Markus P. Brodmann

KOMMUTATIVE ALGEBRA

ausgearbeitet von Roberto Boldini und Fred Rohrer

Vorläufige Version vom 12. März 2009

Institut für Mathematik der Universität Zürich

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Noethersche Ringe und Moduln

§ Grundbegriffe

1.1 Festsetzungen. (A) Unter einem ***kommutativen Ring*** verstehen wir immer einen Ring mit kommutativer Multiplikation und mit einem Einselement. Sprechen wir von einem Ring, so wollen wir die beiden genannten Eigenschaften als erfüllt annehmen. Das Einselement eines Rings R bezeichnen wir mit 1 oder 1_R.

(B) Ein Homomorphismus $h : R \to R'$ von Ringen heisst ***unitär***, wenn gilt $h(1_R) = 1_{R'}$. Im Weitern seien alle Ringhomomorphismen unitär.

(C) Ist R ein Ring, so heisst ein R-Modul M ***unitär***, wenn $1 \cdot m = m$ für alle $m \in M$. Wir wollen immer annehmen, Moduln seien unitär.

(D) Eine Teilmenge N eines R-Moduls M ist bekanntlich genau dann ein ***Untermodul***, wenn N bezüglich der auf M definierten Operationen ein R-Modul ist, d.h., wenn $N \neq \varnothing$ und wenn aus $m, n \in N$ und $x \in R$ immer folgen $m + n \in N$ und $x \cdot m \in N$.

(E) Ist $\mathcal{M} \subseteq M$ eine nicht-leere Menge, so schreiben wir $(\mathcal{M})$ oder $\sum_{m \in \mathcal{M}} Rm$ für die Menge

$$\left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i m_i \;\middle|\; r \in \mathbb{N}_0;\, x_1, \ldots, x_r \in R,\, m_1, \ldots, m_r \in \mathcal{M} \right\}$$

aller R-Linearkombinationen von Elementen aus $\mathcal{M}$. Offenbar ist $(\mathcal{M}) = \sum_{m \in \mathcal{M}} Rm$ ein Untermodul von M, der die Menge $\mathcal{M}$ umfasst. Wir nennen $(\mathcal{M})$ den durch die Menge $\mathcal{M}$ ***erzeugten Untermodul***. Zudem setzen wir $(\varnothing) = 0$; d.h. der durch die leere Menge erzeugte Untermodul soll der ***Nullmodul*** $\{0\}$ sein, den wir — falls kein Anlass zu Verwechslung besteht — immer mit 0 bezeichnen.

(F) Sei M ein R-Modul. Sind $m_1, \ldots, m_r$ endlich viele Elemente aus M, so bezeichnen wir mit $(m_1, \ldots, m_r)$ oder $\sum_{i=1}^{r} Rm_i$ den durch die Menge $\{m_1, \ldots, m_r\}$ erzeugten Untermodul $\big(\{m_1, \ldots, m_r\}\big)$ von M. Der Modul M heisst ***endlich erzeugt***, wenn es endlich viele Elemente $m_1, \ldots, m_r \in M$ so gibt, dass

$$M = (m_1, \ldots, m_r) = \sum_{i=1}^{r} Rm_i.$$

Das System $m_1, \dots, m_r$ nennen wir dann ein ***Erzeugendensystem*** von M.

(G) Sei M ein R-Modul. Eine ***aufsteigende Folge von Untermoduln*** ist eine Folge $(N_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Untermoduln $N_i \subseteq M$ so, dass

$$N_i \subseteq N_{i+1} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}_0.$$

Wir sagen, eine Folge $(N_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Untermoduln ***werde stationär***, wenn es ein $i_0 \in \mathbb{N}_0$ so gibt, dass

$$N_i = N_{i_0} \quad \text{für alle } i \geq i_0.$$

§ Der Begriff des noetherschen Moduls

1.2 Satz. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Jeder Untermodul N von M ist endlich erzeugt.

(ii) Jede aufsteigende Folge $(N_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Untermoduln von M wird stationär.

(iii) Jede Menge $\mathbb{M} \neq \varnothing$ von Untermoduln von M besitzt bezüglich der Inklusion maximale Mitglieder.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $(N_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M. Sofort prüft man dann nach, dass $N := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} N_i$ ein Untermodul von M ist. Nach Voraussetzung ist N endlich erzeugt. Wir finden also Elemente $m_1, \dots, m_r \in M$ mit $N = \sum_{j=1}^{r} Rm_j$. Zu jedem $j \in \{1, \dots, r\}$ gibt es einen Index $i(j)$ so, dass $m_j \in N_{i(j)}$. Sei $i_0 := \max\{i(j) \mid j = 1, \dots, r\}$. Dann ist $m_j \in N_{i_0}$ für $j = 1, \dots, r$. Es folgt somit $N = \sum_{j=1}^{r} Rm_j \subseteq N_{i_0} \subseteq N$, also $N_{i_0} = N$. Damit ergibt sich, dass $N_i = N_{i_0}$ für alle $i \geq i_0$.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Sei $\mathbb{M} \neq \varnothing$ eine Menge von Untermoduln von M. Nehmen wir an, $\mathbb{M}$ besitze bezüglich der Inklusion keine maximale Mitglieder. Wir wählen $N \in \mathbb{M}$. Dann gibt es immer ein $N' \in \mathbb{M}$ mit $N \subsetneq N'$. So finden wir sofort eine aufsteigende Folge $(N_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Untermoduln $N_i \in \mathbb{M}$ so, dass $N_i \subsetneq N_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Dies widerspricht der Voraussetzung (ii).

"(iii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $\mathbb{M}$ die Menge aller endlich erzeugten Untermoduln N von M, zu welchen es einen nicht endlich erzeugten Untermodul N' von M so gibt, dass $N \subseteq N'$. Weil der Nullmodul endlich erzeugt und in allen Untermoduln von M enthalten ist, gilt $\mathbb{M} \neq \varnothing$ offenbar genau dann, wenn nicht alle Untermoduln von M endlich erzeugt sind. Es genügt also zu zeigen, dass $\mathbb{M} = \varnothing$. Nehmen wir das Gegenteil an! Nach Voraussetzung besitzt $\mathbb{M}$ ein bezüglich der Inklusion maximales Mitglied N. Es handelt sich um einen endlich erzeugten Untermodul, sodass wir schreiben können $N = (m_1, \dots, m_r)$ mit geeigneten Elementen $m_1, \dots, m_r \in N$. Weiter gibt es einen nicht endlich erzeugten Untermodul N' von M mit $N \subseteq N'$. Es muss dann gelten $N \subsetneq N'$. Wir finden also ein $n \in N' \setminus N$. Mit $\overline{N} := (m_1, \dots, m_r, n)$ folgt dann $\overline{N} \subseteq N'$, also $\overline{N} \in \mathbb{M}$. Weiter ist $N \subsetneq \overline{N}$. Dies widerspricht der Maximalität von N in $\mathbb{M}$. ■

1.3 Definition. Sei R ein Ring. Ein R-Modul M mit den äquivalenten Eigenschaften (1.2)(i),(ii),(iii) heisst ein ***noetherscher Modul***.

§ Erste Eigenschaften noetherscher Moduln

1.4 Festsetzungen und Bemerkungen. (A) Sei R ein Ring und $h : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Wir schreiben dann $\mathrm{Im}(h)$ für die ***Bildmenge*** $h(M) \subseteq N$ von M unter h und $\mathrm{Ker}(h)$ für den ***Kern*** $h^{-1}(0) \subseteq M$ von h. $\mathrm{Im}(h)$ ist ein Untermodul von N, und $\mathrm{Ker}(h)$ ist ein Untermodul von M. Offenbar ist h genau dann surjektiv, wenn $\mathrm{Im}(h) = N$, und genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(h) = 0$.

(B) Sei R ein Ring und $h : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Für jeden Untermodul $U \subseteq M$ gilt dann

$$h^{-1}\big(h(U)\big) = U + \mathrm{Ker}(h).$$

In der Tat folgt aus $x \in h^{-1}\big(h(U)\big)$ zunächst $h(x) \in h(U)$. Also gibt es ein $u \in U$ mit $h(u) = h(x)$. Somit ist $h(x-u) = 0$, d.h. $u_0 := x - u \in \mathrm{Ker}(h)$. So erhalten wir $x = u + u_0 \in U + \mathrm{Ker}(h)$. Umgekehrt können wir ein $x \in U + \mathrm{Ker}(h)$ immer schreiben als $x = u + u_0$ für geeignete Elemente $u \in U$ und $u_0 \in \mathrm{Ker}(h)$. Somit ist $h(x) = h(u) + h(u_0) = h(u) + 0 = h(u)$, also $h(x) \in h(U)$, d.h. $x \in h^{-1}\big(h(U)\big)$.

1.5 Festsetzungen und Bemerkungen. (A) Sei R ein Ring. Sind M und N R-Moduln und $h : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, so heissen $\mathrm{Qu}(h) := M$ ***die Quelle von*** h und $\mathrm{Zi}(h) := N$ ***das Ziel von*** h. Eine ***Sequenz von*** R***-Moduln*** ist eine Familie $(h_i)_{i\in I}$ von Homomorphismen von R-Moduln so, dass $I \subseteq \mathbb{Z}$ ein Intervall ist und dass $\mathrm{Zi}(h_i) = \mathrm{Qu}(h_{i-1})$ für jedes $i \in I \setminus \{\sup(I)\}$ gilt.

(B) Sei $(h_i)_{i\in I}$ eine Sequenz von R-Moduln. Für $i \in I$ sei $M_i := \mathrm{Qu}(h_i)$, und falls $\min(I)$ existiert, so sei $M_{\min(I)-1} := \mathrm{Zi}(h_{\min(I)})$. Dann besteht folgende Situation:

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{h_{i+1}} M_i \xrightarrow{h_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

für $i \in I \setminus \{\inf(I), \sup(I), \sup(I)-1\}$, und die Sequenz von R-Moduln $(h_i)_{i\in I}$ wird auch mit $(M_i, h_i)_{i\in I}$ bezeichnet. Gilt $I = \mathbb{Z}$, so wird $(h_i)_{i\in I}$ auch mit $h_\bullet$ oder mit $(M_\bullet, h_\bullet)$ bezeichnet.

(C) Seien $(h_i)_{i\in I}$ eine Sequenz von R-Moduln und $r \in I$. Falls $\mathrm{Qu}(h_i) = 0$ für alle $i \in I$ mit $i \geq r$, so identifizieren wir $(h_i)_{i\in I}$ mit $(h_i)_{i\in\{j\in I \mid j\leq r\}}$. Falls $\mathrm{Zi}(h_i) = 0$ für alle $i \in I$ mit $i \leq r$, so identifizieren wir $(h_i)_{i\in I}$ mit $(h_i)_{i\in\{j\in I\mid j\geq r\}}$. Anders gesagt können wir "alle am linken oder am rechten Ende einer Sequenz von R-Moduln stehenden Nullmoduln bis auf jeweils einen weglassen".

(D) Sei $(h_i)_{i\in I}$ eine Sequenz von R-Moduln. Sei $j \in I \setminus \{\sup(I)\}$. Die Sequenz $(h_i)_{i\in I}$ heisst ***halbexakt an der Stelle*** j, falls $\mathrm{Im}(h_{j+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(h_j)$, und ***exakt an der Stelle*** j, falls $\mathrm{Im}(h_{j+1}) = \mathrm{Ker}(h_j)$. Ist $(h_i)_{i\in I}$ halbexakt an der Stelle j, so gilt also $h_j \circ h_{j+1} = 0$. Die Sequenz $(h_i)_{i\in I}$ heisst ***halbexakt*** beziehungsweise ***exakt***, falls sie halbexakt beziehungsweise exakt an der Stelle j ist für jedes $j \in I \setminus \{\sup(I)\}$.

(E) Eine ***kurze exakte Sequenz von R-Moduln*** ist eine exakte Sequenz von R-Moduln $(h_i)_{i\in I}$ so, dass $\#I = 5$ und dass $\mathrm{Qu}(h_{\max(I)}) = 0 = \mathrm{Zi}(h_{\min(I)})$, also von der Form

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{h} M \xrightarrow{l} P \longrightarrow 0,$$

wobei $0 \to N$ und $P \to 0$ die einzigen Homomorphismen von R-Moduln von 0 nach N beziehungsweise von P nach 0 sind. Die Exaktheit bedeutet, dass h injektiv und l surjektiv sind und dass $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Ker}(l)$ gilt.

1.6 Satz. Sei R ein Ring, und sei $0 \to N \xrightarrow{h} M \xrightarrow{l} P \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann sind äquivalent:

(i) M ist noethersch.

(ii) N und P sind noethersch.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei L ein Untermodul von N. Dann ist $h(L)$ ein Untermodul von M, also endlich erzeugt. Wir finden also Elemente $m_1, \dots, m_r \in h(L)$ so, dass $h(L) = (m_1, \dots, m_r)$. Für $i = 1, \dots, r$ sei $n_i \in L$ so, dass $m_i = h(n_i)$. Sei $n \in L$. Wegen $h(n) \in h(L)$ finden wir dann Elemente $x_1, \dots, x_r \in R$ mit $h(n) = \sum_{i=1}^r x_i m_i$. Es folgt $h(n) = \sum_{i=1}^r x_i h(n_i) = h\big(\sum_{i=1}^r x_i n_i\big)$. Weil h injektiv ist, sehen wir, dass $n = \sum_{i=1}^r x_i n_i$. Also ist $n \in (n_1, \dots, n_r)$. Dies zeigt, dass $L = (n_1, \dots, n_r)$, also, dass L endlich erzeugt ist.

Sei jetzt $H \subseteq P$ ein Untermodul. Dann ist $l^{-1}(H)$ ein Untermodul von M, also endlich erzeugt. Wir können also schreiben $l^{-1}(H) = (u_1, \dots, u_s)$. Sei $p \in H$ und $q \in l^{-1}(p)$. Wegen $q \in l^{-1}(H)$ finden wir dann Elemente $y_1, \dots, y_s \in R$ mit $q = \sum_{i=1}^s y_i u_i$. Es folgt $p = l(q) = l\big(\sum_{i=1}^s y_i u_i\big) = \sum_{i=1}^s y_i l(u_i) \in \big(l(u_1), \dots, l(u_s)\big)$. Dies zeigt, dass $H = \big(l(u_1), \dots, l(u_s)\big)$, also, dass H endlich erzeugt ist.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $(N_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M. Dann sind $\big(h^{-1}(N_i)\big)_{i\in\mathbb{N}_0}$ und $\big(l(N_i)\big)_{i\in\mathbb{N}_0}$ aufsteigende Folgen von Untermoduln von N resp. von P. Nach Voraussetzung finden wir also Indizes $k_0, j_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass $h^{-1}(N_k) = h^{-1}(N_{k_0})$ für alle $k \geq k_0$ und $l(N_j) = l(N_{j_0})$ für alle $j \geq j_0$. Sei $i_0 := \max\{k_0, j_0\}$, und sei $i \geq i_0$. Dann gilt $h^{-1}(N_i) = h^{-1}(N_{i_0})$ und $l(N_i) = l(N_{i_0})$. Sei $n \in N_i$. Dann ist $l(n) \in l(N_i) = l(N_{i_0})$. Es gibt also ein $\overline{n} \in N_{i_0}$ mit $l(\overline{n}) = l(n)$. Wegen $l(n-\overline{n}) = l(n)-l(\overline{n}) = 0$ ist $n-\overline{n} \in \mathrm{Ker}(l) = \mathrm{Im}(h)$. Wir finden also ein $t \in N$ mit $h(t) = n - \overline{n}$. Wegen $n - \overline{n} \in N_i$ ist $t \in h^{-1}(N_i) = h^{-1}(N_{i_0})$, also $n - \overline{n} = h(t) \in N_{i_0}$. Es folgt, dass $n = (n - \overline{n}) + \overline{n} \in N_{i_0}$. Dies zeigt, dass $N_i \subseteq N_{i_0}$, also $N_i = N_{i_0}$ für alle $i \geq i_0$. ■

1.7 Festsetzung. Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul. Den ***Restklassenmodul*** von M nach N bezeichnen wir mit M/N. Ist $m \in M$, so schreiben wir $m+N$ oder auch $\overline{m}$ für die ***Restklasse*** von m modulo N in M/N. Den durch die Vorschrift $m \mapsto \overline{m} = m + N$ definierten surjektiven Homomorphismus $M \xrightarrow{\bar{\ }} M/N$ von R-Moduln nennen wir den ***Restklassenhomomorphismus***.

1.8 Korollar. Sei R ein Ring und sei $h : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Dann gilt:

(a) Ist h injektiv und N noethersch, so ist auch M noethersch.

(b) Ist h surjektiv und M noethersch, so ist auch N noethersch.

Beweis. "(a)" Wegen der kurzen exakten Sequenz $0 \to M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{\bar{\cdot}} N/h(M) \to 0$ schliesst man mit (1.6).

"(b)" Wegen der kurzen exakten Sequenz $0 \to \mathrm{Ker}(h) \hookrightarrow M \xrightarrow{h} N \to 0$ schliesst man mit (1.6). ■

1.9 Korollar. Die Eigenschaft, noetherscher Modul zu sein, überträgt sich auf Untermoduln, auf Restklassenmoduln und bleibt bei Isomorphie erhalten. ■

§ Noethersche Ringe

1.10 Bemerkungen. (A) Ein Ring R ist in natürlicher Weise ein Modul über sich selbst. Die Ideale von R sind dabei genau die Untermoduln von R.

(B) Ist $\mathfrak{a} \subsetneq R$ ein Ideal, so trägt der Restklassenmodul $R/\mathfrak{a}$ in natürlicher Weise eine Ringstruktur. Man nennt $R/\mathfrak{a}$ deshalb den ***Restklassenring*** von R nach $\mathfrak{a}$. Der ***Restklassenhomomorphismus*** $R \xrightarrow{\bar{\cdot}} R/\mathfrak{a}$ ist in dieser Situation ein Homomorphismus von Ringen.

1.11 Definition. Einen Ring R nennen wir ***noethersch***, wenn er als R-Modul noethersch ist.

1.12 Satz. Für einen Ring R sind äquivalent:

(i) R ist noethersch.

(ii) Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R ist endlich erzeugt.

(iii) Jede aufsteigende Folge $(\mathfrak{a}_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Idealen in R wird stationär.

(iv) Jede Menge $\mathbb{A} \neq \varnothing$ von Idealen in R besitzt bezüglich der Inklusion maximale Mitglieder.

Beweis. Direkt aus (1.2) und (1.10)(A). ■

§ Noethersche Moduln über noetherschen Ringen

1.13 Festsetzungen. (A) Sei R ein Ring, und sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Das ***direkte Produkt*** der Moduln M_i bezeichnen wir dann mit $\prod_{i\in I} M_i$. Es handelt sich dabei um die Menge aller Systeme $(m_i)_{i\in I}$ mit $m_i \in M_i$. Durch die Verknüpfungsvorschriften

$$(m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I} := (m_i + n_i)_{i\in I},$$
$$x \cdot (m_i)_{i\in I} := (x \cdot m_i)_{i\in I}$$

wird $\prod_{i\in I} M_i$ in natürlicher Weise zum R-Modul.

(B) Die ***direkte Summe*** $\bigoplus_{i\in I} M_i$ der Moduln M_i definieren wir als die Menge aller Systeme $(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ mit der Eigenschaft, dass m_i für höchstens endlich viele Indizes $i \in I$ nicht verschwindet. Es ist $\bigoplus_{i\in I} M_i$ ein Untermodul von $\prod_{i\in I} M_i$. Ist die Indexmenge I endlich, so gilt offenbar $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$.

(C) Wir schreiben

$$\bigoplus_{i=1}^{r} M_i \quad \text{oder} \quad M_1 \oplus \cdots \oplus M_r \quad \text{für} \quad \bigoplus_{i\in\{1,\ldots,r\}} M_i.$$

Ist $M_i = M$ für alle $i \in I$, so schreiben wir

$$M^I \text{ für } \prod_{i\in I} M_i \quad \text{und} \quad M^{\oplus I} \text{ für } \bigoplus_{i\in I} M_i.$$

Ist $r \in \mathbb{N}_0$, so schreiben wir

$$M^{\oplus r} \text{ für } M^{\oplus\{1,\ldots,r\}}.$$

Insbesondere ist $M^{\oplus 0} = 0$.

(D) Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann ist $R^{\oplus r}$ offenbar erzeugt durch die r Elemente

$$e_j^{\oplus r} := (\delta_{ij})_{i\in\{1,\ldots,r\}},$$

wo $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{jj} = 1$. Wir nennen $e_j^{\oplus r}$ das j-te ***kanonische Basiselement*** von $R^{\oplus r}$.

1.14 Bemerkung. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln, und sei $M := \bigoplus_{i\in I} M_i$ deren direkte Summe. Man kann die Moduln M_i in M durch die injektiven Homomorphismen $\varepsilon_i : M_i \rightarrowtail M$, $x \mapsto (\delta_{ij}x)_{j\in I}$ einbetten, wobei $\delta_{ij} = 1 \in R$, falls $i = j$, und $\delta_{ij} = 0 \in R$, sonst. Die homomorphen Bilder $N_i := \varepsilon_i(M_i)$ der M_i haben paarweise trivialen Durchschnitt. Demzufolge besitzt jedes Element $m = (m_i)_{i\in I} \in M$ eine eindeutig bestimmte Darstellung $m = \sum_{i\in I} n_i$ mit $n_i \in N_i$ für jedes $i \in I$. Indem man diese Elemente $n_i \in N_i$ je mit dem Element $m_i = \varepsilon^{-1}(n_i) \in M_i$ identifiziert, schreibt man oft auch $m = \sum_{i\in I} m_i$ anstelle der formell korrekteren Darstellungen $m = (m_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} \varepsilon_i(m_i)$.

1.15 Satz. Sei R ein noetherscher Ring, und sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:

(i) M ist endlich erzeugt.

(ii) M ist noethersch.

Beweis. "(ii) ⇒ (i)" Klar.

"(i) ⇒ (ii)" Durch Induktion nach r beweisen wir, dass die Moduln $R^{\oplus r}$ für alle $r \in \mathbb{N}_0$ noethersch sind. Wegen $R^{\oplus 0} = 0$ und $R^{\oplus 1} = R$ ist dies klar für $r = 0, 1$. Sei also $r > 1$. Es besteht dann eine kurze exakte Sequenz $0 \to R^{\oplus(r-1)} \xrightarrow{h} R^{\oplus r} \xrightarrow{l} R \to 0$, in welcher h und l definiert sind durch $h : (x_1, \ldots, x_{r-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{r-1}, 0)$ und $l : (x_1, \ldots, x_r) \mapsto x_r$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $R^{\oplus(r-1)}$ noethersch. Nach Voraussetzung ist R noethersch. Gemäss (1.6) ist also $R^{\oplus r}$ noethersch.

Jetzt zeigen wir, dass unser endlich erzeugter R-Modul M noethersch ist. Dazu schreiben wir $M = (m_1, \ldots, m_r)$. Durch $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto \sum_{i=1}^r x_i m_i$ wird dann ein surjektiver Homomorphismus $R^{\oplus r} \to M$ von R-Moduln definiert. Weil $R^{\oplus r}$ noethersch ist, schliesst man mit (1.8)(b). ■

§ Erste Eigenschaften noetherscher Ringe

1.16 Satz. Ist $f : R \to R'$ ein surjektiver Homomorphismus von Ringen, und ist R noethersch, so ist auch R' noethersch.

Beweis. Sei $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ ein Ideal. Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{a}'$ endlich erzeugt ist. Die Menge $\mathfrak{a} := f^{-1}(\mathfrak{a}')$ ist ein Ideal in R. Weil R noethersch ist, finden wir Elemente $x_1, \ldots, x_r \in R$ mit $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_r)$. Sei $x' \in \mathfrak{a}'$. Weil f surjektiv ist, finden wir ein $x \in \mathfrak{a}$ mit $f(x) = x'$. Mit geeigneten Elementen $c_1, \ldots, c_r \in R$ können wir schreiben $x = \sum_{i=1}^r c_i x_i$. Es folgt dann $x' = f(x) = f\big(\sum_{i=1}^r c_i x_i\big) = \sum_{i=1}^r f(c_i) f(x_i) \in \big(f(x_1), \ldots, f(x_r)\big)$. Dies zeigt, dass $\mathfrak{a}' \subseteq \big(f(x_1), \ldots, f(x_r)\big)$. Wegen $f(x_1), \ldots, f(x_r) \in \mathfrak{a}'$ folgt $\mathfrak{a}' = \big(f(x_1), \ldots, f(x_r)\big)$. ■

1.17 Korollar. Die Eigenschaft, noetherscher Ring zu sein, überträgt sich auf Restklassenringe und bleibt bei Isomorphie erhalten.

1.18 Notiz. Man beachte, dass sich die Eigenschaft, noetherscher Ring zu sein, nicht unbedingt auf Unterringe (s. (1.19)(A)) überträgt. Man betrachte als Beispiel dafür den Polynomring $R := K[X_1, X_2, \ldots]$ in den unendlich vielen Unbestimmten $X_1, X_2, \ldots$ über einem Körper K. Die aufsteigende Folge $(\mathfrak{a}_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Idealen $\mathfrak{a}_i := (X_1, \ldots, X_i) \subseteq R$ wird nie stationär. Also ist R nicht noethersch. Andrerseits ist R ein Unterring des rationalen Funktionenkörpers $L := K(X_1, X_2, \ldots)$, der als Körper natürlich noethersch ist, vgl. (1.22)(A).

§ Der Hilbertsche Basissatz

1.19 Festsetzungen. (A) Sei R' ein Ring. Eine Teilmenge $R \subseteq R'$ heisst ein ***Unterring*** von R', wenn sie bezüglich der Operationen von R' ein Ring ist. Gleichbedeutend ist, dass $1_{R'} \in R$ und dass aus $x, y \in R$ immer folgt $x - y \in R$ und $x \cdot y \in R$. Wir sagen dann auch, R' sei ein ***Erweiterungsring*** von R.

(B) Sei R ein Unterring von R'. Sei $U \subseteq R'$ eine Teil,enge. Wir schreiben $R[U]$ für den Durchschnitt aller Unterringe R'' von R', für welche gilt $R \cup U \subseteq R''$. Offenbar ist $R[U]$ ein Unterring von R', welcher R und U umfasst. Es handelt sich um den kleinsten Unterring von R', welcher R und U umfasst. Dieser Ring $R[U]$ heisst ***der durch*** U ***erzeugte Erweiterungsring von*** R. Leicht prüft man nach, dass gilt

$$R[U] = \left\{ \sum_{0 \leq \nu_1, \ldots, \nu_r \leq N} c_{\nu_1 \cdots \nu_r} u_1^{\nu_1} \cdots u_r^{\nu_r} \;\middle|\; N \in \mathbb{N}_0, r \in \mathbb{N}_0, u_1, \ldots, u_r \in U, c_{\nu_1 \cdots \nu_r} \in R \right\}.$$

Sind endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_r \in R'$ gegeben, so schreiben wir

$$R[a_1, \ldots, a_r] := R[\{a_1, \ldots, a_r\}].$$

Dieser Ring heisst ***der durch*** $a_1, \ldots, a_r$ ***erzeugte Erweiterungsring von*** R. Aus dem oben Bemerkten folgt sofort

$$R[a_1, \ldots, a_r] = \left\{ \sum_{0 \leq \nu_1, \ldots, \nu_r \leq N} c_{\nu_1 \cdots \nu_r} a_1^{\nu_1} \cdots a_r^{\nu_r} \;\middle|\; N \in \mathbb{N}_0, c_{\nu_1 \cdots \nu_r} \in R \right\}.$$

Wir sagen, R' sei ein ***endlich erzeugter Erweiterungsring von*** R, wenn es endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_r \in R'$ so gibt, dass $R' = R[a_1, \ldots, a_r]$.

(C) Sei $R[X_1, \ldots, X_r]$ der ***Polynomring über*** R ***in den Unbestimmten*** $X_1, \ldots, X_r$. Sei R' ein Erweiterungsring von R, und seien $a_1, \ldots, a_r \in R'$. Dann wird durch die Vorschrift

$$\sum_{0 \leq \nu_i \leq N} c_{\nu_1, \ldots, \nu_r} X_1^{\nu_1} \cdots X_r^{\nu_r} \mapsto \sum_{0 \leq \nu_i \leq N} c_{\nu_1, \ldots, \nu_r} a_1^{\nu_1} \cdots a_r^{\nu_r}$$

ein Homomorphismus von Ringen

$$\Phi := \Phi_{a_1, \ldots, a_r} : R[X_1, \ldots, X_r] \to R'$$

definiert. Dieser heisst der durch $X_i \mapsto a_i$ definierte ***Einsetzungshomomorphismus***. Für dessen Bild gilt offenbar

$$\Phi\big(R[X_1, \ldots, X_r]\big) = \mathrm{Im}(\Phi) = R[a_1, \ldots, a_r].$$

(D) Sei R ein Ring. Eine R-***Algebra*** ist ein Paar (R', f) bestehend aus einem Ring R' und einem Homomorphismus von Ringen $f : R \to R'$. Durch die Multiplikation

$$x \cdot r' := f(x) r'$$

für $x \in R$ und $r' \in R'$ wird R' zum R-Modul. Das Bild $f(R) = \mathrm{Im}(f)$ von f ist ein Unterring von R'. Wir sagen, R' sei eine ***endlich erzeugte*** R-***Algebra***, wenn R' ein endlich erzeugter Erweiterungsring von $f(R)$ ist.

1.20 Satz. Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist $R[X_1, \ldots, X_r]$ noethersch.

Beweis. Durch Induktion beschränkt man sich sofort auf den Fall mit $r = 1$. Setzen wir dann $X := X_1$, so bleibt zu zeigen, dass der Polynomring $R[X]$ über dem noetherschen Ring R noethersch ist. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann gibt es ein nicht endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a}$ von $R[X]$. Natürlich ist $\mathfrak{a} \neq 0$. Wir wählen $f_1 \in \mathfrak{a} \smallsetminus 0$ von minimalem Grad. Dann ist $(f_1) \subsetneq \mathfrak{a}$, und wir finden ein $f_2 \in \mathfrak{a} \smallsetminus (f_1)$ von minimalem Grad. Dann ist $(f_1, f_2) \subsetneq \mathfrak{a}$, und wir finden ein $f_3 \in \mathfrak{a} \smallsetminus (f_1, f_2)$ von minimalem Grad... So fortfahrend finden wir also eine Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Polynomen aus $\mathfrak{a}$ derart, dass f_i von minimalem Grad ist in $\mathfrak{a} \smallsetminus (f_1, \dots, f_{i-1})$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Wir schreiben d_i für den Grad von f_i. Wegen $\mathfrak{a} \smallsetminus (f_1, \dots, f_i) \subseteq \mathfrak{a} \smallsetminus (f_1, \dots, f_{i-1})$ gilt dann jeweils $d_{i+1} \geq d_i$. Sei $a_i \in R \smallsetminus 0$ der Koeffizient von f_i zum Grad d_i. Wir können also jeweils schreiben $f_i = a_i X^{d_i} + g_i$, wo $g_i \in R[X]$ vom Grad $< d_i$ ist. Weil R noethersch ist, wird die aufsteigende Folge $\big((a_1, \dots, a_i)\big)_{i \in \mathbb{N}}$ von Idealen in R stationär. Wir finden deshalb ein $t \in \mathbb{N}$ mit $a_{t+1} \in (a_1, \dots, a_t)$.

