;(-)^{\delta})}]) \longrightarrow \mathrm{K}_{\bullet}([\mathscr{U}^{\mathrm{sa}}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(X;-)} \to \mathscr{U}^{\mathrm{sa}}_{\Gamma(X;-)/\Gamma(X;(-)^{\delta})}]). \tag{5.83}$$

Sous les hypothèses du théorème 5.10.12, le poussé en avant du torseur $\check{C}_{\bullet}(\mathcal{J}_{\mathrm{univ}}(X)/X)_{\Delta=0}$ suivant le morphisme (5.83)*, est pro-trivial.*

Démonstration. — (On renvoie le lecteur à la remarque 5.9.28 pour la définition de $\mathscr{U}^{\mathrm{sa}}_{\mathrm{L}}$.) Le poussé en avant de $\check{C}_{\bullet}(\mathcal{J}_{\mathrm{univ}}(X)/X)_{\Delta=0}$ suivant le morphisme (5.83) est le pro-objet $(\check{C}_{\bullet}(\mathcal{J}_{A_E}(X)/X)_{\Delta=0})_E$ où E parcourt les ensembles finis de classes d'isomorphisme de C-variétés semi-abéliennes. D'après la proposition 5.10.9 et la remarque 5.10.10, le torseur $\check{C}_{\bullet}(\mathcal{J}_A(X)/X)_{\Delta=0}$ est pro-trivial, pour une C-variété semi-abélienne A, si l'injection de $\mathrm{End}(A)$-modules $A^{\delta}(X) = A(C) \hookrightarrow A(X)$ est ind-scindée. Puisque C est algébriquement clos, cette condition est satisfaite : on écrit X comme une limite cofiltrante de C-schémas affines de type fini et on utilise le fait qu'un C-schéma de type fini non vide admet des C-points. ■

5.11. Tour de Postnikov du type d'homotopie feuilletée, V. Scindage (suite). —

On fixe un Δ-corps K algébriquement clos de caractéristique nulle et on note $C = K^{\Delta=0}$ son corps des constantes. Notre but dans cette sous-section et celle qui suivra est de décrire, le plus précisément possible, le type d'homotopie feuilletée de K sous l'hypothèse que ce dernier est cohomologiquement basique (au sens de la définition 5.7.15(ii)). Le résultat principal est le théorème 5.12.3 ci-dessous.

Construction 5.11.1. — Soit X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma affine. On considère l'ensemble T_X des triplets (a, i, J) où $a \in \mathcal{O}(X)$, $i \in [\![1, m]\!]$ et $J \subset [\![1, m]\!] \smallsetminus \{i\}$ vérifiant $\partial_j(a) = 0$ pour tout $j \in J$. On forme le (X, Δ)-schéma affine

$$\mathrm{I}^{(1)}(X) = \frac{X\langle y_{a,i,J};\ (a, i, J) \in T_X\rangle}{(\partial_i(y_{a,i,J}) - a, \partial_j(y_{a,i,J});\ (a, i, J) \in T_X \text{ et } j \in J)^{\Delta}}. \tag{5.84}$$

Ainsi, la $(\mathcal{O}(X), \Delta)$-algèbre $\mathcal{O}(\mathrm{I}^{(1)}(X))$ est librement engendrée par les indéterminées $y_{a,i,J}$, avec $(a, i, J) \in T_X$, satisfaisant aux relations $\partial_i(y_{a,i,J}) = a$ et $\partial_j(y_{a,i,J}) = 0$ pour $j \in J$. Clairement, la $\mathcal{O}(X)$-algèbre $\mathcal{O}(\mathrm{I}^{(1)}(X))$ est une algèbre de polynômes (en une infinité d'indéterminées en général).

On forme une tour $(\mathrm{I}^{(r)}(X))_{r\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schémas en posant $\mathrm{I}^{(0)}(X) = X$ et $\mathrm{I}^{(r)}(X) = \mathrm{I}^{(1)}(\mathrm{I}^{(r-1)}(X))$ pour $r \geqslant 1$. On pose $\mathrm{I}(X) = \lim_{r\in\mathbb{N}} \mathrm{I}^{(r)}(X)$. Clairement, $\mathcal{O}(\mathrm{I}^{(r)}(X))$, pour $r \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{O}(\mathrm{I}(X))$ sont des $\mathcal{O}(X)$-algèbres de polynômes (en une infinité d'indéterminées en général). □

Lemme 5.11.2. — *Pour tout $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma affine X, la $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbre $\mathcal{O}(\mathrm{I}(X))$ est primitivement close.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la construction 5.11.1. ■

Lemme 5.11.3. — *Un morphisme de $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schémas affines $f : Y \longrightarrow X$ induit des morphismes*

$$\mathrm{I}^{(r)}(f) : \mathrm{I}^{(r)}(Y) \longrightarrow \mathrm{I}^{(r)}(X) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{I}(f) : \mathrm{I}(Y) \longrightarrow \mathrm{I}(X).$$

Si f est schématiquement dominant, les morphismes

$$\mathrm{I}^{(r+s)}(Y) \longrightarrow \mathrm{I}^{(r+s)}(X) \times_{\mathrm{I}^{(r)}(X)} \mathrm{I}^{(r)}(Y) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{I}(Y) \longrightarrow \mathrm{I}(X) \times_{\mathrm{I}^{(r)}(X)} \mathrm{I}^{(r)}(Y)$$

sont des projections d'espaces affines relatifs (possiblement de dimension infinie). En particulier, les morphismes $\mathrm{I}^{(r)}(f)$ et $\mathrm{I}(f)$ sont aussi schématiquement dominants.

Démonstration. — Sur les algèbres de fonctions, le morphisme $\mathrm{I}^{(1)}(f)$ envoie $y_{a,i,J}$ sur $y_{a\circ f,i,J}$. Pour $r \geqslant 1$, on pose $\mathrm{I}^{(r)}(f) = \mathrm{I}^{(1)}(\mathrm{I}^{(r-1)}(f))$ et on prend pour $\mathrm{I}(f)$ la limite des $\mathrm{I}^{(r)}(f)$.

Si f est schématiquement dominant, l'application $y_{a,i,J} \rightsquigarrow y_{a\circ f,i,J}$ est injective. Il s'ensuit que $\mathrm{I}^{(1)}(Y)$ est un espace affine relatif (possiblement de dimension infinie) au-dessus de $\mathrm{I}^{(1)}(X) \times_X Y$. La deuxième assertion du lemme découle de cette propriété par récurrence. ■

Construction 5.11.4. — Soit X un $(\mathbb{Q}, \Delta)$-schéma affine. On définit une tour de (X, Δ)-schémas semi-simpliciaux

$$(\mathrm{V}_{\bullet}^{(n+1)}(X) \longrightarrow \mathrm{V}_{\bullet}^{(n)}(X))_{n\in\mathbb{N}} \tag{5.85}$$

par récurrence de la manière suivante. On pose $\mathrm{V}_{\bullet}^{(0)}(X) = \check{C}_{\bullet}(\mathrm{I}(X)/X)$. Pour $r \geqslant 1$, on prend pour $\mathrm{V}_{\bullet}^{(r)}(X)$ la source du morphisme de (X, Δ)-schémas semi-simpliciaux r-élémentaire associé au (X, Δ)-morphisme $\mathrm{I}(\mathrm{V}_r^{(r-1)}(X)) \longrightarrow \mathrm{V}_r^{(r-1)}(X)$. On note $\mathrm{V}_{\bullet}(X)$ la composition infinie de la tour (5.85). Par construction, $\mathrm{V}_{\bullet}(X)$ est un hyper-recouvrement fttf de X ; on fera toutefois attention que $\mathrm{V}_{\bullet}(X)$ est un (X, Δ)-schéma semi-simplicial (et non simplicial) contrairement à l'usage classique du terme. □

Lemme 5.11.5. — *Gardons les hypothèses et les notations de la construction 5.11.4. Il existe un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée des C-vectoriels $\mathcal{O}^{\Delta=0}(\mathrm{V}_{\bullet}(X)) \simeq \Omega^{\bullet}(X)$. Il est donné par un zigzag de quasi-isomorphismes naturels en X.*

Démonstration. — On a des inclusions évidentes

$$\mathcal{O}^{\Delta=0}(\mathrm{V}_{\bullet}(X)) \overset{(1)}{\hookrightarrow} \mathrm{Tot}\, \Omega^{\bullet}(\mathrm{V}_{\bullet}(X)) \overset{(2)}{\hookleftarrow} \Omega^{\bullet}(X). \tag{5.86}$$

D'après le lemme 5.11.2, les $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbres $\mathcal{O}(\mathrm{V}_n(X))$ sont primitivement closes. D'après la proposition 5.10.2, il s'ensuit que le inclusions $\mathcal{O}(\mathrm{V}_n(X))^{\Delta=0}[0] \hookrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{V}_n(X))$ sont des quasi-isomorphismes. Ceci entraîne que l'inclusion (1) de (5.86) est un quasi-isomorphisme.

Montrons à présent que les inclusions $\Omega^n(X)[0] \hookrightarrow \Omega^n(\mathrm{V}_\bullet(X))$ sont des quasi-isomorphismes (ce qui permet de conclure que l'inclusion (2) de (5.86) est un quasi-isomorphisme). Pour ce faire, on raisonne comme dans la seconde étape de la preuve du théorème 4.4.16. Ceci nous ramène à montrer que les inclusions $\mathcal{O}(\mathrm{V}_p(X)) \hookrightarrow \mathcal{O}(\check{C}_\bullet(\mathrm{V}_{p+1}(X)/\mathrm{V}_p(X)))$ sont des quasi-isomorphismes. Or, il découle du lemme 5.11.3 que le $\mathrm{V}_p(X)$-schéma $\mathrm{V}_{p+1}(X)$ est isomorphe à un espace affine relatif (possiblement de dimension infinie). En particulier, le $\mathrm{V}_p(X)$-schéma $\mathrm{V}_{p+1}(X)$ admet des sections (qui ne sont pas nécessairement des Δ-sections). Ceci permet de conclure. ■

Lemme 5.11.6. — *Soient A un C-schéma en groupes commutatif et X un (C, Δ)-schéma affine. Alors, il existe un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée des groupes abéliens*

$$\mathrm{Tot}\, \tau^{\leqslant 1}\Omega^\bullet(\mathrm{V}_\bullet(X); A) \simeq \Omega^\bullet(X; A).$$

Il est donné par un zigzag de quasi-isomorphismes naturels en X.

Démonstration. — On a des inclusions évidentes

$$\mathrm{Tot}\, \tau^{\leqslant 1}\Omega^\bullet(\mathrm{V}_\bullet(X); A) \overset{(1)}{\hookrightarrow} \mathrm{Tot}\, \Omega^\bullet(\mathrm{V}_\bullet(X); A) \overset{(2)}{\hookleftarrow} \Omega^\bullet(X; A). \tag{5.87}$$

Puisque les $(\mathbb{Q}, \Delta)$-algèbres $\mathcal{O}(\mathrm{V}_n(X))$ sont primitivement closes, la proposition 5.10.2 entraîne que les inclusions $\tau^{\leqslant 1}\Omega^\bullet(\mathrm{V}_n(X); A) \hookrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{V}_n(X); A)$ sont des quasi-isomorphismes. Il s'ensuit que l'inclusion (1) de (5.87) est un quasi-isomorphisme. Par ailleurs, le raisonnement utilisé dans la seconde partie de la preuve du lemme 5.11.5 montre que l'inclusion (2) de (5.87) est aussi un quasi-isomorphisme. ■

Notation 5.11.7. — Dans la suite, on se concentre sur le cas où $X = \mathrm{Spec}(K)$, avec K comme au début de la sous-section. On écrira alors $V_\bullet$ au lieu de $\mathrm{V}_\bullet(\mathrm{Spec}(K))$. □

Proposition 5.11.8. — *Soit A une C-variété semi-abélienne. Il existe un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée des $\mathbb{Q}$-vectoriels*

$$\tau^{\geqslant 1}\Omega^\bullet(K; A) \simeq \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet; A)[-1].$$

Il est donné par un zigzag de quasi-isomorphismes naturels en K. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a des isomorphismes évidents $\mathrm{H}^1(\Omega^\bullet(V_n; A)) \simeq \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(V_n; A)$.

Démonstration. — Le lemme 5.11.6, fournit un morphisme de triangles distingués

$$\begin{tikzcd}
A^\delta(K) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^\bullet(K; A) \arrow[r] \arrow[d, "\text{q.i.}"] & \tau^{\geqslant 1}\Omega^\bullet(K; A) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
A^\delta(V_\bullet) \arrow[r] & \mathrm{Tot}\, \tau^{\leqslant 1}\Omega^\bullet(V_\bullet; A) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\Omega^\bullet(V_\bullet; A))[-1] \arrow[r] & {}
\end{tikzcd} \tag{5.88}$$

où la flèche verticale au milieu est un quasi-isomorphisme. Puisque les V_n sont isomorphes à des espaces affines (possiblement de dimension infinie) sur K et que A est une variété semi-abélienne, on a

$$A^\delta(V_n) = A(V_n) \cap A^\delta(V_n) = A(K) \cap A^\delta(V_n) = A^\delta(K). \tag{5.89}$$

Il s'ensuit que la première flèche verticale dans (5.88) est un quasi-isomorphisme. Il en est donc de même de la troisième flèche dans (5.88). Pour terminer, il reste à voir que $\mathrm{H}^1(\Omega^\bullet(\mathcal{A}_n(X); A)) \simeq \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(V_n; A)$. Ceci découle du fait que K est algébriquement clos et que les V_n sont isomorphes à des espaces affines (possiblement de dimension infinie) sur K, ce qui assure que $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(V_n; A) = 0$ pour $i \geqslant 1$. ■

Remarque 5.11.9. — Les conditions d'application du théorème 5.10.12 sont satisfaites si l'on prend pour X l'un des (C, Δ)-schémas V_n. En effet, si A est une C-variété semi-abélienne, les égalités (5.89) montrent que $A^\delta(V_n) = A(C)$, ce qui donne la condition (iii) dudit théorème. De même, puisque V_n est isomorphe à un espace affine (possiblement de dimension infinie) sur K, on a aussi $A(V_n) \simeq A(K)$. Puisque C et K sont algébriquement clos, il s'ensuit que $A(K)/A(C) \simeq A(V_n)/A^\delta(V_n)$ est uniquement divisible. Étant donné que $B(V_n)/B^\delta(V_n)$ est un C-vectoriel si B est un C-schéma en vectoriels, la condition (ii) du théorème 5.10.12 est également satisfaite. □

Construction 5.11.10. — Avec les notations des constructions 5.10.11 et 5.11.4, on considère les objets semi-bisimpliciaux

$$\check{C}_\bullet(\mathcal{J}_{\mathrm{univ}}(V_\bullet)/V_\bullet) \qquad \text{et} \qquad (\check{C}_\bullet(\mathcal{J}_{\mathrm{univ}}(V_\bullet)/V_\bullet))_{\Delta=0}.$$

On appelle $W_\bullet$ et $(W_\bullet)_{\Delta=0}$ les diagonales respectives de ces objets semi-bisimpliciaux. Alors, $W_\bullet$ est un pro-(K,Δ)-schéma semi-simplicial qui est aussi un hyper-recouvrement pro-générique de K et $(W_\bullet)_{\Delta=0}$ est un pro-C-schéma semi-simplicial muni d'un morphisme évident $W_\bullet \longrightarrow K \otimes_C (W_\bullet)_{\Delta=0}$. □

Théorème 5.11.11. —

(a) Le morphisme évident $W_\bullet \longrightarrow V_\bullet$ est un torseur sous la diagonale du pro-C-schéma en groupes semi-bisimplicial $\check{C}_\bullet(\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet;-)})$ donné explicitement par

$$(\check{C}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_E)}(\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet;A_E),A_E)))_E.$$

(b) Le morphisme évident $(W_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow (V_\bullet)_{\Delta=0}$ est un torseur sous la diagonale du pro-C-schéma en groupes semi-bisimplicial $\mathrm{K}_\bullet([\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet,-)} \to \mathscr{U}_{\Gamma(V_\bullet;-)/\Gamma(V_\bullet;(-)^\delta)}])$ donné explicitement par

$$(\mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_E)}([A_E(V_\bullet)/A_E^\delta(V_\bullet) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet;A_E)],A_E)))_E.$$

(c) Pour tout C-schéma en groupes commutatif A, le morphisme composé

$$A((W_\bullet)_{\Delta=0}) \longrightarrow A^\delta(W_\bullet) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{fttf}}(W;A^\delta) \simeq \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{fttf}}(K;A^\delta)$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — Les assertions (a) et (b) découlent aussitôt des constructions 5.10.11 et 5.11.10. Il reste à démontrer (c). Grâce au corollaire 5.8.8, il suffit de montrer que $A((W_\bullet)_{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ \Omega^\bullet(W_\bullet;A)$ est un quasi-isomorphisme. Grâce à la proposition 5.1.9, on se ramène à montrer que le morphisme

$$\mathrm{Tot}\ A((\check{C}_\bullet(\mathcal{J}_{\mathrm{univ}}(V_\bullet)/V_\bullet))_{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ \Omega^\bullet(\check{C}_\bullet(\mathcal{J}_{\mathrm{univ}}(V_\bullet)/V_\bullet);A)$$

est un quasi-isomorphisme. Or, le théorème 5.10.12 affirme que les morphismes

$$A((\check{C}_\bullet(\mathcal{J}_{\mathrm{univ}}(V_n)/V_n))_{\Delta=0}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\ \Omega^\bullet(\check{C}_\bullet(\mathcal{J}_{\mathrm{univ}}(V_n)/V_n);A)$$

sont des quasi-isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui permet de conclure. ■

Notations 5.11.12. — Appelons $V_\bullet^+ = \mathrm{E}_\bullet(V)$ le (K,Δ)-schéma simplicial strictement scindé associé à $V_\bullet$ comme dans la proposition 4.2.6. On dispose alors d'un morphisme de complexes de pro-C-schémas en groupes semi-simpliciaux

$$[\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet,-)} \to \mathscr{U}_{\Gamma(V_\bullet;-)/\Gamma(V_\bullet;(-)^\delta)}] \longrightarrow [\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet^+,-)} \to \mathscr{U}_{\Gamma(V_\bullet^+;-)/\Gamma(V_\bullet^+;(-)^\delta)}] \tag{5.90}$$

est le but de ce morphisme est naturellement un objet simplicial. En appliquant le foncteur $\mathrm{K}_\bullet$ au morphisme (5.90), on obtient un morphisme de pro-C-schémas en groupes semi-bisimpliciaux

$$\mathrm{K}_\bullet([\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet,-)} \to \mathscr{U}_{\Gamma(V_\bullet;-)/\Gamma(V_\bullet;(-)^\delta)}]) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet([\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet^+,-)} \to \mathscr{U}_{\Gamma(V_\bullet^+;-)/\Gamma(V_\bullet^+;(-)^\delta)}]) \tag{5.91}$$

et le but de ce morphisme est naturellement un objet bisimplicial. On note $(W_\bullet)^+_{\Delta=0}$ le poussé en avant du torseur $(W_\bullet)_{\Delta=0}$ suivant le morphisme diag((5.91)). Alors, $(W_\bullet)^+_{\Delta=0}$ est un torseur sous la diagonale de

$$\mathrm{K}_\bullet([\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet^+,-)} \to \mathscr{U}_{\Gamma(V_\bullet^+;-)/\Gamma(V_\bullet^+;(-)^\delta)}]) \tag{5.92}$$

défini sur $(V_\bullet)_{\Delta=0}$. De plus, on dispose d'un morphisme évident $(W_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow (W_\bullet)^+_{\Delta=0}$ de $(V_\bullet)_{\Delta=0}$-schémas semi-simpliciaux. □

Proposition 5.11.13. — *Soit $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille représentative des classes d'isogénie de C-variétés abéliennes simples. Il existe un morphisme de pro-C-schémas en groupes commutatifs simpliciaux*

$$\begin{aligned} \mathrm{diag}((5.92)) \quad \longrightarrow \quad & \prod_{i\geqslant 1} \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_m),\mathbf{G}_m),i) \\ & \times \prod_{\alpha\in I}\prod_{i\geqslant 1} \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A_\alpha),\mathcal{U}(A_\alpha)),i) \end{aligned} \tag{5.93}$$

qui est une équivalence d'homotopie simpliciale. (Tous les produits ci-dessus sont fibrés au-dessus de C.)

Démonstration. — Appelons $\mathrm{N}_\bullet(-)$ le foncteur « complexe normalisé » quasi-inverse du foncteur « objet simplicial d'Eilenberg–Mac Lane généralisé » $\mathrm{K}_\bullet(-)$ (voir la notation 5.10.8). Il revient au même de construire un morphisme du complexe $\mathrm{N}_\bullet(\mathrm{diag}((5.92)))$ vers le complexe

$$\prod_{i\geqslant 1} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}),\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})[i] \times \prod_{\alpha\in I}\prod_{i\geqslant 1} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A_\alpha),\mathcal{U}(A_\alpha))[i] \tag{5.94}$$

qui soit un isomorphisme à homotopie près. On divise la construction d'un tel morphisme en plusieurs étapes.

Étape 1. — Grâce à la transformation naturelle d'Alexander–Whitney $\mathrm{N}_\bullet(\mathrm{diag}(-)) \longrightarrow \mathrm{Tot}\,\mathrm{N}_{\bullet,\bullet}(-)$ (voir la définition 5.1.8 dans le cas cosimplicial non normalisé), il suffit de construire un morphisme du complexe $\mathrm{Tot}\,\mathrm{N}_{\bullet,\bullet}((5.92))$ vers le complexe (5.94) qui soit un isomorphisme à homotopie près. Or, $\mathrm{Tot}\,\mathrm{N}_{\bullet,\bullet}((5.92))$ est donné par

$$\mathscr{V}_\bullet = \mathrm{Cône}\{\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet,-)} \to \mathscr{U}_{\Gamma(V_\bullet;-)/\Gamma(V_\bullet;(-)^\delta)}\}.$$

D'après le corollaire 5.9.26, on dispose d'une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} \mathscr{V}^\alpha_\bullet \longrightarrow \mathscr{V}_\bullet \longrightarrow \mathscr{V}^{\mathrm{a}}_\bullet \oplus \mathscr{V}^{\mathrm{m}}_\bullet \longrightarrow 0 \tag{5.95}$$

telle que

— $\mathscr{V}^{\mathrm{a}}_\bullet = \underline{\mathrm{Hom}}_C(\mathrm{Tot}[\mathcal{O}(V_\bullet)/\mathcal{O}(V_\bullet)^{\Delta=0} \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet)],\mathbf{G}_{\boldsymbol{a}})$;

— $\mathscr{V}^{\mathrm{m}}_\bullet = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Tot}[\mathcal{O}^\times(V_\bullet)/\mathcal{O}^\times((V_\bullet)_{\Delta=0}) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet)],\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})$;

— $\mathscr{V}^\alpha_\bullet = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{Tot}[A_\alpha(V_\bullet)/A^\delta_\alpha(V_\bullet) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet;A_\alpha)],\mathcal{U}(A_\alpha))$.

Puisque les (C,Δ)-algèbres $\mathcal{O}(V_n)$ sont primitivement closes, le complexe de pro-C-vectoriels $\mathscr{V}^{\mathrm{a}}_\bullet$ est acyclique. Par ailleurs, $\mathrm{Tot}[\mathcal{O}^\times(V_\bullet)/\mathcal{O}^\times((V_\bullet)_{\Delta=0}) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet)]$ est quasi-isomorphe à $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})[-1]$ et donc aussi à $\tau^{\geqslant 1}\Omega^\bullet(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})$ d'après la proposition 5.11.8. Il existe donc un monomorphisme scindé

$$\bigoplus_{i\geqslant 1} \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})[-i] \xrightarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}[\mathcal{O}^\times(V_\bullet)/\mathcal{O}^\times((V_\bullet)_{\Delta=0}) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet)]$$

induisant l'identité en cohomologie. Il s'ensuit une décomposition $\mathscr{V}^{\mathrm{m}}_\bullet = \mathscr{V}'^{\mathrm{m}}_\bullet \oplus \overline{\mathscr{V}}^{\mathrm{m}}_\bullet$ avec

$$\mathscr{V}'^{\mathrm{m}}_\bullet = \bigoplus_{i\geqslant 1} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}),\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})[i]$$

et $\overline{\mathscr{V}}^{\mathrm{m}}_\bullet$ acyclique. Puisque le morphisme $\mathscr{V}_\bullet \longrightarrow \mathscr{V}^{\mathrm{a}} \oplus \mathscr{V}^{\mathrm{m}}$ est surjectif, on peut trouver un sous-complexe de $\mathscr{V}_\bullet$ qui s'envoie isomorphiquement sur $\mathscr{V}^{\mathrm{a}}_\bullet \oplus \overline{\mathscr{V}}^{\mathrm{m}}_\bullet$. Appelons $\mathscr{V}'_\bullet$ le noyau de la surjection $\mathscr{V}_\bullet \twoheadrightarrow \mathscr{V}^{\mathrm{a}}_\bullet \oplus \overline{\mathscr{V}}^{\mathrm{m}}_\bullet$. On a donc une décomposition $\mathscr{V} = \mathscr{V}'_\bullet \oplus \mathscr{V}^{\mathrm{a}}_\bullet \oplus \overline{\mathscr{V}}^{\mathrm{m}}_\bullet$. Clairement, il suffit de construire un morphisme de $\mathscr{V}'_\bullet$ vers le complexe (5.94) qui soit un isomorphisme à homotopie près.

Étape 2. — La suite exacte courte (5.95) induit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} \mathscr{V}^\alpha_\bullet \longrightarrow \mathscr{V}'_\bullet \longrightarrow \mathscr{V}'^{\mathrm{m}}_\bullet \longrightarrow 0. \tag{5.96}$$

Pour $\alpha \in I$ fixé, le complexe $\mathrm{Tot}[A_\alpha(V_\bullet)/A^\delta_\alpha(V_\bullet) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet;A_\alpha)]$ est quasi-isomorphe à $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet;A_\alpha)[-1]$ et donc aussi à $\tau^{\geqslant 1}\Omega^\bullet(K;A)$ d'après la proposition 5.11.8. Puisque $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A_\alpha)$ est une algèbre simple, il existe un monomorphisme scindé $\mathrm{End}(A_\alpha)$-linéaire

$$\bigoplus_{i\geqslant 1} \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A_\alpha)[-i] \xrightarrow{\text{q.i.}} \mathrm{Tot}[A_\alpha(V_\bullet)/A^\delta_\alpha(V_\bullet) \to \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet;A_\alpha)]$$

induisant l'identité en cohomologie. Il s'ensuit un quasi-isomorphisme surjectif

$$\mathscr{V}^\alpha_\bullet \overset{\text{q.i.}}{\twoheadrightarrow} \mathscr{V}'^\alpha_\bullet = \prod_{i\geqslant 1} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A_\alpha),A_\alpha)[i].$$

En prenant le push-out de $\mathscr{V}'_\bullet$ suivant le produit des $\mathscr{V}^\alpha_\bullet \twoheadrightarrow \mathscr{V}'^\alpha_\bullet$, on obtient un quasi-isomorphisme surjectif $\mathscr{V}'_\bullet \twoheadrightarrow \mathscr{V}''_\bullet$ vers un complexe $\mathscr{V}''$ qui s'insère dans une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} \mathscr{V}'^\alpha_\bullet \longrightarrow \mathscr{V}''_\bullet \longrightarrow \mathscr{V}'^{\mathrm{m}}_\bullet \longrightarrow 0. \tag{5.97}$$

Nous allons montrer dans la dernière étape de la preuve que le complexe $\mathscr{V}''_\bullet$ est isomorphe au but du morphisme (5.93), ce qui terminera la preuve de la proposition.

Étape 3. — La suite exacte (5.97) est scindée en chaque degré. Pour chaque $i \geqslant 1$, on peut donc fixer un isomorphisme

$$\mathscr{V}''_i = \mathscr{V}'^{\mathrm{m}}_i \times \prod_{\alpha\in I} \mathscr{V}'^\alpha_i = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_m),\mathbf{G}_m) \times \prod_\alpha \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A_\alpha),A_\alpha).$$

Il reste à voir que les différentielles dans le complexe $\mathscr{V}''_\bullet$ sont nulles.

Par construction, les complexes $\mathscr{V}'^{\mathrm{m}}_\bullet$ et $\mathscr{V}'^\alpha_\bullet$ sont à différentielles nulles. Ainsi, pour $i \geqslant 2$, la différentielle $d_i : \mathscr{V}''_i \longrightarrow \mathscr{V}''_{i-1}$ se factorise de la manière suivante

$$\mathscr{V}''_i \twoheadrightarrow \mathscr{V}'^{\mathrm{m}}_i \xrightarrow{e_i} \prod_\alpha \mathscr{V}'^\alpha_{i-1} \hookrightarrow \mathscr{V}''_{i-1}.$$

Supposons par l'absurde que le morphisme $e_i = (e_{i,\alpha})_\alpha$ est non nul (pour un certain $i \geqslant 2$). Il existe donc $\alpha \in I$ telle que la composante $e_{i,\alpha} : \mathscr{V}'^{\mathrm{m}}_i \longrightarrow \mathscr{V}'^\alpha_{i-1}$ est non nulle. On peut alors trouver une C-variété semi-abélienne B, extension de A_α par une copie de $\mathbf{G}_m$, ainsi qu'un morphisme $\theta : \mathscr{V}'^\alpha_{i-1} \longrightarrow B$ tel que le morphisme composé $\theta \circ e_{i,\alpha} : \mathscr{V}'^{\mathrm{m}}_i \longrightarrow B$ est non nul. Il existe alors un unique morphisme $\rho : \mathscr{V}'^{\mathrm{m}}_i \longrightarrow \mathbf{G}_m$ faisant commuter le carré suivant

$$\begin{tikzcd} \mathscr{V}'^{\mathrm{m}}_i \arrow[r, "e_{i,\alpha}"] \arrow[d, "\rho"] & \mathscr{V}'^\alpha_{i-1} \arrow[d, "\theta"] \\ \mathbf{G}_m \arrow[r] & B. \end{tikzcd}$$

Le morphisme ρ étant non nul, il définit une classe de cohomologie non nulle dans $\mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}(\mathscr{V}''_\bullet,\mathbf{G}_m))$ dont l'image par le morphisme de complexes

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{V}''_\bullet,\mathbf{G}_m) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{V}''_\bullet,B)$$

est nulle. En précomposant avec les quasi-isomorphismes construits ci-dessus, on obtient une classe de cohomologie non nulle dans $\mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}(\mathrm{diag}((5.92));\mathbf{G}_m))$ dont l'image par le morphisme de complexes

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{diag}((5.92));\mathbf{G}_m) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{diag}((5.92));B) \tag{5.98}$$

est nulle. Or, grâce à la proposition 5.9.27, le morphisme (5.98) s'identifie, à quasi-isomorphisme près, au morphisme $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet;\mathbf{G}_m)[-1] \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet;B)[-1]$. D'après la proposition 5.11.8, le morphisme précédent s'identifie, à quasi-isomorphisme près, au morphisme $\tau^{\geqslant 1}\Omega^\bullet(K;\mathbf{G}_m) \longrightarrow \tau^{\geqslant 1}\Omega^\bullet(K;B)$. Enfin, d'après le lemme 5.8.10 (et plus précisément la preuve dudit lemme), ce dernier morphisme est injectif en cohomologie. C'est la contradiction recherchée. ∎

Lemme 5.11.14. — *Le poussé en avant de $W^+_\bullet$ suivant le morphisme* (5.93) *est un torseur trivial. De plus, il admet une unique trivialisation.*

Démonstration. — Le morphisme $(5.93) \circ \mathrm{diag}((5.91))$ se factorise par la diagonale de

$$\mathrm{K}_\bullet([\mathscr{U}^{\mathrm{sa}}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(V_\bullet;-)} \to \mathscr{U}^{\mathrm{sa}}_{\Gamma(V_\bullet;-)/\Gamma(V_\bullet;(-)^\delta)}]).$$

D'après le lemme 5.10.16, il s'ensuit que le poussé en avant qui nous intéresse est pro-trivial. (En fait, nous avons besoin d'une version semi-simpliciale dudit lemme. Une telle version est valable pour $V_\bullet$ car on a $A^\delta(V_n) = A(C)$ et $A(V_n) = A(K)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que les ind-scindages de l'inclusion $A(C) \hookrightarrow A(K)$ fournissent des pro-trivialisations semi-simpliciales.)

Pour conclure, il est suffisant de montrer l'assertion suivante. Soient B une pro-C-variété abélienne et $Y_\bullet \longrightarrow (V_\bullet)_{\Delta=0}$ un torseur pro-trivial sous $\mathrm{K}_\bullet(B,i)$. Alors $Y_\bullet$ est un torseur trivial et sa trivialisation est unique. Pour ce faire, supposons que B est donné par un système projectif $(B_s)_{s\in S}$. Notons $Y_{s,\bullet}$ le poussé en avant de $Y_\bullet$ par le morphisme $\mathrm{K}_\bullet(B,i) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(B_s,i)$. Par hypothèse, le torseur $Y_{s,\bullet}$ est trivial, i.e., il existe un isomorphisme de torseurs

$$\tau_s : Y_{s,\bullet} \simeq \mathrm{diag}(\mathrm{K}_\bullet(B_s,i) \times_C (V_\bullet)_{\Delta=0}).$$

Un autre automorphisme de torseurs comme ci-dessus diffère de τ_s par une translation suivant un morphisme de pro-C-schémas semi-simpliciaux $(V_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(B_s,i)$. Or, d'après la remarque 5.11.9, un tel morphisme se factorise par $\mathrm{Spec}(C) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(B,i)$. Si $i \geqslant 1$, il y a un seul tel C-point semi-simplicial : celui induit par le zéro de B. On a ainsi montré que la trivialisation τ_s est unique. Il s'ensuit aussitôt que la famille $(\tau_s)_{s\in S}$ fournit une trivialisation du torseur $Y_\bullet$ comme souhaité. ∎

Notations 5.11.15. — On pose

$$H^{\mathrm{m}}_\bullet = \prod_{i\geqslant 1} \mathrm{K}_\bullet\left(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_m),\mathbf{G}_m), i\right).$$

Pour $\alpha \in I$, on pose

$$H^{\alpha}_\bullet = \prod_{i\geqslant 1} \mathrm{K}_\bullet\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A_\alpha),\mathcal{U}(A_\alpha)), i\right).$$

On note aussi $H_\bullet = H^{\mathrm{m}}_\bullet \times \prod_{\alpha\in I} H^\alpha_\bullet$. □

Corollaire 5.11.16. — *Il existe un morphisme de pro-C-schémas semi-simpliciaux*

$$(W_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow H_\bullet \tag{5.99}$$

tel que, pour toute C-variété semi-abélienne A, le morphisme induit $A(H_\bullet) \longrightarrow A((W_\bullet)_{\Delta=0})$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — Le morphisme (5.99) s'obtient en appliquant le lemme 5.11.14. Pour démontrer que $A(H_\bullet) \longrightarrow A((W_\bullet)_{\Delta=0})$ est un quasi-isomorphisme on utilise le lemme 5.10.16 est le fait que le morphisme (5.93) construit dans la preuve de la proposition 5.11.13 est une équivalence d'homotopie simpliciale. ∎

À présent, on fixe une hyper-enveloppe universelle cyclique $Q_\bullet$ de K munie d'un morphisme de pro-(K,Δ)-schémas semi-simpliciaux $Q_\bullet \longrightarrow W_\bullet$. Grâce au corollaire 5.11.16, on déduit un morphisme de pro-C-schémas semi-simpliciaux

$$(Q_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow H_\bullet. \tag{5.100}$$

(On rappelle que $(Q_\bullet)_{\Delta=0}$ est le type d'homotopie feuilletée générique de K que l'on cherche à expliciter dans cette sous-section ; voir la définition 4.6.21.)

Proposition 5.11.17. — *Pour toute C-variété semi-abélienne A, le morphisme*

$$A(H_\bullet) \longrightarrow A((Q_\bullet)_{\Delta=0}), \tag{5.101}$$

induit par (5.100)*, est un quasi-isomorphisme. Plus précisément, si A est un C-tore ou une C-variété abélienne, on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{H}^i(A(H_\bullet)) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A) \qquad et \qquad \mathrm{H}^i(A((Q_\bullet)_{\Delta=0})) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A),$$

et, modulo ces isomorphismes, (5.101) *induit l'identité en cohomologie.*

Démonstration. — Grâce au corollaire 5.11.16, il suffit de démontrer la proposition avec $H_\bullet$ remplacé par $(W_\bullet)_{\Delta=0}$. Le résultat découle alors du théorème 5.11.11(c) combiné avec le corollaire 4.6.22. ∎

Construction 5.11.18. — Nous allons maintenant construire un torseur $\widetilde{H}_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ sous un pro-C-tore simplicial, admettant un morphisme $(Q_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow \widetilde{H}_\bullet$ qui factorise (5.100) et qui a des meilleures propriétés cohomologiques. (En fait, l'existence de ce morphisme sera établi dans le théorème 5.11.19 ci-dessous.) On procède en plusieurs étapes.

Étape 1. — Fixons un indice $\alpha \in I$ et considérons la composition de

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(H^{\alpha}_{\bullet};\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}((Q_{\bullet})_{\Delta=0};\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \simeq \mathcal{O}^{\times}((Q_{\bullet})_{\Delta=0}) \simeq \Omega^{\bullet}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})$$

dans la catégorie dérivée des groupes abéliens. Grâce au corollaire 5.9.10, on déduit un morphisme dans la catégorie dérivée des $\mathbb{Q}$-vectoriels

$$\mathrm{NS}^1(H^{\alpha}_{\bullet})[-1] \longrightarrow \tau^{\geqslant 1}\Omega(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}). \tag{5.102}$$

Notons aussi que, d'après ledit lemme, on a

$$\mathrm{NS}^1(H^{\alpha}_{\bullet}) = \mathrm{NS}^1_{\mathbb{Q}}\left(\prod_{i\geqslant 1}\mathrm{K}_{\bullet}\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_{\alpha})}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A_{\alpha}),A_{\alpha}),i\right)\right).$$

Appelons $\mathrm{N}^i_{\alpha} = \mathrm{H}^i(\mathrm{NS}^1(H^{\alpha}))$ les groupes de cohomologie du complexe $\mathrm{NS}^1(H^{\alpha}_{\bullet})$. Ce sont des $\mathbb{Q}$-vectoriels, nuls pour $i \leqslant 2$ (voir le théorème 5.5.13). Le morphisme (5.102) induit des morphismes de $\mathbb{Q}$-vectoriels

$$\theta^i_{\alpha} : \mathrm{N}^i_{\alpha} \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \tag{5.103}$$

pour $i \geqslant 0$.

Étape 2. — Fixons un morphisme de complexes

$$\bigoplus_{i\geqslant 0}\mathrm{N}^i_{\alpha}[-i] \longrightarrow \mathrm{NS}^1(H^{\alpha}_{\bullet}) \tag{5.104}$$

induisant l'identité en cohomologie et qui se factorise par le sous-complexe normalisé de $\mathrm{NS}^1(H^{\alpha}_{\bullet})$. Il s'ensuit un morphisme de pro-C-tores simpliciaux

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{NS}^1(H^{\alpha}_{\bullet}),\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \longrightarrow \prod_{i\geqslant 0}\mathrm{K}_{\bullet}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{N}^i_{\alpha},\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}),i). \tag{5.105}$$

Considérons par ailleurs le torseur

$$\mathcal{V}\left(\prod_{i\geqslant 1}\mathrm{K}_{\bullet}\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_{\alpha})}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;A_{\alpha}),A_{\alpha}),i\right)\right) \tag{5.106}$$

sous le pro-C-tore $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{NS}^1(H^{\alpha}_{\bullet}),\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})$ défini sur $H^{\alpha}_{\bullet}$. (Voir la construction 5.9.11.) On note $\widehat{H}^{\alpha}_{\bullet}$ le poussé en avant de (5.106) suivant le morphisme (5.105).

Étape 3. — Par ailleurs, considérons le pro-C-schéma simplicial

$$\widehat{H}^{\mathrm{m}}_{\bullet} = \prod_{i\geqslant 1}\mathrm{E}_{\bullet}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}),i).$$

On dispose d'un morphisme évident $\widehat{H}^{\mathrm{m}}_{\bullet} \longrightarrow H^{\mathrm{m}}_{\bullet}$ qui fait que $\widehat{H}^{\mathrm{m}}_{\bullet}$ un torseur sous le pro-C-tore

$$\prod_{i\geqslant 0}\mathrm{K}_{\bullet}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}),\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}),i).$$

On pose $\widehat{H}_{\bullet} = \widehat{H}^{\mathrm{m}}_{\bullet} \times \prod_{\alpha\in I}\widehat{H}^{\alpha}_{\bullet}$. C'est un torseur au-dessus de $H_{\bullet}$ sous le pro-C-tore

$$\prod_{i\geqslant 0}\mathrm{K}_{\bullet}\left(\underline{\mathrm{Hom}}\left(\mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in I}\mathrm{N}^i_{\alpha},\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}\right),i\right).$$

Pour $i \geqslant 0$, on pose

$$\mathrm{M}^i = \ker\left\{(\mathrm{id},(\theta^i_{\alpha})_{\alpha\in I}) : \mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in I}\mathrm{N}^i_{\alpha} \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})\right\}.$$

On définit $\widetilde{H}_{\bullet}$ comme étant le push-out de $\widehat{H}_{\bullet}$ suivant le morphisme de pro-C-tores

$$\prod_{i\geqslant 0}\mathrm{K}_{\bullet}\left(\underline{\mathrm{Hom}}\left(\mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in I}\mathrm{N}^i_{\alpha},\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}\right),i\right) \longrightarrow \prod_{i\geqslant 0}\mathrm{K}_{\bullet}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{M}^i,\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}),i).$$

Ainsi, $\widetilde{H}_\bullet$ est un torseur sous $\prod_{i\geqslant 0} \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{M}^i, \mathbf{G}_m), i)$ défini sur $H_\bullet$. □

Théorème 5.11.19. — *Il existe un morphisme de pro-C-schémas semi-simpliciaux*

$$(Q_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow \widetilde{H}_\bullet \tag{5.107}$$

qui factorise le morphisme (5.100). *De plus, pour toute C-variété semi-abélienne A, le morphisme*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\widetilde{H}_\bullet; A) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}((Q_\bullet)_{\Delta=0}; A) \simeq A((Q_\bullet)_{\Delta=0})$$

est un isomorphisme dans la catégorie dérivée des groupes abéliens.

Démonstration. — Pour $e \in \mathrm{M}^j$, avec $j \geqslant 0$, on note $\widetilde{H}_\bullet(e)$ le push-out de $\widetilde{H}_\bullet$ par le morphisme

$$\prod_{i\geqslant 0} \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{M}^i, \mathbf{G}_m), i) \xrightarrow{e^*} \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{G}_m, j).$$

Nous allons montrer que la restriction du torseur $\widetilde{H}_\bullet(e)$ à $(Q_\bullet)_{\Delta=0}$ admet une trivialisation. Ceci, pour tout j et e, entraîne l'existence d'un morphisme (5.107). Or, par construction, la classe caractéristique de $\widetilde{H}_\bullet(e)$ dans $\mathrm{H}^{j+1}_{\text{ét}}(H_\bullet; \mathbf{G}_m)$ est égale à e modulo l'isomorphisme

$$\mathrm{H}^{j+1}_{\text{ét}}(H_\bullet; \mathbf{G}_m) \simeq \mathrm{H}^{j+1}_{\text{dR}}(K; \mathbf{G}_m) \oplus \bigoplus_{\alpha\in I} \mathrm{N}^\alpha_j.$$

(Voir la construction 5.3.16 dans le cas $G = \{1\}$.) Puisque e appartient à M^j, son image par

$$\mathrm{H}^{j+1}_{\text{ét}}(H_\bullet; \mathbf{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^{j+1}_{\text{ét}}((Q_\bullet)_{\Delta=0}; \mathbf{G}_m) \simeq \mathrm{H}^{j+1}_{\text{dR}}(K; \mathbf{G}_m)$$

est nulle. Étant donné que $(Q_\bullet)_{\Delta=0}$ est, en chaque degré, le spectre d'un corps algébriquement clos, le torseur $\widetilde{H}_\bullet(e) \times_{H_\bullet} (Q_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow (Q_\bullet)_{\Delta=0}$ est essentiellement simplicial. La proposition 5.3.13 entraîne donc que ce torseur est trivial comme souhaité.

On passe à la seconde partie de l'énoncé. Grâce à la proposition 5.11.17, il est suffisant de montrer que le morphisme évident

$$A(H_\bullet) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\widetilde{H}_\bullet; A) \tag{5.108}$$

est un quasi-isomorphisme.

Dans l'étape 2 de la construction 5.11.18, nous avons fixé une inclusion $\bigoplus_{i\geqslant 0} \mathrm{N}^i_\alpha[-i] \hookrightarrow \mathrm{N}_\bullet(\mathrm{NS}^1(H^\alpha))$ (avec $\mathrm{N}_\bullet(\mathrm{NS}^1(H^\alpha))$ le complexe normalisé du groupe cosimplicial $\mathrm{NS}^1(H^\alpha_\bullet)$). Fixons un facteur direct $D^\alpha_\bullet$ de $\mathrm{N}_\bullet(\mathrm{NS}^1(H^\alpha))$ supplémentaire à cette inclusion. Alors $D^\alpha_\bullet$ est acyclique et ${}^{\backprime}\mathrm{M}^\bullet = \mathrm{M}^\bullet \oplus \bigoplus_{\alpha\in I} D^\alpha_\bullet$ s'identifie à un sous-complexe

$${}^{\backprime}\mathrm{M}^\bullet \subset \left(\bigoplus_{i\geqslant 0} \mathrm{H}^{i+1}_{\text{dR}}(k; \mathbf{G}_m)[-i]\right) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in I} \mathrm{N}_\bullet(\mathrm{NS}^1(H^\alpha))\right)$$

qui se projète isomorphiquement sur le second facteur. On note ${}^{\backprime}\widetilde{H}_\bullet$ le torseur sur $H_\bullet$ obtenu de

$$\widehat{H}^{\mathrm{m}}_\bullet \times \prod_\alpha \mathcal{V}\left(\prod_{i\geqslant 1} \mathrm{K}_\bullet\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{H}^i_{\text{dR}}(K; A_\alpha), A_\alpha), i\right)\right)$$

en poussant en avant suivant le morphisme de pro-C-tores simpliciaux

$$\prod_{i\geqslant 0} \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{H}^{i+1}_{\text{dR}}(K; \mathbf{G}_m), \mathbf{G}_m), i) \times \prod_\alpha \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{NS}^1(H^\alpha_\bullet), \mathbf{G}_m) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}({}^{\backprime}\mathrm{M}^\bullet, \mathbf{G}_m)).$$

Par construction, on dispose d'un morphisme évident ${}^{\backprime}\widetilde{H}_\bullet \longrightarrow \widetilde{H}_\bullet$ qui est un hyper-recouvrement pro-étale. Pour montrer que (5.108) est un quasi-isomorphisme, il revient au même de montrer qu'il en est ainsi du morphisme $A(H_\bullet) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}({}^{\backprime}\widetilde{H}_\bullet; A)$. En fait, on a mieux : le morphisme $A(H_n)[0] \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}({}^{\backprime}\widetilde{H}_n; A)$ est un quasi-isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, H_n est une pro-variété semi-abélienne n'admettant pas d'extensions affines non scindées, et ${}^{\backprime}\widetilde{H}_n$ est isomorphe, non canoniquement, à $\mathcal{V}(\widetilde{H}_n)$, le torseur de type multiplicatif universel sur $\widetilde{H}_n$. (Voir la construction 5.9.11.) Grâce à la proposition 5.9.12, on a bien un quasi-isomorphisme $A(H_n)[0] \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathcal{V}(\widetilde{H}_n); A)$ comme souhaité. ■

5.12. Tour de Postnikov du type d'homotopie feuilletée, VI. Scindage (fin). —

On garde les notations et les hypothèses de la sous-section 5.11. On achève ici notre description du type d'homotopie feuilletée du Δ-corps K. Nous aurons besoin d'une variante « normalisée » du pro-C-schéma simplicial $\widetilde{H}_\bullet$ introduit dans la construction 5.11.18. Ceci fera l'objet de la construction suivante.

Construction 5.12.1. — Remarquons que $\widehat{H}^{\mathrm{m}}_\bullet$ est en fait un torseur sous le pro-C-tore simplicial

$$\prod_{i\geqslant 0} \mathrm{E}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}),\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}), i+1) = \prod_{i\geqslant 0} \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}([\mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) = \mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})][-i],\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})).$$

Il s'ensuit que $\widetilde{H}_\bullet \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} H^\alpha_\bullet$ est naturellement un torseur sous

$$\prod_{i\geqslant 0} \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}([\mathrm{M}^i \to \mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})][-i],\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})).$$

Appelons $\overline{\mathrm{M}}^i$ et $\overline{\mathrm{H}}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})$ le noyau et le conoyau du morphisme $\mathrm{M}^i \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})$ et fixons un morphisme de complexes

$$\overline{\mathrm{M}}^i[-i] \oplus \overline{\mathrm{H}}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})[-i-1] \longrightarrow [\mathrm{M}^i \to \mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})][-i]$$

induisant l'identité en cohomologie. On définit alors $\overline{H}_\bullet$ comme étant le poussé en avant du torseur $\widetilde{H}_\bullet$ suivant le morphisme

$$\prod_{i\geqslant 0} \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}([\mathrm{M}^i \to \mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})][-i],\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})) \longrightarrow \prod_{i\geqslant 0} \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\mathrm{M}}^i[-i] \oplus \overline{\mathrm{H}}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})[-i-1],\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})).$$

Par construction, $\overline{H}_\bullet \longrightarrow \prod_\alpha H^\alpha_\bullet$ est un torseur sous le pro-C-tore

$$\prod_{i\geqslant 1} \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\mathrm{M}}^i,\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}), i) \times \prod_{i\geqslant 1} \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\mathrm{H}}^i_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}),\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}), i).$$

De plus, le morphisme $\widetilde{H}_\bullet \longrightarrow \overline{H}_\bullet$ est un hyper-recouvrement étale relatif. Il induit en particulier des quasi-isomorphismes $\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\overline{H}_\bullet;A) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\widetilde{H}_\bullet;A)$ pour tout C-schéma en groupes commutatif A. □

Construction 5.12.2. — Considérons le (K,Δ)-schéma $\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(K)$. Rappelons qu'il est muni d'une structure de torseur sous le pro-C-schéma en groupes commutatif $\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(K;-)}$. (Voir la définition 5.9.25.) On dispose d'un monomorphisme scindé $\mathscr{U}_{\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(K;-)} \hookrightarrow \mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(K;-)}$ et on fixe une rétraction $\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(K;-)} \twoheadrightarrow \mathscr{U}_{\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(K;-)}$. On note $\mathscr{U}'$ le noyau du morphisme évident $\mathscr{U}_{\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(K;-)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_C(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(K),\mathbf{G}_{\boldsymbol{a}})$ et on fixe une rétraction $\mathscr{U}_{\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(K;-)} \twoheadrightarrow \mathscr{U}'$ à l'inclusion évidente. On note alors $\mathfrak{J}'(K)$ le poussé en avant du torseur $\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(K)$ suivant le morphisme composé

$$\mathscr{U}_{\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(K;-)} \twoheadrightarrow \mathscr{U}_{\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(K;-)} \twoheadrightarrow \mathscr{U}'. \tag{5.109}$$

Alors, $L = \mathrm{Frac}(\mathfrak{J}'(K))$ est une Δ-extension normale de K ayant pour groupe de Galois différentiel un produit d'un pro-C-tore et d'un pro-C-schéma en groupes anti-affine, et qui est maximale pour cette propriété.

On note $(\check{C}_\bullet(\mathfrak{J}'(K)/K))_{\Delta=0}$ le pro-C-schéma simplicial tel que $K\otimes_C (\check{C}_\bullet(\mathfrak{J}'(K)/K))_{\Delta=0}$ est le poussé en avant de $\check{C}_\bullet(\mathfrak{J}'(K)/K)$ suivant le morphisme naturel $\check{C}_\bullet(\mathscr{U}') \twoheadrightarrow \mathrm{K}_\bullet(\mathscr{U}',1)$. (Voir la proposition 5.10.9.) Il existe alors des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Gal}^\Delta_\bullet(L/K) = \mathrm{Spec}(\check{C}^\bullet(L/K))_{\Delta=0} \simeq (\check{C}_\bullet(\mathfrak{J}'(K)/K))_{\Delta=0} \simeq \mathrm{K}_\bullet(\mathscr{U}',1).$$

Par ailleurs, le morphisme évident $W_\bullet \longrightarrow \check{C}_\bullet(\mathfrak{J}_{\mathrm{univ}}(K)/K)$ induit un morphisme

$$(W_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow (\check{C}_\bullet(\mathfrak{J}'(K)/K))_{\Delta=0}. \tag{5.110}$$

Quitte à modifier certains choix dans la construction du morphisme (5.93) de la proposition 5.11.13, on peut supposer que le morphisme (5.110) se factorise par $H_\bullet$. Ceci permet d'identifier $(\check{C}_\bullet(\mathfrak{J}'(K)/K))_{\Delta=0}$ à

$$H^{(1)}_\bullet = \mathrm{K}_\bullet\left(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(K;\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}),\mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \times \prod_{\alpha\in I} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(K;A_\alpha),\mathfrak{U}(A_\alpha)),1\right).$$

On obtient aussi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Q_\bullet \arrow[rrr] \arrow[d] & & & \mathrm{Spec}(\check{C}^\bullet(L/K)) \arrow[d] \\ (Q_\bullet)_{\Delta=0} \arrow[r] & \widetilde{H}_\bullet \arrow[r] & \overline{H}_\bullet \arrow[r] & H_\bullet^{(1)} = \mathrm{Gal}_\bullet^\Delta(L/K). \end{tikzcd}$$

(Le fait que $\widetilde{H}_\bullet \longrightarrow H_\bullet^{(1)}$ se factorise à travers $\overline{H}_\bullet$ découle des annulations $\mathrm{N}_\alpha^0 \simeq 0$, pour $\alpha \in I$, qui entraînent l'égalité $\overline{\mathrm{H}}^1_{\mathrm{dR}}(K; \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(K; \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}})$.)

Enfin, fixons une clôture normale $\widehat{K}/K$, contenue dans $\mathcal{O}(Q_0)/K$ et contenant L/K, et notons $\mathrm{Gal}^\Delta = \mathrm{Gal}^\Delta(\widehat{K}/K)$ son groupe de Galois différentiel. Le morphisme $(Q_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow H_\bullet^{(1)}$ se factorise alors par le classifiant $\mathrm{Gal}_\bullet^\Delta$, et on peut former le morphisme de pro-C-schémas semi-simpliciaux

$$(Q_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow \overline{H}_\bullet \times_{H_\bullet^{(1)}} \mathrm{Gal}_\bullet^\Delta. \tag{5.111}$$

Le résultat principal de cette sous-section porte sur ce morphisme. Il s'énonce comme suit. □

Théorème 5.12.3. — *Supposons que le Δ-corps K est cohomologiquement basique (au sens de la définition 5.7.15). Alors, le morphisme* (5.111) *est un hyper-recouvrement pro-générique relatif.*

Démonstration. — On divise la preuve en quatre parties. Les deux premières, contiennent des rappels et introduisent quelques notations. La preuve proprement dite est contenue dans les deux dernières parties.

Partie A. — On définit une tour de pro-C-schémas simpliciaux $(\overline{H}_\bullet^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante. Considérons le pro-C-schéma simplicial

$$H_\bullet^{\alpha,(n)} = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{K}_\bullet\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K; A_\alpha), \mathcal{U}(A_\alpha)), i\right).$$

Le morphisme de complexes $\mathrm{NS}^1(H_\bullet^{\alpha,(n)}) \longrightarrow \mathrm{NS}^1(H_\bullet^\alpha)$ est un isomorphisme en degrés $\leqslant n$. Il s'ensuit que le morphisme (5.104) induit un morphisme $\bigoplus_{0\leqslant i\leqslant n} \mathrm{N}^i_\alpha[-i] \hookrightarrow \mathrm{NS}^1(H_\bullet^{\alpha,(n)})$ qui est l'identité en cohomologie en degrés $\leqslant n$. On en déduit un morphisme de complexes $\bigoplus_{0\leqslant i\leqslant n} \overline{\mathrm{M}}^i[-i] \hookrightarrow \bigoplus_{\alpha\in I} \mathrm{NS}^1(H_\bullet^{\alpha,(n)})$. On note alors $\overline{H}_\bullet^{I,(n)}$ le poussé en avant du torseur

$$\prod_{\alpha\in I} \mathcal{V}\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{K}_\bullet\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(K; A_\alpha), A_\alpha), i\right)\right)$$

suivant le morphisme

$$\prod_{\alpha\in I} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{NS}^1(H_\bullet^{\alpha,(n)}), \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \longrightarrow \prod_{0\leqslant i\leqslant n} \mathrm{K}_\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\mathrm{M}}^i, \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}), i).$$

Enfin, on pose $\overline{H}_\bullet^{(n)} = \overline{H}_\bullet^{\mathrm{m},(n)} \times \overline{H}_\bullet^{I,(n)}$ avec

$$\overline{H}_\bullet^{\mathrm{m},(n)} = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{K}_\bullet\left(\underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\mathrm{H}}^i_{\mathrm{dR}}(K; \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}), \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}), i\right).$$

(Lorsque $n = 1$, on a $\overline{H}_\bullet^{(1)} = H_\bullet^{(1)}$, avec $H_\bullet^{(1)}$ comme dans la construction 5.12.2.) On a des morphismes évidents

$$\overline{H}_\bullet \longrightarrow \overline{H}_\bullet^{(n)} \tag{5.112}$$

qui sont des isomorphismes en degrés $\leqslant n$, et qui identifient la limite projective de la tour $(\overline{H}_\bullet^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à $\overline{H}_\bullet$. Étant donné que $\overline{H}_\bullet^{(n)}$ est $n+1$-tronqué, le morphisme (5.112) induit un morphisme

$$\mathrm{cosk}_{n+1}\overline{H}_\bullet \longrightarrow \overline{H}_\bullet^{(n)} \tag{5.113}$$

qui est $n+1$-élémentaire, associé au morphisme $\overline{H}_{n+1} \longrightarrow \overline{H}^{(n)}_{n+1}$. En particulier, les morphismes (5.113) sont des hyper-recouvrements étales.

Partie B. — Rappelons que nous avons construit dans la sous-section 4.8 une tour $(\mathrm{P}_\bullet^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, dite de Postnikov, ayant pour limite le type d'homotopie feuilletée $(Q_\bullet)_{\Delta=0}$. De plus, les morphismes de transition de la tour admettent une factorisation

$$\mathrm{P}_\bullet^{(n+1)} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \mathrm{P}_\bullet^{(n)},$$

où la première flèche est un torseur rationnel sous un espace d'Eilenberg–Mac Lane tordu $\mathrm{K}_\bullet^{\mathrm{Gal}^\Delta}(\Pi_{n+1}^\Delta, n+1)$, avec $\Pi_{n+1}^\Delta = \Pi_{n+1}^\Delta(K)$ le $n+1$-ième groupe fondamental différentiel de K (voir la définition 4.10.18), et la seconde flèche est un hyper-recouvrement pro-générique relatif, rationnellement n-élémentaire. Ceci est la combinaison des théorèmes 4.8.17 et 4.10.17 ; voir aussi le lemme 4.8.4.

Pour $n \geqslant 1$, il découle des propriétés précédentes que les C-schémas semi-simpliciaux $\mathrm{P}_\bullet^{(n)}$ et $\widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)}$ sont rationnellement $n+1$-tronqués et que le morphisme

$$\mathrm{cosk}_{n+1}\mathrm{P}_\bullet^{(n+r)} \longrightarrow \mathrm{cosk}_{n+1}\widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n+r-1)}$$

est un hyper-recouvrement pro-générique relatif pour $r = 1$ et un isomorphisme pour $r \geqslant 2$. (Utiliser que le morphisme $\mathrm{cosk}_{n+1}\mathrm{K}_\bullet^{\mathrm{Gal}^\Delta}(\Pi_{n+r}^\Delta, n+r) \longrightarrow \mathrm{Gal}_\bullet^\Delta$ est un hyper-recouvrement pro-générique, si $r = 1$, et un isomorphisme si $r \geqslant 2$.) On en déduit aussitôt un morphisme

$$R_\bullet^{(n)} = \eta(\mathrm{cosk}_{n+1}(Q_\bullet)_{\Delta=0}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)}$$

qui est un hyper-recouvrement pro-générique, rationnellement $n+1$-élémentaire. D'après la partie A, le morphisme $(Q_\bullet)_{\Delta=0} \longrightarrow \overline{H}_\bullet$ induit des morphismes $R_\bullet^{(n)} \longrightarrow \overline{H}_\bullet^{(n)}$. Montrons que ces morphismes se factorisent par le morphisme composé $R_\bullet^{(n)} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \mathrm{P}_\bullet^{(n)}$. En raisonnant par récurrence, on peut supposer qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & & \overline{H}_\bullet^{(n)} \arrow[d] \\ R_\bullet^{(n)} \arrow[r] \arrow[urr, bend left] & \mathrm{P}_\bullet^{(n)} \arrow[r] & \overline{H}_\bullet^{(n-1)}. \end{tikzcd}$$

Or, le morphisme $\overline{H}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \overline{H}_\bullet^{(n-1)}$ est un torseur sous un pro-C-groupe simplicial de la forme $\mathrm{K}_\bullet(-,n)$. Puisque $R_\bullet^{(n)} \longrightarrow \mathrm{P}_\bullet^{(n)}$ est un hyper-recouvrement pro-générique relatif, le torseur $\mathrm{P}_\bullet^{(n)} \times_{\overline{H}_\bullet^{(n-1)}} \overline{H}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \mathrm{P}_\bullet^{(n)}$ est trivial. Or, étant donné que $R_\bullet^{(n)} \longrightarrow \mathrm{P}_\bullet^{(n)}$ est une composition d'un morphisme n-élémentaire et d'un morphisme $n+1$-élémentaire, il y a une bijection entre les trivialisations de $R_\bullet^{(n)} \times_{\overline{H}_\bullet^{(n-1)}} \overline{H}_\bullet^{(n)} \longrightarrow R_\bullet^{(n)}$ et celles de $\mathrm{P}_\bullet^{(n)} \times_{\overline{H}_\bullet^{(n-1)}} \overline{H}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \mathrm{P}_\bullet^{(n)}$. (On laisse au lecteur le soin de vérifier cela.) Ceci permet de conclure.

Les morphismes $\mathrm{P}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \overline{H}_\bullet^{(n)}$ font commuter les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} (Q_\bullet)_{\Delta=0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{P}_\bullet^{(n+1)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{P}_\bullet^{(n)} \arrow[d] \\ \overline{H}_\bullet \arrow[r] & \overline{H}_\bullet^{(n+1)} \arrow[r] & \overline{H}_\bullet^{(n)}. \end{tikzcd}$$

Nous montrerons, par récurrence sur n, que le morphisme

$$\mathrm{P}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \overline{H}_\bullet^{(n)} \times_{H_\bullet^{(1)}} \mathrm{Gal}_\bullet^\Delta \tag{5.114}$$

est un hyper-recouvrement pro-générique relatif. L'assertion au rang $n = 1$ est clairement satisfaite.

Partie C. — On suppose ici que $n \geqslant 2$ et que l'assertion à la fin de la partie B est satisfaite au rang $n-1$. Dans cette partie et la suivante, nous tâcherons de vérifier cette assertion au rang n. Ici, on montrera que le groupe fondamental différentiel Π_n^Δ n'admet pas de quotients additifs (i.e., isomorphes à $\mathbf{G}_a$) non triviaux. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde. On peut alors trouver un quotient vectoriel de type fini non nul $\Pi_n^\Delta \twoheadrightarrow V$, équivariant pour l'action de Gal^Δ.

Il découle de la proposition 5.6.8 et du corollaire 5.9.9 que le morphisme évident

$$\mathrm{R}\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}_{\text{ét}}(\mathrm{Gal}^\Delta_\bullet; V) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}_{\text{ét}}(\overline{H}^{(n-1)}_\bullet \times_{H^{(1)}_\bullet} \mathrm{Gal}^\Delta_\bullet; V)$$

est un quasi-isomorphisme. (En fait, on a besoin des versions tordues de ces deux résultats ; on laisse au lecteur le soin d'établir ces variantes.) Grâce à l'hypothèse de récurrence, il s'ensuit que le morphisme

$$\mathrm{R}\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}_{\text{ét}}(\mathrm{Gal}^\Delta_\bullet; V) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}_{\text{ét}}(\widetilde{\mathrm{P}}^{(n-1)}_\bullet; V) \simeq \Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}(\widetilde{\mathrm{P}}^{(n-1)}_\bullet; V)$$

est un quasi-isomorphisme. Puisque K est cohomologiquement basique, le corollaire 5.7.17 entraîne alors que le morphisme

$$\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}(\widetilde{\mathrm{P}}^{(n-1)}_\bullet; V) \longrightarrow \Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}((Q_\bullet)_{\Delta=0}; V) \tag{5.115}$$

est un quasi-isomorphisme. En particulier, le morphisme

$$\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}(\widetilde{\mathrm{P}}^{(n-1)}_\bullet; V) \longrightarrow \Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}(\mathrm{P}^{(n)}_\bullet; V)$$

est injectif en cohomologie. La proposition 5.3.17 entraîne alors l'annulation de la classe caractéristique du poussé en avant du torseur rationnel $\mathrm{P}^{(n)}_\bullet \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}^{(n-1)}_\bullet$ suivant le morphisme $\mathrm{K}_\bullet(\Pi^\Delta_n, n) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(V, n)$. Il s'ensuit, grâce à la proposition 5.3.13, que ce poussé en avant est trivial.

D'après ce qui précède, on dispose d'un morphisme $\mathrm{K}^{\mathrm{Gal}^\Delta}_\bullet(\Pi^\Delta_n, n)$-équivariant

$$\mathrm{P}^{(n)}_\bullet \longrightarrow \mathrm{K}^{\mathrm{Gal}^\Delta}_\bullet(V, n) \times \widetilde{\mathrm{P}}^{(n-1)}_\bullet.$$

L'identité de V fournit donc une classe de cohomologie non nulle $\gamma \in \mathrm{H}^n\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}(\mathrm{P}^{(n)}_\bullet; V)$ qui ne provient pas de $\mathrm{H}^n\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}(\widetilde{\mathrm{P}}^{(n-1)}_\bullet; V)$. Puisque le morphisme

$$\mathrm{H}^n\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}(\widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}_\bullet; V) \longrightarrow \mathrm{H}^n\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}(\widetilde{\mathrm{P}}^{(n+r)}_\bullet; V)$$

est injectif, pour $r \geqslant 1$, l'image de γ dans $\mathrm{H}^n\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}((Q_\bullet)_{\Delta=0}; V)$ ne provient toujours pas de $\mathrm{H}^n\Gamma^{\mathrm{Gal}^\Delta}(\widetilde{\mathrm{P}}^{(n-1)}_\bullet; V)$. Vu que (5.115) est un quasi-isomorphisme, ceci est une contradiction.

Partie D. — Soit A une C-variété semi-abélienne. Grâce au théorème 5.11.19, le morphisme

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\overline{H}^{(n)}_\bullet \times_{H^{(1)}_\bullet} \mathrm{Gal}^\Delta_\bullet; A) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}((Q_\bullet)_{\Delta=0}; A) \tag{5.116}$$

est un isomorphisme en cohomologie en degrés $\leqslant n$ et injectif en cohomologie en degrés $n+1$. (Utiliser le théorème 5.5.13 qui est valable pour B non nécessairement commutatif.) Par ailleurs, le morphisme

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{P}^{(n)}_\bullet; A) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}((Q_\bullet)_{\Delta=0}; A) \tag{5.117}$$

est un isomorphisme en cohomologie en degrés $\leqslant n$ et injectif en cohomologie en degrés $n+1$. Ainsi, dans le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\overline{H}^{(n-1)}_\bullet \times_{H^{(1)}_\bullet} \mathrm{Gal}^\Delta_\bullet; A) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "u"] & \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{P}^{(n-1)}_\bullet; A) \arrow[d, "v"] \\
\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\overline{H}^{(n)}_\bullet \times_{H^{(1)}_\bullet} \mathrm{Gal}^\Delta_\bullet; A) \arrow[r, "(2)"] & \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{P}^{(n)}_\bullet; A)
\end{tikzcd}$$

la flèche (1) est un quasi-isomorphisme (par l'hypothèse de récurrence) et (2) est un isomorphisme en cohomologie en degrés $\leqslant n$ et injectif en cohomologie en degrés $n+1$. En particulier, on a un isomorphisme

$$\ker\{\mathrm{H}^{n+1}(u)\} \simeq \ker\{\mathrm{H}^{n+1}(v)\}. \tag{5.118}$$

Par construction, le morphisme $\overline{H}^{(n)}_\bullet \longrightarrow \overline{H}^{(n-1)}_\bullet$ est un torseur sous le pro-C-schéma en groupes simplicial $\mathrm{K}_\bullet(F, n)$ avec

$$F = \underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\mathrm{H}}^n_{\mathrm{dR}}(K; \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \oplus \overline{\mathrm{M}}^n, \mathbf{G}_{\boldsymbol{m}}) \times \prod_\alpha \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{End}(A_\alpha)}(\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(K; A_\alpha), \mathcal{U}(A_\alpha)).$$

Le morphisme $\mathrm{P}^{(n)}_\bullet \longrightarrow \overline{H}^{(n)}_\bullet$ est équivariant pour un unique morphisme $\mathrm{K}_\bullet(\Pi^\Delta_n, n) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(F, n)$, induit par un morphisme de pro-C-schémas en groupes $\Pi^\Delta_n \longrightarrow F$. Pour conclure, il reste à montrer que $\Pi^\Delta_n \longrightarrow F$ est un isomorphisme. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde. Vu la forme du pro-C-schéma en groupes F et la partie C, l'une des alternatives suivantes est alors satisfaite.

(1) Il existe un morphisme surjectif $F \twoheadrightarrow A$, avec $A = \mathbf{G}_m$ ou $A = A_\alpha$, pour un $\alpha \in I$, tel que la composition de $\Pi_n^\Delta \longrightarrow F \longrightarrow A$ est nulle.

(2) Il existe un morphisme surjectif $\Pi_n^\Delta \twoheadrightarrow A$, avec $A = \mathbf{G}_m$ ou $A = A_\alpha$, pour un $\alpha \in I$, tel que le morphisme $\ker\{\Pi_n^\Delta \to F\} \longrightarrow A$ est surjectif.

Nous allons montrer que ni (1) ni (2) ne peuvent se produire.

Supposons d'abord que (1) est vérifiée, et appelons $T_\bullet$ le poussé en avant du torseur $\overline{H}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \overline{H}_\bullet^{(n-1)}$ suivant le morphisme $\mathrm{K}_\bullet(F,n) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(A,n)$. La classe caractéristique de $T_\bullet$ est dans le noyau du morphisme

$$\mathrm{H}^{n+1}\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\overline{H}_\bullet^{(n-1)} \times_{H_\bullet^{(1)}} \mathrm{Gal}_\bullet^\Delta; A) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{P}_\bullet^{(n-1)}; A)$$

qui est un isomorphisme d'après l'hypothèse de récurrence (voir aussi le début de la partie D). Il s'ensuit que le torseur $T_\bullet$ est trivial. On dispose donc d'un morphisme $\overline{H}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(A,n)$, ce qui fournit une classe de cohomologie non nulle dans $\mathrm{H}^n\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\overline{H}_\bullet^{(n)}; A)$. Cette classe est dans le noyau du morphisme

$$\mathrm{H}^{n}\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\overline{H}_\bullet^{(n)} \times_{H_\bullet^{(1)}} \mathrm{Gal}_\bullet^\Delta; A) \longrightarrow \mathrm{H}^{n}\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{P}_\bullet^{(n)}; A) \tag{5.119}$$

qui est un isomorphisme d'après la discussion au début de la partie D. C'est la contradiction recherchée dans la situation (1).

Supposons maintenant que (2) est vérifiée, et fixons un morphisme $\rho : \Pi_n^\Delta \longrightarrow A$ dont la restriction à $\ker\{\Pi_n^\Delta \to F\}$ est surjective. Appelons $S_\bullet$ le poussé en avant du torseur rationnel $\mathrm{P}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n-1)}$ suivant le morphisme $\mathrm{K}_\bullet(\Pi_n^\Delta, n) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(A,n)$. La classe caractéristique de $S_\bullet$ est un élément de $\ker\{\mathrm{H}^{n+1}(v)\}$ qui s'identifie à $\ker\{\mathrm{H}^{n+1}(u)\}$ d'après l'isomorphisme (5.118). Il existe donc un torseur $S'_\bullet \longrightarrow \overline{H}_\bullet^{(n-1)}$ sous $\mathrm{K}_\bullet(A,n)$ dont la restriction à $\widetilde{\mathrm{P}}_\bullet^{(n-1)}$ est isomorphe à $S_\bullet$ et qui est le poussé en avant du torseur $\overline{H}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \overline{H}_\bullet^{(n-1)}$ suivant un certain morphisme $\mathrm{K}_\bullet(F,n) \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(A,n)$ associé à un morphisme de pro-C-schémas en groupes $\mu : F \longrightarrow A$. En remplaçant ρ par $\rho - \mu|_{\Pi_n^\Delta}$, on se ramène au cas où le torseur $S_\bullet$ est trivial. Dans ce cas, on dispose d'un morphisme $\mathrm{P}_\bullet^{(n)} \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet(A,n)$ qui fournit une classe de cohomologie non nulle dans $\mathrm{H}^n\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{P}_\bullet^{(n)}; A)$ et qui n'est pas dans l'image du morphisme (5.119). Or, ce morphisme est un isomorphisme d'après la discussion au début de la partie D. C'est la contradiction recherchée dans la situation (2). Le théorème est démontré. ■

6. Feuilletages schématiques et topologie feuilletée

Dans cette section, on développe le language des feuilletages schématiques et on introduit la topologie *feuilletée*. Il s'agit d'une variante de la topologie feuilletée de type fini qui a la vertu d'être fonctorielle pour des morphismes arbitraires de feuilletages schématiques. Le résultat le plus notable est certainement le théorème 6.8.11 qui permet d'exprimer la cohomologie feuilletée au point générique à l'aide d'hyper-recouvrements génériques. Il s'agit de l'analogue du théorème 4.6.18 pour la topologie feuilletée et il est démontré de la même façon en utilisant les techniques développées dans les sous-sections 4.1– 4.6.

Tout au long de la section, on fixe un corps de base k de caractéristique nulle. Sauf mention explicite du contraire, tous nos schémas et feuilletages schématiques seront définis au-dessus de k.

6.1. Feuilletages schématiques. —

Dans cette sous-section et celle qui suivra, on développe le language des feuilletages schématiques. La notion de feuilletage schématique n'est pas vraiment nouvelle. D'une part, c'est l'analogue direct pour les schémas de la notion classique de feuilletage (possiblement singulier) en géométrie différentielle. D'autre part, plusieurs auteurs ont introduit et étudié des objets similaires en algèbre et en géométrie algébrique. Sans vouloir être exhaustive, notons que :

— la donnée d'un feuilletage schématique affine équivaut à celle d'un *anneau différentiel généralisé* au sens de [**7**, §2.1.2.1] d'un type particulier;

— la donnée d'un feuilletage schématique différentiellement lisse (voir la définition 6.2.5) équivaut à celle d'un *schéma différentiel* au sens de [**46**, Definition 3.2.1] d'un type particulier.

Précisons tout de suite la notion de feuilletage schématique que nous adoptons.

Définition 6.1.1. — *Soit X un k-schéma. Une* structure de feuilletage *sur X est la donnée d'un couple $(\Omega_{X/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_{\mathcal{F}})$ formé d'un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\Omega_{X/\mathcal{F}}$ et d'une dérivation k-linéaire $\mathrm{d}_{\mathcal{F}} : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_{X/\mathcal{F}}$ telle que le morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire $\rho_{\mathcal{F}} : \Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{X/\mathcal{F}}$ associé à $\mathrm{d}_{\mathcal{F}}$ satisfait aux conditions suivantes :*

(a) il est surjectif ;

(b) son noyau est contenu dans le noyau de la composition de

$$\Omega_{X/k} \xrightarrow{\mathrm{d}} \bigwedge\nolimits^2_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k} \xrightarrow{\wedge^2 \rho_{\mathcal{F}}} \bigwedge\nolimits^2_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/\mathcal{F}}.$$

*Un k-*feuilletage schématique *(ou simplement k-*feuilletage*) est un triplet $(X, \Omega_{X/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_{\mathcal{F}})$ où X est un k-schéma et $(\Omega_{X/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_{\mathcal{F}})$ est une structure de feuilletage sur X. Un tel k-feuilletage sera en général noté $X/\mathcal{F}$. On parlera de X comme étant le k-*schéma sous-jacent *au k-feuilletage $X/\mathcal{F}$.*

Remarque 6.1.2. — Gardons les notations de la définition 6.1.1. Sous (a), la condition (b) équivaut à l'existence d'un morphisme k-linéaire $\mathrm{d}_{\mathcal{F}} : \Omega_{X/\mathcal{F}} \longrightarrow \bigwedge^2_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/\mathcal{F}}$ rendant commutatif le carré

$$\begin{tikzcd} \Omega_{X/k} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, two heads, "\rho_{\mathcal{F}}"] & \bigwedge^2_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k} \arrow[d, two heads, "\wedge^2 \rho_{\mathcal{F}}"] \\ \Omega_{X/\mathcal{F}} \arrow[r, "\mathrm{d}_{\mathcal{F}}"] & \bigwedge^2_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/\mathcal{F}}. \end{tikzcd}$$

Toujours sous la condition (a), un tel morphisme est unique lorsqu'il existe. □

Exemple 6.1.3. — Étant donné un morphisme de k-schémas $f : X \longrightarrow S$, on dispose d'une structure de feuilletage sur X donnée par le couple (Ω_f, d_f). Le k-feuilletage ainsi obtenu est noté X/S. Lorsque $S = \mathrm{Spec}(k)$, on parle du k-feuilletage *grossier* associé à X que l'on note parfois X^g (au lieu de X/k). Lorsque $S = X$, on parle du k-feuilletage *discret* associé à X que l'on note parfois X^δ (au lieu de X/X). □

Notation 6.1.4. — Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage. Comme de coutûme, on pose $\Omega^d_{X/\mathcal{F}} = \bigwedge^d_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/\mathcal{F}}$ pour $d \in \mathbb{N}$. On convient aussi que $\Omega^d_{X/\mathcal{F}} = 0$ pour les entiers $d < 0$. □

Le résultat suivant généralise la carré commutatif de la remarque 6.1.2.

Lemme 6.1.5. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage. Il existe alors une unique famille de morphismes k-linéaires $(\mathrm{d}_{\mathcal{F}} : \Omega^d_{X/\mathcal{F}} \longrightarrow \Omega^{d+1}_{X/\mathcal{F}})_{d \in \mathbb{N}}$ rendant commutatifs les carrés*

$$\begin{tikzcd} \Omega^d_{X/k} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, two heads, "\wedge^d \rho_{\mathcal{F}}"] & \Omega^{d+1}_{X/k} \arrow[d, two heads, "\wedge^{d+1} \rho_{\mathcal{F}}"] \\ \Omega^d_{X/\mathcal{F}} \arrow[r, "\mathrm{d}_{\mathcal{F}}"] & \Omega^{d+1}_{X/\mathcal{F}}. \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi un complexe de faisceaux $\Omega^\bullet_{X/\mathcal{F}}$ sur le k-schéma X ; c'est le complexe de de Rham *du k-feuilletage $X/\mathcal{F}$. Par construction, on a un morphisme surjectif $\bigwedge^\bullet \rho_{\mathcal{F}} : \Omega^\bullet_{X/k} \twoheadrightarrow \Omega^\bullet_{X/\mathcal{F}}$.*

Démonstration. — L'unicité est immédiate puisque les morphismes $\bigwedge^d \rho_{\mathcal{F}}$ sont surjectifs. Pour démontrer l'existence, il suffit de vérifier l'inclusion

$$\ker\left\{\bigwedge\nolimits^d \rho_{\mathcal{F}} : \Omega^d_{X/k} \to \Omega^d_{X/\mathcal{F}}\right\} \subset \ker\left\{\bigwedge\nolimits^{d+1} \rho_{\mathcal{F}} \circ \mathrm{d} : \Omega^d_{X/k} \to \Omega^{d+1}_{X/\mathcal{F}}\right\}.$$

Une section du membre de gauche est une combinaison linéaire de sections de la forme

$$\omega \wedge \mathrm{d}(f_2) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}(f_d), \tag{6.1}$$

avec ω une section de $\ker(\rho_{\mathcal{F}})$, et $f_2, \ldots, f_d$ des sections de $\mathcal{O}_X$. L'image de (6.1) par $\bigwedge^{d+1}\rho_{\mathcal{F}} \circ \mathrm{d}$ est égale à

$$\bigwedge^{d+1}\rho_{\mathcal{F}}(\mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}(f_2) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}(f_d)) = (\bigwedge^2\rho_{\mathcal{F}}(\mathrm{d}\omega)) \wedge \mathrm{d}_{\mathcal{F}}(f_2) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}_{\mathcal{F}}(f_d).$$

Elle est donc nulle d'après la condition (b) de la définition 6.1.1. ∎

Définition 6.1.6. — *Un* morphisme de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ *est un morphisme de k-schémas $f : Y \longrightarrow X$ tel que le noyau de $\rho_{\mathcal{F}} : \Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{X/\mathcal{F}}$ est contenu dans le noyau de la composition de*

$$\Omega_{X/k} \xrightarrow{-\circ f} f_*\Omega_{Y/k} \xrightarrow{f_*(\rho_{\mathcal{G}})} f_*\Omega_{Y/\mathcal{G}}.$$

Remarque 6.1.7. — La condition sur le morphisme $f : Y \longrightarrow X$ dans la définition 6.1.6 est équivalente à l'existence d'un morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire $- \circ f : \Omega_{X/\mathcal{F}} \longrightarrow f_*\Omega_{Y/\mathcal{G}}$ rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{X/k} & \xrightarrow{-\circ f} & f_*\Omega_{Y/k} \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{F}}} & & \downarrow{\scriptstyle f_*(\rho_{\mathcal{G}})} \\ \Omega_{X/\mathcal{F}} & \xrightarrow{-\circ f} & f_*\Omega_{Y/\mathcal{G}} \end{array} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{-\circ f} & f_*\mathcal{O}_Y \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}_{\mathcal{F}}} & & \downarrow{\scriptstyle f_*(\mathrm{d}_{\mathcal{G}})} \\ \Omega_{X/\mathcal{F}} & \xrightarrow{-\circ f} & f_*\Omega_{Y/\mathcal{G}}. \end{array}$$

Puisque $\rho_{\mathcal{F}}$ est surjectif, un tel morphisme est unique lorsqu'il existe. □

Exemple 6.1.8. — Étant donné un k-feuilletage $X/\mathcal{F}$, on dispose de deux morphismes évidents

$$\mathrm{id}_X : X^{\delta} = X/X \longrightarrow X/\mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{id}_X : X/\mathcal{F} \longrightarrow X^{g} = X/k.$$

Ils définissent respectivement la counité de l'adjoint à gauche $(-)^{\delta}$ et l'unité de l'adjoint à droite $(-)^{g}$ du foncteur d'oubli $X/\mathcal{F} \rightsquigarrow X$ de la catégorie des k-feuilletages dans celle des k-schémas. □

Lemme 6.1.9. — *Un morphisme de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ induit un morphisme de complexes de faisceaux $- \circ f : \Omega^{\bullet}_{X/\mathcal{F}} \longrightarrow f_*\Omega^{\bullet}_{Y/\mathcal{G}}$ rendant commutatif le carré*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\bullet}_{X/k} & \xrightarrow{-\circ f} & f_*\Omega^{\bullet}_{Y/k} \\ \downarrow{\scriptstyle \wedge^{\bullet}\rho_{\mathcal{F}}} & & \downarrow{\scriptstyle f_*(\wedge^{\bullet}\rho_{\mathcal{G}})} \\ \Omega^{\bullet}_{X/\mathcal{F}} & \xrightarrow{-\circ f} & f_*\Omega^{\bullet}_{Y/\mathcal{G}}. \end{array}$$

Démonstration. — Les morphismes $\Omega^d_{X/\mathcal{F}} \longrightarrow f_*\Omega^d_{Y/\mathcal{G}}$ sont donnés par la composition de

$$\Omega^d_{X/\mathcal{F}} \xrightarrow{\wedge^d(-\circ f)} \bigwedge^d_{\mathcal{O}_X} f_*\Omega^d_{Y/\mathcal{G}} \longrightarrow f_*\Omega^d_{Y/\mathcal{G}}.$$

La commutation du carré est alors claire. ∎

Lemme 6.1.10. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de k-schémas. Il existe alors une structure de feuilletage $(\Omega_{Y/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_{\mathcal{F}})$ sur le k-schéma Y, unique à un unique isomorphisme près, telle que les propriétés suivantes sont satisfaites pour le k-feuilletage $Y/\mathcal{F} = (Y, \Omega_{Y/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_{\mathcal{F}})$.*

(i) Le morphisme f définit un morphisme de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{F} \longrightarrow X/\mathcal{F}$.

(ii) Pour tout morphisme de k-feuilletages $Z/\mathcal{H} \longrightarrow X/\mathcal{F}$, le foncteur « oubli de la structure de feuilletage » induit une bijection

$$\mathrm{Hom}_{X/\mathcal{F}}(Z/\mathcal{H}, Y/\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_X(Z, Y).$$

On dit que la structure de feuilletage $(\Omega_{Y/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_{\mathcal{F}})$ est l'image inverse de la structure de feuilletage $(\Omega_{X/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_{\mathcal{F}})$ suivant le morphisme de k-schémas $f : Y \longrightarrow X$.

Démonstration. — On pose $\Omega_{Y/\mathcal{F}} = \Omega_{Y/k} \coprod_{f^{\star}\Omega_{X/k}} f^{\star}\Omega_{X/\mathcal{F}}$, la somme amalgamée étant prise dans la catégorie des $\mathcal{O}_Y$-modules quasi-cohérents. (On rappelle que $f^{\star}$ désigne le foncteur « image inverse » sur les faisceaux quasi-cohérents donné par $\mathcal{O}_Y \otimes_{f^*\mathcal{O}_X} f^*(-)$.) On note $\rho_{\mathcal{F}} : \Omega_{Y/k} \longrightarrow \Omega_{Y/\mathcal{F}}$ le morphisme évident. On dispose donc d'un carré cocartésien de $\mathcal{O}_Y$-modules quasi-cohérents

$$\begin{tikzcd} f^\star\Omega_{X/k} \arrow[r, "-\circ f"] \arrow[d, "f^\star\rho_{\mathcal{F}}"] & \Omega_{Y/k} \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}"] \\ f^\star\Omega_{X/\mathcal{F}} \arrow[r, "-\circ f"] & \Omega_{Y/\mathcal{F}}. \end{tikzcd} \tag{6.2}$$

On pose $d_{\mathcal{F}} = \rho_{\mathcal{F}} \circ d : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Omega_{Y/\mathcal{F}}$; c'est une dérivation k-linéaire sur $\mathcal{O}_Y$. Nous allons montrer que $(\Omega_{Y/\mathcal{F}}, d_{\mathcal{F}})$ est une structure de feuilletage sur Y et que les proriétés (i) et (ii) de l'énoncé sont satisfaites. On divise la tâche en deux parties.

Partie A. — On montre ici que $(\Omega_{Y/\mathcal{F}}, d_{\mathcal{F}})$ est une structure de feuilletage. Puisque le morphisme $\rho_{\mathcal{F}} : \Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{X/\mathcal{F}}$ est surjectif et que le carré (6.2) est cocartésien, le morphisme $\rho_{\mathcal{F}} : \Omega_{Y/k} \longrightarrow \Omega_{Y/\mathcal{F}}$ est surjectif. Il reste à vérifier que $\bigwedge^2\rho_{\mathcal{F}}(d\omega) = 0$ pour toute section ω de $\ker\{\rho_{\mathcal{F}} : \Omega_{Y/k} \to \Omega_{Y/\mathcal{F}}\}$.

Puisque le foncteur $f^\star$ est exact à droite, on a une suite exacte

$$f^\star\ker\{\Omega_{X/k} \to \Omega_{X/\mathcal{F}}\} \longrightarrow f^\star\Omega_{X/k} \longrightarrow f^\star\Omega_{X/\mathcal{F}} \longrightarrow 0.$$

Le carré (6.2) étant cocartésien, il s'ensuit une suite exacte

$$f^\star\ker\{\Omega_{X/k} \to \Omega_{X/\mathcal{F}}\} \longrightarrow \Omega_{Y/k} \longrightarrow \Omega_{Y/\mathcal{F}} \longrightarrow 0. \tag{6.3}$$

Ainsi, toute section de $\ker\left\{\rho_{\mathcal{F}} : \Omega_{Y/k} \to \Omega_{Y/\mathcal{F}}\right\}$ est localement une combinaison linéaire de formes différentielles $a \cdot (\nu \circ f)$ avec a une section de $\mathcal{O}_Y$ et ν une section de $\ker\{\rho_{\mathcal{F}} : \Omega_{X/k} \to \Omega_{X/\mathcal{F}}\}$. Il suffit donc de montrer que $\bigwedge^2\rho_{\mathcal{F}} \circ d(a \cdot (\nu \circ f)) = 0$. Or, la condition $\rho_{\mathcal{F}}(\nu) = 0$ entraîne que $\bigwedge^2\rho_{\mathcal{F}}(d\nu) = 0$ car $(\Omega_{X/\mathcal{F}}, d_{\mathcal{F}})$ est une structure de feuilletage sur X. On a donc :

$$\begin{aligned} \textstyle\bigwedge^2\rho_{\mathcal{F}} \circ d(a \cdot (\nu \circ f)) &= \textstyle\bigwedge^2\rho_{\mathcal{F}}(da \wedge (\nu \circ f) + a \cdot d\nu \circ f) \\ &= \rho_{\mathcal{F}}(da) \wedge \rho_{\mathcal{F}}(\nu \circ f) + a \cdot \textstyle\bigwedge^2\rho_{\mathcal{F}}(d\nu \circ f) \\ &= \rho_{\mathcal{F}}(da) \wedge \rho_{\mathcal{F}}(\nu) \circ f + a \cdot \textstyle\bigwedge^2\rho_{\mathcal{F}}(d\nu) \circ f \\ &= 0. \end{aligned}$$

(Ci-dessus, on utilise le carré commutatif (6.2) pour l'égalité entre les deuxième et troisième lignes.)

Partie B. — On vérifie ici les propriétés (i) et (ii) de l'énoncé. La propriété (i) découle du carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \Omega_{X/k} \arrow[r, "-\circ f"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}"] & f_*\Omega_{Y/k} \arrow[d, "f_*(\rho_{\mathcal{F}})"] \\ \Omega_{X/\mathcal{F}} \arrow[r, "-\circ f"] & f_*\Omega_{Y/\mathcal{F}} \end{tikzcd}$$

qui s'obtient par adjonction du carré commutatif (6.2) ; voir la remarque 6.1.7.

Pour vérifier (ii), il suffit de montrer que tout X-morphisme $g : Z \longrightarrow Y$ définit un morphisme de k-feuilletages $g : Z/\mathcal{H} \longrightarrow Y/\mathcal{F}$. Par définition, il s'agit de montrer que le noyau de $\rho_{\mathcal{F}} : \Omega_{Y/k} \longrightarrow \Omega_{Y/\mathcal{F}}$ est contenu dans le noyau de la composition de

$$\Omega_{Y/k} \xrightarrow{-\circ g} g_*\Omega_{Z/k} \xrightarrow{\rho_{\mathcal{H}}} g_*\Omega_{Z/\mathcal{H}}.$$

Or, d'après la suite exacte (6.3), toute section de $\ker\left\{\rho_{\mathcal{F}} : \Omega_{Y/k} \to \Omega_{Y/\mathcal{F}}\right\}$ est localement une combinaison $\mathcal{O}_Y$-linéaire de formes différentielles $\nu \circ f$ avec ν une section de $\ker\{\rho_{\mathcal{F}} : \Omega_{X/k} \to \Omega_{X/\mathcal{F}}\}$. Il suffit donc de montrer que $\rho_{\mathcal{H}}(\nu \circ f \circ g) = 0$. Puisque $f \circ g$ définit un morphisme de k-feuilletages $f \circ g : Z/\mathcal{H} \longrightarrow X/\mathcal{F}$, on a $\rho_{\mathcal{H}}(\nu \circ f \circ g) = \rho_{\mathcal{F}}(\nu) \circ (f \circ g)$. Étant donné que $\rho_{\mathcal{F}}(\nu) = 0$, on a bien l'annulation recherchée. ■

Définition 6.1.11. — *Un morphisme de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ est dit* basique *si le morphisme évident* $\mathrm{id}_Y : Y/\mathcal{G} \longrightarrow Y/\mathcal{F}$*, déduit de la propriété (ii) du lemme 6.1.10, est un isomorphisme. Autrement dit,* *le morphisme f est basique si et seulement si l'application évidente*

$$\mathrm{Hom}_{X/\mathcal{F}}(Z/\mathcal{H}, Y/\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(Z, Y)$$

est bijective pour tout $X/\mathcal{F}$-feuilletage $Z/\mathcal{H}$.

Remarque 6.1.12. — Sauf mention explicite du contraire, pour un k-feuilletage $X/\mathcal{F}$ et un X-schéma Y, le symbole « $Y/\mathcal{F}$ » désigne le $X/\mathcal{F}$-feuilletage basique associé au X-schéma Y par le lemme 6.1.10. □

Le résultat suivant est un corollaire de la preuve du lemme 6.1.10.

Corollaire 6.1.13. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage et $s : Z \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un sous-schéma fermé défini par un idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$. Alors, on dispose d'une suite exacte de $\mathcal{O}_Z$-modules quasi-cohérents*

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow s^\star\Omega_{X/\mathcal{F}} \longrightarrow \Omega_{Z/\mathcal{F}} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Ceci découle de la suite exacte usuelle de $\mathcal{O}_Z$-modules quasi-cohérents

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow s^\star\Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{Z/k} \longrightarrow 0$$

et du carré cocartésien (6.2) (avec « Y » et « f » remplacés par « Z » et « s »). ■

Proposition 6.1.14. — *Les limites finies existent dans la catégorie des k-feuilletages et elles commutent au foncteur « oubli de la structure de feuilletage ».*

Démonstration. — Montrons d'abord que les produits directs finis sont représentables. Soient $Y/\mathcal{G}$ et $Z/\mathcal{H}$ deux k-feuilletages. On pose

$$\Omega_{Y\times_k Z/\mathcal{G}\times\mathcal{H}} = \big(\Omega_{Y/\mathcal{G}} \boxtimes_k \mathcal{O}_Z\big) \oplus (\mathcal{O}_Y \boxtimes \Omega_{Z/\mathcal{H}})$$

et on prend pour $\mathrm{d}_{\mathcal{G}\times\mathcal{H}}$ l'unique dérivation sur $\mathcal{O}_Y \boxtimes_k \mathcal{O}_Z$ telle que $\mathrm{d}_{\mathcal{G}\times\mathcal{H}}(a\boxtimes b) = \mathrm{d}_{\mathcal{G}}(a)\boxtimes b + a\boxtimes \mathrm{d}_{\mathcal{H}}(b)$ pour a et b des sections de $\mathcal{O}_Y$ et $\mathcal{O}_Z$ respectivement. Il est immédiat que $(\Omega_{Y\times_k Z/\mathcal{G}\times\mathcal{H}}, \mathrm{d}_{\mathcal{G}\times\mathcal{H}})$ est une structure de feuilletage sur $Y\times_k Z$ et que le k-feuilletage $Y\times_k Z/\mathcal{G}\times\mathcal{H}$ ainsi obtenu est le produit direct de $Y/\mathcal{G}$ et $Z/\mathcal{H}$.

Étant donnés des morphismes de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ et $g : Z/\mathcal{H} \longrightarrow X/\mathcal{F}$, on considère le k-feuilletage $Y\times_X Z/\mathcal{G}\times\mathcal{H}$ obtenu en appliquant le lemme 6.1.10 au produit direct $Y\times_k Z/\mathcal{G}\times\mathcal{H}$ construit ci-dessus et au morphisme de k-schémas $Y\times_X Z \hookrightarrow Y\times_k Z$. Il est clair que le k-feuilletage $Y\times_X Z/\mathcal{G}\times\mathcal{H}$ représente le produit fibré $(Y/\mathcal{G})\times_{X/\mathcal{F}}(Z/\mathcal{H})$. ■

Remarque 6.1.15. — Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de k-schémas. Alors, on a un carré cartésien de k-feuilletages

$$\begin{tikzcd} Y/\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & Y^g \arrow[d] \\ X/\mathcal{F} \arrow[r] & X^g. \end{tikzcd}$$

Autrement dit, le k-feuilletage $Y/\mathcal{F}$ du lemme 6.1.10 est le produit fibré $Y^g \times_{X^g} (X/\mathcal{F})$. Il s'ensuit aussitôt que la classe des morphismes basiques de k-feuilletages est stable par changement de base. □

Remarque 6.1.16. — Soient $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ et $g : Z/\mathcal{H} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ deux morphismes de k-feuilletages. Alors, on a un isomorphisme canonique $(Y/\mathcal{G})\times_{X/\mathcal{F}}(Z/\mathcal{H}) \simeq (Y/\mathcal{G})\times_{X^g}(Z/\mathcal{H})$, ce qui découle aussitôt du fait que $X/\mathcal{F} \longrightarrow X^g$ est un monomorphisme dans la catégorie des k-feuilletages. Ainsi, le produit fibré $(Y/\mathcal{G})\times_{X/\mathcal{F}}(Z/\mathcal{H})$ ne dépend pas de la structure de feuilletage sur X ce qui justifie la notation suivante. □

Notation 6.1.17. — Le produit fibré de k-feuilletages $(Y/\mathcal{G})\times_{X/\mathcal{F}}(Z/\mathcal{G})$ sera aussi noté $(Y/\mathcal{G})\times_X(Z/\mathcal{G})$ ou même $Y\times_X Z/\mathcal{G}\times\mathcal{H}$ comme dans la preuve de la proposition 6.1.14. □

Proposition 6.1.18. — *Considérons un carré cartésien de k-feuilletages*

$$\begin{tikzcd} Y'/\mathcal{G}' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "f'"] & Y/\mathcal{G} \arrow[d, "f"] \\ X'/\mathcal{F}' \arrow[r, "u"] & X/\mathcal{F} \end{tikzcd}$$

et notons $g = f \circ u' = u \circ f'$. Alors, le carré de $\mathcal{O}_{Y'}$-modules quasi-cohérents

$$\begin{tikzcd} \Omega_{Y'/\mathcal{G}'} & u'^{\star}\Omega_{Y/\mathcal{G}} \arrow[l, "-\circ u'"'] \\ f'^{\star}\Omega_{X'/\mathcal{F}'} \arrow[u, "-\circ f'"] & g^{\star}\Omega_{X/\mathcal{F}} \arrow[l, "-\circ u"'] \arrow[u, "-\circ f"'] \end{tikzcd}$$

est cocartésien.

Démonstration. — On divise la preuve en deux parties. Dans la première, on traite le cas où tous les k-feuilletages sont grossiers.

Partie A. — Ici, on montre que le carré

$$\begin{tikzcd} \Omega_{Y'/k} & u'^{\star}\Omega_{Y/k} \arrow[l, "-\circ u'"'] \\ f'^{\star}\Omega_{X'/k} \arrow[u, "-\circ f'"] & g^{\star}\Omega_{X/k} \arrow[l, "-\circ u"'] \arrow[u, "-\circ f"'] \end{tikzcd}$$

est cocartésien. La question étant locale sur Y', on peut supposer que tous les schémas en question sont affines : $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ et $Y' = \mathrm{Spec}(B')$. En utilisant la propriété universelle du module des différentielles de Kähler et la propriété universelle de la somme amalgamée, on se ramène à montrer que pour tout B'-module M', l'application évidente

$$\mathrm{der}_k(B', M') \longrightarrow \mathrm{der}_k(A', M') \times_{\mathrm{der}_k(A,M')} \mathrm{der}_k(B, M') \tag{6.4}$$

est bijective. L'injectivité est claire. Pour la surjectivité, on se donne deux dérivations $D' : A' \longrightarrow M'$ et $E : B \longrightarrow M'$ qui coïncident après restriction à A. On définit une dérivation $F : A' \otimes_k B \longrightarrow M'$ en posant $F(a' \otimes b) = b \cdot D'(a') + a' \cdot E(b)$ pour $a' \in A'$ et $b \in B$. Alors, pour $a \in A$, on trouve aussitôt que $F(aa' \otimes b) = F(a' \otimes ab)$. Il s'ensuit que la dérivation F induit une dérivation $E' : B' \simeq A' \otimes_A B \longrightarrow M'$ qui est l'antécédent du couple (D', E) par l'application (6.4).

Partie B. — Rappelons que $Y'/\mathcal{G}'$ est canoniquement isomorphe au k-feuilletage obtenu à partir du k-feuilletage produit $X' \times_k Y/\mathcal{F}' \times \mathcal{G} = (X'/\mathcal{F}') \times_k (Y/\mathcal{G})$ et du morphisme de k-schémas $Y' \longrightarrow X' \times_k Y$ en appliquant le lemme 6.1.10. Le carré cocartésien (6.2) utilisé dans la preuve du lemme 6.1.10 s'écrit dans notre cas comme suit :

$$\begin{tikzcd} f'^{\star}\Omega_{X'/k} \oplus u'^{\star}\Omega_{Y/k} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \Omega_{Y'/k} \arrow[d] \\ f'^{\star}\Omega_{X'/\mathcal{F}'} \oplus u'^{\star}\Omega_{Y/\mathcal{G}} \arrow[r, two heads] & \Omega_{Y'/\mathcal{G}'}. \end{tikzcd}$$

Par ailleurs, le carré cocartésien de la partie A fournit la suite exacte

$$g^{\star}\Omega_{X/k} \longrightarrow f'^{\star}\Omega_{X'/k} \oplus u'^{\star}\Omega_{Y/k} \longrightarrow \Omega_{Y'/k} \longrightarrow 0.$$

Il s'ensuit une suite exacte

$$g^{\star}\Omega_{X/k} \longrightarrow f'^{\star}\Omega_{X'/\mathcal{F}'} \oplus u'^{\star}\Omega_{Y/\mathcal{G}} \longrightarrow \Omega_{Y'/\mathcal{G}'} \longrightarrow 0. \tag{6.5}$$

Étant donné que le morphisme $\Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{X/\mathcal{F}}$ est surjectif, on peut remplacer $g^{\star}\Omega_{X/k}$ par $g^{\star}\Omega_{X/\mathcal{F}}$ dans (6.5) sans perdre l'exactitude de la suite. Ceci permet de conclure. ■

On termine la sous-section en introduisant la notion de « connexion intégrable » sur un module quasi-cohérent au-dessus d'un feuilletage schématique.

Définition 6.1.19. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage.*

(a) Une connexion *(définie au-dessus de $X/\mathcal{F}$) sur un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ est un morphisme k-linéaire de faisceaux*

$$\nabla : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/\mathcal{F}}$$

vérifiant la règle $\nabla(f\cdot m) = f\cdot\nabla(m) + m\otimes \mathrm{d}_{\mathcal{F}}(f)$ *pour toutes sections locales* f *et* m *de* $\mathcal{O}_X$ *et* $\mathcal{M}$.

(b) *Une connexion* ∇ *sur un* $\mathcal{O}_X$*-module quasi-cohérent* $\mathcal{M}$ *induit des morphismes* k*-linéaires de faisceaux*

$$\nabla^n : \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^n_{X/\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^{n+1}_{X/\mathcal{F}}$$

donnés par $\nabla(m\otimes\omega) = \nabla(m)\wedge\omega + m\otimes \mathrm{d}_{\mathcal{F}}(\omega)$ *pour toutes sections locales* m *et* ω *de* $\mathcal{M}$ *et* $\Omega^n_{X/\mathcal{F}}$. *On dit que* ∇ *est* intégrable *si* $\nabla^1\circ\nabla^0 = 0$ *(ce qui entraîne que* $\nabla^{n+1}\circ\nabla^n = 0$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*).*

Un module avec connexion *(*intégrable*) au-dessus de* $X/\mathcal{F}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-module quasi-cohérent muni d'une connexion (intégrable) définie au-dessus de* $X/\mathcal{F}$.

Remarque 6.1.20. — La catégorie des modules avec connexion (intégrable) au-dessus de $X/\mathcal{F}$ est une catégorie monoïdale et le foncteur « oubli de la connexion » commute au produit tensoriel. De plus, un morphisme de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ induit un foncteur « image inverse » qui est donné sur les $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents sous-jacents par le foncteur $f^\star$. Si $X/\mathcal{F}$ est diff-lisse, cette catégorie est aussi abélienne et le foncteur « oubli de la connexion » est exact. □

Notation 6.1.21. — Étant donné un module avec connexion $\mathcal{M}$ au-dessus d'un k-feuilletage $X/\mathcal{F}$, on pose

$$\mathcal{M}^\delta(X/\mathcal{F}) = \Gamma(X;\ker\{\nabla : \mathcal{M}\longrightarrow \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega_{X/\mathcal{F}}\}).$$

Les éléments du k-vectoriel $\mathcal{M}^\delta(X/\mathcal{F})$ sont appelés les *sections globales constantes*. Plus généralement, étant donné un morphisme de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{G}\longrightarrow X/\mathcal{F}$, on écrit simplement « $\mathcal{M}^\delta(Y/\mathcal{G})$ » pour désigner le k-vectoriel $(f^\star\mathcal{M})^\delta(Y/\mathcal{G})$ des sections globales constantes de $f^\star\mathcal{M}$. □

Notations 6.1.22. — La catégorie des modules avec connexion intégrable au-dessus d'un k-feuilletage $X/\mathcal{F}$ est notée $\mathbf{MIC}(X/\mathcal{F})$. Étant donné un objet $\mathcal{M}$ de cette catégorie, on note $\Omega^\bullet_{X/\mathcal{F}}(-;\mathcal{M})$ le complexe de de Rham de $\mathcal{M}$ donné par $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^n_{X/\mathcal{F}}$ en degré n et ayant les ∇^n pour différentielles. Étant donné un morphisme de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{G}\longrightarrow X/\mathcal{F}$, on pose $\Omega^\bullet(Y/\mathcal{G};\mathcal{M}) = \Omega^\bullet_{Y/\mathcal{G}}(Y/\mathcal{G}; f^\star\mathcal{M})$. □

On note le résultat suivant.

Lemme 6.1.23. — *Soient* $X/\mathcal{F}$ *un* k*-feuilletage et* $\mathcal{A}$ *une algèbre dans la catégorie des modules avec connexion sur* $X/\mathcal{F}$ *(i.e.,* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{O}_X$*-algèbre quasi-cohérente munie d'un connexion* ∇ *compatible à la multiplication de* $\mathcal{A}$*). On pose* $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ *et on appelle* $f : Y\longrightarrow X$ *le morphisme évident. La connexion* ∇ *s'étend en une dérivation* $\mathrm{d}_\nabla : \mathcal{O}_Y\longrightarrow f^\star\Omega_{X/\mathcal{F}}$ *et les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la connexion* ∇ *est intégrable ;*

(ii) *la paire* $(f^\star\Omega_{X/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_\nabla)$ *est une structure de feuilletage sur* Y.

Démonstration. — Supposons d'abord que la paire $(f^\star\Omega_{X/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_\nabla)$ est une structure de feuilletage et notons $\mathrm{d}^n_\nabla : f^\star\Omega^n_{X/\mathcal{F}}\longrightarrow f^\star\Omega^{n+1}_{X/\mathcal{F}}$ la différentielle dans le complexe de de Rham associé. En appliquant le foncteur f_*, on obtient des morphismes $f_*(\mathrm{d}^n_\nabla) : \mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^n_{X/\mathcal{F}}\longrightarrow \mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^{n+1}_{X/\mathcal{F}}$ vérifiant

$$(f_*(\mathrm{d}^n_\nabla))(a\otimes\omega) = \nabla(a)\wedge\omega + a\cdot \mathrm{d}_{\mathcal{F}}(\omega)$$

pour toutes sections locales a et ω de $\mathcal{A}$ et $\Omega^n_{X/\mathcal{F}}$. Il s'ensuit que $f_*(\mathrm{d}^n_\nabla) = \nabla^n$. Étant donné que $\mathrm{d}^{n+1}_\nabla\circ \mathrm{d}^n_\nabla = 0$, on en déduit que $\nabla^{n+1}\circ\nabla^n = 0$ comme souhaité.

Réciproquement, considérons le carré suivant

$$\begin{tikzcd}
f_*\Omega^1_{Y/k} \arrow[r, "f_*(\mathrm{d})"] \arrow[d, "f_*(\rho_\nabla)"] & f_*\Omega^2_{Y/k} \arrow[d, "f_*(\wedge^2\rho_\nabla)"] \\
\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_{X/\mathcal{F}} \arrow[r, "\nabla^1"] & \mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^2_{X/\mathcal{F}},
\end{tikzcd}$$

où $\rho_\nabla : \Omega^1_{Y/k} \longrightarrow f^\star\Omega^1_{X/\mathcal{F}}$ est le morphisme $\mathcal{O}_Y$-linéaire associé à la dérivation d_∇. Étant données deux sections locales g et h de $\mathcal{A}$, on a

$$\begin{array}{rlcrl} & ((\wedge^2\rho_\nabla)\circ \mathrm{d})(g\cdot \mathrm{d}h) & & & \nabla^1\circ(\rho_\nabla)(g\cdot \mathrm{d}h) \\ = & (\wedge^2\rho_\nabla)(\mathrm{d}g\wedge \mathrm{d}h) & \text{et} & = & \nabla^1(g\cdot\nabla^0(h)) \\ = & \nabla(g)\wedge\nabla(h) & & = & \nabla(g)\wedge\nabla(h)+g\cdot\nabla^1\circ\nabla^0(h). \end{array}$$

Ainsi, lorsque la connexion sur $\mathcal{A}$ est intégrable, le carré ci-dessus est commutatif et le couple $(f^\star\Omega_{X/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_\nabla)$ est bien une structure de feuilletage. ∎

6.2. Feuilletages schématiques (suite). —

Nous continuons dans cette sous-section l'étude des propriétés élémentaires des k-feuilletages. Nous commençons avec quelques points de terminologie.

Définition 6.2.1. —

(a) Un k-feuilletage $X/\mathcal{F}$ est affine *(resp.* quasi-affine, quasi-compact, noethérien, connexe, irréductible, réduit, intègre, normal*) s'il en est ainsi du k-schéma sous-jacent X.*

(b) Un morphisme de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ est affine *(resp.* quasi-compact, fini, quasi-fini, propre, projectif, plat, *une* immersion fermée, *une* immersion localement fermée*) s'il en est ainsi du morphisme sous-jacent $f : Y \longrightarrow X$.*

(c) Un morphisme de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ est une immersion ouverte *s'il est basique (au sens de la définition 6.1.11) et si le morphisme sous-jacent $f : Y \longrightarrow X$ est une immersion ouverte.*

Les Δ-schémas, au sens de la définition 3.1.1, constituent une source importante de k-feuilletages. Avant d'expliquer cela, on introduit la terminologie suivante sera couramment utilisée dans la suite.

Définition 6.2.2. — *Soit Δ un ensemble fini de dérivations qui commutent deux à deux et qui agissent trivialement sur k. Étant donné un (k,Δ)-schéma X, on pose $\Omega_{X,\Delta} = \bigoplus_{\partial\in\Delta}\mathcal{O}_X\cdot\partial^\vee$ et on note $\mathrm{d}_\Delta : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_{X,\Delta}$ la dérivation donnée par $\mathrm{d}_\Delta(-) = \sum_{\partial\in\Delta}\partial(-)\cdot\partial^\vee$. (Voir la construction 5.7.2.) Le (k,Δ)-schéma X est dit* essentiel *si le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega_{X,\Delta}$ est engendré par l'image de la différentielle d_Δ.*

Proposition 6.2.3. — *Soit Δ un ensemble fini de dérivations qui commutent deux à deux et qui agissent trivialement sur k.*

(i) Un (k,Δ)-schéma essentiel X détermine un k-feuilletage $X/\mathcal{A}_{X,\Delta} = (X, \Omega_{X,\Delta}, \mathrm{d}_\Delta)$ dit associé *à X.*

(ii) Un morphisme de (k,Δ)-schémas essentiels $f : Y \longrightarrow X$ détermine un morphisme de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{A}_{Y,\Delta} \longrightarrow X/\mathcal{A}_{X,\Delta}$.

Ainsi, l'association $X \rightsquigarrow X/\mathcal{A}_{X,\Delta}$ est un foncteur de la catégorie des (k,Δ)-schémas essentiels dans celle des k-feuilletages.

Démonstration. — On démontre seulement la première partie de l'énoncé ; la seconde est laissée en exercice. La dérivation $\mathrm{d}_\Delta : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_{X,\Delta}$ satisfait à la condition (a) de la définition 6.1.1 par hypothèse. Il reste à vérifier la condition (b). On montrera plus précisément que le carré

$$\begin{tikzcd} \Omega^1_{X/k} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\rho"] & \Omega^2_{X/k} \arrow[d, "\wedge^2\rho"] \\ \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant m}\mathcal{O}_X\cdot\partial_i^\vee \arrow[r, "\mathrm{d}_\Delta"] & \bigoplus_{1\leqslant i<j\leqslant m}\mathcal{O}_X\cdot\partial_i^\vee\wedge\partial_j^\vee \end{tikzcd}$$

commute. (Ci-dessus, on a noté ρ le morphisme déduit de d_Δ et on a numéroté les dérivations : $\Delta = \{\partial_1, \cdots, \partial_m\}$; la flèche horizontale inférieure est celle définie dans la construction 5.7.2.)

Soit ω une section de $\Omega^1_{X/k}$. Nous devons vérifier que $\mathrm{d}_\Delta \circ \rho(\omega) = \bigwedge^2 \rho \circ \mathrm{d}\omega$. On ne restreint pas la généralité en supposant que $\omega = a \cdot \mathrm{d}b$, avec a et b deux sections de $\mathcal{O}_X$. Dans ce cas, on a

$$\mathrm{d}_\Delta \circ \rho(a \cdot \mathrm{d}b) = \mathrm{d}_\Delta \left(a \cdot \sum_{i=1}^m \partial_i(b) \cdot \partial_i^\vee \right) = \left(\sum_{i=1}^m \partial_i(a) \cdot \partial_i^\vee \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^m \partial_i(b) \cdot \partial_i^\vee \right)$$

$$= \rho(\mathrm{d}a) \wedge \rho(\mathrm{d}b) = \bigwedge^2 \rho(\mathrm{d}(a \cdot \mathrm{d}b))$$

comme souhaité. (Pour la seconde égalité on utilise le fait que $\mathrm{d}_\Delta(\mathrm{d}_\Delta(b)) = 0$.) ■

La proposition 6.2.3 admet la réciproque suivante.

Proposition 6.2.4. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage. On suppose donnée une famille finie $(f_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_X(X)^I$ de fonctions régulières sur X telle que le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega_{X/\mathcal{F}}$ est librement engendré par la famille $(\mathrm{d}_\mathcal{F}(f_i))_{i \in I}$. Alors, X est naturellement un (k, Δ)-schéma essentiel avec $\Delta = \{\partial_i;\ i \in I\}$. L'action de la dérivation ∂_{i_0}, pour $i_0 \in I$, est donnée par la composition de*

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathrm{d}_\mathcal{F}} \Omega_{X/\mathcal{F}} \simeq \bigoplus\nolimits_{i \in I} \mathcal{O}_X \cdot \mathrm{d}_\mathcal{F}(f_i) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{i_0}} \mathcal{O}_X \cdot \mathrm{d}_\mathcal{F}(f_{i_0}) \simeq \mathcal{O}_X.$$

De plus, le k-feuilletage $X/\mathcal{F}$ s'identifie canoniquement au k-feuilletage associé au (k, Δ)-schéma X.

Démonstration. — On vérifie seulement que les ∂_i commutent entre elles ; les autres assertions sont claires. Par construction, pour g une section de $\mathcal{O}_X$, on a

$$\mathrm{d}_\mathcal{F}(g) = \sum_{i \in I} \partial_i(g) \cdot \mathrm{d}_\mathcal{F}(f_i).$$

Il s'ensuit que la forme différentielle

$$\omega = \mathrm{d}(g) - \sum_{i \in I} \partial_i(g) \cdot \mathrm{d}(f_i)$$

est une section du noyau du morphisme $\rho_\mathcal{F} : \Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{X/\mathcal{F}}$. Puisque $(\Omega_{X/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_\mathcal{F})$ est une structure de feuilletage sur X, l'image de

$$\mathrm{d}\omega = -\sum_{i \in I} \mathrm{d}(\partial_i(g)) \wedge \mathrm{d}(f_i)$$

dans $\Omega^2_{X/\mathcal{F}}$ est nulle. Ceci fournit l'égalité

$$0 = \sum_{i \in I} \mathrm{d}_\mathcal{F}(\partial_i(g)) \wedge \mathrm{d}_\mathcal{F}(f_i) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \partial_j \partial_i(g) \cdot \mathrm{d}_\mathcal{F}(f_j) \wedge \mathrm{d}_\mathcal{F}(f_i).$$

Il s'ensuit que $\partial_i \partial_j(g) = \partial_j \partial_i(g)$, pour tout $i, j \in I$, comme désiré. ■

On arrive à la notion fondamentale de morphisme différentiellement étale entre k-feuilletages.

Définition 6.2.5. —

(i) *Soit $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ un morphisme de k-feuilletages. On dit que f est* différentiellement étale *(resp.* différentiellement lisse*) si le morphisme évident $f^\star \Omega_{X/\mathcal{F}} \longrightarrow \Omega_{Y/\mathcal{G}}$ est un isomomorphisme (resp. un monomorphisme de conoyau localement libre de rang fini).*

(ii) *Soient $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ un morphisme de k-feuilletages et $y \in Y$ un point. On dit que f est* différentiellement étale *(resp.* différentiellement lisse*)* en *y si la restriction de f à un voisinage ouvert de y est différentiellement étale (resp. différentiellement lisse).*

(iii) *On dit qu'un k-feuilletage $X/\mathcal{F}$ est* différentiellement lisse *(resp.* différentiellement lisse en *un point $x \in X$) s'il en est ainsi du morphisme structural $X/\mathcal{F} \longrightarrow$* Spec$(k)$.

Dans la suite les expressions « différentiellement étale » et « différentiellement lisse » seront souvent abrégées en « diff-étale » et « diff-lisse ».

Remarque 6.2.6. — Contrairement à ce que notre terminologie suggère, la classe des morphismes différentiellement lisses de k-feuilletages au sens de la définition 6.2.5 n'étend pas celle des morphismes différentiellement lisses de schémas au sens de [**40**, Chapitre IV, Définition 16.10.1]. Plus précisément, étant donné un morphisme de k-schémas de type fini $f : Y \longrightarrow X$, la condition que f est différentiellement lisse au sens de [**40**] n'entraîne pas que le morphisme de k-feuilletages grossiers $f : Y^g \longrightarrow X^g$ est diff-lisse. (En effet, les immersions fermées sont des morphismes différentiellement lisses au sens de [**40**].)

En fait, modulo certaines conditions de finitude, la notion de morphisme diff-lisse (resp. diff-étale) de k-feuilletages est considérée ici comme étant l'extension aux feuilletages schématiques de la notion usuelle de morphisme lisse (resp. étale) de k-schémas. (Ceci sera justifié par la proposition 6.2.19 ci-dessous.) Dans la suite, on ne fera jamais usage de la notion de morphisme différentiellement lisse au sens de [**40**], et il n'y aura donc aucun risque de confusion. □

Exemples 6.2.7. — Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage.

(a) Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente munie d'une connexion intégrable compatible à la multiplication. Notons $Y/\mathcal{G}$ le k-schéma $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ muni de la structure de feuilletage fournie par le lemme 6.1.23. Alors, le morphisme évident $Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ est diff-étale.

(b) Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente positivement graduée munie d'une connexion intégrable compatible à la multiplication et à la graduation. Alors, $Z = \mathrm{Proj}(\mathcal{B})$ possède une structure naturelle de k-feuilletage $(\Omega_{Z/\mathcal{H}}, \mathrm{d}_{\mathcal{H}})$ et le morphisme évident $Z/\mathcal{H} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ est diff-étale. (En effet, $Z/\mathcal{H}$ est obtenu en recollant les spectres des $\mathcal{O}_U$-algèbres quasi-cohérentes $((\mathcal{B}|_U)[g^{-1}])_0$, pour $U \subset X$ ouvert et $g \in \mathcal{B}_+(U)$ homogène de degré non nul, qu'on munit des structures de feuilletage fournies par le lemme 6.1.23.) □

Lemme 6.2.8. — *La classe des morphismes diff-étales (resp. diff-lisses) de k-feuilletages est stable par composition et changement de base. Si f et g sont des morphismes composables de k-feuilletages tels que f et $f \circ g$ sont diff-étales, alors il en est de même de g.*

Démonstration. — La stabilité par changement de base découle immédiatement de la proposition 6.1.18. Les autres assertions sont évidentes. ■

Lemme 6.2.9. — *Pour qu'un morphisme de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ soit un isomorphisme il faut et il suffit qu'il soit diff-étale et que le morphisme de k-schémas sous-jacent $f : Y \longrightarrow X$ soit un isomorphisme.*

Démonstration. — C'est évident. ■

Proposition 6.2.10. — *Soit Δ un ensemble fini de dérivations qui commutent deux à deux et qui agissent trivialement sur k. Soit X un (k, Δ)-schéma essentiel. Alors, le foncteur « k-feuilletage associé » définit une équivalence entre, d'une part, la catégorie des (X, Δ)-schémas et, d'autre part, la catégorie des $X/\mathcal{A}_{X,\Delta}$-feuilletages diff-étales (i.e., des morphismes diff-étales de k-feuilletages de but $X/\mathcal{A}_{X,\Delta}$).*

Démonstration. — Soit $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{A}_{X,\Delta}$ un morphisme diff-étale de k-feuilletages. Étant donné que le (k, Δ)-schéma X est essentiel, on a $\Omega_{X,\Delta} = \bigoplus_{\partial\in\Delta} \mathcal{O}_X \cdot \partial^\vee$. On note encore $\partial^\vee \in \Omega_{Y/\mathcal{G}}(Y)$ l'image de $\partial^\vee \in \Omega_{X,\Delta}(X)$ par le morphisme naturel. Puisque f est diff-étale, on a la décomposition suivante :

$$\Omega_{Y/\mathcal{G}} = \bigoplus_{\partial\in\Delta} \mathcal{O}_Y \cdot \partial^\vee.$$

Ceci permet d'étendre l'action des dérivations $\partial \in \Delta$ à $\mathcal{O}_Y$ et on a évidement $\mathrm{d}_{\mathcal{G}} = \sum_{\partial\in\Delta} \partial(-)\cdot\partial^\vee$. Supposons un instant que les dérivations de $\mathcal{O}_Y$ ainsi construites commutent deux à deux. On peut alors munir Y d'une structure de (X, Δ)-schéma qui redonne la structure de feuilletage $(\Omega_{Y/\mathcal{G}}, \mathrm{d}_{\mathcal{G}})$ par application du foncteur « k-feuilletage associé ». Ce foncteur est donc essentiellement surjectif sur les objets, ce qui permet de conclure car il est aussi pleinement fidèle.

Ordonnons l'ensemble des dérivations : $\Delta = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$. Il nous reste à vérifier l'identité $\partial_i \circ \partial_j = \partial_j \circ \partial_i$ sur $\mathcal{O}_Y$ pour $1 \leqslant i,\ j \leqslant m$. La preuve de la proposition 6.2.4, permet de montrer ceci sous l'hypothèse qu'il existe des fonctions régulières globales $f_i \in \mathcal{O}_X(X)$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, telles que $\partial_j(f_i) = \delta_{ij}$, pour tout $1 \leqslant i,\ j \leqslant m$. (Bien entendu, δ_{ij} est le symbole de Kronecker.) On se ramène à ce cas en remplaçant X par $X' = X[t_1, \cdots, t_m]$, avec $\partial_j(t_i) = \delta_{ij}$, et $Y/\mathcal{G}$ par $Y'/\mathcal{G}' = (Y/\mathcal{G}) \times_X (X'/\mathcal{A}_{X',\Delta})$. (Le lemme 6.2.8 assure que le morphisme $Y'/\mathcal{G}' \longrightarrow X'/\mathcal{F}'$ est encore diff-étale.) Ceci termine la preuve de la proposition. ■

On donne maintenant un théorème de structure locale pour les k-feuilletages diff-lisses. La partie (b) de ce théorème est l'analogue direct d'un fait bien connu concernant les morphismes lisses entre schémas.

Théorème 6.2.11. —

(a) Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse. Alors, tout point de X admet un voisinage ouvert U tel que $U/\mathcal{F}$ est isomorphe au k-feuilletage associé à un (k,Δ)-schéma essentiel (avec Δ un ensemble fini de dérivations qui commutent deux à deux et qui agissent trivialement sur k).

(b) Soit $f : X/\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ un morphisme diff-lisse de k-feuilletages. Alors, tout point de X admet un voisinage ouvert U qui s'insère dans un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} U/\mathcal{F} \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "f"'] & (S/\mathcal{E}) \times_k (\mathbb{A}^m)^g \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & S/\mathcal{E} \end{tikzcd}$$

avec e un morphisme diff-étale.

Démonstration. — Vu la proposition 6.2.10, la propriété (a) découle de la propriété (b) appliquée au morphisme structural du k-feuilletage $X/\mathcal{F}$. Il suffit donc de démontrer (b). Le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega_{X/\mathcal{F}}$ est localement la somme directe de $f^\star\Omega_{S/\mathcal{E}}$ et d'un module libre de rang fini. De plus, il est engendré par l'image de $\mathrm{d}_\mathcal{F}$. Le problème étant local, on peut donc supposer que

$$\Omega_{X/\mathcal{F}} = f^\star\Omega_{S/\mathcal{E}} \oplus \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_X \cdot \mathrm{d}_\mathcal{F}(f_i)$$

avec $f_1, \cdots, f_m \in \mathcal{O}_X(X)$. Le morphisme de S-schémas $e : X \longrightarrow S \times_k \mathbb{A}^m = S[t_1, \cdots, t_m]$ tel que $f_i = t_i \circ e$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ définit alors un morphisme diff-étale $e : X/\mathcal{F} \longrightarrow (S/\mathcal{E}) \times_k (\mathbb{A}^m)^g$ comme souhaité. ■

Le résultat suivant peut paraître contre-intuitif au premier abord.

Corollaire 6.2.12. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse. Alors, le morphisme basique $X_{\text{réd}}/\mathcal{F} \hookrightarrow X/\mathcal{F}$ est diff-étale.*

Démonstration. — Appelons $\mathcal{N}$ le nilradical de $\mathcal{O}_X$ et $s : X_{\text{réd}} \hookrightarrow X$ l'immersion fermée évidente. D'après le corollaire 6.1.13, on a une suite exacte

$$\mathcal{N}/\mathcal{N}^2 \longrightarrow s^\star\Omega_{X/\mathcal{F}} \longrightarrow \Omega_{X_{\text{réd}}/\mathcal{F}} \longrightarrow 0.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que le morphisme $\mathcal{N} \longrightarrow s^\star\Omega_{X/\mathcal{F}}$ est nul. La question étant locale pour la topologie de Zariski sur X, on peut supposer, grâce au théorème 6.2.11(a), que $X/\mathcal{F}$ est le k-feuilletage $X/\mathcal{A}_{X,\Delta}$ associé à un (k,Δ)-schéma essentiel affine X. Dans ce cas, on doit montrer que le morphisme évident

$$\mathrm{d}_\Delta : \mathcal{N}(X) \longrightarrow \bigoplus_{\partial\in\Delta} \mathcal{O}(X)/\mathcal{N}(X) \cdot \partial^\vee$$

est nul. Ceci découle aussitôt du fait que $\mathcal{N}(X)$ est un Δ-idéal de $\mathcal{O}(X)$; voir le lemme 1.1.7. ■

Définition 6.2.13. —

(a) Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse. On dit que $X/\mathcal{F}$ est localement de type fini *si tout point de X possède un voisinage ouvert U tel que $U/\mathcal{F}$ est isomorphe au k-feuilletage associé à un (k,Δ)-schéma essentiel de type fini (au sens de la définition 3.1.22). On dit que $X/\mathcal{F}$ est* de type fini *s'il est en plus quasi-compact.*

(b) Soit $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ un morphisme diff-étale de k-feuilletages diff-lisses. On dit que f est localement de type fini *si tout point de X possède un voisinage ouvert U tel que $f : f^{-1}(U)/\mathcal{G} \longrightarrow U/\mathcal{F}$ est associé à un morphisme localement de type fini de (k,Δ)-schémas essentiels (au sens de la définition 3.1.22). On dit que f est* de type fini *s'il est en plus quasi-compact.*

Remarque 6.2.14. — La classe des morphismes diff-étales de type fini n'est pas stable par changement de base. (En effet, si $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ est un morphisme diff-étale entre k-feuilletages diff-lisses, le changement de base de f suivant l'inclusion $X^\delta \hookrightarrow X/\mathcal{F}$ est le morphisme $f : Y^\delta \longrightarrow X^\delta$ qui est de type fini si et seulement si le morphisme de k-schémas $f : Y \longrightarrow X$ est de type fini. Or, il est facile de construire des morphismes diff-étales de type fini dont les morphismes sous-jacents ne sont pas de type fini.) Pour cette raison, la définition 6.2.13 est d'une utilité très limitée. □

Suivant la tradition en théorie des feuilletages, on fait la definition suivante.

Définition 6.2.15. — *Un k-*feuilletage singulier *est un k-feuilletage $X/\mathcal{F}$ tel que le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega_{X/\mathcal{F}}$ est localement de présentation finie.*

Proposition 6.2.16. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier. Si X est réduit, il existe alors un ouvert dense $U \subset X$ tel que le k-feuilletage $U/\mathcal{F}$ est diff-lisse.*

Démonstration. — En effet, puisque X est réduit et que le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega_{X/\mathcal{F}}$ est localement de présentation finie, tout point générique de X possède un voisinage ouvert au-dessus duquel $\Omega_{X/\mathcal{F}}$ est libre. L'union de ces voisinages est un ouvert dense $U \subset X$ tel que la restriction de $\Omega_{X/\mathcal{F}}$ à U est localement libre de rang fini. Le k-feuilletage $U/\mathcal{F}$ est donc diff-lisse comme désiré. ■

Lemme 6.2.17. — *Un produit fibré de k-feuilletages singuliers est un k-feuilletage singulier. En particulier, la sous-catégorie pleine des k-feuilletages singuliers est stable par les limites finies.*

Démonstration. — Ceci découle immédiatement de la proposition 6.1.18. ■

Proposition 6.2.18. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme localement de présentation finie de k-schémas. Supposons que le k-feuilletage $X/\mathcal{F}$ est singulier. Alors, le k-feuilletage basique $Y/\mathcal{F}$ (voir la définition 6.1.11) est aussi singulier.*

Démonstration. — La question étant locale sur Y et X, on peut supposer que f est la composition d'une immersion fermée de présentation finie suivie de la projection d'un espace affine relatif $\mathrm{pr} : \mathbb{A}^n_X \longrightarrow X$. Puisque $\Omega_{\mathbb{A}^n_X/\mathcal{F}} \simeq \mathrm{pr}^\star\Omega_{X/\mathcal{F}} \oplus \mathcal{O}^n_{\mathbb{A}^n_X}$, le k-feuilletage $\mathbb{A}^n_X/\mathcal{F}$ est singulier. Il reste donc à traiter le cas d'une immersion fermée. Soit $s : Z \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un sous-schéma fermé défini par un idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ localement de type fini. D'après le corollaire 6.1.13, on dispose d'une suite exacte de $\mathcal{O}_Z$-modules quasi-cohérents

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow s^\star\Omega_{X/\mathcal{F}} \longrightarrow \Omega_{Z/\mathcal{F}} \longrightarrow 0.$$

L'hypothèse que $\mathcal{I}$ est localement de type fini entraîne que le $\mathcal{O}_Z$-module $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est aussi localement de type fini, ce qui permet de conclure. ■

Annexe au §6.2 : Sur les morphismes étales et lisses entre schémas de type fini sur un corps. —

Le résultat principal de cet annexe ne servira pas dans la suite mais permet de justifier la définition des morphismes diff-étales et diff-lisses entre k-feuilletages (voir la définition 6.2.5). En effet, on démontre le résultat suivant.

Proposition 6.2.19. — *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de k-schémas localement de type fini avec X réduit. Alors, f est étale (resp. lisse) si et seulement si le morphisme évident $f^\star\Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{Y/k}$ est un isomorphisme (resp. un monomorphisme de conoyau localement libre). Autrement dit, f est étale (resp. lisse) si et seulement si le morphisme de k-feuilletages $f : Y^g \longrightarrow X^g$ est diff-étale (resp. diff-lisse).*

Remarque 6.2.20. — Lorsque les k-schémas X et Y sont lisses, la proposition 6.2.19 découle de [**40**, Chapitre IV, Théorème 17.11.1 et Corollaire 17.11.2]. Le cas général de ladite proposition ne semble pas figurer dans les références standards sur les morphismes étales et lisses. □

Remarque 6.2.21. — L'hypothèse que k est de caractéristique nulle est nécessaire pour la validité de la proposition 6.2.19. En effet, si k est de caractéristique $p > 0$, l'immersion fermée

$$s : Y = \mathrm{Spec}(k[t]/(t^p - a)) \hookrightarrow X = \mathrm{Spec}(k[t])$$

induit un isomorphisme $s^\star\Omega_{X/k} \simeq \Omega_{Y/k}$ pour tout $a \in k$. □

Remarque 6.2.22. — L'hypothèse que X est réduit est nécessaire pour la validité de la proposition 6.2.19. Soient $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ un système d'indéterminées et $P \in k[\mathbf{t}]$ un polynôme tel que

$$P(0) = \frac{\partial P}{\partial t_1}(0) = \cdots = \frac{\partial P}{\partial t_n}(0) = 0.$$

Notons $I \subset k[\mathbf{t}]$ l'idéal engendré par les dérivées partielles de P :

$$I = \left(\frac{\partial P}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial t_n}\right).$$

Notons aussi $A = k[\mathbf{t}]/I$ et $a \in A$ la classe de P dans A. Par construction, $\mathrm{d}a = 0$ dans $\Omega_{A/k}$, ce qui entraîne que l'immersion fermée $s : \mathrm{Spec}(A/a) = Z \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A) = X$ induit un isomorphisme $s^\star\Omega_{X/k} \simeq \Omega_{Z/k}$. Or, pour P bien choisi, le morphisme $s : Z \hookrightarrow X$ n'est pas étale. (C'est le cas par exemple lorsque $P(x, y) = x^5 - x^2y^2 + y^4$; nous avons appris cela lors d'une discussion avec A. Kresch.) □

Le fait que le morphisme $f^\star\Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{Y/k}$ soit inversible (resp. injectif et de conoyau localement libre) lorsque f est étale (resp. lisse) est bien connu (voir par exemple [**3**, Exposé II, Lemme 4.1 et Théorème 4.3]). Il s'agit de montrer la réciproque. On établit d'abord quelques réductions.

Lemme 6.2.23. — *Pour démontrer la proposition 6.2.19, il suffit de traiter le cas non respé.*

Démonstration. — En effet, soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de k-schémas de type fini tel que $f^\star\Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{Y/k}$ est injectif de conoyau localement libre. On cherche à montrer que f est lisse (sous les hypothèses que k est de caractéristique nulle et que X est réduit). La question étant locale sur X et Y, on peut supposer qu'il existe un sous-$\mathcal{O}_Y$-module libre de $\Omega_{Y/k}$ admettant une base de la forme $\mathrm{d}a_1, \cdots, \mathrm{d}a_n$, avec $a_i \in \mathcal{O}(Y)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et qui soit un supplémentaire de l'image de $f^\star\Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{Y/k}$. On considère alors le morphisme de X-schémas $g : Y \longrightarrow X[t_1, \cdots, t_n]$ tel que $a_i = t_i \circ g$. Alors, par construction, le morphisme $g^\star\Omega_{X[t_1,\cdots,t_n]/k} \longrightarrow \Omega_{Y/k}$ est un isomorphisme. Le cas non respé de la proposition 6.2.19 entraîne que g est étale, ce qui permet de conclure. ■

Lemme 6.2.24. — *Pour démontrer le cas non respé de la proposition 6.2.19, il suffit de le faire en supposant que f est une immersion fermée.*

Démonstration. — En effet, soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de k-schémas de type fini tel que $f^\star\Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{Y/k}$ est un isomorphisme. Alors f est un morphisme non ramifié (voir [**40**, Chapitre IV, Proposition 17.3.6]). Grâce à [**40**, Chapitre IV, Corollaire 18.4.7] et puisque la proporiété à démontrer est locale pour la topologie de Zariski sur Y, on peut supposer que $f = e \circ s$ avec $s : Y \hookrightarrow X'$ une immersion fermée et $e : X' \longrightarrow X$ un morphisme étale. Puisque e induit un isomorphisme $e^\star\Omega_{X/k} \simeq \Omega_{X'/k}$, on déduit que s induit aussi un isomorphisme $s^\star\Omega_{X'/k} \simeq \Omega_{Y/k}$. Ceci nous ramène à traiter le cas de l'immersion fermée s. ■

Vu les lemmes 6.2.23 et 6.2.24, la proposition 6.2.19 découle maintenant du résultat suivant.

Proposition 6.2.25. — *Soient A une k-algèbre noethérienne, réduite et connexe, et $I \subsetneq A$ un idéal strict. Si* $\mathrm{d}(I) \subset I \cdot \Omega_{A/k}$, *alors nécessairement* $I = (0)$.