Mit geeigneten Elementen $c_1, \dots, c_t \in R$ gilt also $a_{t+1} = \sum_{i=1}^t c_i a_i$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} l &:= g_{t+1} - \textstyle\sum_{i=1}^t c_i g_i X^{d_{t+1} - d_i} \\ &= f_{t+1} - a_{t+1} X^{d_{t+1}} - \textstyle\sum_{i=1}^t c_i (f_i - a_i X^{d_i}) X^{d_{t+1} - d_i} \\ &= f_{t+1} - \textstyle\sum_{i=1}^t c_i f_i X^{d_{t+1} - d_i} - a_{t+1} X^{d_{t+1}} + \textstyle\sum_{i=1}^t c_i a_i X^{d_{t+1}} \\ &= f_{t+1} - \textstyle\sum_{i=1}^t c_i f_i X^{d_{t+1} - d_i}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $l \in \mathfrak{a} \smallsetminus (f_1, \dots, f_t)$. Zudem ist l vom Grad $< d_{t+1}$. Dies widerspricht der Wahl von f_{t+1}. ■

1.21 Korollar: Hilbertscher Basissatz. Sei R ein noetherscher Ring, und sei R' eine endlich erzeugte R-Algebra. Dann ist R' noethersch.

Beweis. Es besteht ein Homomorphismus $f : R \to R'$, und wir finden Elemente $a_1, \dots, a_r \in R'$ so, dass mit $\overline{R} := f(R)$ gilt $R' = \overline{R}[a_1, \dots, a_r]$. Trivialerweise ist $f : R \to \overline{R}$ surjektiv, also ist $\overline{R}$ nach (1.16) noethersch. Nach (1.20) ist auch $\overline{R}[X_1, \dots, X_r]$ noethersch. Der durch $X_i \mapsto a_i$ definierte Einsetzungshomomorphismus $\Phi : \overline{R}[X_1, \dots, X_r] \to R'$ ist nach (1.19)(C) surjektiv. Also können wir mit (1.16) schliessen. ■

1.22 Bemerkungen. (A) Jeder Körper K besitzt genau zwei Ideale, nämlich $(0) = 0$ und $(1) = K$. Deshalb sind Körper noethersche Ringe. In einem Hauptidealring ist jedes Ideal durch ein einziges Element erzeugt. Also sind Hauptidealringe noethersch.

(B) Der Hilbertsche Basissatz besagt also insbesondere, dass endlich erzeugte Algebren über Körpern oder über Hauptidealringen wieder noethersche Ringe sind.

1.23 Definition. Sei K ein Körper, und sei $r \in \mathbb{N}_0$. Sei $\mathcal{M}$ eine Teilmenge des Polynomrings $K[X_1, \dots, X_r]$. Das ***Nullstellengebilde*** $V_{K^r}(\mathcal{M})$ von $\mathcal{M}$ in K^r definieren wir durch

$$V(\mathcal{M}) := V_{K^r}(\mathcal{M}) := \Big\{(c_1, \dots, c_r) \in K^r \;\Big|\; \forall f \in \mathcal{M} : f(c_1, \dots, c_r) = 0\Big\}.$$

Eine Teilmenge $V \subseteq K^r$ heisst eine ***algebraische Menge***, wenn es eine Teilmenge $\mathcal{M}$ von $K[X_1, \dots, X_r]$ so gibt, dass $V = V_{K^r}(\mathcal{M})$. Der Kürze halber schreiben wir auch

$V_{K^r}(f_1, \ldots, f_n)$ für $V_{K^r}\big(\{f_1, \ldots, f_n\}\big)$, wo $f_1, \ldots, f_n \in K[X_1, \ldots, X_r]$ mit $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist dabei

(a) $$V_{K^r}(f_1, \ldots, f_n) = \bigcap_{i=1}^{n} V_{K^r}(f_i).$$

1.24 Bemerkungen. Es gelten die Bezeichnungen von (1.23).

(A) Es ist leicht zu sehen, dass das Nullstellengebilde $V_{K^r}(\mathcal{M})$ einer Teilmenge $\mathcal{M}$ von $K[X_1, \ldots, X_r]$ mit dem Nullstellengebilde $V_{K^r}\big((\mathcal{M})\big)$ des von $\mathcal{M}$ erzeugten Ideals übereinstimmt:

(a) $$V_{K^r}\big(\mathcal{M}\big) = V_{K^r}\big((\mathcal{M})\big).$$

Es folgt:

(b) Jede algebraische Menge in K^r ist das Nullstellengebilde eines Ideals $\mathfrak{a}$ von $K[X_1, \ldots, X_r]$.

(B) Eine ***Hyperfläche in*** K^r ist das Nullstellengebilde eines Polynoms in $K[X_1, \ldots, x_r]$ von positivem Grad. Ist $f \in K[X_1, \ldots, X_r]$ von positivem Grad, so heisst $V_{K^r}(f)$ die durch f definierte Hyperfläche in K^r. Wegen (1.22)(A) und (1.20) ist jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_r]$ endlich erzeugt. Mit (A)(a) und (1.23)(a) folgt:

(a) Jede algebraische Menge $V \subseteq K^r$ ist der Durchschnitt *endlich vieler* Hyperflächen in K^r.

§ Der Begriff der Länge eines Moduls

1.25 Festsetzungen. (A) Ist $\mathcal{M}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$, so verstehen wir unter dem ***Supremum*** $\sup \mathcal{M}$ von $\mathcal{M}$ das Supremum in $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ und unter dem ***Infimum*** $\inf \mathcal{M}$ von $\mathcal{M}$ das Infimum in $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$. Man beachte, dass somit

$$\sup \varnothing = -\infty \quad \text{und} \quad \inf \varnothing = \infty.$$

(B) Sei $l \in \mathbb{N}_0$, und sei M ein R-Modul. Unter einer ***Kette von Untermoduln*** von M verstehen wir eine endliche Folge $(N_i)_{i=0}^{l}$ von Untermoduln von M so, dass

$$N_i \subsetneq N_{i+1} \quad \text{für } i = 0, \ldots, l-1.$$

Die Zahl l, d.h. die Anzahl der in der Kette auftretenden echten Inklusionen, nennen wir die ***Länge*** der Kette $(N_i)_{i=0}^{l}$.

(C) Sei M ein R-Modul. Eine Kette $(N_i)_{i=0}^{l}$ von Untermoduln von M nennen wir ***maximal***, wenn $N_0 = 0$, wenn $N_l = M$ und wenn es keinen Index $i \in \{0, \ldots, l-1\}$ und keinen Untermodul N von M gibt mit $N_i \subsetneq N \subsetneq N_{i+1}$.

1.26 Definition. Die ***Länge*** $\mathfrak{l}_R(M) = \mathfrak{l}(M)$ eines R-Moduls definieren wir als das Supremum der Längen aller Ketten von Untermoduln in M, also

$$\mathfrak{l}(M) := \mathfrak{l}_R(M) := \sup\Big\{ l \in \mathbb{N}_0 \;\Big|\; (N_i)_{i=0}^{l} \text{ ist Kette von Untermoduln in } M \Big\}.$$

Ist $\mathfrak{l}_R(M) < \infty$, so sagen wir, der Modul M sei ***von endlicher Länge***. Ist weiter $\mathfrak{l}_R(M) = 1$, so nennen wir M einen ***einfachen*** Modul.

1.27 Bemerkungen. (A) Offenbar ist $\mathfrak{l}_R(M) = 0$ genau dann, wenn $M = 0$. Ein Modul von endlicher Länge ist immer noethersch. Umgekehrt müssen noethersche Moduln nicht von endlicher Länge sein. Man denke z.B. an den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}$ und an die Ketten $(2^{l-i}\mathbb{Z})_{i=0}^{l}$ für $l \in \mathbb{N}_0$.

(B) Ein Ring — aufgefasst als Modul über sich selbst — ist genau dann einfach, wenn er ein Körper ist.

(C) Ist $R = K$ ein Körper und $M = V$ ein K-Vektorraum, so ist $\mathfrak{l}_K(V)$ die bekannte K-Dimension $\dim_K V$ von V, wie wir in (1.33)(B) zeigen werden. Die Modul-Länge ist also eine Verallgemeinerung des Begriffs der Vektorraum-Dimension.

1.28 Lemma. Sei M ein R-Modul, und sei $l \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathfrak{l}_R(M) = l$.

(ii) Es gibt eine maximale Kette $(N_i)_{i=0}^{l}$ der Länge l von Untermoduln N_i von M.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Trivial.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" (Induktion nach l). Sei $l = 0$. Dann ist $0 = N_0 = M$, also $\mathfrak{l}(M) = 0 = l$. Sei also $l > 0$, und sei $(N'_j)_{j=0}^{l'}$ eine beliebige Kette von Untermoduln von M. Es genügt zu zeigen, dass $l' \leq l$. Für $l' = 0$ ist dies klar. Sei also $l' > 0$. Ohne weiteres können wir annehmen, es sei $N'_0 = 0$ — sonst nehmen wir den Nullmodul in diese Kette noch hinzu. Dann ist $N'_0 \subseteq N_{l-1}$, und es gibt also einen grössten Index $t \in \{0, \ldots, l'\}$ mit $N'_t \subseteq N_{l-1}$. Für alle $j > t$ gilt also $N'_j \nsubseteq N_{l-1}$, d.h. $N_{l-1} \subsetneq N_{l-1} + N'_j \subseteq N_l = M$. Wegen der Maximalität der Kette $(N_i)_{i=0}^{l}$ folgt, dass $N_{l-1} + N'_j = N_l = M$. Also $N'_{j+1} = N'_{j+1} \cap (N_{l-1} + N'_j) = N'_{j+1} \cap N_{l-1} + N'_j$ für alle $j > t$, wobei die zweite Gleichheit gilt, weil N'_j ein Untermodul von N'_{j+1} ist. Somit wird $N'_j \cap N_{l-1} \subsetneq N'_{j+1} \cap N_{l-1}$ für $t < j < l'$, denn sonst wäre $N'_{j+1} = N'_{j+1} \cap N_{l-1} + N'_j = N'_j \cap N_{l-1} + N'_j = N'_j$ für einen dieser Indizes j. Dadurch besteht aber in N_{l-1} die folgende Kette der Länge $l' - 1$ von Untermoduln:

$$0 = N'_0 \subsetneq N'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N'_t \subsetneq N'_{t+2} \cap N_{l-1} \subsetneq \cdots \subsetneq N'_{l'} \cap N_{l-1}.$$

Weiter ist $(N_i)_{i=0}^{l-1}$ eine maximale Kette von Untermoduln in N_{l-1}. Nach Induktionsvoraussetzung ist $l' - 1 \leq l - 1$. Es folgt $l' \leq l$. ∎

1.29 Satz. Ist M ein R-Modul endlicher Länge, so haben alle maximalen Ketten von Untermoduln in M dieselbe Länge $\mathfrak{l}_R(M)$.

Beweis. Klar aus (1.28). ∎

§ Die Additivität der Länge

Ergänzt man die Addition in $\mathbb{Z}$ um die üblichen Rechenregeln $\infty + \infty = u + \infty = \infty + u = \infty$ für das Symbol ∞ und für $u \in \mathbb{Z}$, so gilt:

1.30 Satz: Additivität der Länge. Sei R ein Ring. Für eine kurze exakte Sequenz $0 \to N \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} P \to 0$ von R-Moduln gilt:

$$\mathfrak{l}_R(M) = \mathfrak{l}_R(N) + \mathfrak{l}_R(P).$$

Insbesondere ist M genau dann von endlicher Länge, wenn N und P es sind.

Beweis. Sei $(N_i)_{i=0}^s$ eine Kette von Untermoduln in N, und sei $(P_j)_{j=0}^t$ eine Kette von Untermoduln in P. Weil h injektiv ist, gilt $h(N_i) \subsetneq h(N_{i+1})$ für $0 \leq i < s$, und, weil f surjektiv ist, gilt $f^{-1}(P_j) \subsetneq f^{-1}(P_{j+1})$ für $0 \leq j < t$. Weiter ist $h(N_s) \subseteq h(N) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \subseteq f^{-1}(P_0)$. So wird

$$h(N_0) \subsetneq \cdots \subsetneq h(N_{s-1}) \subsetneq f^{-1}(P_0) \subsetneq \cdots \subsetneq f^{-1}(P_t)$$

eine Kette der Länge $s + t$ von Untermoduln in M. Damit ist $\mathfrak{l}_R(M) \geq \mathfrak{l}_R(N) + \mathfrak{l}_R(P)$. Dies zeigt, dass $\mathfrak{l}_R(N) + \mathfrak{l}_R(P) < \infty$, falls $\mathfrak{l}_R(M) < \infty$. Insbesondere folgt $\mathfrak{l}_R(M) = \infty$, falls $\mathfrak{l}_R(N) = \infty$ oder $\mathfrak{l}_R(P) = \infty$.

Seien also $\mathfrak{l}_R(N) < \infty$ und $\mathfrak{l}_R(P) < \infty$. Wir wählen dann die obigen Ketten $(N_i)_{i=0}^s$ und $(P_j)_{j=0}^t$ maximal. Insbesondere wird dann

$$s = \mathfrak{l}_R(N),\ t = \mathfrak{l}_R(P) \quad \text{und} \quad N_0 = 0,\ N_s = N \quad \text{und} \quad P_0 = 0,\ P_t = P.$$

Wir sehen deshalb, dass

$$\begin{aligned} h(N_0) &= 0, \\ h(N_s) = \mathrm{Im}(h) = \mathrm{Ker}(f) &= f^{-1}(P_0), \\ f^{-1}(P_t) &= M. \end{aligned}$$

Wäre $h(N_i) \subsetneq N' \subsetneq h(N_{i+1})$ für einen Index $i \in \{0, \ldots, s-1\}$ und einen Untermodul N' von M, so ergäbe sich wegen der Injektivität von h der Widerspruch $N_i = h^{-1}\big(h(N_i)\big) \subsetneq h^{-1}(N') \subsetneq h^{-1}\big(h(N_{i+1})\big) = N_{i+1}$. Wäre $f^{-1}(P_j) \subsetneq N' \subsetneq f^{-1}(P_{j+1})$ für einen Index $j \in \{0, \ldots, t-1\}$ und einen Untermodul N' von M, so ergäbe sich wegen der Surjektivität von f und wegen $f^{-1}\big(f(N')\big) = N'$ (vgl. dazu (1.4)(B)) der Widerspruch $P_j = f\big(f^{-1}(P_j)\big) \subsetneq f(N') \subsetneq f\big(f^{-1}(P_{j+1})\big) = P_{j+1}$. Somit wird die schon oben betrachtete Kette

$$h(N_0) \subsetneq \cdots \subsetneq h(N_{s-1}) \subsetneq f^{-1}(P_0) \subsetneq \cdots \subsetneq f^{-1}(P_t)$$

maximal. Da ihre Länge $s + t$ beträgt, schliessen wir mit (1.29), dass $\mathfrak{l}_R(M) = s + t = \mathfrak{l}_R(N) + \mathfrak{l}_R(P)$.

Mithin ist unsere Behauptung auch für den Fall gezeigt, wo $\mathfrak{l}_R(M) = \infty$. ∎

1.31 Korollar. Ist R ein Ring und M ein R-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul, so gilt:

$$\mathfrak{l}_R(M) = \mathfrak{l}_R(N) + \mathfrak{l}_R(M/N).$$

Beweis. Man wende (1.30) auf die kurze exakte Sequenz $0 \to N \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} M/N \to 0$ an. ∎

§ Einige Schlussfolgerungen

1.32 Korollar. Es gilt:

(a) Beim Übergang zu Untermoduln und Restklassenmoduln kann die Länge höchstens abnehmen.

(b) Isomorphe Moduln haben die gleiche Länge. ■

1.33 Bemerkungen. (A) Sind $M_1, \ldots, M_r$ Moduln über einem Ring R, so beweist man mit Hilfe der Additivität der Länge durch Induktion über r leicht:

$$\mathfrak{l}_R\left(\bigoplus_{i=1}^{r} M_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{l}_R(M_i).$$

(B) Als Spezialfall dieser Formel erhält man etwa, dass

$$\mathfrak{l}_R\big(R^{\oplus r}\big) = r \cdot \mathfrak{l}_R(R)$$

für $r \in \mathbb{N}_0$. Ist K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension $r \in \mathbb{N}_0$, so besteht ein Isomorphismus $V \cong K^{\oplus r}$. Nach (1.27)(B) ist $\mathfrak{l}_K(K) = 1$. Nach (1.32)(b) folgt aus dem soeben Gesagten, dass

$$\mathfrak{l}_K(V) = r \cdot \mathfrak{l}_K(K) = r = \dim_K(V).$$

Über Körpern ist die Länge von Moduln (d.h. K-Vektorräumen) also nichts anderes als die Vektorraum-Dimension. Wir haben das schon in (1.27)(C) Erwähnte nun bewiesen.

(C) Ist $h : V \to V'$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen, so erhalten wir aus dem Homomorphiesatz für Moduln und aus den Korollaren (1.31) und (1.32)(b), dass

$$\mathfrak{l}(V) = \mathfrak{l}(\mathrm{Ker}(h)) + \mathfrak{l}(\mathrm{Im}(h)).$$

Dies ist die bekannte Formel aus der Linearen Algebra:

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(h) + \dim \mathrm{Im}(h).$$

1.34 Satz. Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul der Länge $l \in \mathbb{N}_0$, und sei $l' \in \{0, \ldots, l\}$. Dann besitzt M Untermoduln N und P so, dass $\mathfrak{l}_R(N) = l'$ und $\mathfrak{l}_R(M/P) = l'$. Ist dabei $l > 0$, so besitzt M insbesondere einfache Untermoduln.

Beweis. Die Behauptung folgt leicht aus (1.28) und (1.31). ■

1.35 Bemerkungen. (A) Der Modul $\mathbb{Z}$ über dem Ring $R = \mathbb{Z}$ besitzt keinen einfachen Untermodul und damit auch keinen Untermodul endlicher positiver Länge. Dies ist ein Unterschied zur Situation, wo $R = K$ ein Körper ist: Ein K-Vektorraum $V \neq 0$ besitzt immer Unterräume endlicher positiver Dimension — wegen (1.27)(B) und (1.32)(b) ist z.B. die Einbettung von K in V ein Unterraum von V der Dimension 1.

(B) Zwei Vektorräume der gleichen endlichen Dimension über einem gemeinsamen Körper K sind bekanntlich isomorph. Man könnte deshalb denken, zwei R-Moduln M, N mit $\mathfrak{l}_R(M) = \mathfrak{l}_R(N) < \infty$ seien isomorph. Wählt man aber $R = \mathbb{Z}$ und betrachtet die beiden einfachen R-Moduln $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $N = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, so sieht man, dass dies nicht der Fall ist.

(C) Ist K ein Körper und $V \neq 0$ ein K-Vektorraum endlicher Dimension r, so gilt bekanntlich $V \cong K^{\oplus r}$. Also ist jeder K-Vektorraum endlicher positiver Dimension die direkte Summe einfacher K-Moduln. Über Ringen braucht dies nicht zu gelten: Ein R-Modul endlicher positiver Länge muss nicht eine direkte Summe einfacher R-Moduln sein. So ist etwa der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nicht isomorph zu einer direkten Summe von einfachen $\mathbb{Z}$-Moduln. (Zum Nachweis dieser Behauptung beachte man, dass $\mathbb{Z}$-Moduln nichts anderes als abelsche Gruppen sind).

Kapitel 2

Primideale

§ Der Begriff des Primideals und des Spektrums

2.1 Festsetzungen. (A) Sei R ein Ring. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ von R nennen wir ein ***echtes Ideal***, wenn es eine echte Teilmenge ist, d.h., wenn $\mathfrak{a} \subsetneq R$. Gleichbedeutend ist offenbar, dass $1 \notin \mathfrak{a}$.

(B) Ein Ideal $\mathfrak{p}$ von R nennen wir ein ***Primideal***, wenn es ein echtes Ideal ist und wenn seine Komplementärmenge $R \setminus \mathfrak{p}$ bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist. Es muss also gelten $\mathfrak{p} \subsetneq R$ und aus $x, y \in R \setminus \mathfrak{p}$ muss folgen $xy \in R \setminus \mathfrak{p}$.

(C) Die Menge der Primideale von R nennen wir das ***Spektrum*** von R und bezeichnen dieses mit $\operatorname{Spec}(R)$.

2.2 Bemerkungen. (A) Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Durch Induktion über r zeigt man dann sofort, dass aus $x_1, \ldots, x_r \in R \setminus \mathfrak{p}$ immer folgt $x_1 \cdots x_r \in R \setminus \mathfrak{p}$.

(B) Einen Ring R nennt man bekanntlich einen ***Integritätsbereich***, wenn $R \neq 0$ und wenn aus $x, y \in R \setminus \{0\}$ immer folgt $xy \in R \setminus \{0\}$. Gleichbedeutend ist offenbar, dass das Nullideal 0 von R ein Primideal ist.

(C) Sofort sieht man auch, dass ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ eines Rings R genau dann ein Primideal ist, wenn der Restklassenring $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.

§ Erste Eigenschaften von Primidealen

2.3 Satz. Sei R ein Ring, seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r \subseteq R$ Ideale von R, und sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ so, dass $\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r \subseteq \mathfrak{p}$. Dann gibt es einen Index $i \in \{1, \ldots, r\}$ mit $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$.

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an! Zu jedem Index $i \in \{1, \ldots, r\}$ gibt es dann ein Element $x_i \in \mathfrak{a}_i \setminus \mathfrak{p}$. Nach (2.2)(A) ist dann $x := x_1 \cdots x_r \notin \mathfrak{p}$. Andrerseits ist $x \in \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r$. Dies widerspricht unserer Voraussetzung. ■

§ Das Vermeidungslemma

2.4 Lemma. Sei R ein Ring, und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ Ideale von R so, dass $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{c}$. Dann ist $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}$.

Beweis. Nehmen wir an, es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}$. Wegen $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{b}$ gibt es ein Element $x \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}$. Wegen unserer Annahme ist dann $x \in \mathfrak{c}$. Wegen $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{c}$ gibt es ein Element $y \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{c}$. Wegen unserer Annahme ist dann $y \in \mathfrak{b}$. Weil $\mathfrak{a}$ ein Ideal ist, ist $x+y \in \mathfrak{a}$, d.h. $x+y \in \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}$. Wäre $x+y \in \mathfrak{b}$, so wäre auch $x \in \mathfrak{b}$, im Widerspruch zur Wahl von x. Also ist $x+y \in \mathfrak{c}$, somit $y \in \mathfrak{c}$, im Widerspruch zur Wahl von y. ■

2.5 Satz: Vermeidungslemma. Sei R ein Ring und $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r \in \operatorname{Spec}(R)$. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ drei Ideale von R so, dass $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, r$. Dann ist $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} \cup \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r$.

Beweis. Wir machen Induktion nach r, beginnend mit $r = 0$. Der Fall mit $r = 0$ ist klar nach (2.4). Sei also $r > 0$. Ist $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}_r$, so ist

$$\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} \cup \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r = \mathfrak{c} \cup \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r.$$

Die Induktionsvoraussetzung, angewandt mit den Primidealen $\mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_r$ und mit $\mathfrak{p}_1$ statt $\mathfrak{b}$, liefert dann die Behauptung. Wir können also annehmen, es sei $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}_r$. Genauso können wir annehmen, es sei auch $\mathfrak{c} \not\subseteq \mathfrak{p}_r$.

Sei nun $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_r$ für ein $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Dann ist

$$\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} \cup \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r = \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} \cup \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_{i-1} \cup \mathfrak{p}_{i+1} \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r.$$

Die Induktionsvoraussetzung, angewandt mit den Primidealen $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \dots, \mathfrak{p}_r$, liefert dann die Behauptung. Wir können also zusätzlich annehmen, es sei $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}_r$ für $i = 1, \dots, r-1$.

Nach (2.3) folgt dann, dass $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_{r-1} \not\subseteq \mathfrak{p}_r$. Wir finden also ein Element $y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_{r-1} \setminus \mathfrak{p}_r$.

Nehmen wir an, es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} \cup \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r$. Nach Induktion ist $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} \cup \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_{r-1}$. Wir finden also ein $x \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} \cup \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_{r-1}$. Gemäss unserer Annahme wäre dann $x \in \mathfrak{p}_r$. Weiter ist $x + y \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} \cup \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_{r-1}$. Gemäss unserer Annahme wäre also $x + y \in \mathfrak{p}_r$. Damit wäre aber $y \in \mathfrak{p}_r$, was unserer Wahl widerspricht. ■

§ Die Varietät eines Ideals

2.6 Definition. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Wir definieren die durch das Ideal $\mathfrak{a}$ in $\operatorname{Spec}(R)$ definierte ***Varietät*** $\operatorname{Var}(\mathfrak{a})$ als die Menge

$$\operatorname{Var}(\mathfrak{a}) := \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \;\middle|\; \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \right\}$$

der $\mathfrak{a}$ umfassenden Primideale von R.

2.7 Beispiel. Weil die Primideale von $\mathbb{Z}$ gerade die von einer Primzahl erzeugten Ideale sind, gilt dann für jedes $a \in \mathbb{Z}$, dass $\operatorname{Var}(a\mathbb{Z}) = \{\, p\mathbb{Z} \mid p \text{ ist eine Primzahl und teilt } a \,\}$.

§ Die Zariski-Topologie auf dem Spektrum

2.8 Festsetzungen. (A) Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $(N_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Wir definieren die ***Summe*** der Moduln N_i als die Menge

$$\sum_{i\in I} N_i := \left\{ \sum_{j\in J} m_j \;\middle|\; J \subseteq I;\ J \text{ endlich};\ m_j \in \bigcup_{i\in I} N_i \text{ für alle } j \in J \right\}$$

aller endlichen Summen mit Summanden aus $\bigcup_{i\in I} N_i$. Offenbar ist

$$\sum_{i\in I} N_i = \left(\bigcup_{i\in I} N_i \right),$$

d.h. die Summe der Untermoduln N_i ist gerade der von der Vereinigung dieser Moduln erzeugte Untermodul von M. Insbesondere ist diese Summe ein Untermodul. Ist $r \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $\sum_{i\in\{1,\ldots,r\}} N_i = \sum_{i=1}^{r} N_i = N_1 + \cdots + N_r$. Weiter setzen wir fest, dass $\sum_{i\in\varnothing} N_i = 0$.

(B) Ist $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Idealen von R, so ist insbesondere $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ wieder ein Ideal von R. Wir nennen dieses Ideal deshalb das ***Summenideal*** der Ideale $\mathfrak{a}_i$. Im übrigen verwenden wir auch hier die Bezeichnungen von (A).

2.9 Satz. Sei R ein Ring. Dann gilt:

(a) $\operatorname{Var}(0) = \operatorname{Spec}(R)$.

(b) $\operatorname{Var}(R) = \varnothing$.

(c) Für jede Familie $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ von Idealen ist

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i \right) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{Var}(\mathfrak{a}_i).$$

(d) Für je endlich viele Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ gilt

$$\operatorname{Var}\left(\bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i \right) = \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Var}(\mathfrak{a}_i).$$

Beweis. Aussagen “(a)” und “(b)” sind trivial.

“(c)” Dies folgt aus der Tatsache, dass $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ das kleinste Ideal ist, das alle Ideale $\mathfrak{a}_i$ umfasst: s. (2.8).

“(d)” Die eine Inklusion folgt sofort aus (2.3), die andere ist leicht zu prüfen. ∎

2.10 Definition. Satz (2.9) besagt, dass wir auf $\operatorname{Spec}(R)$ eine Topologie definieren können, deren abgeschlossene Mengen gerade die Varietäten sind. Diese Topologie nennen wir die ***Zariski-Topologie***. Wir beziehen alle topologischen Begriffe, die wir im Zusammenhang mit $\operatorname{Spec}(R)$ nennen, auf diese Topologie.

§ Die Zariski-Topologie im noetherschen Fall

2.11 Satz. Sei R ein noetherscher Ring. Jede offene Menge $U \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ ist dann quasikompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von offenen Mengen in $\operatorname{Spec}(R)$ so, dass $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Wir müssen eine endliche Menge $I_0 \subseteq I$ so finden, dass bereits gilt $U = \bigcup_{i\in I_0} U_i$.

Für jeden Index $i \in I$ finden wir ein Ideal $\mathfrak{a}_i$ von R so, dass $U_i = \operatorname{Spec}(R) \smallsetminus \operatorname{Var}(\mathfrak{a}_i)$. Wir betrachten nun die Menge $\mathbb{I} := \left\{\sum_{i\in J} \mathfrak{a}_i \;\middle|\; J \subseteq I; J \text{ endlich}\right\}$. Es handelt sich um eine nicht-leere Menge von Idealen in R. Weil R noethersch ist, hat $\mathbb{I}$ ein bezüglich der Inklusion maximales Mitglied $\mathfrak{a}$.

Wir können schreiben $\mathfrak{a} = \sum_{i\in I_0} \mathfrak{a}_i$, wo I_0 eine endliche Teilmenge von I ist. Es genügt zu zeigen, dass $U \subseteq \bigcup_{i\in I_0} U_i$. Sei also $\mathfrak{p} \in U$. Dann finden wir einen Index $j \in I$ derart, dass $\mathfrak{p} \in U_j = \operatorname{Spec}(R) \smallsetminus \operatorname{Var}(\mathfrak{a}_j)$. Es ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_j = \sum_{i\in I_0\cup\{j\}} \mathfrak{a}_i \in \mathbb{I}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{a}_j$. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{a}$ in $\mathbb{I}$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}+\mathfrak{a}_j$, also $\mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{a}$. Wegen $\mathfrak{a}_j \nsubseteq \mathfrak{p}$ gilt also $\sum_{i\in I_0} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$. Deshalb gibt es einen Index $i_0 \in I_0$ mit $\mathfrak{a}_{i_0} \nsubseteq \mathfrak{p}$. Es folgt, dass $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \smallsetminus \operatorname{Var}(\mathfrak{a}_{i_0}) = U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I_0} U_i$. ∎

§ Erweiterungs- und Kontraktionsideale

2.12 Definition. Ist $f : R \to R'$ ein Homomorphismus von Ringen und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so schreiben wir $\mathfrak{a}R'$ für das in R' durch $\mathfrak{a}$ erzeugte Ideal $\big(f(\mathfrak{a})\big)$. Wir nennen $\mathfrak{a}R'$ das ***Erweiterungsideal*** von $\mathfrak{a}$ nach R', oder kurz ***Erweiterung*** von $\mathfrak{a}$ nach R'.

Ist $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ ein Ideal, so schreiben wir — zumindest dort, wo kein Anlass zu Missverständnissen besteht — $\mathfrak{a}' \cap R$ für das Ideal $f^{-1}(\mathfrak{a}')$ von R. Wir nennen dieses Ideal das ***Kontraktionsideal*** von $\mathfrak{a}'$ auf R, oder kurz die ***Kontraktion*** von $\mathfrak{a}'$ auf R.

2.13 Beispiele. (A) Sei $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ die Inklusionsabbildung von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$. Sei $a \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$. Dann ist $(a\mathbb{Z})\mathbb{Q} = a\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

(B) Sei $f : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ x + 6\mathbb{Z} \mapsto x + 2\mathbb{Z}$. Dann ist $f^{-1}(0) = 0 \cap \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \neq 0$.

(C) Sei $R' = R[X_1, \ldots , X_r]$ ein Polynomring und sei $f : R \to R'$ die Inklusionsabbildung. Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt

$$\mathfrak{a}R' = \left\{ \sum_{0\leq\nu_1,\ldots,\nu_r\leq N} a_{\nu_1\ldots\nu_r} X_1^{\nu_1} \cdots X_r^{\nu_r} \;\middle|\; N \in \mathbb{N}_0,\ a_{\nu_1\ldots\nu_r} \in \mathfrak{a} \right\}.$$

2.14 Satz. Sei R ein Ring, sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ und seien $X_1, \ldots, X_r$ Unbestimmte. Dann gilt $\mathfrak{p}R[X_1, \ldots, X_r] \in \operatorname{Spec}(R[X_1, \ldots, X_r])$.