Démonstration. — On procède par l'absurde en considérant un contre-exemple à la proposition, i.e., un idéal $0 \subsetneq I \subsetneq A$ vérifiant $\mathrm{d}(I) \subset I \cdot \Omega_{A/k}$. Le fermé $\mathrm{Z}(I)$ est strict et non vide dans $\mathrm{Spec}(A)$ car A est réduite. Puisque $\mathrm{Spec}(A)$ est noethérien et connexe, on peut trouver une composante irréductible $\mathrm{Z}(\mathfrak{n})$, avec $\mathfrak{n} \subset A$ un idéal premier minimal, telle que $\varnothing \neq \mathrm{Z}(I) \cap \mathrm{Z}(\mathfrak{n}) \subsetneq \mathrm{Z}(\mathfrak{n})$ ce qui revient à dire que $\mathfrak{n} \subsetneq \mathfrak{n} + I \subsetneq A$. Puisque la condition $\mathrm{d}(I) \subset I \cdot \Omega_{A/k}$ entraîne trivialement la condition $\mathrm{d}(I') \subset I' \cdot \Omega_{A'/k}$ pour toute A-algèbre A' en prenant $I' = A' \cdot I$, on continue à avoir un contre-exemple à la proposition en remplaçant A et I par $A/\mathfrak{n}$ et $(I + \mathfrak{n})/\mathfrak{n}$. Autrement dit, on peut supposer que A est intègre dans la suite de l'argument.

La k-algèbre A étant intègre, le fermé $\mathrm{Z}(I)$ est de codimension non nulle dans $\mathrm{Spec}(A)$. On peut donc trouver des idéaux premiers $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ tels que :

— $I \subset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}$ est minimal pour cette propriété ;

— $\mathrm{Z}(\mathfrak{p})$ est de codimension 1 dans $\mathrm{Z}(\mathfrak{q})$.

Ainsi, comme avant, on a $\mathfrak{q} \subsetneq I + \mathfrak{q} \subsetneq A$ et on peut remplacer A et I par $A/\mathfrak{q}$ et $(I + \mathfrak{q})/\mathfrak{q}$. On peut donc supposer que $\mathrm{Z}(I)$ contient un point de codimension 1 dans $\mathrm{Spec}(A)$, qu'on note encore $\mathfrak{p}$.

Soit $R \subset \mathrm{Frac}(A)$ un anneau de valuation discrète contenant A et centré en $\mathfrak{p}$. Autrement dit, $R = \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ où $\tilde{A}$ est la normalisation de A dans $\mathrm{Frac}(A)$ et $\tilde{\mathfrak{p}} \subset \tilde{A}$ un idéal premier de codimension 1 tel que $\tilde{\mathfrak{p}} \cap A = \mathfrak{p}$. Alors, on a encore $0 \subsetneq I \cdot R \subsetneq R$. De plus, si π est une uniformisante de R, on a $I \cdot R = (\pi^e)$ pour un certain entier $e \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. Quitte à remplacer A par le complété formel $R/\!\!/(\pi)$ on peut donc supposer que A est un anneau de valuation discrète, complet, d'idéal maximal $\mathfrak{m} = (\pi)$ et que $I = (\pi^e)$ avec $e \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. D'après le théorème de structure de Cohen (voir par exemple [**37**, Chapitre $0_{\mathbf{IV}}$, Théorème 19.8.8]), on peut supposer que $A = K[[\pi]]$ pour une extension K/k. L'hypothèse $\mathrm{d}(I) \subset I \cdot \Omega_{A/k}$, pour la dérivation k-linéaire universelle, entraîne alors que $\partial_\pi(I) \subset I$ pour la dérivation K-linéaire évidente $\partial_\pi : K[[\pi]] \longrightarrow K[[\pi]]$. Il s'ensuit une contradiction puisque $\partial_\pi(\pi^e) = e \cdot \pi^{e-1}$ n'appartient pas à $I = (\pi^e)$. (C'est ici qu'on utilise que k est de caractéristique nulle.) ■

6.3. Complétion faible d'un k-feuilletage singulier. —

Dans cette sous-section et celle qui suivra, on introduit et on étudie la complétion faible d'un k-feuilletage singulier affine le long d'un fermé constructible. Pour une comparaison future, on commence toutefois avec la complétion « usuelle ».

Proposition 6.3.1. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage affine et $Z \subset X$ un sous-schéma fermé défini par un idéal $I \subset \mathcal{O}(X)$. On suppose que le k-feuilletage $X/\mathcal{F}$ est diff-lisse (resp. noethérien et singulier). On pose $Z_n = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(X)/I^n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, et $Z_\infty = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(X)/\!\!/I)$. Alors, le k-schéma Z_∞ possède une structure de feuilletage naturelle $(\Omega_{Z_\infty/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_\mathcal{F})$ telle que*

$$\Omega_{Z_\infty/\mathcal{F}}(Z_\infty) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{Z_n/\mathcal{F}}(Z_n).$$

De plus, le morphisme évident $Z_\infty \longrightarrow X$ définit un morphisme diff-étale de k-feuilletages $Z_\infty/\mathcal{F} \longrightarrow X/\mathcal{F}$.

Démonstration. — Pour $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'une dérivation k-linéaire $\mathrm{d}_\mathcal{F} : \mathcal{O}(Z_n) \longrightarrow \Omega_{Z_n/\mathcal{F}}(Z_n)$. En passant à la limite, on obtient une dérivation k-linéaire

$$\mathrm{d}_\mathcal{F} : \mathcal{O}(Z_\infty) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}(Z_n) \longrightarrow \lim_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{Z_n/\mathcal{F}}(Z_n).$$

Appelons $\Omega_{Z_\infty/\mathcal{F}}$ le $\mathcal{O}_{Z_\infty}$-module quasi-cohérent associé au $\mathcal{O}(Z_\infty)$-module $\lim_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{Z_n/\mathcal{F}}(Z_n)$. Par construction, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(X) & \xrightarrow{\mathrm{d}_\mathcal{F}} & \Omega_{X/\mathcal{F}}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(Z_\infty) & \xrightarrow{\mathrm{d}_\mathcal{F}} & \Omega_{Z_\infty/\mathcal{F}}(Z_\infty). \end{array}$$

Pour conclure, il reste à montrer que le morphisme évident $\Omega_{X/\mathcal{F}}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(Z_\infty) \longrightarrow \Omega_{Z_\infty/\mathcal{F}}(Z_\infty)$ est un isomorphisme. (Cette propriété entraîne que le $\mathcal{O}_{Z_\infty}$-module $\Omega_{Z_\infty/\mathcal{F}}$ est engendré par l'image de $\mathrm{d}_\mathcal{F}$ ce qui assure que $(Z_\infty, \Omega_{Z_\infty/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_\mathcal{F})$ est bien un k-feuilletage.) Pour ce faire, on utilise la suite exacte

$$I^n/I^{2n} \longrightarrow \Omega_{X/\mathcal{F}}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(Z_n) \longrightarrow \Omega_{Z_n/\mathcal{F}}(Z_n) \longrightarrow 0$$

du corollaire 6.1.13. Si l'idéal I est engendré par la famille $(a_i)_{i\in E}$, il s'ensuit aussitôt que

$$\Omega_{Z_n/\mathcal{F}_n}(Z_n) \simeq \frac{\Omega_{X/\mathcal{F}}(X)}{I^n \cdot \Omega_{X/\mathcal{F}}(X) + \sum_{i\in E} I^{n-1} \cdot \mathrm{d}a_i}.$$

En particulier, on a des surjections évidentes

$$\frac{\Omega_{X/\mathcal{F}}(X)}{I^n \cdot \Omega_{X/\mathcal{F}}(X)} \twoheadrightarrow \Omega_{Z_n/\mathcal{F}}(Z_n) \twoheadrightarrow \frac{\Omega_{X/\mathcal{F}}(X)}{I^{n-1} \cdot \Omega_{X/\mathcal{F}}(X)} \twoheadrightarrow \Omega_{Z_{n-1}/\mathcal{F}}(Z_{n-1})$$

ce qui donne, par passage à la limite, un isomorphisme canonique

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\Omega_{X/\mathcal{F}}(X)}{I^n \cdot \Omega_{X/\mathcal{F}}(X)} \xrightarrow{\sim} \Omega_{Z_\infty/\mathcal{F}}(Z_\infty).$$

Vu que $\Omega_{X/\mathcal{F}}(X)$ est un $\mathcal{O}(X)$-module projectif de type fini (resp. un module de type fini sur l'anneau noethérien $\mathcal{O}(X)$), on a un isomorphisme canonique

$$\Omega_{X/\mathcal{F}}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(Z_\infty) \simeq \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\Omega_{X/\mathcal{F}}(X)}{I^n \cdot \Omega_{X/\mathcal{F}}(X)},$$

ce qui permet de conclure. (Dans le cas respé, on utilise [**34**, Chapitre $0_\mathbf{I}$, Corollaire 7.3.3].) ■

Remarque 6.3.2. — Gardons les hypothèses et les notations de la proposition 6.3.1. Lorsque X n'est pas noethérien, le schéma $Z_\infty \times_X Z$ n'est pas nécessairement isomorphe à Z, même si l'idéal I est de type fini. C'est pour remédier à ce problème que nous introduisons la notion de complétion faible. (Voir le lemme 6.3.11 ci-dessous.) □

Le lemme simple suivant sera utilisé dans la remarque 6.3.4 ci-dessous.

Lemme 6.3.3. — *Soient A un anneau et $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ un système d'indéterminées. Alors, pour tout A-module de présentation finie M, le morphisme évident $M \otimes_A A[[\mathbf{t}]] \longrightarrow M[[\mathbf{t}]]$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Le foncteur $(-)[[\mathbf{t}]]$ est exact sur la catégorie des A-modules car il en est ainsi des produits directs. Étant donnée une présentation

$$A^{\oplus q} \longrightarrow A^{\oplus p} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

du A-module M, on déduit un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd} A^{\oplus q} \otimes_A A[[\mathbf{t}]] \arrow[r] \arrow[d] & A^{\oplus p} \otimes_A A[[\mathbf{t}]] \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_A A[[\mathbf{t}]] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ A^{\oplus q}[[\mathbf{t}]] \arrow[r] & A^{\oplus p}[[\mathbf{t}]] \arrow[r] & M[[\mathbf{t}]] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Clairement les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes. Ceci permet de conclure. ■

Remarque 6.3.4. — Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage affine et $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ un système d'indéterminées. On note $X[[\mathbf{t}]]$ le X-schéma affine tel que $\mathcal{O}(X[[\mathbf{t}]]) = \mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}]]$ et $\Omega_{X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}}$ le $\mathcal{O}_{X[[\mathbf{t}]]}$-module associé au $\mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}]]$-module

$$\Omega_{X/\mathcal{F}}(X)[[\mathbf{t}]] \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}]] \cdot \mathrm{d}t_i.$$

On dispose d'une dérivation k-linéaire $\mathrm{d}_{\mathcal{F}} : \mathcal{O}_{X[[\mathbf{t}]]} \longrightarrow \Omega_{X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}}$ qui envoie une série formelle $f = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t}^{\mathbf{r}}$ à coefficients dans $\mathcal{O}(X)$ sur

$$\mathrm{d}_{\mathcal{F}}(f) = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{N}^n} \mathrm{d}_{\mathcal{F}}(a_{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{t}^{\mathbf{r}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t_i} \cdot \mathrm{d}t_i.$$

Par construction, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(X[\mathbf{t}]) \arrow[r, "\mathrm{d}_{\mathcal{F}}"] \arrow[d] & \Omega_{X[\mathbf{t}]/\mathcal{F}}(X[\mathbf{t}]) \arrow[d] \\ \mathcal{O}(X[[\mathbf{t}]]) \arrow[r, "\mathrm{d}_{\mathcal{F}}"] & \Omega_{X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}}(X[[\mathbf{t}]]). \end{tikzcd}$$

Si de plus $X/\mathcal{F}$ est un k-feuilletage singulier, le morphisme évident

$$\Omega_{X[\mathbf{t}]/\mathcal{F}}(X[\mathbf{t}]) \otimes_{\mathcal{O}(X[\mathbf{t}])} \mathcal{O}(X[[\mathbf{t}]]) \longrightarrow \Omega_{X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}}(X[[\mathbf{t}]])$$

est un isomorphisme. (Pour vérifier cela, il suffit de montrer que $M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}]] \longrightarrow M[[\mathbf{t}]]$ est un isomorphisme si M est un $\mathcal{O}(X)$-module de présentation finie, ce qui est assuré par le lemme 6.3.3.) On déduit aussitôt, toujours sous l'hypothèse que $X/\mathcal{F}$ est singulier, que le triplet $X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F} = (X[[\mathbf{t}]], \Omega_{X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}}, \mathrm{d}_{\mathcal{F}})$ est un k-feuilletage singulier – le point à vérifier étant que le $\mathcal{O}_{X[[\mathbf{t}]]}$-module $\Omega_{X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}}$ est engendré par l'image de la dérivation –, et que le morphisme évident $X[[\mathbf{t}]] \longrightarrow X[\mathbf{t}]$ définit un morphisme diff-étale de k-feuilletages $X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F} \longrightarrow X[\mathbf{t}]/\mathcal{F}$. Bien entendu, on enfreint ici la convention de la remarque 6.1.12 car le $X/\mathcal{F}$-feuilletage $X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}$ n'est pas en général basique au sens de la définition 6.1.11 ; ceci s'applique également au $X/\mathcal{F}$-feuilletage $Z_\infty/\mathcal{F}$ de la proposition 6.3.1 ainsi qu'aux $X/\mathcal{F}$-feuilletages obtenus par complétion faible comme ci-dessous. Ces abus de language sont naturels et ne risquent pas d'entraîner confusion. □

Construction 6.3.5. — Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier affine et $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{O}(X)^n$ un n-uplet de fonctions régulières sur X. On note $\widehat{X}_{\underline{a}}/\mathcal{F}$ le $X/\mathcal{F}$-feuilletage défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \widehat{X}_{\underline{a}}/\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & X[[t_1, \cdots, t_n]]/\mathcal{F} \arrow[d] \\ X/\mathcal{F} \arrow[r, "\underline{a}"] & X[t_1, \cdots, t_n]/\mathcal{F}. \end{tikzcd}$$

D'après la remarque 6.3.4, la flèche verticale à droite est diff-étale. Il s'ensuit que le $X/\mathcal{F}$-feuilletage $\widehat{X}_{\underline{a}}/\mathcal{F}$ est diff-étale. Notons $I = (\underline{a})$ l'ideal de $\mathcal{O}(X)$ engendré par les a_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et $Z = \mathrm{Z}(I)$ le sous-schéma fermé associé. Alors, si $X/\mathcal{F}$ est diff-lisse ou noethérien, on dispose d'un morphisme diff-étale

$Z_\infty/\mathcal{F} \longrightarrow \widehat{X}_{\underline{a}}/\mathcal{F}$ (voir les notations de la proposition 6.3.1). Ce morphisme n'est pas un isomorphisme en général (voir toutefois les lemmes 6.3.13 et 6.3.12 ci-dessous). □

Remarque 6.3.6. — La formation du X-schéma $\widehat{X}_{\underline{a}}$ dans la construction 6.3.5 est indépendante de la structure de feuilletage sur X et garde donc son sens pour tout k-schéma affine et tout uplet de fonctions régulières. Cependant, l'existence d'une structure de feuilletage singulière sur X n'est pas une hypothèse restrictive : on peut toujours munir X de sa structure de feuilletage discrète. Ainsi, la plupart des énoncés ci-dessous concernant la construction 6.3.5 valent aussi pour les k-schémas non feuilletés. □

Proposition 6.3.7. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier, et $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ et $\underline{b} = (b_1, \cdots, b_m)$ deux uplets de fonctions régulières sur X. Il existe alors un isomorphisme canonique*

$$\widehat{X}_{\underline{a},\underline{b}}/\mathcal{F} \simeq (\widehat{X}_{\underline{a}})\widehat{_{\underline{b}}}/\mathcal{F}.$$

Autrement dit, le $X/\mathcal{F}$-feuilletage obtenu en appliquant la construction 6.3.5 avec le $m+n$-uplet $(\underline{a}, \underline{b})$ coïncide avec celui obtenu en appliquant successivement ladite construction à $\underline{a}$ et ensuite à $\underline{b}$.

Démonstration. — On construit seulement l'isomorphisme de X-schémas $\widehat{X}_{\underline{a},\underline{b}} \simeq (\widehat{X}_{\underline{a}})\widehat{_{\underline{b}}}$ et il sera clair que cet isomorphisme induit un isomorphisme de $X/\mathcal{F}$-feuilletages. Soient $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ et $\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_m)$ deux systèmes d'indéterminées. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widehat{X}_{\underline{a},\underline{b}} \arrow[rr] \arrow[d] & & X[[\mathbf{t},\mathbf{s}]] \arrow[d] \\
\widehat{X}_{\underline{a}} \arrow[r] \arrow[d] & X[[\mathbf{t}]] \arrow[r, "\underline{b}"] \arrow[d] & X[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}] \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\underline{a}"] & X[\mathbf{t}] \arrow[r, "\underline{b}"] & X[\mathbf{t},\mathbf{s}]
\end{tikzcd}$$

où les deux petits carrés inférieurs ainsi que le grand carré extérieur sont cartésiens. Il s'ensuit que le carré

$$\begin{tikzcd}
\widehat{X}_{\underline{a},\underline{b}} \arrow[r] \arrow[d] & X[[\mathbf{t}]][[\mathbf{s}]] \arrow[d] \\
\widehat{X}_{\underline{a}} \arrow[r] & X[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]
\end{tikzcd}$$

est cartésien. Par ailleurs, le carré

$$\begin{tikzcd}
\widehat{X}_{\underline{a}}[[\mathbf{s}]] \arrow[r] \arrow[d] & X[[\mathbf{t}]][[\mathbf{s}]] \arrow[d] \\
\widehat{X}_{\underline{a}}[\mathbf{s}] \arrow[r] & X[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]
\end{tikzcd}$$

est cartésien. (En effet, $\widehat{X}_{\underline{a}}$ est un sous-schéma fermé de $X[[\mathbf{t}]]$ défini par un idéal de type fini. Or, étant donnés un anneau R et un idéal de type fini $I \subset R$, il découle du lemme 6.3.3, appliqué au R-module R/I, que $R[[\mathbf{s}]]/I \cdot R[[\mathbf{s}]] \simeq (R/I)[[\mathbf{s}]]$.) On obtient en fin de compte un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\widehat{X}_{\underline{a},\underline{b}} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{X}_{\underline{a}}[[\mathbf{s}]] \arrow[d] \\
\widehat{X}_{\underline{a}} \arrow[r, "\underline{b}"] & \widehat{X}_{\underline{a}}[\mathbf{s}],
\end{tikzcd}$$

ce qui permet de conclure. ■

Lemme 6.3.8. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier affine, et $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ et $\underline{a}' = (a'_1, \cdots, a'_n)$ deux n-uplets de fonctions régulières sur X. On suppose que a'_i est une puissance non nulle de a_i, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors, les $X/\mathcal{F}$-feuilletages $\widehat{X}_{\underline{a}}/\mathcal{F}$ et $\widehat{X}_{\underline{a}'}/\mathcal{F}$ sont naturellement isomorphes.*

Démonstration. — On construit seulement l'isomorphisme de X-schémas $\widehat{X}_{\underline{a}} \simeq \widehat{X}_{\underline{a}'}$ et il sera clair que cet isomorphisme induit un isomorphisme de $X/\mathcal{F}$-feuilletages. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit $e_i \geqslant 1$ un entier tel que $a'_i = (a_i)^{e_i}$. Soient $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ et $\mathbf{t}' = (t'_1, \cdots, t_n)$ des systèmes d'indéterminées. On dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\underline{a}"'] \arrow[rr, bend left, "\underline{a}'"] & X[\mathbf{t}] \arrow[r, "f"'] & X[\mathbf{t}'] \end{tikzcd}$$

où f est le morphisme fini tel que $t'_i \circ f = (t_i)^{e_i}$. Pour conclure, il suffit de montrer que le carré

$$\begin{tikzcd} X[[\mathbf{t}]] \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X[[\mathbf{t}']] \arrow[d] \\ X[\mathbf{t}] \arrow[r, "f"] & X[\mathbf{t}'] \end{tikzcd}$$

est cartésien. Ceci est clairement vrai car le $\mathcal{O}(X)[\mathbf{t}']$-module $\mathcal{O}(X)[\mathbf{t}]$ et le $\mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}']]$-module $\mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}]]$ sont librement engendrés par les monômes $\mathbf{t}^{\mathbf{r}}$ tels que $0 \leqslant r_i \leqslant e_i - 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. ■

Proposition 6.3.9. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier affine et $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ un n-uplet de fonctions régulières sur X. Alors, le $X/\mathcal{F}$-feuilletage $\widehat{X}_{\underline{a}}/\mathcal{F}$ dépend seulement du radical de l'idéal $I = (\underline{a})$ ou, ce qui revient au même, du fermé de X défini par l'idéal I.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que si $b \in \sqrt{(\underline{a})}$, alors le morphisme évident de $X/\mathcal{F}$-feuilletages $\widehat{X}_{\underline{a},b}/\mathcal{F} \longrightarrow \widehat{X}_{\underline{a}}/\mathcal{F}$ est un isomorphisme. D'après la seconde assertion du lemme 6.2.8, ce morphisme est diff-étale et il suffit donc de montrer que le morphisme de X-schémas sous-jacent $\widehat{X}_{\underline{a},b} \longrightarrow \widehat{X}_{\underline{a}}$ est un isomorphisme grâce au lemme 6.2.9. Par ailleurs, pour $e \geqslant 1$, le X-morphisme $\widehat{X}_{\underline{a},b} \longrightarrow \widehat{X}_{\underline{a}}$ se factorise par le morphisme $\widehat{X}_{\underline{a},b} \longrightarrow \widehat{X}_{\underline{a},b^e}$ qu'on sait être un isomorphisme par le lemme 6.3.8. Quitte à remplacer b par une puissance suffisamment grande, on peut donc supposer que $b \in (\underline{a})$.

On peut écrire $b = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot a_i$ avec $b_i \in \mathcal{O}(X)$. Soient $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ un système d'indéterminées et s une autre indéterminée. Le X-schéma $\widehat{X}_{\underline{a},b}$ est le changement de base du $X[\mathbf{t}, s]$-schéma $X[[\mathbf{t}, s]]$ suivant le morphisme $(\underline{a}, b) : X \longrightarrow X[\mathbf{t}, s]$. Or ce morphisme admet la factorisation suivante

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\underline{a}"'] \arrow[rr, bend left, "(\underline{a}, b)"] & X[\mathbf{t}] \arrow[r, "f"'] & X[\mathbf{t}, s] \end{tikzcd}$$

avec f le morphisme de $X[\mathbf{t}]$-schémas tel que $s \circ f = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot t_i$. Ainsi, pour conclure, il est suffisant de montrer que le carré

$$\begin{tikzcd} X[[\mathbf{t}]] \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X[[\mathbf{t}, s]] \arrow[d] \\ X[\mathbf{t}] \arrow[r, "f"] & X[\mathbf{t}, s] \end{tikzcd} \tag{6.6}$$

est cartésien. Or, les substitutions $s \rightsquigarrow s' + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot t_i$ et $s' \rightsquigarrow s - \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot t_i$ définissent des isomorphismes $X[[\mathbf{t}, s]] \simeq X[[\mathbf{t}, s'_n]]$ et $X[\mathbf{t}, s] \simeq X[\mathbf{t}, s'_n]$ faisant commuter le carré

$$\begin{tikzcd} X[[\mathbf{t}, s]] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & X[[\mathbf{t}, s']] \arrow[d] \\ X[\mathbf{t}, s] \arrow[r, "\sim"] & X[\mathbf{t}, s']. \end{tikzcd} \tag{6.7}$$

Il est donc suffisant de montrer que la composition horizontale (6.7)∘(6.6) est un carré cartésien. Les flèches horizontales de ce carré composé correspondent à la substitution $s' \rightsquigarrow 0$ et on se retrouve ainsi à montrer que le noyau du morphisme $\mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}, s']] \longrightarrow \mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}]]$, envoyant une série formelle $f(\mathbf{t}, s')$ sur $f(\mathbf{t}, 0)$, est l'idéal engendré par s', ce qui est clairement vrai. ∎

Rappelons qu'un fermé d'un k-schéma quasi-compact est dit *constructible* si c'est le complémentaire d'un ouvert quasi-compact. (Voir aussi les définitions 6.5.1 et 6.5.3 ci-dessous.)

Définition 6.3.10. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier affine et $Z \subset X$ un fermé constructible. Avec les notations de la construction 6.3.5, on pose $\widehat{X}_Z/\mathcal{F} = \widehat{X}_{\underline{a}}/\mathcal{F}$ où $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ est un n-uplet de fonctions régulières sur X tel que $\mathrm{I}(Z) = \sqrt{(\underline{a})}$. (D'après la proposition 6.3.9, ceci ne dépend pas du choix du n-uplet $\underline{a}$.) Le $X/\mathcal{F}$-feuilletage $\widehat{X}_Z/\mathcal{F}$ est appelé le* complété faible *du k-feuilletage $X/\mathcal{F}$ le long de Z.*

De même, si $I \subset \mathcal{O}(X)$ est un idéal radiciellement de type fini, on pose $\widehat{X}_I/\mathcal{F} = \widehat{X}_{\underline{a}}/\mathcal{F}$ où $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ est un n-uplet de fonctions régulières sur X tel que $\sqrt{I} = \sqrt{(\underline{a})}$. Bien évidement, on a $\widehat{X}_I/\mathcal{F} = \widehat{X}_{Z(I)}/\mathcal{F}$. Le $X/\mathcal{F}$-feuilletage $\widehat{X}_I/\mathcal{F}$ est aussi appelé le complété faible *du k-feuilletage $X/\mathcal{F}$ en I.*

Comme mentionné dans la remarque 6.3.2, l'analogue du résultat suivant pour la complétion « usuelle » est faux en général.

Lemme 6.3.11. — *Soient X un k-schéma affine et $Z \subset X$ un sous-schéma fermé constructible. Alors, la projection sur le second facteur $\widehat{X}_Z \times_X Z \longrightarrow Z$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — On pose $A = \mathcal{O}(X)$. On ne restreint pas la généralité en supposant que le sous-schéma fermé Z est défini par un idéal $I \subset A$ engendré par un n-uplet $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in A^n$. Soit $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ un système d'indéterminées. On a alors des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned}
(A[[\mathbf{t}]] \otimes_{A[\mathbf{t}], \underline{a}} A) \otimes_A (A/I) &\simeq A[[\mathbf{t}]] \otimes_{A[\mathbf{t}], \underline{a}} (A/I) \\
&= A[[\mathbf{t}]] \otimes_{A[\mathbf{t}], \underline{0}} (A/I) \\
&\simeq (A[[\mathbf{t}]] \otimes_{A[\mathbf{t}], \underline{0}} A) \otimes_A (A/I) \\
&\simeq A \otimes_A (A/I) \\
&\simeq A/I.
\end{aligned}$$

(Le passage de la troisième à la quatrième ligne, qui est le point le plus important du calcul ci-dessus, utilise le fait évident suivant : une série formelle à coefficients dans A est une combinaison linéaire de multiples des variables t_i si et seulement si son coefficient constant est nul.) ∎

On termine la sous-section avec deux résultats qui fournissent des conditions garantissant que le complété faible d'un k-feuilletage coïncide avec son complété « usuel » considéré dans la proposition 6.3.1. Le premier résultat est une conséquence du lemme d'Artin–Rees.

Lemme 6.3.12. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier, affine et noethérien, et soit $Z \subset X$ un sous-schéma fermé. Alors, le morphisme évident $Z_\infty/\mathcal{F} \longrightarrow \widehat{X}_Z/\mathcal{F}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Le morphisme en question est un morphisme de $X/\mathcal{F}$-feuilletages diff-étales ; il est donc lui-même diff-étale d'après le lemme 6.2.8. Vu le lemme 6.2.9, il reste à vérifier que le morphisme de X-schémas $Z_\infty \longrightarrow \widehat{X}_Z$ est inversible. Ceci découle de [**34**, Chapitre $0_{\mathbf{I}}$, Corollaire 7.3.3]. ∎

Lemme 6.3.13. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage affine diff-lisse et $\underline{a}$ un n-uplet tel que $a_1, \cdots, a_n$ est une suite régulière dans $\mathcal{O}(X)$. Appelons $Z \subset X$ le sous-schéma fermé défini par l'idéal $(\underline{a})$. Alors, le morphisme évident $Z_\infty/\mathcal{F} \longrightarrow \widehat{X}_Z/\mathcal{F}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — En raisonnant comme dans la preuve du lemme 6.3.12, il suffit de montrer que le morphisme de X-schémas $Z_\infty \longrightarrow \widehat{X}_Z$ est un isomorphisme. On divise la preuve de cela en deux parties. Dans la première partie, on traite le cas $n = 1$. Dans la seconde, on traite le cas général par récurrence sur n. On pose $A = \mathcal{O}(X)$.

Partie A. — Soit $a \in A$ un élément régulier. On doit montrer que le morphisme évident

$$A[[t]] \otimes_{A[t], a} A \longrightarrow \lim_{r \in \mathbb{N}} A/(a^{r+1})$$

est un isomorphisme. Le membre de gauche s'identifie à $A[[t]]/(t-a)$. Il est donc suffisant de montrer que le morphisme d'évaluation

$$A[[t]] \longrightarrow \lim_{r\in\mathbb{N}} A/(a^{r+1}), \tag{6.8}$$

qui envoie une série formelle f dans $A[[t]]$ sur $f(a)$, est surjectif et que son noyau est engendré par $t-a$.

Montrons d'abord que le noyau est le bon. Soit $f=\sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot t^i$ une série formelle dans $A[[t]]$ telle que $f(a)=0$. Alors, pour tout $r\in\mathbb{N}$, on a $\sum_{i=0}^{r} b_i\cdot a^i \in (a^{r+1})$. Puisque a est régulier, il existe un unique $c_r\in A$ tel que

$$\sum_{i=0}^{r} a^i\cdot b_i + a^{r+1}\cdot c_r = 0. \tag{6.9}$$

En particulier, on trouve que $b_0=-a\cdot c_0$. De plus, en prenant la différence entre deux égalités (6.9) au rang $r-1$ et r, on trouve, pour $r\geqslant 1$, l'égalité $a^r\cdot b_r + a^{r+1}\cdot c_r - a^r\cdot c_{r-1}=0$. En utilisant encore une fois que a est régulier, on a même $b_r=c_{r-1}-a\cdot c_r$. Il s'ensuit que $f=(t-a)\cdot\sum_{i=0}^{\infty} c_r\cdot t^r$ comme souhaité.

Montrons maintenant la surjectivité du morphisme (6.8). Un élément de $\lim_{r\in\mathbb{N}} A/(a^{r+1})$ est une suite de classes d'équivalences $(u_r+(a^{r+1}))_{r\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{r+1}-u_r\in(a^{r+1})$ pour tout $r\in\mathbb{N}$. Puisque a est régulier, il existe un unique $e_{r+1}\in A$ tel que $u_{r+1}=u_r+e_{r+1}\cdot a^{r+1}$. En posant $e_0=u_0$, on trouve donc

$$u_r = e_0 + e_1\cdot a + \cdots + e_r\cdot a^r$$

pour tout $r\geqslant 0$. Notre élément est donc l'évaluation en a de la série formelle $\sum_{i=0}^{\infty} e_i\cdot t^i$.

Partie B. — On raisonne par récurrence sur la longueur n du n-uplet $\underline{a}$. Le cas $n=1$ étant connu par la partie A, on peut supposer que $n\geqslant 2$. On pose $\underline{a}_{n-1}=(a_1,\cdots,a_{n-1})$. D'après la proposition 6.3.7, on a $\widehat{X}_{\underline{a}}=(\widehat{X}_{\underline{a}_{n-1}})\widehat{_{a_n}}$, i.e., $\widehat{X}_{\underline{a}}$ s'obtient de $\widehat{X}_{\underline{a}_{n-1}}$ en appliquant la construction 6.3.5 à a_n considéré comme un 1-uplet. En utilisant la partie A de la preuve et l'hypothèse de récurrence, il reste à établir la propriété analogue pour la complétion « usuelle », à savoir que le morphisme évident

$$\lim_{s\in\mathbb{N}}\left(\lim_{r\in\mathbb{N}} A/(\underline{a}_{n-1})^{r+1}\right)/(a_n^{s+1}) \longrightarrow \lim_{v\in\mathbb{N}} A/(\underline{a})^{v+1}$$

est un isomorphisme. Étant données les inclusions $(a_1^e,\cdots,a_n^e)\subset(\underline{a})^e$ et $(\underline{a})^{ne}\subset(a_1^e,\cdots,a_n^e)$, et celles analogues pour $(\underline{a}_{n-1})$, il revient au même de montrer que le morphisme évident

$$\lim_{s\in\mathbb{N}}\left(\lim_{r\in\mathbb{N}} A/(a_1^{r+1},\cdots,a_{n-1}^{r+1})\right)/(a_n^{s+1}) \longrightarrow \lim_{v\in\mathbb{N}} A/(a_1^{v+1},\cdots,a_n^{v+1})$$

est un isomorphisme.

Remarquons que $a_1^{e_1},\cdots,a_n^{e_n}$ est encore une suite régulière pour tout $(e_1,\cdots,e_n)\in(\mathbb{N}\smallsetminus\{0\})^n$. En particulier, la classe de a_n^{s+1} est un élément régulier de l'anneau $A/(a_1^{r+1},\cdots,a_{n-1}^{r+1})$. On a donc des suites exactes courtes

$$0\longrightarrow A/(a_1^{r+1},\cdots,a_{n-1}^{r+1}) \xrightarrow{a_n^{s+1}} A/(a_1^{r+1},\cdots,a_{n-1}^{r+1}) \longrightarrow A/(a_1^{r+1},\cdots,a_{n-1}^{r+1},a_n^{s+1}) \longrightarrow 0.$$

En passant à la limite suivant r et en utilisant l'annulation des « $\lim^1$ », on déduit un isomorphisme

$$\left(\lim_{r\in\mathbb{N}} A/(a_1^{r+1},\cdots,a_{n-1}^{r+1})\right)/(a_n^{s+1}) \simeq \lim_{r\in\mathbb{N}} A/(a_1^{r+1},\cdots,a_{n-1}^{r+1},a_n^{s+1}).$$

Ceci nous ramène à montrer que le morphisme évident

$$\lim_{s\in\mathbb{N}}\lim_{r\in\mathbb{N}} A/(a_1^{r+1},\cdots,a_{n-1}^{r+1},a_n^{s+1}) \longrightarrow \lim_{v\in\mathbb{N}} A/(a_1^{v+1},\cdots,a_n^{v+1})$$

est inversible, ce qui est clairement vrai. ∎

6.4. Complétion faible d'un k-feuilletage singulier (suite). —

On continue dans cette sous-section l'étude de la complétion faible des k-feuilletages singuliers. On commence avec un résultat sur la fonctorialité de la complétion faible relativement aux immersions fermées. (Le lecteur remarquera que le lemme 6.3.11 peut s'obtenir comme un cas particulier de ce résultat.)

Lemme 6.4.1. — *Soit $i : Y/\mathcal{G} \hookrightarrow X/\mathcal{F}$ une immersion fermée de k-feuilletages singuliers affines. Soit $Z \subset X$ un fermé constructible et posons $T = i^{-1}(Z)$. Alors, le morphisme induit $\widehat{i} : \widehat{Y}_T/\mathcal{G} \longrightarrow \widehat{X}_Z/\mathcal{F}$ est une immersion fermée. De plus, si l'idéal de l'immersion i est de type fini, alors le carré*

$$\begin{tikzcd} \widehat{Y}_T/\mathcal{G} \arrow[r, "\widehat{i}"] \arrow[d] & \widehat{X}_Z/\mathcal{F} \arrow[d] \\ Y/\mathcal{G} \arrow[r, "i"] & X/\mathcal{F} \end{tikzcd} \tag{6.10}$$

est cartésien.

Démonstration. — Il suffit de montrer la version « sans structures de feuilletage » du lemme. En effet, la propriété d'être une immersion fermée se vérifie sur le morphisme sous-jacent (voir la définition 6.2.1). De plus, étant donné que ses flèches verticales sont diff-étales, le carré (6.10) est cartésien si et seulement si il en est ainsi du carré de schémas sous-jacent (utiliser le lemme 6.2.9).

Ceci étant, fixons un n-uplet $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ de $\mathcal{O}(X)$ tel que $Z = \mathrm{Z}(\underline{a})$ ainsi qu'un système d'indéterminées $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$. Il découle de la construction 6.3.5 que le carré

$$\begin{tikzcd} \widehat{Y}_T \arrow[r, "\underline{a}"] \arrow[d, "\widehat{i}"] & Y[[\mathbf{t}]] \arrow[d] \\ \widehat{X}_Z \arrow[r, "\underline{a}"] & X[[\mathbf{t}]] \end{tikzcd}$$

est cartésien. Puisque $Y[[\mathbf{t}]] \longrightarrow X[[\mathbf{t}]]$ est une immersion fermée (car les produits directs de modules sont exacts), il en est donc de même du morphisme $\widehat{i}$.

Supposons maintenant que l'idéal $I \subset \mathcal{O}(X)$ de l'immersion i est de type fini engendré par $g_1, \cdots, g_m \in \mathcal{O}(X)$. Pour obtenir la seconde assertion du lemme, il suffit de montrer que le carré

$$\begin{tikzcd} Y[[\mathbf{t}]] \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X[[\mathbf{t}]] \arrow[d] \\ Y[\mathbf{t}] \arrow[r, "i"] & X[\mathbf{t}] \end{tikzcd}$$

est cartésien. Ceci revient à montrer que le noyau de la surjection

$$(-) \circ i : \mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}]] \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y)[[\mathbf{t}]]$$

est engendré par les fonctions régulières $g_1, \cdots, g_m$. Or, $f = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{N}^n} b_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t}^{\mathbf{r}} \in \mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}]]$ est dans le noyau de cette surjection si et seulement si $b_{\mathbf{r}} \circ i = 0$ pour tout $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^n$. On peut donc trouver une relation

$$b_{\mathbf{r}} = g_1 \cdot c_{1,\mathbf{r}} + \cdots + g_m \cdot c_{m,\mathbf{r}},$$

pour chaque $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^n$. On pose $h_i = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{N}^n} c_{i,\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t}^{\mathbf{r}}$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Clairement, on a alors la relation $f = g_1 \cdot h_1 + \cdots + g_m \cdot h_m$, comme souhaité. ■

Proposition 6.4.2. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-schéma singulier affine et $Z \subset X$ un sous-schéma fermé constructible. Notons $X' = \widehat{X}_Z$ et $Z' = X' \times_X Z$. (D'aprés le lemme 6.3.11, on a $Z' \simeq Z$.) Alors, le morphisme évident $\widehat{(X')}_{Z'} \longrightarrow X'$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il est possible d'obtenir l'énoncé à démontrer comme une conséquence facile de la proposition 6.3.7. Nous avons opté pour un argument un peu plus direct qui utilise le lemme 6.4.1.

On fixe un n-uplet $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ de fonctions régulières sur X tel que $Z = \mathrm{Z}(\underline{a})$. On applique le lemme 6.4.1 à l'immersion fermée $\underline{a} : X' = \widehat{X}_Z \longrightarrow X[[\mathbf{t}]]$, ce qui fournit le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \widehat{(X')}_{Z'} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{(X[[\mathbf{t}]])}_{\underline{t}} \arrow[d] \\ \widehat{X}_Z \arrow[r] & X[[\mathbf{t}]]. \end{tikzcd}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que la flèche verticale à droite dans ce carré est un isomorphisme. Ceci revient à montrer que le noyau du morphisme

$$\mathcal{O}(X)[[t_1, \cdots, t_n, t'_1, \cdots, t'_n]] \longrightarrow \mathcal{O}(X)[[t_1, \cdots, t_n]],$$

qui envoie t_i et t'_i sur t_i, est l'idéal engendré par $t_1 - t'_1, \cdots, t_n - t'_n$. Pour ce faire, on utilise l'automorphisme de $\mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}, \mathbf{t}']]$ donné par les substitutions $t_i \rightsquigarrow t_i$ et $t'_j \rightsquigarrow t'_j - t_j$. La propriété recherchée devient alors évidente. ■

Le proposition 6.4.2 motive la définition suivante. (Voir l'exemple 6.4.4 ci-dessous.)

Définition 6.4.3. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier affine et $Z \subset X$ un fermé constructible. On dit que $X/\mathcal{F}$ est* faiblement complet le long de Z *si le morphisme cononique $\widehat{X}_Z/\mathcal{F} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ est un isomorphisme. (Bien évidemment, il s'agit d'une propriété des schémas sous-jacents et il est tout aussi loisible de parler de k-schémas faiblement complets le long d'un fermé constructible.)*

Exemple 6.4.4. — Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier affine et Z un fermé constructible. Alors, le complété faible $\widehat{X}_Z/\mathcal{F}$ de $X/\mathcal{F}$ long de Z est lui-même faiblement complet le long de Z (qu'on identifie au fermé $\widehat{X}_Z \times_X Z$ de $\widehat{X}_Z$ à l'aide du lemme 6.3.11). □

Lemme 6.4.5. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier affine complet le long d'un fermé constructible $Z \subset X$. Alors, $X/\mathcal{F}$ est également complet le long de tout fermé constructible $T \subset X$ contenant Z.*

Démonstration. — Ceci découle aussitôt de la proposition 6.3.7. Plus précisément, ladite proposition fournit des isomorphismes évidents $\widehat{X}_T \simeq (\widehat{X}_Z)\widehat{_T} \simeq \widehat{X}_{Z \cap T} = \widehat{X}_Z \simeq X$. ■

Lemme 6.4.6. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier affine complet le long d'un fermé constructible $Z \subset X$. Si $F \subset X$ est un fermé tel que $F \cap Z = \varnothing$, alors nécessairement $F = \varnothing$.*

Démonstration. — On peut supposer que F est un sous-schéma fermé défini par un idéal de type fini. D'après le lemme 6.4.1, F est alors complet le long de $F \cap Z$, ce qui permet de conclure. ■

On note maintenant le résultat suivant qui généralise la proposition 6.4.2.

Proposition 6.4.7. — *Soient $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ un morphisme de k-feuilletages singuliers affines et $Z \subset X$ un fermé constructible. On pose $T = f^{-1}(Z)$, $X'/\mathcal{F} = \widehat{X}_Z/\mathcal{F}$ et $Y'/\mathcal{G} = (X'/\mathcal{F}) \times_X (Y/\mathcal{G})$, et on identifie Z et T à des fermés constructibles de X' et Y' à l'aide du lemme 6.3.11. Alors, on a un isomorphisme canonique de $Y/\mathcal{G}$-feuilletages $\widehat{(Y')}_T/\mathcal{G} \simeq \widehat{Y}_T/\mathcal{G}$.*

Démonstration. — Comme de coutume, il suffit de montrer la version « sans structures de feuilletage ». Fixons un n-uplet $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ de fonctions régulières sur X tel que $Z = \mathrm{Z}(\underline{a})$ ainsi qu'un système d'indéterminées $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$. On dispose de deux carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d] & X[[\mathbf{t}]] \times_X Y \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\underline{a}"] & Y[\mathbf{t}] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \widehat{(Y')}_{\underline{a}} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{(X[[\mathbf{t}]] \times_X Y)}_{\underline{t}} \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & X[[\mathbf{t}]] \times_X Y. \end{tikzcd}$$

Le premier est obtenu par changement de base suivant f du carré cartésien définissant le X-schéma $\widehat{X}_Z$. Le second est obtenu en appliquant le lemme 6.4.1 à l'immersion fermée $\underline{a} \times_X Y : Y' = X' \times_X Y \hookrightarrow X[[\mathbf{t}]] \times_X Y$.

Pour conclure, il est donc suffisant de montrer que le morphisme évident

$$(\widehat{X[[\mathbf{t}]] \times_X Y})_{\underline{t}} \longrightarrow (\widehat{Y[\mathbf{t}]})_{\underline{t}} \tag{6.11}$$

est un isomorphisme. Or, d'après le lemme 6.4.8 ci-dessous, $t_1, \cdots, t_n$ est une suite régulière dans $\mathcal{O}(Y)[\mathbf{t}]$ et $\mathcal{O}(X[[\mathbf{t}]] \times_X Y)$. On peut donc appliquer le lemme 6.3.13 pour se ramener au problème analogue pour les complétions « usuelles ». Clairement, les complétés usuels de la source et du but du morphisme (6.11) s'identifient à $Y[[\mathbf{t}]]$, ce qui permet de conclure. ∎

Lemme 6.4.8. — *Soit A une k-algèbre et soit B une A-algèbre. Soit $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ un système d'indéterminées. Alors, la suite $t_1, \cdots, t_n$ est régulière dans la k-algèbre $A[[\mathbf{t}]] \otimes_A B$.*

Démonstration. — Vu que $A[[t_1, \cdots, t_n]]/(t_1) \simeq A[[t_2, \cdots, t_n]]$, il est suffisant de montrer que la multiplication par t_1 est injective dans $A[[\mathbf{t}]] \otimes_A B$. Autrement dit, on doit montrer le produit tensoriel $(-) \otimes_A B$ transforme la suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow A[[\mathbf{t}]] \xrightarrow{t_1} A[[\mathbf{t}]] \longrightarrow A[[t_2, \cdots, t_n]] \longrightarrow 0 \tag{6.12}$$

en une suite exacte de B-modules. Or, la suite exacte (6.12) est scindée, ce qui permet de conclure. ∎

Le résultat ci-dessous est très utile.

Proposition 6.4.9. — *Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier affine, $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{O}(X)^n$ et $Y/\mathcal{G}$ le sous-feuilletage fermé basique de $X/\mathcal{F}$ défini par l'idéal $(\underline{a})$. (Pour une meilleure lisibilité, le $X/\mathcal{F}$-feuilletage basique associé à Y n'est pas désigné par $Y/\mathcal{F}$ ici.) On suppose qu'il existe une structure de feuilletage $(\Omega_{X/\mathcal{D}}, \mathrm{d}_{\mathcal{D}})$ sur le k-schéma X, tel que l'identité de X fournit un morphisme de k-feuilletages $X/\mathcal{D} \hookrightarrow X/\mathcal{F}$ et que $\mathrm{d}_{\mathcal{D}}(a_1), \cdots, \mathrm{d}_{\mathcal{D}}(a_n)$ est une base du $\mathcal{O}_X$-module $\Omega_{X/\mathcal{D}}$. Soit $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ un système d'indéterminées. Il existe alors un unique morphisme diff-étale $u : Y[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ tel que $a_i \circ u = t_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et qui fait commuter le triangle*

$$\begin{tikzcd} Y/\mathcal{G} \arrow[r, "o"] \arrow[dr] & Y[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G} \arrow[d, "u"] \\ & X/\mathcal{F}, \end{tikzcd}$$

avec $o : Y \hookrightarrow Y[[\mathbf{t}]]$ la section nulle. De plus, le morphisme u induit un morphisme de $X/\mathcal{F}$-feuilletages diff-étales $\widehat{u} : Y[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G} \longrightarrow \widehat{X}_Y/\mathcal{F}$ qui est un isomorphisme si $a_1, \cdots, a_n$ est une suite régulière dans $\mathcal{O}(X)$.

Démonstration. — On divise la preuve en deux parties. Dans la première on construit le morphisme de k-feuilletages u. Dans la seconde on en déduit $\widehat{u}$ et on démontre qu'il est un isomorphisme lorsque $a_1, \cdots, a_n$ est une suite régulière.

Partie A. — Soit $\Delta = \{\partial_1, \cdots, \partial_n\}$ un ensemble de dérivations qui commutent deux à deux et qui agissent trivialement sur k. D'après la proposition 6.2.4, X est naturellement un Δ-schéma essentiel et $X/\mathcal{D}$ est le k-feuilletage qui lui est associé, i.e., $X/\mathcal{D} = X/\mathcal{A}_{X,\Delta}$. Dans la suite, on écrira $\Omega_{X,\Delta}$ et d_Δ au lieu de $\Omega_{X/\mathcal{D}}$ et $\mathrm{d}_{\mathcal{D}}$. Considérons le produit fibré $X/\mathcal{F}' = (\mathbb{A}^n)^\delta \times_{\mathbb{A}^n, \underline{a}} (X/\mathcal{F})$. Alors, $\Omega_{X/\mathcal{F}'}$ est le quotient de $\Omega_{X/\mathcal{F}}$ par le sous-$\mathcal{O}_X$-module libre engendré par les $\mathrm{d}_{\mathcal{F}}(a_i)$. Les surjections $\Omega_{X/\mathcal{F}} \twoheadrightarrow \Omega_{X,\Delta}$ et $\Omega_{X/\mathcal{F}} \twoheadrightarrow \Omega_{X/\mathcal{F}'}$ induisent une décomposition canonique

$$\Omega_{X/\mathcal{F}} = \Omega_{X/\mathcal{F}'} \oplus \Omega_{X,\Delta} = \Omega_{X/\mathcal{F}'} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X \cdot \partial_i^\vee$$

et la dérivation $\mathrm{d}_{\mathcal{F}}$ est donnée par $(\mathrm{d}_{\mathcal{F}'}, \mathrm{d}_\Delta)$ modulo l'identification ci-dessus. La différentielle dans le complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{X/\mathcal{F}}$ induit un morphisme k-linéaire

$$\mathrm{d}_\Delta : \Omega_{X/\mathcal{F}'} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \partial_i^\vee \wedge \Omega_{X/\mathcal{F}'}.$$

Appelons $\partial_i : \Omega_{X/\mathcal{F}'} \longrightarrow \Omega_{X/\mathcal{F}'}$ les composantes de d_Δ de sorte que $\mathrm{d}_\Delta(\omega) = \sum_{i=1}^n \partial_i^\vee \wedge \partial_i(\omega)$, pour ω une section de $\Omega_{X/\mathcal{F}'}$. On vérifie aussitôt que les morphismes ∂_i ainsi définis font de $\Omega_{X/\mathcal{F}'}$ un $(\mathcal{O}_X, \Delta)$-module et qu'on a les relations $\partial_i \circ \mathrm{d}_{\mathcal{F}'} = \mathrm{d}_{\mathcal{F}'} \circ \partial_i$.

Ceci étant, remarquons que la surjection $\mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y)$ se factorise par un unique morphisme de (k, Δ)-algèbres $\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(Y)[[\mathbf{t}]]$ qui envoie $f \in \mathcal{O}(X)$ sur sa série de Taylor

$$\sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^n} \frac{(\partial^{\mathbf{r}} f)|_Y}{\mathbf{r}!} \cdot \mathbf{t}^{\mathbf{r}}.$$

(Il s'agit là d'une variante de la proposition 3.3.8 qui se démontre de la même manière.) Considérons le morphisme de k-schémas $u : Y[[\mathbf{t}]] \longrightarrow X$ associé et montrons qu'il définit bien un morphisme de k-feuilletages $u : Y[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$. Pour ce faire, il suffit de construire un morphisme de $\mathcal{O}(X)$-modules $(-) \circ u : \Omega_{X/\mathcal{F}}(X) \longrightarrow \Omega_{Y[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}}(Y[[\mathbf{t}]])$ qui soit compatible aux dérivations $\mathrm{d}_{\mathcal{F}}$ et $\mathrm{d}_{\mathcal{G}}$. Or, on a

$$\Omega_{X/\mathcal{F}}(X) = \Omega_{X/\mathcal{F}'}(X) \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(X) \cdot \partial_i^\vee \quad \text{et} \quad \Omega_{Y[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}}(Y[[\mathbf{t}]]) = \Omega_{Y/\mathcal{G}}(Y)[[\mathbf{t}]] \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(Y)[[\mathbf{t}]] \cdot \partial_i^\vee.$$

On prendra pour $(-) \circ u$ le morphisme diagonal (au sens matriciel) relativement à ces décompositions, qui envoie $\partial_i^\vee$ sur lui-même et qui est donnée par le morphisme « série de Taylor »

$$\omega \in \Omega_{X/\mathcal{F}'}(X) \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^n} \frac{(\partial^{\mathbf{r}} \omega)|_Y}{\mathbf{r}!} \cdot \mathbf{t}^{\mathbf{r}} \in \Omega_{Y/\mathcal{G}}(Y)[[\mathbf{t}]]$$

sur les premiers facteurs. La compatibilité aux dérivations $\mathrm{d}_{\mathcal{F}}$ et $\mathrm{d}_{\mathcal{G}}$ découle des relations $\partial_i \circ \mathrm{d}_{\mathcal{F}'} = \mathrm{d}_{\mathcal{F}'} \circ \partial_i$ et du fait que u est un morphisme de (k, Δ)-schémas.

Partie B. — Par fonctorialité de la complétion faible, le morphisme diff-étale $u : Y[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ induit un morphisme diff-étale

$$\widehat{(Y[[\mathbf{t}]])}_{\underline{t}}/\mathcal{G} \longrightarrow \widehat{X}_Y/\mathcal{F}. \tag{6.13}$$

Puisque $\widehat{(Y[[\mathbf{t}]])}_{\underline{t}} \simeq Y[[\mathbf{t}]]$, il s'ensuit un morphisme de $X/\mathcal{F}$-feuilletages diff-étales $\widehat{u} : Y[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G} \longrightarrow \widehat{X}_Y/\mathcal{F}$.

Il reste à voir que $\widehat{u}$ est un isomorphisme si $a_1, \cdots, a_n$ est une suite régulière dans $\mathcal{O}(X)$. Pour ce faire, il suffit de montrer que (6.13) est un isomorphisme. Grâce au lemme 6.3.13, les complétés faibles dans (6.13) sont des complétés au sens usuel. Il est donc suffisant de montrer que le morphisme

$$\mathcal{O}(X)/(\underline{a})^e \longrightarrow \mathcal{O}(Y)[[\mathbf{t}]]/(\underline{t})^e$$

est un isomorphisme pour tout $e \in \mathbb{N}$. Par récurrence sur e, il suffit de vérifier que le morphisme de $\mathcal{O}(Y)$-modules $(\underline{a})^e/(\underline{a})^{e+1} \longrightarrow (\underline{t})^e/(\underline{t})^{e+1}$ est un isomorphisme. Ceci nous ramène à montrer que le morphisme de $\mathcal{O}(Y)$-algèbres graduées

$$\bigoplus_{e \geqslant 0} (\underline{a})^e/(\underline{a})^{e+1} \longrightarrow \bigoplus_{e \geqslant 0} (\underline{t})^e/(\underline{t})^{e+1} \tag{6.14}$$

est un isomorphisme. Puisque $\underline{a}$ et $\underline{t}$ sont des suites régulières, la source et le but de (6.14) sont des algèbres de polynômes sur $\mathcal{O}(Y)$. De plus, (6.14) est un isomorphisme en degré 1. (En effet, la série de Taylor de a_i est donnée par le monôme t_i.) Ceci permet de conclure. ■

6.5. Recouvrements feuilletés et topologie feuilletée. —

Dans cette sous-section, on introduit la topologie feuilletée. Il s'agit d'une variante de la topologie fttf introduite dans la sous-section 3.3 dans le cadre des Δ-schémas (mais qu'on peut facilement adapter aux feuilletages schématiques, voir la définition 6.8.12 ci-dessous). La topologie feuilletée est conçue pour remédier à un défaut majeur de la topologie fttf qui est le suivant : les morphismes de k-feuilletages ne sont pas en général continus pour la topologie fttf. Ce défaut est dû au fait que la condition de finitude naturelle sur les morphismes diff-étales (voir la définition 6.2.13(a)) n'est pas préservée par changement de base (voir la remarque 6.2.14). Ceci complique considérablement les choses et notre définition des recouvrements feuilletés risque de paraître obscure au premier abord.

On commence par des rappels autour de la notion de constructibilité. La convention que tous nos schémas sont séparés et, a fortiori, quasi-séparés est en vigueur ici.

Définition 6.5.1. — *Soit X un schéma.*

(a) Supposons d'abord que X est quasi-compact. L'ensemble des parties constructibles *de X est le plus petit ensemble de parties de X contenant les ouverts quasi-compacts de X, et stable par intersection finie et passage au complémentaire.*

(b) Si X n'est plus supposé quasi-compact, une partie de X est dite constructible *s'il existe un ouvert quasi-compact de X qui la contient et dans lequel elle est constructible au sens de (a).*

Remarque 6.5.2. — La notion de constructibilité adoptée dans la définition 6.5.1 est légèrement plus restrictive que celle de [**36**, Chapitre 0_{III}, Définition 9.1.2], mais les deux notions coïncident pour les schémas quasi-compacts. En particulier, les résultats de [**36**, Chapitre 0_{III}, §9.1] s'appliquent aux schémas quasi-compacts, ce qui est parfois suffisant pour obtenir des énoncés pour des schémas généraux. Par exemple, [**36**, Chapitre 0_{III}, Proposition 9.1.3] entraîne qu'une partie dans un schéma X est constructible si et seulement si elle peut s'écrire comme une réunion finie de parties de la forme $U \smallsetminus V$ avec U et V des ouverts quasi-compacts de X. □

Définition 6.5.3. — *Soient X un schéma et $Z \subset X$ un sous-schéma localement fermé. On dit que Z est* constructible *si son image dans X est une partie constructible. (D'après le lemme 6.5.4(ii) ci-dessous, il revient au même de demander qu'il existe deux ouverts quasi-compacts U et V dans X tels que $Z_{\text{réd}} = (U \smallsetminus V)_{\text{réd}}$.)*

Lemme 6.5.4. — *Soient X un schéma et T une partie constructible de X.*

(i) Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X telle que $T \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe un sous-ensemble fini $I_0 \subset I$ tel que $T \subset \bigcup_{i\in I_0} U_i$.

(ii) Si la partie T est localement fermée, il existe deux ouverts quasi-compacts U et V tels que $T = U \smallsetminus V$.

(iii) Si X est quasi-compact et la partie T est fermée, alors l'ouvert $X \smallsetminus T$ est quasi-compact.

Démonstration. — Pour démontrer (i), on peut supposer que $T = U \smallsetminus V$ avec U et V des ouverts quasi-compacts de X. Puisque $U \smallsetminus V \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, on a $U \subset V \cup \bigcup_{i\in I} U_i$. Puisque U est un ouvert quasi-compact, il existe un sous-ensemble fini $I_0 \subset I$ tel que $U \subset V \cup \bigcup_{i\in I_0} U_i$. Il s'ensuit que $U \smallsetminus V \subset \bigcup_{i\in I_0} U_i$.

Démontrons (iii). Puisque X est supposé quasi-compact, $X \smallsetminus T$ est un ouvert constructible. C'est donc un ouvert quasi-compact d'après (i).

Il reste à montrer (ii). Étant donné que la partie T est localement fermée, il existe deux ouverts U et V, à priori quelconques, tels que $T = U \smallsetminus V$. Grâce à (i), on peut supposer que U est quasi-compact. Puisque T est fermé et constructible dans U, $U \smallsetminus T$ est un ouvert quasi-compact d'après (iii). Or $T = U \smallsetminus (U \smallsetminus T)$, ce qui permet de conclure. ■

Lemme 6.5.5. — *Soient X un schéma et T une partie constructible de X. Supposons que T contient un point générique η de X. Alors, T contient un voisinage ouvert de η dans X.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que X est quasi-compact. Il s'agit alors d'un cas particulier de [**41**, Chapitre I, Proposition 7.2.8]. ■

Lemme 6.5.6. — *Soient X un schéma, Z une partie constructible de X et $(T_j)_{j\in J}$ une famille de parties constructibles de X. Si $Z \subset \bigcup_{j\in J} T_j$, il existe un sous-ensemble fini $J_0 \subset J$ tel que $Z \subset \bigcup_{j\in J_0} T_j$.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que X est quasi-compact. Il s'agit alors d'un cas particulier de [**41**, Chapitre I, Corollaire 7.2.7]. ■

Définition 6.5.7. — *On rappelle qu'un morphisme de schémas $T \longrightarrow S$ est dit* en involution *si le $S_{\text{réd}}$-schéma $T_{\text{réd}}$ s'écrit comme la limite projective d'une tour de $S_{\text{réd}}$-schémas lisses où les morphismes de transition sont des projections de fibrés vectoriels de rang fini. (Voir la définition 3.1.25.) Un morphisme de k-feuilletages quasi-compacts $Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ est dit* en involution *s'il en est ainsi du morphisme de schémas* *sous-jacent. Enfin, on dira qu'un morphisme de schémas (resp. de k-feuilletages) est* localement en involution *si tout point de la source admet un voisinage ouvert pour lequel la restriction du morphisme est en involution.*

Lemme 6.5.8. — *La classe des morphismes (localement) en involution est stable par composition et changement de base. Un morphisme (localement) en involution est universellement ouvert. Si $f : T \longrightarrow S$ est un morphisme de schémas (localement) en involution et si C est une partie constructible de T, alors $f(C)$ est une partie constructible de S.*

Démonstration. — La stabilité par composition a été vérifiée dans le lemme 3.1.26 et la stabilité par changement de base est évidente. La deuxième assertion est une extension immédiate du fait qu'un morphisme lisse est universellement ouvert (voir [**38**, Chapitre IV, Théorème 2.4.6] et [**40**, Chapitre IV, Théorème 17.5.1]). La dernière assertion est une conséquence immédiate du théorème de Chevalley (voir [**37**, Chapitre IV, Théorème 1.8.4]). ∎

On arrive maintenant à la définition principale de cette sous-section.

Définition 6.5.9. — *Une famille $(f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F})_{i\in I}$ de morphismes de k-feuilletages est appelée un* recouvrement feuilleté *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) les morphismes $f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F}$ sont diff-étales ;

(ii) pour tout point $x \in X$, il existe un sous-schéma localement fermé constructible $S \subset X$ contenant x, un indice $i_0 \in I$ et un ouvert quasi-compact $V \subset Y_{i_0} \times_X S$ tel que le morphisme évident $V \longrightarrow S$ soit surjectif et en involution.

Remarque 6.5.10. — Si la condition (i) ci-dessus est bien naturelle, la condition (ii) peut paraître arbitraire au premier abord. En fait, en l'absence de conditions de finitude sur les morphismes f_i, on ne peut pas se contenter de demander que X soit ensemblistement l'union des $f_i(Y_i)$ (comme c'était le cas pour les recouvrements fttf, voir la définition 3.3.2). Ainsi, il convient de considérer (ii) comme une condition de surjectivité renforcée, nécessaire au bon fonctionnement de la notion de recouvrement feuilleté. □

Lemme 6.5.11. — *Les recouvrements feuilletés forment une prétopologie sur les k-feuilletages.*

Démonstration. — Seule la stabilité par composition nécessite une démonstration. On se donne donc un recouvrement feuilleté $(f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F})_{i\in I}$ et, pour chaque $i \in I$, un recouvrement feuilleté $(g_{ij} : Z_{ij}/\mathcal{H}_{ij} \longrightarrow Y_i/\mathcal{G}_i)_{j\in J_i}$, et on cherche à montrer que la famille composée

$$(f_i \circ g_{ij} : Z_{ij}/\mathcal{H}_{ij} \longrightarrow X/\mathcal{F})_{(i,j)\in\sqcup_{i\in I}J_i} \tag{6.15}$$

est encore un recouvrement feuilleté. Les morphismes composés $f_i \circ g_{ij}$ étant clairement diff-étales, il reste à vérifier la condition (ii) de la définition 6.5.9 pour la famille (6.15).

Fixons un point $x \in X$. Par définition, il existe un sous-schéma localement fermé constructible $S \subset X$ contenant x, un indice $i_0 \in I$ et un ouvert quasi-compact $V \subset Y_{i_0} \times_X S$ tel que $V \longrightarrow S$ est surjectif et en involution. Quitte à rétrécir S et V, on peut supposer que $f_{i_0}^{-1}(x) \cap V$ est irréductible. (Utiliser le fait que $f_{i_0}^{-1}(x) \cap V$, qui est la fibre en x du morphisme surjectif et en involution $V \longrightarrow S$, possède un ouvert irréductible.) On note alors y le point générique de $f_{i_0}^{-1}(x) \cap V$.

Encore une fois, par définition, il existe un sous-schéma localement fermé constructible $T \subset Y_{i_0}$ contenant y, un indice $j_0 \in J_{i_0}$ et un ouvert quasi-compact $W \subset Z_{i_0j_0} \times_{Y_{i_0}} T$ tel que $W \longrightarrow T$ est surjectif et en involution. Quitte à remplacer T par $T \cap V$, on peut supposer que $T \subset V$. Quitte à rétrécir à nouveau V et S, on peut même supposer que T est fermé dans V. Puisque T contient le point générique de $f_{i_0}^{-1}(x) \cap V$, il s'ensuit que $f_{i_0}^{-1}(x) \cap V \subset T$, ce qui donne l'égalité $f_{i_0}^{-1}(x) \cap T = f_{i_0}^{-1}(x) \cap V$.

Notons S' le lieu des points $s \in S$ tel que $f_{i_0}^{-1}(s) \cap T = f_{i_0}^{-1}(s) \cap V$. D'après ce qui précède, $x \in S'$. Par ailleurs, $S \smallsetminus S'$ est l'image de l'ouvert $V \smallsetminus T$ par le morphisme $V \longrightarrow S$. C'est donc un ouvert quasi-compact d'après le lemme 6.5.8. Il s'ensuit que S' est un fermé constructible de S. Muni de sa structure réduite, S' est donc un sous-schéma localement fermé constructible de X contenant x et contenu dans S.

On pose $V' = V \times_S S'$, $T' = T \times_S S'$ et $W' = W \times_S S' = W \times_T T'$. Par construction, l'immersion fermée $T' \hookrightarrow V'$ est surjective ; c'est donc une nil-immersion fermée. À ce stade, on peut changer la structure de schéma sur T' et W' afin de supposer que $T' = V'$. En particulier, T' est maintenant un ouvert de $Y_{i_0} \times_X S'$. Puisque W' est un ouvert de $Z_{i_0 j_0} \times_{Y_{i_0}} T'$, il s'ensuit que W' est aussi un ouvert de $Z_{i_0 j_0} \times_X S' = Z_{i_0 j_0} \times_{Y_{i_0}} (Y_{i_0} \times_X S')$. Enfin, le morphisme $W' \longrightarrow S'$ est la composition de $W' \longrightarrow T' \simeq V' \longrightarrow S'$. C'est donc un morphisme surjectif et en involution d'après le lemme 6.5.8. Ceci termine la démonstration. ■

Définition 6.5.12. — *Soit $S/\mathcal{E}$ un k-feuilletage et soit $\mathscr{V}$ une sous-catégorie pleine de la catégorie des $S/\mathcal{E}$-feuilletages vérifiant la condition suivante : étant donné un morphisme diff-étale de $S/\mathcal{E}$-feuilletages, si le but de ce morphisme appartient à $\mathscr{V}$ il en est de même de sa source. Une telle sous-catégorie $\mathscr{V}$ sera dite* admissible *dans la suite.*

D'après le lemme 6.5.11, les recouvrements feuilletés forment une prétoplogie sur $\mathscr{V}$. La topologie qu'ils engendrent est appelée la topologie feuilletée. *Elle sera désignée par « ft » et son foncteur « faisceau associé » sera noté $\mathrm{a_{ft}}$. Un site de la forme $(\mathscr{V}, \mathrm{ft})$ est appelé un* site feuilleté.

Notations 6.5.13. — Parmi les sous-catégories admissibles $\mathscr{V}$ qu'on peut considérer, les plus importantes sont probablement les trois suivantes :

(1) $\mathrm{Ft}^{\mathcal{E}}/S$, la catégorie des $S/\mathcal{E}$-feuilletages diff-étales ;

(2) $\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S$, la catégorie des $S/\mathcal{E}$-feuilletages diff-lisses ;

(3) $\mathrm{SgFol}^{\mathcal{E}}/S$, la catégorie des $S/\mathcal{E}$-feuilletages dont la source est un k-feuilletage singulier.

(On a toujours $\mathrm{Ft}^{\mathcal{E}}/S \subset \mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S$ et, si $S/\mathcal{E}$ est un k-feuilletage singulier, on a $\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S \subset \mathrm{SgFol}^{\mathcal{E}}/S$.) Lorsque $S/\mathcal{E}$ est le k-feuilletage grossier associé à un k-schéma S, on note simplement Ft/S, SmFol/S et SgFol/S ces trois sous-catégories. □

Définition 6.5.14. — *Le site* $(\mathrm{Ft}^{\mathcal{E}}/S, \mathrm{ft})$ *est appelé le* petit site feuilleté *du k-feuilletage $S/\mathcal{E}$. Le site* $(\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S, \mathrm{ft})$ *est appelé le* grand site feuilleté *du k-feuilletage $S/\mathcal{E}$. Le site* $(\mathrm{SgFol}^{\mathcal{E}}/S, \mathrm{ft})$ *est appelé le* grand site feuilleté singulier *du k-feuilletage $S/\mathcal{E}$.*

Remarque 6.5.15. — Les catégories $\mathscr{V}$ considérées dans la définition 6.5.12 ne sont pas essentiellement petites, ce qui est problématique, du point de vue de la théorie des ensembles, si on veut parler de préfaisceaux sur $\mathscr{V}$. Pour s'en sortir, on fixe un cardinal fortement inaccessible κ et on convient que tous nos k-feuilletages sont de cardinal strictement plus petit que κ. Le choix de κ importe peu : en pratique, les constructions, groupes de cohomologie feuilletés, etc., sont indépendants de ce choix. □

Les trois propositions ci-dessous regroupent quelques propriétés utiles des recouvrements feuilletés.

Proposition 6.5.16. — *Soit $(f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F})_{i\in I}$ un recouvrement feuilleté avec $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage quasi-compact. Alors, il existe un sous-ensemble fini $I_0 \subset I$ tel que $(f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F})_{i\in I_0}$ est encore un recouvrement feuilleté.*

Démonstration. — Pour chaque point $x \in X$, choisissons un sous-schéma localement fermé constructible $S(x) \subset X$ contenant x et un indice $i(x) \in I$ de sorte que $Y_{i(x)} \times_X S(x)$ contient un ouvert quasi-compact V tel que le morphisme évident $V \longrightarrow S(x)$ soit surjectif et en involution. La famille $(S(x))_{x\in X}$ recouvre X. D'après le lemme 6.5.6, il existe un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_r\}$ de points de X tel que $X = \bigcup_{e=1}^{r} S(x_e)$. Le sous-ensemble fini $I_0 = \{i(x_e);\ 1 \leqslant e \leqslant r\}$ convient clairement. ■

Proposition 6.5.17. — *Soit $(f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F})_{i\in I}$ un recouvrement feuilleté. Pour tout point générique $\eta \in X$, il existe un ouvert quasi-compact $U \subset X$ contenant η, un indice $i_0 \in I$ et un ouvert quasi-compact $V \subset f_{i_0}^{-1}(U)$ tel que le morphisme de k-feuilletages $V/\mathcal{G}_{i_0} \longrightarrow U/\mathcal{F}$ est diff-étale, surjectif et en involution.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la définition 6.5.9 et du lemme 6.5.5. ■

Proposition 6.5.18. — *Étant donné un recouvrement feuilleté $(f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F})_{i\in I}$, on peut, quitte à le raffiner, supposer que la propriété suivante est satisfaite. Il existe une partition $\mathscr{S}$ de X par des sous-schémas localement fermés constructibles, et une fonction $i : \mathscr{S} \longrightarrow I$ telle que, pour tout $S \in \mathscr{S}$, le morphisme $Y_{i(S)} \times_X S \longrightarrow S$ est surjectif et en involution. Lorsqu'elle existe, une telle partition sera dite* adaptée *au recouvrement feuilleté considéré.*

Démonstration. — En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 6.5.16, on construit une partition $\mathscr{S}$ de X par des sous-schémas localement fermés, une fonction $i : \mathscr{S} \longrightarrow I$ et, pour tout $S \in \mathscr{S}$, un ouvert quasi-compact $V(S) \subset Y_{i(S)} \times_X S$ tel que $V(S) \longrightarrow S$ est surjectif et en involution. On pose alors

$$Y'_{i(S)} = Y_{i(S)} \smallsetminus (f_{i(S)}^{-1}(\overline{S}) \smallsetminus V(S)).$$

Par construction, $Y'_{i(S)}$ est un voisinage ouvert de $V(S)$ dans $Y_{i(S)}$ tel que $Y'_{i(S)} \times_X S \simeq V(S)$. De plus, il est clair que la famille $(Y'_{i(S)}/\mathcal{G}_{i(S)} \longrightarrow X/\mathcal{F})_{S\in\mathscr{S}}$ est un recouvrement feuilleté qui raffine le recouvrement feuilleté dont on est parti. La proposition est démontrée. ■

On termine la sous-section en notant que la notion de recouvrement feuilleté s'étend aux (k,Δ)-schémas.

Définition 6.5.19. — *Soit Δ un ensemble fini de dérivarions qui commutent deux à deux et qui agissent trivialement sur k. Une famille $(f_i : Y_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ de morphismes de (k,Δ)-schémas est appelée un* recouvrement feuilleté *si la condition (ii) de la définition 6.5.9 est satisfaite.*

Remarque 6.5.20. — La preuve du lemme 6.5.11 montre que les recouvrements feuilletés forment une prétopologie sur les (k,Δ)-schémas ; la topologie qu'ils engendrent est appelée la *topologie feuilletée* et elle sera désignée par « ft ». De même, les conclusions des propositions 6.5.16, 6.5.17 et 6.5.18 valent aussi pour les recouvrements feuilletés de (k,Δ)-schémas. □

Notation 6.5.21. — Soit Δ un ensemble fini de dérivarions qui commutent deux à deux et qui agissent trivialement sur k. Étant donné un (k,Δ)-schéma S, on note Ft^{Δ}/S la catégorie des (S,Δ)-schémas. □

Remarque 6.5.22. — Si S est un (k,Δ)-schéma, le site $(\mathrm{Ft}^{\Delta}/S,\mathrm{ft})$ est appelé le *petit site feuilleté* du (k,Δ)-schéma S. D'après la proposition 6.2.10, si S est essentiel, on a une équivalence de catégories $\mathrm{Ft}^{\Delta}/S \simeq \mathrm{Ft}^{\mathcal{A}_{S,\Delta}}/S$. Cette équivalence est compatible aux topologies feuilletées comme définies ci-dessus et dans la définition 6.5.12. Autrement dit, on a une équivalence de sites $(\mathrm{Ft}^{\mathcal{A}_{S,\Delta}}/S,\mathrm{ft}) \simeq (\mathrm{Ft}^{\Delta}/S,\mathrm{ft})$. □

6.6. Petits et grands sites feuilletés. —

Dans cette sous-section, on développe le formalisme des petits sites versus grands sites pour la topologie feuilletée. Tout au long de la sous-section, on fixe un k-feuilletage $S/\mathcal{E}$ et une sous-catégorie pleine $\mathscr{V}$ de la catégorie des $S/\mathcal{E}$-feuilletages qui est admissible au sens de la définition 6.5.12. Les deux exemples les plus importants sont : $\mathscr{V} = \mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S$ et $\mathscr{V} = \mathrm{SgFol}^{\mathcal{E}}/S$.

Proposition 6.6.1. — *La donnée, pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage $X/\mathcal{F} \in \mathscr{V}$, du petit site feuilleté $(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X,\mathrm{ft})$ définit une P-structure (au sens de* [**10**, Définition 4.4.57]*) sur le site feuilleté $(\mathscr{V},\mathrm{ft})$.*

Démonstration. — On fixe un $S/\mathcal{E}$-feuilletage $X/\mathcal{F}$ appartenant à $\mathscr{V}$. On doit vérifier les trois conditions de [**10**, Définition 4.4.57] pour le petit site feuilleté $(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X,\mathrm{ft})$. La première est évidente. En ce qui concerne la seconde, il s'agit de montrer que le foncteur évident $\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}} : \mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X \longrightarrow \mathscr{V}$, qui à un $X/\mathcal{F}$-feuilletage diffétale associe le $S/\mathcal{E}$-feuilletage obtenu en composant le morphisme structural avec $X/\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{E}$, induit un pseudo-morphisme de sites au sens de [**10**, Définition 4.4.49]. Or, le foncteur $\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}}$ est clairement continu au sens de [**10**, Définition 4.4.46]. Il reste donc à vérifier que le foncteur « image inverse » sur les faisceaux feuilletés

$$\mathrm{e}^*_{X/\mathcal{F}} : \mathbf{Shv}_{\mathrm{ft}}(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{V})$$

commute aux produits fibrés et aux égalisateurs. Étant donné que les foncteurs « faisceaux associés » sont exacts et que les inclusions des catégories de faisceaux dans celles des préfaisceaux sont exactes à gauche, il est suffisant de montrer que le foncteur « image inverse » sur les préfaisceaux

$$\mathrm{e}^*_{X/\mathcal{F}} : \mathbf{PSh}(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X) \longrightarrow \mathbf{PSh}(\mathscr{V})$$

commute aux produits fibrés et aux égalisateurs. Or, si F est un préfaisceau d'ensembles sur $\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X$ et si $Y/\mathcal{G}$ est un $S/\mathcal{E}$-feuilletage dans $\mathscr{V}$, on a d'après la preuve de [**4**, Exposé I, Proposition 5.1] :

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^*_{X/\mathcal{F}}F)(Y/\mathcal{G}) &= \operatorname*{colim}_{e:X'/\mathcal{F}'\to X/\mathcal{F}\in\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X \text{ et } f':Y/\mathcal{G}\to X'/\mathcal{F}'} F(X'/\mathcal{F}') \\ &= \coprod_{f:Y/\mathcal{G}\to X/\mathcal{F}} \ \operatorname*{colim}_{\substack{e:X'/\mathcal{F}'\to X/\mathcal{F}\in\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X \text{ et } f':Y/\mathcal{G}\to X'/\mathcal{F}' \\ \text{tel que } f=e\circ f'}} F(X'/\mathcal{F}').\end{aligned}$$

Puisque la catégorie $\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X$ possède les limites finies et que l'inclusion $\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X \hookrightarrow \mathscr{V}/(X/\mathcal{F})$ est exacte à gauche, la catégorie d'indices qui apparaît dans la deuxième colimite ci-dessus est cofiltrante. Le résultat recherché découle maintenant du fait que les produits fibrés et les égalisateurs commutent aux coproduits et aux colimites filtrantes dans la catégorie des ensembles.

Pour terminer, il reste à vérifier la troisième condition de [**10**, Définition 4.4.57]. Il s'agit de voir que le foncteur $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*$ commute aux foncteurs « faisceau feuilleté associé ». Dans [**4**, Exposé II, §3], le foncteur a_{ft} est construit comme le carré d'un endofoncteur L_{ft}. Soit G un préfaisceau d'ensembles sur $\mathscr{V}$. Si $Y/\mathcal{G}$ est un $S/\mathcal{E}$-feuilletage dans $\mathscr{V}$, alors $\mathrm{L}_{\mathrm{ft}}G(Y/\mathcal{G})$ est la colimite filtrante des ensembles

$$\mathrm{eq}\left\{\prod_{j\in J} G(Z_j/\mathcal{H}_j) \rightrightarrows \prod_{(j_1,j_2)\in J^2} G(Z_{j_1}\times_Y Z_{j_2}/\mathcal{H}_{j_1}\times\mathcal{H}_{j_2})\right\}$$

suivant les recouvrements feuilletés $(Z_j/\mathcal{H}_j \longrightarrow Y/\mathcal{G})_{j\in J}$. (L'égalisateur ci-dessus ne dépend que du crible défini par la famille couvrante, ce qui assure le caractère filtrant de la colimite.) Si $Y/\mathcal{G}$ est un $X/\mathcal{F}$-feuilletage diff-étale, on dispose d'une recette analogue pour calculer $\mathrm{L}_{\mathrm{ft}}((\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*G)(Y/\mathcal{G})$. Il s'ensuit aussitôt que $\mathrm{L}_{\mathrm{ft}}\circ(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_* = (\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*\circ\mathrm{L}_{\mathrm{ft}}$, ce qui permet de conclure. ∎

Notation 6.6.2. — Comme dans la preuve de la proposition 6.6.1, si $X/\mathcal{F}$ est un $S/\mathcal{E}$-feuilletage appartenant à $\mathscr{V}$, on note $\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}} : \mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X \longrightarrow \mathscr{V}$ le foncteur évident qui à un $X/\mathcal{F}$-feuilletage diff-étale associe le $S/\mathcal{E}$-feuilletage obtenu en composant le morphisme structural avec $X/\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{E}$. □

Corollaire 6.6.3. — *Les foncteurs*

$$(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_* : \mathbf{Shv}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{V}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\mathrm{ft}}(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X),$$

où $X/\mathcal{F}$ parcourt les $S/\mathcal{E}$-feuilletages dans $\mathscr{V}$, sont exacts et forment un famille qui détecte les injections, les surjections et les isomorphismes.

Démonstration. — L'exactitude du foncteur $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*$ sur les faisceaux découle de l'exactitude du foncteur $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*$ sur les préfaisceaux et de la commutation $\mathrm{a}_{\mathrm{ft}}\circ(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_* = (\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*\circ\mathrm{a}_{\mathrm{ft}}$ établie à la fin de la preuve de la proposition 6.6.1.

Soit $f : F \longrightarrow G$ un morphisme de faisceaux feuilletés sur $\mathscr{V}$. Si $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*(f)$ est injectif, il en est de même en particulier de l'application $F(X/\mathcal{F}) \longrightarrow G(X/\mathcal{F})$. Ceci montre que la famille des foncteurs $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*$ détecte les injections. Puisque les foncteurs $(e_{X/\mathcal{F}})_*$ sont exacts, le cas des surjections se ramène à celui des injections. (En effet, f est surjectif si et seulement si $G\coprod_F G \longrightarrow G$ est injectif.) ∎

On retient maintenant quelques conséquences « cohomologiques » de la proposition 6.6.1. Ainsi, dans le reste de la sous-section, on fixe un anneau commutatif Λ ; il sera question de complexes de préfaisceaux de Λ-modules (au lieu de préfaisceaux d'ensembles).

Corollaire 6.6.4. —

(a) *Soit $f : K \longrightarrow L$ un morphisme de complexes de préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathscr{V}$. Alors, f est une équivalence* ft*-locale si et seulement si pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage $X/\mathcal{F}$ appartenant à $\mathscr{V}$, le morphisme $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*(f) : (\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*(K) \longrightarrow (\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*(L)$ est une équivalence* ft*-locale.*

(b) *Soit K un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathscr{V}$. Alors K est projectivement* ft*-fibrant si et seulement si pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage $X/\mathcal{F}$ appartenant à $\mathscr{V}$, le complexe de préfaisceaux $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*(K)$ est projectivement* ft*-fibrant.*

(c) *Soit $X/\mathcal{F}$ un $S/\mathcal{E}$-feuilletage appartenant à $\mathscr{V}$. Alors*

$$((\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})^*, (\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*) : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X;\Lambda)) \rightleftarrows \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathscr{V};\Lambda))$$

est une adjonction de Quillen relativement aux structures de modèles projectives ft*-locales. De plus, le foncteur $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})^*$ préserve les équivalences* ft*-locales.*

Démonstration. — La première assertion est une conséquence immédiate de la commutation $\mathrm{a}_{\mathrm{ft}}\circ(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_* = (\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*\circ\mathrm{a}_{\mathrm{ft}}$. La troisième assertion est un cas particulier de [**10**, Théorème 4.4.50].

La second assertion se démontre en adaptant la preuve de [**12**, Lemme 2.1]. La condition est nécessaire car les foncteurs $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*$ sont de Quillen à droite. Pour montrer qu'elle est suffisante, donnons-nous un complexe de préfaisceaux K tel que les $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*K$ sont projectivement ft-fibrants. Soit $f : K \longrightarrow L$ une équivalence ft-locale avec L projectivement ft-fibrant. Puisque les $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*$ préservent les équivalences ft-locales, on trouve que les morphismes $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*(f)$ sont des équivalences ft-locales entre préfaisceaux projectivement ft-fibrants ; ce sont donc des quasi-isomorphismes de complexes de préfaisceaux. Il s'ensuit que f est aussi un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux, ce qui permet de conclure. ■

Notation 6.6.5. — La catégorie homotopique associée à la structure de modèles projective ft-locale sur la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathscr{V};\Lambda))$ est notée $\mathbf{D}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{V};\Lambda)$. □

Corollaire 6.6.6. — *Soit L un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathscr{V}$. Alors, pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage $X/\mathcal{F}$ appartenant à $\mathscr{V}$, il existe des isomorphismes évidents dans $\mathbf{D}(\Lambda)$:*

$$\mathrm{RHom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{V};\Lambda)}((X/\mathcal{F})\otimes\Lambda, L) \simeq \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ft}}(X/\mathcal{F}; L) \simeq \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ft}}(X/\mathcal{F}; (\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*L).$$

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence immédiate du corollaire 6.6.4(c). En effet, le préfaisceau $(X/\mathcal{F})\otimes\Lambda$ s'identifie à l'image du préfaisceau constant Λ_{cst} par le foncteur $(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})^*$. ■

6.7. Cohérence toposique et quelques points des topos feuilletés. —

Dans cette sous-section, on s'intéresse aux points des topos feuilletés. Comme dans la sous-section 6.6, on fixe un k-feuilletage $S/\mathcal{E}$ et une sous-catégorie pleine $\mathscr{V}$ de la catégorie des $S/\mathcal{E}$-feuilletages qui est admissible au sens de la définition 6.5.12.

Rappelons qu'un topos $\mathcal{E}$ est dit *localement cohérent* (resp. *cohérent*) s'il est équivalent à la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un site $(\mathcal{C},\tau)$ vérifiant les deux conditions suivantes : les produits fibrés (resp. les limites finies) sont représentables dans $\mathcal{C}$ et toute famille τ-couvrante dans $\mathcal{C}$ se raffine par une famille τ-couvrante finie. (Voir [**5**, Exposé VI, Définition 2.3].)

Proposition 6.7.1. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage (resp. un k-feuilletage quasi-compact). Alors, le topos $\mathbf{Shv}_{\mathrm{ft}}(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X)$ est localement cohérent (resp. est cohérent).*

Démonstration. — On note $(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X)^{\mathrm{qc}}$ la sous-catégorie de $\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X$ formée des $X/\mathcal{F}$-feuilletages diff-étales qui sont quasi-compacts en tant que k-feuilletages. La topologie feuilletée se restreint à $(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X)^{\mathrm{qc}}$ pour fournir un site $((\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X)^{\mathrm{qc}},\mathrm{ft})$ équivalent à $(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X,\mathrm{ft})$ (grâce à [**4**, Exposé III, Théorème 4.1]). Le résultat recherché découle alors de la proposition 6.5.16. ■

Corollaire 6.7.2. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage. Alors, le topos $\mathbf{Shv}_{\mathrm{ft}}(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X)$ admet assez de points.*

Démonstration. — En effet, d'après le critère de Deligne [**5**, Exposé VI, Proposition 9.0], un topos localement cohérent admet assez de points. ■

Proposition 6.7.3. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un $S/\mathcal{E}$-feuilletage appartenant à $\mathscr{V}$ et soit $P : \mathbf{Shv}_{\mathrm{ft}}(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X) \longrightarrow \mathcal{E}ns$ un point du topos $\mathbf{Shv}_{\mathrm{ft}}(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X)$. Alors, le foncteur composé $P\circ(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*$ est un point du topos $\mathbf{Shv}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{V})$. De plus, en variant $X/\mathcal{F}$ et P, on obtient assez de points du topos $\mathbf{Shv}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{V})$.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des corollaires 6.6.3 et 6.7.2. ■

Malheureusement, on ne dispose pas d'une construction explicite qui fournit assez de points pour les topos feuilletés. (En fait, il est probable qu'une telle construction n'existe pas.) Néanmoins, il est possible d'expliciter une classe de points sympathiques qui s'avère suffisante dans beaucoup de situations. Le reste de la sous-section est consacré à la construction de ces points. On commence par une définition.

Définition 6.7.4. —

(a) Un pro-k-feuilletage $(Q_i/\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ est dit ft-universel *si les conditions suivantes sont satisfaites.*

(i) Pour tout $i\in I$, le k-feuilletage $Q_i/\mathcal{L}_i$ est diff-lisse, quasi-compact et intègre.

(ii) Pour tout $j\leqslant i$ dans I, le morphisme $Q_j/\mathcal{L}_j \longrightarrow Q_i/\mathcal{L}_i$ est diff-étale en involution.

(iii) Pour tout $i\in I$ et tout morphisme diff-étale, dominant et en involution $f : Z/\mathcal{H} \longrightarrow Q_i/\mathcal{L}_i$, il existe $j\leqslant i$ dans I et un morphisme de $Q_i/\mathcal{L}_i$-feuilletages $Q_j/\mathcal{L}_j \longrightarrow Z/\mathcal{H}$.

(b) *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse, quasi-compact et intègre. Une* enveloppe ft-universelle *de $X/\mathcal{F}$ est un pro-$X/\mathcal{F}$-feuilletage $(Q_i/\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ qui est* ft-*universel (en tant que pro-k-feuilletage) et tel que, pour tout $i \in I$, le morphisme structural $Q_i/\mathcal{L}_i \longrightarrow X/\mathcal{F}$ est diff-étale en involution.*

Remarque 6.7.5. — Soit $(Q_i/\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ un pro-k-feuilletage ft-universel. Alors, pour chaque $i_0 \in I$, le pro-$Q_{i_0}/\mathcal{L}_{i_0}$-feuilletage $(Q_i/\mathcal{L}_i)_{i\in I/i_0}$ est une enveloppe ft-universelle de $Q_{i_0}/\mathcal{L}_{i_0}$. □

Soit $(P_i)_{i\in I}$ un pro-objet. Une *extension* $(P_j)_{j\in J}$ de $(P_i)_{i\in I}$ est la donnée d'un ensemble ordonné cofiltrant J contenant I (et induisant son ordre) et d'une extension à J du foncteur $i \in I \rightsquigarrow P_i$.

Lemme 6.7.6. — *Un pro-k-feuilletage $(Q_i/\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de la définition 6.7.4(a) admet une extension $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in J}$ qui est un pro-k-feuilletage* ft-*universel.*

Démonstration. — Notre construction de l'extension $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in J}$ est inspirée de la preuve de [**5**, Exposé VI, Proposition 9.0]. Cette construction se fait en trois étapes.

Étape 1. — Soit $(Q_i/\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ un pro-k-feuilletage vérifiant les conditions (i) et (ii). Étant donnés $i_0 \in I$ et un morphisme diff-étale en involution $f : Z/\mathcal{H} \longrightarrow Q_{i_0}/\mathcal{L}_{i_0}$ avec Z intègre, il existe une extension $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in J}$ vérifiant encore les conditions (i) et (ii) et un indice $j_0 \leqslant i_0$ dans J tel que $Q_{j_0}/\mathcal{L}_{j_0} = Z/\mathcal{H}$ en tant que $Q_{i_0}/\mathcal{L}_{i_0}$-feuilletage.

On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ du corps $K = \kappa(Q_{i_0})$ des fonctions rationnelles sur Q_{i_0}. Pour $i \leqslant i_0$, on note M_i la clôture algébrique de K dans l'extension $\kappa(Q_i)/K$ et $M = \operatorname{colim}_{i\leqslant i_0} M_i$. On note N la clôture algébrique de K dans $\kappa(Z)$. Enfin, on choisit des K-plongements $M \hookrightarrow \overline{K}$ et $N \hookrightarrow \overline{K}$.

Ces choix fixés, on construit l'extension $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in J}$ comme suit. On prend $J = (I/i_0) \times \{-1\} \sqcup I$ que l'on ordonne de sorte que :

(1) les injections $I/i_0 \hookrightarrow J$ et $I \hookrightarrow J$ sont croissantes et identifient les ordres sur I/i_0 et I avec les ordres induits de l'ordre de J ;

(2) pour i, $i' \in I$ avec $i' \leqslant i_0$, les éléments $(i', -1)$ et i sont comparables si et seulement si $i' \leqslant i$ et dans ce cas on a $(i', -1) < i$.

Pour $i' \leqslant i_0$, les composantes irréductibles de $Q_{i'} \times_{Q_{i_0}} Z$ sont en bijection naturelle avec les points du K-schéma fini $\operatorname{Spec}(M_{i'} \otimes_K N)$. On dispose d'un morphisme $\operatorname{Spec}(\overline{K}) \longrightarrow \operatorname{Spec}(M_{i'} \otimes_K N)$ fourni par les choix ci-dessus et son image détermine donc une composante irréductible $Q^+_{(i',-1)}$ de $Q_{i'} \times_{Q_{i_0}} Z$. Soit $Q_{(i',-1)}$ le plus grand ouvert de $Q_{i'} \times_{Q_{i_0}} Z$ contenu dans $Q^+_{(i',-1)}$, i.e., le complémentaire de l'union des composantes irréductibles de $Q_{i'} \times_{Q_{i_0}} Z$ différentes de $Q^+_{(i',-1)}$. On note $Q_{(i',-1)}/\mathcal{L}_{(i',-1)}$ le k-feuilletage $Q_{(i',-1)}/\mathcal{L}_{i'} \times \mathcal{H}$. On a construit ainsi un pro-k-feuilletage $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in J}$ qui satisfait aux propriétés requises avec $j_0 = (i_0, -1)$.

Étape 2. — Soit $(Q_i/\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ un k-feuilletage vérifiant les conditions (i) et (ii). Il existe une extension $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in J}$ vérifiant (i) et (ii) ainsi que la condition suivante.

(iii)$_I$ Pour tout $i \in I$ et tout morphisme diff-étale, dominant et en involution $f : Z/\mathcal{H} \longrightarrow Q_i/\mathcal{L}_i$, il existe $j \leqslant i$ dans J et un morphisme de $Q_i/\mathcal{L}_i$-feuilletages $Q_j/\mathcal{L}_j \longrightarrow Z/\mathcal{H}$.

En effet, soit E l'ensemble des couples $(i, [f])$ où $i \in I$ et $f : Z/\mathcal{H} \longrightarrow Q_i/\mathcal{L}_i$ est un morphisme diff-étale en involution avec Z intègre. (On note ici $[f]$ la classe d'isomorphisme de f.) Munissons E d'un bon ordre. On construit alors, par induction transfinie sur $e \in E$, un pro-k-feuilletage $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in J_e}$ en prenant l'extension de $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in \cup_{e'<e} J_{e'}}$ associée à un morphisme f, avec $e = (i, [f])$, comme dans l'étape 1. Il est immédiat que $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in \cup_{e\in E} J_e}$ satisfait aux conditions (i), (ii) et (iii)$_I$.

Étape 3. — Considérons la suite de pro-k-feuilletages $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in J^{(n)}}$ telle que $J^{(0)} = I$ et, pour $n \geqslant 1$, $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in J^{(n)}}$ est le pro-k-feuilletage obtenu en appliquant l'étape 2 à $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in J^{(n-1)}}$. Le pro-$k$-feuilletage $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in J}$, avec $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J^{(n)}$, satisfait clairement aux conditions (i), (ii) et (iii). ■

Corollaire 6.7.7. — *Tout k-feuilletage diff-lisse, quasi-compact et intègre admet une enveloppe* ft-*universelle.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme 6.7.6. ■

Proposition 6.7.8. — *Soit* $(Q_i/\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ *un pro-*$S/\mathcal{E}$ *feuilletage appartenant à* $\mathscr{V}$ *et qui est* ft*-universel en tant que pro-*k*-feuilletage. Alors, l'association* $F \rightsquigarrow \mathrm{colim}_{i\in I}\, F(Q_i/\mathcal{L}_i)$ *définit un point du topos* $\mathbf{Shv}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{V})$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la définition 6.7.4, de la proposition 6.5.17 et du lemme 6.7.9 ci-dessous. ∎

Lemme 6.7.9. — *Soit* $(\mathcal{C},\tau)$ *un site et soit* $P=(P_i)_{i\in I}$ *un pro-objet de* $\mathcal{C}$. *Alors, l'association* $F\rightsquigarrow F(P)=\mathrm{colim}_{i\in I}\, F(P_i)$ *est un point du topos* $\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C})$ *si et seulement si la condition suivante est satisfaite. Pour tout* $i\in I$ *et toute famille* τ*-couvrante* $(R_\alpha\longrightarrow P_i)_{\alpha\in L}$, *il existe* $j\leqslant i$ *dans* I, $\beta\in L$ *et un* P_i*-morphisme* $P_j\longrightarrow R_\beta$.

Démonstration. — Il s'agit de [**4**, Exposé IV, §6.8.7, pages 399–400]. ∎

Dans le reste de la sous-section, on démontre une variante de la proposition 6.7.8 qui permet d'obtenir d'autres points des topos feuilletés. On aura besoin du résultat suivant.

Proposition 6.7.10. — *Soient* $S/\mathcal{E}$ *un* k*-feuilletage singulier affine et* $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)$ *un système d'indéterminées. Soient* $X/\mathcal{F}$ *un* $S[[\mathbf{t}]]/\mathcal{E}$*-feuilletage diff-étale et* $Y/\mathcal{G}$ *un* $S/\mathcal{E}$*-feuilletage diff-étale (que l'on considère comme un* $S[[\mathbf{t}]]/\mathcal{E}$*-feuilletage en composant son morphisme structural avec l'inclusion évidente* $S/\mathcal{E}\hookrightarrow S[[\mathbf{t}]]/\mathcal{E}$*). Alors, tout morphisme de* $S[[\mathbf{t}]]/\mathcal{E}$*-feuilletages* $s: Y/\mathcal{G}\longrightarrow X/\mathcal{F}$ *s'étend d'un manière unique en un morphisme de* $S[[\mathbf{t}]]/\mathcal{E}$*-feuilletages* $Y[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}\longrightarrow X/\mathcal{F}$.

Démonstration. — On applique la proposition 6.4.9 au k-feuilletage $X/\mathcal{F}$ avec a_i l'image de t_i dans $\mathcal{O}(X)$ et $X/\mathcal{D}=(X/\mathcal{F})\times_{S/\mathcal{E}}S^{\delta}$. Il s'ensuit un morphisme $u: X_o[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}\longrightarrow X/\mathcal{F}$ avec $X_o=X\times_{S[[\mathbf{t}]],o}S$. Par ailleurs, le morphisme s induit un morphisme de $S/\mathcal{E}$-feuilletages $s_o: Y/\mathcal{G}\longrightarrow X_o/\mathcal{F}$. Le morphisme recherché est $u\circ(s_0[[\mathbf{t}]]): Y[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}\longrightarrow X/\mathcal{F}$. Il reste à voir que le morphisme ainsi défini est un morphisme de $S[[\mathbf{t}]]/\mathcal{E}$-feuilletages. Avec $\Delta=\{\partial_1,\cdots,\partial_n\}$ comme dans la preuve de la proposition 6.4.9, ceci découle du fait que $\mathcal{O}(S)[[\mathbf{t}]]\longrightarrow\mathcal{O}(Y)[[\mathbf{t}]]$ est un morphisme de (k,Δ)-algèbres. En effet, un tel morphisme est déterminé par sa restriction aux algèbres de constantes, i.e., par le morphisme $\mathcal{O}(S)\longrightarrow\mathcal{O}(Y)$. ∎

Proposition 6.7.11. — *Soit* $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)$ *un système d'indéterminées. Soit* $(Q_i/\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ *un pro-*k*-feuilletage affine* ft*-universel et considérons le pro-*k*-feuilletage* $(Q_i[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_i)_{i\in I}$. *Supposons donnée une structure de pro-*$S/\mathcal{E}$*-feuilletage sur* $(Q_i[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ *qui en fait un pro-objet de* $\mathscr{V}$. *Alors, l'association*

$$F\rightsquigarrow \mathrm{colim}_{i\in I}\, F(Q_i[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_i)$$

définit un point du topos $\mathbf{Shv}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{V})$.

Démonstration. — D'après le lemme 6.7.9, il faut montrer que pour tout $i\in I$ et tout recouvrement feuilleté $(Z_\alpha/\mathcal{H}_\alpha\longrightarrow Q_i[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_i)_{\alpha\in L}$, il existe $j\leqslant i$ dans I, $\beta\in L$ et un morphisme de $Q_i[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_i$-feuilletages diff-étales $Q_j[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_j\longrightarrow Z_\beta/\mathcal{H}_\beta$. On ne restreint pas la généralité en supposant les Z_α affines. Pour $\alpha\in L$, on pose

$$Z_{\alpha,0}/\mathcal{H}_{\alpha,0}=(Z_\alpha/\mathcal{H}_\alpha)\times_{Q_i[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_i,o}(Q_i/\mathcal{L}_i).$$

On obtient ainsi un recouvrement feuilleté $(Z_{\alpha,0}/\mathcal{H}_{\alpha,0}\longrightarrow Q_i/\mathcal{L}_i)_{\alpha\in L}$. Puisque Q_i est intègre, il existe, d'après la proposition 6.5.17, un indice $\beta\in L$ et un ouvert $V_0\subset Z_{\beta,0}$ tel que le morphisme $V_0\longrightarrow Q_i$ est dominant et en involution. Puisque le pro-k-schéma $(Q_j/\mathcal{L}_j)_{j\in I}$ est ft-universel, on peut donc trouver $j\leqslant i$ dans I et un morphisme de $Q_i/\mathcal{L}_i$-feuilletages $Q_j/\mathcal{L}_j\longrightarrow Z_{\beta,0}/\mathcal{H}_{\beta,0}$. La proposition 6.7.10 fournit alors un morphisme $Q_j[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_j\longrightarrow Z_\beta/\mathcal{H}_\beta$ comme souhaité. ∎

6.8. Cohomologie feuilletée au point générique. —

Dans cette sous-section, nous étudions la cohomologie feuilletée d'un k-feuilletage au voisinage d'un point générique. Dans le contexte des Δ-schémas et pour la topologie fttf, l'étude de la cohomologie au point générique a occupé une place proéminente dans les sections précédentes et on dispose du théorème 5.12.3 qui fournit une compréhension précise et détaillée de la cohomologie feuilletée d'un Δ-corps algébriquement clos à valeurs dans des faisceaux fttf localement discrets via l'isomorphisme de la proposition 4.6.25.) Le théorème 6.8.15, qui est l'un des résultats notables de cette sous-section, est donc particulièrement intéressant car il permet de ramener, pour une certaine classe de préfaisceaux, l'étude de la cohomologie feuilletée au point générique à l'étude analogue pour la topologie fttf, ce qui donne accès aux résultats obtenus précédemment.

On renvoie le lecteur à la définition 4.2.8 pour la notion de D-structure. On aura besoin de la remarque suivante.

Remarque 6.8.1. — La catégorie des k-feuilletages quasi-compacts possède une D-structure donnée comme suit.

— Si $X/\mathcal{F}$ est un k-feuilletage quasi-compact, $\mathscr{D}(X/\mathcal{F})$ est l'ensemble des sous-feuilletages ouverts quasi-compacts denses de $X/\mathcal{F}$.
— Un morphisme de k-feuilletages quasi-compacts $X/\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ est $\mathscr{D}$-permis s'il est en involution.
— Si $X/\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ est un morphisme $\mathscr{D}$-permis de k-feuilletages quasi-compacts, alors $\mathscr{D}_{S/\mathcal{E}}(X/\mathcal{F})$ est l'ensemble des ouverts quasi-compacts de $X/\mathcal{F}$ denses relativement à S.

On a des bijections évidentes $\mathscr{D}(X/\mathcal{F}) \simeq \mathscr{D}(X)$ et $\mathscr{D}_{S/\mathcal{E}}(X/\mathcal{F}) \simeq \mathscr{D}_S(X)$ où le « $\mathscr{D}$ » des seconds membres désigne la D-structure sur les k-schémas quasi-compacts de l'exemple 4.2.10. De plus, la topologie feuilletée sur les k-feuilletages quasi-compacts est $\mathscr{D}$-bonne au sens de la définition 4.2.12.

Étant donné un k-feuilletage quasi-compact $X/\mathcal{F}$, la D-structure ci-dessus induit une D-structure, encore notée $\mathscr{D}$, sur $(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X)^{\mathrm{qc}}$ relativement à laquelle la topologie feuilletée est encore $\mathscr{D}$-bonne. □

Notation 6.8.2. — Soient $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage et $Y/\mathcal{G}$ un $X/\mathcal{F}$-feuilletage. Le $X/\mathcal{F}$-feuilletage simplicial de Čech associé à $Y/\mathcal{G}$ sera désigné par $\check{C}_\bullet(Y/X)/\mathcal{G}_\bullet$. Autrement dit, on a

$$\check{C}_n(Y/X)/\mathcal{G}_n = \overbrace{Y \times_X \cdots \times_X Y}^{n+1 \text{ fois}} / \overbrace{\mathcal{G} \times \cdots \times \mathcal{G}}^{n+1 \text{ fois}}.$$

(Noter que le k-feuilletage simplicial $\check{C}_\bullet(Y/X)/\mathcal{G}_\bullet$ ne dépend pas de la structure de feuilletage sur X.) □

Remarque 6.8.3. — Étant donné un k-schéma X, le symbole « η_X » a deux significations possibles. Il peut s'agir du pro-objet des ouverts denses de X, comme dans la notation 4.2.16. Il peut aussi s'agir de la limite de ce pro-objet (qui, pour X intègre, est simplement le spectre du corps des fonctions rationnelles sur X). Malheureusement, ceci peut prêter à confusion, notamment quand il s'agit d'évaluer des préfaisceaux définis par exemple sur le petit site feuilleté d'un k-feuilletage. Ceci explique les précisions à la fin des énoncés des théorèmes 6.8.4, 6.8.6, 6.8.15 et du corollaire 6.8.17 ci-dessous. □

On a la variante suivante du théorème 4.2.18.

Théorème 6.8.4. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse, quasi-compact et admettant un nombre fini de composantes irréductibles, et soit $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ un morphisme diff-étale, en involution et dominant. Soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* $\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X$. *On suppose que $F^\bullet$ est projectivement* ft-*fibrant et borné à gauche. Alors, le morphisme évident*

$$F^\bullet(\eta_X/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{\check{C}_\bullet(Y/X)}/\mathcal{G}_\bullet) \tag{6.16}$$

est un quasi-isomorphisme. (Ci-dessus, « η » est pris au sens de la notation 4.2.16.)

Démonstration. — La preuve du théorème 4.2.18 s'étend littéralement. En effet, on se ramène par le même argument « galoisien » au cas où les fibres du morphisme $Y \longrightarrow X$ sont soit vides, soit purement de dimension non nulle. Quitte à supposer que f est surjectif, le résultat recherché est alors un cas particulier du théorème 4.2.17 (alias, lemme magique), étant donné la remarque 6.8.1. ■

La définition suivante est l'analogue pour la topologie feuilletée de la définition 4.6.11.

Définition 6.8.5. —

(a) Un hyper-recouvrement ft-générique *d'un k-feuilletage quasi-compact $X/\mathcal{F}$ est un morphisme diff-étale de k-feuilletages semi-simpliciaux $f_\bullet : Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet \longrightarrow X/\mathcal{F}$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le morphisme*

$$Y_p \longrightarrow (\mathrm{cosk}^X_{p-1} Y)_p \tag{6.17}$$

est dominant et en involution.

(b) Un hyper-recouvrement ft-générique relatif *d'un k-feuilletage semi-simplicial $U_\bullet/\mathcal{B}_\bullet$ quasi-compact en chaque degré est un morphisme diff-étale de k-feuilletages semi-simpliciaux $h_\bullet : V_\bullet/\mathcal{D}_\bullet \longrightarrow U_\bullet/\mathcal{B}_\bullet$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le morphisme*

$$V_p \longrightarrow U_p \times_{(\mathrm{cosk}_{p-1} U)_p} (\mathrm{cosk}_{p-1} V)_p \tag{6.18}$$

est dominant et en involution.

On a la variante suivante du théorème 4.4.16.

Théorème 6.8.6. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse, quasi-compact et admettant un nombre fini de composantes irréductibles, et soit $f_\bullet : Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet \longrightarrow X/\mathcal{F}$ un hyper-recouvrement* ft*-générique de X. Soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* $\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X$*. On suppose que $F^\bullet$ est projectivement* ft*-fibrant et borné à gauche. Alors, le morphisme évident*

$$F^\bullet(\eta_X/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, F^\bullet(\eta_{Y_\bullet}/\mathcal{G}_\bullet) \tag{6.19}$$

est un quasi-isomorphisme. (Ci-dessus, « η » est pris au sens de la notation 4.2.16.)

Démonstration. — La preuve du théorème 4.4.16 s'étend littéralement : il faut juste utiliser le théorème 6.8.4 à la place du théorème 4.2.18. ■

La définition suivante introduit l'analogue pour la topologie feuilletée de la notion d'hyper-enveloppe universelle (voir la définition 4.6.6).

Définition 6.8.7. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse, quasi-compact et intègre. Une* hyper-enveloppe ft-universelle *de $X/\mathcal{F}$ est un pro-objet $(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet} \longrightarrow X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ dans la catégorie des $X/\mathcal{F}$-feuilletages diff-étales semi-simpliciaux augmentés vérifiant les conditions suivantes.*

(a) Le pro-X-schéma $(X_i)_{i\in I}$ est une clôture algébrique de X au sens suivant :

(i) pour tout $i \in I$, le k-schéma X_i est quasi-compact et intègre ;

(ii) pour tout $i \in I$, le morphisme $X_i \longrightarrow X$ est étale (ce qui entraîne que le $X/\mathcal{F}$-feuilletage $X_i/\mathcal{F}_i$ est basique) ;

(iii) le pro-k-schéma $(X_i)_{i\in I}$ est isomorphe à un pro-k-schéma affine et $\mathrm{colim}_{i\in I}\, \mathcal{O}(X_i)$ *est une clôture algébrique du corps $\kappa(X)$ des fonctions rationnelles sur X.*

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le pro-k-feuilletage $(Q_{i,n}/\mathcal{L}_{i,n})_{i\in I}$ est une enveloppe ft*-universelle de $X/\mathcal{F}$. (Voir la définition 6.7.4(b).)*

(c) Pour tout $i \in I$, $Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet} \longrightarrow X_i/\mathcal{F}_i$ est un hyper-recouvrement ft*-générique p-tronqué pour un certain $p \in \mathbb{N}$ (dépendant de i).*

Proposition 6.8.8. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse, quasi-compact et intègre. On suppose donné un pro-objet $(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet} \longrightarrow X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ dans la catégorie des $X/\mathcal{F}$-feuilletages diff-étales semi-simpliciaux augmentés tel que :*

— le pro-k-schéma $(X_i)_{i\in I}$ satisfait aux conditions (i) et (ii) de la définition 6.8.7 ;

— les pro-k-feuilletages $(Q_{i,n})_{i\in I}$ satisfont aux conditions (i) et (ii) de la définition 6.7.4 ;

— la condition (c) de la définition 6.8.7 est satisfaite.

Alors, ce pro-objet admet une extension qui est une hyper-enveloppe ft*-universelle de $X/\mathcal{F}$.*

Démonstration. — On divise la construction de l'extension recherchée en quatre étapes. À partir de la seconde étape, on suit de près la construction utilisée pour le lemme 6.7.6 (elle-même largement inspirée de la preuve de [**5**, Exposé VI, Proposition 9.0]). Dans la première étape, il sera nécessaire d'invoquer un ingrédient non formel.

Afin d'alléger les notations, on convient que $Q_{i,-1}/\mathcal{L}_{i,-1} = X_i/\mathcal{F}_i$ et on écrit « $(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet})_{i\in I}$ » à la place de « $(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet} \longrightarrow X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ ». On fera de même pour les autres (pro-)objets semi-simpliciaux augmentés qu'on aura à introduire dans la preuve.

Étape 1. — Soit $(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet})_{i\in I}$ comme dans l'énoncé. Il existe une extension $(Q_{j,\bullet}/\mathcal{L}_{j,\bullet})_{j\in J}$ vérifiant encore les conditions de l'énoncé ainsi que la condition supplémentaire suivante : pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, le pro-$k$-schéma $(Q_{j,n})_{j\in J}$ est isomorphe à un pro-k-schéma affine et $\mathrm{colim}_{j\in J}\, \mathcal{O}(Q_{j,n})$ est un corps algébriquement clos.

En effet, considérons le schéma semi-simplicial augmenté $Q_{\infty,\bullet} \longrightarrow X_\infty = Q_{\infty,-1}$ obtenu en prenant la limite du pro-objet $(\eta(Q_{i,\bullet}) \longrightarrow \eta(X_i))_{i\in I}$. Par construction, les $Q_{\infty,n}$, pour $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, sont des spectres de corps et le morphisme $Q_{\infty,\bullet} \longrightarrow X_\infty$ est un hyper-recouvrement pro-générique (au sens de la remarque

4.6.12 où l'on prend $\Delta = \varnothing$). D'après le lemme 6.8.9(a) ci-dessous, il existe un carré commutatif de schémas semi-simpliciaux

$$\begin{tikzcd} \overline{Q}_{\infty,\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{X}_\infty \arrow[d] \\ Q_{\infty,\bullet} \arrow[r] & X_\infty \end{tikzcd}$$

tel que $\overline{Q}_{\infty,\bullet} \longrightarrow \overline{X}_\infty = \overline{Q}_{\infty,-1}$ est un hyper-recouvrement pro-générique et, pour $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, $\mathcal{O}(\overline{Q}_{\infty,n})$ est une clôture algébrique de $\mathcal{O}(Q_{\infty,n})$.

Soit J_0 l'ensemble des couples $(i, B_\bullet)$ où $i \in I$ et $B_\bullet$ est un sous-anneau semi-cosimplicial coaugmenté de $\mathcal{O}(\overline{Q}_{\infty,\bullet})$ vérifiant les conditions suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, le morphisme de k-schémas $\overline{Q}_{\infty,n} \longrightarrow Q_{i,n}$ se factorise par $\mathrm{Spec}(B_n)$ et le morphisme $\mathrm{Spec}(B_n) \longrightarrow Q_{i,n}$ est étale.
2. Le morphisme $\mathrm{Spec}(B_\bullet)/\mathcal{L}_{i,\bullet} \longrightarrow \mathrm{Spec}(B_{-1})/\mathcal{F}_i$ est un hyper-recouvrement ft-générique tronqué.
3. Le morphisme $\overline{Q}_{\infty,\bullet} \longrightarrow \mathrm{Spec}(B_\bullet) \times_{\mathrm{Spec}(B_{-1})} \overline{X}_\infty$ est un hyper-recouvrement pro-générique relatif;

L'ensemble J_0 sera ordonné par la relation suivante : $(i', B'_\bullet) \leqslant (i, B_\bullet)$ si $i' \leqslant i$ et si $B_n \subset B'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. D'après le lemme 6.8.9(b, c) ci-dessous, l'ensemble J_0 est cofiltrant et la limite du pro-k-schéma semi-simplicial augmenté $(\mathrm{Spec}(B_\bullet))_{(i,B_\bullet)\in J_0}$ est canoniquement isomorphe à $\overline{Q}_{\infty,\bullet}$. On prend $J = I \sqcup J_0$ que l'on ordonne de sorte que :

— les ordres sur I et sur J_0 coïncident avec les ordres induits de l'ordre de J ;

— les éléments $i \in I$ et $(i', B_\bullet)$ sont comparables si et seulement si $i' \leqslant i$ et dans ce cas on a $(i', B_\bullet) < i$.

Ceci étant, on définit l'extension $(Q_{j,\bullet}/\mathcal{L}_{j,\bullet})_{j\in J}$ en posant $Q_{(i,B),\bullet}/\mathcal{L}_{(i,B),\bullet} = \mathrm{Spec}(B_\bullet)/\mathcal{L}_{i,\bullet}$. Il est clair que cette extension vérifie la propriété supplémentaire requise.

Étape 2. — Soit $(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet})_{i\in I}$ comme dans l'énoncé. Étant donné $i_0 \in I$, $m \in \mathbb{N}$ et un morphisme diff-étale en involution $f : Z/\mathcal{H} \longrightarrow Q_{i_0,m}/\mathcal{L}_{i_0,m}$ avec Z intègre, il existe une extension $(Q_{j,\bullet}/\mathcal{L}_{j,\bullet})_{j\in J}$ vérifiant encore les conditions de l'énoncé, un indice $j_0 \leqslant i_0$ dans J et un morphisme de $Q_{i_0,m}/\mathcal{L}_{i_0,m}$-feuilletages $Q_{j_0,m}/\mathcal{L}_{j_0,m} \longrightarrow Z/\mathcal{H}$.

D'après l'étape 1, on peut supposer que le pro-schéma $(Q_{i,m})_{i\in I}$ est isomorphe à un pro-k-schéma affine et que $\mathrm{colim}_{i\in I}\, \mathcal{O}(Q_{i,m})$ est un corps algébriquement clos. Quitte à remplacer $Z/\mathcal{H}$ par une composante connexe de $(Z/\mathcal{H}) \times_{Q_{i_0,m}} (Q_{i'_0,m}/\mathcal{L}_{i'_0,m})$, avec $i'_0 \leqslant i_0$ suffisamment petit, on peut supposer que le $Q_{i_0,m}$-schéma Z est géométriquement intègre. On prend $J = (I/i_0) \times \{-1\} \sqcup I$ que l'on ordonne de sorte que :

— les ordres sur I et sur I/i_0 coïncident avec les ordres induits de l'ordre de J ;

— pour i, $i' \in I$ avec $i' \leqslant i_0$, les éléments $(i', -1)$ et i sont comparables si et seulement si $i' \leqslant i$ et dans ce cas on a $(i', -1) < i$.

Pour $i' \leqslant i_0$, on pose $X_{(i',-1)}/\mathcal{F}_{(i',-1)} = X_{i'}/\mathcal{F}_{i'}$ et on prend pour $Q_{(i',-1),\bullet}/\mathcal{L}_{(i',-1),\bullet}$ la source du morphisme m-élémentaire $Q_{(i',-1),\bullet}/\mathcal{L}_{(i',-1),\bullet} \longrightarrow Q_{i',\bullet}/\mathcal{L}_{i',\bullet}$ associé à la projection

$$\mathrm{pr}_1 : (Q_{i',m}/\mathcal{L}_{i',m}) \times_{(Q_{i_0,m}/\mathcal{L}_{i_0,m})} (Z/\mathcal{H}) \longrightarrow (Q_{i',m}/\mathcal{L}_{i',m}).$$

Puisque le $Q_{i_0,m}$-schéma Z est plat et géométriquement intègre, il s'ensuit que les $Q_{(i',-1),n}$ sont des schémas intègres pour tout $i' \leqslant i_0$ et tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. L'extension ainsi construite vérifie les propriétés requises.

Étape 3. — Soit $(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet})_{i\in I}$ comme dans l'énoncé. Il existe une extension $(Q_{j,\bullet}/\mathcal{L}_{j,\bullet})_{j\in J}$ vérifiant encore les conditions de l'énoncé ainsi que les conditions suivantes (pour tous les $n \in \mathbb{N}$).

(iii)$_{I,n}$ Pour tout $i \in I$ et tout morphisme diff-étale, dominant et en involution $f : Z/\mathcal{H} \longrightarrow Q_{i,n}/\mathcal{L}_{i,n}$, il existe $j \leqslant i$ dans J et un morphisme de $Q_{i,n}/\mathcal{L}_{i,n}$-feuilletages $Q_{j,n}/\mathcal{L}_{j,n} \longrightarrow Z/\mathcal{H}$.

En effet, soit E l'ensemble des triplets $(i, n, [f])$ où $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : Z/\mathcal{H} \longrightarrow Q_{i,n}/\mathcal{L}_{i,n}$ est un morphisme diff-étale, dominant et en involution. (On note ici $[f]$ la classe d'isomorphisme de f.) Munissons E d'un bon ordre. On construit alors, par induction transfinie sur $e \in E$, un pro-k-feuilletage semi-simplicial augmenté $(Q_{j,\bullet}/\mathcal{L}_{j,\bullet})_{j\in J_e}$ en prenant une extension de $(Q_{j,\bullet}/\mathcal{L}_{j,\bullet})_{j\in\cup_{e'<e}J_{e'}}$ comme celle obtenue comme dans

l'étape 2 à partir d'un morphisme f, avec $e = (i, n, [f])$. Il est immédiat que $(Q_{j,\bullet}/\mathcal{L}_{j,\bullet})_{j\in\cup_{e\in E}J_e}$ vérifie les propriétés requises.

Étape 4. — Considérons la suite de pro-k-feuilletages semi-simpliciaux augmentés $(Q_{j,\bullet}/\mathcal{L}_{j,\bullet})_{j\in J^{(n)}}$ obtenue comme suit : $(Q_{j,\bullet}/\mathcal{L}_{j,\bullet})_{j\in J^{(0)}}$ est l'extension de $(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet})_{i\in I}$ construite dans l'étape 1 et, pour $n \geqslant 1$, $(Q_{j,\bullet}/\mathcal{L}_{j,\bullet})_{j\in J^{(n)}}$ est l'extension obtenue en appliquant l'étape 3 à $(Q_{j,\bullet}/\mathcal{L}_{j,\bullet})_{j\in J^{(n-1)}}$. Le pro-$k$-feuilletage semi-simplicial augmenté $(Q_{j,\bullet}/\mathcal{L}_{j,\bullet})_{j\in J}$, avec $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J^{(n)}$, est l'extension recherchée. ■

Le lemme suivant a servi dans la preuve de la proposition 6.8.8.

Lemme 6.8.9. — *Soit $Y_\bullet$ un k-schéma semi-simplicial augmenté tel que les Y_n sont intègres pour tous les $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$ et que l'augmentation $Y_\bullet \longrightarrow Y_{-1}$ est hyper-recouvrement pro-générique.*

(a) Il existe un morphisme de k-schémas semi-simpliciaux augmentés $\overline{Y}_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) l'augmentation $Y_\bullet \longrightarrow Y_{-1}$ est hyper-recouvrement pro-générique ;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, $\overline{Y}_n$ est le spectre d'une clôture algébrique de $\kappa(Y_n)$.

(b) Supposons donné un morphisme de k-schémas semi-simpliciaux augmentés $\overline{Y}'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ vérifiant la condition (i) ci-dessus et la variante suivante de (ii) :

(ii′) pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, $\overline{Y}_n$ est le spectre d'une extension algébriquement close de $\kappa(Y_n)$.

Alors, il existe une factorisation $\overline{Y}'_\bullet \longrightarrow \overline{Y}_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ avec $\overline{Y}_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ comme dans (a). Bien évidemment, pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, $\mathcal{O}(\overline{Y}_n)$ est alors la clôture algébrique de $\kappa(Y_n)$ dans $\mathcal{O}(\overline{Y}'_n)$.

(c) Supposons que l'augmentation $Y_\bullet \longrightarrow Y_{-1}$ est un hyper-recouvrement ft*-générique (lorsque les k-schémas sont munis de leurs structures de feuilletage discretes) et soit $\overline{Y}_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ comme dans (a). Considérons la catégorie $\mathcal{R}$ ayant pour objets les factorisations $\overline{Y}_\bullet \longrightarrow Z_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ telles que :*
— l'augmentation $Z_\bullet \longrightarrow Z_{-1}$ est un hyper-recouvrement pro-générique ;
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, les morphismes $Z_n \longrightarrow Y_n$ sont étales.
Alors $\mathcal{R}$ est cofiltrante et $\overline{Y}_\bullet$ s'identifie à la limite projective des $Z_\bullet$ suivant les factorisations dans $\mathcal{R}$. De plus, si $Y_\bullet$ est tronqué, on peut se restreindre aux $Z_\bullet$ qui sont tronqués.

Démonstration. — Au lieu de donner une preuve indépendante de ce lemme, nous allons le déduire de résultats obtenus précédemment. En fait, les parties (a) et (b) de l'énoncé sont des cas particuliers des parties (a) et (b) du lemme 4.5.8. En effet, choisissons une clôture algébrique $\overline{L}$ de $\kappa(Y_{-1})$. On obtient le morphisme $\overline{Y}_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ en appliquant le lemme 4.5.8(a) avec « k », « l » et « $\overline{l}$ » le même corps algébriquement clos $\overline{L}$, « $X_\bullet$ » le $\overline{L}$-schéma semi-simplicial constant donné par $\mathrm{Spec}(\overline{L})$ en chaque degré, et « $R_\bullet$ » le schéma semi-simplicial $Y_\bullet \times_{Y_{-1}} \mathrm{Spec}(\overline{L})$. De même, on obtient la partie (b) de l'énoncé en appliquant le lemme 4.5.8(b) avec « $Y_\bullet$ » le schéma semi-simplicial $\overline{Y}'_\bullet$.

Il reste à démontrer la partie (c). Il est clairement suffisant de démontrer la propriété correspondante pour le morphisme $\overline{Y}_\bullet \longrightarrow \eta(Y_\bullet)$. Étant donné que l'augmentation $Y_\bullet \longrightarrow Y_{-1}$ est un hyper-recouvrement ft-générique, on peut trouver un morphisme de k-schémas semi-simpliciaux $\eta(Y_\bullet) \longrightarrow A_\bullet$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est un espace affine (possiblement de dimension infinie) et le morphisme $\eta(Y_n) \longrightarrow A_n \times_k Y_{-1}$ est dominant et induit une extension finie sur les corps des fonctions rationnelles. On peut construire un tel morphisme $\eta(Y_\bullet) \longrightarrow A_\bullet$ en adaptant la preuve du lemme 4.5.6. En particulier, on peut aussi supposer que $A_\bullet$ est la source d'une tour de morphismes élémentaires associés à des projections d'espaces affines relatifs (possiblement de dimension infinie) et dont la base est $\mathrm{Spec}(k)$.

Ceci étant, pour démontrer l'analogue de (c) pour le morphisme $\overline{Y}_\bullet \longrightarrow \eta(Y_\bullet)$, il est suffisant de démontrer la partie (c) pour le morphisme $\overline{Y}_\bullet \longrightarrow A_\bullet \times_k Y_{-1}$. Or, le morphisme $\overline{Y}_\bullet \longrightarrow A_\bullet \times_k \overline{Y}_{-1}$ est un hyper-recouvrement pro-générique relatif. (En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le morphisme évident

$$\overline{Y}_p \longrightarrow A_p \times_{(\mathrm{cosk}^k_{p-1}A)_p} (\mathrm{cosk}^{\overline{Y}_{-1}}_{p-1}\overline{Y})_p$$

est pro-étale et son but est intègre car isomorphe à un espace affine sur $(\mathrm{cosk}_{p-1}^{\overline{Y}_{-1}}\overline{Y})_p$; le morphisme en question est donc dominant.) On peut maintenant invoquer le lemme 4.6.13 pour conclure. ■

Corollaire 6.8.10. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse, quasi-compact et intègre. Alors $X/\mathcal{F}$ possède une hyper-enveloppe* ft*-universelle.*

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence évidente de la proposition 6.8.8. ■

Le résultat suivant est l'analogue pour la topologie feuilletée du théorème 4.6.18.

Théorème 6.8.11. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse, quasi-compact et intègre. On se donne une hyper-enveloppe* ft*-universelle $(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet} \longrightarrow X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ de $X/\mathcal{F}$. Soit $F^\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X$ borné à gauche. Alors, il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}(\Lambda)$:*

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ft}}(X_i/\mathcal{F}_i; F^\bullet) \simeq \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{Tot}\, F^\bullet(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet}).$$

Démonstration. — Il s'agit d'adapter la preuve du théorème 4.6.18. Soit $F \longrightarrow G$ une équivalence ft-locale avec G un complexe de préfaisceaux projectivement ft-fibrant. D'après le théorème 6.8.6, on a, pour $i \in I$, un quasi-isomorphisme

$$G(\eta_{X_i}/\mathcal{F}_i) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, G(\eta_{Q_{i,\bullet}}/\mathcal{L}_{i,\bullet}). \tag{6.20}$$

(Ci-dessus, « η » est pris au sens de la notation 4.2.16.) Or, pour $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, on a un isomorphisme de pro-k-feuilletages $(\eta_{Q_{i,n}}/\mathcal{L}_{i,n})_{i\in I} \simeq (Q_{i,n}/\mathcal{L}_{i,n})_{i\in I}$. En prenant la colimite des quasi-isomorphismes (6.20), on trouve que

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} G(X_i/\mathcal{F}_i) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{Tot}\, G(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet})$$

est un quasi-isomorphisme. Par ailleurs, d'après la proposition 6.7.8, le morphisme

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{Tot}\, F(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet}) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{Tot}\, G(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet})$$

est un quasi-isomorphisme. Puisque $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ft}}(X_i/\mathcal{F}_i; F) = G(X_i/\mathcal{F}_i)$, ceci termine la preuve. ■

La définition suivante généralise aux k-feuilletages diff-lisses le petit site fttf introduit dans la définition 3.3.2 dans le contexte des Δ-schémas.

Définition 6.8.12. —

(a) On dit qu'une famille de morphismes de k-feuilletages diff-lisses $(f_i : X_i/\mathcal{F}_i \longrightarrow X/\mathcal{F})_{i\in I}$ est un recouvrement feuilleté de type fini*, ou simplement un* recouvrement fttf*, si les f_i sont diff-étales et localement de type fini au sens de la définition 6.2.13(b), et si $X = \bigcup_{i\in I} f_i(X_i)$.*

(b) Soit $S/\mathcal{E}$ un k-feuilletage diff-lisse. On note $\mathrm{Fttf}^{\mathcal{E}}/S$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{Ft}^{\mathcal{E}}/S$ *dont les objets sont les $S/\mathcal{E}$-feuilletages diff-étales localement de type fini. Les recouvrements* fttf *forment une prétopologie sur* $\mathrm{Fttf}^{\mathcal{E}}/S$ *; la topologie qu'ils engendrent est appelée la* topologie feuilletée de type fini*. Elle sera désignée par «* fttf *» et son foncteur « faisceau associé » sera noté* $\mathrm{a}_{\mathrm{fttf}}$.

Remarque 6.8.13. — Soit $S/\mathcal{E}$ un k-feuilletage diff-lisse. On note $\iota_{S/\mathcal{E}} : \mathrm{Fttf}^{\mathcal{E}}/S \hookrightarrow \mathrm{Ft}^{\mathcal{E}}/S$, ou simplement ι lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, l'inclusion canonique. Sur les préfaisceaux, le foncteur $(\iota_{S/\mathcal{E}})^*$ est exact (d'après [**4**, Exposé I, Proposition 5.2]). Par contre, le foncteur $\iota_{S/\mathcal{E}}$ n'est pas continu, i.e., si F est un faisceau feuilleté sur $\mathrm{Ft}^{\mathcal{E}}/S$, le préfaisceau $(\iota_{S/\mathcal{E}})_*F$ n'est pas en général un faisceau fttf sur $\mathrm{Fttf}^{\mathcal{E}}/S$. □

Définition 6.8.14. — *Soient $S/\mathcal{E}$ un k-feuilletage et $\mathcal{V}$ une sous-catégorie pleine de la catégorie des $S/\mathcal{E}$-feuilletages qui est admissible au sens de la définition 6.5.12.*

(a) Soit F un préfaisceau sur $\mathcal{V}$. On dit que F est génériquement continu *si, pour tout pro-$S/\mathcal{E}$-feuilletage $(Y_i/\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ appartenant à $\mathcal{V}$ et vérifiant les conditions suivantes :*

  (i) pour tout $i \in I$, le k-feuilletage $Y_i/\mathcal{G}_i$ est diff-lisse, affine et intègre,

  (ii) pour tout $j \leqslant i$ dans I, le morphisme $Y_j/\mathcal{G}_j \longrightarrow Y_i/\mathcal{G}_i$ est diff-étale en involution,

  (iii) $\operatorname{colim}_{i\in I} \mathcal{O}(Y_i)$ *est un corps,*

le morphisme évident $\operatorname{colim}_{i\in I} F(Y_i/\mathcal{G}_i) \longrightarrow F(\lim_{i\in I} Y_i/\mathcal{G}_i)$ *est un isomorphisme.*

(b) *Soit F un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathcal{V}$. Nous dirons que F est* homotopiquement génériquement continu *si les préfaisceaux d'homologie de F sont génériquement continus.*

Théorème 6.8.15. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse, quasi-compact et possédant un nombre fini de composantes irréductibles. Soit F un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X$ borné à gauche et homotopiquement génériquement continu. Il existe alors un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}(\Lambda)$:*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{fttf}}(\eta_X/\mathcal{F};(\iota_{X/\mathcal{F}})_*F)\simeq \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ft}}(\eta_X/\mathcal{F};F).$$

(Ci-dessus, « η » est pris au sens de la notation 4.2.16.)

Démonstration. — Appelons recouvrement fttf$'$ un recouvrement fttf $(g_j : Y_j/\mathcal{G}_j \longrightarrow Y/\mathcal{G})_{j\in J}$ tels que les morphismes g_j sont en involution. Les recouvrements fttf$'$ forment un prétopologie sur $(\mathrm{Fttf}^{\mathcal{F}}/X)^{\mathrm{qc}}$ et la topologie qu'ils engendrent sur $\mathrm{Fttf}^{\mathcal{F}}/X$ est appelée la topologie fttf$'$. On a des morphismes de sites

$$(\mathrm{Fttf}^{\mathcal{F}}/X,\mathrm{fttf})\longrightarrow(\mathrm{Fttf}^{\mathcal{F}}/X,\mathrm{fttf}')\longleftarrow(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X,\mathrm{ft}).$$

Il s'ensuit des morphismes évidents

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{fttf}}(\eta_X/\mathcal{F};\iota_*F)\longleftarrow\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{fttf}'}(\eta_X/\mathcal{F};\iota_*F)\longrightarrow\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ft}}(\eta_X/\mathcal{F};F),$$

et nous allons montrer que ces deux morphismes sont des quasi-isomorphismes. Puisque X possède un nombre fini de composantes irréductibles, on ne restreint pas la généralité en supposant que X est intègre.

Fixons une hyper-enveloppe ft-générique $(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet}\longrightarrow X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ de $X/\mathcal{F}$. Notons G le groupe de Galois de la clôture algébrique $\mathrm{colim}_{i\in I}\,\mathcal{O}(X_i)$ du corps des fonctions rationnelles de X. On a alors un isomorphisme naturel

$$\mathrm{R}\Gamma_{\dagger}(\eta_X/\mathcal{F};-)\simeq\mathrm{R}\Gamma(G,\operatorname*{colim}_{i\in I}\mathrm{R}\Gamma_{\dagger}(X_i/\mathcal{F}_i;-))$$

pour $\dagger\in\{\mathrm{fttf}',\mathrm{fttf},\mathrm{ft}\}$. Il est donc suffisant de montrer que les deux morphismes

$$\operatorname*{colim}_{i\in I}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{fttf}}(X_i/\mathcal{F}_i;\iota_*F)\longleftarrow\operatorname*{colim}_{i\in I}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{fttf}'}(X_i/\mathcal{F}_i;\iota_*F)\longrightarrow\operatorname*{colim}_{i\in I}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ft}}(X_i/\mathcal{F}_i;F)$$

sont des quasi-isomorphismes.

Le problème étant local, on peut supposer, grâce au théorème 6.2.11(a), que $X/\mathcal{F}$ est associé à un (k,Δ)-schéma affine et essentiel X. (Bien entendu, Δ est un ensemble fini de dérivations qui commutent deux à deux et qui agissent trivialement sur k.) On peut aussi supposer que les schémas $Q_{i,n}$ sont affines pour tout $i\in I$ et $n\in\mathbb{N}\sqcup\{-1\}$. On définit un pro-objet semi-simplicial augmenté $(Q'_{j,\bullet}/\mathcal{L}'_{j,\bullet}\longrightarrow X'_j/\mathcal{F}'_j)_{j\in J}$ dans $\mathrm{Fttf}^{\mathcal{F}}/X$ de la manière suivante. L'ensemble J est donné par des couples $(i,B^\bullet)$ où $i\in I$ et $B^\bullet$ est une sous-$(\mathcal{O}(X),\Delta)$-algèbre semi-simpliciale coaugmentée de $\mathcal{O}(Q_{i,\bullet})$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}\sqcup\{-1\}$, $\mathrm{Spec}(B_n)\longrightarrow X$ est un (k,Δ)-morphisme de type fini en involution. Pour $j=(i,B^\bullet)$, on pose $Q'_{j,\bullet}=\mathrm{Spec}(B^\bullet)$. Par construction, on dispose d'un morphisme de pro-$X/\mathcal{F}$-feuilletages semi-simpliciaux augmentés $(Q_{i,\bullet})_{i\in I}\longrightarrow(Q'_{j,\bullet})_{j\in J}$ induisant un isomorphisme $\lim_{i\in I}Q_{i,\bullet}\simeq\lim_{j\in J}Q'_{j,\bullet}$. (Pour démontrer cela, on utilise le lemme 4.6.13 et le théorème de l'involutivité générique de Malgrange sous la forme la proposition 3.1.27.) En particulier, le Δ-schéma semi-simplicial $\lim_{j\in J}Q'_{j,\bullet}$ est une hyper-enveloppe universelle du Δ-corps algébriquement clos $\mathrm{colim}_{i\in I}\,\mathcal{O}(X_i)$ (qui coïncide avec $\mathrm{colim}_{j\in J}\,\mathcal{O}(X'_j)$).

D'après le théorème 4.6.18 et sa variante pour la topologie fttf$'$, on a des isomorphismes canoniques

$$\operatorname*{colim}_{i\in I}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{fttf}'}(X_i/\mathcal{F}_i;\iota_*F)\simeq\operatorname*{colim}_{i\in I}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{fttf}}(X_i/\mathcal{F}_i;\iota_*F)\simeq\operatorname*{colim}_{j\in J}\mathrm{Tot}\,F^\bullet(Q'_{j,\bullet}/\mathcal{L}'_{j,\bullet}).$$

Par ailleurs, d'après le théorème 6.8.11, on a un isomorphisme canonique

$$\operatorname*{colim}_{i\in I}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ft}}(X_i/\mathcal{F}_i;F)\simeq\operatorname*{colim}_{i\in I}\mathrm{Tot}\,F^\bullet(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet}).$$

Le résultat découle maintenant du fait que F est homotopiquement génériquement continu ce qui assure que le morphisme évident $\mathrm{colim}_{j\in J}\,F(Q'_{j,n}/\mathcal{L}'_{j,n})\longrightarrow\mathrm{colim}_{i\in I}\,F(Q_{i,n}/\mathcal{L}_{i,n})$ est un quasi-isomorphisme pour tout $n\in\mathbb{N}$. ∎

Corollaire 6.8.16. — *Soient $S/\mathcal{E}$ un k-feuilletage et $\mathcal{V}$ une sous-catégorie pleine de la catégorie des $S/\mathcal{E}$-feuilletages qui est admissible au sens de la définition 6.5.12. Soit F un complexe de préfaisceaux de*

Λ-modules sur $\mathscr{V}$ borné à gauche et homotopiquement génériquement continu. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le préfaisceau $\mathrm{H}^n_{\mathrm{ft}}(-;F)$ est génériquement continu.