Beweis. Durch Induktion können wir o.B.d.A. annehmen, es sei $r = 1$. Seien $X := X_1$ und $\overline{\cdot} : R \to R/\mathfrak{p}$ die Restklassenabbildung. Die Zuordnung $\sum_{k=0}^{t} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{t} \overline{a}_k X^k$ mit $t \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_t \in R$ definiert einen sujektiven Homomorphismus von Ringen $R[X] \to (R/\mathfrak{p})[X]$, dessen Kern gerade das Erweiterungsideal $\mathfrak{p}R[X]$ ist. Deshalb besteht ein Isomorphismus von Ringen $R[X]/\mathfrak{p}[X] \cong (R/\mathfrak{p})[X]$. Weil $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, ist $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich. Dasselbe gilt dann auch für $(R/\mathfrak{p})[X]$, also ist auch $R[X]/\mathfrak{p}[X]$ ein Integritätsbereich, und mithin ist $\mathfrak{p}[X]$ ein Primideal. ■

2.15 Festsetzung. Sei R ein Ring, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und sei $S \subseteq R$ eine Teilmenge. Wir schreiben dann $\mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$ für die Menge aller $\mathfrak{a}$ umfassenden Ideale von R, welche S nicht treffen:

$$\mathbb{I}_S(\mathfrak{a}) := \Big\{ \mathfrak{b} \subseteq R \;\Big|\; \mathfrak{b} \text{ ist ein Ideal mit } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq R \setminus S \Big\}.$$

Weiter kürzen wir ab $\mathbb{I}(\mathfrak{a}) := \mathbb{I}_\varnothing(\mathfrak{a})$. Wollen wir betonen, dass die Ideale aus $\mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$ im Ring R liegen, so schreiben wir $\mathbb{I}_S(\mathfrak{a})_R$, und entsprechend steht $\mathbb{I}(\mathfrak{a})_R$ für $\mathbb{I}_\varnothing(\mathfrak{a})_R$.

2.16 Bemerkung. Sei R ein Ring.

(A) Sei R' ein Ring und $f : R \twoheadrightarrow R'$ ein surjektiver Homomorphismus von Ringen. Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R gilt dann offenbar $f(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}R'$. Ist $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \mathfrak{a}$, so gilt $f^{-1}\big(f(\mathfrak{a})\big) = \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ ein Ideal von R', so gilt $f^{-1}(\mathfrak{a}') \supseteq \operatorname{Ker}(f)$ und auch $f\big(f^{-1}(\mathfrak{a}')\big) = \mathfrak{a}'$. Durch die Zuordnungen

$$\mathfrak{a} \mapsto f(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}R' \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}' \mapsto f^{-1}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}' \cap R$$

werden so zwei zueinander inverse Bijektionen

$$\mathbb{I}\big(\operatorname{Ker}(f)\big)_R \xrightarrow{f(\bullet) = \bullet R'} \mathbb{I}(0)_{R'} \quad \text{und} \quad \mathbb{I}\big(\operatorname{Ker}(f)\big)_R \xleftarrow{f^{-1}(\bullet) = \bullet \cap R} \mathbb{I}(0)_{R'}$$

zwischen der Menge $\mathbb{I}\big(\operatorname{Ker}(f)\big)_R$ der $\operatorname{Ker}(f)$ umfassenden Ideale von R und der Menge $\mathbb{I}(0)_{R'}$ aller Ideale von R' definiert. Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{I}\big(\operatorname{Ker}(f)\big)_R$ gilt insbesondere:

$$\mathfrak{a} \subsetneqq \mathfrak{b} \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{a}R' \subsetneqq \mathfrak{b}R'.$$

(B) Wegen der Surjektivität des Restklassenhomomorphismus $\overline{\cdot} : R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{a}$ besteht also für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R eine Bijektion

$$\mathbb{I}(\mathfrak{a})_R \xrightarrow{\overline{\cdot}(\bullet)} \mathbb{I}(0)_{R/\mathfrak{a}}$$

zwischen den $\mathfrak{a}$ umfassenden Idealen von R und den Idealen von $R/\mathfrak{a}$. Damit existiert auch eine Bijektion

$$\operatorname{Var}(\mathfrak{a}) \xrightarrow{\overline{\cdot}(\bullet)} \operatorname{Spec}(R/\mathfrak{a})$$

zwischen den $\mathfrak{a}$ umfassenden Primidealen von R und den Primidealen von $R/\mathfrak{a}$.

§ Die durch einen Homomorphismus induzierte Abbildung zwischen den Spektren

2.17 Definition. Sei $f : R \to R'$ ein Homomorphismus von Ringen. Ist $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R')$, so ist die Kontraktion $\mathfrak{p}' \cap R = f^{-1}(\mathfrak{p}')$ von $\mathfrak{p}'$ auf R offenbar ein Primideal von R. Durch

$$\mathfrak{p}' \mapsto \mathfrak{p}' \cap R = f^{-1}(\mathfrak{p}')$$

wird so eine Abbildung

$$\operatorname{Spec}(f) : \operatorname{Spec}(R') \to \operatorname{Spec}(R)$$

definiert, die wir die durch den Homomorphismus $f : R \to R'$ ***induzierte Abbildung zwischen den Spektren*** nennen.

2.18 Bemerkung. Sei $f : R \to R'$ ein Homomorphismus von Ringen. Sind $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}' \subseteq R'$ zwei Ideale mit $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}'$, so besteht zwischen deren Kontraktionen offenbar die Beziehung $\mathfrak{a}' \cap R \subseteq \mathfrak{b}' \cap R$. Dies gilt insbesondere, wenn $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ prim sind. Deshalb ist die Abbildung $\operatorname{Spec}(f)$ ein Homomorphismus bezüglich der auf $\operatorname{Spec}(R')$ und $\operatorname{Spec}(R)$ durch die Inklusion definierten Halbordungen.

2.19 Satz. Sei $f : R \to R'$ ein Homomorphismus von Ringen. Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt:

$$\operatorname{Spec}(f)^{-1}\big(\operatorname{Var}(\mathfrak{a})\big) = \operatorname{Var}(\mathfrak{a}R').$$

Insbesondere ist die Abbildung $\operatorname{Spec}(f) : \operatorname{Spec}(R') \to \operatorname{Spec}(R)$ stetig.

Beweis. Sei $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(f)^{-1}\big(\operatorname{Var}(\mathfrak{a})\big)$. Dann ist $f^{-1}(\mathfrak{p}') = \operatorname{Spec}(f)(\mathfrak{p}') \in \operatorname{Var}(\mathfrak{a})$, das heisst $f^{-1}(\mathfrak{p}') \supseteq \mathfrak{a}$. Es folgt $\mathfrak{p}' \supseteq f\big(f^{-1}(\mathfrak{p}')\big) \supseteq f(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{p}' \supseteq \big(f(\mathfrak{a})\big) = \mathfrak{a}R'$, das heisst $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Var}(\mathfrak{a}R')$.

Sei umgekehrt $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Var}(\mathfrak{a}R')$. Dann ist $\mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{a}R'$, also $f^{-1}(\mathfrak{p}') \supseteq f^{-1}(\mathfrak{a}R') \supseteq f^{-1}\big(f(\mathfrak{a})\big) \supseteq \mathfrak{a}$, das heisst $\operatorname{Spec}(f)(\mathfrak{p}') = f^{-1}(\mathfrak{p}') \in \operatorname{Var}(\mathfrak{a})$. Somit folgt, dass $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(f)^{-1}\big(\operatorname{Var}(\mathfrak{a})\big)$.

Jetzt folgt die Stetigkeit sofort, weil nach dem eben Gesagten die Urbilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind. ∎

2.20 Bemerkungen. (A) Seien $f : R \to R'$ und $g : R' \to R''$ zwei Homomorphismen von Ringen. Sofort sieht man dann, dass

$$\operatorname{Spec}(g \circ f) = \operatorname{Spec}(f) \circ \operatorname{Spec}(g).$$

Schreiben wir $\mathrm{id}_{\mathbb{M}}$ für die durch $m \mapsto m$ definierte Identitätsabbildung einer Menge $\mathbb{M}$, so gilt natürlich $\operatorname{Spec}(\mathrm{id}_R) = \mathrm{id}_{\operatorname{Spec}(R)}$.

(B) Was wir in (2.19) und Teil (A) gezeigt haben, können wir auch aussprechen in der Form: Die Zuordnung

$$\big(R \xrightarrow{f} R'\big) \rightsquigarrow \big(\operatorname{Spec}(R') \xrightarrow{\operatorname{Spec}(f)} \operatorname{Spec}(R)\big)$$

definiert einen ***kontravarianten Funktor*** von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der topologischen Räume.

2.21 Korollar. Ist f ein Isomorphismus von Ringen, so ist $\mathrm{Spec}(f)$ ein Homöomorphismus. ■

2.22 Beispiele. Sei R ein Ring und sei $R' := R[X_1, \ldots, X_r]$ ein Polynomring über R.

(A) Ist $f = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_r \in \mathbb{N}_0} c_{\nu_1\ldots\nu_r} X_1^{\nu_1} \cdots X_r^{\nu_r} \in R'$, so stehe $\mathrm{Koef}(f)$ für die ***Koeffizientenmenge*** von f, also

$$\mathrm{Koef}(f) := \left\{ c_{\nu_1\ldots\nu_r} \;\middle|\; \nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{N}_0 \right\} \subseteq R.$$

Diese Menge ist immer endlich und enthält immer das Element 0.

(B) Sei $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ ein Ideal. Man prüft leicht nach, dass

$$\mathrm{Inh}(\mathfrak{a}') := \bigcup_{f \in \mathfrak{a}'} \mathrm{Koef}(f)$$

ein Ideal von R ist. Dieses Ideal heisst der ***Inhalt*** von $\mathfrak{a}'$.

(C) Seien $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ und $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R')$. Leicht prüft man nach:

(a) $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathrm{Inh}(\mathfrak{a}') \Longrightarrow \mathfrak{p}R' \not\supseteq \mathfrak{a}'$;

(b) $\mathfrak{p}' \not\supseteq \mathfrak{a}' \Longrightarrow \mathfrak{p}' \cap R \not\supseteq \mathrm{Inh}(\mathfrak{a}')$.

(D) Sei $\iota : R \hookrightarrow R'$ die Inklusionsabbildung. Aus den in (C) festgestellten Implikationen folgt nun leicht:

$$\mathrm{Spec}(\iota)(\mathrm{Spec}(R') \setminus \mathrm{Var}(\mathfrak{a})) = \mathrm{Spec}(R) \setminus \mathrm{Var}(\mathrm{Inh}(\mathfrak{a})).$$

Somit erhält man:

(a) Die Abbildung $\mathrm{Spec}(\iota) : \mathrm{Spec}(R)' \to \mathrm{Spec}(R)$ ist surjektiv und offen.

2.23 Beispiele. Sei $f : R \to R'$ ein surjektiver Homomorphismus von Ringen.

(A) Sofort prüft man nach:

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathrm{Ker}(f)) \Longrightarrow \mathfrak{p}R' = f(\mathfrak{p}) \in \mathrm{Spec}(R').$$

Die Bijektion $\mathbb{I}(0)_{R'} \xrightarrow{f^{-1}(\bullet)} \mathbb{I}(\mathrm{Ker}(f))_R$ aus (2.16)(A) liefert so eine Bijektion

$$\mathrm{Spec}(R') \xrightarrow{f^{-1}(\bullet)} \mathrm{Var}(\mathrm{Ker}(f)).$$

Dies heisst insbesondere, dass die Abbildung $\mathrm{Spec}(f) : \mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(R)$ injektiv ist und dass $\mathrm{Im}(\mathrm{Spec}(f)) = \mathrm{Var}(\mathrm{Ker}(f))$.

(B) Sei $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ ein Ideal. Ist $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a}')$, so gilt $\mathrm{Spec}(f)(\mathfrak{q}') = f^{-1}(\mathfrak{q}') \supseteq f^{-1}(\mathfrak{a}')$, also $\mathrm{Spec}(f)(\mathfrak{q}') \in \mathrm{Var}(f^{-1}(\mathfrak{a}'))$. Ist umgekehrt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(f^{-1}(\mathfrak{a}'))$, so folgt $\mathfrak{p}' := \mathfrak{p}R' = f(\mathfrak{p}) \supseteq f(f^{-1}(\mathfrak{a}')) = \mathfrak{a}'$, und somit $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a}')$; weiter gilt $\mathrm{Spec}(f)(\mathfrak{p}') = f^{-1}(\mathfrak{p}') = f^{-1}(f(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$, und so folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(f)(\mathrm{Var}(\mathfrak{a}'))$. Insgesamt ist damit gezeigt:

$$\mathrm{Spec}(f)(\mathrm{Var}(\mathfrak{a}')) = \mathrm{Var}(f^{-1}(\mathfrak{a}')).$$

Beachten wir das in (A) Gesagte, so folgt:

(a) Die Abbildung $\mathrm{Spec}(f) : \mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(R)$ ist injektiv und abgeschlossen.

§ Primoberideale und minimale Primoberideale

2.24 Bemerkungen. (A) Sei $\mathbb{M}$ eine Menge mit einer Halbordnung $\preceq$. Eine ***vollständig geordnete Teilmenge*** C von $\mathbb{M}$ ist eine Menge $C \subseteq \mathbb{M}$ derart, dass je zwei Mitglieder von C vergleichbar sind, d.h. so, dass aus $x, y \in C$ immer folgt $x \preceq y$ oder $y \preceq x$.

(B) Eine ***obere Schranke*** s einer Menge $C \subseteq \mathbb{M}$ ist ein Element $s \in \mathbb{M}$ mit $x \preceq s$ für alle $x \in C$. Eine ***untere Schranke*** t einer Menge $C \subseteq \mathbb{M}$ ist ein Element $t \in \mathbb{M}$ mit $t \preceq y$ für alle $y \in C$. Besitzt jede vollständig geordnete Teilmenge C von $\mathbb{M}$ eine obere Schranke (resp. untere Schranke) in $\mathbb{M}$, so sagen wir, $\mathbb{M}$ sei ***induktiv nach oben*** (resp. ***induktiv nach unten***). Gleichbedeutend dazu ist, dass $\mathbb{M}$ nicht-leer ist und dass jede nicht-leere, vollständig geordnete Teilmenge von $\mathbb{M}$ eine obere Schranke (resp. untere Schranke) besitzt.

(C) Das ***Lemma von Zorn*** besagt bekanntlich, dass $\mathbb{M}$ bezüglich $\preceq$ maximale (resp. minimale) Mitglieder besitzt, wenn $\mathbb{M}$ induktiv nach oben (resp. nach unten) ist.

2.25 Lemma. Sei R ein Ring, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei $S \subseteq R$ so, dass $S \cap \mathfrak{a} = \varnothing$. Dann gilt:

(a) Die Menge $\mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$ besitzt bezüglich der Inklusion $\subseteq$ in R maximale Mitglieder.

(b) Ist $S \neq \varnothing$ und bezüglich der Multiplikation abgeschlossen, so sind die maximalen Mitglieder von $\mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$ Primideale.

Beweis. "(a)" Nach (2.24)(C) genügt es zu zeigen, dass $\mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$ bezüglich der Inklusion induktiv nach oben ist. Wegen $S \cap \mathfrak{a} = \varnothing$ ist $\mathfrak{a} \in \mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$, also ist $\mathbb{I}_S(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$. Sei also $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$ eine nicht-leere bezüglich der Inklusion vollständig geordnete Teilmenge von $\mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$. Sind $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathbb{I}$, so gilt also immer $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}$. Deshalb ist $\mathfrak{d} := \bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathbb{I}} \mathfrak{b}$ ein Ideal von R. Offenbar ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{d}$. Weil $\mathfrak{b} \cap S = \varnothing$ für alle $\mathfrak{b} \in \mathbb{I}$, ist $\mathfrak{d} \cap S = \varnothing$. Deshalb ist $\mathfrak{d} \in \mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$. Offenbar ist $\mathfrak{d}$ eine obere Schranke für $\mathbb{I}$.

"(b)" Sei S abgeschlossen bezüglich der Multiplikation und sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Mitglied von $\mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$. Wegen $S \neq \varnothing$ ist dann $\mathfrak{p} \neq R$. Seien $x, y \in R \setminus \mathfrak{p}$. Dann gilt $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p} + (x)$ und $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p} + (y)$. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$ folgt so $\mathfrak{p} + (x) \notin \mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{p} + (y) \notin \mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$. Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} + (x)$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} + (y)$ ergibt sich, dass $\big(\mathfrak{p} + (x)\big) \cap S \neq \varnothing$ und $\big(\mathfrak{p} + (y)\big) \cap S \neq \varnothing$. Mit geeigneten Elementen $u, v \in \mathfrak{p}$ und $a, b \in R$ gilt also $u + xa \in S$ und $v + yb \in S$. Weil S bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist, folgt $uv + uyb + vxa + xyab = (u + xa)(v + yb) \in S \subseteq R \setminus \mathfrak{p}$. Weil $uv + uyb + vxa \in \mathfrak{p}$, folgt $xyab \notin \mathfrak{p}$, also auch $xy \notin \mathfrak{p}$. ■

2.26 Festsetzung. Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Die Mitglieder von $\mathrm{Var}(\mathfrak{a})$ nennt man oft ***Primoberideale*** von $\mathfrak{a}$. Die bezüglich der Inklusion minimalen Mitglieder von $\mathrm{Var}(\mathfrak{a})$ nennt man entsprechend ***minimale Primoberideale*** von $\mathfrak{a}$. Deren Menge bezeichnen wir mit $\min(\mathfrak{a})$. Die Menge $\min(0)$ aller minimalen Primidealen von R bezeichnen wir mit $\mathrm{Min}(R)$. Für $x_1, \ldots, x_r \in R$ setzen wir $\min(x_1, \ldots, x_r) := \min((x_1, \ldots, x_r))$.

2.27 Satz. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt:

(a) Jedes Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ enthält ein minimales Primoberideal $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$.

(b) Genau dann $\mathrm{Var}(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$, wenn $\mathfrak{a} \neq R$.

(c) Genau dann $\min(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$, wenn $\mathfrak{a} \neq R$.

Beweis. "(a)" Sei $\mathbb{M} := \{\mathfrak{s} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{p}\}$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathbb{M}$ bezüglich der Inklusion induktiv nach unten ist, vgl. (2.24). Sei $\mathfrak{p}$ ein Primoberideal von $\mathfrak{a}$. Wegen $\mathfrak{p} \in \mathbb{M}$ ist $\mathbb{M} \neq \varnothing$. Sei also $C \subseteq \mathbb{M}$ nicht-leer und durch $\subseteq$ vollständig geordnet. Sofort sieht man dann, dass $\mathfrak{q} := \bigcap_{\mathfrak{s} \in C} \mathfrak{s}$ zu $\mathbb{M}$ gehört und eine untere Schranke für C ist.

"(b)" Sei $\mathfrak{a} \neq R$. Die Menge $\{1\}$ ist bezüglich der Multiplikation abgeschlossen und disjunkt zu $\mathfrak{a}$. Nach (2.25)(a) hat $\mathbb{I}_{\{1\}}(\mathfrak{a})$ also ein maximales Mitglied $\mathfrak{p}$. Nach (2.25)(b) ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$. Die umgekehrte Implikation ist klar.

"(c)" Klar aus (a) und (b). ■

2.28 Korollar. Genau dann gilt $\mathrm{Spec}(R) = \varnothing$, wenn $R = \{0\}$. ■

§ Das Radikal eines Ideals

2.29 Festsetzung. Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Das ***Radikal*** $\sqrt{\mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{a}$ definieren wir als die Menge aller Elemente $x \in R$, welche eine Potenz x^n haben, die zu $\mathfrak{a}$ gehört:

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \left\{ x \in R \,\middle|\, \exists\, n \in \mathbb{N}_0 : x^n \in \mathfrak{a} \right\}.$$

Man sieht dann leicht, dass

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \left\{ x \in R \,\middle|\, \exists\, n \in \mathbb{N} : x^n \in \mathfrak{a} \right\},$$

d.h. wir können uns dabei immer einschränken, auch nur positive Potenzen zu betrachten.

2.30 Satz. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt:

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \quad = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} \quad = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \min(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}.$$

Beweis. Nach (2.27)(a) genügt es zu zeigen, dass $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$.

Zum Nachweis der Inklusion "$\subseteq$" wähle man $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$. Es genügt zu zeigen, dass $x \in \mathfrak{p}$. Nach Voraussetzung gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in \mathfrak{a}$. Es folgt $x^n \in \mathfrak{p}$, mit (2.2)(A) also $x \in \mathfrak{p}$.

Zum Nachweis der Inklusion "$\supseteq$" nehmen wir an, es sei $x \in R \smallsetminus \sqrt{\mathfrak{a}}$. Es genügt, ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$ zu finden mit $x \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$. Offenbar ist die Menge $S := \{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht-leer und abgeschlossen unter der Multiplikation und erfüllt $S \cap \mathfrak{a} = \varnothing$. Nach (2.25) enthält $\mathbb{I}_S(\mathfrak{a})$ also ein Primideal $\mathfrak{p}$. Für dieses gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ und $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$, also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$ und $x \notin \mathfrak{p}$. ∎

2.31 Korollar. Ist R ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Ideal von R, und es gilt:

(a) $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(b) $\mathrm{Var}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Var}(\sqrt{\mathfrak{a}})$ und $\min(\mathfrak{a}) = \min(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

(c) $\mathfrak{a} = R \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = R$.

(d) $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Beweis. Als Durchschnitt von $\mathfrak{a}$ umfassenden (Prim-)Idealen ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein $\mathfrak{a}$ umfassendes Ideal, vgl. (2.30). Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ ist $\mathrm{Var}(\mathfrak{a}) \supseteq \mathrm{Var}(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Nach (2.30) folgt aus $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$ aber auch $\mathfrak{p} \supseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Also gilt $\mathrm{Var}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Var}(\sqrt{\mathfrak{a}})$ und damit $\min(\mathfrak{a}) = \min(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Die Aussage (c) folgt mit (b) aus (2.27)(b). Ist $\mathfrak{a} = R$, so ist die Aussage (d) trivial, sonst folgt sie mit (b) und (c) aus (2.30), angewandt einmal auf $\mathfrak{a}$ und einmal auf $\sqrt{\mathfrak{a}}$. ∎

2.32 Korollar. Ist R ein Ring, und sind $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r$ endlich viele Ideale von R, so gilt:

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r} = \sqrt{\mathfrak{a}_1} \cap \cdots \cap \sqrt{\mathfrak{a}_r}.$$

Beweis. Klar aus (2.30) und (2.9)(d). ∎

§ Perfekte Ideale

2.33 Korollar. Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ sind äquivalent:

(i) $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(ii) $\mathfrak{a}$ lässt sich als Durchschnitt von Primidealen darstellen.

Beweis. Klar aus (2.30). ∎

2.34 Definition. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ eines Rings R heisst ***perfekt***, wenn es die äquivalenten Bedingungen (2.33)(i) und (ii) erfüllt.

2.35 Bemerkung. Offenbar sind Primideale perfekt. Durchschnitte perfekter Ideale sind ebenfalls perfekt.

2.36 Festsetzungen. (A) Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Das ***Produkt von $\mathfrak{a}$ mit M*** definieren wir als die Menge

$$\mathfrak{a}M := \left\{ \sum_{j=1}^{N} x_j m_j \;\middle|\; N \in \mathbb{N};\ x_1, \dots, x_N \in \mathfrak{a},\ m_1, \dots, m_N \in M \right\}$$

aller Linearkombinationen von Elementen aus M mit Koeffizienten in $\mathfrak{a}$. Es handelt sich gerade um den Untermodul von M, der durch die Menge $\{xm \mid x \in \mathfrak{a},\ m \in M\}$ aller Produkte von Elementen aus $\mathfrak{a}$ mit Elementen aus M erzeugt wird.

(B) Ist $x \in R$, so schreiben wir

$$xM := \left\{ xm \;\middle|\; m \in M \right\}.$$

Natürlich ist dann $xM = (x)M$. Nach (A) ist xM also insbesondere ein Untermodul von M. Weiter können wir schreiben

$$\mathfrak{a}M = \sum_{x \in \mathfrak{a}} xM.$$

(C) Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ zwei Ideale, so können wir das ***Produkt*** dieser Ideale definieren als das Produkt des Ideals $\mathfrak{a}$ mit dem R-Modul $\mathfrak{b}$, das wir in (A) mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bezeichnet haben. Sofort sieht man, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$. Ist nun M ein R-Modul, so sieht man leicht, dass $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})M = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}M)$. Ist $M = \mathfrak{c}$ ein Ideal von R, so gilt insbesondere $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$. Sind $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r$ Ideale von R, so kann man jetzt sofort deren Produkt $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r$ durch Rekursion über r definieren, und zwar durch $\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i := \big(\prod_{i=1}^{r-1} \mathfrak{a}_i\big)\mathfrak{a}_r$. Hierbei setzen wir fest: $\prod_{i \in \varnothing} \mathfrak{a}_i := R$. Für $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r = \left\{ \sum_{j=1}^{N} x_{1,j} \cdots x_{r,j} \;\middle|\; N \in \mathbb{N};\ x_{i,j} \in \mathfrak{a}_i,\ 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le N \right\}.$$

Als wichtigen Spezialfall erhält man so die r-te ***Potenz*** $\mathfrak{a}^r := \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{a}$ des Ideals $\mathfrak{a}$. Es gilt also

$$\mathfrak{a}^r = \left\{ \sum_{j=1}^{N} x_{1,j} \cdots x_{r,j} \;\middle|\; N \in \mathbb{N};\ x_{i,j} \in \mathfrak{a},\ 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le N \right\}.$$

2.37 Bemerkungen. (A) Seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r$ Ideale des Rings R. Dann gilt offenbar

$$\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r \subseteq \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r.$$

Daraus folgt leicht, dass

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r} = \sqrt{\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r},$$

und insbesondere, dass

$$\sqrt{\mathfrak{a}^r} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

(B) Ist $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_r) \subseteq R$ ein endlich erzeugtes Ideal und $M = (m_1, \ldots, m_s)$ ein endlich erzeugter R-Modul, so sieht man leicht, dass die rs Elemente $x_i m_j$ mit $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq j \leq s$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}M$ bilden.

Sind $\mathfrak{a}_1 = (x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}), \ldots, \mathfrak{a}_r = (x_{r,1}, \ldots, x_{r,n_r})$ endlich erzeugte Ideale von R, so sieht man jetzt durch Induktion über r, dass die $n_1 n_2 \cdots n_r$ Elemente $x_{1,i_1} x_{2,i_2} \cdots x_{r,i_r}$ mit $1 \leq i_j \leq n_j$ für $j = 1, \ldots, r$ ein Erzeugendensystem des Ideals $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r$ bilden.

2.38 Satz. Sei R ein Ring, und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ zwei Ideale. Ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, so sind äquivalent:

(i) $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$.

(ii) $\exists\, r \in \mathbb{N} : \mathfrak{a}^r \subseteq \mathfrak{b}$.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Wir finden Elemente $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_s)$. Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$ finden wir Zahlen $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$ mit $x_i^{n_i} \in \mathfrak{b}$ für $i = 1, \ldots, s$. Setzt man $r = \sum_{i=1}^{s} n_i$, so folgt aus (2.37)(B), dass die Produkte $x_1^{\nu_1} \cdots x_s^{\nu_s}$ mit $\nu_1 + \cdots + \nu_s = r$ alle zu $\mathfrak{b}$ gehören und gerade das Ideal $\mathfrak{a}^r$ erzeugen. Daraus folgt $\mathfrak{a}^r \subseteq \mathfrak{b}$.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Diese Aussage gilt natürlich für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$, denn ist $x \in \mathfrak{a}$, so ist $x^r \in \mathfrak{a}^r \subseteq \mathfrak{b}$, also $x \in \sqrt{\mathfrak{b}}$. ■

§ Irreduzible Untermoduln und Ideale

2.39 Definition. Sei R ein Ring, und sei M ein R-Modul. Ein Untermodul N von M heisst ein ***reduzibler Untermodul***, wenn er sich als Durchschnitt $N = N_1 \cap N_2$ zweier N echt umfassenden Untermoduln $N_1, N_2 \supsetneq N$ von M schreiben lässt. In dieser Situation gilt dann immer $N_1, N_2 \neq M$. Andernfalls heisst N ein ***irreduzibler Untermodul*** von M. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ von R heisst ***reduzibles*** resp. ***irreduzibles Ideal***, wenn es als Untermodul von R die entsprechende Eigenschaft hat.

2.40 Lemma. Für ein Ideal $\mathfrak{q}$ eines Rings R sind äquivalent:

(i) $\mathfrak{q}$ ist ein Primideal.

(ii) $\mathfrak{q}$ ist perfekt und irreduzibel.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Nach (2.35) sind Primideale perfekt. Nach (2.3) sind sie auch irreduzibel.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $\mathfrak{q}$ perfekt und irreduzibel. Seien $x, y \in R \setminus \mathfrak{q}$. Dann ist $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q} + Rx$ und $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q} + Ry$. Weil $\mathfrak{q}$ irreduzibel ist, folgt $\mathfrak{q} \subsetneq (\mathfrak{q} + Rx) \cap (\mathfrak{q} + Ry)$. Wir finden also ein Element $z \in (\mathfrak{q} + Rx) \cap (\mathfrak{q} + Ry) \setminus \mathfrak{q}$. Mit geeigneten Elementen $a, b \in \mathfrak{q}$ und $u, v \in R$ können wir so schreiben $a + ux = z = b + vy$. Es folgt $ab + avy + bux + uvxy = (a + ux)(b + vy) = z^2$. Weil $\mathfrak{q}$ perfekt ist, gilt $z^2 \notin \mathfrak{q}$. Wegen $ab + avy + bux \in \mathfrak{q}$ folgt $uvxy \notin \mathfrak{q}$, also $xy \notin \mathfrak{q}$. ■

2.41 Satz. In einem noetherschen Ring R hat jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ nur endlich viele minimale Primoberideale.

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann ist die Menge $\mathbb{I}$ aller Ideale von R mit unendlich vielen minimalen Primoberidealen nicht leer und besitzt demzufolge ein bezüglich der Inklusion maximales Mitglied $\mathfrak{q}$. Nach (2.9)(b) ist $\min(R) = \varnothing$. Also ist $\mathfrak{q} \subsetneq R$. Nach (2.31)(a) und (b) ist $\mathfrak{q} \subseteq \sqrt{\mathfrak{q}}$ und $\min(\mathfrak{q}) = \min(\sqrt{\mathfrak{q}})$. Letzteres zeigt, dass $\sqrt{\mathfrak{q}} \in \mathbb{I}$, und wegen der Maximalität von $\mathfrak{q}$ in $\mathbb{I}$ folgt $\mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Also ist $\mathfrak{q}$ perfekt. Ist $\mathfrak{q}$ irreduzibel, so ist $\mathfrak{q}$ nach (2.40) ein Primideal, d.h. wir erhalten den Widerspruch, dass $\min(\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{q}\}$. Demnach ist $\mathfrak{q}$ reduzibel. Wir können also schreiben $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$, wo $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ Ideale sind mit $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$. Insbesondere gilt dann $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \notin \mathbb{I}$; also sind $\min(\mathfrak{q}_1)$ und $\min(\mathfrak{q}_2)$ endlich. Mit (2.9)(d) ist es aber leicht zu sehen, dass $\min(\mathfrak{q}) = \min(\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2) \subseteq \min(\mathfrak{q}_1) \cup \min(\mathfrak{q}_2)$, und wir erhalten den Widerspruch, dass $\min(\mathfrak{q})$ endlich ist. ∎

§ Maximalideale

2.42 Definition. Sei R ein Ring. Unter einem ***Maximalideal*** $\mathfrak{m}$ von R verstehen wir ein Ideal, das in der Menge $\mathbb{I}_{\{1\}}(0)$ der echten Ideale von R bezüglich der Inklusion maximal ist. Die Menge der Maximalideale von R bezeichnen wir mit $\mathrm{Max}(R)$. Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so schreiben wir $\max(\mathfrak{a})$ für die Menge

$$\max(\mathfrak{a}) := \left\{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R) \;\middle|\; \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}\right\}$$

der $\mathfrak{a}$ umfassenden Maximalideale von R. Für $x_1, \ldots, x_r \in R$ schreiben wir

$$\max(x_1, \ldots, x_r) := \max\big((x_1, \ldots, x_r)\big).$$

2.43 Satz. Sei R ein Ring. Dann gilt:

(a) Die Maximalideale von R sind Primideale.

(b) Jedes echte Ideal $\mathfrak{a}$ von R ist enthalten in einem Maximalideal.

Beweis. Man wende (2.25)(b) auf $\mathbb{I}_{\{1\}}(0)$ resp. (2.25)(a) auf $\mathbb{I}_{\{1\}}(\mathfrak{a})$ an. ∎

2.44 Bemerkung. Sei R ein Ring.

(A) Ein Element $u \in R$ heisst bekanntlich ***invertierbar*** oder eine ***Einheit*** in R, wenn es ein Element $v \in R$ so gibt, dass $uv = 1$. In diesem Fall ist v durch u eindeutig bestimmt und heisst das ***Inverse*** von u. Wir bezeichnen dieses Inverse mit u^{-1}. Die Menge aller Einheiten von R wollen wir mit R^* bezeichnen, also

$$R^* := \left\{u \in R \;\middle|\; \exists\, v \in R : uv = 1\right\}.$$

(B) Leicht sieht man:

(a) R^* ist bezüglich der in R gegebenen Multiplikation eine Gruppe.

(b) Sind $u, v \in R$ mit $uv \in R^*$, so folgt $u, v \in R^*$.

(c) $R \neq 0 \iff 0 \notin R^*$.

(d) Für alle $u \in R$ gilt: $u \in R^* \iff uR = R$.

Wegen Aussage (a) nennt man R^* auch die ***Einheitsgruppe*** von R.

(C) Schliesslich sei noch daran erinnert, dass ein Ring R genau dann ein Körper ist, wenn $R^* = R \setminus \{0\}$.

2.45 Korollar. Sei R ein Ring. Dann gilt

$$R^* \quad = \quad R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p} \quad = \quad R \setminus \bigcup_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)} \mathfrak{m}.$$

Beweis. Klar aus (2.44)(B)(d) und (2.43). ■

2.46 Satz. Ein Ideal $\mathfrak{m}$ eines Rings R ist genau dann ein Maximalideal, wenn der Restklassenring $R/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.

Beweis. Offenbar ist $\mathfrak{m}$ genau dann ein Maximalideal, wenn die Menge $\mathbb{I}(\mathfrak{m})_R$ der $\mathfrak{m}$ umfassenden Ideale von R genau aus den beiden verschiedenen Mitglieder $\mathfrak{m}$ und R besteht. Nach (2.16)(B), angewendet auf den Restklassenhomomorphismus $R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$, ist dies gleichbedeutend damit, dass $R/\mathfrak{m}$ genau die zwei Ideale 0 und $R/\mathfrak{m}$ besitzt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $R/\mathfrak{m}$ ein Körper ist. ■

2.47 Bemerkungen. (A) Schreiben wir $\mathrm{Perf}(R)$ für die Menge der perfekten Ideale eines Rings R, so gilt:

$$\mathrm{Max}(R) \subseteq \mathrm{Spec}(R) \subseteq \mathrm{Perf}(R).$$

Vgl. dazu (2.43)(a) und (2.35).

(B) Ein Ring R heisst ***reduziert***, wenn sein Nullideal perfekt ist, also, wenn es für $x \in R$ gilt:

$$\text{existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n = 0, \text{ so ist schon } x = 0.$$

(C) Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so können wir zusätzlich zu (2.2)(C) und (2.46) sagen:

$$\mathfrak{a} \text{ ist perfekt} \iff R/\mathfrak{a} \text{ ist reduziert.}$$

2.48 Bemerkung. Sei $f : R \to R'$ ein surjektiver Homomorphismus von Ringen. Ist $\mathfrak{q}$ ein $\mathrm{Ker}(f)$ umfassendes Ideal von R, so sieht man sofort, dass $f(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}R'$ genau dann perfekt, ein Primideal resp. ein Maximalideal ist, wenn das ursprüngliche Ideal die entsprechende Eigenschaft hat. Schreibt man $\mathrm{perf}(\mathfrak{b})$ für die Menge der perfekten Ideale von R, welche das feste Ideal $\mathfrak{b}$ umfassen, so induzieren die Bijektionen aus (2.16) mit (1.4)(B) die folgenden Bijektionen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{perf}\big(\mathfrak{a}+\operatorname{Ker}(f)\big) &\xrightarrow{f(\bullet)} \operatorname{perf}(\mathfrak{a}R') \quad \text{und} \quad \operatorname{perf}\big(\mathfrak{a}+\operatorname{Ker}(f)\big) \xleftarrow{f^{-1}(\bullet)} \operatorname{perf}(\mathfrak{a}R'),\\
\operatorname{Var}\big(\mathfrak{a}+\operatorname{Ker}(f)\big) &\xrightarrow{f(\bullet)} \operatorname{Var}(\mathfrak{a}R') \quad \text{und} \quad \operatorname{Var}\big(\mathfrak{a}+\operatorname{Ker}(f)\big) \xleftarrow{f^{-1}(\bullet)} \operatorname{Var}(\mathfrak{a}R'),\\
\min\big(\mathfrak{a}+\operatorname{Ker}(f)\big) &\xrightarrow{f(\bullet)} \min(\mathfrak{a}R') \quad \text{und} \quad \min\big(\mathfrak{a}+\operatorname{Ker}(f)\big) \xleftarrow{f^{-1}(\bullet)} \min(\mathfrak{a}R'),\\
\max\big(\mathfrak{a}+\operatorname{Ker}(f)\big) &\xrightarrow{f(\bullet)} \max(\mathfrak{a}R') \quad \text{und} \quad \max\big(\mathfrak{a}+\operatorname{Ker}(f)\big) \xleftarrow{f^{-1}(\bullet)} \max(\mathfrak{a}R'),
\end{aligned}$$

wo $\mathfrak{a} \subseteq R$ für ein Ideal steht.

2.49 Beispiel. Sei $a \in \mathbb{N}$ mit der Primfaktorzerlegung $a = p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$. Dann gilt

$$\operatorname{Var}(a\mathbb{Z}) = \max(a\mathbb{Z}) = \{p_1\mathbb{Z}, \ldots, p_r\mathbb{Z}\}.$$

Mit (2.48) folgt nun entsprechend

$$\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) = \operatorname{Max}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) = \{p_1\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \ldots, p_r\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}\}.$$

2.50 Satz. Sei R ein Ring, und sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:

(i) M ist einfach.

(ii) Es gibt ein $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ so, dass $M \cong R/\mathfrak{m}$.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei M einfach. Dann ist $M \neq 0$. Wir wählen ein $m \in M \setminus 0$. Dann ist Rm ein Untermodul von M mit $0 \subsetneq Rm \subseteq M$. Weil M einfach ist, folgt $Rm = M$. Sei $\mathfrak{m} \subseteq R$ der Kern des durch $x \mapsto xm$ definierten surjektiven Homomorphismus von R-Moduln. Nach dem Homomorphiesatz gilt $M \cong R/\mathfrak{m}$. Nach (1.32)(b) folgt $\mathfrak{l}_R(R/\mathfrak{m}) = \mathfrak{l}_R(M) = 1$. Insbesondere ist $\mathfrak{m} \subsetneq R$. Wäre $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Max}(R)$, so gäbe es ein Ideal $\mathfrak{n}$ von R mit $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{n} \subsetneq R$ und wir hätten im R-Modul $R/\mathfrak{m}$ die Kette von Untermoduln $0 = \mathfrak{m}/\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{n}/\mathfrak{m} \subsetneq R/\mathfrak{m}$, ein Widerspruch. Also ist $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ und $M \cong R/\mathfrak{m}$. Nach (1.32)(b) genügt es zu zeigen, dass $\mathfrak{l}_R(R/\mathfrak{m}) = 1$. Wegen $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ist $\mathfrak{l}_R(R/\mathfrak{m}) \geq 1$. Wäre $\mathfrak{l}_R(R/\mathfrak{m}) > 1$, so gäbe es einen R-Untermodul N von $R/\mathfrak{m}$ mit $0 \subsetneq N \subsetneq R/\mathfrak{m}$. Sei $\pi : R \to R/\mathfrak{m}$ die Restklassenabbildung. Dann ist $\pi^{-1}(N)$ ein Ideal von R mit $\mathfrak{m} \subsetneq \pi^{-1}(N) \subsetneq R$, und es folgt der Widerspruch, dass $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Max}(R)$. Also ist $\mathfrak{l}_R(R/\mathfrak{m}) = 1$. ∎

Kapitel 3

Dimension

§ Primidealketten

3.1 Definitionen. (A) Sei $l \in \mathbb{N}_0$ und R ein Ring. Unter einer ***Primidealkette in*** R verstehen wir eine endliche Folge $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^{l}$ von Primidealen von R so, dass

$$\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1} \quad \text{für } i = 0, \dots, l-1.$$

Die Zahl l, d.h. die Anzahl der in der Kette auftretenden echten Inklusionen, nennen wir die ***Länge*** der Kette $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^{l}$.

(B) Ist $l \in \mathbb{N}_0$ und gelten $\mathfrak{P} \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ und $\mathfrak{p}_i \in \mathfrak{P}$ für jedes $i \in \{0, \dots, l\}$, so heisst $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^{l}$ eine ***Primidealkette in*** $\mathfrak{P}$. Eine Primidealkette in R ist also gerade eine Primidealkette in $\mathrm{Spec}(R)$.

(C) Die ***Dimension*** (genauer: die ***Krull-Dimension***) eines Rings R definieren wir als das Supremum der Längen aller Primidealketten in R, d.h. wir setzen

$$\dim(R) := \sup\left\{ l \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; (\mathfrak{p}_i)_{i=0}^{l} \text{ ist Primidealkette in } R \right\}.$$

3.2 Beispiele. (A) Genau dann ist R der Nullring, wenn $\dim(R) = -\infty$.

(B) Für einen Körper K ist das Nullideal das einzige Primideal. Deshalb ist

$$\dim(K) = 0.$$

(C) Sei R ein Hauptidealbereich, der kein Körper ist. Es existiert dann ein Ideal $\mathfrak{a}$ von R mit $0 \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq R$. Weil jedes echte Ideal in einem Maximalideal $\mathfrak{m}$ enthalten und jedes Maximalideal ein Primideal und das Nullideal in einem Integritätsbereich prim ist, besteht in R die Primidealkette $0 \subsetneq \mathfrak{m}$ der Länge 1. Deshalb ist $\dim(R) \geq 1$. Angenommen, es sei $\dim(R) > 1$, dann gibt es in R eine Primidealkette $0 \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p} = (p)$ und $\mathfrak{q} = (q)$ für zwei Elemente $p \neq q$ aus R. Dabei gilt $q \,|\, p$. Weil p, q Primelemente sind, können sie sich nur um eine Einheit unterscheiden, also erhalten wir den Widerspruch $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Deshalb gilt für unser R, dass

$$\dim(R) = 1.$$

(D) Aus (C) folgt insbesondere, dass

$$\dim(\mathbb{Z}) = 1 \quad \text{und} \quad \dim(K[X]) = 1,$$

wo K ein Körper ist.

3.3 Bemerkung. Sei M ein R-Modul, und sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal mit $\mathfrak{a}M = 0$. Dann ist M in natürlicher Weise ein $R/\mathfrak{a}$-Modul: Bezeichnet $\overline{x}$ die Restklasse in $R/\mathfrak{a}$ eines Elementes $x \in R$, so definiert man die Skalarmultiplikation $(R/\mathfrak{a}) \times M \dot{\to} M$ von $R/\mathfrak{a}$ mit M durch die Festsetzung

$$\overline{x} \cdot m := xm$$

für $x \in R$ und $m \in M$. Man sieht dann sofort: Die $R/\mathfrak{a}$-Untermoduln von M sind genau die R-Untermoduln von M. Insbesondere gilt also etwa

$$\mathfrak{l}_R(M) = \mathfrak{l}_{R/\mathfrak{a}}(M).$$

Sind $m_1, \ldots, m_r \in M$, so erzeugen diese Elemente über R und über $R/\mathfrak{a}$ denselben Untermodul von M. Insbesondere ist M genau dann endlich erzeugt über $R/\mathfrak{a}$, wenn dies über R der Fall ist.

3.4 Lemma. Sei R ein noetherscher Ring, sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$, sei M ein endlich erzeugter R-Modul, und sei $\mathfrak{q} \subseteq R$ ein Ideal mit $\mathfrak{q}M = 0$ und $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$. Dann ist $\mathfrak{l}_R(M) < \infty$.

Beweis. Nach (2.38) gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^r \subseteq \mathfrak{q}$, also mit $\mathfrak{m}^r M = 0$. Wir machen Induktion nach r. Ist $r = 1$, so ist $\mathfrak{m}M = 0$. Nach (3.3) folgt $\mathfrak{l}_R(M) = \mathfrak{l}_{R/\mathfrak{m}}(M)$. Nach (2.46) ist $R/\mathfrak{m}$ ein Körper und nach (3.3) ist M ein über $R/\mathfrak{m}$ endlich erzeugter Vektorraum. Nach (1.33)(B) folgt, dass $\mathfrak{l}_{R/\mathfrak{m}}(M) < \infty$, also $\mathfrak{l}_R(M) < \infty$.

Sei also $r > 1$. Es besteht die kurze exakte Sequenz von R-Moduln $0 \to \mathfrak{m}^{r-1}M \hookrightarrow M \xrightarrow{\bar{\cdot}} M/\mathfrak{m}^{r-1}M \to 0$. Dabei ist $\mathfrak{m}(\mathfrak{m}^{r-1}M) = \mathfrak{m}^r M = 0$. Nach dem Fall mit $r = 1$ ist also $\mathfrak{l}_R(\mathfrak{m}^{r-1}M) < \infty$. Weiter ist $\mathfrak{m}^{r-1}(M/\mathfrak{m}^{r-1}M) = \mathfrak{m}^{r-1}M/\mathfrak{m}^{r-1}M = 0$. Nach Induktion gilt also $\mathfrak{l}_R(M/\mathfrak{m}^{r-1}M) < \infty$. Mit (1.30) folgt $\mathfrak{l}_R(M) < \infty$. ■

§ Ringe endlicher Länge

3.5 Satz. Für einen Ring $R \neq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) R ist noethersch und $\dim(R) = 0$.

(ii) R ist noethersch und $\operatorname{Min}(R) = \operatorname{Spec}(R)$.

(iii) R ist noethersch und $\operatorname{Max}(R) = \operatorname{Spec}(R)$.

(iv) R ist noethersch und $\operatorname{Min}(R) = \operatorname{Max}(R)$.

(v) $\mathfrak{l}_R(R) < \infty$.

Beweis. $\mathrm{Min}(R)$ ist die Menge der minimalen Mitglieder von $\mathrm{Spec}(R)$ bezüglich der Inklusion, $\mathrm{Max}(R)$ jene der maximalen. Nach (2.27)(a) und nach (2.43)(b) gibt es zu jedem $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ ein $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(R)$ und ein $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$. Damit ergibt sich sofort die Äquivalenz der Aussagen (i)-(iv).

"(ii) $\Rightarrow$ (v)" Nach (2.41) ist $\mathrm{Min}(R) = \min(0)$ endlich. Dabei ist $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Min}(R)$, also besteht $\mathrm{Spec}(R)$ aus endlich vielen Mitgliedern $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$, welche zudem alle Maximalideale sind. Wir zeigen jetzt durch Induktion über r, dass $\mathfrak{l}(R) = \mathfrak{l}_R(R) < \infty$.

Sei zunächst $r = 1$. Wir schreiben dann $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$. Weil $\mathfrak{m}$ das einzige minimale Primoberideal von 0 ist, folgt mit (2.30), dass $\sqrt{0} = \mathfrak{m}$. Wendet man (3.4) an mit $M = R$ und $\mathfrak{q} = 0$, so folgt $\mathfrak{l}(R) < \infty$.

Sei also $r > 1$. Weil es sich bei $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ um paarweise verschiedene Maximalideale handelt, gilt $\mathfrak{m}_i \nsubseteq \mathfrak{m}_r$ für $i = 1, \ldots, r-1$. Nach (2.3) finden wir also ein Element $y \in \bigcap_{i=1}^{r-1} \mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{m}_r$. Weiter ist $\min(0) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}$. Nach (2.30) können wir also schreiben $\sqrt{0} = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$. Nach (2.38) gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $(\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r)^s = 0$. Deshalb ist $y^s \in \bigcap_{i=1}^{r-1} \mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{m}_r$. Dies heisst aber, dass $\min(Ry^s) = \max(Ry^s) = \mathrm{Var}(Ry^s) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_{r-1}\}$. Wenden wir (2.48) an auf den Restklassenhomomorphismus $\pi : R \to R/Ry^s$, so erhalten wir $\mathrm{Min}(R/Ry^s) = \mathrm{Max}(R/Ry^s) = \mathrm{Spec}(R/Ry^s) = \{\mathfrak{m}_1/Ry^s, \ldots, \mathfrak{m}_{r-1}/Ry^s\}$. Nach Induktion ist also $\mathfrak{l}_{R/Ry^s}(R/Ry^s) < \infty$. Im Hinblick auf (3.3) folgt so, dass $\mathfrak{l}_R(R/Ry^s) < \infty$. Weiter ist $\mathfrak{m}_r^s(Ry^s) = (\mathfrak{m}_r yR)^s \subseteq (\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r)^s = 0$. Anwendung von (3.4) mit $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_r^s$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_r$ und $M = Ry^s$ liefert, dass $\mathfrak{l}_R(Ry^s) < \infty$. Wegen der kurzen exakten Sequenz $0 \to Ry^s \hookrightarrow R \xrightarrow{\pi} R/Ry^s \to 0$ folgt aus (1.30), dass $\mathfrak{l}(R) < \infty$.

"(v) $\Rightarrow$ (i)" Wegen $\mathfrak{l}_R(R) < \infty$ wird jede aufsteigende Kette von Idealen in R stationär. Deshalb ist R noethersch. Es bleibt zu zeigen, dass $\dim(R) = 0$.

Nehmen wir an, es sei $\dim(R) > 0$. Dann finden wir Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ in R mit $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$. Sei $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}$. Wir schreiben $\bar{\ }$ für die Restklassenabbildung $R \to R/\mathfrak{p} =: \overline{R}$. Nach (2.2)(C) ist $\overline{R}$ ein Integritätsbereich. Weiter ist $\overline{x} \neq 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt zudem $\overline{x}^{n+1}\overline{R} \subsetneq \overline{x}^n\overline{R}$, denn andernfalls gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\overline{x}^{n+1}\overline{R} = \overline{x}^n\overline{R}$. Mit einem geeigneten Element $\overline{a} \in \overline{R}$ könnten wir dann also schreiben $\overline{x}^n = \overline{x}^{n+1}\overline{a}$, also $\overline{x}^n(1 - \overline{x}\,\overline{a}) = 0$. Weil $\overline{R}$ integer ist, und wegen $\overline{x} \neq 0$ ergäbe sich so $\overline{1} = \overline{x}\,\overline{a} \in \overline{\mathfrak{q}}$. Nach (2.48) ist aber $\mathfrak{q}$ ein echtes Ideal von $\overline{R}$, und somit wären wir bei einem Widerspruch angelangt. Es gilt also immer $\overline{x}^{n+1}\overline{R} \subsetneq \overline{x}^n\overline{R}$. Sei $l \in \mathbb{N}_0$. Nach dem eben Gesagten ist dann $\left(\overline{x}^{l-i}\overline{R}\right)_{i=0}^l$ eine Kette von R-Untermoduln in $\overline{R}$. Dies zeigt, dass $\mathfrak{l}_R\left(\overline{R}\right) = \infty$. Nach (1.32)(a) folgt also $\mathfrak{l}(R) = \infty$. ■

§ Die Höhe eines Primideals

3.6 Definition. Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Eine ***Primidealkette unterhalb*** $\mathfrak{p}$ in R ist eine Primidealkette $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^l$ in R so, dass $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$ für $i = 0, \ldots, l$. Die ***Höhe*** des Primideals $\mathfrak{p}$ wird definiert als das Supremum der Längen aller Primidealketten unterhalb $\mathfrak{p}$, also

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{p}) := \sup\left\{ l \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; (\mathfrak{p}_i)_{i=0}^l \text{ ist Primidealkette unterhalb } \mathfrak{p} \right\}.$$

3.7 Bemerkung. Ist R ein Ring, so gilt für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ offenbar:

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{h}(\mathfrak{p}) = 0.$$

Ist $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$, so gilt sicher $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \leq \mathrm{h}(\mathfrak{q})$. Ist dabei $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) < \infty$, so gilt sogar $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) < \mathrm{h}(\mathfrak{q})$. Schliesslich gilt auch:

$$\dim(R) = \sup\left\{\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \;\middle|\; \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)\right\} = \sup\left\{\mathrm{h}(\mathfrak{m}) \;\middle|\; \mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)\right\}.$$

§ Bruchringe

3.8 Festsetzungen. (A) Sei R ein Ring. Eine Menge $S \subseteq R$ nennen wir ***Nennermenge***, wenn sie bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist und wenn $1 \in S$. Ist $S \subseteq R$ eine solche Menge, so kann man auf dem kartesischen Produkt $S \times R$ eine Äquivalenzrelation definieren durch die Vorschrift:

$$(s, x) \sim_S (t, y) \;:\Leftrightarrow\; \exists\, u \in S : utx = usy.$$

Die Äquivalenzklasse des Paares $(s, x) \in S \times R$ bezeichnen wir dann mit $\frac{x}{s}$ und nennen sie einen ***Bruch*** mit ***Zähler*** x und ***Nenner*** s. Die Menge der so definierten Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $S^{-1}R$ und nennen sie die ***Menge der Brüche mit Zähler in*** R ***und Nenner in*** S.

(B) Wir halten die Bezeichnungen von (A) fest. Auf der Bruchmenge $S^{-1}R$ können wir dann — wie man leicht nachprüft — eine Addition und eine Multiplikation einführen und zwar durch die Vorschriften:

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} := \frac{xt + ys}{st} \quad \text{und} \quad \frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} := \frac{xy}{st} \quad \text{mit } x, y \in R \text{ und } s, t \in S.$$

Dann wird die Bruchmenge $S^{-1}R$ zu einem Ring mit Nullelement $\frac{0}{1} = \frac{0}{s}$ und Einselement $\frac{1}{1} = \frac{s}{s}$, wo $s \in S$. Diesen Ring $S^{-1}R$ nennen wir den ***Bruchring*** von R mit Nennern aus S.

(C) Wir halten die obigen Bezeichnungen bei. Vermöge des ***kanonischen Homomorphismus***

$$\eta_S : R \to S^{-1}R,\; x \mapsto \frac{x}{1}$$

können wir $S^{-1}R$ immer als R-Algebra auffassen.

3.9 Bemerkungen. (A) Sei R ein Ring, und sei S eine Nennermenge in R. Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so prüft man sofort nach, dass für das Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$ nach $S^{-1}R$ gilt

$$\mathfrak{a}S^{-1}R = \left\{\frac{x}{s} \;\middle|\; x \in \mathfrak{a},\, s \in S\right\}.$$

(B) Wir halten die Bezeichnungen von (A) fest. Ist $\mathfrak{a}'$ ein Ideal von $S^{-1}R$, so ist natürlich $(\mathfrak{a}' \cap R)S^{-1}R = \big(\eta_S(\eta_S^{-1}(\mathfrak{a}'))\big) \subseteq \mathfrak{a}'$. Ist umgekehrt $y \in \mathfrak{a}'$, so können wir schreiben $y = \frac{x}{s}$ mit $x \in R$ und $s \in S$. So wird dann $\eta_S(x) = \frac{x}{1} = \frac{sx}{1s} = \frac{s}{1}y \in \mathfrak{a}'$, also $x \in \eta_S^{-1}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}' \cap R$. Damit folgt, dass $y = \eta_S(x)\frac{1}{s} \in (\mathfrak{a}' \cap R)S^{-1}R$. Also gilt in der Tat die Gleichheit

$$(\mathfrak{a}' \cap R)S^{-1}R = \mathfrak{a}'.$$

(C) Sei jetzt $\mathfrak{a}$ wieder ein Ideal vom Ring R. Sofort sieht man dann mit Hilfe von (A), dass

$$\mathfrak{a}S^{-1}R \cap R = \eta_S^{-1}\Big(\big(\eta_S(\mathfrak{a})\big)\Big) = \Big\{x \in R \;\Big|\; \exists\, s \in S : sx \in \mathfrak{a}\Big\}.$$

Insbesondere gilt auch

$$\operatorname{Ker}(\eta_S) = \eta_S^{-1}(0) = \eta_S^{-1}\big(\eta_S(0)\big) = 0S^{-1}R \cap R = \Big\{x \in R \;\Big|\; \exists\, s \in S : sx = 0\Big\}.$$

(D) Seien $S \subseteq T$ Nennermengen im Ring R. Dann ist

$$S^{-1}T := \Big\{\frac{t}{s} \;\Big|\; t \in T,\, s \in S\Big\}$$

eine Nennermenge in $S^{-1}R$, und es besteht der sogenannte ***Doppelbruchisomorphismus***

$$\imath_{S,T} : (S^{-1}T)^{-1}S^{-1}R \xrightarrow{\cong} T^{-1}R,\ \frac{x/u}{t/v} \mapsto \frac{xv}{tu},$$

wo $x \in R$, $t \in T$, $u, v \in S$.

(E) Seien $X_1, \ldots, X_r$ Unbestimmte, und sei S eine Nennermenge im Ring R. Dann ist S eine Nennermenge auch im Polynomring $R[X_1, \ldots, X_r]$, und es besteht ein Isomorphismus

$$\Phi_S : S^{-1}(R[X_1, \ldots, X_r]) \xrightarrow{\cong} (S^{-1}R)[X_1, \ldots, X_r],\ \frac{\sum_{\nu \in N} a_\nu X^\nu}{s} \mapsto \sum_{\nu \in N} \frac{a_\nu}{s} X^\nu,$$

wo die Menge $N \subseteq \mathbb{N}_0^r$ endlich ist, die Indizes $\nu \in N$ die Form $(\nu_1, \ldots, \nu_r)$ haben mit $\nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{N}_0$, und das Symbol X^ν für $X_1^{\nu_1} \cdots X_r^{\nu_r}$ steht.

(F) Sei $f : R \to R'$ ein Homomorphismus von Ringen, und sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge. Dann ist auch $f(S) \subseteq R'$ eine Nennermenge. Ist $S' \subseteq R'$ eine weitere Nennermenge mit $f(S) \subseteq S'$, so besteht ein durch f ***induzierter Homomorphismus***

$$f_{S,S'} : S^{-1}R \to S'^{-1}R',\ \frac{x}{s} \mapsto \frac{f(x)}{f(s)},$$

wo $x \in R$ und $s \in S$. Ist dabei f ein Isomorphismus und $S' = f(S)$, so erhält man einen ***induzierten Isomorphismus***

$$f_{S,f(S)} : S^{-1}R \xrightarrow{\cong} f(S)^{-1}R'.$$

3.10 Satz. Sei R ein noetherscher Ring, und sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge. Dann ist der Bruchring $S^{-1}R$ ebenfalls noethersch.

Beweis. Sei $(\mathfrak{a}_i')_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine aufsteigende Folge von Idealen in $S^{-1}R$. Dann ist $(\mathfrak{a}_i' \cap R)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine aufsteigende Folge von Idealen in R. Also gibt es einen Index $i_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\mathfrak{a}_i' \cap R = \mathfrak{a}_{i_0}' \cap R$ für alle $i \geq i_0$. Nach (3.9)(B) folgt $\mathfrak{a}_i' = (\mathfrak{a}_i' \cap R)S^{-1}R = (\mathfrak{a}_{i_0}' \cap R)S^{-1}R = \mathfrak{a}_{i_0}'$ für alle $i \geq i_0$. Die Folge $(\mathfrak{a}_i')_{i \in \mathbb{N}_0}$ wird also stationär. ■

§ Verhalten von Primidealen bei Nenneraufnahme

3.11 Festsetzung. Sei R ein Ring, und sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge. Wir setzen

$$\operatorname{Spec}_S(R) := \Big\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \;\Big|\; S \cap \mathfrak{p} = \varnothing \Big\}.$$

Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so schreiben wir weiter

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}_S(\mathfrak{a}) &:= \operatorname{Spec}_S(R) \cap \operatorname{Var}(\mathfrak{a}), \\ \min_S(\mathfrak{a}) &:= \operatorname{Spec}_S(R) \cap \min(\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

Offenbar ist $\min_S(\mathfrak{a})$ gerade die Menge der bezüglich der Inklusion minimalen Mitglieder von $\operatorname{Var}_S(\mathfrak{a})$.

3.12 Bemerkungen. (A) Sei R ein Ring, und sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge. Ist $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(S^{-1}R)$, so ist $\mathfrak{q} \cap R \in \operatorname{Spec}(R)$. Dabei ist $S \cap (\mathfrak{q} \cap R) = \varnothing$, denn sonst gäbe es ein $s \in S \cap (\mathfrak{q} \cap R)$, und wegen (3.9)(B) hätten wir den Widerspruch $\frac{1}{1} = \frac{s}{s} \in (\mathfrak{q} \cap R)S^{-1}R = \mathfrak{q}$. Mithin ist

$$\mathfrak{q} \cap R \in \operatorname{Spec}_S(R).$$

(B) Sei umgekehrt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}_S(R)$. Gemäss (3.9)(C) gilt dann

$$\mathfrak{p}S^{-1}R \cap R = \Big\{ x \in R \;\Big|\; \exists\, s \in S : sx \in \mathfrak{p} \Big\}.$$

Weil $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist und wegen $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$, stimmt die rechts stehende Menge mit $\mathfrak{p}$ überein. Also folgt

$$\mathfrak{p}S^{-1}R \cap R = \mathfrak{p}.$$

Insbesondere ist $\mathfrak{p}S^{-1}R \neq S^{-1}R$. Wir wollen uns nun klar machen, dass $\mathfrak{p}S^{-1}R$ ein Primideal ist. Seien also $u = \frac{x}{s}$ und $v = \frac{y}{t}$ zwei Elemente aus $S^{-1}R$ so, dass $uv \in \mathfrak{p}S^{-1}R$. Nach (3.9)(A) finden wir dann Elemente $z \in \mathfrak{p}$ und $r \in S$ derart, dass $uv = \frac{z}{r}$, also $\frac{xy}{st} = \frac{z}{r}$. Wir finden also ein $p \in S$ mit $prxy = pstz \in \mathfrak{p}$. Wegen $pr \in S \subseteq R \smallsetminus \mathfrak{p}$ folgt $xy \in \mathfrak{p}$, also $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$. Im ersten Fall ist $u = \frac{x}{s} \in \mathfrak{p}S^{-1}R$, im zweiten Fall ist $v = \frac{y}{t} \in \mathfrak{p}S^{-1}R$.

(C) Das in (A) und (B) Gesagte lässt sich nun zusammenfassen zur Aussage, dass durch die Zuordnungen

$$\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}S^{-1}R \quad \text{und} \quad \mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap R$$

zwei zueinander inverse Bijektionen

$$\operatorname{Spec}_S(R) \xrightarrow{\bullet S^{-1}R} \operatorname{Spec}(S^{-1}R) \quad \text{und} \quad \operatorname{Spec}_S(R) \xleftarrow{\operatorname{Spec}(\eta_S)(\bullet) = \bullet \cap R} \operatorname{Spec}(S^{-1}R)$$

definiert werden. Sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ aus $\operatorname{Spec}_S(R)$, so gilt insbesondere

$$\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}' \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{p}S^{-1}R \subsetneq \mathfrak{p}'S^{-1}R.$$

(D) Sei nun $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}_S(R)$. Ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, so ist natürlich $\mathfrak{a}S^{-1}R \subseteq \mathfrak{p}S^{-1}R$. Ist umgekehrt $\mathfrak{a}S^{-1}R \subseteq \mathfrak{p}S^{-1}R$, so ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}S^{-1}R \cap R \subseteq \mathfrak{p}S^{-1}R \cap R = \mathfrak{p}$. Gemäss dem in (C) Gesagten bestehen also die folgenden zueinander inversen Bijektionen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}_S(\mathfrak{a}) &\xrightarrow{\bullet S^{-1}R} \operatorname{Var}(\mathfrak{a}S^{-1}R) \quad \text{und} \quad \operatorname{Var}_S(\mathfrak{a}) \xleftarrow{\bullet \cap R} \operatorname{Var}(\mathfrak{a}S^{-1}R), \\ \min_S(\mathfrak{a}) &\xrightarrow{\bullet S^{-1}R} \min(\mathfrak{a}S^{-1}R) \quad \text{und} \quad \min_S(\mathfrak{a}) \xleftarrow{\bullet \cap R} \min(\mathfrak{a}S^{-1}R). \end{aligned}$$

3.13 Satz. Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ eine Nennermenge. Dann gilt:

(a) $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) = \mathrm{h}(\mathfrak{p}S^{-1}R)$ für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_S(R)$.