Démonstration. — Soit $(Y_i/\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ comme dans la définition 6.8.14 et posons $Y/\mathcal{G} = \lim_{i\in I} Y_i/\mathcal{G}_i$. On doit montrer que le morphisme évident

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{H}^n_{\mathrm{ft}}(Y_i/\mathcal{G}_i;F) \longrightarrow \mathrm{H}^n_{\mathrm{ft}}(Y/\mathcal{G};F)$$

est un isomorphisme. Grâce au théorème 6.8.15, il revient au même de montrer que

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{H}^n_{\mathrm{fttf}}(Y_i/\mathcal{G}_i;(\iota_{Y_i/\mathcal{G}_i})_*\circ(\mathrm{e}_{Y_i/\mathcal{G}_i})_*F) \longrightarrow \mathrm{H}^n_{\mathrm{fttf}}(Y/\mathcal{G};(\iota_{Y/\mathcal{G}})_*\circ(\mathrm{e}_{Y/\mathcal{G}})_*F)$$

est un isomorphisme. On ne restreint pas la généralité en supposant que $(Y_i/\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ est un pro-$X/\mathcal{F}$-feuilletage diff-étale, pour un certain $X/\mathcal{F} \in \mathscr{V}$. On pose $F_0 = (\iota_{X/\mathcal{F}})_*\circ(\mathrm{e}_{X/\mathcal{F}})_*F$. On peut aussi supposer que $X/\mathcal{F}$ est associé à un Δ-schéma affine et que les Y_i sont aussi affines. Appelons $f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F}$ le morphisme structural. On dispose alors d'un morphisme évident

$$f_i^*F_0 \longrightarrow (\iota_{Y_i/\mathcal{G}_i})_*\circ(\mathrm{e}_{Y_i/\mathcal{G}_i})_*F \tag{6.21}$$

de préfaisceaux sur $\mathrm{Fttf}^{\mathcal{G}_i}/Y_i$. Étant donné que F est homotopiquement génériquement continu, le morphisme (6.21) induit des quasi-isomorphismes après évaluation en les pro-$Y_i/\mathcal{G}_i$-feuilletages diff-étales satisfaisant aux conditions (i)–(iii) de la définition 6.8.14. Ainsi, en appliquant le théorème 4.6.18 deux fois, une première fois à F_0 et au site $(\mathrm{Fttf}^{\mathcal{F}}/X,\mathrm{fttf})$, et une deuxième fois à $(\iota_{Y_i/\mathcal{G}_i})_*\circ(\mathrm{e}_{Y_i/\mathcal{G}_i})_*F$ et au site $(\mathrm{Fttf}^{\mathcal{G}_i}/Y_i,\mathrm{fttf})$, on trouve que le morphisme (6.21) induit un isomorphisme

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{fttf}}(\eta_{Y_i}/\mathcal{G}_i;F_0) \simeq \mathrm{H}^n_{\mathrm{fttf}}(\eta_{Y_i}/\mathcal{G}_i;(\iota_{Y_i/\mathcal{G}_i})_*\circ(\mathrm{e}_{Y_i/\mathcal{G}_i})_*F)$$

où, dans le premier membre, on emploie la convention 3.3.17. Le même raisonnement s'applique avec $Y/\mathcal{G}$ au lieu de $Y_i/\mathcal{G}_i$. On est donc ramené à montrer que

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{H}^n_{\mathrm{fttf}}(Y_i/\mathcal{G}_i;F_0) \longrightarrow \mathrm{H}^n_{\mathrm{fttf}}(Y/\mathcal{G};F_0)$$

est un isomorphisme, ce qui est évident. (On rappelle qu'on emploie la convention 3.3.17.) ■

Corollaire 6.8.17. — *Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse, quasi-compact et intègre. Soit $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet \longrightarrow X/\mathcal{F}$ un hyper-recouvrement pro-générique (au sens de la remarque 4.6.12) tel que Y_n est quasi-compact et intègre pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit F un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X$ borné à gauche et homotopiquement génériquement continu. Soit G un remplacement projectivement ft-fibrant de F. Alors, le morphisme évident*

$$G(\eta_X/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, G(\eta_{Y_\bullet}/\mathcal{G}_\bullet),$$

est un quasi-isomorphisme. (Ci-dessus, « η » est pris au sens de la notation 4.2.16.)

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que $X/\mathcal{F}$ est associé à un Δ-schéma essentiel. D'après le lemme 4.6.13, $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ est une limite filtrante d'hyper-recouvrements génériques (au sens de la définition 4.6.11). D'après le corollaire 6.8.16, il est donc suffisant de traiter le cas où $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique. Étant donné qu'un hyper-recouvrement générique est aussi un hyper-recouvrement ft-générique, le théorème 6.8.6 permet de conclure. ■

6.9. Les topologies ψ-Nisnevich et ψ-étale. —

Nous introduisons ici deux topologies bien plus grossières que la topologie feuilletée, à savoir la topologie ψ-Nisnevich et la topologie ψ-étale. Ces topologies serviront dans la section 7.

Comme d'habitude, on fixe un k-feuilletage $S/\mathcal{E}$ et une sous-catégorie pleine $\mathscr{V}$ de la catégorie des $S/\mathcal{E}$-feuilletages qui est admissible au sens de la définition 6.5.12. On commence d'abord par préciser ce que l'on entend par les topologies Zariski, Nisnevich et étale dans le contexte des feuilletages.

Définition 6.9.1. —

(a) *Une famille* $(f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F})_{i\in I}$ *de morphismes de k-feuilletages est appelée un* recouvrement Zariski *(resp.* Nisnevich, étale*) si elle est constituée de morphismes basiques et si la famille des morphismes sous-jacents* $(f_i : Y_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ *est un recouvrement Zariski (resp. Nisnevich, étale) au sens usuel. (En particulier, les* $f_i : Y_i \longrightarrow X$ *sont des immersions ouvertes (resp. sont étales), ce qui entraîne que les* $f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F}$ *sont sont des immersions ouvertes (resp. sont diff-étales).)*

(b) *Les recouvrements Zariski (resp. Nisnevich, étales) forment une prétopologie sur* $\mathscr{V}$. *La topologie qu'ils engendrent est appelée la* topologie Zariski *(resp.* Nisnevich, étale*). Elle sera désignée par* « Zar » *(resp.* « Nis », « ét »*) et son foncteur « faisceau associé » sera noté* $\mathrm{a}_{\mathrm{Zar}}$ *(resp.* $\mathrm{a}_{\mathrm{Nis}}$, $\mathrm{a}_{\mathrm{\acute{e}t}}$*). Un site de la forme* $(\mathscr{V},\mathrm{Zar})$ *(resp.* $(\mathscr{V},\mathrm{Nis})$, $(\mathscr{V},\mathrm{\acute{e}t})$*) est appelé un* site Zariski *(resp.* Nisnevich, étale*).*

Remarque 6.9.2. — Précisons qu'un recouvrement étale d'un schéma S est un recouvrement Nisnevich si, pour tout point $s \in S$, il existe un sous-schéma localement fermé constructible dans S contenant s et au-dessus duquel le recouvrement est scindé. (Voir [**58**, §3.1, Lemma 1.5] qui permet de comparer avec la définition originale dans le cas noethérien.) □

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de la sous-section, on travaillera exclusivement avec des k-feuilletages singuliers. Ceci est nécessaire pour pouvoir considérer des complétions faibles (voir la définition 6.3.10). En particulier, on supposera que les objets de $\mathscr{V}$ sont singuliers en tant que k-feuilletages.

Définition 6.9.3. — *La* topologie ψ-Nisnevich *(resp.* ψ-étale*) sur les k-feuilletages singuliers est la topologie engendrée par les trois types de recouvrements suivants :*

(a) *les recouvrements Nisnevich (resp. étales) comme dans la définition 6.9.1(a) ;*

(b) *les paires* $(U/\mathcal{F} \hookrightarrow X/\mathcal{F},\ \widehat{X}_Z/\mathcal{F} \longrightarrow X/\mathcal{F})$ *avec X affine,* $Z \subset X$ *un fermé constructible,* $U = X \smallsetminus Z$ *l'ouvert complémentaire et* $\widehat{X}_Z/\mathcal{F}$ *le complété faible de* $X/\mathcal{F}$ *en* Z *;*

(c) *les singletons* $(X_0/\mathcal{F} \hookrightarrow X/\mathcal{F})$ *constitués d'une nil-immersion fermée basique et diff-étale.*

La topologie ψ-Nisnevich (resp. ψ-étale) sera désignée par « ψ-Nis » *(resp.* « ψ-ét »*) et son foncteur « faisceau associé » sera noté* $\mathrm{a}_{\psi\text{-Nis}}$ *(resp.* $\mathrm{a}_{\psi\text{-\acute{e}t}}$*). Un site de la forme* $(\mathscr{V},\psi\text{-Nis})$ *(resp.* $(\mathscr{V},\psi\text{-\acute{e}t})$*) est appelé un* site ψ-Nisnevich *(resp.* ψ-étale*).*

Lemme 6.9.4. — *Gardons les hypothèses et les notations de la définition 6.9.3. Considérons la classe des familles de morphismes diff-étales dans* $\mathscr{V}$ *qui peuvent être raffinées par une composition finie de recouvrements du type (a)–(c). Alors, cette classe est une prétopologie sur* $\mathscr{V}$. *Les familles dans cette classe sont appelées les* recouvrements ψ-Nisnevich *(resp.* ψ-étales*).*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que la classe décrite dans l'énoncé est stable par changement de base. Les recouvrements du type (a) et (c) sont clairement stables par changement de base. Il reste donc à traiter les recouvrements du type (b). On se donne une paire $(U/\mathcal{F} \hookrightarrow X/\mathcal{F},\ \widehat{X}_Z/\mathcal{F} \longrightarrow X/\mathcal{F})$ comme dans la définition 6.9.3 ainsi qu'un morphisme de k-feuilletages $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$. On pose $V = U \times_X Y$ et on cherche à montrer que la paire

$$(V/\mathcal{Y} \hookrightarrow Y/\mathcal{G},\ (Y/\mathcal{G}) \times_{X/\mathcal{F}} (\widehat{X}_Z/\mathcal{F}) \longrightarrow Y/\mathcal{G}) \tag{6.22}$$

est dans la classe décrite dans l'énoncé. On se ramène facilement au cas Y affine. En posant $T = Y \times_X Z$, il est clair que la paire $(V/\mathcal{Y} \hookrightarrow Y/\mathcal{G},\ \widehat{Y}_Z/\mathcal{G} \longrightarrow Y/\mathcal{G})$ raffine (6.22), ce qui permet de conclure. ■

Proposition 6.9.5. — *On note* $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}} \subset \mathscr{V}$ *la sous-catégorie pleine ayant pour objets les* $S/\mathcal{E}$*-feuilletages qui sont noethériens de dimension de Krull finie en tant que k-feuilletages. On munit* $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$ *de la topologie induite de la topologie ψ-Nisnevich (resp. ψ-étale) sur* $\mathscr{V}$ *; cette topologie induite sera encore appelée ψ-Nisnevich (resp. ψ-étale) et sera notée* ψ-Nis *(resp.* ψ-ét*). Alors, le foncteur d'inclusion* $\iota : (\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}} \hookrightarrow \mathscr{V}$ *est continu et cocontinu (au sens de* [**4**, Exposé III, Définitions 1.1 et 2.1]*) relativement aux topologies ψ-Nisnevich (resp. ψ-étales). En particulier, on a les propriétés suivantes.*

(a) *Le foncteur* $\iota_* : \mathbf{Shv}_\tau(\mathscr{V}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_\tau((\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}})$ *est exact pour* $\tau = \psi\text{-Nis}$ *(resp.* $\tau = \psi\text{-\acute{e}t}$*).*

(b) *Le foncteur* $\iota_* : \mathbf{PSh}(\mathscr{V}) \longrightarrow \mathbf{PSh}((\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}})$ *commute aux foncteurs de faisceautisation pour les topologies ψ-Nisnevich (resp. ψ-étales).*

Démonstration. — Le foncteur ι est continu par la définition même des topologies induites (voir [**4**, Exposé III, §3.1]). D'après [**4**, Exposé III, Corollaire 3.3], une famille dans $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$ est couvrante pour la topologie ψ-Nisnevich (resp. ψ-étale) si et seulement si elle est couvrante en tant que famille dans $\mathscr{V}$. Il découle aussitôt du lemme 6.9.4 que la condition (COC) de [**4**, Exposé III, Définition 2.1] est satisfaite, ce qui montre que ι est cocontinu. Ceci étant, les propriétés (a) et (b) découlent de [**4**, Exposé III, Proposition 2.3(1, 2)]. (En effet, puisque ι est continu relativement à $\tau \in \{\psi\text{-Nis}, \psi\text{-ét}\}$, on a $\iota_* = \mathrm{a}_\tau \circ \iota_* \circ \mathrm{o}_\tau$.) ∎

Proposition 6.9.6. — *Soit* $\tau \in \{\mathrm{Zar}, \mathrm{Nis}, \text{ét}, \psi\text{-Nis}, \psi\text{-ét}\}$. *La donnée, pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage $X/\mathcal{F} \in \mathscr{V}$, du petit site* $(\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X, \tau)$ *définit une P-structure (au sens de* [**10**, Définition 4.4.57]*) sur le site* $(\mathscr{V}, \tau)$.

Démonstration. — La preuve de la proposition 6.6.1 s'étend littéralement. ∎

Corollaire 6.9.7. — *Les analogues évidents des corollaires 6.6.3, 6.6.4 et 6.6.6 valent également pour les topologies* $\tau \in \{\mathrm{Zar}, \mathrm{Nis}, \text{ét}, \psi\text{-Nis}, \psi\text{-ét}\}$.

Démonstration. — Les preuves des corollaires 6.6.3, 6.6.4 et 6.6.6 s'étendent littéralement. ∎

On continue avec un énoncé technique concernant la topologie ψ-Nisnevich. Cet énoncé donne accès aux résultats généraux dégagés par Voevodsky [**69**] concernant les « topologies complètement décomposables ». Pour la notion de *cd-structure*, nous renvoyons le lecteur à [**69**, Definition 2.1].

Proposition 6.9.8. — *On note $(\mathscr{V})^{\mathrm{qc}} \subset \mathscr{V}$ (resp. $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}} \subset \mathscr{V}$) la sous-catégorie pleine ayant pour objets les $S/\mathcal{E}$-feuilletages qui sont quasi-compacts (resp. noethériens de dimension de Krull finie) en tant que k-feuilletages. Alors, la topologie ψ-Nisnevich sur $(\mathscr{V})^{\mathrm{qc}}$ (resp. $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$ – voir la proposition 6.9.5) est associée à la cd-structure donnée par les carrés distingués suivants, avec $X/\mathcal{F}$ dans $(\mathscr{V})^{\mathrm{qc}}$ (resp. $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$).*

(a) Les carrés cartésiens de morphismes basiques

$$\begin{tikzcd} V/\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & Y/\mathcal{F} \arrow[d, "e"] \\ U/\mathcal{F} \arrow[r, "j"] & X/\mathcal{F} \end{tikzcd}$$

avec $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte et $e : Y \longrightarrow X$ un morphisme étale induisant un isomorphisme $(Y \smallsetminus V)_{\mathrm{réd}} \simeq (X \smallsetminus U)_{\mathrm{réd}}$.

(b) Les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} (\widehat{U} \smallsetminus F)/\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & (\widehat{X}_Z \smallsetminus F)/\mathcal{F} \arrow[d] \\ (U \smallsetminus E)/\mathcal{F} \arrow[r] & (X \smallsetminus E)/\mathcal{F} \end{tikzcd}$$

avec X affine, $Z \subset X$ un fermé constructible, $U = X \smallsetminus Z$ et $\widehat{U} = \widehat{X}_Z \smallsetminus Z$, et $E \subset X$ et $F \subset \widehat{X}_Z$ des fermés constructibles tels que F contient l'image inverse de E et $F \cap Z = E \cap Z$. (Bien entendu, Z est identifié à son image inverse par $\widehat{X}_Z \longrightarrow X$.)

(c) La carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d, equal] & X_0/\mathcal{F} \arrow[d, "i"] \\ \varnothing \arrow[r] & X/\mathcal{F} \end{tikzcd}$$

avec $i : X_0/\mathcal{F} \hookrightarrow X/\mathcal{F}$ une nil-immersion fermée basique et diff-étale.

Cette cd-structure est complète (au sens de [**69**, Definition 2.3]*) et régulière (au sens de* [**69**, Definition 2.10]*). Dans le cas de $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$, cette cd-structure est aussi bornée (au sens de* [**69**, Definition 2.22]*).*

Démonstration. — On divise la preuve en plusieurs parties.

Partie A. — Si dans (b), on se restreint aux carrés tels que $E = F = \varnothing$, on obtient une *cd*-structure plus petite mais qui détermine la même topologie sur $(\mathscr{V})^{\mathrm{qc}}$ (resp. $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$). En effet, supposons que dans (b) le fermé constructible E est défini par l'annulation des fonctions $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{O}(X)$, et notons $X_i = X[f_i^{-1}]$, $U_i = U[f_i^{-1}]$ et $Z_i = Z[f_i^{-1}]$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors, le recouvrement associé à un carré comme dans (b) se raffine par le recouvrement Zariski $(X_i/\mathcal{F} \hookrightarrow (X \smallsetminus E)/\mathcal{F})_{i=1,\cdots,n}$, composé avec les recouvrements associés aux carrés

$$\begin{tikzcd} \widehat{(U_i)}/\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{(X_i)}_{Z_i}/\mathcal{F} \arrow[d] \\ U_i/\mathcal{F} \arrow[r] & X_i/\mathcal{F}. \end{tikzcd}$$

(Utiliser le lemme 6.4.6 pour voir que les images inverses de F dans les $\widehat{(X_i)}_{Z_i}$ sont vides.) Le fait que la topologie ψ-Nisnevich sur $(\mathscr{V})^{\mathrm{qc}}$ (resp. $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$) coïncide avec la topologie associée à la *cd*-structure donnée par (a)–(c) découle maintenant de la définition 6.9.3 et du fait que la topologie Nisnevich sur $(\mathscr{V})^{\mathrm{qc}}$ (resp. $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$) est associée à la *cd*-structure donnée par (a). (Pour démontrer ce fait, on se ramène aussitôt à l'énoncé analogue pour les schémas et on utilise [**70**, Proposition 2.17].)

(À ce stade, le lecteur peut se demander pourquoi on ne se restreint pas dans (b) aux carrés tels que $E = F = \varnothing$, puisque ces derniers suffisent bien pour engendrer la topologie ψ-Nisnevich. La réponse sera donnée dans la partie D : on doit considérer tous les carrés dans (b) si l'on veut que la structure de densité naturelle sur $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$ soit réductrice au sens de [**69**, Definition 2.22].)

Partie B. — Pour montrer que la *cd*-structure donnée par (a)–(c) est complète, nous utilisons le critère [**69**, Lemma 2.4]. Étant donné que les carrés distingués du type (a) et (c) sont stables par changement de base, il reste à traiter le cas d'un carré distingué du type (b). En raisonnant comme dans la partie A, on se ramène au cas $E = F = \varnothing$. Soit $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ un morphisme dans $(\mathscr{V})^{\mathrm{qc}}$ (resp. $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$). On doit montrer que l'image inverse par f du crible $C \subset X/\mathcal{F}$ engendré par la paire $(U/\mathcal{F} \hookrightarrow X/\mathcal{F}, \widehat{X}_Z/\mathcal{F} \longrightarrow X/\mathcal{F})$ contient un recouvrement simple (au sens de [**69**, Definition 2.2]). Étant donné que les recouvrements Zariski se raffinent par des recouvrements simples, on peut supposer que Y est affine. Il est alors clair que le crible $f^{-1}(C) \subset Y/\mathcal{G}$ contient la paire $(V/\mathcal{G} \hookrightarrow Y/\mathcal{G}, \widehat{Y}_T/\mathcal{G} \longrightarrow Y/\mathcal{G})$, avec $V = f^{-1}(U)$ et $T = f^{-1}(Z)$.

Partie C. — Pour montrer que la *cd*-structure donnée par (a)–(c) est régulière, on applique le critère [**69**, Lemma 2.11] aux carrés distingués du type (a) et (c), et on utilise [**69**, Lemma 2.12] pour pouvoir se concentrer sur les carrés distingués du type (b). Pour simplifier les notations, on traite seulement le cas $E = F = \varnothing$. Étant donné que le foncteur $\iota_* : \mathbf{Shv}_{\psi\text{-Nis}}((\mathscr{V})^{\mathrm{qc}}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\psi\text{-Nis}}((\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}})$ est exact (voir la proposition 6.9.5), il suffit de traiter le cas de $(\mathscr{V})^{\mathrm{qc}}$. Il s'agit alors de montrer que la paire associée au carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \widehat{U}/\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{X}_Z/\mathcal{F} \arrow[d] \\ (\widehat{U}/\mathcal{F}) \times_{(U/\mathcal{F})} (\widehat{U}/\mathcal{F}) \arrow[r] & (\widehat{X}_Z/\mathcal{F}) \times_{(X/\mathcal{F})} (\widehat{X}_Z/\mathcal{F}) \end{tikzcd} \tag{6.23}$$

est un recouvrement ψ-Nisnevich. On fixe un n-uplet $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{O}(X)^n$ tel que $Z = \mathrm{Z}(\underline{a})$ et un système d'indéterminées $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$. On rappelle que $\widehat{X}_Z/\mathcal{F} = (X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}) \times_{X[\mathbf{t}]/\mathcal{F},\underline{a}} (X/\mathcal{F})$. Il s'ensuit que le carré (6.23) est le changement de base suivant $\underline{a} : X/\mathcal{F} \hookrightarrow X[\mathbf{t}]/\mathcal{F}$ du carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X[[\mathbf{t}]]^{\circ}/\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{diag}"] & X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F} \arrow[d, "\mathrm{diag}"] \\ (X[[\mathbf{t}]]^{\circ}/\mathcal{F}) \times_{(X[\mathbf{t}]^{\circ}/\mathcal{F})} (X[[\mathbf{t}]]^{\circ}/\mathcal{F}) \arrow[r] & (X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}) \times_{(X[\mathbf{t}]/\mathcal{F})} (X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}) \end{tikzcd} \tag{6.24}$$

où l'on a posé $X[\mathbf{t}]^\circ = X[\mathbf{t}] \smallsetminus X$ et $X[[\mathbf{t}]]^\circ = X[[\mathbf{t}]] \smallsetminus X$. Il est donc suffisant de montrer que la paire associée au carré (6.24) est un recouvrement ψ-Nisnevich. On pose

$$Y = X[[\mathbf{t}]] \times_{X[\mathbf{t}]} X[[\mathbf{t}]] \qquad \text{et} \qquad Y^\circ = X[[\mathbf{t}]]^\circ \times_{X[\mathbf{t}]^\circ} X[[\mathbf{t}]]^\circ = Y \smallsetminus X.$$

D'après le lemme 6.9.9 ci-dessous, $t_1, \ldots, t_n$ est une suite régulière dans $\mathcal{O}(Y)$. Grâce au lemme 6.3.13, on a donc des isomorphismes

$$\mathcal{O}(\widehat{Y}_{\underline{t}}) \simeq \lim_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(Y)/(\underline{t})^{r+1} \simeq \mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}]].$$

Autrement dit, la flèche verticale à droite dans le carré (6.24) identifie $X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}$ avec le complété faible de $Y/\mathcal{F}$ le long de son fermé constructible $X \subset Y$. Ainsi, la paire $(Y^\circ/\mathcal{F} \hookrightarrow Y/\mathcal{F},\ X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F} \longrightarrow Y/\mathcal{F})$ associée à (6.24) est un recouvrement ψ-Nisnevich (du type (b) comme dans la définition 6.9.3).

Partie D. — Il reste à montrer, dans le cas de $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$, que la *cd*-structure est bornée (au sens de [**69**, Definition 2.22]). Pour $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage noethérien, on note $D_i(X/\mathcal{F})$ l'ensemble des immersions ouvertes $U/\mathcal{F} \hookrightarrow X/\mathcal{F}$ telles que le fermé complémentaire $X \smallsetminus U \subset X$ est de codimension $\geqslant i$. Ceci définit une densité localement finie sur $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$ au sens de [**69**, Definition 2.20]. Il reste à montrer qu'avec cette densité tout carré distingué du type (a)–(c) est « reducing » au sens de [**69**, Définition 2.21]. On traite seulement le cas des carrés du type (b). On suppose donc donnés des ouverts $U' \subset U \smallsetminus E$, $V' \subset \widehat{U} \smallsetminus F$ et $Y' \subset \widehat{X}_Z \smallsetminus F$ dont les complémentaires A, B et C sont des fermés de codimension $i+1$, i et $i+1$ respectivement. Étant donné que le morphisme $\widehat{X}_Z \longrightarrow X$ est plat (car X est noethérien), on peut remplacer V' par son intersection avec l'image inverse de U' et supposer que B contient l'image inverse de A, ce qui entraîne alors que $\overline{B}$ contient l'image inverse de $\overline{A}$. Par ailleurs, puisque $\overline{B}$ est de codimension $\geqslant i$ dans $\widehat{X}_Z$ et que $D = \overline{B} \cap Z$ est partout de codimension non nulle dans $\overline{B}$, on déduit que D est de codimension $\geqslant i+1$ dans $\widehat{X}_Z$. Il est donc aussi de codimension $\geqslant i+1$ dans X. Ceci étant, le carré

$$\begin{array}{ccc}
(\widehat{U} \smallsetminus (\overline{B} \cup F))/\mathcal{F} & \longrightarrow & (\overline{X}_Z \smallsetminus (\overline{B} \cup F))/\mathcal{F} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
(U \smallsetminus (\overline{A} \cup E))/\mathcal{F} & \longrightarrow & (X \smallsetminus (\overline{A} \cup D \cup E))/\mathcal{F}
\end{array}$$

est distingué du type (b), domine le carré de départ et vérifie la propriété requise par [**69**, Définition 2.21]. Ceci termine la preuve de la proposition. ■

Le lemme suivant a servi dans la partie A de la preuve de le proposition 6.9.8.

Lemme 6.9.9. — *Soient A un anneau et $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ un système d'indéterminées. Alors, la suite $t_1, \cdots, t_n$ est régulière dans $A[[\mathbf{t}]] \otimes_{A[\mathbf{t}]} A[[\mathbf{t}]]$.*

Démonstration. — Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a un isomorphisme évident

$$(A[[\mathbf{t}]] \otimes_{A[\mathbf{t}]} A[[\mathbf{t}]])/(t_1, \cdots, t_i) \simeq A[[t_{i+1}, \cdots, t_m]] \otimes_{A[t_{i+1}, \cdots, t_m]} A[[t_{i+1}, \cdots, t_m]].$$

Il est donc suffisant de montrer que t_1 n'est pas un diviseur de zéro dans le $A[\mathbf{t}]$-module $A[[\mathbf{t}]] \otimes_{A[\mathbf{t}]} A[[\mathbf{t}]]$. Pour ce faire, on forme la suite exacte courte de $A[\mathbf{t}]$-modules

$$0 \longrightarrow A[[t_2, \cdots, t_n]][t_1] \longrightarrow A[[\mathbf{t}]] \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

En posant $B = A[t_2, \cdots, t_n]$ et $C = A[[t_2, \cdots, t_n]]$, on en déduit une suite exacte

$$\mathrm{Tor}_1^{A[\mathbf{t}]}(A[[\mathbf{t}]], L) \longrightarrow C[[t_1]] \otimes_B C \longrightarrow A[[\mathbf{t}]] \otimes_{A[\mathbf{t}]} A[[\mathbf{t}]] \longrightarrow A[[\mathbf{t}]] \otimes_{A[\mathbf{t}]} L \longrightarrow 0.$$

Clairement, le $A[\mathbf{t}]$-module L est uniquement t_1-divisible. Il en est donc de même de $\mathrm{Tor}_1^{A[\mathbf{t}]}(A[[\mathbf{t}]], L)$ et $A[[\mathbf{t}]] \otimes_{A[\mathbf{t}]} L$. Par ailleurs, grâce au lemme 6.4.8, la multiplication par t_1 est injective sur $C[[t_1]] \otimes_B C$. Ces propriétés entraînent que la multiplication par t_1 est injective sur $A[[\mathbf{t}]] \otimes_{A[\mathbf{t}]} A[[\mathbf{t}]]$ comme souhaité. ■

Définition 6.9.10. — *Un carré de k-feuilletages singuliers quasi-compacts est dit* ψ-distingué *s'il s'obtient par changement de base d'un carré du type (a), (b) ou (c) comme dans la proposition 6.9.8.*

Corollaire 6.9.11. — *Supposons donné un carré* ψ*-distingué*

$$\begin{array}{ccc} V/\mathcal{G} & \xrightarrow{j} & Y/\mathcal{G} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ U/\mathcal{F} & \xrightarrow{i} & X/\mathcal{F} \end{array} \tag{6.25}$$

dans $\mathscr{V}$. *On a alors les propriétés suivantes.*

(i) L'image de (6.25) *par le plongement de Yoneda* $\mathscr{V} \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\psi\text{-Nis}}(\mathscr{V})$ *est cartésien et cocartésien.*

(ii) Soit F *un complexe de préfaisceaux de* Λ*-modules projectivement* ψ-Nis*-fibrant. Alors,* F *transforme le carré* (6.25) *en un carré homotopiquement cartésien et cocartésien dans* $\mathbf{Cpl}(\Lambda)$.

Démonstration. — Il découle formellement de la proposition 6.9.8 que la classe des carrés ψ-distingués est une *cd*-structure qui engendre la topologie ψ-Nisnevich et qui est complète et régulière. L'assertion (i) est donc un cas particulier de [**69**, Corollary 2.16]. L'assertion (ii) découle facilement de (i). ■

Corollaire 6.9.12. — *Soit* F *un faisceau* ψ*-Nisnevich de* Λ*-modules sur* $\mathscr{V}$ *et soit* $X/\mathcal{F}$ *un* $S/\mathcal{E}$*-feuilletage appartenant à* $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$. *Alors,* $\mathrm{H}^i_{\psi\text{-Nis}}(X/\mathcal{F}; F) = 0$ *pour* $i > \mathrm{krdim}(X)$.

Démonstration. — Vu la proposition 6.9.8, ceci découle de [**69**, Theorem 2.27]. ■

Pour faire le lien entre la topologie ψ-Nisnevich et la topologie ψ-étale (voir la proposition 6.9.14 ci-dessous), on a besoin du résultat suivant.

Lemme 6.9.13. — *Soit* $X/\mathcal{F}$ *un* k*-feuilletage singulier et soit* $e : X' \longrightarrow X$ *un revêtement fini étale. Alors, tout recouvrement* ψ*-Nisnevich de* $X'/\mathcal{F}$ *se raffine par le « pull-back », suivant le morphisme basique* $e : X'/\mathcal{F} \longrightarrow X/\mathcal{F}$, *d'un recouvrement* ψ*-Nisnevich* $(f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F})_{i\in I}$ *de* X *composé avec des recouvrements ouvert-fermés des* $(X' \times_X Y_i)/\mathcal{G}_i$.

Démonstration. — Il suffit de traiter séparément les recouvrements ψ-Nisnevich du type (a)–(c) de $X'/\mathcal{F}$ comme dans la définition 6.9.3. Pour les recouvrements du type (a), on se ramène aussitôt à l'énoncé analogue pour les schémas qui découle facilement du fait qu'un schéma fini au-dessus d'un schéma local hensélien est une somme disjointe de schémas locaux henséliens. Pour les recouvrements du type (c), on se ramène au cas où e est un recouvrement galoisien de groupe de Galois G. Soit $i' : X'_0/\mathcal{F} \hookrightarrow X'/\mathcal{F}$ une nil-immersion fermée basique et diff-étale. Quitte à remplacer le sous-schéma $X'_0 \subset X'$ par l'intersection de tous ses translatés par $g \in G$, on peut supposer qu'il est globalement G-invariant. Par descente galoisienne, il existe alors une nil-immersion fermée $i : X_0 \hookrightarrow X$ qui redonne i' par changement de base suivant e. Il est alors immédiat que la nil-immersion basique $i : X_0/\mathcal{F} \hookrightarrow X/\mathcal{F}$ est diff-étale, ce qui permet de conclure.

Il reste à traiter le cas des recouvrements du type (b). Soit $Z' \subset X'$ un fermé constructible et expliquons comment traiter le cas du recouvrement

$$((X' \smallsetminus Z')/\mathcal{F} \hookrightarrow X'/\mathcal{F},\ \widehat{X}'_{Z'}/\mathcal{F} \longrightarrow X'/\mathcal{F}). \tag{6.26}$$

Soit $Z \subset X$ un fermé constructible qui contient l'image de Z'. (On peut prendre par exemple $Z = e(Z')$, mais il sera utile d'avoir la possibilité de choisir des Z plus grands dans l'argument qui suit.) Il existe alors une suite décroissante de fermés constructibles $Z = Z_0 \supset \cdots \supset Z_n = \varnothing$ telle que, pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$, le morphisme $(Z'_i \smallsetminus Z'_{i+1})_{\mathrm{réd}} \longrightarrow (Z_i \smallsetminus Z_{i+1})_{\mathrm{réd}}$ est fini étale. (Bien entendu, $Z'_i = Z' \times_Z Z_i$.) On raisonne par récurrence sur l'entier n. Lorsque $n = 0$, le fermé Z' est vide et il n'y a rien à démontrer. On suppose donc que $n \geqslant 1$ est que le résultat qu'on cherche à montrer est connu lorsque le fermé Z admet une filtration de longueur moindre avec la même propriété.

Puisque $Z'_{n-1} \longrightarrow Z_{n-1}$ est fini étale, l'immersion fermée $Z'_{n-1} \hookrightarrow X' \times_X Z_{n-1}$ est aussi ouverte. Ainsi, quitte à remplacer X par les sources d'un recouvrement Nisnevich affine et X' par ses changements de base, on peut supposer qu'il existe une décomposition en somme disjointe $X' = X'^{+} \coprod X'^{-}$ telle que $Z'_{n-1} = X'^{+} \times_X Z_{n-1}$. Clairement, il suffit de traiter les revêtements finis étales $X'^{+} \longrightarrow X$ et $X'^{-} \longrightarrow X$ séparément. On peut donc supposer que $Z'_{n-1} = X' \times_X Z_{n-1}$ ou que $Z'_{n-1} = \varnothing$. Dans le second cas, on peut remplacer la filtration de Z par $Z = Z_0 \supset \cdots \supset Z_{n-1} = \varnothing$ et conclure par l'hypothèse de récurrence. Ceci étant, on peut donc supposer que $Z'_{n-1} = X' \times_X Z_{n-1}$ dans la suite.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $X \smallsetminus Z_{n-1}$ par des ouverts affines et considérons le recouvrement ψ-Nisnevich de $X/\mathcal{F}$ donné par les inclusions $U_i/\mathcal{F} \hookrightarrow X/\mathcal{F}$, pour $i \in I$, et le morphisme $\widehat{X}_{Z_{n-1}}/\mathcal{F} \longrightarrow X/\mathcal{F}$. Il est suffisant de traiter les situations obtenues en remplaçant X par l'un des U_i, pour $i \in I$, ou par $\widehat{X}_{Z_{n-1}}$ et X' par $X' \times_X U_i$ ou par $X' \times_X \widehat{X}_{Z_{n-1}} \simeq \widehat{X}'_{Z'_{n-1}}$ respectivement. Dans les premiers cas, on peut encore invoquer l'hypothèse de récurrence pour conclure. Dans le dernier cas, on se retrouve dans la situation où le k-schéma X' est faiblement complet le long de Z'_{n-1}. D'après le lemme 6.4.5, X' est aussi faiblement complet le long de Z', i.e., $\widehat{X}'_{Z'} \simeq X'$. Le récouvrement (6.26) est alors scindé et il ne reste plus rien à démontrer. ■

Proposition 6.9.14. — *Soit $\mathscr{R} = (f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F})_{i\in I}$ un recouvrement ψ-étale d'un k-feuilletage singulier $X/\mathcal{F}$. Il existe un recouvrement ψ-Nisnevich $(g_j : Z_j/\mathcal{H}_j \longrightarrow X/\mathcal{F})_{j\in J}$ et des revêtements finis étales surjectifs $e_j : Z'_j \longrightarrow Z_j$ tels que le recouvrement ψ-étale $(g_j \circ e_j : Z'_j/\mathcal{H}_j \longrightarrow X/\mathcal{F})_{j\in J}$ raffine $\mathscr{R}$.*

Démonstration. — Le lemme 6.9.13 entraîne que la conclusion de l'énoncé est stable par la composition des recouvrements ψ-étales. Il suffit donc de traiter séparément les recouvrements ψ-étales du type (a)–(c) de $X/\mathcal{F}$ comme dans la définition 6.9.3. Pour les recouvrements ψ-étales du type (a), on se ramène aussitôt à l'énoncé analogue pour les schémas (et leurs topologies Nisnevich et étale) qui découle facilement du fait qu'un recouvrement étale d'un schéma local hensélien se raffine par un revêtement fini étale surjectif (voir par exemple la dernière assertion de [**61**, Chapitre VII, §3, Proposition 3]). Le cas des recouvrements ψ-étales du type (b) et (c) est évident puisque ce sont déjà des recouvrements ψ-Nisnevich. ■

Corollaire 6.9.15. — *Supposons que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Alors, le foncteur d'inclusion*

$$\mathbf{Shv}_{\psi\text{-ét}}(\mathscr{V};\Lambda) \hookrightarrow \mathbf{Shv}_{\psi\text{-Nis}}(\mathscr{V};\Lambda)$$

est exact.

Démonstration. — Le foncteur d'inclusion est exact à gauche. Il reste donc à montrer qu'une surjection de faisceaux ψ-étales de Λ-modules est aussi une surjection de faisceaux ψ-Nisnevich.

Soit $s : F \twoheadrightarrow G$ une surjection de faisceaux ψ-étales sur $\mathscr{V}$. On doit montrer que s est surjective localement pour la topologie ψ-Nisnevich. Soit $\beta \in G(X/\mathcal{F})$ une section locale de G. On peut trouver un recouvrement ψ-étale $\mathscr{R} = (f_i : Y_i/\mathcal{G}_i \longrightarrow X/\mathcal{F})_{i\in I}$ et des sections $\alpha_i \in F(Y_i/\mathcal{G}_i)$ telles que $s(\alpha_i) = \beta|_{Y_i/\mathcal{G}_i}$. D'après la proposition 6.9.14, on peut raffiner $\mathscr{R}$ par une famille $(g_j \circ e_j : Z'_j/\mathcal{H}_j \longrightarrow X/\mathcal{F})_{j\in J}$ avec $e_j : Z'_j \longrightarrow Z_j$ des revêtements finis étales surjectifs et $(g_j : Z_j/\mathcal{H}_j \longrightarrow X/\mathcal{F})_{j\in J}$ un recouvrement ψ-Nisnevich. Ainsi, on dispose de sections $\gamma'_j \in F(Z'_j/\mathcal{H}_j)$ telles que $s(\gamma'_j) = \beta|_{Z'_j/\mathcal{H}_j}$.

On peut supposer que les revêtements $e_j : Z'_j \longrightarrow Z_j$ sont galoisiens et on note Γ_j leurs groupes de Galois. Puisque F est un faisceau ψ-étale, la section

$$\frac{1}{\mathrm{card}(\Gamma_j)} \cdot \sum_{\sigma\in\Gamma_j} \sigma^*(\gamma'_j) \;\in\; F(Z'_j/\mathcal{H}_j)$$

est la restriction d'une unique section $\gamma_j \in F(Z_j/\mathcal{H}_j)$ et on a $s(\gamma_j) = \beta|_{Z_j/\mathcal{H}}$ comme souhaité. ■

L'énoncé ci-dessous est une conséquence directe du corollaire 6.9.15.

Corollaire 6.9.16. — *Supposons que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Soit F un faisceau ψ-étale de Λ-modules sur $\mathscr{V}$. Alors, pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage $X/\mathcal{F}$ appartenant à $\mathscr{V}$, le morphisme évident*

$$\mathrm{H}^*_{\psi\text{-Nis}}(X/\mathcal{F};F) \longrightarrow \mathrm{H}^*_{\psi\text{-ét}}(X/\mathcal{F};F)$$

est un isomorphisme.

Corollaire 6.9.17. — *Supposons que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Soit F un faisceau ψ-étale de Λ-modules sur $\mathscr{V}$ et soit $X/\mathcal{F}$ un $S/\mathcal{E}$-feuilletage appartenant à $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$. Alors, $\mathrm{H}^i_{\psi\text{-ét}}(X/\mathcal{F};F) = 0$ pour $i >$ $\mathrm{krdim}(X)$.*

Démonstration. — C'est la conjonction des corollaires 6.9.12 et 6.9.16. ■

Proposition 6.9.18. — *Soit $\tau \in \{\psi\text{-Nis}, \psi\text{-ét}\}$ et, lorsque $\tau = \psi$-ét, supposons que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Alors, pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage $X/\mathcal{F}$ appartenant à $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$, les foncteurs*

$$\mathrm{H}^i_\tau(X/\mathcal{F};-) : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathscr{V};\Lambda)) \longrightarrow \mathbf{Mod}(\Lambda),$$

pour $i \in \mathbb{Z}$, commutent aux colimites filtrantes.

Démonstration. — Étant donné que le foncteur $\mathbf{Shv}_{\psi\text{-ét}}(\mathscr{V}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\psi\text{-Nis}}(\mathscr{V})$ commute aux colimites filtrantes (car les topologies ψ-Nisnevich et ψ-étales sont quasi-compactes sur $(\mathscr{V})^{\mathrm{qc}}$), on peut se ramener, grâce au corollaire 6.9.16, à traiter uniquement le cas de la topologie ψ-Nisnevich. Appelons $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth},\leqslant N}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{V}$ formée des $S/\mathcal{E}$-feuilletages qui sont, en tant que k-feuilletages, noethériens et de dimension de Krull $\leqslant N$. La proposition 6.9.5 reste vraie si l'on remplace $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$ par $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth},\leqslant N}$. Le corollaire 6.9.12 entraîne alors que le site $((\mathscr{V})^{\mathrm{noeth},\leqslant \mathrm{N}}, \psi\text{-Nis})$ et de dimension cohomologique $\leqslant N$. Or, les $\mathrm{H}^i_{\psi\text{-Nis}}(X/\mathcal{F}; -)$ se calculent après restriction à ce site dès que $N \geqslant \mathrm{krdim}(X)$. Le résultat recherché est maintenant une conséquence de [**10**, Corollaire 4.5.61]. ∎

Corollaire 6.9.19. — *Gardons les hypothèses et les notations de la proposition 6.9.18. Soit $(F_i)_{i\in I}$ un système inductif filtrant dans $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathscr{V};\Lambda))$ et supposons que chaque F_i est projectivement τ-fibrant. On pose $F = \mathrm{colim}_{i\in I} F_i$ et on choisit une équivalence τ-locale $F \longrightarrow G$ avec G projectivement τ-fibrant. Alors, pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage $X/\mathcal{F}$ appartenant à $(\mathscr{V})^{\mathrm{noeth}}$, $F(X/\mathcal{F}) \longrightarrow G(X/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — Il s'agit d'une simple reformulation de la proposition 6.9.18. ∎

7. Étude locale de la cohomologie feuilletée

Le thème prédominant dans cette sous-section est l'étude de la cohomologie feuilletée localement pour la topologie ψ-Nisnevich, voire la topologie ψ-étale. Nous allons développer des techniques pour exprimer la cohomologie feuilletée de certains pro-k-feuilletages locaux à valeurs dans certains types de complexes de préfaisceaux. Il s'agit de pro-k-feuilletages locaux pour la topologie ψ-Nisnevich de la forme $X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}$ avec $\mathbf{t}$ un système d'indéterminées et $X/\mathcal{F}$ un pro-k-feuilletage diff-lisse tel que $\mathcal{O}(X)$ est un corps.

7.1. Préliminaires sur les anneaux de séries formelles. —

Dans cette sous-section et les deux qui suivront, on regroupe quelques résultats concernant les anneaux de séries formelles et leurs schémas affines associés. Ces résultats serviront dans l'étude locale de la cohomologie feuilletée qui est l'objectif principal de la présente section. On commence avec la version suivante du théorème de préparation de Weierstrass (voir [**21**, Chapitre 7, §3, n° 8, Proposition 6]).

Proposition 7.1.1. — *Soient A un anneau, $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ un système d'indéterminées et $f \in A[[\mathbf{t}]]$ une série formelle telle que $f(0,\cdots,0,t_n) \neq 0$. On note N le plus petit entier tel que le coefficient de t_n^N dans f soit non nul et on suppose que ledit coefficient est inversible dans A. Alors, il existe un unique $N+1$-uplet $(u, g_1, \cdots, g_N)$, avec $u \in A[[t_1,\cdots,t_n]]$ et $g_e \in A[[t_1,\cdots,t_{n-1}]]$, pour $1 \leqslant e \leqslant N$, tel que*

$$f = u \cdot (t_n^N + \sum_{e=1}^{N} g_e \cdot t_n^{N-e}).$$

De plus, u est nécessairement inversible et les g_e sont sans terme constant, i.e., $g_e(0,\cdots,0) = 0$.

Démonstration. — On divise la preuve en deux parties. Dans la première, on montre l'unicité et dans la seconde on montre l'existence.

Partie A. — Étant donné un $N+1$-uplet $(u, g_1, \cdots, g_N)$ comme dans l'énoncé, le terme constant de u est nécessairement égal au coefficient de t_n^N dans f, ce qui montre que u est inversible. Soit $(u', g'_1, \cdots, g'_N)$ un autre $N+1$-uplet qui convient et posons $w = u^{-1} - u'^{-1}$. Alors, $w \cdot f$ est un polynôme à coefficients dans $A[[t_1,\cdots,t_{n-1}]]$ de degré $\leqslant N-1$ en t_n. Supposons par l'absurde que w est non nulle et écrivons $w = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot t_n^i$ avec $h_i \in A[[t_1,\cdots,t_{n-1}]]$. Appelons $J_{n-1} \subset A[[t_1,\cdots,t_{n-1}]]$ l'idéal engendré par les indéterminées $t_1,\cdots,t_{n-1}$. Soit $d \geqslant 0$ le plus grand entier tel que $h_i \in J_{n-1}^d$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et soit M le plus petit entier tel que $h_M \notin J_{n-1}^{d+1}$. Alors, clairement, le coefficient de t_n^{M+N} de $w \cdot f$ est non nul, ce qui est impossible. Ainsi, w est nécessairement nulle et l'unicité dans l'énoncé s'ensuit aussitôt.

Partie B. — Étant données des séries formelles $h, h' \in A[[t_1, \cdots, t_n]]$, on écrit « $h = h' + o(t_n^s)$ » pour signifier que $h - h'$ est un multiple de t_n^s.

Nous allons construire par récurrence sur $s \in \mathbb{N}$ des séries formelles inversibles $v^{(s)} \in (A[[t_1, \cdots, t_n]])^\times$ telles que, si l'on pose $f^{(s)} = v^{(0)} \cdots v^{(s)} \cdot f$, alors on a

$$f^{(s)} = \left(t_n^N + \sum_{e=1}^{N} g_e^{(s)} \cdot t_n^{N-e}\right) + o(t_n^{N+s+1})$$

avec $g_e^{(s)} \in A[[t_1, \cdots, t_{n-1}]]$ le coefficient de t_n^{N-e} dans $f^{(s)}$ vue comme une série formelle en t_n.

On prendra pour $v^{(0)}$ l'inverse du coefficient de t_n^N dans f vue comme une série formelle en t_n. Supposons que $v^{(i)}$ est construite pour $0 \leqslant i \leqslant s-1$ et expliquons comment construire $v^{(s)}$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une série formelle $h \in A[[t_1, \cdots, t_{n-1}]]$ telle que

$$f^{(s-1)} = \left(t_n^N + \sum_{e=1}^{N} g_e^{(s-1)} \cdot t_n^{N-e}\right) + h \cdot t_n^{N+s} + o(t_n^{N+s+1}).$$

Appelons R et Q le reste et le quotient de la division euclidienne de t_n^{N+s} par le polynôme unitaire $P = t_n^N + \sum_{e=1}^{N} g_e^{(s-1)} \cdot t_n^{N-e}$. Ainsi, $Q, R \in A[[t_1, \cdots, t_{n-1}]][t_n]$, avec R de degré $\leqslant N-1$ et on a

$$t_n^{N+s} = Q \cdot \left(t_n^N + \sum_{e=1}^{N} g_e^{(s-1)} \cdot t_n^{N-e}\right) + R.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} Q \cdot f^{(s-1)} &= -R + (1 + Q \cdot h) \cdot t_n^{N+s} + o(t_n^{N+s+1}), \\ &= -R + (1 + q_0 \cdot h) \cdot t_n^{N+s} + o(t_n^{N+s+1}), \end{aligned}$$

où $q_0 = Q|_{t_n=0}$ est le coefficient de t_n^0 dans Q considérée comme une série formelle en t_n. Il s'ensuit que

$$\left(1 - \frac{Q \cdot h}{1 + q_0 \cdot h}\right) \cdot f^{(s-1)} = \left(t_n^N + \sum_{e=1}^{N} g_e^{(s-1)} \cdot t_n^{N-e}\right) + \frac{R \cdot h}{1 + q_0 \cdot h} + o(t_n^{N+s+1}).$$

D'après le lemme 7.1.2 ci-dessous, q_0 est dans J_{n-1}, et l'égalité ci-dessus est une égalité de séries formelles dans $A[[\mathbf{t}]]$. On peut donc prendre $v^{(s)} = 1 - Q \cdot h \cdot (1 + q_0 \cdot h)^{-1} = 1 - Q \cdot h \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-q_0 \cdot h)^i$. Il est maintenant facile de conclure. En effet, grâce au lemme 7.1.2 ci-dessous, $v^{(s)} - 1$ appartient à l'idéal $J_n^{\lfloor (s-1)/N \rfloor + 1}$, ce qui montre que la suite $w^{(s)} = v^{(0)} \cdots v^{(s)}$ converge vers une série formelle inversible w ; on pose $u = w^{-1}$. De même, grâce au lemme 7.1.2, $g_e^{(s)} - g_e^{(s-1)}$ appartient à l'idéal $J_{n-1}^{\lfloor s/N \rfloor + 1}$, ce qui montre que la suite $g_e^{(s)}$ converge vers une série formelle g_e. Par construction, le $N+1$-uplet $(u, g_1, \cdots, g_N)$ convient. ■

Lemme 7.1.2. — *Soient A un anneau et $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ un système d'indéterminées. Pour $0 \leqslant m \leqslant n$, on note $J_m \subset A[[t_1, \cdots, t_m]]$ l'idéal engendré par les indéterminées $t_1, \cdots, t_m$. Soit $P = t_n^N + \sum_{e=1}^{N} g_e \cdot t_n^{N-e}$ un polynôme unitaire en t_n à coefficients dans $A[[t_1, \cdots, t_{n-1}]]$. On suppose que les séries formelles g_e sont sans terme constant (i.e., $g_e \in J_{n-1}$). Pour $s \in \mathbb{N}$, appelons $R^{(s)}$ et $Q^{(s)}$ le reste et le quotient de la division euclidienne de t_n^s par P. Alors, on a $R^{(s)} \in J_{n-1}^{\lfloor s/N \rfloor}[t_n]$ et $Q^{(s)} \in J_n^{\lfloor (s-1)/N \rfloor}$ (pour $s \geqslant 1$).*

Démonstration. — En effet, écrivons $s = q \cdot N + r$ avec $q = \lfloor s/N \rfloor$. Alors, $R^{(s)}$ est aussi le reste de la division euclidienne de $E = (-\sum_{e=1}^{N} g_e \cdot t_n^{N-e})^q \cdot t_n^r$ par P. Or, puisque les g_e sont sans terme constant, on a $E \in J_{n-1}^q[t_n]$. L'algorithme de la division euclidienne de E par P entraîne aussitôt que le reste de cette division, à savoir $R^{(s)}$, est à coefficients dans J_{n-1}^q comme souhaité.

Ceci étant, pour $s \geqslant 1$, on a $Q^{(s)} - t_n \cdot Q^{(s-1)} \in J_{n-1}^{\lfloor (s-1)/N \rfloor}[t_n]$. Pour vérifier cela, on remarque que

$$(Q^{(s)} - t_n \cdot Q^{(s-1)}) \cdot P = t_n \cdot R^{(s-1)} - R^{(s)}$$

appartient à $J_{n-1}^{\lfloor (s-1)/N \rfloor}[t_n]$ et on lui applique l'algorithme de la division euclidienne par P. Le résultat recherché découle alors par récurrence de l'inégalité $\lfloor (s-1)/N \rfloor \leqslant 1 + \lfloor (s-2)/N \rfloor$. ■

Corollaire 7.1.3. — *Gardons les notations et les hypothèses de la proposition 7.1.1. Alors, on a une décomposition en sommes directes de $A[[t_1, \cdots, t_{n-1}]]$-modules :*

$$A[[\mathbf{t}]] = A[[\mathbf{t}]] \cdot f \oplus \bigoplus_{e=0}^{N-1} A[[t_1, \cdots, t_{n-1}]] \cdot t_n^e.$$

Démonstration. — Le fait que l'intersection de $A[[\mathbf{t}]] \cdot f$ et de $\bigoplus_{e=0}^{N-1} A[[t_1, \cdots, t_{n-1}]] \cdot t_n^e$ est nulle découle aussitôt de l'unicité dans la proposition 7.1.1. Il reste à montrer que ces sous-$A[[t_1, \cdots, t_{n-1}]]$-modules engendrent $A[[\mathbf{t}]]$. Pour ce faire, on peut remplacer f par le polynôme $P = t_n^N + \sum_{e=1}^{N} g_e \cdot t_n^{N-e}$ fourni par la proposition 7.1.1. Donnons-nous une série formelle $h = \sum_{s=0}^{\infty} h_s \cdot t_n^s$ avec $h_s \in A[[t_1, \cdots, t_{n-1}]]$. D'après le lemme 7.1.2, l'expression $\mathrm{R}(h) = \sum_{s=0}^{\infty} h_s \cdot R^{(s)}$ converge et définit un polynôme dans $A[[t_1, \cdots, t_{n-1}]][t_n]$ de degré $\leqslant N-1$. D'après le même lemme 7.1.2, l'expression $\mathrm{Q}(h) = \sum_{s=0}^{\infty} h_s \cdot Q^{(s)}$ converge et définit une série formelle dans $A[[t_1, \cdots, t_n]]$. Par construction, on a $h = \mathrm{Q}(h) \cdot P + \mathrm{R}(h)$ comme souhaité. ■

Notations 7.1.4. — Soit $X = (X_i)_{i \in I}$ un pro-schéma. On suppose que les X_i sont réduits et possèdent un nombre fini de composantes irréductibles pour tout $i \in I$ et que les morphismes $X_j \longrightarrow X_i$ envoient les points génériques de X_j sur des points génériques de X_i pour tout $j \leqslant i$ dans I.

(a) On note $\eta(X)$ le pro-schéma des ouverts affines denses dans X. Plus précisément, $\eta(X)$ est indexé par l'ensemble des couples (i, U) où $i \in I$ et $U \subset X_i$ est un ouvert affine dense de X_i ; le foncteur $\eta(X)$ est alors simplement donné par l'association $(i, U) \rightsquigarrow U$. On pose aussi $\kappa(X) = \mathcal{O}(\eta(X))$.

(b) Étant donné un système d'indéterminées $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$, on note $X((\mathbf{t}]]$ (ou $X((t_1, \cdots, t_n]]$) le pro-schéma affine $\eta(X)[[\mathbf{t}]]$ qui, à un couple (i, U) comme dans (a), associe le schéma affine $U[[\mathbf{t}]]$. □

Proposition 7.1.5. — *Soit $X = (X_i)_{i \in I}$ un pro-schéma. On suppose que les X_i sont intègres pour tout $i \in I$ et que les morphismes $X_j \longrightarrow X_i$ sont dominants pour tout $j \leqslant i$ dans I. Alors, étant donné un système d'indéterminées $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$, le schéma* $\lim X((\mathbf{t}]]$ *est local, noethérien et de dimension de Krull n.*

Démonstration. — Si k est un corps, l'anneau $k[[\mathbf{t}]]$ est local, noethérien et de dimension de Krull n (voir par exemple [**22**, Chapitre III, §2, n° 10, Corollaire 6] et [**20**, Chapitre VIII, §3, n° 4, Corollaire 3 de la Proposition 8]). L'énoncé à démontrer est une généralisation de ce fait classique. Remarquons aussi que le cas classique couvre le cas où $\kappa(X)$ est fini. Ceci permet de supposer que $\kappa(X)$ est infini.

Le lemme 7.1.6(a) ci-dessous montre que $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$ est local d'idéal maximal le noyau du morphisme d'évaluation $f \rightsquigarrow f(0, \cdots, 0)$. Il reste à montrer que $X((\mathbf{t}]]$ est noethérien de dimension de Krull n. Pour ce faire, il suffit de montrer le fait suivant :

(F) si $f \in \mathcal{O}(X((t_1, \cdots, t_n]]) \smallsetminus \{0\}$ n'est pas inversible, alors, quitte à faire un changement de variables linéaire inversible, le morphisme de schémas

$$\lim X((t_1, \cdots, t_n]]/(f) \longrightarrow \lim X((t_1, \cdots, t_{n-1}]]$$

est fini et surjectif.

En effet, le résultat recherché s'ensuit alors par récurrence sur n (le cas $n = 0$ étant trivial).

Montrons (F). D'après le lemme 7.1.6(b) ci-dessous, quitte à faire un changement de variables linéaire inversible, on peut supposer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que le coefficient de t_n^N dans f soit non nul dans $\kappa(X)$. Prenons N minimal. Étant donné $i \in I$ et $U \subset X_i$ affine non vide tel que $f \in \mathcal{O}(U)[[\mathbf{t}]]$, on peut, quitte à rétrécir U, supposer que le coefficient de t_N dans f est inversible sur U. On peut alors appliquer le corollaire 7.1.3 en variant (i, U) pour obtenir un isomorphisme $\mathcal{O}(X((t_1, \cdots, t_{n-1}]])$-linéaire :

$$\bigoplus_{e=0}^{N-1} \mathcal{O}(X((t_1, \cdots, t_{n-1}]]) \cdot t_n^e \simeq \mathcal{O}(X((t_1, \cdots, t_n]])/(f).$$

Clairement, ceci permet de conclure. ■

Lemme 7.1.6. — *Gardons les notations et les hypothèses de la proposition 7.1.5, et supposons donnée une série formelle $f \in \mathcal{O}(X((t_1, \cdots, t_n]])$.*

(a) *La série formelle f est inversible dans l'anneau $\mathcal{O}(X((t_1,\cdots,t_n]])$ si et seulement si son terme constant $f(0,\cdots,0)\in\kappa(X)$ est non nul.*

(b) *Fixons un sous-corps infini $K\subset\kappa(X)$. Alors, si f est non nulle, il existe une matrice inversible $(A_{p,q})_{1\leqslant p,q\leqslant n}\in\mathrm{GL}_n(K)$ telle que*

$$g(t_1,\cdots,t_n)=f\left(\textstyle\sum_{q=1}^{n}A_{1,q}\cdot t_q,\cdots,\sum_{q=1}^{n}A_{n,q}\cdot t_q\right)$$

vérifie la condition suivante : le coefficient de t_n^N dans g est non nul pour au moins un entier $N\in\mathbb{N}$. Plus précisément, l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_n(K)$ qui conviennent contient les K-points d'un ouvert dense du K-schéma $\mathrm{GL}_n\otimes_{\mathbb{Z}}K$.

Démonstration. — Soit $U\subset X_i$, avec $i\in I$, un ouvert affine non vide tel que $f\in\mathcal{O}(U)[[\mathbf{t}]]$. Supposons d'abord que le terme constant de f est non nul. Pour démontrer que f est inversible, on remarque que, quitte à rétrécir U, on peut supposer que $f(0,\cdots,0)$ appartient à $\mathcal{O}(U)^{\times}$. Il s'ensuit alors que f est inversible dans $\mathcal{O}(U)[[\mathbf{t}]]$ et donc a fortiori dans $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$.

Supposons que $f=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n}a_\nu\cdot\mathbf{t}^\nu$ est non nulle. La partie homogène de degré N de f, à savoir $\sum_{|\nu|=N}a_\nu\cdot\mathbf{t}^\nu$, est non nulle pour au moins un $N\in\mathbb{N}$. Or, la partie homogène de degré N de g est donnée par

$$\sum_{|\nu|=N}a_\nu\cdot\left(\textstyle\sum_{q=1}^{n}A_{1,q}\cdot t_q\right)^{\nu_1}\cdots\left(\textstyle\sum_{q=1}^{n}A_{n,q}\cdot t_q\right)^{\nu_n}.$$

La condition que le coefficient de t_n^N soit non nul équivaut à la condition $\sum_{|\nu|=N}a_\nu\cdot A_{1,n}^{\nu_1}\cdots A_{n,n}^{\nu_n}\neq 0$ qui définit un ouvert dense dans le $\kappa(X)$-schéma $\mathrm{GL}_n\otimes_{\mathbb{Z}}\kappa(X)$. L'image de cet ouvert par le morphisme ouvert $\mathrm{GL}_n\otimes_{\mathbb{Z}}\kappa(X)\longrightarrow\mathrm{GL}_n\otimes_{\mathbb{Z}}K$ (voir le lemme 1.3.14) convient clairement. ■

Remarque 7.1.7. — Gardons les notations et les hypothèses de la proposition 7.1.5, et supposons donné un schéma de type fini Y au-dessus de $\lim X((\mathbf{t}]]$. Puisque $\lim X((\mathbf{t}]]$ est noethérien, il existe d'après [**39**, Chapitre IV, Théorème 8.8.2] un triplet (i,U,Y_i) avec $i\in I$, $U\subset X_i$ un ouvert affine non vide et Y_i un schéma de type fini au-dessus de $U[[\mathbf{t}]]$ tel que

$$Y\simeq\lim X((\mathbf{t}]]\times_{U[[\mathbf{t}]]}Y_i. \tag{7.1}$$

De plus, le triplet (i,U,Y_i) est essentiellement unique au sens suivant. Si $(i',U',Y_{i'})$ est un autre triplet vérifiant la même propriété, il existe $j\leqslant i,i'$ dans I, un ouvert affine non vide $V\subset X_j$ contenu dans les images inverses de U et U', et un isomorphisme de $V[[\mathbf{t}]]$-schémas $V[[\mathbf{t}]]\times_{U[[\mathbf{t}]]}Y_i\simeq V[[\mathbf{t}]]\times_{U'[[\mathbf{t}]]}Y'_{i'}$ compatible aux isomorphismes (7.1). □

Pour une utilisation future, on note le résultat suivant.

Corollaire 7.1.8. — *Gardons les notations et les hypothèses de la proposition 7.1.5. Fixons un sous-corps infini $K\subset\kappa(X)$. Supposons donné un sous-schéma fermé irréductible $Z\subset\lim X((t_1,\cdots,t_n]]$ de codimension c. Alors, quitte à faire un changement de variables par une matrice dans $\mathrm{GL}_n(K)$, on peut supposer que la composition de*

$$Z\hookrightarrow\lim X((t_1,\cdots,t_n]]\longrightarrow\lim X((t_1,\cdots,t_{n-c}]]$$

est un morphisme fini et surjectif. De plus, l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_n(K)$ qui conviennent contient les K-points d'un ouvert dense du K-schéma $\mathrm{GL}_n\otimes_{\mathbb{Z}}K$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur c. Si $c=0$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc que $c\geqslant 1$ et que le résultat est connu pour les fermés de codimension $c-1$. Soit $f\in\mathcal{O}(X((t_1,\cdots,t_n]])\smallsetminus\{0\}$ une fonction qui s'annule partout sur Z. D'après le fait (F) utilisé dans la preuve de la proposition 7.1.5, on peut faire un changement de variables linéaire inversible afin que le morphisme

$$\phi:\lim X((t_1,\cdots,t_n]]/(f)\longrightarrow\lim X((t_1,\cdots,t_{n-1}]]$$

soit fini et surjectif. (Ce changement de variables linéaire étant fournit par le le lemme 7.1.6(b), on peut bien supposer qu'il est donné par une matrice à coefficients dans K.) Or, Z est de codimension $\leqslant c-1$ dans $\lim X((t_1,\cdots,t_n]]/(f)$ et, pour un choix judicieux de f, on peut même supposer que sa codimension est égale à $c-1$. (En fait, il se trouve que $\lim X((t_1,\cdots,t_n]]$ est caténaire de sorte que la codimension de

Z dans $\lim X((t_1, \cdots, t_n]]/(f)$ est toujours égale à $c-1$, mais nous n'aurons pas besoin de cela.) Il s'ensuit que $\phi(Z)$ est de codimension $c-1$ dans $\lim X((t_1, \cdots, t_{n-1}]]$. De plus, le morphisme $Z \longrightarrow \phi(Z)$ est fini et surjectif. L'hypothèse de récurrence appliquée à $\phi(Z)$ permet de conclure. ■

Corollaire 7.1.9. — *Gardons les notations et les hypothèses de la proposition 7.1.5. Alors, l'anneau local* $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$ *est régulier et hensélien. Il est aussi excellent si* $\kappa(X)$ *est de caractéristique nulle.*

Démonstration. — D'après la proposition 7.1.5, on sait que l'anneau $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$ est local, noethérien et de dimension de Krull n. Or, son idéal maximal est engendré par la suite régulière $t_1, \cdots, t_n$. Ceci montre que cet anneau est régulier. Pour montrer qu'il est hensélien, on se donne une $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$-algèbre étale E telle que le morphisme évident $\kappa(X) \longrightarrow E/(t_1, \cdots, t_n)$ est inversible. On peut alors trouver un indice $i \in I$, un ouvert affine non vide $U \subset X_i$ et une $\mathcal{O}(U)[[\mathbf{t}]]$-algèbre étale F telle que $E \simeq F \otimes_{\mathcal{O}(U)[[\mathbf{t}]]} \mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$. Quitte à raffiner le couple (i, U), on peut supposer que le morphisme évident $\mathcal{O}(U) \longrightarrow F/(t_1, \cdots, t_n)$ est inversible. Il s'ensuit que le morphisme canonique

$$\mathcal{O}(U)[[t_1, \cdots, t_n]] \longrightarrow F /\!\!/ (t_1, \cdots, t_n),$$

où « $(-)/\!\!/(t_1, \cdots, t_n)$ » désigne la complétion formelle relativement à l'idéal $(t_1, \cdots, t_n)$, est un isomorphisme. Ceci fournit une décomposition $F \simeq \mathcal{O}(U)[[\mathbf{t}]] \times F'$ de la $\mathcal{O}(U)[[\mathbf{t}]]$-algèbre étale F. Il s'ensuit une décomposition $E \simeq \mathcal{O}(X((\mathbf{t}]]) \times E'$ de la $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$-algèbre étale E.

Enfin, supposons que $\kappa(X)$ est de caractéristique nulle. Le fait que l'anneau $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$ est excellent découle de [**56**, §40, Theorem 102] en prenant l'ensemble des dérivations $\Delta = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$ agissant trivialement sur les coefficients des séries formelles et par $\partial_i(t_j) = \delta_{ij}$ sur les indéterminées. ■

7.2. Préliminaires sur les anneaux de séries formelles (suite). —

Nous continuons ici la liste de résultats sur les anneaux de séries formelles et leurs schémas affines associés que nous avons commencée dans la sous-section 7.1. La plupart du temps, nous serons concernés dans cette sous-section par la situation suivante.

Situation 7.2.1. — Soient $X = (X_i)_{i \in I}$ et $Y = (Y_j)_{j \in J}$ deux pro-schémas et soit $Y \longrightarrow X$ un morphisme de pro-schémas. On suppose les conditions suivantes satisfaites.

(i) Les schémas X_i sont intègres pour tout $i \in I$ et les morphismes $X_{i'} \longrightarrow X_i$ sont dominants pour tout $i' \leqslant i$ dans I. De même, les schémas Y_j sont intègres pour tout $j \in J$ et les morphismes $Y_{j'} \longrightarrow Y_j$ sont dominants pour tout $j' \leqslant j$ dans J.

(ii) Le morphisme de pro-schéma $Y \longrightarrow X$ est donné par des morphismes dominants $Y_j \longrightarrow X_i$.

(On peut résumer les conditions (i) et (ii) en disant que $Y \longrightarrow X$ est un morphisme de pro-objets dans la catégorie des schémas intègres et des morphismes dominants.) On se donne un système d'indéterminées $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ et on considère le morphisme évident de pro-schémas $Y((\mathbf{t}]] \longrightarrow X((\mathbf{t}]]$. On note

$$\Phi : \lim Y((\mathbf{t}]] \longrightarrow \lim X((\mathbf{t}]]$$

le morphisme obtenu en passant à la limite. Clairement, Φ est dominant. □

Sauf mention explicite du contraire, dans cette sous-section on travaille avec les notations et les hypothèses de la situation 7.2.1.