(b) $\mathrm{h}(\mathfrak{q}) = \mathrm{h}(\mathfrak{q} \cap R)$ für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$.

Beweis. Wegen der in (3.12)(C) genannten Bijektionen entsprechen die Primidealketten unterhalb $\mathfrak{p}$ genau jenen unterhalb $\mathfrak{p}S^{-1}R$, und jene unterhalb $\mathfrak{q}$ genau denjenigen unterhalb $\mathfrak{q} \cap R$. ∎

§ Lokalisierung

3.14 Festsetzung. Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Dann ist $R \setminus \mathfrak{p}$ eine Nennermenge. Anstelle von

$$(R \setminus \mathfrak{p})^{-1}R, \quad \mathrm{Spec}_{R\setminus\mathfrak{p}}(R), \quad \eta_{R\setminus\mathfrak{p}}, \quad \mathrm{Var}_{R\setminus\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}), \quad \ldots$$

schreiben wir dann

$$R_\mathfrak{p}, \quad \mathrm{Spec}_\mathfrak{p}(R), \quad \eta_\mathfrak{p}, \quad \mathrm{Var}_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}), \quad \ldots$$

3.15 Definition. Einen Ring R nennen wir ***lokal***, wenn er ein einziges Maximalideal $\mathfrak{m}$ besitzt. Wir sagen dann auch, $(R, \mathfrak{m})$ sei lokal.

3.16 Bemerkung. Für einen lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ können wir gemäss (3.7) schreiben

$$\dim(R) = \mathrm{h}(\mathfrak{m}).$$

3.17 Satz. Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Dann ist $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring mit dem Maximalideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Dabei gilt:

$$\dim(R_\mathfrak{p}) = \mathrm{h}(\mathfrak{p}).$$

Beweis. Offenbar ist $\mathfrak{p}$ das einzige bezüglich der Inklusion maximale Mitglied der Menge $\mathrm{Spec}_\mathfrak{p}(R) = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$. Jetzt schliesst man mit (3.12)(C), (3.16) und (3.13). ∎

3.18 Definition. Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Dann nennen wir den nach (3.17) lokalen Bruchring $R_\mathfrak{p}$ von R mit Nennern in $R \setminus \mathfrak{p}$ die ***Lokalisierung*** von R in $\mathfrak{p}$.

3.19 Bemerkung. Sei R ein Ring, und seien $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ Primideale in R. Dann ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}$ ein Primideal in $R_\mathfrak{q}$, und es gilt $R_\mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}R_\mathfrak{q} = \left\{\frac{x}{s} \;\middle|\; x \in R,\, s \in R \setminus \mathfrak{q}\right\} \setminus \left\{\frac{y}{s} \;\middle|\; y \in \mathfrak{p},\, s \in R \setminus \mathfrak{q}\right\} = (R \setminus \mathfrak{q})^{-1}(R \setminus \mathfrak{p}) \subseteq R_\mathfrak{q}$. Gemäss (3.9)(D) erhalten wir den ***Doppelbruchisomorphismus für die Lokalisierung***

$$\imath_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} := \imath_{R\setminus\mathfrak{q},R\setminus\mathfrak{p}} : (R_\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}} \xrightarrow{\cong} R_\mathfrak{p}.$$

§ Die Idealisierung eines Moduls

3.20 Festsetzungen. (A) Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul, und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben dann $M^{n\times m}$ für die Menge der n-zeiligen und m-spaltigen ***Matrizen***

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix} = \left[\, x_{ij} \;\middle|\; 1 \le i \le n;\ 1 \le j \le m \,\right]$$

mit Einträgen $x_{ij} \in M$. Wichtige Spezialfälle sind die Menge $M^{n\times 1}$ der n-***Spalten***

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

mit Einträgen $x_i \in M$ und die Menge $M^{1\times m}$ der m-***Zeilen***

$$\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{bmatrix}$$

mit Einträgen $x_j \in M$.

(B) Ist $X = [\, x_{ij} \mid 1 \le i \le n;\ 1 \le j \le m \,] \in R^{n\times m}$ und $Y = [\, y_{jk} \mid 1 \le j \le m;\ 1 \le k \le p \,] \in M^{m\times p}$, oder $X \in M^{n\times m}$ und $Y \in R^{m\times p}$, so definiert man das ***Produkt der Matrizen*** X und Y wie üblich als die Matrix

$$X \cdot Y := \left[\sum_{j=1}^{m} x_{ij} y_{jk} \;\middle|\; 1 \le i \le n;\ 1 \le k \le p \right] \in M^{n\times p}.$$

(C) Ist $X = [\, x_{ij} \mid 1 \le i, j \le n \,] \in R^{n\times n}$, so definieren wir die ***Determinante*** $\det(X)$ der Matrix X durch

$$\det(X) := \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}.$$

Dabei steht $\mathbb{S}_n$ für die Gruppe der Permutationen $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ der Zahlen $\{1, \dots, n\}$ und $\operatorname{sgn}(\sigma)$ für das Vorzeichen der Permutation σ.

(D) Ist $X = [\, x_{ij} \mid 1 \le i \le n;\ 1 \le j \le m \,] \in M^{n\times m}$, so schreiben wir $x_{\bullet j}$ für die j-te Spalte

$$\begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} \in M^{n\times 1}$$

der Matrix X. In dieser Schreibweise stellen wir X dar als $X = [x_{\bullet 1}, x_{\bullet 2}, \dots, x_{\bullet m}]$. Die Menge $M^{n\times 1}$ der n-Spalten bildet in natürlicher Weise einen R-Modul, wobei ein Isomorphismus $M^{n\times 1} \cong M^{\oplus n}$ besteht.

3.21 Bemerkungen. (A) Sei R ein Ring, und sei $X = [\, x_{\bullet 1}, \dots, x_{\bullet m} \,] \in R^{n\times n}$. Sei $1 \le i < j \le n$, und sei $\tau \in \mathbb{S}_n$ die Transposition, welche i und j vertauscht; dann ist $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$ für alle $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Deshalb gilt

$$\det\left[\, x_{\bullet\tau(1)}, \dots, x_{\bullet\tau(n)} \,\right] = -\det\left[\, x_{\bullet 1}, \dots, x_{\bullet n} \,\right].$$

Beim Vertauschen zweier Spalten der Matrix X wird die Determinante mit -1 multipliziert.

(B) Sei jetzt $x'_{\bullet i} \in R^{n\times 1}$ eine n-Spalte, und seien $a, b \in R$. Sofort rechnet man dann nach, dass die folgende Gleichheit gilt:

$$\det [\, x_{\bullet 1}, \ldots, x_{\bullet i-1}, ax_{\bullet i} + bx'_{\bullet i}, x_{\bullet i+1}, \ldots, x_{\bullet n}\,] = \\ a \det [\, x_{\bullet 1}, \ldots, x_{\bullet i}, \ldots, x_{\bullet n}\,] + b \det [\, x_{\bullet 1}, \ldots, x'_{\bullet i}, \ldots, x_{\bullet n}\,]\,.$$

Die Bildung der Determinante ist linear in jeder Spalte.

(C) Sei $f : R \to R'$ ein Homomorphismus von Ringen. Ist $X = [\, x_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\,] \in R^{n\times n}$, so schreiben wir

$$f(X) := \big[\, f(x_{ij}) \,\big|\, 1 \le i, j \le n \,\big] \in R'^{n\times n}.$$

Sofort sieht man dann, dass

$$\det\big(f(X)\big) = f\big(\det(X)\big).$$

3.22 Definition. Sei R ein Ring, und sei M ein R-Modul. Auf dem R-Modul $R \oplus M$ führen wir dann eine Multiplikation ein durch die Vorschrift

$$(x, m) \cdot (y, n) := (xy, xn + ym),$$

wo $x, y \in R$ und $m, n \in M$. Auf diese Weise wird — wie man leicht nachprüft — $R \oplus M$ zum Ring mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$. Durch $x \mapsto (x, 0)$ wird zudem ein injektiver Homomorphismus $f : R \to R \oplus M$ von Ringen definiert. Dank der durch $m \mapsto (0, m)$ definierten kanonischen Einbettung $\imath : M \hookrightarrow R \oplus M$ können wir M als Ideal in diesem Ring betrachten. Der auf diese Weise zum Ring gemachte R-Modul

$$R \oplus M$$

heisst deshalb die ***Idealisierung*** von M.

3.23 Bemerkungen. (A) Seien R ein Ring, M ein R-Modul und $R' := R \oplus M$ die Idealisierung von M. Seien $N \subseteq M$ ein R-Untermodul und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Leicht prüft man nach:

(a) $N \subseteq R'$ ist ein Ideal von R'.

(b) $\mathfrak{a}R' = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}M \subseteq R'$.

(c) $(\mathfrak{a}R')^n = \mathfrak{a}^n R' = \mathfrak{a}^n \oplus \mathfrak{a}^n M \subseteq R'$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) $(\mathfrak{a}R')^n N = \mathfrak{a}^n N \subseteq R'$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(B) Leicht sieht man:

(a) Ist $\mathcal{M} \subseteq M$ eine Teilmenge mit $M = (\mathcal{M})$, so gilt $R' = R[\mathcal{M}]$.

Insbesondere kann man auch sagen:

(b) Sind $m_1, \ldots, m_r \in M$ mit $M = (m_1, \ldots, m_r)$, so gilt $R' = R[m_1, \ldots, m_r]$.

Unter Beachtung des Hilbertschen Basissatzes 1.21 folgt daraus sofort:

(c) Sind R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul, so ist die Idealisierung $R \oplus M$ von M ein noetherscher Ring.

§ Der Satz von Kramer

3.24 Kramerscher Satz. Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul, und sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $X = [\, x_{ij} \mid 1 \le i, j \le n \,] \in R^{n\times n}$ und $m_1, \dots, m_n \in M$ so, dass

$$X \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt dann:

$$\det(X) \cdot m_i = 0.$$

Beweis. Sei $R' := R \oplus M$ die Idealisierung von M, $f : R \to R'$ der durch $x \mapsto (x, 0)$ definierte Homomorphismus, $\imath : M \hookrightarrow R'$ die durch $m \mapsto (0, m)$ definierte kanonische Einbettung. Mit der in (3.21)(C) eingeführten Schreibweise gilt dann

$$f(X) \cdot \begin{bmatrix} \imath(m_1) \\ \vdots \\ \imath(m_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{R'} \\ \vdots \\ 0_{R'} \end{bmatrix}.$$

Nach (3.21)(C) ist $\det\big(f(X)\big)\imath(m_i) = f\big(\det(X)\big)\imath(m_i) = \imath\big(\det(X)m_i\big)$. Weil $\imath$ ein injektiver Homomorphismus von R-Moduln ist, genügt es zu zeigen, dass $\det\big(f(X)\big)\imath(m_i) = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Deshalb können wir $X \in R^{n\times n}$ und $m_i \in M$ jeweils ersetzen durch $f(X) \in R'^{n\times n}$ und $\imath(m_i) \in R'$, also annehmen, es sei $M = R$. Nach Voraussetzung ist $\sum_{j=1}^{n} m_j x_{\bullet j} = \underline{0} \in R^{n\times 1}$, also $m_i x_{\bullet i} = -\sum_{j\ne i} m_j x_{\bullet j}$ für $i = 1, \dots, n$, wo $x_{\bullet j}$ wie in (3.20)(D) definiert ist. Nach (3.21)(B) folgt so

$$\begin{aligned} \det(X)m_i &= m_i \det[\, x_{\bullet 1}, \dots, x_{\bullet n} \,] \\ &= \det[\, x_{\bullet 1}, \dots, x_{\bullet i-1}, m_i x_{\bullet i}, x_{\bullet i+1}, \dots, x_{\bullet n} \,] \\ &= \det\Big[\, x_{\bullet 1}, \dots, x_{\bullet i-1}, -\sum\nolimits_{j\ne i} m_j x_{\bullet j}, x_{\bullet i+1}, \dots, x_{\bullet n} \,\Big] \\ &= -\sum\nolimits_{j\ne i} m_j \det[\, x_{\bullet 1}, \dots, x_{\bullet i-1}, x_{\bullet j}, x_{\bullet i+1}, \dots, x_{\bullet n} \,]. \end{aligned}$$

Für $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ ist $[\, x_{\bullet 1}, \dots, x_{\bullet i-1}, \dots, x_{\bullet j}, \dots, x_{\bullet i+1}, \dots, x_{\bullet n} \,]$ eine Matrix mit zwei gleichen Spalten, nach (3.21)(A) also mit verschwindender Determinante. Deshalb ist in der Tat $\det(X)m_i = 0$. ■

§ Das Lemma von Nakayama

3.25 Lemma. Sei R ein Ring, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul so, dass $\mathfrak{a}M = M$. Dann gibt es ein Element $x \in \mathfrak{a}$ mit $(1 + x)M = 0$.

Beweis. Wir schreiben $M = \sum_{i=1}^n Rm_i$ mit $m_1, \dots, m_n \in M$. Dann ist

$$m_i \in \mathfrak{a}M = \left\{ \sum_{j=1}^n y_j m_j \;\middle|\; y_j \in \mathfrak{a};\ j = 1, \dots, n \right\}.$$

Mit geeigneten Elementen $x_{ij} \in \mathfrak{a}$ können wir also schreiben $m_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} m_j$ und erhalten so das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - x_{ij}) m_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

wo δ_{ij} für das Kronecker-Symbol steht. Sind $I_n := [\,\delta_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\,] \in R^{n \times n}$ die Einheitsmatrix und $Y := [\,-x_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\,] \in \mathfrak{a}^{n \times n}$, so können wir schreiben

$$(I_n + Y) \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nach (3.24) folgt $\det(I_n + Y) m_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$, also $\det(I_n + Y)M = 0$. Wegen $Y \in \mathfrak{a}^{n \times n}$ finden wir ein $x \in \mathfrak{a}$ mit $\det(I_n + Y) = 1 + x$. Dies zeigt alles. ■

3.26 Satz: Lemma von Nakayama. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul so, dass $\mathfrak{m}M = M$. Dann ist $M = 0$.

Beweis. Nach (3.25) gibt es ein $x \in \mathfrak{m}$ mit $(1 + x)M = 0$. Wegen $1 + x \notin \mathfrak{m}$ ist $(1 + x) = R$, vgl. (2.43)(b). Also finden wir ein $y \in R$ mit $y(1 + x) = 1$. Es folgt $M = 1M = y(1 + x)M = y0 = 0$. ■

3.27 Korollar. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, sei M ein endlich erzeugter R-Modul, und sei $N \subseteq M$ ein Untermodul so, dass $\mathfrak{m}M + N = M$. Dann ist $M = N$.

Beweis. Weil M endlich erzeugt ist, ist es auch M/N. Aus $\mathfrak{m}M + N = M$ folgt $\mathfrak{m}(M/N) = M/N$. Nach (3.26) ist also $M/N = 0$, d.h. $M = N$. ■

§ Das Krullsche Hauptideallemma

3.28 Satz: Krullsches Hauptideallemma. Sei R ein noetherscher Ring, sei $x \in R$ so, dass $(x) \neq R$, und sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal von (x). Dann gilt $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \le 1$.

Beweis. Wir nehmen an, es sei $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) > 1$. Dann gibt es Primideale $\mathfrak{s}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $\mathfrak{s} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. Nach (3.10) und (3.17) ist dann $(R_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$ ein lokaler noetherscher Ring. Weiter ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal des Hauptideals $\left(\frac{x}{1}\right) = xR_\mathfrak{p}$, vgl. (3.12)(D), und es besteht die Primidealkette $\mathfrak{s}R_\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$, vgl. (3.12)(C). So können wir R durch den lokalen Ring $(R_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$ ersetzen, also annehmen, $(R, \mathfrak{m})$ sei noethersch und lokal, $\mathfrak{m}$ sei das minimale Primoberideal eines Hauptideals (x) von R, und es bestehe eine Primidealkette $\mathfrak{s} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$ in R

Nun betrachten wir die Restklassenabbildung $f : R \to R/\mathfrak{s} =: \overline{R}$. Gemäss (2.48) ist $(\overline{R}, \mathfrak{m}\overline{R})$ ein lokaler Ring und $0 = \mathfrak{s}\overline{R} \subsetneq \mathfrak{q}\overline{R} \subsetneq \mathfrak{m}\overline{R}$ in diesem eine Primidealkette. Wegen $\mathfrak{m} \in \min\big((x) + \mathfrak{s}\big)$ ist $\mathfrak{m}\overline{R}$ nach (2.48) und (2.16)(B) ein minimales Primoberideal von $x\overline{R}$. Zudem ist $\overline{R}$ nach (1.17) noethersch. Wir können also R durch $\overline{R}$ ersetzen, also annehmen, $(R, \mathfrak{m})$ sei ein noetherscher lokaler Integritätsbereich, $\mathfrak{m}$ sei ein minimales Primoberideal eines Hauptideals (x) von R, und es gebe ein $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ mit $0 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$.

Weil $\mathfrak{m}$ das einzige Maximalideal von R ist, gilt $\max\big((x)\big) = \{\mathfrak{m}\}$. Ist $\mathfrak{v} \in \mathrm{Var}\big((x)\big)$, so gilt also $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{m}$. Wegen $\mathfrak{m} \in \min\big((x)\big)$ folgt $\mathrm{Var}\big((x)\big) = \{\mathfrak{m}\}$. Nach (2.48) — angewandt auf den Restklassenhomomorphismus $R \to R/(x)$ — folgt $\mathrm{Spec}\big(R/(x)\big) = \big\{\mathfrak{m}/(x)\big\}$. Damit ist $\dim\big(R/(x)\big) = 0$. Nach (3.5) folgt so, dass $R/(x)$ ein Ring von endlicher Länge ist.

Jetzt betrachten wir die Lokalisierung $R_\mathfrak{q}$ und die zugehörige kanonische Abbildung $\eta_\mathfrak{q} : R \to R_\mathfrak{q}$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir $\mathfrak{q}^{(n)} := \mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q} \cap R = \eta_\mathfrak{q}^{-1}(\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q})$, die sogenannte n-te symbolische Potenz von $\mathfrak{q}$. Gemäss (3.9)(C) ist $\mathfrak{q}^{(n)} = \{x \in R \mid \exists\, s \in R \smallsetminus \mathfrak{q} : sx \in \mathfrak{q}^n\}$. Weil immer gilt $\mathfrak{q}^{(n+1)} \subseteq \mathfrak{q}^{(n)}$, ist $\big(\mathfrak{q}^{(n)}\big(R/(x)\big)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Kette von Idealen in $R/(x)$. Wegen $\mathrm{l}\big(R/(x)\big) < \infty$ gibt es demnach ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{q}^{(n+1)}\big(R/(x)\big) = \mathfrak{q}^{(n)}\big(R/(x)\big)$, also mit $\mathfrak{q}^{(n+1)} + (x) = \mathfrak{q}^{(n)} + (x)$, also mit $\mathfrak{q}^{(n)} \subseteq \mathfrak{q}^{(n+1)} + xR$.

Ist $y \in \mathfrak{q}^{(n)}$, so können wir schreiben $y = a + xb$ mit $a \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$ und $b \in R$. Wegen $\mathfrak{q}^{(n+1)} \subseteq \mathfrak{q}^{(n)}$ ist dann $xb \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Wir finden also ein $s \in R \smallsetminus \mathfrak{q}$ mit $sxb \in \mathfrak{q}^n$. Wegen $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m} \in \min\big((x)\big)$ ist $x \notin \mathfrak{q}$, also $sx \notin \mathfrak{q}$. Somit ist $b \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathfrak{q}^{(n)} \subseteq \mathfrak{q}^{(n+1)} + x\mathfrak{q}^{(n)}$. Wegen $x \in \mathfrak{m}$ folgt $\mathfrak{q}^{(n)} \subseteq \mathfrak{q}^{(n+1)} + \mathfrak{m}\mathfrak{q}^{(n)}$, wegen $\mathfrak{q}^{(n+1)} \subseteq \mathfrak{q}^{(n)}$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{q}^{(n)} \subseteq \mathfrak{q}^{(n)}$ also schliesslich $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)} + \mathfrak{m}\mathfrak{q}^{(n)}$. Weil R noethersch ist, ist $\mathfrak{q}^{(n)}$ endlich erzeugt. Nach (3.27) folgt also $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}$. Gemäss (3.9)(B) gilt aber $\mathfrak{q}^k R_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{(k)} R_\mathfrak{q}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und wir erhalten $\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{n+1} R_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}R_\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q}$.

Nach (3.26), angewandt auf den noetherschen lokalen Ring $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ und den endlich erzeugten $R_\mathfrak{q}$-Modul $\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q}$, gilt $\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q} = 0$, d.h. $\mathfrak{q}^{(n)} = \eta_\mathfrak{q}^{-1}(0) = \{x \in R \mid \exists\, s \in R \smallsetminus \mathfrak{q} : sx = 0\}$. Da R ein Integritätsbereich ist, erhalten wir $\mathfrak{q}^{(n)} = 0$, wegen $\mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{q}^{(n)}$ also $\mathfrak{q}^n = 0$. Sei $z \in \mathfrak{q}$. Dann folgt $z^n = 0$. Weil R ein Integritätsbereich ist, gilt also $z = 0$. So erhalten wir den Widerspruch $\mathfrak{q} = 0$. ■

§ Der Krullsche Höhensatz

3.29 Lemma. Sei R ein noetherscher Ring, sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, sei $l \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \geq l$, und sei $x \in \mathfrak{p}$. Dann gibt es eine Primidealkette $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^{l-1}$ der Länge $l-1$ unterhalb $\mathfrak{p}$ mit $x \in \mathfrak{p}_0$.

Beweis. (Induktion nach l). Ist $l = 1$, so setze man $\mathfrak{p}_0 := \mathfrak{p}$. Sei also $l > 1$. Nach Voraussetzung gibt es dann eine Primidealkette $(\mathfrak{q}_i)_{i=0}^{l}$ unterhalb $\mathfrak{p}$.

Ist $x \in \mathfrak{q}_{l-1}$, so erlaubt die offenbar richtige Ungleichung $\mathrm{h}(\mathfrak{q}_{l-1}) \geq l-1$ nach Induktion eine Primidealkette $(\mathfrak{p}'_i)_{i=0}^{l-2}$ unterhalb $\mathfrak{q}_{l-1}$ so zu finden, dass $x \in \mathfrak{p}'_0$. Setzen wir $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{p}'_i$ für $i = 0, \ldots, l-2$ und $\mathfrak{p}_{l-1} := \mathfrak{q}_l$, so sind wir fertig.

Sei also $x \notin \mathfrak{q}_{l-1}$. Wegen $(x)+\mathfrak{q}_{l-2} \subseteq \mathfrak{p}$ gibt es nach (2.27)(a) ein minimales Primoberideal $\mathfrak{q}$ von $(x)+\mathfrak{q}_{l-2}$ mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Wegen $x \notin \mathfrak{q}_{l-1}$ ist erst recht $x \notin \mathfrak{q}_{l-2}$. Deshalb ist $\mathfrak{q}_{l-2} \subsetneq \mathfrak{q}$. Weil $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-2} \subsetneq \mathfrak{q}$ eine unterhalb $\mathfrak{q}$ liegende Primidealkette ist, gilt $\mathrm{h}(\mathfrak{q}) \geq l-1$. Nach Induktion finden wir also eine unterhalb $\mathfrak{q}$ liegende Primidealkette $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^{l-2}$ mit $x \in \mathfrak{p}_0$. Im Restklassenring $R/\mathfrak{q}_{l-2}$ ist $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_{l-2}$ nach (2.48) und (2.16)(B) ein minimales Primoberideal des Hauptideals $xR/\mathfrak{q}_{l-2}$. Nach (1.17) und (3.28) folgt also $\mathrm{h}(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_{l-2}) \leq 1$. Es gibt gemäss (2.48) also kein Primideal $\mathfrak{s}$ von R mit $\mathfrak{q}_{l-2} \subsetneq \mathfrak{s} \subsetneq \mathfrak{q}$. Andrerseits gilt $\mathfrak{q}_{l-2} \subsetneq \mathfrak{q}_{l-1} \subsetneq \mathfrak{q}_l \subseteq \mathfrak{p}$. So sehen wir, dass $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. Setzen wir $\mathfrak{p}_{l-1} := \mathfrak{p}$, so sind wir fertig. ■

3.30 Lemma. Sei R ein noetherscher Ring, sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, sei $l \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \geq l$, und sei $x \in \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{p}/(x)$ ein Primideal von $R/(x)$, und es gilt $\mathrm{h}\big(\mathfrak{p}/(x)\big) \geq l-1$.

Beweis. Man wende (2.48) auf den Restklassenhomomorphismus $R \to R/(x)$ an und beachte (3.29). ■

3.31 Satz: Krullscher Höhensatz. Sei R ein noetherscher Ring, seien $x_1, \ldots, x_r \in R$, und sei $\mathfrak{p} \in \min\big((x_1, \ldots, x_r)\big)$. Dann ist $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \leq r$.

Beweis. (Induktion nach r). Der Fall mit $r = 0$ ist klar. Sei also $r \geq 1$. Nehmen wir an, es sei $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \geq r+1$. Nach (3.30) ist dann im Ring $R/(x_1)$ die Ungleichung $\mathrm{h}\big(\mathfrak{p}/(x_1)\big) \geq r$ richtig. Nach (2.48) und (2.16)(B) ist $\mathfrak{p}/(x_1) \subseteq R/(x_1)$ ein minimales Primoberideal von $(x_1, \ldots, x_r)/(x_1)$. Dabei ist das letztgenannte Ideal durch die $r-1$ Restklassen der Elemente $x_2, \ldots, x_r$ erzeugt. Nach Induktion ergibt sich so $\mathrm{h}\big(\mathfrak{p}/(x_1)\big) \leq r-1$, also ein Widerspruch. ■

3.32 Korollar. In einem noetherschen Ring R ist jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von endlicher Höhe.

Beweis. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R ist endlich erzeugt und minimales Primoberideal von sich selbst. ■

§ Verhalten der Höhe bei der Restklassenabbildung nach Hauptidealen

3.33 Satz. Sei R ein noetherscher Ring, sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, und sei $x \in \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{p}/(x)$ ein Primideal von $R/(x)$, und es gilt

$$\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \geq \mathrm{h}\big(\mathfrak{p}/(x)\big) \geq \mathrm{h}(\mathfrak{p}) - 1.$$

Liegt x in keinem minimalen Primideal von R, so gilt sogar

$$\mathrm{h}\big(\mathfrak{p}/(x)\big) = \mathrm{h}(\mathfrak{p}) - 1.$$

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt direkt aus (3.32) und (3.30). Nehmen wir also an, x liege in keinem minimalen Primideal von R, und schreiben wir $\mathrm{h}\big(\mathfrak{p}/(x)\big) = s$. In $R/(x)$ gibt es dann unterhalb $\mathfrak{p}/(x)$ eine Primidealkette $(\mathfrak{q}_i)_{i=1}^{s+1}$ der Länge s. Sei $\mathfrak{p}_i$ das Urbild von $\mathfrak{q}_i$ unter der Restklassenabbildung $R \to R/(x)$. Nach (2.48) ist dann $(\mathfrak{p}_i)_{i=1}^{s+1}$ eine Primidealkette unterhalb $\mathfrak{p}$, wobei $x \in \mathfrak{p}_1$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{p}_1$ kein minimales Primideal in R. Nach (2.27)(a) enthält $\mathfrak{p}_1$ ein minimales Primideal $\mathfrak{p}_0$ von R; also ist $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^{s+1}$ eine Primidealkette unterhalb $\mathfrak{p}$ und es folgt $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \geq s+1$, also $\mathrm{h}\big(\mathfrak{p}/(x)\big) = s \leq \mathrm{h}(\mathfrak{p}) - 1$. ■

§ Primideale der Höhe h als minimale Primoberideale h-erzeugter Ideale

3.34 Satz. Sei R ein noetherscher Ring, und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ mit $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) = h$. Dann gibt es h Elemente $x_1, \dots, x_h \in \mathfrak{p}$ so, dass $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal von $(x_1, \dots, x_h)$ ist.

Beweis. (Induktion nach h). Für $h = 0$ ist alles klar. Sei also $h > 0$. Nach (3.7) liegt $\mathfrak{p}$ in keinem der (endlich vielen, vgl. (2.41)) minimalen Primideale von R. Nach (2.5) gibt es also ein $x_h \in \mathfrak{p}$, das diese minimalen Primideale vermeidet. Nach (3.33) ist $\mathrm{h}\big(\mathfrak{p}/(x_h)\big) = h-1$. Nach Induktion gibt es also Elemente $x'_1, \dots, x'_{h-1} \in \mathfrak{p}/(x_h)$ so, dass $\mathfrak{p}/(x_h) \in \min\big((x'_1, \dots, x'_{h-1})\big)$. Für $i = 1, \dots, h-1$ sei $x_i \in \mathfrak{p}$ mit $x_i + (x_h) = x'_i$. Nach (2.48) ist demzufolge $\mathfrak{p} \in \min\big((x_1, \dots, x_{h-1}) + (x_h)\big) = \min(x_1, \dots, x_h)$. ■

3.35 Korollar. Sei R ein noetherscher Ring, und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Dann gilt:

$$\mathrm{h}(\mathfrak{p}) = \min\Big\{h \in \mathbb{N}_0 \;\Big|\; \exists\, x_1, \dots, x_h \in \mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in \min\big((x_1, \dots, x_h)\big)\Big\}.$$

Beweis. Die Ungleichung "$\geq$" folgt aus (3.34). Die Ungleichung "$\leq$" folgt aus (3.31). ■

§ Parametersysteme

3.36 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann gilt:

$$\dim(R) = \min\Big\{d \in \mathbb{N}_0 \;\Big|\; \exists\, x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{m} : \sqrt{(x_1, \dots, x_d)} = \mathfrak{m}\Big\}.$$

Beweis. Für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ gilt die Äquivalenz $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow \mathfrak{m} \in \min(\mathfrak{a})$, wie man sofort mit Hilfe von (2.30) sieht. Wegen $\dim(R) = \mathrm{h}(\mathfrak{m})$, vgl. (3.16), folgt nun die Behauptung aus (3.35). ■

3.37 Definition. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring der Dimension $d > 0$. Eine Folge $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ heisst ein ***Parametersystem*** von R, wenn gilt

$$\mathfrak{m} = \sqrt{(x_1, \ldots, x_d)}.$$

3.38 Satz. Jeder lokale noethersche Ring $(R, \mathfrak{m})$ von positiver Dimension besitzt ein Parametersystem.

Beweis. Klar aus (3.36). ■

3.39 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring der Dimension $d > 0$, und seien $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$. Seien weiter $\sigma \in \mathbb{S}_d$ eine Permutation der Zahlen $\{1, \ldots, d\}$, $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \ldots, d\}$ und $\bar{\cdot} : R \to R/(x_1, \ldots, x_i)$ die Restklassenabbildung. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathfrak{m} \in \min\big((x_1, \ldots, x_d)\big)$.

(ii) $\dim\big(R/(x_1, \ldots, x_d)\big) = 0$.

(iii) $x_1, \ldots, x_d$ ist ein Parametersystem von R.

(iv) $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)}$ ist ein Parametersystem von R.

(v) $x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}$ ist ein Parametersystem von R.

(vi) $\overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{x_d}$ ist ein Parametersystem von $R/(x_1, \ldots, x_i)$.

Beweis. "(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)" Klar aus der Definition (3.37), aus (3.16) und aus (2.48) (angewandt mit der Restklassenabbildung $f : R \to R/(x_1, \ldots, x_d)$ und $\mathfrak{a} = 0$).

"(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v)" Klar aus der Definition (3.37).

"(i) $\Rightarrow$ (vi)" Wenden wir (2.48) an mit $f = \bar{\cdot} : R \to \overline{R} := R/(x_1, \ldots, x_i)$ und $\mathfrak{a} = (x_{i+1}, \ldots, x_d)$, so erhalten wir eine Bijektion

$$\min\big((x_1, \ldots, x_d)\big) = \min\big(\mathrm{Ker}(\bar{\cdot}) + \mathfrak{a}\big) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \min\big((\overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{x_d})\big),$$

welche $\mathfrak{m}$ in $\overline{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/(x_1, \ldots, x_i) = \mathfrak{m}\overline{R}$ überführt. Aus Aussage (i) folgt also sofort, dass $\overline{\mathfrak{m}} \in \min\big((\overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{x_d})\big)$. Wenden wir nun (3.36) auf den lokalen Ring $(\overline{R}, \overline{\mathfrak{m}})$ an, so folgt $\dim(\overline{R}) \le d - i$. Umgekehrt folgt aus (3.33) durch Induktion über i sofort, dass

$$\dim(\overline{R}) = \mathrm{h}\big(\mathfrak{m}/(x_1, \ldots, x_i)\big) \ge \mathrm{h}(\mathfrak{m}) - i = \dim(R) - i = d - i.$$

Es gilt also $\dim(\overline{R}) = d - i$. Wenden wir die schon bewiesene Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iii) auf den Ring $\overline{R}$ und die Folge $\overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{x_d}$ an, so sehen wir, dass $\overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{x_d}$ ein Parametersystem von $\overline{R}$ ist.

"(vi) $\Rightarrow$ (i)" Ist $\overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{x_d}$ ein Parametersystem von $R/(x_1, \ldots, x_i)$, so gilt wegen der Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iii) auch $\overline{\mathfrak{m}} \in \min\big((\overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{x_d})\big)$, und die obige Bijektion liefert, dass $\mathfrak{m} \in \min\big((x_1, \ldots, x_d)\big)$, also die Aussage (i). ■

Kapitel 4

Assoziierte Primideale

§ Ideal- und Modulquotienten

4.1 Festsetzung. Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul, sei $N \subseteq M$ ein Untermodul, und sei $T \subseteq M$ eine Menge. Den ***Quotienten von*** N ***durch*** T ***in*** R definieren wir dann als die Menge

$$N \underset{R}{:} T = N : T := \Big\{ x \in R \;\Big|\; xt \in N, \forall\, t \in T \Big\}.$$

Sofort sieht man, dass $N :_R T$ immer ein Ideal von R ist. Besonders wichtig ist für uns das Ideal

$$0 \underset{R}{:} T = \Big\{ x \in R \;\Big|\; xt = 0, \forall\, t \in T \Big\},$$

das wir den ***Annullator*** von T in R nennen. Ist $t \in M$, so schreiben wir $N :_R t$ für $N :_R \{t\}$.

4.2 Bemerkung. Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul, sei $N \subseteq M$ ein Untermodul, und sei $T \subseteq M$ eine Menge. Sofort prüft man nach:

(a) $N :_R T = R \;\Leftrightarrow\; T \subseteq N$.

(b) $T \subseteq T' \;\Rightarrow\; N :_R T \supseteq N :_R T'$.

(c) $N :_R T = N :_R (T)$.

(d) Ist $(T_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen aus M, so gilt offenbar:

$$N \underset{R}{:} \bigcup_{i \in I} T_i = \bigcap_{i \in I} \Big(N \underset{R}{:} T_i \Big).$$

(e) Ist $(N_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln von M, so gilt:

$$\left(\bigcap_{i \in I} N_i \right) \underset{R}{:} T = \bigcap_{i \in I} \Big(N_i \underset{R}{:} T \Big).$$

(f) Ist N' ein weiterer Untermodul von M, so gilt insbesondere:

$$N' \subseteq N \;\Rightarrow\; N' \underset{R}{:} T \subseteq N \underset{R}{:} T.$$

(g) Der Quotient $N :_R T$ kann als Annullator der Restklassenmenge

$$T + N = \{t + N \mid t \in T\} \subseteq M/N$$

geschrieben werden.

§ Der Begriff des assoziierten Primideals

4.3 Definition. Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul, und sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Wir sagen, $\mathfrak{p}$ sei ein ***zu*** M ***assoziiertes Primideal***, wenn es ein $t \in M$ so gibt, dass $0 :_R t = \mathfrak{p}$. (Nach (4.2)(a) ist dann $t \neq 0$). Die Menge der zu M assoziierten Primideale bezeichnen wir mit $\operatorname{Ass}_R(M)$ oder mit $\operatorname{Ass}(M)$, also

$$\operatorname{Ass}_R(M) = \operatorname{Ass}(M) := \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \;\middle|\; \exists\, t \in M : 0 \underset{R}{:} t = \mathfrak{p} \right\}.$$

Insbesondere ist $\operatorname{Ass}_R(0) = \varnothing$.

4.4 Beispiel. Sei $R = \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ und $M = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\operatorname{Ass}_R(M) = \operatorname{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) = \{ p\mathbb{Z} \mid p \in \mathbb{N} : p \text{ ist Primfaktor von } a \}.$$

§ Verhalten bei exakten Sequenzen

4.5 Lemma. Sei R ein Ring, M ein R-Modul, $t \in M$ so, dass $0 :_R t \in \operatorname{Spec}(R)$. Sei $T' \subseteq Rt$ mit $T' \nsubseteq 0$. Dann ist $0 :_R T' = 0 :_R t$.

Beweis. Nach (4.2)(c) ist $0 :_R t = 0 :_R Rt =: \mathfrak{p}$. Nach (4.2)(b) ist also $\mathfrak{p} \subseteq 0 :_R T'$. Nach Voraussetzung gibt es ein $t' \in T' \smallsetminus 0$. Wegen $0 :_R T' \subseteq 0 :_R t'$, vgl. (4.2)(b), genügt es zu zeigen, dass $0 :_R t' \subseteq \mathfrak{p}$. Wegen $t' \in T' \subseteq Rt$ finden wir ein $y \in R$ mit $t' = yt$. Wegen $t' \neq 0$ ist $y \notin \mathfrak{p}$. Sei jetzt $x \in 0 :_R t'$. Dann ist $xyt = xt' = 0$. Also ist $xy \in 0 :_R t = \mathfrak{p}$. Wegen $y \notin \mathfrak{p}$ folgt $x \in \mathfrak{p}$. ■

4.6 Satz. Sei R ein Ring, und sei weiter $0 \to N \xrightarrow{h} M \xrightarrow{l} P \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt:

$$\operatorname{Ass}_R(N) \subseteq \operatorname{Ass}_R(M) \subseteq \operatorname{Ass}_R(N) \cup \operatorname{Ass}_R(P).$$

Beweis. Sei zunächst $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(N)$. Für ein geeignetes Element $t' \in N$ gilt also $0 :_R t' = \mathfrak{p}$. Weil h ein injektiver Homomorphismus von R-Moduln ist, gilt für ein Element $x \in R$ genau dann $xh(t') = 0$, wenn $xt' = 0$. Also ist $0 :_R h(t') = 0 :_R t' = \mathfrak{p}$. Dies zeigt, wegen $h(t') \in M$, dass $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$.

Sei jetzt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$. Mit einem geeigneten Element $t \in M$ gilt dann $0 :_R t = \mathfrak{p}$. Sei zunächst $Rt \cap \operatorname{Ker}(l) \neq 0$. Wegen $\operatorname{Ker}(l) = \operatorname{Im}(h)$ finden wir also ein $t' \in N$ so, dass

$h(t') \in Rt \setminus 0$. Nach (4.5) ist dann $0:_R h(t') = \mathfrak{p}$. Wie oben sieht man nun, dass $0:_R t' = 0:_R h(t') = \mathfrak{p}$, mithin, dass $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(N)$. Sei schliesslich $Rt \cap \mathrm{Ker}(l) = 0$. Dann ist die Einschränkung $l|_{Rt} : Rt \to P$ ein injektiver Homomorphismus. Wegen $0:_R t = \mathfrak{p}$ und $t \in Rt$ ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(Rt)$. Wenden wir das zu Beginn für den injektiven Homomorphismus h Bewiesene auf $l|_{Rt}$ an, so folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(P)$. ■

4.7 Korollar. Sei R ein Ring. Dann gilt:

(a) Ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R ist assoziiert zu einem R-Modul M, wenn es zu irgendeinem Untermodul N von M assoziiert ist.

(b) Isomorphe R-Moduln haben die gleichen assoziierten Primideale. ■

4.8 Korollar. Sei R ein Ring, sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, und sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$.

(ii) Es besteht ein injektiver Homomorphismus von R-Moduln $h : R/\mathfrak{p} \to M$.

Beweis. “(i) $\Rightarrow$ (ii)” Ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$, so gibt es ein $t \in M$ mit $0:_R t = \mathfrak{p}$. Der durch $x \mapsto xt$ definierte Homomorphismus $l : R \to M$ hat dann den Kern $\mathfrak{p}$. Durch $x+\mathfrak{p} \mapsto l(x) = xt$ wird so ein injektiver Homomorphismus $h : R/\mathfrak{p} \to M$ definiert.

“(ii) $\Rightarrow$ (i)” Sei $\overline{1} \in R/\mathfrak{p}$ die Restklasse des Einselements aus R. Dann ist $0:_R \overline{1} = \mathfrak{p}$, also ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p})$. Der injektive Homomorphismus $h : R/\mathfrak{p} \to M$ führt zu einem Isomorphismus $R/\mathfrak{p} \cong \mathrm{Im}(h)$, und $\mathrm{Im}(h)$ ist ein Untermodul von M. Mit (4.7) folgt, dass $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. ■

§ Endlichkeit im noetherschen Fall

4.9 Lemma. Sei R ein Ring, sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, sei M ein R-Modul, und sei $t \in M$ so, dass $0:_R t = \mathfrak{p}$. Ist $N \neq 0$ ein Untermodul von Rt, so gilt $\mathrm{Ass}_R(N) = \{\mathfrak{p}\}$.

Beweis. Nach (4.5) gilt für alle $t' \in N \setminus 0$ die Gleichheit $0:_R t' = \mathfrak{p}$. ■

4.10 Satz. Sei R ein Ring, und sei M ein noetherscher R-Modul. Dann ist die Menge $\mathrm{Ass}_R(M)$ endlich.

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann ist $\mathrm{Ass}_R(M)$ eine unendliche Menge. Sei $\mathbb{M}$ die Menge aller Untermoduln N von M, für welche die Menge $\mathrm{Ass}_R(M/N)$ unendlich ist. Wegen $M/0 \cong M$ ist $\mathrm{Ass}_R(M/0) = \mathrm{Ass}_R(M)$, vgl. (4.7)(b), also $0 \in \mathbb{M}$, d.h. $\mathbb{M} \neq \varnothing$. Weil

M noethersch ist, besitzt $\mathbb{M}$ ein bezüglich der Inklusion maximales Mitglied Q. Wir setzen $\overline{M} := M/Q$. Dann ist $\operatorname{Ass}_R(\overline{M})$ nach Definition eine unendliche Menge.

Wir wählen ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(\overline{M})$. Es gibt dann ein $\bar{t} \in \overline{M} \smallsetminus 0$ so, dass $\mathfrak{p} = 0 :_R \bar{t}$. Nach (4.9) ist $\operatorname{Ass}_R(R\bar{t}) = \{\mathfrak{p}\}$.

Sei $p : M \to \overline{M}$ die Restklassenabbildung. Wir finden dann ein $t \in M$ mit $p(t) = \bar{t}$. Wegen $\bar{t} \neq 0$ ist $t \notin \operatorname{Ker}(p) = Q$, also $Q \subsetneq Q + Rt$. Wegen der Maximalität von Q in $\mathbb{M}$ folgt $Q + Rt \notin \mathbb{M}$. Also ist $\operatorname{Ass}_R\big(M/(Q + Rt)\big)$ eine endliche Menge.

Die Zusammensetzung $M \to \overline{M}/R\bar{t}$ der beiden Restklassenabbildungen $p : M \to \overline{M}$ und $q : \overline{M} \to \overline{M}/R\bar{t}$ ist surjektiv und hat den Kern

$$p^{-1}\big(\operatorname{Ker}(q)\big) = p^{-1}(R\bar{t}) = p^{-1}\big(p(Rt)\big) = \operatorname{Ker}(p) + Rt = Q + Rt,$$

vgl. (1.4)(B). Deshalb besteht ein Isomorphismus $M/(Q + Rt) \cong \overline{M}/R\bar{t}$, und (4.7)(b) zeigt, dass die Menge $\operatorname{Ass}_R(\overline{M}/R\bar{t})$ endlich ist.

Andrerseits zeigt die kurze exakte Sequenz $0 \to R\bar{t} \hookrightarrow \overline{M} \xrightarrow{q} \overline{M}/R\bar{t} \to 0$ mit (4.6), dass

$$\operatorname{Ass}_R(\overline{M}) \subseteq \operatorname{Ass}_R(R\bar{t}) \cup \operatorname{Ass}_R(\overline{M}/R\bar{t}) = \{\mathfrak{p}\} \cup \operatorname{Ass}_R(\overline{M}/R\bar{t}).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Unendlichkeit von $\operatorname{Ass}_R(\overline{M})$. ■

§ Die Beziehung zu den Nullteilern

4.11 Definition. Sei R ein Ring, und sei M ein R-Modul. Ein Element $x \in R$ heisst ein ***Nullteiler*** bezüglich M, wenn es ein $t \in M \smallsetminus 0$ so gibt, dass $xt = 0$. Andernfalls heisst x ein ***Nichtnullteiler*** bezüglich M. Die Menge der Nullteiler bezüglich M bezeichnen wir mit $\operatorname{NT}_R(M)$ oder mit $\operatorname{NT}(M)$, die Menge der Nichtnullteiler mit $\operatorname{NNT}_R(M)$ oder mit $\operatorname{NNT}(M)$.

4.12 Festsetzung. Sei R ein Ring, $S \neq \varnothing$ eine bezüglich der Multiplikation abgeschlossene Menge in R und M ein R-Modul. Wir schreiben dann $\mathbb{J}_S(M)$ für die Menge aller zu S disjunkten Ideale von R, die sich als Annullator einer nicht-leeren endlichen Teilmenge von M schreiben lassen, also

$$\mathbb{J}_S(M) := \Big\{\mathfrak{a} \subseteq R \smallsetminus S \;\Big|\; \exists\, r \in \mathbb{N}\ \exists\, t_1, \ldots, t_r \in M : \mathfrak{a} = 0 \underset{R}{:} \{t_1, \ldots, t_r\}\Big\}.$$

4.13 Lemma. Sei R ein Ring, $S \neq \varnothing$ eine bezüglich der Multiplikation abgeschlossene Teilmenge von R, und sei M ein R-Modul. Dann sind die bezüglich der Inklusion maximalen Mitglieder von $\mathbb{J}_S$ — falls es solche überhaupt gibt — zu M assoziierte Primideale.

Beweis. Sei $\mathfrak{p}$ ein bezüglich der Inklusion maximales Mitglied von $\mathbb{J}_S(M)$. Dann ist $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, und wir finden für ein $r \in \mathbb{N}$ Elemente $t_1, \ldots, t_r \in M$ mit $\mathfrak{p} = 0 :_R \{t_1, \ldots, t_r\}$.

Wir wollen als erstes zeigen, dass es einen Index $i \in \{1, \ldots, r\}$ gibt so, dass $\mathfrak{p} = 0 :_R t_i$. Nehmen wir das Gegenteil an! Für jeden Index $i \in \{1, \ldots, r\}$ gilt dann $\mathfrak{p} \neq 0 :_R t_i$. Wegen $0 :_R t_i \supseteq 0 :_R \{t_1, \ldots, t_r\}$, vgl. (4.2)(b), ist also $\mathfrak{p} \subsetneq 0 :_R t_i$ für $i = 1, \ldots, r$. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{J}_S(M)$ folgt, dass $0 :_R t_i \notin \mathbb{J}_S(M)$ für alle i. Dies kann aber nur bedeuten, dass jeweils gilt $(0 :_R t_i) \cap S \neq \varnothing$. Zu jedem $i \in \{1, \ldots, r\}$ finden wir also ein Element

$s_i \in (0 :_R t_i) \cap S$. Wir setzen $s := s_1 \cdots s_r$. Dann ist offenbar $st_i = 0$ für $i = 1, \ldots, r$, also $s \in 0 :_R \{t_1, \ldots, t_r\} = \mathfrak{p}$. Weiter ist $s \in S$, denn S ist ja abgeschlossen unter der Multiplikation. Es folgt der Widerspruch $s \in \mathfrak{p} \cap S$. Also gibt es einen Index i mit $\mathfrak{p} = 0 :_R t_i$. Wir setzen $t := t_i$ und können schreiben $\mathfrak{p} = 0 :_R t$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Wegen $\mathfrak{p} \subseteq R \setminus S \subsetneq R$ ist $\mathfrak{p} \neq R$. Es bleibt also zu zeigen, dass $R \setminus \mathfrak{p}$ abgeschlossen ist unter der Multiplikation.

Seien also $x, y \in R$ mit $x \notin \mathfrak{p}$ und $xy \in \mathfrak{p}$. Es gibt also zu zeigen, dass $y \in \mathfrak{p}$. Wegen $xy \in \mathfrak{p}$ ist $xyt = 0$, also $x \in 0 :_R yt$. Wegen $0 :_R t \subseteq 0 :_R yt$ und $x \notin \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{p} \subsetneq 0 :_R yt$. Weil $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{J}_S(M)$ maximal ist, gilt $0 :_R yt \notin \mathbb{J}_S(M)$. Dies heisst, dass $(0 :_R yt) \cap S \neq \varnothing$, und wir finden ein $u \in (0 :_R yt) \cap S$. Wegen $uyt = 0$ ist $y \in 0 :_R ut$. Es bleibt einzusehen, dass $0 :_R ut \subseteq \mathfrak{p}$. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann ist $\mathfrak{p} \subsetneq 0 :_R ut$, also $0 :_R ut \notin \mathbb{J}_S(M)$, und wir finden ein $s \in (0 :_R ut) \cap S$. Es folgt $sut = 0$, also $su \in \mathfrak{p}$. Wegen $su \in S$ ergibt sich der Widerspruch $\mathfrak{p} \cap S \neq \varnothing$. ■

4.14 Satz. Sei R ein noetherscher Ring und M ein R-Modul. Dann gilt:

$$\mathrm{NT}_R(M) \quad = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}.$$

Beweis. "$\supseteq$" Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. Es gibt dann ein $t \in M \setminus 0$ mit $\mathfrak{p} = 0 :_R t$. Für alle $x \in \mathfrak{p}$ folgt so $xt = 0$, also $x \in \mathrm{NT}_R(M)$, d.h. $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{NT}_R(M)$.

"$\subseteq$" Sei $x \in \mathrm{NT}_R(M)$. Es gibt dann ein $t \in M \setminus 0$ so, dass $xt = 0$, also $x \in 0 :_R t =: \mathfrak{a}$. Wegen $t \neq 0$ ist $\mathfrak{a} \subsetneq R$. In der Schreibweise von (4.12) ist also $\mathfrak{a} \in \mathbb{J}_{\{1\}}(M)$. Sei $\mathbb{I} := \{\mathfrak{b} \in \mathbb{J}_{\{1\}}(M) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}\}$. Wegen $\mathfrak{a} \in \mathbb{I}$ ist $\mathbb{I} \neq \varnothing$. Weil R noethersch ist, hat $\mathbb{I}$ ein bezüglich der Inklusion maximales Mitglied. Dieses ist auch in $\mathbb{J}_{\{1\}}(M)$ maximal, nach (4.13) also ein zu M assoziiertes Primideal $\mathfrak{p}$. Es folgt $x \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. ■

4.15 Korollar. Sei R ein noetherscher Ring, und sei M ein R-Modul. Ist $M \neq 0$, so gilt $\mathrm{Ass}_R(M) \neq \varnothing$. ■

§ Minimale assoziierte Primideale und ihre Beziehung zum Annullator

4.16 Satz. Sei R ein noetherscher Ring, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann sind die bezüglich der Inklusion minimalen Mitglieder von $\mathrm{Ass}_R(M)$ gerade die minimalen Primoberideale des Annullators $0 :_R M$ von M.

Beweis. Sei zunächst $\mathfrak{q}$ ein beliebiges Primoberideal von $0 :_R M$. Wir zeigen, dass $\mathfrak{q}$ ein zu M assoziiertes Primideal $\mathfrak{p}$ enthält. Mit geeigneten Elementen $t_1, \ldots, t_r \in M$ ist $M = (t_1, \ldots, t_r)$. Gemäss (4.2)(c) folgt so $0 :_R M = 0 :_R \{t_1, \ldots, t_r\}$. Wegen $0 :_R M \subseteq \mathfrak{q}$ folgt daraus, dass die Menge $\mathbb{J}_{R\smallsetminus\mathfrak{q}}(M)$ nicht leer ist, da ja $0:_R M$ zu ihr gehört. Weil R noethersch ist, enthält diese Menge also ein bezüglich der Inklusion maximales Mitglied $\mathfrak{p}$. Nach (4.13) ist $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_R(M)$. Zudem gilt $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{q}$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Mitglied von $\mathrm{Ass}_R(M)$, so ist $\mathfrak{p}$ ein Primoberideal von $0:_R M$. Um dies zu sehen, schreiben wir $\mathfrak{p}=0:_R t$ mit einem geeigneten $t\in M$ und wenden (4.2)(b) an.

Die beiden Aussagen zusammen ergeben sofort die Behauptung. ∎

§ Primärmoduln

4.17 Definition. Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul. Ein echter Untermodul $N\subsetneq M$ heisst ein ***primärer Untermodul***, wenn für jedes $t\in M\smallsetminus N$ gilt

$$N \underset{R}{:} t \subseteq \sqrt{N \underset{R}{:} M}.$$

Ist $\mathfrak{q}\subsetneq R$ ein echtes Ideal so, dass es ein primärer Untermodul von R ist, so nennen wir $\mathfrak{q}$ ein ***primäres Ideal***.

4.18 Bemerkung. In den Bezeichnungen von (4.17) gilt immer $N:_R t\supseteq N:_R M$ für alle $t\in M\smallsetminus N$, vgl. (4.2)(b). Wir haben damit die Situation

$$N \underset{R}{:} M \subseteq N \underset{R}{:} t \subseteq \sqrt{N \underset{R}{:} M} \quad \text{für alle } t\in M\smallsetminus N.$$

Die Bedingung, ein primärer Untermodul zu sein, heisst also auch gerade, dass

$$\sqrt{N \underset{R}{:} t} = \sqrt{N \underset{R}{:} M} \quad \text{für alle } t\in M\smallsetminus N.$$

4.19 Satz. Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{q}\subsetneq R$ ein echtes Ideal. Dann sind äquivalent:

(i) Das Ideal $\mathfrak{q}$ ist primär.

(ii) Sind $a,b\in R$ mit $ab\in\mathfrak{q}$, so gilt $a\in\mathfrak{q}$ oder $b^n\in\mathfrak{q}$ für ein $n\in\mathbb{N}$.

Beweis. “(i) ⇒ (ii)” Seien $a,b\in R$ mit $ab\in\mathfrak{q}$. Ist $a\in\mathfrak{q}$, so sind wir fertig. Sei also $a\notin\mathfrak{q}$. Dann gilt $\mathfrak{q}:_R a\subseteq\sqrt{\mathfrak{q}:_R R}$. Weil $b\in\mathfrak{q}:_R a$, finden wir also ein $n\in\mathbb{N}$ so, dass $b^n\in\mathfrak{q}:_R R$. Insbesondere ist dann $b^n=b^n\cdot 1\in\mathfrak{q}$.

“(ii) ⇒ (i)” Sei $t\in R\smallsetminus\mathfrak{q}$, und sei $x\in\mathfrak{q}:_R t$. Wir haben also $xt\in\mathfrak{q}$. Weil $t\notin\mathfrak{q}$, gilt $x^n\in\mathfrak{q}$ für ein $n\in\mathbb{N}$. Also $x^nR\subseteq\mathfrak{q}$, d.h. $x^n\in\mathfrak{q}:_R R$, also $x\in\sqrt{\mathfrak{q}:_R R}$. Damit ist $\mathfrak{q}:_R t\subseteq\sqrt{\mathfrak{q}:_R R}$ für alle $t\in R\smallsetminus\mathfrak{q}$, also ist $\mathfrak{q}$ primär. ∎

4.20 Lemma. Sei R ein Ring, M ein R-Modul und N ein primärer Untermodul von M. Dann ist $\sqrt{N:_R M}$ ein Primideal in R, und es gilt:

$$\mathrm{NT}_R(M/N) = \sqrt{N \underset{R}{:} M}.$$

Beweis. Wegen $N \subsetneq M$ ist $N :_R M \subsetneq R$, vgl. (4.2)(a); also $\sqrt{N :_R M} \subsetneq R$, vgl. (2.31)(c). Seien $x, y \in R \smallsetminus \sqrt{N :_R M}$. Dann ist $xt \notin N$ und $yt \notin N$ für alle $t \in M \smallsetminus N$. Also ist auch $xyt \notin N$ für alle diese t. Durch Induktion folgt, dass $(xy)^n t \notin N$ für jedes $t \in M \smallsetminus N$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $(xy)^n \notin N :_R M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $xy \notin \sqrt{N :_R M}$. Dies zeigt, dass $\sqrt{N :_R M}$ ein Primideal ist.

Wir schreiben $\bar{\cdot}$ für das Bilden von Restklassen modulo N in M. Sei $x \in \mathrm{NT}_R(M/N)$. Es gibt dann ein $t \in M \smallsetminus N$ mit $x\bar{t} = 0$, also mit $xt \in N$. Weil N in M primär ist, folgt $x \in \sqrt{N :_R M}$.

Sei umgekehrt $z \in \sqrt{N :_R M}$. Es gibt dann ein $n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $z^n \in N :_R M$. Sei $t \in M \smallsetminus N$. Es gilt dann $z^n t \in N$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}_0$ minimal mit dieser Eigenschaft. Wegen $t \notin N$ ist dann $n > 0$, und es folgt, dass $w := z^{n-1}t \notin N$. In M/N ist also $\overline{w} \neq 0$, und wegen $z\overline{w} = \overline{zw} = \overline{zz^{n-1}t} = \overline{z^n t} = 0$ ist $z \in \mathrm{NT}_R(M/N)$. ∎

4.21 Definition. Sei R ein Ring, sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, sei M ein R-Modul, und sei $N \subseteq M$ ein Untermodul. Wir sagen, N sei ein ***$\mathfrak{p}$-primärer Untermodul*** von M, wenn N ein primärer Untermodul ist und

$$\sqrt{N \underset{R}{:} M} = \mathfrak{p}.$$

gilt. Wir sagen in dieser Situation auch, $\mathfrak{p}$ sei das zum primären Untermodul N von M gehörige Primideal.

4.22 Beispiele. (A) Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{q} \subsetneq R$ ein primäres Ideal. Aus (4.19) folgt sofort, dass $\sqrt{\mathfrak{q}}$ das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal ist.

(B) Die primären Untermoduln des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}$ sind der 0-Modul (der 0-primär ist) und alle Moduln der Form $p^n\mathbb{Z}$, wo $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ ist. Dabei ist $p^n\mathbb{Z}$ natürlich $p\mathbb{Z}$-primär.

4.23 Satz. Sei R ein noetherscher Ring, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, M ein endlich erzeugter R-Modul und $N \subsetneq M$ ein echter Untermodul. Dann sind äquivalent:

(i) N ist ein $\mathfrak{p}$-primärer Untermodul von M.

(ii) $\mathrm{Ass}_R(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Ist N ein $\mathfrak{p}$-primärer Untermodul, so gilt $\mathrm{NT}_R(M/N) = \mathfrak{p} = \sqrt{N :_R M}$, vgl. (4.20). Nach (4.2)(g) können wir $N :_R M$ auch als den Annullator $0 :_R M/N$ schreiben, und sehen mit (2.30), dass $\mathfrak{p}$ das einzige minimale Primoberideal dieses Annullators ist. Wegen $\mathrm{NT}_R(M/N) = \mathfrak{p}$ folgt mit (4.14) und (4.16) sofort, dass $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Ist $\mathrm{Ass}_R(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$, so zeigen (4.14), (4.16), (2.30) und (4.2)(g) sofort, dass $\mathrm{NT}_R(M/N) = \mathfrak{p} = \sqrt{N :_R M}$. Ist $t \in M \smallsetminus N$, so ist $N :_R t \subseteq \mathrm{NT}_R(M/N)$. Also ist N $\mathfrak{p}$-primär. ∎

§ Primärzerlegung von Untermoduln

4.24 Lemma. Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, M ein R-Modul, und seien $N_1, \ldots, N_n \subseteq M$ lauter $\mathfrak{p}$-primäre Untermoduln. Dann ist auch $N_1 \cap \cdots \cap N_n$ ein $\mathfrak{p}$-primärer Untermodul von M.

Beweis. Nach (4.2)(e) und (2.32) gilt zunächst

$$\sqrt{N_1 \cap \cdots \cap N_n \underset{R}{:} M} = \sqrt{N_1 \underset{R}{:} M} \cap \cdots \cap \sqrt{N_n \underset{R}{:} M} = \mathfrak{p} \cap \cdots \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}.$$

Sei jetzt $t \in M \smallsetminus N_1 \cap \cdots \cap N_n$. Es gibt dann einen Index $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $t \in M \smallsetminus N_i$. Nach (4.2)(f) folgt $N_1 \cap \cdots \cap N_n :_R t \subseteq N_i :_R t \subseteq \mathfrak{p} = \sqrt{N_1 \cap \cdots \cap N_n :_R M}$. ∎

4.25 Festsetzung. Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul, sei $N \subseteq M$ ein Untermodul, und sei U eine Teilmenge von R. Den ***Quotienten von*** N ***durch*** U ***in*** M definieren wir dann als die Menge

$$N \underset{M}{:} U := \Big\{ m \in M \;\Big|\; um \in N, \forall\, u \in U \Big\}.$$

Sofort sieht man, dass es sich bei $N :_M U$ immer um einen N umfassenden Untermodul von M handelt.

4.26 Bemerkung. Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul, sei $N \subseteq M$ ein Untermodul, und sei U eine Teilmenge von R. Sofort prüft man nach:

(a) $N :_M U = M \;\Leftrightarrow\; U \subseteq N :_R M$.

(b) $U \subseteq U' \;\Rightarrow\; N :_M U \supseteq N :_M U'$.

(c) $N :_M U = N :_M (U)$.

(d) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen aus R, so gilt offenbar:

$$N \underset{M}{:} \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \Big(N \underset{M}{:} U_i \Big).$$

(e) Ist $(N_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln von M, so gilt:

$$\left(\bigcap_{i \in I} N_i \right) \underset{M}{:} U = \bigcap_{i \in I} \Big(N_i \underset{M}{:} U \Big).$$

(f) Ist U' eine weitere Teilmenge in R, so schreiben wir $U \cdot U' := \{uu' \mid u \in U,\, u' \in U'\}$. Es ist dann $U \cdot U' = U' \cdot U$ und es gilt:

$$N \underset{M}{:} UU' = \Big(N \underset{M}{:} U \Big) \underset{M}{:} U' = \Big(N \underset{M}{:} U' \Big) \underset{M}{:} U.$$

(g) Ist $T \subseteq M$, so schreiben wir $U \cdot T := \{ut \mid u \in U,\, t \in T\}$ und erhalten:

$$N \underset{R}{:} UT = \Big(N \underset{M}{:} U \Big) \underset{R}{:} T = \Big(N \underset{R}{:} T \Big) \underset{R}{:} U.$$

4.27 Satz. Sei R ein Ring, und sei M ein noetherscher R-Modul. Sei $N \subsetneq M$ ein irreduzibler echter Untermodul, vgl. (2.39). Dann ist N ein primärer Untermodul von M.