Lemme 7.2.2. — *On suppose que* $\kappa(X)$ *est de caractéristique nulle. Alors, le morphisme* Φ *est régulier et fidèlement plat.*

Démonstration. — Pour montrer que le morphisme Φ est régulier, on peut utiliser le corollaire 7.1.9 pour se ramener à montrer que, pour une extension K/k de corps de caractéristique nulle, la $k[[\mathbf{t}]]$-algèbre $K[[\mathbf{t}]]$ est régulière. Lorsque l'extension K/k est de type fini, on utilise le fait qu'une algèbre de type fini sur un anneau excellent est elle-même excellente. Le cas général s'en déduit par passage à la colimite et en complétant, ce qui est loisible grâce au corollaire 7.1.9 appliqué à la colimite en question. Enfin, puisque Φ est un morphisme local entre schémas locaux, il est nécessairement fidèlement plat. ■

Proposition 7.2.3. — *Soit* $Z \subset \lim X((\mathbf{t}]]$ *un sous-schéma fermé et supposons que la composition de*

$$Z \hookrightarrow \lim X((t_1, \cdots, t_n]] \longrightarrow \lim X((t_1, \cdots, t_{n-c}]]$$

est un morphisme fini pour un certain entier $0 \leqslant c \leqslant n$. *Notons* $T = \Phi^{-1}(Z)$. *Alors, la composition de*

$$T \hookrightarrow \lim Y((t_1, \cdots, t_n]] \longrightarrow \lim Y((t_1, \cdots, t_{n-c}]]$$

est aussi un morphisme fini. De plus, le carré suivant est cartésien

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & \lim Y((t_1, \cdots, t_{n-c}]] \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & \lim X((t_1, \cdots, t_{n-c}]]. \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Clairement, il est suffisant de montrer que le carré de l'énoncé est cartésien. On divise la preuve de cela en deux parties.

Partie A. — Remarquons d'abord qu'il suffit de traiter le cas $c = 1$. En effet, si ce cas est connu, on déduit le cas général par récurrence de la manière suivante. L'hypothèse sur Z au rang c entraîne l'hypothèse sur Z au rang $c-1$. En particulier, par l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que le carré

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & \lim Y((t_1, \cdots, t_{n-c+1}]] \arrow[d, "\Phi_{n-c+1}"] \\ Z \arrow[r] & \lim X((t_1, \cdots, t_{n-c+1}]] \end{tikzcd}$$

est cartésien. Notons Z_0 l'image schématique de Z par la flèche horizontale inférieure dans le carré ci-dessus et posons $T_0 = (\Phi_{n-c+1})^{-1}(Z_0)$. Ainsi, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & T_0 \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Z_0. \end{tikzcd}$$

Par ailleurs, puisque la composition de

$$Z_0 \hookrightarrow \lim X((t_1, \cdots, t_{n-c+1}]] \longrightarrow \lim X((t_1, \cdots, t_{n-c}]]$$

est encore un morphisme fini, il s'ensuit (grâce au cas $c = 1$ de l'énoncé) que le carré

$$\begin{tikzcd} T_0 \arrow[r] \arrow[d] & \lim Y((t_1, \cdots, t_{n-c+1}]] \arrow[d, "\Phi_{n-c}"] \\ Z_0 \arrow[r] & \lim X((t_1, \cdots, t_{n-c}]] \end{tikzcd}$$

est cartésien. Ceci permet de conclure.

Partie B. — On traite ici le cas $c = 1$. Notons $J_Z \subset \mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$ l'idéal des fonctions qui s'annulent sur Z. Puisque la composition de

$$Z \hookrightarrow \lim X((t_1, \cdots, t_n]] \longrightarrow \lim X((t_1, \cdots, t_{n-1}]]$$

est un morphisme fini, alors $Z/(t_1, \cdots, t_{n-1})$ est un fermé strict de $\lim X((t_n]]$. Il existe donc $f \in J_Z$ tel que $f(0, \cdots, 0, t_n) \neq 0$. Soit N la valuation t_n-adique de $f(0, \cdots, 0, t_n)$. Grâce à la proposition 7.1.1, on peut supposer que $f = P$ avec $P \in \mathcal{O}(X((t_1, \cdots, t_{n-1}]])[t_n]$ un polynôme unitaire de degré N en t_n vérifiant en plus l'égalité $P(0, \cdots, 0, t_n) = t_n^N$. La preuve de la proposition 7.1.5 (et plus précisément celle du fait (F)) montre que le morphisme évident

$$\lim X((t_1, \cdots, t_n]]/(P) \longrightarrow \lim X((t_1, \cdots, t_{n-1}]][t_n]/(P)$$

est un isomorphisme, et de même pour « Y » au lieu de « X ». En particlulier, Z et T sont naturellement des sous-schémas fermés de $\lim X((t_1, \cdots, t_{n-1}]][t_n]/(P)$ et de $\lim Y((t_1, \cdots, t_{n-1}]][t_n]/(P)$. Les deux carrés du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} T & \longrightarrow & \lim Y((t_1,\cdots,t_{n-1}]][t_n]/(P) & \longrightarrow & \lim Y((t_1,\cdots,t_{n-1}]] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & \lim X((t_1,\cdots,t_{n-1}]][t_n]/(P) & \longrightarrow & \lim X((t_1,\cdots,t_{n-1}]] \end{array}$$

sont clairement cartésiens, ce qui permet de conclure. ■

Proposition 7.2.4. — *On suppose que* $\kappa(X)$ *est de caractéristique nulle et que* $\kappa(X)$ *est algébriquement clos dans* $\kappa(Y)$. *Alors, le morphisme* Φ *est géométriquement intègre.*

Démonstration. — On divise la preuve de cela en deux parties.

Partie A. — On montre ici que Φ est génériquement géométriquement intègre. Autrement dit, nous allons montrer que le corps $\kappa(X((\mathbf{t}]])$ est algébriquement clos dans son extension $\kappa(Y((\mathbf{t}]])$.

D'après le lemme 7.2.2, $\mathcal{O}(Y((\mathbf{t}]])$ est une $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$-algèbre régulière. Le théorème de Popescu [**59, 60**] permet donc d'écrire $\mathcal{O}(Y((\mathbf{t}]])$ comme une colimite filtrante de $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$-algèbres lisses et intègres. Il suffit donc de montrer l'assertion suivante : si E est une $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$-algèbre lisse et intègre munie d'un morphisme de $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$-algèbres $E \longrightarrow \kappa(Y)$, alors le corps $\kappa(X((\mathbf{t}]])$ est algébriquement clos dans son extension $\mathrm{Frac}(E)$. Pour ce faire, notons $E^{\mathrm{alg}} \subset E$ le sous-anneau des éléments algébriques sur $\kappa(X((\mathbf{t}]])$. Clairement, $\mathrm{Frac}(E^{\mathrm{alg}})$ est la clôture algébrique de $\kappa(X((\mathbf{t}]])$ dans $\mathrm{Frac}(E)$. Il est donc suffisant de montrer que $E^{\mathrm{alg}} \simeq \mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$. Or, d'après [**12**, Lemme 2.103], E^{alg} est une $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$-algèbre étale. De plus, elle est aussi munie d'un morphisme de $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$-algèbres $E^{\mathrm{alg}} \longrightarrow \kappa(Y)$. L'image de ce morphisme est une sous-extension algébrique de $\kappa(Y)/\kappa(X)$. Puisque $\kappa(X)$ est supposé algébriquement clos dans $\kappa(Y)$, cette sous-extension est nécessairement triviale. On en déduit un morphisme de $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$-algèbres $E^{\mathrm{alg}} \longrightarrow \kappa(X)$. Or, d'après le corollaire 7.1.9, l'anneau $\mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$ est local hensélien et $\kappa(X)$ est son corps résiduel. Ce dernier morphisme s'étend donc en un morphisme étale $E^{\mathrm{alg}} \longrightarrow \mathcal{O}(X((\mathbf{t}]])$ qui est une rétraction au morphisme structural. Puisque E^{alg} est intègre, ceci permet de conclure.

Partie B. — On termine ici la preuve de la proposition en raisonnant par récurrence sur n. Si $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc que $n \geqslant 1$ et que le résultat est connu pour $n-1$.

Soit x un point de $\lim X((t_1,\cdots,t_n]]$. Si x est le point générique, la partie A permet de conclure. Sinon, il existe $f \in \mathcal{O}(X((t_1,\cdots,t_n]]) \smallsetminus \{0\}$ qui s'annule en x et il est suffisant de montrer que le morphisme

$$\lim Y((t_1,\cdots,t_n]]/(f) \longrightarrow \lim X((t_1,\cdots,t_n]]/(f)$$

est géométriquement intègre. Or, d'après le corollaire 7.1.8, quitte à faire un changement de variables linéaire inversible, on peut supposer que la composition de

$$\lim X((t_1,\cdots,t_n]]/(f) \hookrightarrow \lim X((t_1,\cdots,t_n]] \longrightarrow \lim X((t_1,\cdots,t_{n-1}]]$$

est finie. Grâce à la proposition 7.2.3, il s'ensuit que le carré

$$\begin{array}{ccc} \lim Y((t_1,\cdots,t_n]]/(f) & \longrightarrow & \lim Y((t_1,\cdots,t_{n-1}]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim X((t_1,\cdots,t_n]]/(f) & \longrightarrow & \lim X((t_1,\cdots,t_{n-1}]] \end{array}$$

est cartésien. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure. ■

Corollaire 7.2.5. — *Soit* X' *un* $\lim X((\mathbf{t}]]$*-schéma de type fini et* $\Phi' : Y' \longrightarrow X'$ *le morphisme obtenu par changement de base de* Φ *suivant* $X' \longrightarrow \lim X((\mathbf{t}]]$. *Soit* $Z \subset Y'$ *un fermé irréductible et considérons l'adhérence Zariski de son image* $\overline{\Phi'(Z)} \subset X'$. *Alors, on a* $\mathrm{codim}(\overline{\Phi'(Z)}) \leqslant \mathrm{codim}(Z)$.

Démonstration. — On se ramène aussitôt au cas où $\kappa(X)$ est algébriquement clos dans $\kappa(Y)$. Le résultat découle alors facilement du fait que Φ' est fidèlement plat et géométriquement intègre (voir le lemme 7.2.2 et la proposition 7.2.4). ■

Corollaire 7.2.6. — *Soient $Y \longrightarrow X$ et $Z \longrightarrow Y$ deux morphismes de pro-schémas satisfaisant aux conditions (i) et (ii) de la situation 7.2.1. On se donne un système d'indéterminées $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$, et on considère les morphismes évidents*

$$\Phi : \lim Y((\mathbf{t}]] \longrightarrow \lim X((\mathbf{t}]] \qquad et \qquad \Psi : \lim Z((\mathbf{t}]] \longrightarrow \lim Y((\mathbf{t}]].$$

Soit X' un $\lim X((\mathbf{t}]]$-schéma de type fini et appelons $\Phi' : Y' \longrightarrow X'$ et $\Psi' : Z' \longrightarrow Y'$ les morphismes obtenus par changement de base de Φ et Ψ. Soit $T \subset Z'$ un fermé irréductible tel que $\mathrm{codim}(T) = \mathrm{codim}(\overline{\Phi' \circ \Psi'(T)})$. Alors, on a également $\mathrm{codim}(T) = \mathrm{codim}(\overline{\Psi'(T)})$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du corollaire 7.2.5. ∎

On reprend les notations et les hypothèses de la situation 7.2.1.

Corollaire 7.2.7. — *Supposons que $\kappa(X)$ est de caractéristique nulle et qu'il est algébriquement clos dans $\kappa(Y)$. Soit X' un $\lim X((\mathbf{t}]]$-schéma de type fini et $\Phi' : Y' \longrightarrow X'$ le morphisme obtenu par changement de base de Φ. On a les propriétés suivantes.*

(a) Si $Z \subset X'$ est un fermé irréductible, alors le fermé $\Phi'^{-1}(Z)$ est aussi irréductible et l'égalité $\mathrm{codim}(Z) = \mathrm{codim}(\Phi'^{-1}(Z))$ est vérifiée.

(b) Si $T \subset Y'$ est un fermé irréductible tel que $\mathrm{codim}(T') = \mathrm{codim}(\overline{\Phi'(T)})$, alors la partie $\Phi'(T)$ est fermée et on a $T = \Phi'^{-1}(\Phi'(T))$.

Démonstration. — Pour montrer (a), on utilise le lemme 7.2.2 et la proposition 7.2.4 pour s'assurer que $\Phi'^{-1}(Z)$ est irréductible et pour établir l'égalité des codimensions. Pour montrer (b), on remarque que (a) entraîne que $T = \Phi'^{-1}(\overline{\Phi'(T)})$. Puisque Φ' est surjectif, on a $\Phi'(T) = \Phi'(\Phi'^{-1}(\overline{\Phi'(T)})) = \overline{\Phi'(T)}$. ∎

7.3. Préliminaires sur les anneaux de séries formelles (fin). —

On termine ici la liste des résultats sur les anneaux de séries formelles et leurs schémas affines associés. Le but de cette sous-section est de démontrer la proposition 7.3.6 ci-dessous. On commence par une définition.

Définition 7.3.1. — *Soit X un schéma affine et soit $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ un système d'indétermniées. On note $\phi : X[[\mathbf{t}]] \longrightarrow X$ le morphisme évident. Étant donné un morphisme de schémas $V \longrightarrow X[[\mathbf{t}]]$, on note $\phi^{spé}(V)$ l'ensemble des points $x \in X$ tels que le produit fibré $V \times_{X[[\mathbf{t}]]} x[[\mathbf{t}]]$ est non vide. L'ensemble $\phi^{spé}(V)$ est appelé l'*image spéciale *de V dans X. Le morphisme composé $V \longrightarrow X$ est dit* fortement surjective *si $X = \phi^{spé}(V)$.*

Lemme 7.3.2. — *Gardons les notations de la définition 7.3.1 et supposons que le morphisme $V \longrightarrow X[[\mathbf{t}]]$ est ouvert. Alors, $\phi^{spé}(V)$ est un ouvert de X contenu dans l'image de V dans X. De plus, si X est intègre et V est non vide, alors $\phi^{spé}(V)$ est non vide.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où V est un ouvert distingué de $X[[\mathbf{t}]]$, i.e., $V = \mathrm{D}(f)$ avec $f \in \mathcal{O}(X)[[\mathbf{t}]]$. Écrivons $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu \cdot \mathbf{t}^\nu$. Pour $x \in X$, le produit fibré $\mathrm{D}(f) \times_{X[[\mathbf{t}]]} x[[\mathbf{t}]]$ est l'ouvert $\mathrm{D}(f(x))$ de $x[[\mathbf{t}]]$ avec $f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu(x) \cdot \mathbf{t}^\nu$. Il s'ensuit que $\phi^{spé}(\mathrm{D}(f))$ est l'ensemble des points $x \in X$ tel que $f(x) \neq 0$. C'est donc le complémentaire du fermé de X défini par l'idéal engendré par les coefficients de f. Enfin, si X est intègre et $f \neq 0$, $\phi^{spé}(\mathrm{D}(f))$ contient clairement le point générique de X. ∎

Lemme 7.3.3. — *Gardons les notations de la définition 7.3.1. Soient Z un schéma affine et $\psi : Z \longrightarrow X$ un morphisme tel que $\psi(Z) \subset \phi^{spé}(V)$. On note $W \longrightarrow Z[[\mathbf{t}]]$ le changement de base de $V \longrightarrow X[[\mathbf{t}]]$ par $Z[[\mathbf{t}]] \longrightarrow X[[\mathbf{t}]]$. Alors, le morphisme $W \longrightarrow Z$ est fortement surjectif.*

Démonstration. — En effet, soit $z \in Z$ et notons $x = \psi(z)$. On doit montrer que le schéma $W \times_{Z[[\mathbf{t}]]} z[[\mathbf{t}]]$ est non vide. Or, on a les identifications évidentes

$$W \times_{Z[[\mathbf{t}]]} z[[\mathbf{t}]] \simeq V \times_{X[[\mathbf{t}]]} z[[\mathbf{t}]] \simeq \left(V \times_{X[[\mathbf{t}]]} x[[\mathbf{t}]]\right) \times_{x[[\mathbf{t}]]} z[[\mathbf{t}]].$$

Puisque $V \times_{X[[\mathbf{t}]]} x[[\mathbf{t}]] \neq \emptyset$, le résultat découle du fait que le morphisme $z[[\mathbf{t}]] \longrightarrow x[[\mathbf{t}]]$ est dominant. ∎

On introduit maintenant une généralisation de la notation 7.1.4(b).

Notation 7.3.4. — Soit $X = (X_i)_{i\in I}$ un pro-schéma comme dans les notations 7.1.4. On suppose donnés des systèmes d'indéterminées $\mathbf{t}_p = (t_{p,1}, \cdots, t_{p,n_p})$ et $\mathbf{s}_p = (s_{p,1}, \cdots, s_{p,m_p})$ pour $1 \leqslant p \leqslant r$. On définit alors le pro-schéma affine $X((\mathbf{t}_1 \bullet \mathbf{s}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{t}_r \bullet \mathbf{s}_r]]$ par récurrence en posant

$$X((\mathbf{t}_1 \bullet \mathbf{s}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{t}_r \bullet \mathbf{s}_r]] = X((\mathbf{t}_1 \bullet \mathbf{s}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{t}_{r-1} \bullet \mathbf{s}_{r-1}]]((\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r].$$

Le pro-schéma $X((\mathbf{t}_1 \bullet \mathbf{s}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{t}_r \bullet \mathbf{s}_r]]$ est donc indexé par des $r+1$-uplets $(i, U_0, \cdots, U_{r-1})$ où $i \in I$, U_0 est un ouvert affine et dense de X_i et, pour $1 \leqslant p \leqslant r-1$, U_p est un ouvert affine et dense de $U_{p-1}[[\mathbf{t}_p]][s_p]$. À un tel r-uplet, on associe le schéma affine $U_{r-1}[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r]$. Pour alléger les notations, on pose souvent $\underline{\mathbf{t}} = (\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{t}_r)$ et $\underline{\mathbf{s}} = (\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_r)$, et on note $X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]]$ le pro-schéma ainsi construit. On pose aussi

$$X((\mathbf{t}_1 \bullet \mathbf{s}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{t}_r \bullet \mathbf{s}_r)) = \eta(X((\mathbf{t}_1 \bullet \mathbf{s}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{t}_r \bullet \mathbf{s}_r]])$$

que l'on note souvent $X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$. □

Lemme 7.3.5. — *Soit X un schéma réduit ayant un nombre fini de composantes irréductibles et soient $\underline{\mathbf{t}} = (\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{t}_r)$ et $\underline{\mathbf{s}} = (\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_r)$ deux r-uplets de systèmes d'indéterminées. Soit $(U_0, \cdots, U_{r-1})$ un élément de l'ensemble indexant du pro-schéma $X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]]$, i.e., $U_0 \subset X$ est un ouvert affine et dense de X et, pour $1 \leqslant p \leqslant r-1$, U_p est un ouvert affine et dense de $U_{p-1}[[\mathbf{t}_p]][\mathbf{s}_p]$. Il existe alors un raffinement $(U'_0, \cdots, U'_{r-1})$ tel que, pour tout $1 \leqslant p \leqslant r-1$, le morphisme $U'_p \longrightarrow U'_{p-1}$ est fortement surjectif.*

Démonstration. — La question est locale au voisinage des points génériques de X. On ne restreint donc pas la généralité en supposant que X est intègre. On pose $V_{r-1} = U_{r-1}$ et on choisit, par récurrence descendante sur $r-1 \geqslant p \geqslant 1$, un ouvert affine non vide $V_{p-1} \subset U_{p-1}$ contenu dans l'image spéciale de V_p dans U_{p-1} (relativement au morphisme $U_{p-1}[[\mathbf{t}_p]] \longrightarrow U_{p-1}$). On définit alors le raffinement recherché par récurrence en posant $U'_0 = V_0$ et, pour $1 \leqslant p \leqslant r-1$, $U'_p = V_p \times_{U_{p-1}[[\mathbf{t}_p]]} U'_{p-1}[[\mathbf{t}_p]]$. Le lemme 7.3.3 assure que les morphismes $U'_p \longrightarrow U'_{p-1}$ sont bien fortement surjectifs. ■

Proposition 7.3.6. — *Supposons donné un carré commutatif de schémas*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\psi'} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \phi'} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ X' & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

tel que les conditions suivantes sont vérifiées.

(1) Les schémas X, Y, X' et Y' sont de caractéristique nulle, réduits et possèdent un nombre fini de composantes irréductibles.

(2) Le morphisme ϕ est en involution (voir la définition 6.5.7).

(3) Le morphisme ψ envoie les points génériques de X' sur des points génériques de X.

(4) Le morphisme $(\phi', \psi') : Y' \longrightarrow X' \times_X Y$ envoie les points génériques de Y' sur des points génériques de $X' \times_X Y$.

Soient $\underline{\mathbf{t}} = (\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{t}_r)$ et $\underline{\mathbf{s}} = (\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_r)$ deux r-uplets de systèmes d'indéterminées et considérons le carré commutatif de schémas

$$\begin{array}{ccc} \lim Y'((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]] & \xrightarrow{\Psi'} & \lim Y((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]] \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi'} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ \lim X'((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]] & \xrightarrow{\Psi} & \lim X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]]. \end{array}$$

Soit $W' \subset \lim Y'((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]]$ un fermé irréductible, et posons $Z' = \overline{\Phi'(W')}$, $W = \overline{\Psi'(W')}$ et $Z = \overline{\Psi(Z')} = \overline{\Phi(W)}$. Alors, si $\operatorname{codim}(W') = \operatorname{codim}(Z') = \operatorname{codim}(W)$, on a aussi $\operatorname{codim}(W') = \operatorname{codim}(Z)$.

Démonstration. — On divise la preuve en trois étapes. La première contient des dévissages. Dans la seconde on traite le cas de la codimension 1. Dans la troisième, on traite le cas général.

Étape 1. — Il suffit de prouver la proposition sous les hypothèses plus restrictives suivantes.

(1′) Les schémas X, Y, X' et Y' sont affines et intègres.

(2′) Le X-schéma Y est un espace affine relatif de dimension au plus dénombrable.

(3′) Le morphisme ψ est dominant.

(4′) Le carré est cartésien, i.e., $Y' = X' \times_X Y$.

En effet, quitte à remplacer les schémas X, Y, X' et Y' par des ouverts denses, on peut supposer que ce sont des coproduits finis de schémas affines et intègres. On peut alors remplacer chacun de ces schémas par sa composante connexe qui contient l'image de W' par le morphisme évident. Les conditions (1′) et (3′) sont alors clairement satisfaites.

Étant donné que le X-schéma Y est en involution, on peut trouver un isomorphisme $Y \simeq \lim_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ avec $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une tour de X-schémas affines lisses tel que les morphismes de transition $Q_n \longrightarrow Q_{n-1}$, pour $n \geqslant 1$, soit des projections de fibrés vectoriels. Puisque les schémas en question sont affines, les fibrés vectoriels $Q_n \longrightarrow Q_{n-1}$ sont facteurs directs de fibrés vectoriels libres. On peut donc construire un morphisme géométriquement intègre en involution $\widetilde{Y} \longrightarrow Y$ avec $\widetilde{Y}$ un espace affine de dimension au plus dénombrable au-dessus de Q_0. Posons $\widetilde{Y}' = Y' \times_Y \widetilde{Y}$. En utilisant le corollaire 7.2.7, on voit aussitôt qu'il est loisible de remplacer Y, Y' et W' par $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Y}'$ et $\widetilde{W}'$ avec $\widetilde{W}'$ l'image inverse de W' par le morphisme $\lim \widetilde{Y}'((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]] \longrightarrow \lim Y'((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]]$. Ceci nous ramène au cas où Y est un espace affine de dimension au plus dénombrable au-dessus du X-schéma lisse Q_0. Quitte à remplacer Y par un ouvert non vide, on peut donc supposer qu'il existe un morphisme étale de X-schémas $Y \longrightarrow A$ avec A un espace affine de dimension au plus dénombrable au-dessus de X. Le morphisme induit $\lim Y((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]] \longrightarrow \lim A((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]]$ est alors un revêtement étale. En particulier, la codimension d'un fermé de $\lim Y((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]]$ est égale à la codimension de son image dans $\lim A((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]]$. Il est donc loisible de remplacer Y par A et supposer que la condition (2′) est satisfaite.

Puisque le X-schéma Y est un espace affine relatif et que X' est intègre, le schéma $Y'_0 = X' \times_X Y$ est aussi intègre. Puisque le morphisme $Y' \longrightarrow Y'_0$ est supposé dominant, on peut considérer le morphisme induit

$$\Upsilon : \lim Y'((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]] \longrightarrow \lim Y'_0((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]].$$

On pose $W'_0 = \overline{\Upsilon(W')}$. D'après le corollaire 7.2.6, on a $\mathrm{codim}(W'_0) = \mathrm{codim}(W')$. Il est donc loisible de remplacer Y' et W' par Y'_0 et W'_0, et supposer que la condition (4′) est satisfaite.

Étape 2. — À partir de maintenant, on travaille sous les hypothèses (1′)–(4′) ci-dessus. On suppose ici que $\mathrm{codim}(W') = \mathrm{codim}(W) = \mathrm{codim}(Z') = 1$. Dans ce cas, on doit montrer que Z est un fermé strict de $\lim X((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]]$. D'après le corollaire 7.2.7(b), on a $W' = \Phi'^{-1}(Z')$.

Gâce au corollaire 7.1.9 et [**23**, §4, n° 1, Proposition 2], l'anneau $\mathcal{O}(Y'((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]])$ est factoriel. Ainsi, on peut trouver $g' \in \mathcal{O}(Y'((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]])$ tel que $W' = \mathrm{Z}(g')$. De même, on peut trouver g et f' tels que $W = \mathrm{Z}(g)$ et $Z' = \mathrm{Z}(f')$. Puisque $W' = \Phi'^{-1}(Z')$, on peut supposer que $f' = g'$. Par ailleurs, puisque $W' \subset \Psi'^{-1}(W)$, il existe $h \in \mathcal{O}(Y'((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]])$ tel que $g = g' \cdot h$. Ainsi, on dispose de trois éléments

$$g \in \mathcal{O}(Y((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]]), \quad f' \in \mathcal{O}(X'((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]]) \quad \text{et} \quad h \in \mathcal{O}(Y'((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]])$$

tels que $f' \cdot h = g$ et, pour conclure, on doit montrer que f' divise un élément non nul de $\mathcal{O}(X((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]])$.

Soit maintenant $\beta = (V_0, \cdots, V_{r-1})$ un élément de l'ensemble indexant du pro-schéma $Y((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]]$ tel que g appartient à $\mathcal{O}(V_{r-1})[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r]$. Soit $\beta' = (V'_0, \cdots, V'_{r-1})$ un élément de l'ensemble indexant du pro-schéma $Y'((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]]$ tel que f' et h appartiennent à $\mathcal{O}(V'_{r-1})[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r]$. On supposera que β' est suffisamment fin pour avoir les morphismes naturels $V'_p \longrightarrow V_p$, pour $0 \leqslant p \leqslant r-1$. D'après le lemme 7.3.5, quitte à raffiner β et β', on peut supposer que le morphisme $\mathrm{D}(g) \longrightarrow V_{r-1}$ ainsi que les morphismes $V_p \longrightarrow V_{p-1}$ et $V'_p \longrightarrow V'_{p-1}$, pour $1 \leqslant p \leqslant r-1$, sont fortement surjectifs. (La surjectivité forte du premier morphisme sera utile pour assurer la non nullité de $g \circ \sigma$ ci-dessous.) Soit $s : X \longrightarrow Y$ une section au morphisme ϕ telle que la section $s' : X' \longrightarrow Y'$ au morphisme ϕ' déduite de s rencontre l'ouvert V'_0. Une telle section existe car le X-schéma Y est un espace affine relatif (d'après la condition (2′)). Vu les propriétés dont on dispose, les sections s et

s' induisent des morphismes naturels

$$\sigma' : X'((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]] \longrightarrow V'_{r-1}[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r] \qquad \text{et} \qquad \sigma : X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]] \longrightarrow V_{r-1}[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r].$$

En appliquant $-\circ\sigma'$ à l'égalité $f' \cdot h = g$ dans $\mathcal{O}(V'_{r-1}[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r])$, on trouve l'égalité $f' \cdot (h \circ \sigma') = g \circ \sigma$ dans $\mathcal{O}(X'((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]])$. Ceci montre que f' divise la série formelle non nulle $g \circ \sigma \in \mathcal{O}(X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]])$ comme souhaité. (La non nullité de $g \circ \sigma$ découle du fait que la section s rencontre l'ouvert de Y obtenu en prenant les images essentielles successives de $\mathrm{D}(g)$ par les morphismes $V_p \longrightarrow V_{p-1}$, pour $1 \leqslant p \leqslant r-1$.)

Étape 3. — Dans cette étape on suppose que le résultat est connu si $\mathrm{codim}(W') = 1$ et on explique comment en déduire le cas général. On divise l'argument en trois sous-étapes.

Sous-étape 3.1. — On traite d'abord le cas où $\mathbf{s}_r = \varnothing$. On pose $\underline{\mathbf{t}}' = (\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{t}_{r-1})$ et $\underline{\mathbf{s}}' = (\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_{r-1})$. Alors $X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]] = X((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,))[[\mathbf{t}_r]]$, et de même pour Y, X' et Y'. On pose $\widetilde{X} = X((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,))$ de sorte que $X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]] = \widetilde{X}[[\mathbf{t}_r]]$, et on fait de même pour Y, X' et Y'.

On raisonne par l'absurde et on se donne un fermé $W' \subset \lim \widetilde{Y}'[[\mathbf{t}_r]]$ tel que

$$\mathrm{codim}(Z) < \mathrm{codim}(W') = \mathrm{codim}(W) = \mathrm{codim}(Z').$$

Appelons $d = \mathrm{codim}(Z)$ et $c = \mathrm{codim}(W')$. Rappelons que $\mathbf{t}_r = (t_{r,1}, \cdots, t_{r,n_r})$ et, pour $0 \leqslant e \leqslant n_r$, posons $\mathbf{t}_r(-e) = (t_{r,1}, \cdots, t_{r,n_r-e})$. Considérons les compositions suivantes :

$$\beta'_e : W' \hookrightarrow \lim \widetilde{Y}'[[\mathbf{t}_r]] \longrightarrow \lim \widetilde{Y}'[[\mathbf{t}_r(-e)]], \qquad \beta_e : W \hookrightarrow \lim \widetilde{Y}[[\mathbf{t}_r]] \longrightarrow \lim \widetilde{Y}[[\mathbf{t}_r(-e)]],$$

$$\alpha'_e : Z' \hookrightarrow \lim \widetilde{X}'[[\mathbf{t}_r]] \longrightarrow \lim \widetilde{X}'[[\mathbf{t}_r(-e)]], \qquad \alpha_e : Z \hookrightarrow \lim \widetilde{X}[[\mathbf{t}_r]] \longrightarrow \lim \widetilde{X}[[\mathbf{t}_r(-e)]].$$

D'après le corollaire 7.1.8, quitte à faire un changement de variables linéaire inversible, on peut supposer que les morphismes β'_c, β_c, α'_c et α_d sont finis et surjectifs. Il s'ensuit que les morphismes β'_{c-1}, β_{c-1} et α'_{c-1} sont finis et que les fermés $\beta'_{c-1}(W')$, $\beta_{c-1}(W)$ et $\alpha'_{c-1}(Z')$ sont de codimension 1. Par ailleurs, puisque $d \leqslant c-1$, le morphisme α_{c-1} est surjectif. Autrement dit, le fermé $\beta'_{c-1}(W') \subset \lim \widetilde{Y}'[[\mathbf{t}_r(-c+1)]]$ fournit un contre-exemple en codimension 1, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Sous-étape 3.2. — On utilise ici la sous-étape 3.1 pour se ramener au cas où $\mathbf{t}_r = \varnothing$. On garde les notations de la sous-étape 3.1. En particulier, on a $X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]] = \widetilde{X}[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r]$, et de même pour Y, X' et Y'. Appelons W'_0, Z'_0, W_0 et Z_0 les adhérences des images de W' dans $\widetilde{Y}'[[\mathbf{t}_r]]$, $\widetilde{X}'[[\mathbf{t}_r]]$, etc. Puisque W' est l'image inverse de Z', il s'ensuit que W'_0 est l'image inverse de Z'_0. De même, puisque W' est une composante irréductible de l'image inverse de W, il s'ensuit que W'_0 est une composante irréductible de l'image inverse de W_0. En particulier, on a $\mathrm{codim}(W'_0) = \mathrm{codim}(Z'_0) = \mathrm{codim}(W_0)$; appelons c_0 la valeur commune de ces codimensions. D'après la sous-étape 3.2, on a aussi $\mathrm{codim}(Z_0) = c_0$. D'après le corollaire 7.1.8, on peut supposer que les compositions suivantes :

$$W'_0[\mathbf{s}_r] \hookrightarrow \lim \widetilde{Y}'[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r] \longrightarrow \lim \widetilde{Y}'[[\mathbf{t}_r(-c_0)]][\mathbf{s}_r], \quad W_0[\mathbf{s}_r] \hookrightarrow \lim \widetilde{Y}[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r] \longrightarrow \lim \widetilde{Y}[[\mathbf{t}_r(-c_0)]][\mathbf{s}_r],$$

$$Z'_0[\mathbf{s}_r] \hookrightarrow \lim \widetilde{X}'[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r] \longrightarrow \lim \widetilde{X}'[[\mathbf{t}_r(-c_0)]][\mathbf{s}_r], \quad Z_0[\mathbf{s}_r] \hookrightarrow \lim \widetilde{X}[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r] \longrightarrow \lim \widetilde{X}[[\mathbf{t}_r(-c_0)]][\mathbf{s}_r],$$

sont finies surjectives. Si W'_1, W_1, Z'_1 et Z_1 désignent les images de W', W, Z' et Z par ces morphismes composés, on a encore $\mathrm{codim}(W'_1) = \mathrm{codim}(Z'_1) = \mathrm{codim}(W_1)$ et il est suffisant de montrer que la valeur commune est aussi celle de $\mathrm{codim}(Z_1)$. Ce raisonnement nous ramène donc au cas où le morphisme $W' \longrightarrow \widetilde{X}[[\mathbf{t}_r]]$ est dominant. Dans ce cas, il suffit de traiter le cas de l'image inverse de W' par le morphisme évident $\widetilde{Y}'((\mathbf{t}_r))[\mathbf{s}_r] \longrightarrow \widetilde{Y}'[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r]$. En considérant les $r+1$-uplets

$$(\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{t}_{r-1}, \mathbf{t}_r, \varnothing) \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_{r-1}, \varnothing, \mathbf{s}_r)$$

on se ramène, comme souhaité, au cas où $\mathbf{t}_r = \varnothing$.

Étape 3.3. — On termine ici la preuve en traitant le cas où $\mathbf{t}_r = \varnothing$. On garde les notations de la sous-étape 3.1. En particulier, on a $X((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]] = \widetilde{X}[\mathbf{s}_r]$, et de même pour Y, X' et Y'. L'argument est le même que celui de la sous-étape 3.1, mais on le reproduit pour la commodité du lecteur.

On raisonne par l'absurde et on se donne un fermé $W' \subset \lim \widetilde{Y}'[\mathbf{s}_r]$ tel que
$$\operatorname{codim}(Z) < \operatorname{codim}(W') = \operatorname{codim}(W) = \operatorname{codim}(Z').$$
Appelons $d = \operatorname{codim}(Z)$ et $c = \operatorname{codim}(W')$. Rappelons que $\mathbf{s}_r = (s_{r,1}, \cdots, s_{r,m_r})$ et, pour $0 \leqslant e \leqslant m_r$, posons $\mathbf{s}_r(-e) = (s_{r,1}, \cdots, s_{r,m_r-e})$. Considérons les compositions suivantes :
$$\beta'_e : W' \hookrightarrow \lim \widetilde{Y}'[\mathbf{s}_r] \longrightarrow \lim \widetilde{Y}'[\mathbf{s}_r(-e)], \qquad \beta_e : W \hookrightarrow \lim \widetilde{Y}[\mathbf{s}_r] \longrightarrow \lim \widetilde{Y}[\mathbf{s}_r(-e)],$$
$$\alpha'_e : Z' \hookrightarrow \lim \widetilde{X}'[\mathbf{s}_r] \longrightarrow \lim \widetilde{X}'[\mathbf{s}_r(-e)], \qquad \alpha_e : Z \hookrightarrow \lim \widetilde{X}[\mathbf{s}_r] \longrightarrow \lim \widetilde{X}[\mathbf{s}_r(-e)].$$
D'après le lemme de normalisation de Noether, quitte à faire un changement de variables linéaire inversible, on peut supposer que les morphismes β'_c, β_c, α'_c et α_d sont finis et surjectifs. Il s'ensuit que les morphismes β'_{c-1}, β_{c-1} et α'_{c-1} sont finis et que les fermés $\beta'_{c-1}(W')$, $\beta_{c-1}(W)$ et $\alpha'_{c-1}(Z')$ sont de codimension 1. Par ailleurs, puisque $d \leqslant c - 1$, le morphisme α_{c-1} est surjectif. Autrement dit, le fermé $\beta'_{c-1}(W') \subset \lim \widetilde{Y}'[\mathbf{s}_r(-c + 1)]$ fournit un contre-exemple en codimension 1, ce qui contredit l'hypothèse de départ. ∎

7.4. Préfaisceaux malléables, I. —

Dans cette sous-section, on introduit et on étudie les complexes de préfaisceaux dits malléables. En gros, il s'agit d'une classe de complexes de préfaisceaux dont la cohomologie feuilletée admet une description simple localement pour la topologie ψ-étale.

Remarques 7.4.1. — Soit $X/\mathcal{F} = (X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ un pro-k-feuilletage singulier à morphismes de transition affines. Dans la suite, nous écrirons « $X/\mathcal{F}$ », tantôt pour désigner le pro-k-feuilletage $(X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$, tantôt pour désigner sa limite projective. Sauf mention explicite du contraire, on observera les règles suivantes.

(a) Soit U un schéma. Par « morphisme de schémas $f : U \longrightarrow X$ » (ou encore « structure de X-schéma sur U ») on entendra toujours un morphisme de U vers la limite projective du pro-schéma X. Si le X-schéma U est de présentation finie (ou, plus généralement, donné comme une limite projective cofiltrante de X-schémas de présentation finie), on peut lui associer canoniquement un pro-schéma de limite projective U (voir [**39**, Chapitre IV, Théorème 8.8.2]). Par abus de language, ce pro-schéma sera encore noté U. De plus, on dispose d'un morphisme canonique de pro-schémas, noté encore $f : U \longrightarrow X$, qui est donné par des morphismes de présentation finie, et qui redonne le morphisme dont on est parti par passage à la limite projective.

Si f est lisse, étale, quasi-fini, etc., le morphisme de pro-schémas $f : U \longrightarrow X$ est alors donné par des morphismes du même type.

(b) Soit $f : U \longrightarrow X$ un morphisme de présentation finie (ou donné comme limite projective cofiltrante de morphismes de présentation finie). Considérons U comme un pro-schéma et f comme un morphisme de pro-schémas comme dans (a). Alors, la structure de feuilletage sur le pro-k-schéma X induit une structure de feuilletage sur le pro-schéma U. Le pro-k-feuilletage ainsi obtenu sera noté $U/\mathcal{F}$. Sa limite est le k-feuilletage basique associé au morphisme f et qui est également noté $U/\mathcal{F}$.

Le cas qui nous intéresse le plus dans cette sous-section est celui où le morphisme de schémas $f : U \longrightarrow X$ est étale (ou pro-étale). Le morphisme de pro-k-feuilletages $f : U/\mathcal{F} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ est alors donné par des morphismes basiques étales et, a fortiori, diff-étales.

(c) Soit U un X-schéma étale (ou pro-étale). Soit F un préfaisceau sur SmFol/k à valeurs dans une catégorie possédant les colimites filtrantes. Par « $F(U/\mathcal{F})$ » on entendra toujours l'extension de F à la catégorie des pro-k-feuilletages diff-lisses évaluée sur le pro-k-feuilletage $U/\mathcal{F}$ décrit dans (b). (Bien entendu, ceci s'applique également à X lui-même.) □

Remarque 7.4.2. — Soit $X/\mathcal{F} = (X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ un pro-k-feuilletage singulier. On suppose que les X_i sont réduits et possèdent un nombre fini de composantes irréductibles pour tout $i \in I$ et que les morphismes

$X_j \longrightarrow X_i$ envoient les points génériques de X_j sur des points génériques de X_i pour tout $j \leqslant i$ dans I. On suppose donnés deux r-uplets de systèmes d'indéterminées $\underline{\mathbf{t}} = (\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{t}_r)$ et $\underline{\mathbf{s}} = (\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_r)$. Le pro-$k$-schéma $X((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]]$ introduit dans la notation 7.3.4 possède une structure naturelle de feuilletage induite de celle $X/\mathcal{F}$ et qu'on obtient en appliquant récursivement la remarque 6.3.4. On note simplement $X((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]]/\mathcal{F}$ le pro-k-feuilletage ainsi obtenu. Le morphisme évident $X((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}]]/\mathcal{F} \longrightarrow X[\underline{\mathbf{t}}, \underline{\mathbf{s}}]/\mathcal{F}$ est diff-étale. □

Pour la notion d'hyper-recouvrement générique de k-feuilletages, voir la définition 6.8.5.

Définition 7.4.3. — *On note $\mathscr{H}$ la classe des pro-k-feuilletages semi-simpliciaux augmentés $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ qui sont de la forme $X_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))/\mathcal{F}_\bullet$ avec :*

(i) $X_\bullet/\mathcal{F}_\bullet$ un k-feuilletage semi-simplicial augmenté tel que le k-feuilletage $X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$ est diff-lisse et possède un nombre fini de composantes irréductibles, et l'augmentation $X_\bullet/\mathcal{F}_\bullet \longrightarrow X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$ est un hyper-recouvrement générique de $X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$;

(ii) $\underline{\mathbf{t}} = (\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{t}_r)$ et $\underline{\mathbf{s}} = (\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_r)$ deux r-uplets de systèmes d'indéterminées.

On note $\mathscr{H}'$ la classe des pro-k-feuilletages semi-simpliciaux augmentés qui sont de la forme $(Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet) \times_{Y_{-1}} V$ avec $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ dans $\mathscr{H}$ et $V \longrightarrow Y_{-1}$ un morphisme pro-étale.

Le résultat suivant établit une propriété de stabilité pour la classe $\mathscr{H}'$ qui servira plus tard.

Lemme 7.4.4. — *Soit $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ un pro-k-feuilletage semi-simplicial augmenté appartenant à $\mathscr{H}'$. Donnons-nous deux systèmes d'indéterminées* $\mathbf{t}$ *et* $\mathbf{s}$. *Soit $y_{-1} \in Y_{-1}[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]$ un point et, pour $n \geqslant 0$, appelons y_n l'ensemble des points génériques de l'image inverse de y_{-1} dans $Y_n[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]$. Considérons les parties y_n comme des pro-sous-schémas localement fermés de la manière évidente. Alors, le pro-k-feuilletage semi-simplicial augmenté $y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ appartient aussi à $\mathscr{H}'$. De plus, il existe un isomorphisme de pro-k-feuilletages semi-simpliciaux augmentés*

$$(\widehat{Y_\bullet[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]})_{y_\bullet}/\mathcal{G}_\bullet \simeq y_\bullet[[\mathbf{t}']]/\mathcal{G}_\bullet,$$

avec $\mathbf{t}'$ un système d'indéterminées dont le cardinal vaut la codimension du point y_{-1}.

Démonstration. — On divise la preuve en deux parties.

Partie A. — Dans cette partie, on montre que $y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ appartient à $\mathscr{H}'$.

On note $Z_n \subset Y_n[[\mathbf{t}]]$ l'adhérence de l'image de y_n par le morphisme $Y_n[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}] \longrightarrow Y_n[[\mathbf{t}]]$. Vu le lemme 7.2.2, on a $Z_\bullet = Y_\bullet[[\mathbf{t}]] \times_{Y_{-1}[[\mathbf{t}]]} Z_{-1}$. D'après le corollaire 7.1.8, quitte à faire un changement de variables $\mathbb{Q}$-linéaire inversible, on peut supposer que la composition de

$$Z_{-1} \hookrightarrow Y_{-1}[[\mathbf{t}]] \longrightarrow Y_{-1}[[\mathbf{t}(-e)]]$$

est finie et surjective pour $e = \operatorname{codim}(Z_{-1})$. (Bien entendu, on note $\mathbf{t}(-e) = (t_1, \cdots, t_{\operatorname{card}(\mathbf{t})-e})$.) D'après la proposition 7.2.3, on a alors un isomorphisme de schémas semi-simpliciaux augmentés

$$Z_\bullet \simeq Y_\bullet[[\mathbf{t}(-e)]] \times_{Y_{-1}[[\mathbf{t}(-e)]]} Z_{-1}.$$

Il s'ensuit que $\eta(Z_\bullet)$ est dans $\mathscr{H}'$.

Remarquons à présent que $y_\bullet$ s'identifie à un pro-sous-schéma localement fermé de $\eta(Z_\bullet)[\mathbf{s}]$. Pour $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, on note $T_n \subset \eta(Z_n)[\mathbf{s}]$ l'adhérence de y_n. On a alors $T_\bullet = \eta(Z_\bullet)[\mathbf{s}] \times_{\eta(Z_{-1})[\mathbf{s}]} T_{-1}$. D'après le lemme de normalisation de Noether, quitte à faire un changement de variables $\mathbb{Q}$-linéaire inversible, on peut supposer que la composition de

$$T_{-1} \hookrightarrow \eta(Z_{-1})[\mathbf{s}] \longrightarrow \eta(Z_{-1})[\mathbf{s}(-d)]$$

est finie et surjective pour $d = \operatorname{codim}(T_{-1})$. Or, on a isomorphisme de schémas semi-simpliciaux augmentés

$$T_\bullet \simeq \eta(Z_\bullet)[\mathbf{s}(-d)] \times_{\eta(Z_{-1})[\mathbf{s}(-d)]} T_{-1}.$$

Il s'ensuit que $\eta(T_\bullet)$ est dans $\mathscr{H}'$ comme souhaité.

Notons au passage que l'argument précédent montre que, modulo un changement de variables $\mathbb{Q}$-linéaire inversible, la composition de

$$\overline{y_n} \hookrightarrow Y_n[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}] \longrightarrow Y_n[[\mathbf{t}(-e)]][\mathbf{s}(-d)]$$

est génériquement finie surjective, et donc génériquement étale. Ceci sera utile dans la partie B ci-dessous.

Partie B. — On peut trouver une famille régulière $f_1, \cdots, f_c \in \mathcal{O}_{Y_{-1}[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}], y_{-1}}$ engendrant l'idéal maximal et tel que $\mathrm{d}_{\mathcal{G}_{-1}}(f_1), \cdots, \mathrm{d}_{\mathcal{G}_{-1}}(f_c)$ engendrent un facteur direct libre de rang c dans $\Omega_{Y_{-1}[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]/\mathcal{G}_{-1}}$ au voisinage de y_{-1}. (Bien entendu, $c = d + e$ est la codimension du point y_{-1}.) Un supplémentaire à ce facteur direct est donné au voisinage de y_{-1} par l'image inverse de $\Omega_{Y_{-1}[[\mathbf{t}(-e)]][\mathbf{s}(-d)]/\mathcal{G}_{-1}}$ suivant le morphisme diff-lisse $Y_{-1}[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]/\mathcal{G}_{-1} \longrightarrow Y_{-1}[[\mathbf{t}(-e)]][\mathbf{s}(-d)]/\mathcal{G}_{-1}$ dont la restriction à $y_{-1}/\mathcal{G}_{-1}$ est diff-étale d'après la partie B. (Utiliser la suite exacte du corollaire 6.1.13.) Ainsi, les formes différentielles $\mathrm{d}_{\mathcal{G}_{-1}}(f_1), \cdots, \mathrm{d}_{\mathcal{G}_{-1}}(f_c)$ forment une base du quotient $\Omega_{Y_{-1}[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]/Y_{-1}[[\mathbf{t}(-e)]][\mathbf{s}(-d)]}$ au voisinage de y_{-1}. Il s'ensuit aussitôt que les images de $\mathrm{d}_{\mathcal{G}_n}(f_1), \cdots, \mathrm{d}_{\mathcal{G}_n}(f_c)$ forment une base du quotient $\Omega_{Y_n[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]/Y_n[[\mathbf{t}(-e)]][\mathbf{s}(-d)]}$ au voisinage de y_n. On est donc en mesure d'appliquer la proposition 6.4.9 qui fournit un isomorphisme de k-feuilletages semi-simpliciaux augmentés

$$(\widehat{Y_\bullet[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]})_{y_\bullet}/\mathcal{G}_\bullet \simeq y_\bullet[[t'_1, \cdots, t'_c]]/\mathcal{G}_\bullet.$$

(On attire l'attention du lecteur sur le fait que les complétions faibles doivent être prises en respectant les structures des pro-schémas.) ■

Jusqu'à la fin de la sous-section, on fixe un k-feuilletage $S/\mathcal{E}$ et une sous-catégorie pleine $\mathscr{V} \subset \mathrm{SgFol}^{\mathcal{E}}/S$ supposée admissible au sens de la définition 6.5.12. On introduit maintenant la notion clef de malléabilité. (Ci-dessous, $\mathrm{Tot}^+(-)$ désigne le complexe total associé à un objet semi-cosimplicial coaugmenté à valeurs dans des complexes.)

Définition 7.4.5. — *On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit F un complexe de préfaisceaux sur $\mathscr{V}$ borné à gauche. On dit que F est* n-malléable *si un (et alors tout) remplacement projectivement* ψ-ét-*fibrant G de F vérifie la propriété suivante. Quelles que soient les données :*

(1) un pro-k-feuilletage semi-simplicial augmenté $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ appartenant à $\mathscr{H}'$,

(2) deux systèmes d'indéterminées $\mathbf{t}$ *et* $\mathbf{s}$ *tels que* $\mathrm{card}(\mathbf{t}) + \mathrm{card}(\mathbf{s}) \leqslant n$,

(3) un morphisme de schémas semi-simpliciaux augmentés $V_\bullet \longrightarrow Y_\bullet[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]$ étale en chaque degré et tel que le morphisme de schémas semi-simpliciaux induit $V_\bullet \longrightarrow Y_\bullet[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}] \times_{Y_{-1}[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]} V_{-1}$ est un hyper-recouvrement étale relatif,

(4) un morphisme de pro-k-feuilletages $V_{-1}/\mathcal{G}_{-1} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ qui fait de $V_{-1}/\mathcal{G}_{-1}$ un pro-objet de $\mathscr{V}$,

le complexe $\mathrm{Tot}^+ G(V_\bullet/\mathcal{G}_\bullet)$ *est acyclique. On dit que F est* malléable *s'il est n-malléable pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 7.4.6. — *Gardons les notations de la définition 7.4.5.*

(a) On dit que F est faiblement n-malléable *si le complexe* $\mathrm{Tot}^+ G(V_\bullet/\mathcal{G}_\bullet)$ *est acyclique quelles que soient les données (1)–(4) avec* $\mathbf{s} = \varnothing$.

(b) On dit que F est presque n-malléable *si le complexe* $\mathrm{Tot}^+ G(V_\bullet/\mathcal{G}_\bullet)$ *est acyclique quelles que soient les données (1)–(4) vérifiant la condition que le morphisme composé $V_{-1} \longrightarrow Y_{-1}[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}] \longrightarrow Y_{-1}[[\mathbf{t}]]$ se factorise par l'ouvert $Y_{-1}[[\mathbf{t}]] \smallsetminus Y_{-1}$ lorsque* $\mathrm{card}(\mathbf{t}) + \mathrm{card}(\mathbf{s}) = n$.

Remarque 7.4.7. — La propriété de presque 0-malléabilité est vide. Ceci est loin d'être le cas pour la propriété de 0-malléabilité même si l'on suppose que F est projectivement ft-fibrant. Voir tout de même la proposition 7.5.11. □

L'énoncé suivant est le résultat principal de la présente sous-section. Il fournit une méthode générale pour démontrer qu'un complexe de préfaisceaux F sur $\mathscr{V}$ est malléable : par récurrence, on se ramène à vérifier que F est faiblement n-malléable sachant qu'il est presque n-malléable.

Théorème 7.4.8. — *Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Soit F un complexe de préfaisceaux sur $\mathscr{V}$ borné à gauche. Si F est faiblement $n-1$-malléable, alors il est presque n-malléable.*

Le reste de la sous-section est consacré à la preuve du théorème 7.4.8. On fixe donc F un complexe de préfaisceaux sur SmFol/k borné à gauche et faiblement $n-1$-malléable. On supposera que F est injectivement ψ-ét-fibrant, ce qui ne restreint pas la généralité. On fixe des données (1)–(4) comme dans la définition 7.4.5 et on suppose que le morphisme étale $V_{-1} \longrightarrow Y_{-1}[[\underline{\mathbf{t}}]]$ se factorise par l'ouvert $Y_{-1}[[\underline{\mathbf{t}}]] \smallsetminus Y_{-1}$ si $\mathrm{card}(\mathbf{t}) + \mathrm{card}(\mathbf{s}) = n$. Ceci entraîne que V_d est de dimension de Krull $\leqslant n-1$ pour tout $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. On suppose aussi que $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ appartient à $\mathscr{H}$ (au lieu de $\mathscr{H}'$), ce qui ne restreint pas la généralité. On cherche à montrer que le complexe $\mathrm{Tot}^+ F(V_\bullet/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique.

Notation 7.4.9. — Soit $P = (P_i)_{i\in I}$ un pro-schéma dont la limite projective est un schéma noethérien. Pour $c \in \mathbb{N}$, on note $P^{(c)}$ le pro-schéma des ouverts de P dont le complémentaire est de codimension $\geqslant c$. Plus explicitement, $P^{(c)}$ est indexé par les couples (i, Q) avec $i \in I$ et $Q \subset P_i$ un ouvert quasi-compact tel que l'image inverse de $P_i \smallsetminus Q$ par le morphisme $\lim P \longrightarrow P_i$ est un fermé de codimension $\geqslant c$ dans $\lim P$. À un tel couple (i, Q), le foncteur $P^{(c)}$ associe le schéma Q. □

Remarque 7.4.10. — On est intéressé par le cas où P est l'un des V_d, pour $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. Dans ce cas, on a $V_d^{(0)} = \varnothing$, $V_d^{(1)} = \eta(V_d)$ et $V_d^{(c)} = V$ pour $c \geqslant n$. En faisant varier d, nous obtenons des pro-schémas semi-simpliciaux augmentés $V_\bullet^{(c)}$. Le théorème 7.4.8 est une conséquence directe du résultat suivant. □

Proposition 7.4.11. — *Pour tout* $0 \leqslant c \leqslant n-1$, *le morphisme*

$$\mathrm{Tot}^+ F(V_\bullet^{(c+1)}/\mathcal{G}_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tot}^+ F(V_\bullet^{(c)}/\mathcal{G}_\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme.

Étant donnés un $S/\mathcal{E}$-feuilletage $Z/\mathcal{H}$ appartenant à $\mathscr{V}$ et un ouvert $W \subset Z$, on pose

$$F(W\backslash Z/\mathcal{H}) = \ker\{F(Z/\mathcal{H}) \to F(W/\mathcal{H})\}. \tag{7.2}$$

Puisque F est supposé injectivement globalement fibrant, le morphisme $F(Z/\mathcal{H}) \longrightarrow F(W/\mathcal{H})$ est surjectif. On a donc une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow F(W\backslash Z/\mathcal{H}) \longrightarrow F(Z/\mathcal{H}) \longrightarrow F(W/\mathcal{H}) \longrightarrow 0.$$

Ceci s'étend également aux pro-objets de $\mathscr{V}$. La proposition 7.4.11 est équivalente à l'énoncé suivant.

Proposition 7.4.12. — *Pour tout* $0 \leqslant c \leqslant n-1$, *le complexe de* $\mathrm{Tot}^+ F(V_\bullet^{(c)}\backslash V_\bullet^{(c+1)}/\mathcal{G}_\bullet)$ *est acyclique.*

Notations 7.4.13. — Soit $P = (P_i)_{i\in I}$ un pro-schéma dont la limite projective est un schéma noethérien et soit $x \in \lim P$ un point.

(a) On note P_x le pro-schéma des voisinages ouverts de x dans P. Plus explicitement, P_x est indexé par les couples (i, Q) avec $i \in I$ et $Q \subset P_i$ un ouvert quasi-compact contenant l'image de x par le morphisme $\lim P \longrightarrow P_i$. À un tel couple (i, Q), le foncteur P_x associe le schéma Q.

(b) On note P_x° le pro-schéma des voisinages ouverts épointés de x dans P. Plus précisément, P_x° est indexé par les triplets (i, Q, Z) avec $i \in I$, $Q \subset P_i$ un ouvert quasi-compact contenant l'image de x et $Z \subset Q$ un fermé constructible dont l'image inverse par $\lim P \longrightarrow P_i$ est contenue dans $\overline{\{x\}}$. À un tel triplet (i, Q, Z), le foncteur P_x° associe le schéma $Q \smallsetminus Z$. □

Lemme 7.4.14. — *Pour* $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$ *et* $0 \leqslant c \leqslant n-1$, *il existe un quasi-isomorphisme canonique*

$$F(V_d^{(c)}\backslash V_d^{(c+1)}/\mathcal{G}_d) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x\in V_d,\,\mathrm{codim}(x)=c} F((V_d)_x^\circ\backslash (V_d)_x/\mathcal{G}_d).$$

Démonstration. — L'argument est standard, mais nous l'incluons pour la commodité du lecteur.

Soit E un sous-ensemble fini de V_d constitué de points de codimension c. Notons $V_d^{(c+1)} \smallsetminus E$ le pro-schéma $(V_d \smallsetminus \overline{E})^{(c+1)}$. (Remarquer que, ensemblistement, la limite de $(V_d \smallsetminus \overline{E})^{(c+1)}$ est bien égale au complémentaire de E dans la limite de $V_d^{(c+1)}$.) Clairement, on a

$$F(V_d^{(c)}\backslash V_d^{(c+1)}/\mathcal{G}_d) \simeq \operatorname*{colim}_E F((V_d^{(c+1)} \smallsetminus E)\backslash V_d^{(c+1)}/\mathcal{G}_d)$$

où E parcourt les sous-ensembles finis de V_d constitués de points de codimension c. Ainsi, il est suffisant d'exhiber des quasi-isomorphismes canoniques

$$F((V_d^{(c+1)} \smallsetminus E)\backslash V_d^{(c+1)}/\mathcal{G}_d) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x\in E} F((V_d)_x^\circ\backslash (V_d)_x/\mathcal{G}_d).$$

Or, on dispose d'un pro-carré distingué relativement à la topologie Zariski

$$\begin{tikzcd} \coprod_{x\in E}(V_d)^{\circ}_x \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{x\in E}(V_d)_x \arrow[d] \\ V_d^{(c+1)} \smallsetminus E \arrow[r] & V_d^{(c+1)}. \end{tikzcd}$$

Puisque F est projectivement Zar-fibrant, il transforme le carré ci-dessus en un carré homotopiquement cartésien, ce qui permet de conclure (voir (7.2)). ■

Corollaire 7.4.15. — *Pour* $0 \leqslant c \leqslant n-1$*, on dispose d'un complexe semi-cosimplicial coaugmenté*

$$\bigoplus_{x\in V_\bullet,\,\mathrm{codim}(x)=c} F((V_\bullet)^{\circ}_x \backslash (V_\bullet)_x/\mathcal{G}_\bullet) \tag{7.3}$$

naturellement quasi-isomorphe au complexe semi-cosimplicial coaugmenté de la proposition 7.4.12 via les quasi-isomorphismes du lemme 7.4.14. Pour $0 \leqslant i \leqslant d$*, le coefficient matriciel* $(\delta^i)_{y,x}$ *de la différentielle*

$$\delta^i : \bigoplus_{x\in V_{d-1},\,\mathrm{codim}(x)=c} F((V_{d-1})^{\circ}_x \backslash (V_{d-1})_x/\mathcal{G}_{d-1}) \longrightarrow \bigoplus_{y\in V_d,\,\mathrm{codim}(y)=c} F((V_d)^{\circ}_y \backslash (V_d)_y/\mathcal{G}_d)$$

admet la description suivante.

(a) Si $x \neq \mathrm{d}_i(y)$*, alors* $(\delta^i)_{y,x} = 0$*.*

(b) Si $x = \mathrm{d}_i(y)$*, alors* $(\delta^i)_{y,x}$ *est caractérisé par la commutation du carré*

$$\begin{tikzcd} F((V_{d-1})^{\circ}_x \backslash (V_{d-1})_x/\mathcal{G}_{d-1}) \arrow[r] \arrow[d, "(\delta^i)_{y,x}"] & F((V_{d-1})_x/\mathcal{G}_{d-1}) \arrow[d] \\ F((V_d)^{\circ}_y \backslash (V_d)_y/\mathcal{G}_d) \arrow[r] & F((V_d)_y/\mathcal{G}_d). \end{tikzcd}$$

Enfin, pour démontrer la proposition 7.4.12, il suffit de prouver que $\mathrm{Tot}^+((7.3))$ *est acyclique.*

Démonstration. — C'est une conséquence de la construction des isomorphismes du lemme 7.4.14. ■

Remarque 7.4.16. — Pour mieux comprendre la suite de l'argument, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, pour un point $y \in V_d$ (de codimension c) tel que $\mathrm{codim}(\mathrm{d}_i(y)) < \mathrm{codim}(y)$, les coefficients matriciels $(\delta^i)_{y,x}$ sont nuls pour tout $x \in V_{d-1}$ (de codimension c). □

Définition 7.4.17. — *Un couple* (d,x)*, formé d'un entier* $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$ *et d'un point* $x \in V_d$*, est dit* primitif *si, pour tout* $0 \leqslant i \leqslant d$*, on a* $\mathrm{codim}(\mathrm{d}_i(x)) < \mathrm{codim}(x)$*.*

Notation 7.4.18. — Soit $\mathcal{E}(c)$ l'ensemble des couples (d,x) avec $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$ et $x \in V_d$ de codimension c. Étant donnés deux couples (d,x), $(d',x') \in \mathcal{E}(c)$, une flèche $(d,x) \to (d',x')$ est la donnée d'une injection croissante $s : \underline{\mathbf{d}}' \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}}$ telle que $s^*(x) = x'$. Muni de ces flèches, $\mathcal{E}(c)$ est naturellement une catégorie. □

Proposition 7.4.19. — *Soit* $\mathcal{C}$ *une composante connexe de* $\mathcal{E}(c)$*. Alors,* $\mathcal{C}$ *contient un unique couple primitif et ce couple primitif est l'objet final de* $\mathcal{C}$*. Plus concrètement, on a les propriétés suivantes.*

(a) Pour $(d,x) \in \mathcal{E}(c)$*, il existe une unique injection croissante* $u : \underline{\mathbf{d_0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}}$ *telle que* $(d_0, u^*(x))$ *est un couple primitif appartenant à* $\mathcal{E}(c)$*.*

(b) Deux couples (d,x)*,* $(d',x') \in \mathcal{E}(c)$ *appartiennent à la même composante connexe de* $\mathcal{E}(c)$ *si et seulement si* $d_0 = d'_0$ *et* $u^*(x) = u'^*(x')$ *avec* $u : \underline{\mathbf{d_0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}}$ *et* $u' : \underline{\mathbf{d}'_0} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}}'$ *les injections croissantes associées à* (d,x) *et* (d',x') *par (a).*

Démonstration. — Soit $(d_0,x_0) \in \mathcal{C}$ avec d_0 minimal. Alors, nécessairement (d_0,x_0) est primitif. (En effet, si pour un certain $0 \leqslant i \leqslant d_0$, on a $\mathrm{codim}(\mathrm{d}_i(x_0)) = \mathrm{codim}(x_0)$, alors $(d_0-1, \mathrm{d}_i(x_0))$ appartiendrait à $\mathcal{C}$ ce qui contredit notre choix de (d_0, x_0).) Nous devons montrer que (d_0, x_0) est l'objet final de $\mathcal{C}$. Pour ce faire, il suffit de montrer que pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} (d,x) \arrow[r] \arrow[d] & (d_0,x_0) \\ (d',x') & \end{tikzcd} \tag{7.4}$$

dans $\mathcal{E}(c)$, il existe une flèche $(d', x') \to (d_0, x_0)$ faisant commuter le triangle que l'on pense. (En effet, ceci entraîne immédiatement que tout couple appartenant à $\mathcal{C}$ est la source d'une flèche de but (d_0, x_0). De plus, en prenant $(d', x') = (d_0, x_0)$, on obtient également l'unicité d'une telle flèche.)

Notons $u : \underline{\mathbf{d_0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}}$ et $s : \underline{\mathbf{d'}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}}$ les applications strictement croissantes définissant les flèches du diagramme (7.4). Ainsi, on a $u^*(x) = x_0$ et $s^*(x) = x'$. Formons le carré cartésien dans $\mathbf{\Delta}'_+$:

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathbf{d}'_0} \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "s_0"] & \underline{\mathbf{d}'} \arrow[d, "s"] \\ \underline{\mathbf{d_0}} \arrow[r, "u"] & \underline{\mathbf{d}}. \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, il existe un hyper-recouvrement générique $X_\bullet/\mathcal{F}_\bullet \longrightarrow X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$ et des uplets de systèmes d'indéterminées $\underline{\mathbf{t}}'$ et $\underline{\mathbf{s}}'$ tels que $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet \simeq X_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,))/\mathcal{F}_\bullet$. En prenant $\underline{\mathbf{t}} = (\underline{\mathbf{t}}', \mathbf{t})$ et $\underline{\mathbf{s}} = (\underline{\mathbf{s}}', \mathbf{s})$, il s'ensuit que $Y_\bullet[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}] \simeq X_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]]$. Étant donné que $X_\bullet \longrightarrow X_{-1}$ est un hyper-recouvrement générique, le carré

$$\begin{tikzcd} X_d \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "s^*"] & X_{d_0} \arrow[d, "s_0^*"] \\ X_{d'} \arrow[r, "u'^*"] & X_{d'_0} \end{tikzcd}$$

vérifie les conditions (1)–(4) de la proposition 7.3.6. Ladite proposition s'applique alors et entraîne aussitôt que $\operatorname{codim}(s_0^*(x_0)) = \operatorname{codim}(x_0)$. Puisque (d_0, x_0) est primitif, ceci ne peut arriver que lorsque $d_0 = d'_0$, ce qui permet de conclure. ■

Notation 7.4.20. — On note $\mathcal{P}(c) \subset \mathcal{E}(c)$ la sous-catégorie (discrète) formée des couples primitifs. □

Corollaire 7.4.21. — *Pour* $0 \leqslant c \leqslant n-1$, *le complexe semi-cosimplicial coaugmenté* (7.3) *admet la décomposition suivante :*

$$\bigoplus_{(d_0,x_0)\in\mathcal{P}(c)} \left(\bigoplus_{(\bullet,x)\to(d_0,x_0)} F((V_\bullet)^\circ_x \backslash (V_\bullet)_x/\mathcal{G}_\bullet) \right). \tag{7.5}$$

Construction 7.4.22. — Soit $d_0 \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$ et considérons la catégorie $\underline{\mathbf{d_0}}\backslash\mathbf{\Delta}'_+$. Étant donné un foncteur covariant G de $\underline{\mathbf{d_0}}\backslash\mathbf{\Delta}'_+$ dans une catégorie additive, on notera $\int G$ l'objet semi-cosimplicial coaugmenté donné par

$$(\textstyle\int G)^d = \displaystyle\bigoplus_{s : \underline{\mathbf{d_0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}}} G(s).$$

Par construction, $(\int G)^d = 0$ si $d < d_0$. □

Proposition 7.4.23. — *Soit* (d_0, x_0) *un couple primitif. Pour une injection croissante* $s : \underline{\mathbf{d_0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}}$, *on pose*

$$G_{V,d_0,x_0}(s) = \bigoplus_{(d,x)\in\mathcal{E}(c),\, s^*(x)=x_0} F((V_d)^\circ_x \backslash (V_d)_x/\mathcal{G}_d).$$

Alors, G_{V,d_0,x_0} *est naturellement un foncteur covariant de* $\underline{\mathbf{d_0}}\backslash\mathbf{\Delta}'_+$ *dans la catégorie des complexes. De plus, on a une identification de complexes semi-cosimpliciaux coaugmentés (voir le corollaire 7.4.21)*

$$\textstyle\int G_{V,d_0,x_0} = \displaystyle\bigoplus_{(\bullet,x)\to(d_0,x_0)} F((V_\bullet)^\circ_x \backslash (V_\bullet)_x/\mathcal{G}_\bullet).$$

Notation 7.4.24. — Soit G un foncteur covariant de $\underline{\mathbf{d_0}}\backslash\boldsymbol{\Delta}'_+$. Étant donnée une injection croissante $s : \underline{\mathbf{d_0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}}$, on note $G^{(s)}$ l'objet semi-cosimplicial coaugmenté donné par

$$G^{(s)}(\underline{\mathbf{d}'}) = G(s' : \underline{\mathbf{d_0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d+1+d'}})$$

avec $s'(i) = s(i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant d_0$. □

Lemme 7.4.25. — *Soit G un foncteur covariant de $\underline{\mathbf{d_0}}\backslash\boldsymbol{\Delta}'_+$ dans les complexes. On suppose que G est borné à gauche. Alors, pour que* $\mathrm{Tot}^+ \int G$ *soit acyclique, il suffit que* $\mathrm{Tot}^+ G^{(s)}$ *le soit pour toute injection croissante $s : \underline{\mathbf{d_0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}}$ vérifiant $s(d_0) = d$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur d_0. Lorsque $d_0 = -1$, l'énoncé est tautologique. On peut donc supposer que $d_0 \geqslant 0$. On dispose alors d'une filtration décroissante $\mathrm{F} = (\mathrm{F}^e)_{e\in\mathbb{N}}$ du complexe semi-cosimplicial coaugmenté $\int G$ qui est donnée en degré $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$ par

$$(\mathrm{F}^e)^d = \bigoplus_{s : \underline{\mathbf{d_0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}},\ s(0)\geqslant e} G(s).$$

Le fait que le complexe G soit borné à gauche entraîne aussitôt que la filtration $(\mathrm{Tot}^+ \mathrm{F}^e)_e$ est finie et exhaustive en chaque degré cohomologique. Il est donc suffisant de montrer que les complexes $\mathrm{Tot}^+ \mathrm{gr}^e_{\mathrm{F}}$ sont acycliques pour tout $e \in \mathbb{N}$.

Appelons $\mathfrak{q}_e : \underline{\mathbf{d_0 - 1}}\backslash\boldsymbol{\Delta}'_+ \longrightarrow \underline{\mathbf{d_0}}\backslash\boldsymbol{\Delta}'_+$ le foncteur qui à une injection croissante $s : \underline{\mathbf{d_0 - 1}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}}$ associe l'injection croissante $\mathfrak{q}_e(s) : \underline{\mathbf{d_0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d+1+e}}$ définie par $\mathfrak{q}_e(s)(0) = e$ et $\mathfrak{q}_e(s)(i) = s(i-1) + 1 + e$ pour $1 \leqslant i \leqslant d_0$. On vérifie aussitôt que le complexe $\mathrm{Tot}^+ \mathrm{gr}^e_{\mathrm{F}}$ s'identifie canoniquement à $(\mathrm{Tot}^+ \int G \circ \mathfrak{q}_e)[-e-1]$. Il est donc suffisant de montrer que les complexes $\mathrm{Tot}^+ \int G \circ \mathfrak{q}_e$ sont acycliques. L'hypothèse de récurrence appliquée aux $G \circ \mathfrak{q}_e$ permet de conclure. ■

Corollaire 7.4.26. — *Pour démontrer la proposition 7.4.12 (et donc aussi le théorème 7.4.8), il suffit de montrer que les complexes* $\mathrm{Tot}^+ G_{V,-1,x_0}$ *sont acycliques pour tous les $V_\bullet$ comme avant et tous les $x_0 \in V_{-1}$.*

Démonstration. — D'après les corollaires 7.4.15 et 7.4.21, et la proposition 7.4.23, pour démontrer la proposition 7.4.12 il reste à montrer que les complexes $\mathrm{Tot}^+ \int G_{V,d_0,x_0}$ sont acycliques pour tous les couples primitifs (d_0, x_0). D'après le lemme 7.4.25, il suffit de montrer que les complexes $\mathrm{Tot}^+ G^{(s)}_{V,d_0,x_0}$ sont acycliques pour tous les couples primitifs (d_0, x_0) et les injections croissantes $s : \underline{\mathbf{d_0}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{d}}$ avec $s(d_0) = d$. Or, on a un isomorphisme évident de complexes semi-cosimpliciaux coaugmentés

$$G^{(s)}_{V,d_0,x_0} = \bigoplus_{\substack{y\in V_d,\ s^*(y)=x_0 \text{ et} \\ \mathrm{codim}(y)=\mathrm{codim}(x_0)}} G_{V_{d+1+\bullet},-1,y}.$$

Or, le pro-k-feuilletage semi-simplicial augmenté $V_{d+1+\bullet}$ est du même type que ceux considérés auparavant (prendre dans (1) l'hyper-recouvrement générique $Y_{d+1+\bullet}/\mathcal{G}_{d+1+\bullet} \longrightarrow Y_d/\mathcal{G}_d$). Ceci permet de conclure. ■

Pour terminer la preuve de la proposition 7.4.12 (et celle du théorème 7.4.8), il nous reste donc à établir l'énoncé suivant.

Proposition 7.4.27. — *Pour tout $u \in V_{-1}$, le complexe*

$$\mathrm{Tot}^+\left(\bigoplus_{(\bullet,v)\to(-1,u)} F((V_\bullet)^\circ_v\backslash(V_\bullet)_v/\mathcal{G}_\bullet)\right)$$

est acyclique.

Démonstration. — Notons $c = \mathrm{codim}(u)$. Rappelons que V_{-1} est de dimension $\leqslant n-1$ car le morphisme $V_{-1} \longrightarrow Y_{-1}[[\mathbf{t}]]$ se factorise par l'ouvert $Y_{-1}[[\mathbf{t}]] \smallsetminus Y_{-1}$. Ceci entraîne que $c \leqslant n-1$. Rappelons aussi que F est supposé faiblement $n-1$-malléable. Appelons y_{-1} l'image de u dans $Y_{-1}[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]$. Quitte à remplacer V_{-1} par un voisinage ouvert de u, on peut supposer que $u \in V_{-1}$ est l'unique point dans l'image inverse de

y_{-1}. Dans ce cas, on a un isomorphisme de pro-k-feuilletages semi-simpliciaux augmentés

$$\coprod_{(\bullet,v)\to(-1,u)} \widehat{(V_\bullet)}_v/\mathcal{G}_\bullet \xrightarrow{\sim} \left(\widehat{(Y_\bullet[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}])}_{y_\bullet}/\mathcal{G}_\bullet\right) \times_{Y_\bullet[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]} V_\bullet$$

avec $y_\bullet$ comme dans le lemme 7.4.4. D'après ledit lemme, $\widehat{(Y_\bullet[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}])}_{y_\bullet}/\mathcal{G}_\bullet$ s'identifie à $y_\bullet[[\mathbf{t}']]/\mathcal{G}_\bullet$, avec $\mathrm{card}(\mathbf{t}') = c$, et $y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ appartient à $\mathscr{H}'$. On dispose donc d'un morphisme de pro-k-feuilletages semi-simpliciaux augmentés

$$\coprod_{(\bullet,v)\to(-1,u)} \widehat{(V_\bullet)}_v/\mathcal{G}_\bullet \longrightarrow y_\bullet[[\mathbf{t}']]/\mathcal{G}_\bullet$$

qui vérifie la condition de la donnée (3) de la définition 7.4.5. Puisque F est faiblement $n-1$-malléable, il s'ensuit que les complexes

$$\mathrm{Tot}^+\left(\bigoplus_{(\bullet,v)\to(-1,u)} F(\widehat{(V_\bullet)}_v/\mathcal{G}_\bullet)\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tot}^+\left(\bigoplus_{(\bullet,v)\to(-1,u)} F(\widehat{(V_\bullet)}_v^\circ/\mathcal{G}_\bullet)\right)$$

sont acycliques. (Bien entendu, $\widehat{(V_\bullet)}_v^\circ = \widehat{(V_\bullet)}_v \smallsetminus v$.) On en déduit que le complexe

$$\mathrm{Tot}^+\left(\bigoplus_{(\bullet,v)\to(-1,u)} F(\widehat{(V_\bullet)}_v^\circ \backslash \widehat{(V_\bullet)}_v/\mathcal{G}_\bullet)\right)$$

est acyclique. Or, puisque F est projectivement ψ-Nis-fibrant, les morphismes évidents

$$F((V_d)_v^\circ \backslash (V_d)_v/\mathcal{G}_d) \longrightarrow F(\widehat{(V_d)}_v^\circ \backslash \widehat{(V_d)}_v/\mathcal{G}_d)$$

sont des quasi-isomorphismes par le corollaire 6.9.11, ce qui permet de conclure. ■

On termine la sous-section avec l'énoncé suivant qui précise les relations entre les différentes variantes de la malléabilité. Il s'agit en fait d'un corollaire du théorème 7.4.8

Corollaire 7.4.28. — *Pour $n \in \mathbb{N}$, on a les équivalences suivantes*

$$\textit{(faiblement } n\textit{-malléable)} \Leftrightarrow \textit{(}n\textit{-malléable)} \Leftrightarrow \textit{(presque } n+1\textit{-malléable)}$$

Démonstration. — En effet, les implications

$$(\text{presque } n+1\text{-malléable}) \Rightarrow (n\text{-malléable}) \Rightarrow (\text{faiblement } n\text{-malléable})$$

sont évidentes et on a l'implication

$$(\text{faiblement } n\text{-malléable}) \Rightarrow (\text{presque } n+1\text{-malléable})$$

grâce au théorème 7.4.8. ■

7.5. Deux résultats techniques sur la classe $\mathscr{H}$. —

Dans cette sous-section, on démontre que la classe $\mathscr{H}$ introduite dans la définition 7.4.3 est constituée d'hyper-recouvrements pro-génériques (au sens de la définition 7.5.4 ci-dessous). Ce fait peut s'avérer crucial lorsqu'on cherche à montrer la malléabilité d'un complexe de préfaisceaux. On démontre ensuite une variante du théorème 4.5.1 qui jouera un rôle important dans la suite via le critère de malléabilité du théorème 7.6.4. On continue à utiliser les notations 7.1.4 et 7.3.4 (et la remarque 7.4.1). On commence avec quelques faits simples qui serviront dans cette sous-section.

Remarque 7.5.1. — Soient X un schéma et $Z \subset X$ un fermé. On suppose que X et Z possèdent un nombre fini de composantes irréductibles et que l'ensemble des points génériques de Z est contenu dans un ouvert affine de X. Soient $\underline{\mathbf{t}} = (\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{t}_r)$ et $\underline{\mathbf{s}} = (\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_r)$ deux r-uplets de systèmes d'indéterminées. Étant donné un élément $\alpha = (U_0, \cdots, U_r)$ de l'ensemble indexant du pro-schéma $X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$, on définit par récurrence des sous-schémas fermés $W_0 \subset U_0, \cdots, W_r \subset U_r$, en posant $W_0 = U_0 \cap Z$ et, pour $1 \leqslant p \leqslant r$, $W_p = U_p \cap (W_{p-1}[[\mathbf{t}_p]][\mathbf{s}_p])$. On dit que α est *compatible* à Z si les ouverts $W_0 \subset Z$ et $W_p \subset W_{p-1}[[\mathbf{t}_p]][\mathbf{s}_p]$, pour $1 \leqslant p \leqslant r$, sont denses. Dans ce cas, $(W_0, \cdots, W_r)$ est un élément de l'ensemble indexant du pro-schéma $Z((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \mathbf{s}\,))$. □

Lemme 7.5.2. — *Soient X et Z comme dans la remarque 7.5.1. On note $X_Z((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$ le pro-schéma indexé par les α compatibles à Z et qui à un tel $\alpha = (U_0, \cdots, U_r)$ associe U_r. Il existe alors un morphisme évident de pro-schémas $Z((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)) \hookrightarrow X_Z((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$ donnée par les immersions fermées $W_r \hookrightarrow U_r$.*

Démonstration. — C'est évident. ■

Lemme 7.5.3. — *Soient X et Z comme dans la remarque 7.5.1. Soit $\alpha = (U_0, \cdots, U_r)$ un élément de l'ensemble indexant du pro-schéma $X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$. On suppose que les morphismes $U_p \longrightarrow U_{p-1}$ sont fortement surjectifs pour $1 \leqslant p \leqslant r$ (voir la définition 7.3.1). Alors α est compatible à Z si et seulement si $U_0 \cap Z$ est dense dans Z.*

Démonstration. — La condition est clairement nécessaire. Pour la réciproque, on remarque que les ouverts $W_p \subset W_{p-1}[[\mathbf{t}_p]][\mathbf{s}_p]$ sont denses pour tout $1 \leqslant p \leqslant r$. En effet, d'une part, les morphismes $W_p \longrightarrow W_{p-1}$ sont fortement surjectifs (utiliser le lemme 7.3.3) et, d'autre part, les morphismes $W_{p-1}[[\mathbf{t}_p]][\mathbf{s}_p] \longrightarrow W_{p-1}$ induisent des bijections sur les ensembles de composantes irréductibles. ■

Dans cette sous-section, nous utiliserons les notions suivantes d'hyper-recouvrements génériques et pro-génériques (comparer avec la définition 4.6.11 et la remarque 4.6.12.)

Définition 7.5.4. —

(a) Un hyper-recouvrement générique *(resp.* pro-générique*) d'un schéma quasi-compact X est un morphisme de schémas semi-simpliciaux $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le morphisme*
$$Y_p \longrightarrow (\operatorname{cosk}^X_{p-1} Y)_p \tag{7.6}$$
est dominant et en involution (resp. dominant et plat à nil-immersion près).

(b) Un hyper-recouvrement générique *(resp.* pro-générique*)* relatif *d'un schéma semi-simplicial $U_\bullet$ quasi-compact en chaque degré est un morphisme de schémas semi-simpliciaux $h_\bullet : V_\bullet \longrightarrow U_\bullet$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le morphisme*
$$V_p \longrightarrow U_p \times_{(\operatorname{cosk}_{p-1} U)_p} (\operatorname{cosk}_{p-1} V)_p \tag{7.7}$$
est dominant et en involution (resp. dominant et plat à nil-immersion près).

Le premier résultat principal de cette sous-section s'énonce comme suit.

Théorème 7.5.5. — *Soit $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ un morphisme de schémas semi-simpliciaux augmentés tel que :*
- *pour $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, X_d et Y_d sont réduits et possèdent un nombre fini de composantes irréductibles ;*
- *le morphisme $Y_{-1} \longrightarrow X_{-1}$ est dominant et en involution ;*
- *le schéma semi-simplicial $X_\bullet$ est un hyper-recouvrement générique de X_{-1} et le morphisme de schémas semi-simpliciaux $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet \times_{X_{-1}} Y_{-1}$ est un hyper-recouvrement générique relatif.*

On se donne deux r-uplets de systèmes d'indéterminées $\underline{\mathbf{t}} = (\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{t}_r)$ et $\underline{\mathbf{s}} = (\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_r)$. Alors, le morphisme de schémas semi-simpliciaux
$$Y_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)) \longrightarrow X_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)) \times_{X_{-1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))} Y_{-1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$$
est un hyper-recouvrement pro-générique relatif.

Le résultat suivant est un cas particulier du théorème 7.5.5.

Corollaire 7.5.6. — *Soit $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ un pro-k-feuilletage semi-simplicial augmenté appartenant à $\mathscr{H}$. Alors, $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet \longrightarrow Y_{-1}/\mathcal{G}_{-1}$ est un hyper-recouvrement pro-générique.*

Pour démontrer le théorème 7.5.5, il faut vérifier que les morphismes
$$h_p : Y_p((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)) \longrightarrow X_p((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)) \times_{(\operatorname{cosk}^{X_{-1}((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))}_{p-1} X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))_p} (\operatorname{cosk}^{Y_{-1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))}_{p-1} Y((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))_p \tag{7.8}$$
sont dominants. (La platitude est immédiate car $Y_p((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$ est le spectre d'un corps.) On raisonne par récurrence sur p. Dans la suite, on fixe $p \geqslant -1$ et on cherche à montrer que h_{p+1} est dominant en supposant que h_q est dominant pour $0 \leqslant q \leqslant p$. On établit d'abord la conséquence suivante de l'hypothèse de récurrence.

Lemme 7.5.7. — *Soit $X_\bullet$ un schéma semi-simplicial augmenté vérifiant les conditions du théorème 7.5.5. Alors, le morphisme $X_{p+1} \longrightarrow (\operatorname{cosk}_p^{X_{-1}((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))} X((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})))_{p+1}$ est plat et dominant.*

Démonstration. — Si $p = -1$, il s'agit du morphisme $X_0((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})) \longrightarrow X_{-1}((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$ qui est clairement dominant. Supposons que $p \geqslant 0$. Le morphisme $X_{1+\bullet} \longrightarrow X_\bullet$ vérifie les conditions du théorème 7.5.5. D'après l'hypothèse de récurrence, le morphisme (7.8) est plat et dominant pour $Y_\bullet = X_{1+\bullet}$. D'après la proposition 4.3.9, le but de (7.8) avec $Y_\bullet = X_{1+\bullet}$ s'identifie à $(\operatorname{cosk}_p^{X_{-1}((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))} X((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})))_{p+1}$ ce qui permet de conclure. ∎

Lemme 7.5.8. — *Il suffit de démontrer que h_{p+1} est dominant lorsque $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est élémentaire associé à la projection d'un espace affine relatif de dimension infinie dénombrable.*

Démonstration. — On divise la preuve en deux parties.

Partie A. — Soit $Z_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ un morphisme de schémas semi-simpliciaux augmentés vérifiant les conditions du théorème 7.5.5. D'après la proposition 4.4.9, si le morphisme h_{p+1} est plat et dominant pour les morphismes $Z_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ et $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$, il l'est aussi pour le morphisme composé $Z_\bullet \longrightarrow X_\bullet$.

Par ailleurs, si le morphisme h_{p+1} est plat et dominant pour le morphisme composé $Z_\bullet \longrightarrow X_\bullet$, il l'est aussi pour le morphisme $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$. En effet, étant donné le carré commutatif que l'on imagine reliant les morphismes h_{p+1} pour $Z_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ et $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$, on se ramène à montrer que le changement de base du morphisme

$$(\operatorname{cosk}_p^{Z_{-1}((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))} Z((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})))_{p+1} \longrightarrow (\operatorname{cosk}_p^{Y_{-1}((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))} Y((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})))_{p+1} \tag{7.9}$$

suivant $X_{p+1} \longrightarrow (\operatorname{cosk}_p^{X_{-1}((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))} X((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})))_{p+1}$ est dominant. Vu le lemme 7.5.7, il reste à montrer que le morphisme (7.9) est plat et dominant, ce qui découle de la proposition 4.4.13(b).

Partie B. — D'après la partie A, on peut supposer que $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est q-élémentaire, pour un certain entier $-1 \leqslant q \leqslant p$, et que le X_q-schéma Y_q est la limite d'une tour de X_q-schémas lisses $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ avec $Q_i \longrightarrow Q_{i-1}$ la projection d'un fibré vectoriel pour tout $i \geqslant 1$. On peut supposer que Q_0 est affine. Il existe alors un morphisme dominant et en involution $Z_q \longrightarrow Y_q$ tel que $Z_q \longrightarrow Q_0$ est la projection d'un espace affine relatif de dimension infinie dénombrable. (On utilise ici le fait qu'un fibré vectoriel sur un schéma affine est facteur direct d'un fibré vectoriel libre.) En invoquant une deuxième fois la partie A, on se ramène à traiter le cas où $Y_q \longrightarrow Q_0$ est la projection d'un espace affine de dimension infinie dénombrable.

Quitte à remplacer Q_0 par un ouvert dense, on peut supposer qu'il existe un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} Y_q \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "f"'] & A_q \arrow[d] \\ & X_q \end{tikzcd}$$

avec A_q un espace affine de dimension infinie dénombrable, et e un morphisme étale et dominant. Appelons $A_\bullet$ la source du morphisme q-élémentaire $A_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ associé au X_q-schéma A_q. On dispose alors d'un morphisme de schémas semi-simpliciaux augmentés $e_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ qui est étale dominant en tout degré. Le morphisme $e_\bullet$ étant fini au-dessus d'un ouvert dense de $A_\bullet$, le carré

$$\begin{tikzcd} Y_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})) \arrow[r] \arrow[d] & A_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})) \arrow[d] \\ \eta(Y_\bullet) \arrow[r] & \eta(A_\bullet) \end{tikzcd}$$

est cartésien à flèches horizontales finies étales. Or, la flèche horizontale inférieure est q-élémentaire associée au morphisme fini, étale et surjectif $\eta(Y_q) \longrightarrow \eta(A_q)$. Il s'ensuit que la flèche horizontale supérieure est également q-élémentaire associée à un morphisme fini, étale et surjectif. En particulier, c'est un hyperrecouvrement générique relatif. D'après la proposition 4.4.9, si $A_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})) \longrightarrow X_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$ devient un hyperrecouvrement pro-générique après $p+1$-troncation, il en est de même de $Y_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})) \longrightarrow X_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$. Ceci termine la preuve du lemme. ∎

Démonstration du théorème 7.5.5. — À partir de maintenant, on suppose que $Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est q-élémentaire, pour un certain entier $-1 \leqslant q \leqslant p$, et que le X_q-schéma Y_q est un espace affine relatif de dimension infinie dénombrable. On divise la preuve en plusieurs étapes.

Étape 1. — Soit ∂ une dérivation agissant trivialement sur les fonctions sur X_q et munissons le X_q-schéma Y_q d'une structure de (X_q, ∂)-schéma « libre » de la manière suivante : on choisit un isomorphisme $Y_q \simeq X_q[x_i;\, i \in \mathbb{N}]$ et on fait agir ∂ par $\partial(x_i) = x_{i+1}$. Il s'ensuit une structure de ∂-schéma semi-simplicial augmenté sur $Y_\bullet$ de sorte que $X_\bullet$ devient le quotient discret effectif de $Y_\bullet$ (au sens de la définition 3.2.4).

Pour $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, le schéma $Y_d((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$ est la limite projective de schémas affines V_r suivant les $r+1$-uplets $(V_0, \cdots, V_r)$ où V_0 est un ouvert affine et dense de Y_d et, pour $1 \leqslant p \leqslant r$, V_p est ouvert affine et dense de $V_{p-1}[[\mathbf{t}_p]][\mathbf{s}_p]$. Par récurrence, et en faisant agir ∂ sur les coefficients des séries formelles et des polynômes, on déduit une structure de ∂-schéma sur V_r et, par passage à la limite, une structure de ∂-schéma sur $Y_d((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$. Ainsi, on a un ∂-schéma semi-simplicial augmenté $Y_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$ et, d'après la proposition 7.5.9 ci-dessous, $X_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$ s'identifie au quotient discret effectif de $Y_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$.

Étape 2. — On rappelle qu'on cherche à montrer que le morphisme h_{p+1} est dominant (voir (7.8)). Le morphisme h_{p+1} est déduit du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)) & \longrightarrow & (\operatorname{cosk}_p^{Y_{-1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))} Y((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))_{p+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)) & \longrightarrow & (\operatorname{cosk}_p^{X_{-1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))} X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))_{p+1} \end{array} \tag{7.10}$$

par la propriété universelle du produit fibré. Grâce au lemme 7.5.7, les flèches horizontales sont plates et dominantes. Ainsi, $\mathcal{O}((\operatorname{cosk}_p^{X_{-1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))} X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))_{p+1})$ s'identifie au sous-anneau $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(X_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))$ engendré par les images des morphismes $-\circ \mathrm{d}_i : \mathcal{O}(X_p((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))) \longrightarrow \mathcal{O}(X_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))$, pour $0 \leqslant i \leqslant p+1$. De même, $\mathcal{O}((\operatorname{cosk}_p^{Y_{-1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))} Y((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))_{p+1})$ s'identifie au sous-anneau $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(Y_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))$ engendré par les images des morphismes $-\circ \mathrm{d}_i : \mathcal{O}(Y_p((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))) \longrightarrow \mathcal{O}(Y_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))$, pour $0 \leqslant i \leqslant p+1$. Pour démontrer le théorème 7.5.5, on doit prouver que le morphisme

$$\operatorname{Frac}(\mathcal{B}) \otimes_{\operatorname{Frac}(\mathcal{A})} \mathcal{O}(X_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))) \longrightarrow \mathcal{O}(Y_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))) \tag{7.11}$$

est injectif.

Étape 3. — Dans cette étape, nous allons montrer que $\operatorname{Frac}(\mathcal{B})^{\partial=0} = \operatorname{Frac}(\mathcal{A})$. D'après l'étape 1, on a l'égalité de corps $\mathcal{O}(X_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))) = (\mathcal{O}(Y_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))))^{\partial=0}$. Il s'ensuit que

$$\operatorname{Frac}(\mathcal{B})^{\partial=0} = \operatorname{Frac}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{O}(X_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))),$$

l'intersection étant prise dans $\mathcal{O}(Y_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))$. Un élément F de cette intersection peut donc être représenté de deux manières.

(i) Il existe un élément $\alpha = (U_0, \cdots, U_r)$ dans l'ensemble indexant du pro-schéma $X_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$ et une fonction régulière $f \in \mathcal{O}(U_r)$ telle que F est l'image de f par $\mathcal{O}(U_r) \longrightarrow \mathcal{O}(Y_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))$.

(ii) Il existe un élément $\beta = (V_0, \cdots, V_r)$ dans l'ensemble indexant du pro-schéma $Y_p((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$, et des familles finies $(g_{i,\mu})_{\mu \in I}$ et $(h_{i,\nu})_{\nu \in J}$ de fonctions régulières sur V_r, pour $0 \leqslant i \leqslant p+1$, telles que

$$F = \frac{\sum_{\mu \in I} \prod_{0 \leqslant i \leqslant p+1} g_{i,\mu} \circ \mathrm{d}_i}{\sum_{\nu \in J} \prod_{0 \leqslant i \leqslant p+1} h_{i,\nu} \circ \mathrm{d}_i}. \tag{7.12}$$

Soit $\gamma = (W_0, \cdots, W_r)$ dans l'ensemble indexant du pro-schéma $Y_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$ qui est suffisamment fin pour avoir des morphismes $W_r \longrightarrow U_r$ et, pour $0 \leqslant i \leqslant p+1$, $\mathrm{d}_i : W_r \longrightarrow V_r$. D'après le lemme 7.3.5, quitte à raffiner γ, on peut supposer que les morphismes $W_p \longrightarrow W_{p-1}$ sont fortement surjectifs pour tout $1 \leqslant p \leqslant r-1$. Quitte à raffiner d'avantage γ, on peut supposer que le dénominateur de la fraction dans (7.12) est inversible sur W_r.

Puisque le morphisme $Y_q \longrightarrow X_q$ est la projection d'un espace affine, on peut trouver une section $\varsigma : X_{p+1} \longrightarrow Y_{p+1}$ telle que $W_0 \cap \varsigma(X_{p+1})$ est dense dans X_{p+1} et tel que, pour tout $0 \leqslant i \leqslant p+1$, le morphisme composé $\mathrm{d}_i \circ \varsigma : X_{p+1} \longrightarrow Y_p$ se factorise par $\mathrm{d}_i : X_{p+1} \longrightarrow X_p$. En effet, le choix d'un isomorphisme $Y_q \simeq A_q \times X_q$ induit un isomorphisme $Y_\bullet \simeq A_\bullet \times X_\bullet$ avec $A_\bullet$ la source du morphisme q-élémentaire $A_\bullet \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ associé au k-schéma A_q. Il suffit alors de prendre pour ς une section induite par un k-point de A_{p+1} appartenant à l'image de W_0 par le morphisme ouvert $Y_{p+1} \longrightarrow A_{p+1}$. Si $\varsigma_i : X_p \longrightarrow Y_p$ est la section induite par l'image par $\mathrm{d}_i : A_{p+1} \longrightarrow A_p$ du k-point choisi, alors on a bien $\mathrm{d}_i \circ \varsigma = \varsigma_i \circ \mathrm{d}_i$.

Grâce aux lemmes 7.5.2 et 7.5.3, on dispose d'un morphisme évident $X_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)) \longrightarrow W_r$ déduit de ς et que l'on note encore ς. En appliquant le morphisme $- \circ \varsigma : \mathcal{O}(W_r) \longrightarrow \mathcal{O}(X_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))$ aux données dans (i) et (ii) ci-dessus, on obtient l'identité

$$f|_{X_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))} = \frac{\sum_{\mu \in I} \prod_{0 \leqslant i \leqslant p+1} g_{i,\mu} \circ \varsigma_i \circ \mathrm{d}_i}{\sum_{\nu \in J} \prod_{0 \leqslant i \leqslant p+1} h_{i,\nu} \circ \varsigma_i \circ \mathrm{d}_i}$$

où l'on a noté ς_i le morphisme $X_p((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)) \longrightarrow V_r$ déduit de $\varsigma_i : X_p \longrightarrow Y_p$. Ceci montre que $f|_{X_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))}$ est dans $\mathrm{Frac}(\mathcal{A})$ comme souhaité.

Étape 4. — Il est maintenant aisé de conclure. En effet, d'après l'étape 2, on doit montrer que le morphisme (7.11) est injectif. Or, d'après les étapes 1 et 3, on sait que $\mathcal{O}(X_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))) = \mathcal{O}(Y_{p+1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))^{\partial=0}$ et que $\mathrm{Frac}(\mathcal{A}) = \mathrm{Frac}(\mathcal{B})^{\partial=0}$. Le résultat recherché découle alors de la proposition 1.3.3. ∎

La proposition suivante a servi dans la preuve du théorème 7.5.5.

Proposition 7.5.9. — *Soit X un schéma intègre et soit $Y \longrightarrow X$ la projection d'un espace affine relatif de dimension au plus dénombrable. On suppose que Y est muni d'une structure de (k, Δ)-schéma, avec Δ un ensemble fini de dérivations qui commutent deux à deux, et que X est le quotient discret effectif de Y. Soient $\underline{\mathbf{t}} = (\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{t}_r)$ et $\underline{\mathbf{s}} = (\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_r)$ deux r-uplets de systèmes d'indéterminées et faisons agir Δ sur les coefficients des séries formelles et des polynômes. Alors, on a $\mathcal{O}(X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))) = (\mathcal{O}(Y((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))))^{\Delta=0}$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur r ; lorsque $r = 1$, il n'y a rien à montrer. Dans la suite, on suppose que $r \geqslant 2$ et que le résultat est connu pour $r-1$. L'inclusion « $\subset$ » est évidente et il s'agit de montrer l'inclusion inverse. On se donne un élément de $(\mathcal{O}(Y((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))))^{\Delta=0}$ que l'on représente par un couple $(\beta, f/g)$ où $\beta = (V_0, \cdots, V_r)$ est dans l'ensemble indexant du pro-schéma $Y((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$ et où $f,\, g \in \mathcal{O}(V_{r-1})[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r]$ avec g inversible sur l'ouvert $V_r \subset V_{r-1}[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r]$. D'après le lemme 7.3.5, on peut supposer, quitte à raffiner β, que les morphismes $V_p \longrightarrow V_{p-1}$ sont fortement surjectifs pour $1 \leqslant p \leqslant r$.

Posons $\underline{\mathbf{t}}' = (\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{t}_{r-1})$ et $\underline{\mathbf{s}}' = (\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_{r-1})$. On a une inclusion évidente

$$\mathcal{O}(X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))) \subset \mathrm{Frac}(\mathcal{O}(X((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,)))[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r])$$

et de même pour « Y » au lieu de « X ». Grâce au lemme 7.5.10 ci-dessous (pour la seconde égalité) et à l'hypothèse de récurrence (pour la troisième égalité), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(V_r)^{\Delta=0} &= \mathcal{O}(V_r) \cap \mathrm{Frac}(\mathcal{O}(Y((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,)))[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r])^{\Delta=0} \\ &= \mathcal{O}(V_r) \cap \mathrm{Frac}(\mathcal{O}(Y((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,)))^{\Delta=0}[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r]) \\ &= \mathcal{O}(V_r) \cap \mathrm{Frac}(\mathcal{O}(X((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,)))[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r]). \end{aligned}$$

On peut donc trouver $f',\, g' \in \mathcal{O}(X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r]$, avec $g \neq 0$, tel que $f/g = f'/g'$.

Puisque le morphisme $Y \longrightarrow X$ est la projection d'un espace affine, on peut lui trouver une section $s : X \longrightarrow Y$ telle que $V_0 \cap s(X) \neq \varnothing$. D'après le lemme 7.5.3, β est compatible à $s(X)$. Considérons le pro-schéma $Y_{s(X)}((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,))$ comme dans le lemme 7.5.2. On dispose d'un morphisme naturel

$$\sigma : (\lim X((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,)))\,[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r] \hookrightarrow \big(\lim Y_{s(X)}((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,))\big)\,[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r].$$

Les éléments f, g, f' et g' sont dans $\mathcal{O}(Y_{s(X)}((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,)))[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r]$ et on a $g \circ \sigma \neq 0$ car g est inversible sur V_r. En appliquant $- \circ \sigma$ à l'égalité $f \cdot g' = f' \cdot g$, on obtient l'égalité $(f \circ \sigma) \cdot g' = f' \cdot (g \circ \sigma)$ valable dans $\mathcal{O}(X((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,)))[[\mathbf{t}_r]][\mathbf{s}_r]$. Or, $f \circ \sigma$ et $g \circ \sigma$ sont clairement dans $\mathcal{O}(X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,]])$. On a donc montré que $f/g = (f \circ \sigma)/(g \circ \sigma)$ est dans $\mathcal{O}(X((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))$ comme souhaité. ∎

Lemme 7.5.10. — *Soit Δ un ensemble fini de dérivations qui commutent deux à deux et soit K un $(\mathbb{Q},\Delta)$-corps. Soit $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ et $\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_m)$ deux systèmes d'indéterminées et faisons agir Δ sur les coefficients des séries formelles et des polynômes. Alors, on a* $\mathrm{Frac}(K[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}])^{\Delta=0} = \mathrm{Frac}(K^{\Delta=0}[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}])$.

Démonstration. — Grâce à la proposition 1.3.7, on se ramène aussitôt au cas où $\mathbf{s} = \varnothing$. Par récurrence, il suffit de traiter le cas où $\Delta = \{\partial\}$ est un singleton. Soit F un élément de $\mathrm{Frac}(K[[\mathbf{t}]])^{\partial=0}$, et écrivons $F = f/g$ avec f et g dans $K[[\mathbf{t}]]$ non nulles. Puisque l'anneau $K[[\mathbf{t}]]$ est factoriel, on peut supposer que les séries formelles f et g sont premières entre elles.

L'hypothèse $\partial(F) = 0$ équivaut à l'égalité $f \cdot \partial(g) = g \cdot \partial(f)$. Par le lemme de Gauss, on trouve que f divise $\partial(f)$ et que g divise $\partial(g)$. Plus précisément, il existe une série formelle $u \in K[[\mathbf{t}]]$ telle que $\partial(f) = u \cdot f$ et $\partial(g) = u \cdot g$. Soit $c = u(0, \cdots, 0)$ le terme constant de u et soit $u_0 = u - c$. On pose

$$e = \exp(u_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}(u_0)^n;$$

c'est une série formelle inversible dans $K[[\mathbf{t}]]$. Clairement, les séries formelles $e^{-1} \cdot f$ et $e^{-1} \cdot g$ vérifient l'équation différentielle $\partial(y) = c \cdot y$.

L'ensemble $\{a \in K;\ \partial(a) = c \cdot a\}$ des solutions dans K de l'équation différentielle $\partial(y) = c \cdot y$ est un $K^{\partial=0}$-vectoriel de dimension au plus 1. (Utiliser par exemple la proposition 1.3.3.) Soit ϵ un générateur de ce $K^{\partial=0}$-vectoriel. Si $h \in K[[\mathbf{t}]]$ vérifie $\partial(h) = c \cdot h$, alors les coefficients de h sont dans $K^{\partial=0} \cdot \epsilon$. Autrement dit, l'ensemble $\{h \in K[[\mathbf{t}]];\ \partial(h) = c \cdot h\}$ des solutions dans $K[[\mathbf{t}]]$ de l'équation différentielle $\partial(y) = c \cdot y$ est un $K^{\partial=0}[[\mathbf{t}]]$-module engendré par ϵ. (Remarquons au passage que ceci montre que $\epsilon \neq 0$.) Ainsi, f et g sont dans le sous-$K^{\partial=0}[[\mathbf{t}]]$-module de $K[[\mathbf{t}]]$ engendré par $e \cdot \epsilon$. Ceci montre bien que f/g est dans $\mathrm{Frac}(K^{\partial=0}[[\mathbf{t}]])$ comme souhaité. ■

On note une application du théorème 7.5.5 (et plus précisément son corollaire 7.5.6) à la malléabilité.

Proposition 7.5.11. — *Soient $S/\mathcal{E}$ un k-feuilletage et soit $\mathscr{V} \subset \mathrm{SgFol}^{\mathcal{E}}/S$ une sous-catégorie pleine admissible. Soit F un complexe de préfaisceaux sur $\mathscr{V}$ borné à gauche et G un remplacement projectivement* ft-*fibrant de F. Si F est homotopiquement génériquement continu (au sens de la définition 6.8.14) alors G est* 0-*malléable.*

Démonstration. — Ceci découle aussitôt du corollaire 7.5.6 joint au corollaire 6.8.17. ■

Un pro-objet $(X_{i,\bullet} \longrightarrow X_{i,-1})_{i\in I}$ dans la catégorie des hyper-recouvrements génériques est appelé une *hyper-enveloppe* ét-*universelle* si les schémas $X_{i,d}$ sont intègres pour tout $i \in I$ et $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$ et si les anneaux $\mathcal{O}(X_d)$ sont des corps algébriquement clos pour tout $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. (Comparer avec la définition 6.8.7.) Le deuxième résultat principal de cette sous-section est une variante du théorème 4.5.1 qui s'énonce comme suit.

Théorème 7.5.12. — *On fixe deux r-uplets de systèmes d'indéterminées $\underline{\mathbf{t}} = (\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{t}_r)$ et $\underline{\mathbf{s}} = (\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_r)$. Les propriétés suivantes sont satisfaites pour tout $p \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$.*

(A_p) *Soit $X_\bullet$ un pro-objet dans la catégorie des k-schémas semi-simpliciaux augmentés tel que $X_\bullet \longrightarrow X_{-1}$ est une hyper-enveloppe* ét-*universelle. Soit $X'_\bullet \longrightarrow X_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))$ un morphisme de k-schémas semi-simpliciaux augmentés vérifiant les conditions suivantes.*

(i) Pour tout $-1 \leqslant m \leqslant p$, $\mathcal{O}(X'_p)$ est une clôture algébrique de $\mathcal{O}(X_p((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)))$.

(ii) Le morphisme $X'_\bullet \longrightarrow X_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,)) \times_{X_{-1}((\,\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}\,))} X'_{-1}$ est un hyper-recouvrement pro-étale relatif p-tronqué.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, le k-schéma X'_n est intègre.

(B_p) *Soit $(f_i\ :\ Y_{i,\bullet} \longrightarrow X_{i,\bullet})_{i\in I}$ un pro-objet dans la catégorie des morphismes de k-schémas semi-simpliciaux augmentés tels que $X_\bullet = (X_{i,\bullet})_{i\in I}$ et $Y_\bullet = (Y_{i,\bullet})_{i\in I}$ soient des hyper-enveloppes* ét-*universelles comme dans* (A_p) *et tel que $Y_{i,\bullet} \longrightarrow X_{i,\bullet} \times_{X_{i,-1}} Y_{i,-1}$ soit un hyper-recouvrement* *générique relatif pour tout $i \in I$. On suppose donné un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} Y'_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f'_\bullet"] & Y_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})) \arrow[d, "f_\bullet"] \\ X'_\bullet \arrow[r] & X_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})) \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales vérifient les conditions (i) et (ii) de (A_p)*. Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$*, le morphisme* $f'_n : Y'_n \longrightarrow X'_n$ *est plat, dominant et génériquement géométriquement intègre.*

Le reste de la sous-section est consacré à la preuve du théorème 7.5.12. Il s'agit en fait d'adapter la preuve du théorème 4.5.1.

Lemme 7.5.13. — *La propriété* (A_{-1}) *est vraie.*

Démonstration. — Ceci découle aussitôt de la proposition 7.2.4. ■

Lemme 7.5.14. — *Pour tout* $p \geqslant 0$*, on a l'implication* $(\mathrm{B}_{p-1}) \Rightarrow (\mathrm{A}_p)$.

Démonstration. — Pour alléger les notations, on pose $\widetilde{X}_\bullet = X_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$, $\widetilde{Y}_\bullet = Y_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$ etc. On fixe un morphisme p-tronqué $X'_\bullet \longrightarrow \widetilde{X}_\bullet$ comme dans (A_p). Supposons que la propriété (B_{p-1}) est connue et montrons que les schémas X'_n sont intègres par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On peut supposer que $n > p$. On pose $Y_\bullet = X_{1+\bullet}$, et on considère les morphismes $X''_\bullet \longrightarrow \widetilde{X}_\bullet$ et $Y''_\bullet \longrightarrow \widetilde{Y}_\bullet$ obtenus par $p-1$-troncation des morphismes $X'_\bullet \longrightarrow \widetilde{X}_\bullet$ et $X'_{1+\bullet} \longrightarrow \widetilde{X}_{1+\bullet}$. Ainsi, on a

$$X''_{n-1} = (\mathrm{cosk}^{X'_{-1}}_{p-1} X')_{n-1} \times_{(\mathrm{cosk}^{\widetilde{X}_{-1}}_{p-1}\widetilde{X})_{n-1}} \widetilde{X}_{n-1} \quad \text{et} \quad Y''_{n-1} = (\mathrm{cosk}^{X'_0}_{p-1} X'_{1+\bullet})_{n-1} \times_{(\mathrm{cosk}^{\widetilde{X}_0}_{p-1}\widetilde{X}_{1+\bullet})_{n-1}} \widetilde{X}_n.$$

Par ailleurs, puisque le morphisme $X'_\bullet \longrightarrow \widetilde{X}_\bullet$ est p-tronqué, on a

$$X'_n = (\mathrm{cosk}^{X'_{-1}}_{p} X')_{n} \times_{(\mathrm{cosk}^{\widetilde{X}_{-1}}_{p}\widetilde{X})_{n}} \widetilde{X}_{n}.$$

On utilisant la proposition 4.3.9, on trouve alors un isomorphisme évident

$$X'_n \simeq Y''_{n-1} \times_{X''_{n-1}} X'_{n-1}.$$

D'après (B_{p-1}), le morphisme $Y''_{n-1} \longrightarrow X''_{n-1}$ est plat, dominant et génériquement géométriquement intègre. Il en est donc de même du morphisme $X'_n \longrightarrow X'_{n-1}$. Puisque X'_{n-1} est intègre par l'hypothèse de récurrence, ceci permet de conclure. ■

Corollaire 7.5.15. — *Pour prouver le théorème 7.5.12 il suffit de montrer l'implication* $(\mathrm{A}_p) \Rightarrow (\mathrm{B}_p)$ *pour tout* $p \geqslant -1$.

On montre maintenant une réduction qui est du même tonneau que celle fournie par le lemme 7.5.8 (voir aussi le lemme 4.5.6.)

Lemme 7.5.16. — *Pour vérifier* (B_p)*, on peut supposer qu'il existe un k-schéma semi-simplicial augmenté* $A_\bullet$ *qui est un espace affine (possiblement de dimension infinie) en chaque degré ainsi qu'un triangle commutatif de pro-k-schémas semi-simpliciaux augmentés*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "f"'] & X \times_k A \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & X \end{tikzcd}$$

tel que la flèche horizonatle est pro-étale en chaque degré.

Démonstration. — Avec les notations de (B_p), on se ramène aussitôt au cas où l'ensemble cofiltrant admet un objet final $o \in I$ tel que $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ sont pro-étales en chaque degré au-dessus de $X_{o,\bullet}$ et $Y_{o,\bullet}$. On peut trouver un pro-objet $g : Z_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ vérifiant les conditions de (B_p) et tel que $Z_\bullet$ est pro-étale en chaque degré au-dessus de $Z_{o,\bullet}$, et qui s'insère dans un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} Z_{o,\bullet} \arrow[r] \arrow[dr, "f_o \circ g_o"'] & X_{o,\bullet} \times_k A_\bullet \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & X_{o,\bullet} \end{tikzcd}$$

avec A comme dans l'énoncé et où la flèche horizontale est étale en chaque degré. Or, il est clairement suffisant de prouver (B_p) pour $f \circ g : Z_\bullet \longrightarrow X_\bullet$, ce qui permet de conclure. ■

Démonstration du théorème 7.5.12. — D'après le corollaire 7.5.15, nous devons montrer que $(\mathrm{A}_p) \Rightarrow (\mathrm{B})_p$. On fixe donc un entier $p \geqslant -1$ et on suppose que la propriété (A_p) est connue. On fixe $f_\bullet : Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$, $X'_\bullet$ et $Y'_\bullet$ comme dans (B_p). On suppose qu'il existe un k-schéma semi-simplicial comme dans le lemme 7.5.16. Si $n \leqslant p$, les morphismes $f'_n : Y'_n \longrightarrow X'_n$ sont géométriquement intègres puisque X'_n et Y'_n sont des spectres de corps algébriquement clos. Dans la suite, on supposera que $n \geqslant p+1$.

D'après (A_p), les schémas X'_n et Y'_n sont intègres. Remarquons aussi que $\mathcal{O}(X'_n)$ et $\mathcal{O}(Y'_n)$ sont des corps. Ainsi, pour montrer que f'_n est génériquement géométriquement intègre, il suffit de montrer que si $\phi \in \mathcal{O}(Y'_n)$ est algébrique sur $\mathcal{O}(X'_n)$, alors $\phi \in \mathcal{O}(X'_n)$. (Ici et dans la suite, on identifie $\mathcal{O}(X'_n)$ à un sous-corps de $\mathcal{O}(Y'_n)$.) Puisque le morphisme $Y'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$ est p-tronqué, on peut écrire

$$\phi = \sum_{e \in E} \lambda_e \prod_{j : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}} \phi_{e,j} \circ j^* \tag{7.13}$$

où E est un ensemble fini, $\lambda_e \in \mathcal{O}(Y_n((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}})))$ et $\phi_{e,j} \in \mathcal{O}(Y'_p)$.

Dans la suite de la preuve, on fixe un k-schéma semi-simplicial augmenté $A_\bullet$ et un triangle commutatif comme dans le lemme 7.5.16. On pose $Q = X \times_k A$. Rappelons que $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ sont indexés par un même ensemble cofiltrant I. Le pro-k-schéma $X_n((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$ est indexé par des $r+2$-uplets $(i, D_0, \cdots, D_r)$ avec $i \in I$, D_0 un ouvert dense de X_i, D_1 un ouvert dense de $X_{i,n}((\mathbf{t}_1, \mathbf{s}_1))$, etc. Il en est de même des pro-k-schémas $Y_n((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$ et $Q_n((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$. (Dans le cas de X_n, on peut toujours prendre $D_0 = X_i$. La même chose vaut aussi pour Y_n, mais non pas pour Q_n.) Ceci étant, on peut trouver

$$\beta = (i, B_0, \cdots, B_r = B), \quad \gamma = (i, C_0, \cdots, C_r = C), \quad \delta = (i, D_0, \cdots, D_r = D)$$

$$\text{et} \quad \xi = (i, F_0, \cdots, F_r = F)$$

dans les ensembles indexant les pro-k-schémas $Q_p((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$, $Q_n((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$, $X_n((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$ et $Y_n((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))$ que l'on suppose suffisamment fins, et des factorisations

$$\begin{tikzcd} Y'_p \arrow[r] \arrow[dr] & U \arrow[d, "u"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y'_n \arrow[r] \arrow[dr] & V \arrow[d, "v"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} Y'_n \arrow[r] \arrow[dr] & W \arrow[d, "w"] \\ & D \end{tikzcd}$$

avec U, V et W des schémas affines et intègres, u, v et w des morphismes étales, et tels que :

(1) la sous-algèbre $\mathcal{O}(U) \subset \mathcal{O}(Y'_p)$ contient les fonctions $\phi_{e,j}$, la sous-algèbre $\mathcal{O}(F) \subset \mathcal{O}(Y_n)$ contient les fonctions λ_e et la sous-algèbre $\mathcal{O}(V) \subset \mathcal{O}(Y'_n)$ contient la fonction ϕ ;

(2) les morphismes naturels $j^* : C \longrightarrow B$ (pour $j : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$), $C \longrightarrow D$ et $F \longrightarrow C$ existent, et le morphisme v se factorise (uniquement) par un morphisme $\bar{l} : V \longrightarrow F$;

(3) pour tout $j : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$, le morphisme $Y'_n \longrightarrow U \times_{B,j^*} C$ se factorise (uniquement) par V ;

(4) le morphisme $V \longrightarrow D$ se factorise (uniquement) par un morphisme $h : V \longrightarrow W$ tel que $\phi \in \mathcal{O}(V)$ appartient à la sous-algèbre $\mathcal{O}(W) \subset \mathcal{O}(V)$.

D'après la propriété (3), pour tout $j : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$, il existe un unique morphisme $j^* : V \longrightarrow U$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} Y_n \arrow[r] \arrow[d, "j^*"] & V \arrow[r, "v"] \arrow[d, "j^*"] & C \arrow[d, "j^*"] \\ Y_p \arrow[r] & U \arrow[r, "u"] & B. \end{tikzcd}$$

Dans la suite, on supposera que u, v et w sont surjectifs, et que β, γ, δ et ξ satisfont à la conclusion du lemme 7.3.5 ; ceci est loisible quitte à raffiner les indices.

Rappelons que $Q_{i,n} = X_{i,n} \times_k A_n$. Les sections du morphisme $Q_{i,n} \longrightarrow X_{i,n}$ induites par les points rationnels du k-schéma A_n sont denses dans $Q_{i,n}$. (Voir le lemme 2.3.9.) Il existe donc une telle section $t : X_{i,n} \longrightarrow Q_{i,n}$ tel que $t^{-1}(C_0) \neq \emptyset$. Pour chaque $j : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$, il existe une section $t_j : X_{i,p} \longrightarrow Q_{i,p}$ telle que $j^* \circ t = t_j \circ j^*$. (Elle est induite par le point rationnel du k-schéma A_p image du point rationnel utilisé pour t par le morphisme $j^* : A_n \longrightarrow A_p$.) En particulier, on a aussi $t_e^{-1}(B_0) \neq \emptyset$. Grâce aux lemmes 7.5.2 et 7.5.3, le morphisme t induit un morphisme de pro-k-schémas $t : X'_n \longrightarrow C$. On fixe une composante connexe V' du produit fibré $V \times_{C,t} X'_n$. Ainsi, $\mathcal{O}(V')$ est une extension finie de $\mathcal{O}(X'_n)$.

D'après ce qui précède, on a un morphisme $j^* \times j^* : V \times_{C,t} X'_n \longrightarrow U \times_{B,t_j} X'_p$ pour chaque $j : \underline{\mathbf{p}} \hookrightarrow \underline{\mathbf{n}}$. Or, le schéma X'_p est le spectre d'un corps algébriquement clos et $u : U \longrightarrow B$ est étale. Il s'ensuit que le but de ce morphisme est une somme disjointe de copies de X'_p. Puisque $V' \subset V \times_{C,t} X'_n$ est connexe, il existe alors un unique morphisme $t'_j : X'_p \longrightarrow U$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "v'"] \arrow[ddr, "j^*"] & V \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "j^*"] & \\ X'_n \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "j^*"] & C \arrow[dr, "j^*"] & U \arrow[d, "u"] \\ & X'_p \arrow[ur, "t'_j"] \arrow[r, "t_j"] & B. \end{tikzcd} \tag{7.14}$$

Par ailleurs, le morphisme l induit un morphisme $l : V \times_{C,t} X'_n \longrightarrow F \times_{C,t} X'_n$. Étant donné que X_n est les spectre d'un corps algébriquement clos, quitte à raffiner $i \in I$, le produit fibré $F \times_{C,t} X'_n$ est isomorphe à une somme disjointe de copies de X'_n. Puisque V' est connexe, il existe un unique morphisme $t'' : X'_n \longrightarrow F$ rendant commutatif le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "v'"] & V \arrow[d, "l"] \arrow[dr, "v"] & \\ X'_n \arrow[r, "t''"] \arrow[rr, bend right, "t"'] & F \arrow[r] & C \end{tikzcd} \tag{7.15}$$

Fixons une clôture algébrique Ω du corps des fonctions rationnelles de C et un plongement $\mathcal{O}(Y'_n) \hookrightarrow \Omega$. Notons $\omega : \mathrm{Spec}(\Omega) \longrightarrow V$ le morphisme induit par l'inclusion $\mathcal{O}(V) \hookrightarrow \Omega$. Fixons aussi un morphisme de X'_n-schémas $\omega' : \mathrm{Spec}(\Omega) \longrightarrow V'$ tel que le carré suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\Omega) \arrow[r, "\omega'"] \arrow[d, "\omega"] & V' \arrow[r, "t'"] & V \arrow[d, "h"] \\ V \arrow[rr, "h"] & & W \end{tikzcd}$$

commute. (Un tel morphisme existe car $V' \longrightarrow W$ est étale et $h \circ \omega$ est un point géométrique générique de W.) Puisque $\phi \in \mathcal{O}(W)$, il s'ensuit que $\phi \circ \omega = \phi \circ t' \circ \omega'$ dans Ω. En utilisant l'égalité (7.13), et les diagrammes commutatifs (7.14) et (7.15), nous déduisons que

$$\begin{aligned}\phi\circ\omega &= \sum_{e\in E}\lambda_e\circ t'\circ\omega'\prod_{j:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{n}}}\phi_{e,j}\circ j^*\circ t'\circ\omega'\\ &= \sum_{e\in E}\lambda_e\circ t''\circ v'\circ\omega'\prod_{j:\underline{\mathbf{p}}\hookrightarrow\underline{\mathbf{n}}}\phi_{e,j}\circ t'_j\circ j^*\circ v'\circ\omega'.\end{aligned}$$

Les $\phi_{e,j}\circ t'_j$ sont des fonctions régulières sur X'_p et les $\lambda_e\circ t''$ sont des fonctions régulières sur X'_n. Ceci montre que ϕ provient d'une fonction régulière sur X'_n comme souhaité. ■

7.6. Préfaisceaux malléables, II. —

Dans cette sous-section, on regroupe quelques compléments sur la notion de malléabilité et on démontre un critère utile (voir le théorème 7.6.4 ci-dessous). Tout au long de la sous-section, on fixe un k-feuilletage $S/\mathcal{E}$ et une sous-catégorie pleine $\mathscr{V}\subset\mathrm{SgFol}^{\mathcal{E}}/S$ supposée admissible au sens de la définition 6.5.12. On commence avec la conséquence suivante de la malléabilité.

Proposition 7.6.1. — *Soit $n\geqslant 0$ un entier naturel. Soit F un complexe de préfaisceaux sur $\mathscr{V}$ borné à gauche. On suppose que F est projectivement* ψ-ét-*fibrant et n-malléable. Soit $F\longrightarrow G$ un remplacement projectivement* ft-*fibrant. Alors, quelles que soient les données :*

(1) un k-feuilletage diff-lisse $X/\mathcal{F}$ admettant un nombre fini de composantes irréductibles,

(2) un système d'indéterminées $\mathbf{t}$,

(3) un pro-ouvert $U\subset Y$ d'un $X((\mathbf{t}]]$-schéma lisse Y avec $\dim(U)\leqslant n$,

(4) un morphisme de pro-k-feuilletages $U/\mathcal{F}\longrightarrow S/\mathcal{E}$ qui fait de $U/\mathcal{F}$ un pro-objet de $\mathscr{V}$,

le morphisme $F(U/\mathcal{F})\longrightarrow G(U/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme. De plus, G est lui aussi n-malléable.

Démonstration. — En raisonnant par récurrence sur l'entier n, il est suffisant de montrer que le morphisme $F(X((\mathbf{t}]]/\mathcal{F})\longrightarrow G(X((\mathbf{t}]]/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme si $\mathrm{card}(\mathbf{t})=n$ pour tout $X/\mathcal{F}$ comme dans (1). (Bien entendu, il faut se donner un morphisme $X((\mathbf{t}]]/\mathcal{F}\longrightarrow S/\mathcal{E}$ qui fait de $X((\mathbf{t}]]/\mathcal{F}$ un pro-objet de $\mathscr{V}$.) En effet, si cette propriété est vérifiée, on peut alors appliquer le lemme 7.6.2 ci-dessous pour en déduire que $F(U/\mathcal{F})\longrightarrow G(U/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme pour tout (1)–(4) comme dans l'énoncé, ce qui permet ensuite de déduire la n-malléabilité de G de celle de F.

On fixe le k-feuilletage diff-lisse $X/\mathcal{F}$. On ne restreint pas la généralité en supposant que X est intègre. On se donne une hyper-enveloppe ft-universelle $Q_\bullet/\mathcal{L}_\bullet\longrightarrow X'/\mathcal{F}$ au sens de la définition 6.8.7. Rappelons qu'il s'agit d'un pro-objet dans la catégorie des hyper-recouvrements génériques tel que X' est une clôture algébrique de X et, pour $d\in\mathbb{N}$, $Q_d/\mathcal{L}_d$ est une enveloppe ft-universelle de $X/\mathcal{F}$ au sens de la définition 6.7.4(b). (Voir la proposition 6.8.8 pour l'existence d'un tel objet.) Puisque F et G sont projectivement ét-fibrants, il est suffisant de montrer que $F(X'[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F})\longrightarrow G(X'[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme. Considérons le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(X'[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}) & \xrightarrow{(1)} & \mathrm{Tot}\,F(Q_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_\bullet)\\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle(2)}\\ G(X'[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}) & \xrightarrow{(3)} & \mathrm{Tot}\,G(Q_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_\bullet).\end{array}$$

Puisque F est n-malléable, la flèche (1) est un quasi-isomorphisme. D'après la proposition 6.7.8, il en est de même de la flèche (2). Pour conclure, il est donc suffisant de montrer que la flèche (3) est un quasi-isomorphisme. Grâce à l'hypothèse de récurrence et au théorème 7.4.8, G est presque n-malléable. Le morphisme

$$G(X'[[\mathbf{t}]]^\circ/\mathcal{F})\longrightarrow\mathrm{Tot}\,G(Q_\bullet[[\mathbf{t}]]^\circ/\mathcal{L}_\bullet)$$

est donc un quasi-isomorphisme. (Comme d'habitude, $X'[[\mathbf{t}]]^\circ=X'[[\mathbf{t}]]\smallsetminus X'$, et de même avec « $Q_\bullet$ » au lieu de « X' ».) Il est donc suffisant de montrer que

$$G(X'[[\mathbf{t}]]^\circ\backslash X'[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F})\longrightarrow\mathrm{Tot}\,G(Q_\bullet[[\mathbf{t}]]^\circ\backslash Q_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme. (Pour W° un ouvert d'un $S/\mathcal{E}$-feuilletage $W/\mathcal{H}$ appartenant à $\mathcal{V}$, $G(W^\circ\backslash W/\mathcal{H})$ désigne la fibre homotopique du morphisme $G(W/\mathcal{H}) \longrightarrow G(W^\circ/\mathcal{H})$.)

Considérons à présent $Q_\bullet/\mathcal{L}_\bullet$ comme un pro-k-feuilletage semi-simplicial augmenté par $Q_{-1}/\mathcal{L}_{-1} = X'/\mathcal{F}$. Pour $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, posons $\widetilde{Q}_d/\mathcal{L}_d = (Q_d/\mathcal{L}_d) \times_{X/\mathcal{F}} (X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F})$. On dispose d'un morphisme évident de pro-k-feuilletages semi-simpliciaux augmentés $Q_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_\bullet \longrightarrow \widetilde{Q}_\bullet/\mathcal{L}_\bullet$. De plus, on posant $\widetilde{Q}^\circ_d = \widetilde{Q}_d \smallsetminus Q_d$, on dispose de carrés ψ-distingués

$$\begin{array}{ccc} Q_d[[\mathbf{t}]]^\circ/\mathcal{L}_d & \longrightarrow & Q_d[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_d \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{Q}^\circ_d/\mathcal{L}_d & \longrightarrow & \widetilde{Q}_d/\mathcal{L}_d. \end{array}$$

D'après le corollaire 6.9.11, on en déduit un quasi-isomorphisme

$$\mathrm{Tot}^+ G(\widetilde{Q}^\circ_\bullet\backslash\widetilde{Q}_\bullet/\mathcal{L}_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tot}^+ G(Q_\bullet[[\mathbf{t}]]^\circ\backslash Q_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_\bullet).$$

Il est donc suffisant de montrer que les complexes $\mathrm{Tot}^+ G(\widetilde{Q}^\circ_\bullet/\mathcal{L}_\bullet)$ et $\mathrm{Tot}^+ G(\widetilde{Q}_\bullet/\mathcal{L}_\bullet)$ sont acycliques.

Appelons $p : X[[\mathbf{t}]] \longrightarrow X$ et $q : X[[\mathbf{t}^\circ]] \longrightarrow X$ les projections évidentes. Quitte à rétrécir X, on peut supposer que le morphisme $X((\mathbf{t}]]/\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ est induit par un morphisme $X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ qui fait de $X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}$ un objet de $\mathcal{V}$. On peut alors restreindre G à $\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X[[\mathbf{t}]]$ et $\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X[[\mathbf{t}]]^\circ$. Notons encore G ces restrictions et considérons les complexes de préfaisceaux $H = p_*G$ et $H^\circ = q_*G$ sur $\mathrm{Ft}^{\mathcal{F}}/X$. Clairement, on a les identifications $G(\widetilde{Q}_\bullet/\mathcal{L}_\bullet) \simeq H(Q_\bullet/\mathcal{L}_\bullet)$ et $G(\widetilde{Q}^\circ_\bullet/\mathcal{L}_\bullet) \simeq H^\circ(Q_\bullet/\mathcal{L}_\bullet)$. Les foncteurs « images directes » étant de Quillen à droite, les complexes H et H° sont projectivement ft-fibrants. Le théorème 6.8.6 entraîne que les complexes $\mathrm{Tot}^+ H(Q_\bullet/\mathcal{L}_\bullet)$ et $\mathrm{Tot}^+ H^\circ(Q_\bullet/\mathcal{L}_\bullet)$ sont acycliques, ce qui permet de conclure. ■

Le résultat suivant a servi dans la preuve de la proposition 7.6.1. Nous donnons un énoncé un peu plus précis que nécessaire.

Lemme 7.6.2. — *Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme de complexes de préfaisceaux sur $\mathcal{V}$ vérifiant la proriété suivante. Quelles que soient les données :*

(1′) un pro-k-feuilletage affine $X/\mathcal{F} = (X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ tel que X_i est intègre pour tout i, $X_j/\mathcal{F}_j \longrightarrow X_i/\mathcal{F}_i$ est basique étale pour tout $j \leqslant i$ et $\mathcal{O}(X)$ est un corps algébriquement clos.

(2′) un système d'indéterminées $\mathbf{t}$ *avec* $\mathrm{card}(\mathbf{t}) \leqslant n$*,*

(3′) un morphisme de pro-k-feuilletages $X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ qui fait de $X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}$ un pro-objet de $\mathcal{V}$,

le morphisme $F(X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}) \longrightarrow F'(X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme. Alors, quelles que soient les données (1)–(4) comme dans la proposition 7.6.1, le morphisme

$$\mathrm{R}\Gamma_{\psi\text{-ét}}(U/\mathcal{F}; F) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\psi\text{-ét}}(U/\mathcal{F}; F')$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur n. On ne restreint pas la généralité en supposant que F et F' sont ψ-ét-fibrants. Dans ce cas, on doit montrer que $F(U/\mathcal{F}) \longrightarrow F'(U/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme quelles que soient les données (1)–(4). La question étant locale sur U pour la topologie Zariski, il suffit de montrer que $F(U_u/\mathcal{F}) \longrightarrow F'(U_u/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme avec U_u le localisé de U en un point $u \in U$. Puisque F et F' sont projectivement ψ-Nis-fibrants, les carrés

$$\begin{array}{ccc} F(U_u/\mathcal{F}) & \longrightarrow & F(U^\circ_u/\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\widehat{U}_u/\mathcal{F}) & \longrightarrow & F(\widehat{U}^\circ_u/\mathcal{F}) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} F'(U_u/\mathcal{F}) & \longrightarrow & F'(U^\circ_u/\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F'(\widehat{U}_u/\mathcal{F}) & \longrightarrow & F'(\widehat{U}^\circ_u/\mathcal{F}) \end{array}$$

sont homotopiquement cartésiens avec $U^\circ_u = U_u \smallsetminus u$ et $\widehat{U}^\circ_u = \widehat{U}_u \smallsetminus u$. Par l'hypothèse de récurrence, le résultat est connu pour U°_u et $\widehat{U}^\circ_u$. Pour terminer, il reste donc à voir que

$$F(\widehat{U}_u/\mathcal{F}) \longrightarrow F'(\widehat{U}_u/\mathcal{F})$$

est un quasi-isomorphisme. Puisque F et F' sont projectivement ét-fibrants, ceci découle de l'hypothèse de l'énoncé (en utilisant la proposition 6.4.9). ■

Le résultat suivant fournit un critère agréable de malléabilité.

Proposition 7.6.3. — *On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit F un complexe de préfaisceaux sur $\mathscr{V}$ borné à gauche. Alors, pour que F soit n-malléable il faut et il suffit qu'un (et alors tout) remplacement projectivement* ψ-ét-*fibrant G de F vérifie la propriété suivante. Quelles que soient les données :*

(1) un pro-k-feuilletage semi-simplicial augmenté $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ appartenant à $\mathscr{H}'$,

(2′) un système d'indéterminées $\mathbf{t}$ *tel que* $\mathrm{card}(\mathbf{t}) \leqslant n$,

(3′) un morphisme de schémas semi-simpliciaux augmentés $V'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ étale en chaque degré et tel que le morphisme de schémas semi-simpliciaux induit $V'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet \times_{Y_{-1}} V'_{-1}$ est un hyper-recouvrement étale relatif,

(4′) un morphisme de pro-k-feuilletages $V'_{-1}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{-1} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ qui fait de $V'_{-1}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{-1}$ un pro-objet de $\mathscr{V}$,

le complexe $\mathrm{Tot}^+ G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ *est acyclique.*

Démonstration. — La condition est clairement nécessaire et il s'agit de montrer qu'elle est suffisante. On raisonne par récurrence sur n. Supposons que F satisfait à la condition de l'énoncé et montrons qu'il est n-malléable. Par l'hypothèse de récurrence et le théorème 7.4.8, F est presque n-malléable. D'après le corollaire 7.4.28, il suffit de montrer que F est faiblement n-malléable. Fixons donc des données (1)–(4) comme dans la définition 7.4.5 avec $\mathbf{s} = \varnothing$.

D'après le corollaire 7.1.9, pour $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, le schéma $Y_d[[\mathbf{t}]]$ est une somme disjointe de schémas locaux henséliens. De plus, l'immersion fermée évidente $Y_d \hookrightarrow Y_d[[\mathbf{t}]]$ identifie Y_d au sous-schéma des points fermés de $Y_d[[\mathbf{t}]]$. Notons V_d^+ l'ouvert-fermé de V_d égal à l'union des composantes connexes de V_d qui se surjectent sur une composante connexe de $Y_d[[\mathbf{t}]]$. Le morphisme $V_d^+ \longrightarrow Y_d[[\mathbf{t}]]$ est fini étale. De plus, en posant

$$V'_d = V_d \times_{Y_d[[\mathbf{t}]]} Y_d \simeq V_d^+ \times_{Y_d[[\mathbf{t}]]} Y_d,$$

on a un isomorphisme canonique de schémas semi-simpliciaux augmentés $V_\bullet^+ = V'_\bullet[[\mathbf{t}]]$. La condition de l'énoncé entraîne donc que $\mathrm{Tot}^+ G(V_\bullet^+/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique. Par ailleurs, désignons par $(-)^\circ$ le changement de base suivant l'immersion ouverte $Y_{-1}[[\mathbf{t}]] \smallsetminus Y_{-1} \hookrightarrow Y_{-1}[[\mathbf{t}]]$. Puisque F est presque n-malléable, les complexes $\mathrm{Tot}^+ G(V_\bullet^\circ/\mathcal{G}_\bullet)$ et $\mathrm{Tot}^+ G(V_\bullet^{+\circ}/\mathcal{G}_\bullet)$ sont acycliques. Vu les pro-carrés distingués de schémas semi-simpliciaux augmentés

$$\begin{tikzcd} V_\bullet^{+\circ} \arrow[r] \arrow[d] & V_\bullet^+ \arrow[d] \\ V_\bullet^\circ \arrow[r] & V_\bullet, \end{tikzcd}$$

le résultat recherché découle maintenant du corollaire 6.9.11(ii). ■

Dans la même veine, on a le critère de malléabilité suivant.