Beweis. Nehmen wir an, N sei nicht primär! Dann gibt es ein Element $t \in M \setminus N$ und ein Element $x \in N :_R t$ mit $x \notin \sqrt{N :_R M}$. Wegen $t \in N :_M x$ folgt zunächst, dass $N_1 := N :_M x \supsetneq N$.

Weiter ist $(N :_M x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ offenbar eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M. Weil M noethersch ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass $N :_M x^{n_0+1} = N :_M x^{n_0}$. Wegen $x \notin \sqrt{N :_R M}$ ist $x^{n_0} M \nsubseteq N$, also sicher $N_2 := N + x^{n_0} M \supsetneq N$.

Sei jetzt $m \in N_1 \cap N_2$. Wegen $m \in N_2$ können wir schreiben $m = u + x^{n_0} v$ mit $u \in N$ und $v \in M$. Wegen $m \in N_1$ ist dann $xu + x^{n_0+1} v = xm \in N$, also $x^{n_0+1} v \in N$. Dann ist $v \in N :_M x^{n_0+1} = N :_M x^{n_0}$, also $x^{n_0} v \in N$. Damit ist aber $m \in N$. Dies zeigt, dass $N_1 \cap N_2 = N$, und N ist reduzibel. ■

4.28 Lemma. Sei R ein Ring, und sei M ein noetherscher R-Modul. Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann gibt es endlich viele irreduzible Untermoduln $N_1, \ldots, N_r$ von M so, dass $N = N_1 \cap \cdots \cap N_r$.

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann ist die Menge $\mathbb{M}$ der echten Untermoduln von M, welche sich nicht als Durchschnitt endlich vieler irreduzibler Untermoduln von M schreiben lassen, nicht leer. Weil M noethersch ist, besitzt $\mathbb{M}$ ein bezüglich der Inklusion maximales Mitglied Q. Natürlich ist dann Q selbst reduzibler Untermodul von M. Es gibt also zwei Moduln $Q_1, Q_2 \subseteq M$ so, dass $Q_1, Q_2 \supsetneq Q$ und $Q_1 \cap Q_2 = Q$. Insbesondere ist dann $Q_1, Q_2 \neq M$. Weil Q in $\mathbb{M}$ maximal ist, gilt $Q_1, Q_2 \notin \mathbb{M}$. Also sind Q_1 und Q_2 jeweils Durchschnitt endlich vieler irreduzibler Untermoduln von M. Daraus folgt der Widerspruch, dass $Q = Q_1 \cap Q_2$ sich ebenfalls als Durchschnitt endlich vieler irreduzibler Untermoduln von M schreiben lässt. ■

4.29 Definition. Sei R ein Ring, M ein R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul und $r \in \mathbb{N}$. Wir sagen, eine endliche Familie $(N_i)_{i=1}^r$ von Untermoduln $N_i \subseteq M$ definiere eine ***minimale Primärzerlegung von*** N ***in*** M, wenn folgendes gilt:

(a) $N = \bigcap_{i=1}^r N_i$ und $N \neq \bigcap_{i \neq k} N_i$ für $k = 1, \ldots, r$.

(b) N_i ist ein primärer Untermodul von M für $i = 1, \ldots, r$.

(c) $i \neq j \Rightarrow \sqrt{N_i :_R M} \neq \sqrt{N_j :_R M}$ für $1 \leq i, j \leq r$.

Falls eine solche Familie existiert, sagen wir, N ***besitze in*** M ***eine minimale Primärzerlegung***. In dieser Situation sind die Moduln N_i nach (4.20) jeweils $\sqrt{N_i :_R M}$-primär.

4.30 Satz: Existenzsatz für Primärzerlegungen. Sei R ein Ring, und sei M ein noetherscher R-Modul. Dann besitzt jeder Untermodul N von M eine minimale Primärzerlegung in M.

Beweis. Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul. Nach (4.28) gibt es endlich viele irreduzible Untermoduln $N_1, \ldots, N_r$ von M so, dass $N = N_1 \cap \cdots \cap N_r$. Nach (4.27) sind die Moduln N_i primäre Untermoduln von M. Nach (4.24) können wir jeweils immer alle der Moduln N_i, die zum gleichen Primideal primär sind, miteinander schneiden und so annehmen, es sei $\sqrt{N_i :_R M} \neq \sqrt{N_j :_R M}$ für $i \neq j$. Durch Weglassen nicht benötigter N_i kann man schliesslich annehmen, es sei $N \neq \bigcap_{i \neq k} N_i$ für $k = 1, \ldots, r$. ∎

§ Erster Eindeutigkeitssatz der Primärzerlegung

4.31 Satz: Erster Eindeutigkeitssatz der Primärzerlegung. Sei R ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul. Sei $(N_i)_{i=1}^r$ eine Familie von primären Untermoduln von M, welche eine minimale Primärzerlegung von N in M definiert. Für $i = 1, \ldots, r$ sei $\mathfrak{p}_i$ das zu N_i gehörige Primideal. Nach (4.29)(c) sind dann die Primideale $\mathfrak{p}_i$ paarweise verschieden, und es gilt:

$$\left\{\mathfrak{p}_i \;\middle|\; 1 \leq i \leq r\right\} = \mathrm{Ass}_R(M/N).$$

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an! Nach (1.15) gibt es dann einen bezüglich der Inklusion maximalen Untermodul $Q \subsetneq M$, für welchen die Behauptung nicht gilt. Nach (4.30) gibt es eine Familie $(Q_i)_{i=1}^s$ von Untermoduln Q_i in M, welche eine minimale Primärzerlegung von Q in M definieren, und für welche gilt $\left\{\mathfrak{q}_i := \sqrt{Q_i :_R M} \;\middle|\; 1 \leq i \leq s\right\} \neq \mathrm{Ass}_R(M/Q)$. Gemäss (4.23) ist dann $s > 1$. Sei $k \in \{1, \ldots, s\}$ und $\overline{Q}_k := \bigcap_{i \neq k} Q_i$. Dann ist $Q \subsetneq \overline{Q}_k \subsetneq M$, und die Familie $(Q_i)_{i \neq k}$ definiert eine minimale Primärzerlegung von $\overline{Q}_k$ in M. Wegen der angenommenen Maximalitätseigenschaft von Q ist $\{\mathfrak{q}_i \mid i \neq k\} = \mathrm{Ass}_R(M/\overline{Q}_k)$. Die kurze exakte Sequenz $0 \to \overline{Q}_k/Q \to M/Q \to M/\overline{Q}_k \to 0$ zeigt über (4.6), dass $\mathrm{Ass}_R(\overline{Q}_k/Q) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M/Q) \subseteq \mathrm{Ass}_R(\overline{Q}_k/Q) \cup \{\mathfrak{q}_i \mid i \neq k\}$. Dabei ist $\overline{Q}_k/Q = \overline{Q}_k/(Q_k \cap \overline{Q}_k) \cong (\overline{Q}_k + Q_k)/Q_k \subseteq M/Q_k$. Nach (4.7) und (4.23) folgt $\mathrm{Ass}_R(\overline{Q}_k/Q) \subseteq \{\mathfrak{q}_k\}$. Wegen $Q \subsetneq \overline{Q}_k$ folgt aus (4.15) sofort, dass $\{\mathfrak{q}_k\} = \mathrm{Ass}_R(\overline{Q}_k/Q)$. So erhalten wir $\mathfrak{q}_k \in \mathrm{Ass}_R(M/Q) \subseteq \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s\}$ für $k = 1, \ldots, s$, also den Widerspruch $\mathrm{Ass}_R(M/Q) = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s\}$. ∎

§ Bruchmoduln

4.32 Festsetzungen. (A) Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul, und sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge, vgl. (3.8). Auf dem kartesischen Produkt $S \times M$ definieren wir dann eine Äquivalenzrelation durch die Vorschrift:

$$(s, m) \sim_S (t, n) \;:\Leftrightarrow\; \exists\, u \in S : utm = usn.$$

Die Äquivalenzklasse des Paares $(s, m) \in S \times M$ bezeichnen wir dann mit $\frac{m}{s}$ und nennen sie einen ***Bruch*** mit ***Zähler*** m und ***Nenner*** s. Die Menge der so definierten Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $S^{-1}M$ und nennen sie die ***Menge der Brüche mit Zähler in*** M ***und Nenner in*** S.

(B) Wir halten die Bezeichnungen aus (A) fest. Die Bruchmenge $S^{-1}M$ kann man dann — wie leicht nachzuprüfen ist — vermöge der Operationen

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} := \frac{tm + sn}{st} \quad \text{und} \quad \frac{x}{s} \cdot \frac{n}{t} := \frac{xn}{st} \quad \text{mit } m, n \in M,\ s, t \in S \text{ und } x \in R$$

zu einem Modul über dem Bruchring $S^{-1}R$ machen. Vermöge der Skalarmultiplikation

$$x \cdot \frac{m}{s} := \frac{x}{1} \cdot \frac{m}{s} = \frac{xm}{s} \quad \text{mit } x \in R,\ m \in M,\ s \in S$$

wird $S^{-1}M$ dann natürlich auch zum R-Modul. Den $S^{-1}R$-Modul $S^{-1}M$ bezeichnen wir als den ***Bruchmodul*** von M mit Nennern aus S.

(C) Durch $m \mapsto \frac{m}{1}$ wird offenbar ein Homomorphismus

$$\eta_S : M \to S^{-1}M$$

von R-Moduln definiert, der zur Nennermenge S gehörige ***kanonische Homomorphismus*** von M nach $S^{-1}M$.

(D) Ist $N \subseteq M$ ein Untermodul, so wird durch $\frac{n}{s} \mapsto \frac{n}{s}$ offenbar ein Homomorphismus

$$\imath_S : S^{-1}N \to S^{-1}M$$

von $S^{-1}R$-Moduln definiert, für den gilt

$$\mathrm{Im}(\imath_S) = \left\{ \frac{n}{s} \in S^{-1}M \;\middle|\; n \in N,\ s \in S \right\}.$$

Dabei ist es leicht zu sehen, dass $\imath_S$ injektiv ist. Deshalb können wir den Bruchmodul $S^{-1}N$ von N mit Nennern aus S vermöge $\imath_S$ identifizieren mit dem Untermodul $\mathrm{Im}(\imath_S)$ des Bruchmoduls $S^{-1}M$ von M mit Nennern aus S. Wir schreiben also $S^{-1}N \subseteq S^{-1}M$.

(E) Ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, so schreiben wir wie früher

$$M_{\mathfrak{p}}, \quad \eta_{\mathfrak{p}}, \quad \imath_{\mathfrak{p}}, \quad \dots$$

anstelle von

$$(R \smallsetminus \mathfrak{p})^{-1}M, \quad \eta_{R \smallsetminus \mathfrak{p}}, \quad \imath_{R \smallsetminus \mathfrak{p}}, \quad \dots$$

und nennen den $R_{\mathfrak{p}}$-Modul $M_{\mathfrak{p}}$ die ***Lokalisierung*** von M in $\mathfrak{p}$, vgl (3.18).

4.33 Bemerkungen. (A) Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ eine Nennermenge. Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so ist gemäss (3.9)(A) und (4.32)(B) der Bruchmodul $S^{-1}\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{a}$ mit Nennern aus S — aufgefasst als Untermodul von $S^{-1}R$ — gerade das Erweiterungsideal $\mathfrak{a}S^{-1}R$ von $\mathfrak{a}$ nach $S^{-1}R$.

(B) Ist M ein R-Modul und $N' \subseteq S^{-1}M$ ein $S^{-1}R$-Untermodul, so schreiben wir oft $N' \cap M$ für das kanonische Urbild $\eta_S^{-1}(N')$ von N' in M. Genau wie in (3.9)(B) prüft man nach, dass

$$S^{-1}(N' \cap M) = N'.$$

(C) Ist $N \subseteq M$ ein Untermodul, so sieht man mit (4.32)(D) sofort, dass

$$S^{-1}N \cap M = \Big\{ m \in M \;\Big|\; \exists\, s \in S : sm \in N \Big\}.$$

Für den Kern des kanonischen Homomorphismus $\eta_S : M \to S^{-1}M$ gilt dann analog zu (3.9)(C) insbesondere

$$\operatorname{Ker}(\eta_S) = S^{-1}0 \cap M = \Big\{ m \in M \;\Big|\; \exists\, s \in S : sm = 0 \Big\}.$$

(D) Sei $\mathcal{M} \subseteq M$ eine Teilmenge von M. Sei $(s_m)_{m \in \mathcal{M}}$ eine Familie von Elementen aus S. Wendet man das in (4.32)(D) Gesagte an auf den von $\mathcal{M}$ erzeugten Untermodul $(\mathcal{M})$, so sieht man leicht, dass

$$S^{-1}(\mathcal{M}) = \big(\eta_S(\mathcal{M})\big) = \left(\Big\{ \frac{m}{1} \;\Big|\; m \in \mathcal{M} \Big\} \right) = \left(\Big\{ \frac{m}{s_m} \;\Big|\; m \in \mathcal{M} \Big\} \right).$$

4.34 Festsetzung. Sei $h : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, und sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge. Dann wird durch

$$\frac{m}{s} \mapsto \frac{h(m)}{s}$$

für $m \in M$ und $s \in S$ ein Homomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln

$$S^{-1}h : S^{-1}M \to S^{-1}N$$

definiert, der ***zwischen den Bruchmoduln durch*** h ***induzierte Homomorphismus***. Dieser Homomorphismus erscheint im folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\eta_S^M"'] \arrow[dr, phantom, "\circledequal"] & N \arrow[d, "\eta_S^N"] \\
S^{-1}M \arrow[r, "S^{-1}h"'] & S^{-1}N
\end{tikzcd}$$

und ist der einzige Homomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln von $S^{-1}M$ nach $S^{-1}N$ mit dieser Eigenschaft.

4.35 Bemerkungen. (A) Sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge. Sind $h : M \to N$ und $l : N \to T$ zwei Homomorphismen von R-Moduln, so gilt für deren induzierte Homomorphismen die Beziehung

$$S^{-1}l \circ S^{-1}h = S^{-1}(l \circ h).$$

Weiter ist

$$S^{-1}\,\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{S^{-1}M}\,.$$

Ist also $h : M \to N$ ein Isomorphismus, so ist $S^{-1}h$ ein Isomorphismus, und es gilt

$$S^{-1}(h^{-1}) = (S^{-1}h)^{-1}.$$

Für die Nullhomomorphismen 0 gilt

$$S^{-1}0 = 0.$$

Sind $h, k : M \to N$ Homomorphismen von R-Moduln und ist $a \in R$, so sind Homomorphismen $h + k : M \to N$ und $ah : M \to N$ von R-Moduln definiert durch

$$(h+k)(m) := h(m) + k(m) \quad \text{resp.} \quad (ah)(m) := ah(m)$$

für alle $m \in M$. Dabei gelten die Gleichheiten

$$S^{-1}(h+k) = S^{-1}h + S^{-1}k \qquad \text{und} \qquad S^{-1}(ah) = aS^{-1}h.$$

(B) Sei

$$M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{l} T$$

eine *exakte* Sequenz von R-Moduln. Dann gilt zunächst $S^{-1}l \circ S^{-1}h = S^{-1}(l \circ h) = S^{-1}0 = 0$, also $\mathrm{Im}(S^{-1}h) \subseteq \mathrm{Ker}(S^{-1}l)$. Ist umgekehrt $\frac{n}{s} \in \mathrm{Ker}(S^{-1}l)$ für $n \in N$ und $s \in S$, so ist $S^{-1}l(\frac{n}{s}) = 0$, also $\frac{l(n)}{s} = 0$. Wir finden demnach einen Nenner $t \in S$ mit $tl(n) = 0$. Es folgt $l(tn) = 0$, also $tn \in \mathrm{Ker}(l) = \mathrm{Im}(h)$. Mit einem geeigneten Element $m \in M$ folgt dann $tn = h(m)$ und wir erhalten $\frac{n}{s} = \frac{tn}{ts} = \frac{h(m)}{ts} = S^{-1}h(\frac{m}{ts}) \in \mathrm{Im}(S^{-1}h)$. Dies zeigt, dass $\mathrm{Im}(S^{-1}h) = \mathrm{Ker}(S^{-1}l)$, also, dass die induzierte Sequenz

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}h} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}l} S^{-1}T$$

exakt ist.

(C) Aus (B) folgt speziell: Ist $h : M \to N$ ein injektiver (resp. surjektiver) Homomorphismus von R-Moduln, so ist $S^{-1}h : S^{-1}M \to S^{-1}N$ ein injektiver (resp. surjektiver) Homomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln. Ist N ein Untermodul von M und $\iota : N \to M$ die Inklusionsabbildung, so ist $S^{-1}\iota : S^{-1}N \to S^{-1}M$ gerade die in (4.32) (D) beschriebene Einbettung $\iota_S : S^{-1}N \to S^{-1}M$.

(D) Wir können mit S^{-1} die Zuordnung bezeichnen, die jedem R-Modul M den $S^{-1}R$-Modul $S^{-1}M$ und jedem Homomorphismus von R-Moduln $h : M \to N$ den Homomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln $S^{-1}h : S^{-1}M \to S^{-1}N$ zuweist. Die in (A)–(C) beschriebenen Eigenschaften von S^{-1} fasst man in kategorieller Sprechweise zusammen, indem man sagt, S^{-1} sei ein ***exakter linearer kovarianter Funktor*** von der Kategorie der R-Moduln nach der Kategorie der $S^{-1}R$-Moduln.

4.36 Satz. Sei R ein Ring, sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge, und sei M ein noetherscher R-Modul. Dann ist $S^{-1}M$ ein noetherscher $S^{-1}R$-Modul.

Beweis. Vgl. auch (3.10). Sei $N' \subseteq S^{-1}M$ ein $S^{-1}R$-Untermodul. Dann ist $N' \cap M$ ein Untermodul von M. Weil M noethersch ist, finden wir endlich viele Elemente $m_1, \ldots, m_r$ aus M mit $N' \cap M = (m_1, \ldots, m_r)$. Nach (4.33)(B) und (D) folgt $N' = S^{-1}(N' \cap M) = \left(\frac{m_1}{1}, \ldots, \frac{m_r}{1}\right)$. Also ist N' über $S^{-1}R$ endlich erzeugt. ∎

§ Assoziierte Primideale und Nenneraufnahme

4.37 Lemma. Sei R ein Ring, sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge, sei M ein R-Modul, und sei $N \subseteq M$ ein Untermodul. Sei $t \in M$, und sei $s \in S$. Dann gilt:

$$S^{-1}N \underset{S^{-1}R}{:} \frac{t}{s} = \left(N \underset{R}{:} t\right) S^{-1}R.$$

Beweis. Sei $y \in S^{-1}R$. Wir schreiben $y = \frac{x}{u}$, wo $x \in R$ und $u \in S$.

Ist $y \in S^{-1}N :_{S^{-1}R} \frac{t}{s}$, so gilt $\frac{xt}{us} = y\frac{t}{s} \in S^{-1}N$. Mit geeigneten Elementen $n \in N$ und $w \in S$ können wir also schreiben $\frac{xt}{us} = \frac{n}{w}$. Wir finden deshalb ein Element $v \in S$ mit $vwxt = vusn \in N$. Es folgt $vwx \in N :_R t$, also $y = \frac{x}{u} = \frac{vwx}{vwu} \in (N :_R t)S^{-1}R$.

Sei umgekehrt $y = \frac{x}{u} \in (N :_R t)S^{-1}R$. Gemäss (3.9)(A) können wir dann annehmen, es sei $x \in N :_R t$, also $xt =: m \in N$. Es folgt $y\frac{t}{s} = \frac{xt}{us} = \frac{m}{us} \in S^{-1}N$, also $y \in S^{-1}N :_{S^{-1}R} \frac{t}{s}$. ■

4.38 Satz. Sei R ein noetherscher Ring, $S \subseteq R$ eine Nennermenge und M ein R-Modul. Dann gilt:

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}\big(S^{-1}M\big) = \Big\{\mathfrak{p}S^{-1}R \;\Big|\; \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M),\ \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\Big\}.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$ und $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap R$. Nach (3.12)(A),(C) ist dann $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}S^{-1}R$. Weil R noethersch ist, finden wir Elemente $x_1, \ldots, x_r \in R$ mit $\mathfrak{p} = (x_1, \ldots, x_r)$. Weiter gibt es ein Element $u \in S^{-1}M$ mit $0 :_{S^{-1}R} u = \mathfrak{q}$. Wir schreiben $u = \frac{t}{s}$ mit $t \in M$ und $s \in S$. Nach (4.37) ist dann $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R = (0 :_R t)S^{-1}R \cap R$. Nach (3.9)(C) gibt es also zu jedem Erzeugenden x_i von $\mathfrak{p}$ ein $v_i \in S$ mit $v_i x_i \in 0 :_R t$. Mit $v := v_1 \cdots v_r$ folgt dann $v \in S$ und $vx_i \in 0 :_R t$, also $x_i \in 0 :_R vt$ für $i = 1, \ldots, r$. Es ist also $\mathfrak{p} \subseteq 0 :_R vt$. Andrerseits folgt über (4.37) $0 :_R vt \subseteq (0 :_R vt)S^{-1}R \cap R = \big(0 :_{S^{-1}R} \frac{vt}{vs}\big) \cap R = \big(0 :_{S^{-1}R} \frac{t}{s}\big) \cap R = \mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$. So sehen wir, dass $0 :_R vt = \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$.

Sei umgekehrt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$. Dann ist $\mathfrak{p}S^{-1}R \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$, vgl. (3.12)(C), und wir finden ein $t \in M$ mit $0 :_R t = \mathfrak{p}$. Nach (4.37) folgt $\mathfrak{p}S^{-1}R = 0 :_{S^{-1}R} \frac{t}{1}$, also $\mathfrak{p}S^{-1}R \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$. ■

§ Primärzerlegung und Nenneraufnahme

4.39 Lemma. Sei R ein Ring, $S \subseteq R$ eine Nennermenge und M ein R-Modul. Seien $N_1, \ldots, N_r \subseteq M$ endlich viele Untermoduln. In $S^{-1}M$ gilt dann:

$$S^{-1}(N_1 \cap \cdots \cap N_r) = S^{-1}N_1 \cap \cdots \cap S^{-1}N_r.$$

Beweis. "$\subseteq$" Ist $u \in S^{-1}(N_1 \cap \cdots \cap N_r)$, so können wir schreiben $u = \frac{n}{s}$ mit $n \in N_1 \cap \cdots \cap N_r$ und $s \in S$. Es folgt $u \in S^{-1}N_i$ für $i = 1, \ldots, r$.

"$\supseteq$" Sei umgekehrt $u \in S^{-1}N_1 \cap \cdots \cap S^{-1}N_r$. Für jeden Index $i \in \{1, \ldots, r\}$ finden wir dann Elemente $n_i \in N$ und $s_i \in S$ mit $u = \frac{n_i}{s_i}$. Weil $\frac{n_i}{s_i} = u = \frac{n_1}{s_1}$ für $i = 1, \ldots, r$, finden wir jeweils ein $t_i \in S$ mit $t_i s_1 n_i = t_i s_i n_1$, also mit $t_i s_i n_1 \in N_i$. Mit $s := \prod_{i=1}^r s_i$ und $t := \prod_{i=1}^r t_i$ folgt sofort, dass $tsn_1 \in N_1 \cap \cdots \cap N_r$. Daraus ergibt sich, dass $u = \frac{n_1}{s_1} = \frac{tsn_1}{tss_1} \in S^{-1}(N_1 \cap \cdots \cap N_r)$. ■

4.40 Lemma. Sei R ein Ring, $S \subseteq R$ eine Nennermenge, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, M ein R-Modul und $N \subseteq M$ ein $\mathfrak{p}$-primärer Untermodul. Dann gilt:

(a) Ist $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, so ist $S^{-1}N$ ein $\mathfrak{p}S^{-1}R$-primärer Untermodul von $S^{-1}M$ und es gilt $S^{-1}N \cap M = N$.

(b) Ist $\mathfrak{p} \cap S \neq \varnothing$, so gilt $S^{-1}N = S^{-1}M$.

Beweis. "(a)" Ist $y \in \mathfrak{p}S^{-1}R$, so können wir schreiben $y = \frac{x}{s}$ mit $s \in S$ und $x \in \mathfrak{p} = \sqrt{N :_R M}$. Insbesondere gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in N :_R M$, also mit $x^n M \subseteq N$. Es folgt also $y^n S^{-1}M = S^{-1}(x^n M) \subseteq S^{-1}N$, also $y \in \sqrt{S^{-1}N :_{S^{-1}R} S^{-1}M}$, d.h. $\mathfrak{p}S^{-1}R \subseteq \sqrt{S^{-1}N :_{S^{-1}R} S^{-1}M}$.

Sei jetzt $u \in S^{-1}M \smallsetminus S^{-1}N$. Wir können dann schreiben $u = \frac{t}{s}$ mit $t \in M \smallsetminus N$ und $s \in S$. Mit (4.37) folgt, dass $S^{-1}N :_{S^{-1}R} u = (N :_R t)S^{-1}R$. Weil N in M $\mathfrak{p}$-primär ist, gilt $N :_R t \subseteq \mathfrak{p}$, und es folgt, dass $S^{-1}N :_{S^{-1}R} u \subseteq \mathfrak{p}S^{-1}R$. Im Hinblick auf die oben bewiesene Inklusion folgt, dass $S^{-1}N$ in $S^{-1}M$ primär ist. Dabei haben wir soeben auch gezeigt, dass $\mathrm{NT}_{S^{-1}R}(S^{-1}M/S^{-1}N) \subseteq \mathfrak{p}S^{-1}R$, und sehen so mit (4.20), dass $S^{-1}N$ ein $\mathfrak{p}S^{-1}R$-primärer Untermodul von $S^{-1}M$ ist.

Sei jetzt $t \in M \smallsetminus N$. Dann ist $N :_R t \subseteq \mathfrak{p} \subseteq R \smallsetminus S$. Mit Hilfe von (4.33)(C) folgt, dass $t \notin S^{-1}N \cap M$. Damit ist $S^{-1}N \cap M \subseteq N$, also $S^{-1}N \cap M = N$.

"(b)" Sei $s \in \mathfrak{p} \cap S$ und sei $y \in S^{-1}M$. Wir schreiben $y = \frac{m}{u}$ mit $m \in M$ und $u \in S$. Wegen $s \in \mathfrak{p} = \sqrt{N :_R M}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s^n M \subseteq N$, also mit $s^n m \in N$. Es folgt $y = \frac{m}{u} = \frac{s^n m}{s^n u} \in S^{-1}N$. ■

4.41 Bemerkung. Es gelten die Voraussetzungen von (4.40). Weiter gelte $S^{-1}N = S^{-1}M$. Weil ein Modul nicht primärer Untermodul von sich selbst ist, impliziert (4.40)(a), dass dann $\mathfrak{p} \cap S \neq \varnothing$.

4.42 Satz. Sei R ein Ring, $S \subseteq R$ eine Nennermenge, M ein R-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul. Die Familie $(N_i)_{i=1}^r$ von Untermoduln $N_i \subseteq M$ definiere eine minimale Primärzerlegung von N in M. Sei $I := \left\{ i \middle| 1 \leq i \leq r,\ S \cap \sqrt{N_i :_R M} = \varnothing \right\}$. Dann gilt:

(a) Die Familie $(S^{-1}N_i)_{i \in I}$ definiert eine minimale Primärzerlegung von $S^{-1}N$ in $S^{-1}M$.

(b) Die Familie $(N_i)_{i \in I}$ definiert eine minimale Primärzerlegung von $S^{-1}N \cap M$ in M.

Beweis. Nach (4.40)(b) ist klar, dass $S^{-1}N_i \subsetneq S^{-1}M$ genau dann, wenn $i \in I$, und so folgt aus (4.39), dass $S^{-1}N = S^{-1}\bigcap_{i=1}^r N_i = \bigcap_{i=1}^r S^{-1}N_i = \bigcap_{i \in I} S^{-1}N_i$. Nach (4.40) ist $S^{-1}N_i$

für alle $i \in I$ primär zu $\mathfrak{q}_i := S^{-1}\mathfrak{p}_i$, wo $\mathfrak{p}_i := \sqrt{N_i :_R M}$. Wegen $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ sind die Primideale $\mathfrak{q}_i$ für alle $i \in I$ voneinander verschieden, vgl. (4.31). Im Hinblick auf (4.40)(a) folgt weiter $S^{-1}N \cap M = \left(\bigcap_{i\in I} S^{-1}N_i\right) \cap M = \bigcap_{i\in I}(S^{-1}N_i \cap M) = \bigcap_{i\in I} N_i$, was sofort zeigt, dass $(N_i)_{i\in I}$ eine minimale Primärzerlegung von $S^{-1}N \cap M$ in M definiert. Ist $k \in I$, so folgt insbesondere auch $\left(\bigcap_{i\in I\setminus\{k\}} S^{-1}N_i\right) \cap M = \bigcap_{i\in I\setminus\{k\}}(S^{-1}N_i \cap M) = \bigcap_{i\in I\setminus\{k\}} N_i \supsetneqq S^{-1}N \cap M$, also $\bigcap_{i\in I\setminus\{k\}} S^{-1}N_i \neq S^{-1}N$. Dies zeigt alles. ■

§ Zweiter Eindeutigkeitssatz der Primärzerlegung

4.43 Festsetzung. Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{Q} \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ eine Menge von Primidealen. Eine Teilmenge $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Q}$ heisst eine ***fundierte*** Teilmenge von $\mathfrak{Q}$, wenn aus $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ und aus $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}$ immer folgt $\mathfrak{q} \in \mathfrak{P}$.

4.44 Zweiter Eindeutigkeitssatz der Primärzerlegung. Sei R ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul und $\mathfrak{P}$ eine fundierte Teilmenge von $\operatorname{Ass}_R(M/N)$. Sei $(N_i)_{i=1}^r$ eine Familie von Untermoduln aus M, welche eine minimale Primärzerlegung von N in M definiert. Dabei sei $\mathfrak{p}_i := \sqrt{N_i :_R M}$ für $i = 1, \ldots, r$. Dann gilt:

$$\bigcap_{i\,:\,\mathfrak{p}_i\in\mathfrak{P}} N_i = \left(R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}} \mathfrak{p}\right)^{-1} N \cap M.$$

Insbesondere hängt dieser Durchschnitt nur von N und $\mathfrak{P}$, nicht aber von der Familie $(N_i)_{i=1}^r$ ab.