Théorème 7.6.4. — *On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Soit F un complexe de préfaisceaux sur $\mathscr{V}$ borné à gauche. Alors, pour que F soit n-malléable il faut et il suffit qu'il vérifie la propriété suivante. Quelles que soient les données :*

(1′) un pro-k-feuilletage semi-simplicial augmenté $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ intègre en chaque degré et appartenant à $\mathscr{H}'$,

(2′) un système d'indéterminées $\mathbf{t}$ *tel que* $\mathrm{card}(\mathbf{t}) \leqslant n$,

(3″) un morphisme de pro-schémas semi-simpliciaux augmentés $\overline{Y}_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ tel que $\overline{Y}_d$ est une clôture algébrique de Y_d pour tout $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$ et tel que $\overline{Y}_\bullet \longrightarrow Y_\bullet \times_{Y_{-1}} \overline{Y}_{-1}$ est un hyper-recouvrement pro-étale relatif,

(4″) un morphisme de pro-k-feuilletages $\overline{Y}_{-1}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{-1} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ qui fait de $\overline{Y}_{-1}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{-1}$ un pro-objet de $\mathscr{V}$,

le complexe $\mathrm{Tot}^+ F(\overline{Y}_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ *est acyclique.*

Démonstration. — Soit G un remplacement projectivement ψ-ét-fibrant de F. Pour tout $m \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, le pro-$k$-feuilletage $\overline{Y}_m[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_m$ est un point du topos associé à $(\mathscr{V}, \psi\text{-ét})$. Ainsi, dire que le complexe $\mathrm{Tot}^+ F(\overline{Y}_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique équivaut à dire que le complexe $\mathrm{Tot}^+ G(\overline{Y}_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique. On en déduit que la condition de l'énoncé est nécessaire. Pour montrer que la condition est suffisante, on applique le critère de la proposition 7.6.3. On fixe donc des données (1), (2′)–(4′) et on montre que le complexe $\mathrm{Tot}^+ G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique en supposant que les complexes $\mathrm{Tot}^+ G(\overline{Y}_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ sont acycliques. On divise l'argument en trois étapes.

Étape 1. — Disons qu'un pro-k-feuilletage semi-simplicial augmenté dans $\mathscr{H}$ est du type Čech s'il est de la forme $X_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))/\mathcal{F}_\bullet$ avec $X_\bullet/\mathcal{F}_\bullet \longrightarrow X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$ un hyper-recouvrement de Čech. (Voir la définition 7.4.3.) Dans cette étape, on suppose que $\mathrm{Tot}^+ G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique si les deux conditions supplémentaires suivantes

(i) $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ est du type Čech,

(ii) $V'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet \times_{Y_{-1}} V'_{-1}$ est 0-élémentaire,

sont vérifiées, et on explique comment en déduire le cas général.

La preuve est très similaire à celle du théorème 4.4.16 et on se contente d'une esquisse. Supposons que $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet = X_\bullet((\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'))/\mathcal{F}_\bullet$ avec $X_\bullet/\mathcal{F}_\bullet \longrightarrow X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$ un hyper-recouvrement générique (mais non nécessairement de Čech), et $\underline{\mathbf{t}}'$ et $\underline{\mathbf{s}}'$ deux r-uplets de systèmes d'indéterminées. On note $\widetilde{X}_{\bullet,\bullet}/\mathcal{F}_{\bullet,\bullet}$ le k-feuilletage semi-bisimplicial biaugmenté obtenu en appliquant $\check{C}_\bullet(-)$ au morphisme de k-feuilletages semi-simpliciaux augmentés $X_{1+\bullet}/\mathcal{F}_{1+\bullet} \longrightarrow X_\bullet/\mathcal{F}_\bullet$. On note $\widetilde{Y}_{\bullet,\bullet}/\mathcal{G}_{\bullet,\bullet}$ le pro-k-feuilletage semi-bisimplicial biaugmenté $\widetilde{X}_{\bullet,\bullet}((\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'))/\mathcal{F}_{\bullet,\bullet}$. Par construction, on a $\widetilde{Y}_{-1,\bullet}/\mathcal{G}_{-1,\bullet} = Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ et $\widetilde{Y}_{0,\bullet}/\mathcal{G}_{0,\bullet} = Y_{1+\bullet}/\mathcal{G}_{1+\bullet}$. Appelons $\widetilde{V}'_{\bullet,\bullet}$ la source du morphisme 0-élémentaire en la première variable $\widetilde{V}'_{\bullet,\bullet} \longrightarrow \widetilde{Y}_{\bullet,\bullet} \times_{Y_\bullet} V'_\bullet$ associé au morphisme $V'_{1+\bullet} \longrightarrow Y_{1+\bullet} \times_{Y_\bullet} V'_\bullet$. Par construction, on a $\widetilde{V}'_{-1,\bullet} = V'_\bullet$ et $\widetilde{V}'_{0,\bullet} = V'_{1+\bullet}$.

Pour tout $q \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, le pro-$k$-feuilletage semi-simplicial augmenté $\widetilde{Y}_{\bullet,q}/\mathcal{G}_{\bullet,q}$ appartient à $\mathscr{H}$ et il est du type Čech. De plus, le morphisme $\widetilde{V}'_{\bullet,q} \longrightarrow \widetilde{Y}_{\bullet,q}$ vérifie la condition demandée dans (4′) ainsi que la condition (ii) ci-dessus. D'après l'hypothèse de travail, les complexes $\mathrm{Tot}^+ G(\widetilde{V}'_{\bullet,q}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{\bullet,q})$ sont acycliques pour tout $q \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. Il s'ensuit que le morphisme de complexes

$$\mathrm{Tot}^+ G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tot}\,\mathrm{Tot}^+ G(\widetilde{V}'_{\bullet\geqslant 0,\bullet}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{\bullet\geqslant 0,\bullet})$$

est un quasi-isomorphisme. (Ci-dessus, on a écrit « $(-)_{\bullet\geqslant 0}$ » pour désigner l'objet semi-simplicial obtenu par oubli de l'augmentation.) Le reste de la preuve est une adaptation facile de la fin de la preuve du théorème 4.4.16 : on raisonne par l'absurde et on choisit une classe de cohomologie non nulle de degré minimale (parmi tous les contre-exemples qui existent en faisant varier les données (1), (2′)–(4′)). La contradiction est alors obtenue par un argument de suite spectrale en utilisant le fait que le morphisme

$$\mathrm{Tot}^+ G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tot}^+ G(V'_{1+\bullet}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{1+\bullet})$$

est nul en cohomologie.

Étape 2. — Disons qu'un pro-k-feuilletage semi-simplicial augmenté dans $\mathscr{H}$ est sympathique s'il est de la forme $X_\bullet((\underline{\mathbf{t}} \bullet \underline{\mathbf{s}}))/\mathcal{F}_\bullet$ avec $X_\bullet/\mathcal{F}_\bullet \longrightarrow X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$ un hyper-recouvrement de Čech tel que $X_0 \longrightarrow X_{-1}$ est génériquement géométriquement intègre. Dans cette étape, on suppose que $\mathrm{Tot}^+ G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique si les deux conditions supplémentaires suivantes

(i′) $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ est sympathique,

(ii) $V'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet \times_{Y_{-1}} V'_{-1}$ est 0-élémentaire,

sont vérifiées, et on explique comment en déduire le cas général.

L'essentiel de la preuve est encore une fois une adaptation de la preuve du théorème 4.4.16. D'après l'étape 1, on peut supposer que les conditions (i) et (ii) ci-dessus sont satisfaites. Nous allons expliquer comment modifier la situation afin de garantir (i′). On note $X_\bullet/\mathcal{F}_\bullet \longrightarrow X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$ l'hyper-recouvrement de

Čech tel que $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet = X_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,))/\mathcal{F}_\bullet$. On ne restreint pas la généralité en supposant que X_{-1} est intègre. Puisque F est projectivement ét-fibrant, il est suffisant de montrer que $\mathrm{Tot}^+\,(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique après avoir remplacé X_{-1} par la source d'un morphisme étale dominant. On peut donc supposer que X_0 est une somme disjointe de X_{-1}-schémas génériquement géométriquement intègres.

Expliquons d'abord comment on peut se ramener au cas où les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(a) $X_0/\mathcal{F}_0 = I \times Z/\mathcal{H}$ avec I un ensemble fini et $Z/\mathcal{H}$ un $X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$-feuilletage diff-étale génériquement géométriquement intègre ;

(b) en posant $P_0 = Z((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,))$ de sorte que $Y_0 = I \times P_0$, il existe un P_0-schéma étale W'_0 et un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} V'_0 \arrow[r] \arrow[d] & Y_0 \times_{Y_{-1}} V'_{-1} \arrow[d] \\ W'_0 \arrow[r] & P_0 \times_{Y_{-1}} V'_{-1}. \end{tikzcd}$$

Autrement dit, il existe une identification $V'_0 = I \times W'_0$ compatible à l'identification $X_0 = I \times Z$. On note $Z/\mathcal{H}$ le produit fibré (au-dessus de $X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$) des composantes connexes de $X_0/\mathcal{F}_0$. Alors le X_{-1}-schéma Z est encore génériquement géométriquement intègre et on dispose d'un morphisme évident $I \times Z/\mathcal{H} \longrightarrow X_0/\mathcal{F}_0$ avec I l'ensemble des composantes connexes de X_0. Ce morphisme est diff-étale et génériquement géométriquement intègre. On pose $X'_0/\mathcal{F}'_0 = I \times Z/\mathcal{H}$ et on forme l'objet semi-simplicial augmenté de Čech $X'_\bullet/\mathcal{F}'_\bullet$ associé au morphisme $X'_0/\mathcal{F}'_0 \longrightarrow X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$. On note $Y'_\bullet/\mathcal{G}'_\bullet$ le pro-k-feuilletage semi-simplicial augmenté $X'_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,))/\mathcal{F}'_\bullet$. On peut facilement trouver un hyper-recouvrement étale 0-élémentaire $V''_\bullet \longrightarrow Y'_\bullet \times_{Y_{-1}} V'_{-1}$ avec V''_0 vérifiant la condition (b) et qui domine $Y'_\bullet \times_{Y_\bullet} V'_\bullet$. On suppose donc que le complexe $\mathrm{Tot}^+ G(V''_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}'_\bullet)$ est acyclique et on cherche à montrer qu'il en est de même du complexe $\mathrm{Tot}^+ G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$.

On dispose d'un morphisme évident $X'_\bullet/\mathcal{F}'_\bullet \longrightarrow X_\bullet/\mathcal{F}_\bullet$. Comme dans l'étape 1, on forme l'objet semi-bisimplicial biaugmenté de Čech $\widetilde{X}'_{\bullet,\bullet}/\mathcal{F}'_{\bullet,\bullet}$ associé à ce morphisme. On note $\widetilde{Y}'_{\bullet,\bullet}/\mathcal{G}'_{\bullet,\bullet}$ le pro-k-feuilletage semi-bisimplicial biaugmenté $\widetilde{X}'_{\bullet,\bullet}((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,))/\mathcal{F}'_{\bullet,\bullet}$. Enfin, on note $\widetilde{V}''_{\bullet,\bullet}$ la source du morphisme 0-élémentaire $\widetilde{V}''_{\bullet,\bullet} \longrightarrow \widetilde{Y}'_{\bullet,\bullet} \times_{Y_\bullet} V'_\bullet$ associé à $V''_\bullet \longrightarrow Y'_\bullet \times_{Y_\bullet} V'_\bullet$. Par construction, on a $\widetilde{V}''_{-1,\bullet}/\mathcal{G}'_{-1,\bullet} = V'_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ et $\widetilde{V}''_{0,\bullet}/\mathcal{G}'_{0,\bullet} = V''_\bullet/\mathcal{G}'_\bullet$. Clairement, les pro-$k$-feuilletages semi-simpliciaux augmentés $\widetilde{Y}'_{\bullet,q}/\mathcal{G}'_{\bullet,q}$ sont sympathiques. Ainsi, d'après l'hypothèse de travail, les complexes $\mathrm{Tot}^+\,G(\widetilde{V}''_{\bullet,q}/\mathcal{G}'_{\bullet,q})$ sont acycliques pour tout $q \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. De plus, on a supposé que $\mathrm{Tot}^+ G(\widetilde{V}''_{0,\bullet}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}'_{0,\bullet})$ était acyclique. Il est donc possible de conclure en adaptant l'argument à la fin de la preuve du théorème 4.4.16 : on raisonne par l'absurde et on choisit une classe de cohomologie non nulle de degré minimale (parmi tous les contre-exemples qui existent en faisant varier les données (1), (2′)–(4′) vérifiant (i) et (ii)). La contradiction est alors obtenue par un argument de suite spectrale.

Ceci étant, il est maintenant aisé de conclure. En effet, supposons que les conditions (a) et (b) sont vérifiées. Soit $Z_\bullet/\mathcal{H}_\bullet \longrightarrow X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$ l'hyper-recouvrement de Čech associé à $Z/\mathcal{H} \longrightarrow X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$ et posons $P_\bullet/\mathcal{R}_\bullet = Z_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,))/\mathcal{H}_\bullet$. Notons $W'_\bullet$ la source du morphisme 0-élémentaire $W'_\bullet \longrightarrow P_\bullet \times_{Y_{-1}} V'_{-1}$ associé à W'_0. On a alors $V'_\bullet = Y_\bullet \times_{P_\bullet} W'_\bullet$. D'après l'hypothèse de travail, $\mathrm{Tot}^+\,G(W'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{R}_\bullet)$ est acyclique, et il en est de même de tous les complexes $\mathrm{Tot}^+\,G(W'_{m+\bullet}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{R}_{m+\bullet})$ pour $m \in \mathbb{N}$. Grâce à la proposition 5.1.9, on en déduit aussitôt que $\mathrm{Tot}\,G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet) \simeq \mathrm{Tot}\,G(W'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{R}_\bullet) \otimes \mathrm{Tot}\,\mathbb{Z}^{\check{C}_\bullet(I)}$, ce qui permet de conclure.

Étape 3. — Dans cette étape, on termine la preuve du théorème. Grâce à l'étape précédente, on est ramené à montrer que le complexe $\mathrm{Tot}^+ G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique lorsque les conditions (i′) et (ii) sont vérifiées.

Supposons que $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet = X_\bullet((\,\underline{\mathbf{t}}' \bullet \underline{\mathbf{s}}'\,))/\mathcal{F}_\bullet$ avec $X_\bullet/\mathcal{F}_\bullet \longrightarrow X_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$ un hyper-recouvrement de Čech avec $X_0 \longrightarrow X_{-1}$ génériquement géométriquement intègre. On ne restreint pas la généralité en supposant que X_{-1} est intègre. Grâce au théorème 7.5.12, on peut trouver un morphisme de pro-k-schémas semi-simpliciaux augmentés $\overline{Y}_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ vérifiant les conditions demandées dans (4″). (Raisonner par récurrence en utilisant la partie (A_p) dudit théorème.) On pose $\overline{V}'_\bullet = \overline{Y}_\bullet \times_{Y_\bullet} V'_\bullet$. Il existe un isomorphisme $\overline{V}'_\bullet \simeq$

$\overline{Y}_\bullet \times \check{C}_\bullet(J/I)$ avec I et J les ensembles des composantes connexes de $\overline{V}'_{-1}$ et $\overline{V}'_0$. Par hypothèse, les complexes $\mathrm{Tot}^+G(\overline{Y}_{m+\bullet}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{m+\bullet})$ sont acycliques pour tout $m \in \mathbb{N}$. Grâce à la proposition 5.1.9, il s'ensuit que $\mathrm{Tot}\,G(\overline{V}'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet) \simeq \mathrm{Tot}\,G(\overline{Y}_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet) \otimes \mathbb{Z}^{\check{C}_\bullet(J/I)}$, ce qui montre que le complexe $\mathrm{Tot}^+G(\overline{V}'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique. Étant donné que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre il suffit pour terminer de montrer que $\mathrm{Tot}^+G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est un facteur direct de $\mathrm{Tot}^+G(\overline{V}'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ à quasi-isomorphisme près.

Notons $\Gamma_\bullet$ le groupe de Galois de l'extension $\kappa(\overline{Y}_\bullet)/\kappa(Y_\bullet)$. Alors, $\Gamma_\bullet$ est naturellement un pro-groupe semi-simplicial qui s'identifie naturellement au pro-ensemble semi-simplicial des composantes connexes de $\overline{Y}_\bullet \times_{Y_\bullet} \overline{Y}_\bullet$. De plus, les morphismes $\mathrm{d}_i : \Gamma_m \longrightarrow \Gamma_{m-1}$, pour $0 \leqslant i \leqslant m$, sont tous surjectifs car les morphismes $\mathrm{d}_i : Y_m \longrightarrow Y_{m-1}$ sont génériquement géométriquement intègres (grâce à la proposition 7.2.4). Il en découle que les projecteurs des complexes $G(\overline{V}'_m[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_m)$, qui envoient un élément x sur la moyenne des éléments dans l'orbite de x pour l'action de Γ_m, commutent aux différentielles cosimpliciales et définissent un projecteur de $G(\overline{V}'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ dont l'image est quasi-isomorphe à $G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ car G est projectivement ét-fibrant. Ceci termine la preuve du théorème. ∎

On note la conséquence suivante du théorème 7.6.4.

Corollaire 7.6.5. — *On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que Λ est un corps de caractéristique nulle. Soient F et F' deux complexes de préfaisceaux sur $\mathscr{V}$ bornés à gauche. Alors, si F et F' sont n-malléables, il en est de même de $F \otimes_\Lambda F'$.*

Démonstration. — On pose $F'' = F \otimes_\Lambda F'$. Nous allons montrer que F'' est n-malléable en appliquant le critère du théorème 7.6.4. On fixe donc des données (1′), (2′), (3″) et (4″) comme dans ledit théorème, et on montre que le complexe $\mathrm{Tot}^+ F''(\overline{Y}_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique. Il revient au même de montrer que le morphisme

$$F(\overline{Y}_{-1}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{-1}) \otimes_\Lambda F'(\overline{Y}_{-1}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{-1}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\,\mathrm{diag}^\bullet \left(F(\overline{Y}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}) \otimes_\Lambda F'(\overline{Y}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G})\right)$$

est un quasi-isomorphisme. Or, puisque F et F' sont supposés n-malléables, $\mathrm{Tot}^+ F(\overline{Y}_{m+\bullet}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{m+\bullet})$ est acyclique pour tout $m \in \mathbb{N}$, et de même pour « F' » au lieu de « F ». On peut donc appliquer la proposition 5.1.9 pour se ramener à montrer que le morphisme

$$F(\overline{Y}_{-1}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{-1}) \otimes_\Lambda F'(\overline{Y}_{-1}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_{-1}) \longrightarrow (\mathrm{Tot}\,F(\overline{Y}_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)) \otimes_\Lambda (\mathrm{Tot}\,F'(\overline{Y}_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet))$$

est un quasi-isomorphisme. On conclut en utilisant une deuxième fois que F et F' sont n-malléables, et le fait que le produit tensoriel des complexes préserve les quasi-isomorphismes. ∎

On termine la sous-section en montrant que la malléabilité est préservée par certaines images directes. Pour ce faire, on se donne un S-schéma de présentation finie T et on note $p : T/\mathcal{E} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ le morphisme basique associé. On se donne aussi une sous-catégorie pleine $\mathscr{W} \subset \mathrm{SgFol}^{\mathcal{E}}/T$ supposée admissible au sens de la définition 6.5.12 et tel que le foncteur de changement de base suivant p envoie $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{W}$. On obtient ainsi des pré-morphismes de sites

$$p : (\mathscr{W}, \tau) \longrightarrow (\mathscr{V}, \tau),$$

pour $\tau \in \{\psi\text{-Nis}, \psi\text{-ét}, \mathrm{ft}\}$, compatibles aux P-structures naturelles (voir les propositions 6.6.1 et 6.9.6) au sens de [**10**, Définition 4.4.59]. On a alors le résultat suivant.

Théorème 7.6.6. — *On suppose que le S-schéma T est lisse de dimension relative $\leqslant d$. Soit F un complexe de préfaisceaux sur $\mathscr{W}$ borné à gauche. On suppose que F est projectivement* ψ-ét-*fibrant et $n+d$-malléable. Alors, le complexe de préfaisceaux $p_*(F)$ est n-malléable.*

Démonstration. — La question est locale pour la topologie étale sur T. Ainsi, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale de S-schémas $e : T \longrightarrow S[\mathbf{s}]$, avec $\mathbf{s}$ un système d'indéterminées de cardinal $\leqslant d$. On montre que $p_*(F)$ est n-malléable en appliquant la proposition 7.6.3. On fixe donc des données (1), (2′), (3′) et (4′) comme dans ladite proposition, et on montre que le complexe $\mathrm{Tot}^+ p_*(F)(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique. Le complexe en question s'identifie à $\mathrm{Tot}^+ F(T \times_S (V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet))$. On pose $W_\bullet = T \times_S V'_\bullet[[\mathbf{t}]]$. Le morphisme e et le morphisme $V'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ de (3′) fournissent un morphisme $W_\bullet \longrightarrow Y_\bullet[[\mathbf{t}]][\mathbf{s}]$ étale en chaque degré et vérifiant la condition dans la donnée (3) de la définition 7.4.5 (avec « $W_\bullet$ » au lieu de « $V_\bullet$ »). Le résultat recherché découle alors du fait que F est $n+d$-malléable et que $\mathrm{card}(\mathbf{t}) + \mathrm{card}(\mathbf{s}) \leqslant n + d$. ∎

7.7. Malléabilité de certains préfaisceaux grossiers. —

Le but de cette sous-section et celle qui suivra est de donner les premiers exemples de complexes de préfaisceaux malléables. Ici, nous allons montrer que les complexes de préfaisceaux grossiers vérifiant une propriété naturelle dite de « Mayer–Vietoris formelle » sont automatiquement malléables. On verra dans la sous-section 7.8 que ladite propriété est vérifiée par beaucoup d'exemples concrets de complexes de préfaisceaux et notamment les complexes de préfaisceaux motiviques.

Remarque 7.7.1. — Soit X un k-schéma affine, noethérien et régulier, et soit Y un X-schéma lisse. Grâce au théorème de Popescu [**59, 60**], Y est la limite projective d'un pro-k-schéma lisse $(Y_i)_{i\in I}$ bien défini à un unique isomorphisme près. (On obtient un tel pro-k-schéma de la manière suivante : les indices sont donnés par les couples $(X \to D, E)$ où D est un k-schéma affine et lisse, et E est un D-schéma lisse tel que $Y = X \times_D E$; le foncteur associe à un tel couple le k-schéma E.) Étant donné un préfaisceau F sur Sm/k à valeurs dans une catégorie admettant les colimites filtrantes, on pose $F(U) = \mathrm{colim}_{i\in I} F(U_i)$. □

L'inclusion $g : \mathrm{Sm}/k \hookrightarrow \mathrm{SmFol}/k$, qui à un k-schéma lisse X associe le k-feuilletage grossier X^g (que l'on note parfois X s'il n'y a pas de confusion à craindre), définit un pré-morphisme de sites

$$g : (\mathrm{SmFol}/k, \psi\text{-ét}) \longrightarrow (\mathrm{Sm}/k, \text{ét}) \tag{7.16}$$

au sens de [**10**, Définition 4.4.46]. Le résultat suivant sera utilisé couramment dans la suite.

Lemme 7.7.2. — *Soit $(X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ un pro-k-feuilletage affine diff-lisse tel que le k-schéma $X = \lim_{i\in I} X_i$ est noethérien régulier. Pour un certain $i_0 \in I$, on se donne un X_{i_0}-schéma lisse de présentation finie Y_{i_0}, et on pose $Y_i = X_i \times_{X_{i_0}} Y_{i_0}$, pour $i \leqslant i_0$, et $Y = X \times_{X_{i_0}} Y_{i_0}$. Soit F un préfaisceau sur* Sm/k *à valeurs dans une catégorie admettant les colimites pertinentes. Il existe alors un isomorphisme naturel*

$$F(Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname*{colim}_{i\leqslant i_0} g^* F(Y_i/\mathcal{F}_i).$$

Démonstration. — En effet, on a les identifications suivantes :

$$\operatorname*{colim}_{i\leqslant i_0} g^* F(Y_i/\mathcal{F}_i) = \operatorname*{colim}_{i\leqslant i_0} \operatorname*{colim}_{Y_i/\mathcal{F}_i \to P^g} F(P) \simeq \operatorname*{colim}_{Y \to P} F(P) \simeq F(Y).$$

Ci-dessus, P parcourt les k-schémas lisses. Les deux dernières identifications découlent de [**39**, Chapitre IV, Théorème 8.8.2] en considérant Y tantôt comme la limite cofiltrante du système projectif $(Y_i)_{i\leqslant i_0}$, tantôt comme une limite cofiltrante de k-schémas lisses comme dans la remarque 7.7.1. ■

On note également le lemme suivant.

Lemme 7.7.3. — *Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme de complexes de préfaisceaux sur* Sm/k. *On suppose que f est une équivalence* ét-*locale. Alors, quelles que soient les données :*

(1) un k-feuilletage diff-lisse $X/\mathcal{F}$ admettant un nombre fini de composantes irréductibles,

(2) un système d'indéterminées $\mathbf{t}$,

(3) un $X((\mathbf{t}]]$-schéma lisse Y,

le morphisme $\mathrm{R}\Gamma_{\psi\text{-ét}}(Y/\mathcal{F}; g^*F) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\psi\text{-ét}}(Y/\mathcal{F}; g^*F')$ *est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — D'après le lemme 7.6.2, il suffit de montrer que $g^*F(X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}) \longrightarrow g^*F'(X[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme quelles que soient les données $(1')$ et $(2')$ comme dans ledit lemme. Grâce au lemme 7.7.2, il revient au même de montrer que $F(X[[\mathbf{t}]]) \longrightarrow F'(X[[\mathbf{t}]])$ est un quasi-isomorphisme. Ceci découle du fait que $F \longrightarrow F'$ est une équivalence ét-locale et que le k-schéma $X[[\mathbf{t}]]$ est strictement hensélien (voir le corollaire 7.1.9). ■

Définition 7.7.4. — *Soit F un complexe de préfaisceaux sur* Sm/k *et soit F' un remplacement projectivement* ét-*fibrant de F. On dit que F vérifie la* propriété de Mayer–Vietoris formelle *si, pour tout k-schéma* *local, excellent et régulier X de point fermé x, le carré*

$$\begin{array}{ccc} F'(X) & \longrightarrow & F'(X \smallsetminus \{x\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F'(\widehat{X}) & \longrightarrow & F'(\widehat{X} \smallsetminus \{x\}), \end{array}$$

avec $\widehat{X}$ le spectre de la complétion formelle de $\mathcal{O}(X)$ en son idéal maximal, est homotopiquement cartésien.

La propriété de Mayer–Vietoris formelle sera utilisée via le résultat suivant.

Proposition 7.7.5. — *Soit F un complexe de préfaisceaux sur* Sm/k *borné à gauche et vérifiant la propriété de Mayer–Vietoris formelle. Alors, quelles que soient les données (1)–(3) comme dans le lemme 7.7.3, il existe un isomorphisme canonique dans* $\mathbf{D}(\Lambda)$ *:*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(Y; F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma_{\psi\text{-ét}}(Y/\mathcal{F}; g^*F).$$

Démonstration. — Grâce au lemme 7.7.3, on peut supposer que F est projectivement ét-fibrant. Soit G un remplacement projectivement ψ-ét-fibrant de g^*F Nous allons montrer que le morphisme composé

$$F(Y) \simeq g^*F(Y/\mathcal{F}) \longrightarrow G(Y/\mathcal{F})$$

est un quasi-isomorphisme. En fait, il sera utile de considérer plus généralement les morphismes composés

$$F(U) \simeq g^*F(U/\mathcal{F}) \longrightarrow G(U/\mathcal{F}) \tag{7.17}$$

avec $U \subset Y$ un pro-ouvert d'un Y comme dans le lemme 7.7.3. On raisonne par récurrence sur $\dim(U)$.

La question de savoir si (7.17) est un quasi-isomorphisme est locale sur U pour la topologie Zariski. Il suffit donc de traiter le cas des localisés U_u en les points $u \in U$. Par récurrence, le morphisme (7.17) est un quasi-isomorphisme pour $U_u^\circ = U_u \smallsetminus u$ et $\widehat{U}_u^\circ = \widehat{U}_u \smallsetminus u$. (Ici, on complète en respectant la structure de pro-k-feuilletage sur U_u.) Puisque G est projectivement ψ-Nis-fibrant, on dispose d'un quasi-isomorphisme $G(U_u^\circ \backslash U_u/\mathcal{F}) \simeq G(\widehat{U}_u^\circ \backslash \widehat{U}_u/\mathcal{F})$. (Comme d'habitude, $G(U_u^\circ \backslash U_u/\mathcal{F})$ désigne la fibre homotopique du morphisme $G(U_u/\mathcal{F}) \longrightarrow G(U_u^\circ/\mathcal{F})$, etc.) On dispose aussi d'un quasi-isomorphisme $F(U_u^\circ \backslash U_u) \simeq F(\widehat{U}_u^\circ \backslash \widehat{U}_u)$, qu'on déduit de la propriété de Mayer–Vietoris formelle et du fait que les anneaux locaux $\mathcal{O}(U_u)$ et $\mathcal{O}(\widehat{U}_u)$ ont même complétion en l'idéal maximal. Il est donc suffisant de montrer que le morphisme composé (7.17) est un quasi-isomorphisme pour $\widehat{U}_u$. Grâce à la proposition 6.4.9, il est suffisant de montrer que le morphisme composé

$$F(X((\mathbf{t}]]) \simeq g^*F(X((\mathbf{t}]]/\mathcal{F}) \longrightarrow G(X((\mathbf{t}]]/\mathcal{F})$$

est un quasi-isomorphisme pour $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage intègre et $\mathrm{card}(\mathbf{t}) \leqslant \dim(U)$. Puisque F et G sont projectivement ét-locaux, il suffit de montrer que le morphisme composé

$$F(\overline{X}[[\mathbf{t}]]) \simeq g^*F(\overline{X}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}) \longrightarrow G(\overline{X}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F})$$

est un quasi-isomorphisme avec $\overline{X}$ une hyper-clôture algébrique de X, i.e., un pro-X-schéma étale tel que $\mathcal{O}(X)$ est un corps algébriquement clos. On conclut en utilisant le fait que le pro-k-feuilletage $\overline{X}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}$ est un point du topos associé à $(\mathrm{SmFol}/k, \psi\text{-ét})$. ■

On arrive maintenant au résultat principal de cette sous-section.

Théorème 7.7.6. — *Soit F un complexe de préfaisceaux sur* Sm/k *borné à gauche. On suppose que F vérifie la propriété de Mayer–Vietoris formelle. Alors,* g^*F *est malléable.*

Démonstration. — On montre que g^*F est n-malléable par récurrence sur n. D'après le théorème 7.4.8 et l'hypothèse de récurrence, g^*F est presque n-malléable. On fixe un remplacement projectivement ψ-ét-fibrant G de g^*F. D'après la proposition 7.6.3, il suffit de montrer que le complexe $\mathrm{Tot}^+ G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique quelles que soient les données (1), (2′) et (3′) de ladite proposition. Posons comme d'habitude

$V'_{\bullet}[[\mathbf{t}]]^{\circ} = V'_{\bullet}[[\mathbf{t}]] \smallsetminus V'_{\bullet}$. Puisque g^*F est presque n-malléable, le complexe $\mathrm{Tot}^+ G(V'_{\bullet}[[\mathbf{t}]]^{\circ}/\mathcal{G}_{\bullet})$ est acyclique. Posons également $V'_{\bullet}[\mathbf{t}]^{\circ} = V'_{\bullet}[\mathbf{t}] \smallsetminus V'_{\bullet}$. D'après le corollaire 6.9.11, le carré

$$\begin{array}{ccc} G(V'_d[\mathbf{t}]/\mathcal{G}_d) & \longrightarrow & G(V'_d[\mathbf{t}]^{\circ}/\mathcal{G}_d) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(V'_d[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_d) & \longrightarrow & G(V'_d[[\mathbf{t}]]^{\circ}/\mathcal{G}_d) \end{array}$$

est homotopiquement cartésien pour tout $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$. Pour conclure, il est donc suffisant de montrer que les complexes $\mathrm{Tot}^+ G(V'_{\bullet}[\mathbf{t}]^{\circ}/\mathcal{G}_{\bullet})$ et $\mathrm{Tot}^+ G(V'_{\bullet}[\mathbf{t}]/\mathcal{G}_{\bullet})$ sont acycliques. On montrera plus généralement que le complexe $\mathrm{Tot}^+ G(Q \times_k V'_{\bullet}/\mathcal{G}_{\bullet})$ est acyclique pour tout k-schéma lisse Q. Grâce à la proposition 7.7.5, il revient au même de montrer que le complexe $\mathrm{Tot}^+ H(Q \times_k V'_{\bullet})$ est acyclique avec H un remplacement projectivement ét-fibrant de F. En prenant $L = \underline{\mathrm{Hom}}(Q, H)$, on voit qu'il suffit de montrer que le complexe $\mathrm{Tot}^+ L(V'_{\bullet})$ est acyclique pour tout complexe de préfaisceaux L sur Sm/k projectivement ét-fibrant. Or, d'après le corollaire 7.5.6, $V'_{\bullet} \longrightarrow V'_{-1}$ est un hyper-recouvrement générique. Grâce à une légère modification du lemme 4.6.13, on peut écrire le k-schéma semi-simplicial augmenté $V'_{\bullet}$ comme la limite d'un pro-système cofiltrant $(Y_{i,\bullet})_{i \in I}$, où $Y_{i,\bullet} \longrightarrow Y_{i,-1}$ est un hyper-recouvrement générique dans la catégorie Sm/k. Plus précisément, $Y_{i,\bullet}$ est un objet semi-simplicial augmenté de Sm/k, et les morphismes $Y_{i,p} \longrightarrow (\mathrm{cosk}_{p-1}^{Y_{i,-1}} Y_{i,\bullet})_p$ sont lisses et dominants pour tout $p \in \mathbb{N}$. Or, d'après le théorème 4.4.16 (cas $\Delta = \varnothing$), les complexes $\mathrm{Tot}^+ H(Y_{i,\bullet})$ sont acycliques, ce qui permet de conclure. ∎

7.8. Sur la propriété de Mayer–Vietoris formelle. —

Dans cette sous-section, on donne des exemples complexes de préfaisceaux sur Sm/k vérifiant la propriété de Mayer–Vietoris formelle (voir la définition 7.7.4). Grâce au théorème 7.7.6, on obtient par la même occasion les premiers exemples concrets de complexes de préfaisceaux malléables sur SmFol/k.

Notation 7.8.1. — Soient X un schéma et $Z \subset X$ un sous-schéma fermé. Étant donné un complexe de préfaisceaux F sur le petit site Zariski de X, on note $\mathrm{R}\Gamma_Z(X; F)$ le complexe calculant la cohomologie de X supportée dans Z à valeurs dans F, i.e.,

$$\mathrm{R}\Gamma_Z(X; F) = \mathrm{Cône}\{\mathrm{R}\Gamma(X; F) \to \mathrm{R}\Gamma(X \smallsetminus Z; F)\}[-1].$$

Les foncteurs dérivés $\mathrm{R}\Gamma$ ci-dessus sont calculés relativement à la topologie Zariski. □

Lemme 7.8.2. — *Soient A un anneau et $I \subset A$ un idéal engendré par une suite régulière $f_1, \cdots, f_n$. On pose $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Z = \mathrm{Spec}(A/I)$. On a alors un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}(A)$:*

$$\mathrm{R}\Gamma_Z(X; \mathcal{O}) \simeq (A_{f_1}/A) \otimes_A \cdots \otimes_A (A_{f_n}/A)[-n]$$

où, pour $f \in A$, on a posé $A_f = A[f^{-1}]$.

Démonstration. — Il s'agit d'un cas particulier de [**42**, Theorem 2.3] (ou encore de [**33**, Exposé II, Proposition 5]). La preuve étant facile, nous l'incluons pour la commodité du lecteur.

Lorsque $n = 1$, le résultat découle de l'annulation de la cohomologie des schémas affines à valeurs dans les faisceaux cohérents. On suppose que $n \geqslant 2$ et que le résultat est connu pour $n - 1$. On pose $Y = \mathrm{Z}(f_1, \cdots, f_{n-1})$, $X' = \mathrm{D}(f_n)$ et $Y' = Y \cap X'$. On a un morphisme de triangles distingués de Mayer–Vietoris

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{R}\Gamma(X; \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Gamma(X; \mathcal{O}) \oplus \mathrm{R}\Gamma(X'; \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Gamma(X'; \mathcal{O}) & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{R}\Gamma(X \smallsetminus Z; \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Gamma(X \smallsetminus Y; \mathcal{O}) \oplus \mathrm{R}\Gamma(X'; \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Gamma(X' \smallsetminus Y'; \mathcal{O}) & \longrightarrow & . \end{array}$$

En prenant les fibres homotopiques des flèches verticales, on trouve alors le triangle distingué

$$\mathrm{R}\Gamma_Z(X; \mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_Y(X; \mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{Y'}(X'; \mathcal{O}) \longrightarrow .$$

Par récurrence, la seconde flèche de ce triangle s'identifie à

$$(A_{f_1}/A) \otimes_A \cdots \otimes_A (A_{f_{n-1}}/A)[-n+1] \longrightarrow \big((A_{f_1}/A) \otimes_A \cdots \otimes_A (A_{f_{n-1}}/A)\big) \otimes_A A_{f_n}[-n+1].$$

Ceci permet de conclure. ■

Proposition 7.8.3. — *Le préfaisceau $\mathcal{O}$ sur Sm/k vérifie la propriété de Mayer–Vietoris formelle.*

Démonstration. — Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma local, noethérien régulier de point fermé x. On note $\widehat{A}$ la complétion formelle de A en son idéal maximal, et on pose $\widehat{X} = \mathrm{Spec}(\widehat{A})$. Soit $f_1, \cdots, f_n$ une suite régulière dans A qui engendre l'idéal maximal. Alors, $f_1, \cdots, f_n$ est encore une suite régulière dans $\widehat{A}$ qui engendre l'idéal maximal. On doit montrer que le morphisme $\mathrm{R}\Gamma_x(X; \mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_x(\widehat{X}; \mathcal{O})$ est un quasi-isomorphisme. D'après le lemme 7.8.2, il revient au même de montrer que

$$(A_{f_1}/A) \otimes_A \cdots \otimes_A (A_{f_n}/A) \longrightarrow (\widehat{A}_{f_1}/\widehat{A}) \otimes_{\widehat{A}} \cdots \otimes_{\widehat{A}} (\widehat{A}_{f_n}/\widehat{A})$$

est un isomorphisme. La preuve de cela est facile et sera laissée au lecteur. ■

On passe maintenant à un autre type d'exemples de complexes de préfaisceaux vérifiant la propriété de Mayer–Vietoris formelle. On rappelle d'abord la définition suivante (voir [**58**, §3.2, Definition 2.1]).

Définition 7.8.4. — *Soit F un complexe de préfaisceaux sur* Sm/k. *On dit que F est* $\mathbb{A}^1$-local *relativement à la topologie étale si, pour tout $X \in \mathrm{Sm}/k$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, le morphisme*

$$\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X; F) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_X; F)$$

est un isomorphisme.

Remarque 7.8.5. — Dire que F est $\mathbb{A}^1$-local relativement à la toplogie étale revient à dire que si G est un remplacement projectivement ét-fibrant de F, alors G est projectivement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-fibrant, i.e., fibrant pour la structure de modèles projective $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k; \Lambda))$ dont la catégorie homotopique est la catégorie $\mathbf{DA}^{\text{eff}, \text{ét}}(k; \Lambda)$ des motifs étales effectifs sur k. (Voir [**11**, §3] pour plus de détails.) □

Proposition 7.8.6. — *Soit F un complexe de préfaisceaux sur* Sm/k *borné à gauche. On suppose que F est $\mathbb{A}^1$-local relativement à la topologie étale. Alors, F vérifie la propriété de Mayer–Vietoris formelle.*

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que F est projectivement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-fibrant. (Voir la remarque 7.8.5.) On divise la preuve en deux parties.

Partie A. — Soit X un k-schéma affine, nothérien et régulier, et soit Y un X-schéma lisse. Dans cette partie, on construit un isomorphisme naturel dans $\mathbf{D}(\Lambda)$:

$$F(Y) \simeq \mathrm{RHom}_{\mathbf{DA}^{\text{eff}, \text{ét}}(X; \Lambda)}(Y \otimes \Lambda, \mathrm{L}\pi_X^* F),$$

avec $\pi_X : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structural.

Grâce au théorème de Popescu [**59, 60**], pour tout X-schéma lisse Y, la catégorie $Y\backslash(\mathrm{Sm}/k)$ est cofiltante. (Voir la remarque 7.7.1 et utiliser [**39**, Chapitre IV, Théorème 8.8.2].) Il s'ensuit aussitôt que le foncteur

$$\pi_X^* : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k; \Lambda)) \longrightarrow \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/X; \Lambda))$$

est exact. Il préserve donc les équivalences ét-locales ainsi que les équivalences $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales. En particulier, on a $\mathrm{L}\pi_X^* F \simeq \pi_X^* F$.

On a $\pi_X^* F(Y) = F(Y)$, où le second membre de l'égalité est pris au sens de la remarque 7.7.1. Grâce à [**5**, Exposé VII, Théorème 5.7], joint à l'hypothèse que F est borné à gauche, le complexe de préfaisceaux $\pi_X^* F$ est encore projectivement ét-fibrant. Puisque F est projectivement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-fibrant, le morphisme

$$\pi_X^*(F)(Y) = F(Y) \longrightarrow \pi_X^*(F)(\mathbb{A}^1_Y) = F(\mathbb{A}^1_Y)$$

est un quasi-isomorphisme pour tout $Y \in \mathrm{Sm}/X$. Ceci montre que $\pi_X^* F$ est projectivement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-fibrant. Il s'ensuit que $\mathrm{RHom}_{\mathbf{DA}^{\text{eff}, \text{ét}}(X; \Lambda)}(Y \otimes \Lambda, \pi_X^* F) \simeq F(Y)$. C'est ce que nous cherchions à démontrer.

Partie B. — Soit X un k-schéma local, excellent et régulier de point fermé x. Soit $\widehat{X}$ le spectre de la complétion formelle de $\mathcal{O}(X)$ en son idéal maximal. On forme le carré commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} \widehat{X} \smallsetminus \{x\} \arrow[r, "\widehat{j}"] \arrow[d, "g"] & \widehat{X} \arrow[d, "f"] & x \arrow[l, hook', "\widehat{\imath}"'] \arrow[d, equal] \\ X \smallsetminus \{x\} \arrow[r, "j"] & X & x. \arrow[l, hook', "i"'] \end{tikzcd}$$

On cherche à montrer que le carré

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d] & F(X \smallsetminus \{x\}) \arrow[d] \\ F(\widehat{X}) \arrow[r] & F(\widehat{X} \smallsetminus \{x\}) \end{tikzcd} \tag{7.18}$$

est homotopiquement cartésien. On ne restreint pas la généralité en supposant que X est hensélien. En utilisant le fait que F est projectivement ét-fibrant, on se ramène au cas où X est strictement hensélien. Grâce à [**44**, Exposé XVIII-A, Theorem 1.1 and Corollary 1.2], les p-dimensions cohomologiques ponctuelles (au sens de [**11**, Définition 3.12]) des schémas X et $\widehat{X}$ sont alors uniformément bornés. Il en est de même des p-dimensions cohomologiques ponctuelles des X-schémas de type fini. D'après la partie A, le carré (7.18) s'identifie au carré suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{RHom}_{\mathbf{DA}^{\mathrm{eff,\acute{e}t}}(X;\Lambda)}(\Lambda_X(0), \mathrm{L}\pi_X^*(F)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{RHom}_{\mathbf{DA}^{\mathrm{eff,\acute{e}t}}(X;\Lambda)}(\Lambda_X(0), \mathrm{R}j_*\mathrm{L}j^*\mathrm{L}\pi_X^*(F)) \arrow[d] \\ \mathrm{RHom}_{\mathbf{DA}^{\mathrm{eff,\acute{e}t}}(\widehat{X};\Lambda)}(\Lambda_{\widehat{X}}(0), \mathrm{L}\pi_{\widehat{X}}^*(F)) \arrow[r] & \mathrm{RHom}_{\mathbf{DA}^{\mathrm{eff,\acute{e}t}}(\widehat{X};\Lambda)}(\Lambda_{\widehat{X}}(0), \mathrm{R}\widehat{j}_*\mathrm{L}\widehat{j}^*\mathrm{L}\pi_{\widehat{X}}^*(F)). \end{tikzcd}$$

Vu les triangles distingués de localisation [**9**, Proposition 1.4.9], il revient au même de montrer que

$$\mathrm{RHom}_{\mathbf{DA}^{\mathrm{eff,\acute{e}t}}(x;\Lambda)}(\Lambda_x(0); \mathrm{R}i^!\mathrm{L}\pi_X^*F) \longrightarrow \mathrm{RHom}_{\mathbf{DA}^{\mathrm{eff,\acute{e}t}}(x;\Lambda)}(\Lambda_x(0); \mathrm{R}\widehat{\imath}^!\mathrm{L}\pi_{\widehat{X}}^*F)$$

est un isomorphisme. (Dans [**9**, Chapitre I], on considère des 2-foncteurs homotopiques stables. Toutefois, pour la preuve de [**9**, Proposition 1.4.9], seuls les axiomes 1–4 de [**9**, §1.4.1] sont utilisés, et ce résultat est donc valable pour des 2-foncteurs homotopiques non nécessairement stables, et en particulier pour $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff,\acute{e}t}}(-;\Lambda)$.) Pour conclure, il suffit donc de montrer que le morphisme d'échange $\mathrm{id}_x^* \circ \mathrm{R}i^! \longrightarrow \mathrm{R}\widehat{\imath}^! \circ \mathrm{L}f^*$ est inversible. En utilisant à nouveau les 2-triangles distingués de localisation, on se ramène à montrer que le morphisme d'échange $\mathrm{L}f^* \circ \mathrm{R}j_* \longrightarrow \mathrm{R}\widehat{j}_* \circ \mathrm{L}g^*$ est inversible. Ceci a été démontré dans [**13**, Corollaire 1.A.4] pour $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(-;\Lambda)$. La preuve pour $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff,\acute{e}t}}(-;\Lambda)$ est la même ; il suffit d'utiliser [**11**, Proposition 3.20 et Corollaire 3.22] à la place de [**13**, Proposition 1.A.1 et Corollaire 1.A.3]. ∎

Pour l'énoncé suivant, on rappelle que le corps de base k est supposé de caractéristique nulle.

Corollaire 7.8.7. — *Soit A un k-schéma en groupes commutatif de type fini. Alors, le préfaisceau sur* Sm/k *représenté par A, vérifie la propriété de Mayer–Vietoris formelle.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où $A = \mathbf{G}_a$ et celui où A est une extension d'un schéma en groupes fini et d'une variété semi-abélienne. Dans le premier cas, on utilise la proposition 7.8.3. Dans le deuxième cas, on utilise la proposition 7.8.6. ∎

7.9. Malléabilité ft-locale des préfaisceaux prédiscrets. —

Le but de cette sous-section est d'exhiber une deuxième source de complexes de préfaisceaux malléables. Plus précisément, nous montrons que les remplacements projectivement ft-fibrants de complexes de certains préfaisceaux prédiscrets sont malléables. Commençons d'abord par une définition.

Définition 7.9.1. — *On fixe un k-feuilletage $S/\mathcal{E}$ et une sous-catégorie pleine $\mathcal{V} \subset \mathrm{SgFol}^{\mathcal{E}}/S$ supposée admissible au sens de la définition 6.5.12. Soit F un complexe de préfaisceaux sur $\mathcal{V}$ borné à gauche. On dit que F est* ft-localement malléable *(resp.* ft-localement n-malléable *pour un entier $n \in \mathbb{N}$) si un (et alors tout) remplacement projectivement* ft-*fibrant G de F est malléable (resp. n-malléable).*

Remarque 7.9.2. — Il découle immédiatement de la proposition 7.6.1 qu'un complexe de préfaisceaux (n-)malléable est ft-localement (n-)malléable. □

Une conséquence agréable de malléabilité ft-locale est donnée dans l'énoncé suivant qui généralise le théorème 6.8.11.

Proposition 7.9.3. — *On fixe un k-feuilletage $S/\mathcal{E}$ et une sous-catégorie pleine $\mathscr{V} \subset \mathrm{SgFol}^{\mathcal{E}}/S$ supposée admissible au sens de la définition 6.5.12. Soit F un complexe de préfaisceaux borné à gauche et* ft*-localement n-malléable.*

Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage singulier intègre et soit $\mathbf{t}$ un système d'indéterminées de cardinal $\leqslant n$. On se donne un morphisme $X((\mathbf{t}))/\mathcal{F} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ qui fait de $X((\mathbf{t}))/\mathcal{F}$ un pro-objet de $\mathscr{V}$. On se donne aussi une hyper-enveloppe ft*-universelle $(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet} \longrightarrow X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ de $X/\mathcal{F}$. (Voir la définition 6.8.7.) Alors, il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}(\Lambda)$:*

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ft}}(X_i((\mathbf{t}))/\mathcal{F}_i; F) \simeq \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{Tot}\, F(Q_{i,\bullet}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_{i,\bullet}).$$

Démonstration. — Soit G un remplacement projectivement ft-fibrant de F. Puisque G est n-malléable, on a un quasi-isomorphisme

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} G(X_i((\mathbf{t}))/\mathcal{F}_i) \simeq \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{Tot}\, G(Q_{i,\bullet}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_{i,\bullet}).$$

Le résultat recherché découle alors de la proposition 6.7.11 qui affirme que les évaluations sur les pro-k-feuilletages $(Q_{i,d}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_{i,d})_{i\in I}$ définissent des points du site $(\mathscr{V}, \mathrm{ft})$. ■

Dans le reste de la sous-section, on se concentre uniquement sur le cas des complexes de préfaisceaux sur SmFol/k. On fait la définition suivante (comparer avec la notation 3.5.6 et la définition 3.5.10).

Définition 7.9.4. — *Rappelons qu'on dispose d'un foncteur*

$$(-)^{\delta} : \mathrm{Schtf}/k \longrightarrow \mathrm{SmFol}/k \tag{7.19}$$

qui à un k-schéma de type fini X associe le k-feuilletage discret X^{δ}. Ce foncteur est pleinement fidèle et commute aux limites finies. Il s'ensuit que le foncteur

$$(-)^{\delta} : \mathbf{PSh}(\mathrm{Schtf}/k) \longrightarrow \mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k), \tag{7.20}$$

induit par (7.19) *sur les catégories de préfaisceaux, est exact et pleinement fidèle. (Pour l'exactitude, on utilise* [**4**, Exposé I, Proposition 5.4(4)].*) Autrement dit,* $\mathbf{PSh}(\mathrm{Schtf}/k)$ *s'identifie à une sous-catégorie pleine de* $\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k)$ *stable par limites et colimites finies. Un préfaisceau sur* SmFol/k *est dit* prédiscret *s'il appartient à l'image essentielle du foncteur* (7.20).

Si F est un complexe de préfaisceaux sur SmFol/k*, on dit que F est* homotopiquement prédiscret *si ses préfaisceaux d'homologie sont prédiscrets.*

Le résultat principal de cette sous-section s'énonce comme suit.

Théorème 7.9.5. — *Soit F un complexe de préfaisceaux sur* SmFol/k *borné à gauche et homotopiquement prédiscret. Alors F est* ft*-localement malléable.*

Démonstration. — On fixe un remplacement projectivement ft-fibrant G de F et on montre que G est n-malléable par récurrence sur n. La 0-malléabilité de G découle de la proposition 7.5.11 et du fait que F est homotopiquement génériquement continu (ce qui est une conséquence immédiate de la définition 7.9.4). Dans la suite on suppose que $n \geqslant 1$. D'après le théorème 7.4.8 et l'hypothèse de récurrence, G est presque n-malléable. Pour montrer qu'il est n-malléable, on doit procéder en plusieurs étapes.

Étape 1. — Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage intègre et diff-lisse, et soit $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet \longrightarrow X/\mathcal{F}$ un hyper-recouvrement générique. On se donne un système d'indéterminées $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$. Dans cette étape, nous allons montrer que le morphisme $G(X((\mathbf{t}))/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Tot}\, G(Y_\bullet((\mathbf{t}))/\mathcal{G}_\bullet)$ est un quasi-isomorphisme.

Pour $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, on pose $Y_d((\mathbf{t}]]^\circ = Y_d((\mathbf{t}]] \smallsetminus \eta(Y_d)$ et $\eta(Y_d)[\mathbf{t}]^\circ = \eta(Y_d)[\mathbf{t}] \smallsetminus \eta(Y_d)$. Puisque G est presque n-malléable, le complexe $\mathrm{Tot}^+ G(Y_\bullet((\mathbf{t}]]^\circ/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique. D'après le corollaire 6.9.11, les carrés

$$\begin{array}{ccc} G(\eta(Y_d)[\mathbf{t}]/\mathcal{G}_d) & \longrightarrow & G(\eta(Y_d)[\mathbf{t}]^\circ/\mathcal{G}_d) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ G(Y_d((\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_d) & \longrightarrow & G(Y_d((\mathbf{t}]]^\circ/\mathcal{G}_d) \end{array}$$

sont homotopiquement cartésiens. Il est donc suffisant de montrer que les complexes $\mathrm{Tot}^+ G(\eta(Y_\bullet)[\mathbf{t}]/\mathcal{G}_\bullet)$ et $\mathrm{Tot}^+ G(\eta(Y_\bullet)[\mathbf{t}]^\circ/\mathcal{G}_\bullet)$ sont acycliques. Montrons plus généralement que le complexe $\mathrm{Tot}^+ G(Q \times_k \eta(Y_\bullet)/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique pour tout k-schéma lisse Q. En posant $L = \underline{\mathrm{Hom}}(Q, H)$, il revient au même de montrer que le complexe $\mathrm{Tot}^+ L(\eta(Y_\bullet)/\mathcal{G}_\bullet)$ est acyclique. Or, L est projectivement ft-fibrant. On peut donc appliquer le théorème 6.8.6 pour conclure.

Étape 2. — On utilise ici l'étape 1 pour démontrer une propriété de rigidité pour G. Plus précisément, nous allons montrer que pour tout k-feuilletage diff-lisse $X/\mathcal{F}$ ayant un nombre fini de composantes irréductibles, le morphisme évident

$$G(X((\mathbf{t}]]/\mathcal{F}) \longrightarrow G(\eta(X)/\mathcal{F}) \tag{7.21}$$

est un quasi-isomorphisme.

Pour démontrer cela, donnons-nous une hyper-enveloppe ft-universelle $(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet} \longrightarrow X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ au sens de la définition 6.8.7. (Voir la proposition 6.8.8 pour l'existence d'un tel objet.) Par descente galoisienne, il suffit de montrer que le morphisme

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} G(X_i[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}_i) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{i\in I} G(X_i/\mathcal{F}_i)$$

est un quasi-isomorphisme. (Remarquer que les pro-k-feuilletages $\eta((X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I})$ et $(X_i/\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ sont canoniquement isomorphes.) D'après le théorème 6.8.6 et l'étape 1, les morphismes

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} G(X_i/\mathcal{F}_i) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{Tot}\, G(Q_{i,\bullet}/\mathcal{L}_{i,\bullet}) \qquad \text{et}$$
$$\operatorname*{colim}_{i\in I} G(X_i[[\mathbf{t}]]/\mathcal{F}_i) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{Tot}\, G(Q_{i,\bullet}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_{i,\bullet})$$

sont des quasi-isomorphismes. Il suffit donc de montrer que les morphismes

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} G(Q_{i,d}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_{i,d}) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{i\in I} G(Q_{i,d}/\mathcal{L}_{i,d}) \tag{7.22}$$

sont des quasi-isomorphismes pour tout $d \in \mathbb{N}$.

Or, d'après la proposition 6.7.11, les évaluations sur les pro-k-feuilletages $(Q_{i,d}/\mathcal{L}_{i,d})_{i\in I}$ et $(Q_{i,d}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_{i,d})_{i\in I}$ définissent des points du site $(\mathrm{SmFol}/k, \mathrm{ft})$. Étant donné que le morphisme $F \longrightarrow G$ est une équivalence ft-locale, le morphisme (7.22) s'identifie, à quasi-isomorphisme près, au morphisme

$$F(Q_{i,d}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_{i,d}) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{i\in I} F(Q_{i,d}/\mathcal{L}_{i,d}). \tag{7.23}$$

Le résultat souhaité (i.e., le fait que (7.23) est un quasi-isomorphisme) découle du fait que F est homotopiquement prédiscret en remarquant que $\mathcal{O}^\delta(Q_{i,d}/\mathcal{L}_{i,d}) = \mathcal{O}^\delta(Q_{i,d}[[\mathbf{t}]]/\mathcal{L}_{i,d})$ pour tout $i \in I$.

Étape 3. — On termine ici la preuve du théorème, i.e., on montre que G est n-malléable. D'après la proposition 7.6.3, il suffit de montrer que le complexe $\mathrm{Tot}^+ G(V'_\bullet[[\mathbf{t}]]/\mathcal{G}_\bullet)$ est un acyclique quelles que soient les données (1), (2′) et (3′). Grâce à l'hypothèse de récurrence, il suffit de traiter le cas où $\mathrm{card}(\mathbf{t}) = n$. Grâce à l'étape 2, il est suffisant de montrer que $\mathrm{Tot}^+ G(V'_\bullet)$ est acyclique. Or, nous avons déjà montrer que G est 0-malléable, ce qui permet de conclure. ∎

Le résultat suivant est une conséquence de la preuve du théorème 7.9.5 ; il s'agit d'une propriété de rigidité pour la cohomologie feuilletée.

Corollaire 7.9.6. — *Soit F un complexe de préfaisceaux sur* SmFol$/k$ *borné à gauche et homotopiquement prédiscret. Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage diff-lisse et intègre, et soit* $\mathbf{t}$ *un système d'indéterminées. Alors,* *le morphisme évident*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{ft}}(X((\mathbf{t}]]/\mathcal{F};F) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathrm{ft}}(\eta(X)/\mathcal{F};F)$$

est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — Ceci a été établi dans l'étape 2 de la preuve du théorème 7.9.5. ■

En guise de conclusion, on termine cette sous-section par un énoncé qui regroupe les propriétés essentielles concernant la notion de malléabilité ft-locale.

Théorème 7.9.7. — *Étant donné un k-feuilletage $S/\mathcal{E}$ et une sous-catégorie pleine $\mathscr{V} \subset \mathrm{SgFol}^{\mathcal{E}}/S$ supposée admissible au sens de la définition 6.5.12, notons $\mathbf{Mll}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{V};\Lambda)$ la sous-catégorie pleine de*

$$\mathbf{Ho}_{\mathrm{ft}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathscr{V};\Lambda)))$$

formée des complexes de préfaisceaux bornés à gauche et ft*-localement malléables.*

(a) La sous-catégorie $\mathbf{Mll}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{V};\Lambda)$ est triangulée et stable par sommes directes de complexes uniformément bornés à gauche.

(b) Si Λ est un corps de caractéristique nulle, la sous-catégorie $\mathbf{Mll}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{V};\Lambda)$ est stable par produit tensoriel.

(c) Les sous-catégories $\mathbf{Mll}_{\mathrm{ft}}(-;\Lambda)$ sont stables par image directe dérivée au sens suivant : dans la situation du théorème 7.6.6, le foncteur

$$\mathrm{R}_{\mathrm{ft}}p_* : \mathbf{Ho}_{\mathrm{ft}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathscr{W};\Lambda))) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathrm{ft}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathscr{V};\Lambda)))$$

envoie $\mathbf{Mll}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{W};\Lambda)$ dans $\mathbf{Mll}_{\mathrm{ft}}(\mathscr{V};\Lambda)$.

(d) La sous-catégorie $\mathbf{Mll}_{\mathrm{ft}}(\mathrm{SmFol}/k;\Lambda)$ contient g^*F pour tout complexe de préfaisceaux F sur Sm/k borné à gauche et vérifiant la propriété de Mayer–Vietoris formelle. (Voir (7.16) *et la définition 7.7.4.)*

(e) La sous-catégorie $\mathbf{Mll}_{\mathrm{ft}}(\mathrm{SmFol}/k;\Lambda)$ contient les complexes de préfaisceaux bornés à gauche et homotopiquement prédiscrets.

Démonstration. — La propriété (a) est évidente. Pour démontrer (b), on se donne deux complexes de préfaisceaux F et F' bornés à gauche et ft-localement malléables. Soient G et G' des remplacement projectivement ft-fibrants de F et F' ; ce sont des complexes de préfaisceaux malléables. D'après le corollaire 7.6.5, $G \otimes_\Lambda G'$ est aussi malléable. D'après la proposition 7.6.1, il en est de même d'un remplacement projectivement ft-fibrant G'' de $G \otimes_\Lambda G'$. Étant donné que G'' est aussi un remplacement projectivement ft-fibrant de $F \otimes_\Lambda F'$, ceci permet de conclure.

La propriété (c) découle immédiatement du théorème 7.6.6. La propriété (d) découle du théorème 7.6.6 et de la remarque 7.9.2. Enfin, la propriété (e) est le contenu du théorème 7.9.5. ■

Références

[1] *Schémas en groupes. Tome 1 : Propriétés générales des schémas en groupes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 151, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. MR 0274458

[2] *Schémas en groupes. Tome 2 : Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 152, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. MR 0274459

[3] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud. MR 0354651

[4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1 : Théorie des topos*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. MR 0354652

[5] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. MR 0354653

[6] Giuseppe Ancona, Stephen Enright-Ward, and Annette Huber, *On the motive of a commutative algebraic group*, Doc. Math. **20** (2015), 807–858. MR 3398728

[7] Yves André, *Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), no. 5, 685–739. MR 1862024

[8] Michael Artin and Barry Mazur, *Etale homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, No. 100, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1969. MR 0245577

[9] Joseph Ayoub, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. I*, Astérisque (2007), no. 314, x+466 pp. (2008). MR 2423375

[10] ———, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. II*, Astérisque (2007), no. 315, vi+364 pp. (2008). MR 2438151

[11] ———, *La réalisation étale et les opérations de Grothendieck*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **47** (2014), no. 1, 1–145. MR 3205601

[12] ———, *L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, I*, J. Reine Angew. Math. **693** (2014), 1–149. MR 3259031

[13] ———, *Motifs des variétés analytiques rigides*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (2015), no. 140-141, vi+386. MR 3381140

[14] ———, *From motives to comodules over the motivic Hopf algebra*, J. Pure Appl. Algebra **221** (2017), no. 7, 1507–1559. MR 3614965

[15] ———, *Motives and algebraic cycles : a selection of conjectures and open questions*, Hodge theory and L^2-analysis, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 39, Int. Press, Somerville, MA, 2017, pp. 87–125. MR 3751289

[16] Joseph Ayoub and Luca Barbieri-Viale, *1-motivic sheaves and the Albanese functor*, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), no. 5, 809–839. MR 2494373

[17] Luca Barbieri-Viale and Bruno Kahn, *On the derived category of 1-motives*, Astérisque (2016), no. 381, xi+254. MR 3545132

[18] Alexander Beĭlinson, *On the derived category of perverse sheaves*, K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986), Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer, Berlin, 1987, pp. 27–41. MR 923133

[19] Andrzej Białynicki-Birula, *On Galois theory of fields with operators*, Amer. J. Math. **84** (1962), 89–109. MR 0141663

[20] Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1983, Algèbre commutative. Chapitres 8 et 9. MR 722608

[21] ———, *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1985, Algèbre commutative. Chapitres 5 à 7. Reprint. MR 782297

[22] ———, *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1985, Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4. Reprint. MR 782296

[23] ———, *Éléments de mathématique*, Springer-Verlag, Berlin, 2007, Algèbre commutative. Chapitre 10. Reprint. MR 2333539

[24] Lawrence Breen, *Extensions of abelian sheaves and Eilenberg-MacLane algebras*, Invent. Math. **9** (1969/1970), 15–44. MR 0258842

[25] Michel Brion, *Anti-affine algebraic groups*, J. Algebra **321** (2009), no. 3, 934–952. MR 2488561

[26] ———, *The coherent cohomology ring of an algebraic group*, Algebr. Represent. Theory **16** (2013), no. 5, 1449–1467. MR 3102962

[27] ———, *On the fundamental groups of commutative algebraic groups*, Preprint (2017).

[28] Alexandru Buium, *Differential function fields and moduli of algebraic varieties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1226, Springer-Verlag, Berlin, 1986. MR 874111

[29] Alain Connes, *Cohomologie cyclique et foncteurs* Ext^n, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **296** (1983), no. 23, 953–958. MR 777584

[30] Brian Conrad, *A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups*, J. Ramanujan Math. Soc. **17** (2002), no. 1, 1–18. MR 1906417

[31] Christopher Deninger and Jacob Murre, *Motivic decomposition of abelian schemes and the Fourier transform*, J. Reine Angew. Math. **422** (1991), 201–219. MR 1133323

[32] Paul Goerss and John Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999. MR 1711612

[33] Alexander Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (SGA 2), North-Holland Publishing Co., Amsterdam ; Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1968, Augmenté d'un exposé par Michèle Raynaud, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, 1962, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 2. MR 0476737

[34] Alexander Grothendieck and Jean Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1960), no. 4, 228. MR 0217083

[35] ______, *Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1961), no. 8, 222. MR 0217084

[36] ______, *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1961), no. 11, 167. MR 0217085

[37] ______, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Première partie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1964), no. 20, 259. MR 0173675

[38] ______, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Deuxième partie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1965), no. 24, 231. MR 0199181

[39] ______, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 28, 255. MR 0217086

[40] ______, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1967), no. 32, 361. MR 0238860

[41] ______, *Éléments de géométrie algébrique. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 166, Springer-Verlag, Berlin, 1971. MR 3075000

[42] Robin Hartshorne, *Local cohomology*, A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall, vol. 1961, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967. MR 0224620

[43] Raymond Hoobler, *The differential brauer group*, Preprint (2010).

[44] Luc Illusie, Yves Laszlo, and Fabrice Orgogozo (eds.), *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents*, Société Mathématique de France, Paris, 2014, Séminaire à l'École Polytechnique 2006–2008. [Seminar of the Polytechnic School 2006–2008], With the collaboration of Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel Raynaud, Joël Riou, Benoît Stroh, Michael Temkin and Weizhe Zheng, Astérisque No. 363-364 (2014) (2014). MR 3309086

[45] John Jardine, *Simplicial presheaves*, J. Pure Appl. Algebra **47** (1987), no. 1, 35–87. MR 906403

[46] Kiran Kedlaya, *Good formal structures for flat meromorphic connections, II : excellent schemes*, J. Amer. Math. Soc. **24** (2011), no. 1, 183–229. MR 2726603

[47] Ellis Robert Kolchin, *Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations*, Ann. of Math. (2) **49** (1948), 1–42. MR 0024884

[48] ______, *Galois theory of differential fields*, Amer. J. Math. **75** (1953), 753–824. MR 0058591

[49] ______, *On the Galois theory of differential fields*, Amer. J. Math. **77** (1955), 868–894. MR 0073588

[50] ______, *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York-London, 1973, Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. MR 0568864

[51] Ellis Robert Kolchin and Serge Lang, *Algebraic groups and the Galois theory of differential fields*, Amer. J. Math. **80** (1958), 103–110. MR 0094596

[52] Jerald Kovacic, *The differential Galois theory of strongly normal extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 11, 4475–4522. MR 1990759

[53] ———, *Geometric characterization of strongly normal extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 9, 4135–4157. MR 2219014

[54] Michel Lazard, *Commutative formal groups*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 443, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. MR 0393050

[55] Bernard Malgrange, *Systèmes différentiels involutifs*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 19, Société Mathématique de France, Paris, 2005. MR 2187078

[56] Hideyuki Matsumura, *Commutative algebra*, second ed., Mathematics Lecture Note Series, vol. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980. MR 575344

[57] Carlo Mazza, Vladimir Voevodsky, and Charles Weibel, *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006. MR 2242284 (2007e :14035)

[58] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky, $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory of schemes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1999), no. 90, 45–143. MR 1813224 (2002f :14029)

[59] Dorin Popescu, *General Néron desingularization*, Nagoya Math. J. **100** (1985), 97–126. MR 818160 (87f :13019)

[60] ———, *General Néron desingularization and approximation*, Nagoya Math. J. **104** (1986), 85–115. MR 868439 (88a :14007)

[61] Michel Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 169, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. MR 0277519

[62] Joseph Fels Ritt, *Differential Algebra*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXIII, American Mathematical Society, New York, N. Y., 1950. MR 0035763

[63] Jean-Jacques Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. Reine Angew. Math. **327** (1981), 12–80. MR 631309

[64] Jean-Pierre Serre, *Morphismes universels et variétés d'albanese.*, no. 10, E.N.S., 1958/59, Variétés de Picard. Sém. C. Chevalley, tome 4, p. 22.

[65] ———, *Groupes proalgébriques*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1960), no. 7, 67. MR 0118722

[66] William Paul Thurston, *Existence of codimension-one foliations*, Ann. of Math. (2) **104** (1976), no. 2, 249–268. MR 0425985

[67] Dmitrii Trushin, *Splitting fields and general differential Galois theory*, Mat. Sb. **201** (2010), no. 9, 77–110. MR 2760461

[68] Angelo Vistoli, *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, Fundamental algebraic geometry, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 1–104. MR 2223406

[69] Vladimir Voevodsky, *Homotopy theory of simplicial sheaves in completely decomposable topologies*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), no. 8, 1384–1398. MR 2593670 (2011a :55022)

[70] ———, *Unstable motivic homotopy categories in Nisnevich and cdh-topologies*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), no. 8, 1399–1406. MR 2593671 (2011e :14041)

[71] Charles Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR 1269324

Index

Joseph Ayoub,
Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstr. 190, CH-8057 Zürich, Switzerland
CNRS, LAGA, Université Paris 13, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France
E-mail : `joseph.ayoub@math.uzh.ch`