Beweis. Wir wissen nach (4.31), dass $\{\mathfrak{p}_i \mid i = 1, \ldots, r\} = \operatorname{Ass}_R(M/N)$. Sei $I \subseteq \{i, \ldots, r\}$ so, dass $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{p}_i \mid i \in I\}$. Dann ist $S := R \setminus \bigcup_{i\in I} \mathfrak{p}_i$ eine Nennermenge. Ist $k \in \{1, \ldots, r\}$, so gilt $\mathfrak{p}_k \cap S = \varnothing$ genau dann, wenn $\mathfrak{p}_k \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathfrak{p}_i$, also wegen (2.5) genau dann, wenn $\mathfrak{p}_k \subseteq \mathfrak{p}_i$ für einen Index $i \in I$, also genau dann, wenn $\mathfrak{p}_k \in \mathfrak{P}$, also dann und nur dann, wenn $k \in I$. Nach (4.42) folgt $\bigcap_{i\in I} N_i = S^{-1}N \cap M$, mithin die Behauptung. ■

4.45 Korollar. Seien R, M, N und $(N_i)_{i=1}^r$ wie in (4.44). Dann sind diejenigen Primärkomponenten N_i von N, für welche $\mathfrak{p}_i := \sqrt{N_i :_R M}$ in $\operatorname{Ass}_R(M/N)$ minimal ist, durch N und $\mathfrak{p}_i$ schon bestimmt. Es gilt nämlich:

$$N_i = N_{\mathfrak{p}_i} \cap M.$$

Beweis. Sei $i \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass $\mathfrak{p}_i$ minimal in $\operatorname{Ass}_R(M/N)$ ist. Dann ist $\{\mathfrak{p}_i\}$ eine fundierte Teilmenge von $\operatorname{Ass}_R(M/N)$. Aus (4.44) folgt

$$N_i = \bigcap_{j:\mathfrak{p}_j\in\{\mathfrak{p}_i\}} N_j = (R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in\{\mathfrak{p}_i\}} \mathfrak{p})^{-1}N \cap M = (R \setminus \mathfrak{p}_i)^{-1}N \cap M = N_{\mathfrak{p}_i} \cap M,$$

und somit gilt die Behauptung. ■

Kapitel 5

Tiefe

§ Nichtnullteilerfolgen

5.1 Definition. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Eine Folge $(x_i)_{i=1}^r$ von endlich vielen Elementen $x_1, \dots, x_r \in R$ heisst eine ***Nichtnullteilerfolge*** bezüglich M, wenn

$$x_i \in \mathrm{NNT}_R\left(M \Big/ \sum_{j=1}^{i-1} x_j M\right) \quad \text{für } i = 1, \dots, r.$$

5.2 Bemerkungen. (A) Sei R ein Ring, und sei M ein R-Modul. Seien $x_1, \dots, x_r \in R$, und sei $0 \le s \le r$. Wir setzen $\overline{M} := M/\sum_{j=1}^s x_j M$. Ist $s \le t \le r$, so hat der durch zweimaliges Restklassenbilden

$$m \mapsto m + \sum_{j=1}^{s} x_j M =: \overline{m} \mapsto \overline{m} + \sum_{k=s+1}^{t} x_k \overline{M}$$

definierte surjektive Homomorphismus $M \to \overline{M}/\sum_{k=s+1}^t x_k \overline{M}$ den Kern $\sum_{i=1}^t x_i M$, und wir erhalten einen Isomorphismus

$$\overline{M} \Big/ \sum_{k=s+1}^{t} x_l \overline{M} \cong M \Big/ \sum_{i=1}^{t} x_i M.$$

Weil isomorphe Moduln aber die gleichen Nichtnullteilerfolgen haben, sieht man, dass für Nichtnullteilerfolgen die ***Zusammensetzungseigenschaft*** gilt, die besagt:

$(x_i)_{i=1}^r$ ist Nichtnullteilerfolge bezüglich $M \iff$
$(x_j)_{j=1}^s$ ist Nichtnullteilerfolge bezüglich M und
$(x_k)_{k=s+1}^r$ ist Nichtnullteilerfolge bezüglich $M/\sum_{j=1}^s x_j M$.

Für $s = 1$ ergibt sich:

$(x_i)_{i=1}^r$ ist Nichtnullteilerfolge bezüglich $M \iff$
x_1 ist Nichtnullteiler bezüglich M und
$(x_k)_{k=2}^r$ ist Nichtnullteilerfolge bezüglich $M/x_1 M$.

Damit haben wir eine ***rekursive Beschreibung der Nichtnullteilerfolgen*** gefunden.

(B) Sei $h : R \to R'$ ein Homomorphismus von Ringen, und sei M ein R'-Modul. Vermöge der Skalarmultiplikation

$$x \cdot m := h(x)m$$

wird dann M zum R-Modul. Sind $x_1, \dots, x_r \in R$, so ist $(x_i)_{i=1}^r$ offenbar genau dann bezüglich M eine Nichtnullteilerfolge, wenn $\big(h(x_i)\big)_{i=1}^r$ es ist. Die soeben festgestellte ***Grundringunabhängigkeit der Nichtnullteilerfolgen*** wenden wir oft an in der Situation, wo $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal ist mit $\mathfrak{a}M = 0$, also wo M dann ein Modul über $R/\mathfrak{a}$ ist, vgl. (3.3). Wenden wir das eben Gesagte an auf den Restklassenhomomorphismus $\bar{\cdot} : R \to R/\mathfrak{a}$, so bilden r Elemente $x_1, \dots, x_r \in R$ genau dann eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M, wenn dies ihre Restklassen $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_r} \in R/\mathfrak{a}$ tun.

(C) Sei R ein Ring. Jede Folge $(x_i)_{i=1}^r$ in R ist eine Nichtnullteilerfolge bezüglich 0. Ist weiter M ein R-Modul und $x_1 \in R^*$ eine Einheit in R, so ist x_1 ein Nichtnullteiler bezüglich M, und wegen $M/x_1M = 0$ und Teil (A) ist dann jede mit x_1 beginnende Folge $(x_i)_{i=1}^r$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M.

(D) Ist R ein Ring und M ein nicht-trivialer R-Modul, so ist $1, 0$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M, aber die Folge $0, 1$ ist es nicht. Im allgemeinen darf man also die Mitglieder einer Nichtnullteilerfolge nicht vertauschen.

§ Die Tiefe eines Moduls bezüglich eines Ideals

5.3 Definition. Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Die ***Tiefe von M bezüglich $\mathfrak{a}$*** definieren wir dann als das Supremum der Längen r aller Nichtnullteilerfolgen $(x_i)_{i=1}^r$ bezüglich M, die aus lauter Elementen $x_i \in \mathfrak{a}$ bestehen, also:

$$\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) := \sup \Big\{ r \in \mathbb{N}_0 \;\Big|\; \exists\, x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{a} : (x_i)_{i=1}^r \text{ ist NNT-Folge bezüglich } M \Big\}.$$

5.4 Satz: Grundringunabhängigkeit der Tiefe. Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Sei $\mathfrak{b} \subseteq R$ ein Ideal so, dass $\mathfrak{b}M = 0$. Dann gilt:

$$\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{t}_{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}}(M) = \mathrm{t}_{\mathfrak{a}(R/\mathfrak{b})}(M),$$

wobei M im zweiten und dritten Term als Modul über $R/\mathfrak{b}$ aufgefasst wird.

Beweis. Leicht aus (5.2)(B). ∎

§ Das Annullatorenlemma

5.5 Satz: Annullatorenlemma. Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt:

$$\sqrt{0 \underset{R}{:} M/\mathfrak{a}M} = \sqrt{\mathfrak{a} + (0 \underset{R}{:} M)}.$$

Beweis. "$\supseteq$" Ist $x \in \mathfrak{a} + (0 :_R M)$, so können wir schreiben $x = y + z$ mit $y \in \mathfrak{a}$ und $z \in 0 :_R M$. Es folgt, dass $xM \subseteq yM + zM \subseteq \mathfrak{a}M + 0 = \mathfrak{a}M$, also $x \in 0 :_R M/\mathfrak{a}M$. Es gilt also $0 :_R M/\mathfrak{a}M \supseteq \mathfrak{a} + (0 :_R M)$, und durch Übergang zu den Radikalen folgt die gewünschte Inklusion.

"$\subseteq$" Mit geeigneten Elementen $m_1, \ldots, m_n \in M$ können wir schreiben $M = \sum_{i=1}^n Rm_i$. Sei $x \in 0 :_R M/\mathfrak{a}M$. Dann gilt $xM \subseteq \mathfrak{a}M$. Für jeden Index $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es also Elemente $y_{i1}, \ldots, y_{in} \in \mathfrak{a}$ so, dass $xm_i = \sum_{j=1}^n y_{ij}m_j$. So erhalten wir das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij}x - y_{ij})m_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

wo δ_{ij} für das Kronecker-Symbol steht. Sind $I_n := [\,\delta_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\,] \in R^{n\times n}$ die Einheitsmatrix und $Y := [\,-y_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\,] \in \mathfrak{a}^{n\times n}$, so können wir schreiben

$$(xI_n + Y) \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nach (3.24) folgt $\det(xI_n + Y)m_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, also $\det(xI_n + Y) \in 0 :_R M$. Wegen $Y \in \mathfrak{a}^{n\times n}$ können wir schreiben $\det(xI_n + Y) = x^n + y$, wo $y \in \mathfrak{a}$ geeignet gewählt ist. Also ist $x^n \in \mathfrak{a} + (0 :_R M)$, also $x \in \sqrt{\mathfrak{a} + (0 :_R M)}$. Dies zeigt, dass $0 :_R M/\mathfrak{a}M \subseteq \sqrt{\mathfrak{a} + (0 :_R M)}$. Durch Übergang zu den Radikalen folgt nach (2.31)(d) die gewünschte Inklusion. ∎

§ Die Höhe eines Moduls bezüglich eines Ideals

5.6 Definition. Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul.

(A) Die ***$\mathfrak{a}$-Höhe*** $\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M)$ ***von*** M definieren wir als das Infimum der Höhen aller minimalen Primoberideale des Erweiterungsideals $\mathfrak{a}\big(R/(0 :_R M)\big) \subseteq R/(0 :_R M)$ von $\mathfrak{a}$ nach dem Restklassenring von R modulo des Annullators von M, also

$$\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) := \inf\Big\{\, \mathrm{h}(\overline{\mathfrak{p}}) \;\Big|\; \overline{\mathfrak{p}} \in \min\Big(\mathfrak{a}\big(R/(0 \underset{R}{:} M)\big)\Big) \Big\}.$$

(B) Die ***Höhe*** $\mathrm{h}(\mathfrak{a})$ ***von*** $\mathfrak{a}$ definieren wir als die $\mathfrak{a}$-Höhe des R-Moduls R, also

$$\mathrm{h}(\mathfrak{a}) := \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(R).$$

Dabei ist leicht zu sehen, dass diese Definition im Fall von $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ zur Definition (3.6) äquivalent ist.

5.7 Bemerkungen. Es gelten die Bezeichnungen von (5.6).

(A) Da wir das Infimum der leeren Menge als ∞ definieren, gilt:

$$\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) = \infty \;\Leftarrow\; \mathfrak{a}\big(R/(0 \underset{R}{:} M)\big) = R/(0 \underset{R}{:} M) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{a} + (0 \underset{R}{:} M) = R,$$

wobei die zweite doppelte Implikation im Hinblick auf die Gleichheit $\mathfrak{a}\big(R/(0 :_R M)\big) = \big(\mathfrak{a} + (0 :_R M)\big)/(0 :_R M)$ folgt.

(B) Weil der Annullator jedes beliebigen Rings immer gerade 0 ist, folgt:

$$\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{h}\Big(\mathfrak{a}\big(R/(0 \underset{R}{:} M)\big)\Big).$$

(C) Weil insbesondere $R/(0 :_R R) \cong R$ ist, sieht man leicht, dass gilt:

$$\mathrm{h}(\mathfrak{a}) = \inf\Big\{\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \;\Big|\; \mathfrak{p} \in \min(\mathfrak{a})\Big\}.$$

5.8 Satz: Grundringunabhängigkeit der Höhe. Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Sei $\mathfrak{b} \subseteq R$ ein weiteres Ideal so, dass $\mathfrak{b}M = 0$. Dann gilt:

$$\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{h}_{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}}(M) = \mathrm{h}_{\mathfrak{a}(R/\mathfrak{b})}(M),$$

wobei M im zweiten und dritten Term als Modul über $R/\mathfrak{b}$ aufgefasst wird.

Beweis. In $R/\mathfrak{b}$ gilt $0 :_{R/\mathfrak{b}} M = (0 :_R M)/\mathfrak{b}$. Insbesondere besteht ein Isomorphismus von Ringen $\Phi : R' := R/(0 :_R M) \to (R/\mathfrak{b})/\big((0 :_R M)/\mathfrak{b}\big) = (R/\mathfrak{b})/(0 :_{R/\mathfrak{b}} M) =: R''$, definiert durch $x + (0 :_R M) \mapsto (x + \mathfrak{b}) + (0 :_R M)/\mathfrak{b}$. Dabei gilt $\Phi\big(\mathfrak{a}R'\big) = \mathfrak{a}(R/\mathfrak{b})R'' = \big((\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}\big)R''$. Insbesondere ist also

$$\mathrm{Spec}(\Phi) : \mathrm{Spec}(R'') \to \mathrm{Spec}(R')$$

ein Homöomorphismus, und es besteht eine Bijektion

$$\mathrm{Spec}(\Phi)|_{\min(((\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b})R'')} : \min\big(\big((\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}\big)R''\big) \to \min(\mathfrak{a}R'),$$

wobei für alle $\mathfrak{p}'' \in \mathrm{Spec}(R'')$ gilt $\mathrm{h}\big(\mathrm{Spec}(\Phi)(\mathfrak{p}'')\big) = \mathrm{h}\big(\mathfrak{p}''\big)$. Daraus folgt $\mathrm{h}_{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}}(M) = \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M)$. ■

§ Ein Kriterium für unendliche Höhe

5.9 Satz. Sei R ein noetherscher Ring, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt:

$$\mathfrak{a}M \neq M \;\Leftrightarrow\; \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) < \infty.$$

Beweis. "$\Rightarrow$" Wegen $\big(\mathfrak{a}+(0 :_R M)\big)M = \mathfrak{a}M \neq M$ ist $\mathfrak{a}+(0 :_R M) \neq R$, also $\mathfrak{a}\big(R/(0 :_R M)\big) \neq R/(0 :_R M)$, vgl. (5.7)(A). Nach (2.27) besitzt das Ideal $\mathfrak{a}\big(R/(0 :_R M)\big)$ von $R/(0 :_R M)$ minimale Primoberideale, und diese sind nach (1.17) und (3.32) von endlicher Höhe. So folgt, dass $\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) < \infty$.

"$\Leftarrow$" Sei $\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) < \infty$. Dann ist $\mathfrak{a} + (0 :_R M) \neq R$, vgl. (5.7)(A). Nach (5.5) und (2.31)(c) folgt $\sqrt{0 :_R M/\mathfrak{a}M} = \sqrt{\mathfrak{a} + (0 :_R M)} \neq R$. Wieder wegen (2.31)(c) ist $0 :_R M/\mathfrak{a}M \neq R$, also $M/\mathfrak{a}M \neq 0$, d.h. $\mathfrak{a}M \neq M$. ■

5.10 Satz. Sei R ein noetherscher Ring, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Ist $x \in \mathfrak{a}$, so gilt

$$\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) \geq \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M/xM) \geq \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) - 1.$$

Liegt x zudem in keinem minimalen Primoberideal von $0 :_R M$, so gilt sogar

$$\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M/xM) = \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) - 1.$$

Beweis. Seien $\overline{R} := R/(0 :_R M)$ und $\overline{\overline{R}} := R/(0 :_R M/xM)$. Wegen $0 :_R M \subseteq 0 :_R M/xM$ wird nach dem Homomorphiesatz durch $y + (0 :_R M) \mapsto y + (0 :_R M/xM)$ ein surjektiver Homomorphismus $f : \overline{R} \to \overline{\overline{R}}$ definiert. Dabei gilt $\mathrm{Ker}(f) = (0 :_R M/xM)\overline{R}$. Sei $\overline{x} := x + (0 :_R M) \in \overline{R}$. Wegen $x \in 0 :_R M/xM$ ist $f(\overline{x}) = 0$, d.h. $(\overline{x}) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Sei umgekehrt $\overline{y} \in \mathrm{Ker}(f)$. Wir können dann schreiben $\overline{y} = y + (0 :_R M)$ mit einem geeigneten Element $y \in 0 :_R M/xM$. Nach (5.5) folgt $y \in \sqrt{(x) + (0 :_R M)}$, und wir finden ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y^n \in (x) + (0 :_R M)$. Es folgt $\overline{y}^n = y^n + (0 :_R M) \in (x)\overline{R} \subseteq (\overline{x})$, also $\overline{y} \in \sqrt{(\overline{x})}$. Insgesamt haben wir somit $(\overline{x}) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \subseteq \sqrt{(\overline{x})}$ und erhalten durch Übergang zu den Radikalen die Beziehung $\sqrt{\mathrm{Ker}(f)} = \sqrt{(\overline{x})}$. Mit (2.31)(b) folgt $\mathrm{Var}\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \mathrm{Var}\big((\overline{x})\big)$.

Wenden wir jetzt (2.48) auf $f : \overline{R} \to \overline{\overline{R}}$ und (2.16)(B) auf die Restklassenabbildung $g : \overline{R} \to \overline{R}/(\overline{x})$ an, so erhalten wir die folgenden Bijektionen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\big((\overline{x})\big) &\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{Spec}\big(\overline{\overline{R}}\big), & \overline{\mathfrak{p}} &\mapsto \overline{\mathfrak{p}}\overline{\overline{R}}, \\ \mathrm{Var}\big((\overline{x})\big) &\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{Spec}\big(\overline{R}/(\overline{x})\big), & \overline{\mathfrak{p}} &\mapsto \overline{\mathfrak{p}}/(\overline{x}). \end{aligned}$$

Diese zeigen, dass $\mathrm{h}\big(\overline{\mathfrak{p}}\overline{\overline{R}}\big) = \mathrm{h}\big(\overline{\mathfrak{p}}/(\overline{x})\big)$ und $\mathrm{h}\big(\overline{\mathfrak{p}}\overline{\overline{R}}\big) \leq \mathrm{h}(\overline{\mathfrak{p}})$ für alle $\overline{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Var}\big((\overline{x})\big)$. Nach (3.33) folgt deshalb $\mathrm{h}(\overline{\mathfrak{p}}) \geq \mathrm{h}\big(\overline{\mathfrak{p}}\overline{\overline{R}}\big) = \mathrm{h}\big(\overline{\mathfrak{p}}/(\overline{x})\big) \geq \mathrm{h}(\overline{\mathfrak{p}}) - 1$ für alle $\overline{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Var}\big((\overline{x})\big)$. Vermeidet x alle minimalen Primoberideale von $0 :_R M$, so vermeidet $\overline{x}$ nach (2.48) — angewandt auf die Restklassenabbildung $R \to \overline{R}$ — die minimalen Primideale von $\overline{R}$. In diesem Fall gilt für alle $\overline{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Var}\big((\overline{x})\big)$ sogar die Gleichheit $\mathrm{h}\big(\overline{\mathfrak{p}}\overline{\overline{R}}\big) = \mathrm{h}\big(\overline{\mathfrak{p}}/(\overline{x})\big) = \mathrm{h}(\overline{\mathfrak{p}}) - 1$, wie ebenfalls aus (3.33) folgt.

Aus $\mathrm{Var}\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \mathrm{Var}\big((\overline{x})\big)$ und $(\overline{x}) \subseteq \mathfrak{a}\overline{R}$ folgt nach (2.9)(c) sofort, dass

$$\mathrm{Var}\big(\mathfrak{a}\overline{R} + \mathrm{Ker}(f)\big) = \mathrm{Var}(\mathfrak{a}\overline{R}) \cap \mathrm{Var}\big((\overline{x})\big) = \mathrm{Var}(\mathfrak{a}\overline{R}),$$

also $\min\big(\mathfrak{a}\overline{R} + \mathrm{Ker}(f)\big) = \min(\mathfrak{a}\overline{R})$. Wir wenden jetzt nochmals (2.48) auf die beiden Abbildungen $f : \overline{R} \to \overline{\overline{R}}$ und $g : \overline{R} \to \overline{R}/x\overline{R}$ an und sehen, dass $\min\big(\mathfrak{a}\overline{\overline{R}}\big) = \big\{\overline{\mathfrak{p}}\overline{\overline{R}} \mid \overline{\mathfrak{p}} \in \min(\mathfrak{a}\overline{R})\big\}$. So folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M/xM) &= \inf\big\{\mathrm{h}\big(\overline{\mathfrak{p}}\overline{\overline{R}}\big) \mid \overline{\mathfrak{p}} \in \min(\mathfrak{a}\overline{R})\big\} \\ &\geq \inf\big\{\mathrm{h}(\overline{\mathfrak{p}}) - 1 \mid \overline{\mathfrak{p}} \in \min(\mathfrak{a}\overline{R})\big\} \\ &= \inf\big\{\mathrm{h}(\overline{\mathfrak{p}}) \mid \overline{\mathfrak{p}} \in \min(\mathfrak{a}\overline{R})\big\} - 1 \\ &= \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) - 1, \end{aligned}$$

wobei Gleichheit gilt, wenn x in keinem minimalen Primoberideal von $0 :_R M$ liegt. ∎

§ Vergleich von Tiefe und Höhe

5.11 Satz. Sei R ein noetherscher Ring, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt:

$$\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) \leq \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M).$$

Beweis. Wir machen Induktion über die ohne Einschränkung endliche Grösse $\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M)$. Sei zunächst $\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) = 0$. Dann gibt es ein minimales Primoberideal $\overline{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{a}\big(R/(0:_R M)\big)$ in $R/(0:_R M)$ mit $\mathrm{h}(\overline{\mathfrak{p}}) = 0$. Nach (3.7) ist $\overline{\mathfrak{p}}$ dann ein minimales Primideal von $R/(0:_R M)$. Das Urbild $\mathfrak{p} := \overline{\mathfrak{p}} \cap R$ von $\overline{\mathfrak{p}}$ in R ist deshalb nach (2.48) ein minimales Primoberideal von $0:_R M$. Nach (4.16) folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ ergibt sich nun aus (4.14), dass $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{NT}_R(M)$. Es gibt also kein Element $x \in \mathfrak{a} \cap \mathrm{NNT}_R(M)$. Dies bedeutet, dass $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) = 0$.

Sei jetzt $\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) > 0$, und sei $(x_i)_{i=1}^r$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M mit $x_i \in \mathfrak{a}$ für $i = 1, \ldots, r$. Dann ist $x_1 \notin \mathrm{NT}_R(M)$ und liegt deshalb nach (4.14) und (4.16) ausserhalb der minimalen Primoberideale von $0:_R M$. Nach (5.10) folgt $\mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M/x_1M) = \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) - 1$. Gemäss Induktionsvoraussetzung gilt aber $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M/x_1M) \leq \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) - 1$. Nach (5.2)(A) ist $(x_i)_{i=2}^r$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M/x_1M. Weil diese Folge in $\mathfrak{a}$ liegt, ergibt sich $r - 1 \leq \mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M/x_1M) \leq \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M) - 1$, also $r \leq \mathrm{h}_{\mathfrak{a}}(M)$. Dies liefert die Behauptung. ■

§ Ein Kriterium für unendliche Tiefe

5.12 Satz. Sei R ein Ring, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann ist $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) = \infty$.

Beweis. Nehmen wir an, es sei $t := \mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) < \infty$. Dann gibt es eine Nichtnullteilerfolge $(x_i)_{i=1}^t$ bezüglich M, deren Elemente x_i zu $\mathfrak{a}$ gehören. Wir setzen $\overline{M} := M/\sum_{i=1}^t x_iM$. Dann ist $\overline{M}$ wieder ein endlich erzeugter R-Modul, und es gilt offenbar $\mathfrak{a}\overline{M} = \overline{M}$. Nach (3.25) gibt es ein Element $x_{t+1} \in \mathfrak{a}$ mit $(1+x_{t+1})\overline{M} = 0$. Ist $\overline{m} \in \overline{M} \setminus 0$, so folgt $\overline{m} + x_{t+1}\overline{m} = (1+x_{t+1})\overline{m} = 0$, also $x_{t+1}\overline{m} \neq 0$. Deshalb ist $x_{t+1} \in \mathrm{NNT}_R(\overline{M})$. Nach (5.2)(A) wird $(x_i)_{i=1}^{t+1}$ so zur in $\mathfrak{a}$ liegenden Nichtnullteilerfolge bezüglich M. Damit ergibt sich ein Widerspruch zu $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) = t$. ■

5.13 Korollar. Sei R ein noetherscher Ring, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt:

$$\mathfrak{a}M \neq M \;\Leftrightarrow\; \mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M) < \infty.$$

Beweis. Klar aus (5.9), (5.11) und (5.12). ■

§ Das Nichtnullteilerlemma von Matsumura

5.14 Lemma. Sei R ein Ring, M ein R-Modul, sei $x \in \mathrm{NNT}_R(M)$, und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M/xM)$. Sei weiter $y \in \mathrm{NNT}_R(M) \cap \mathfrak{p}$. Dann gilt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M/yM)$.

Beweis. Wir finden ein Element $\bar{t} \in M/xM$ mit $\mathfrak{p} = 0 :_R \bar{t}$. Schreiben wir $\bar{t}$ als Restklasse eines Elementes $t \in M$, so folgt $\mathfrak{p} = xM :_R t$. Wegen $y \in \mathfrak{p}$ ist $yt \in xM$, und wir können schreiben $yt = xs$ mit $s \in M$. Es folgt $x\mathfrak{p}s = \mathfrak{p}xs = \mathfrak{p}yt = y\mathfrak{p}t \subseteq yxM = xyM$. Weil x bezüglich M Nichtnullteiler ist, ergibt sich $\mathfrak{p}s \subseteq yM$, also $\mathfrak{p} \subseteq yM :_R s$.

Umgekehrt ist $y(yM :_R s)t = (yM :_R s)yt = (yM :_R s)xs = x(yM :_R s)s \subseteq xyM = yxM$. Weil y bezüglich M Nichtnullteiler ist, folgt $(yM :_R s)t \subseteq xM$, also $yM :_R s \subseteq xM :_R t = \mathfrak{p}$.

Somit ist $yM :_R s = \mathfrak{p}$. Ist $\bar{s}$ die Restklasse von s in M/yM, so folgt $0 :_R \bar{s} = \mathfrak{p}$, also in der Tat $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M/yM)$. ■

5.15 Lemma. Sei R ein Ring, sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge, sei M ein R-Modul, und sei $N \subseteq M$ ein Untermodul. Durch

$$\frac{m}{s} + S^{-1}N \mapsto \frac{m+N}{s}$$

wird dann ein Isomorphismus

$$S^{-1}M/S^{-1}N \xrightarrow{\cong} S^{-1}(M/N)$$

von $S^{-1}R$-Moduln definiert.

Beweis. Durch die Vorschrift $\frac{m}{s} \mapsto \frac{m+N}{s}$ wird offenbar ein surjektiver Homomorphismus $h : S^{-1}M \to S^{-1}(M/N)$ definiert. Es genügt zu zeigen, dass $\mathrm{Ker}(h) = S^{-1}N$. Sind $m \in M$ und $s \in S$ mit $\frac{m}{s} \in \mathrm{Ker}(h)$, so gilt für die Restklasse $\overline{m}$ von m modulo N offenbar $\frac{\overline{m}}{s} = 0$. Mit einem geeigneten Nenner $t \in S$ folgt dann $t\overline{m} = 0$, also $tm \in N$. Es wird damit $\frac{m}{s} = \frac{tm}{st} \in S^{-1}N$. Damit ist $\mathrm{Ker}(h) \subseteq S^{-1}N$. Die Inklusion $S^{-1}N \subseteq \mathrm{Ker}(h)$ ist sofort klar. ■

5.16 Lemma. Sei R ein Ring, sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge, und sei M ein R-Modul. Sei $(x_i)_{i=1}^r$ eine Nichtnullteilerfolge in R bezüglich M, und seien $s_1, \ldots, s_r \in S$. Dann ist $(\frac{x_i}{s_i})_{i=1}^r$ eine Nichtnullteilerfolge in $S^{-1}R$ bezüglich $S^{-1}M$.

Beweis. (Induktion nach r). Sei $r = 1$. Sei $u \in S^{-1}M$ so, dass $\frac{x_1}{s_1}u = 0$. Mit geeigneten Elementen $m \in M$ und $s \in S$ können wir schreiben $u = \frac{m}{s}$, und erhalten $\frac{x_1 m}{s_1 s} = 0$. Also gibt es ein Element $t \in S$ so, dass $tx_1 m = 0$. Weil x_1 bezüglich M ein Nichtnullteiler ist, folgt $tm = 0$. Also ist auch $u = 0$. Damit ist gezeigt, dass $\frac{x_1}{s_1} \in \mathrm{NNT}_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$.

Sei jetzt $r > 1$. Nach Induktion ist $\left(\frac{x_i}{s_i}\right)_{i=1}^{r-1}$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich $S^{-1}M$. Wegen $x_r \in \mathrm{NNT}_R\big(M/\sum_{j=1}^{r-1} x_j M\big)$ ist nach dem oben Gezeigten

$$\tfrac{x_r}{s_r} \in \mathrm{NNT}_{S^{-1}R}\big(S^{-1}\big(M/\textstyle\sum_{j=1}^{r-1} x_j M\big)\big).$$

Gemäss (5.15) ist dann $\frac{x_r}{s_r}$ aber auch Nichtnullteiler bezüglich

$$S^{-1}M/S^{-1}\big(\textstyle\sum_{j=1}^{r-1} x_j M\big) = S^{-1}M/\sum_{j=1}^{r-1} \frac{x_j}{s_j} S^{-1}M.$$

Die Behauptung folgt jetzt mit (5.2)(A). ∎

5.17 Satz: Nichtnullteilerlemma von Matsumura. Sei R ein noetherscher Ring, sei M ein endlich erzeugter R-Modul, sei $x \in \mathrm{NNT}_R(M)$, und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. Ist $\mathfrak{q}$ ein minimales Primoberideal von $xR + \mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(M/xM)$.

Beweis. Nach (5.16) ist $\frac{x}{1} \in \mathrm{NNT}_{R_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q})$. Nach (4.38) ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q})$. Nach (3.12)(D) ist $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$ ein minimales Primoberideal von $\frac{x}{1}R_\mathfrak{q} + \mathfrak{p}R_\mathfrak{q} = (xR+\mathfrak{p})_\mathfrak{q}$. Wenn wir zeigen können, dass $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}/\frac{x}{1}M_\mathfrak{q})$, so folgt nach (5.15) und (4.7)(b) sofort, dass $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{q}}\big((M/xM)_\mathfrak{q}\big)$. Mit (4.38) und (3.12)(C) folgt dann, dass $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(M/xM)$. Deshalb können wir R durch $R_\mathfrak{q}$ ersetzen und annehmen, $(R,\mathfrak{q})$ sei lokal.

Wegen $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ finden wir ein $t \in M \smallsetminus 0$ mit $0 :_R t = \mathfrak{p}$. Insbesondere ist dann $t \in N := 0 :_M \mathfrak{p}$, also $N \neq 0$. Wegen $\mathfrak{q} \in \min(xR+\mathfrak{p})$, und weil $(R,\mathfrak{q})$ lokal ist, gilt $\mathfrak{q} = \sqrt{xR+\mathfrak{p}}$, denn es ist $\mathrm{Var}(xR+\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}\}$, vgl. (2.30). Nach (2.38) gibt es also ein $n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $\mathfrak{q}^n \subseteq xR+\mathfrak{p}$. Insbesondere ist $\mathfrak{q}^n N \subseteq (xR+\mathfrak{p})N \subseteq xN + \mathfrak{p}N \subseteq xM + 0 = xM$.

Wir wählen $n \in \mathbb{N}_0$ minimal mit der Eigenschaft, dass $\mathfrak{q}^n N \subseteq xM$. Dann ist $n > 0$, denn sonst wäre $N \subseteq xM$, und mit $T := N :_M x$ wäre $N = xT$. Es wäre dann $x\mathfrak{p}T = \mathfrak{p}N = 0$, wegen $x \in \mathrm{NNT}_R(M)$ also $\mathfrak{p}T = 0$, d.h. $T \subseteq N$. Damit wäre $N \subseteq xN$, also erst recht $N \subseteq \mathfrak{q}N$, d.h. $N = \mathfrak{q}N$. Nach (3.26) ergäbe sich der Widerspruch $N = 0$.

Damit ist $\mathfrak{q}^{n-1}N \nsubseteq xM$. Wählen wir ein Element $s \in \mathfrak{q}^{n-1}N \smallsetminus xM$, so ist $\mathfrak{q}s \subseteq xM$, also $\mathfrak{q} \subseteq xM :_R s \subsetneq R$. Weil $\mathfrak{q}$ ein Maximalideal ist, folgt $\mathfrak{q} = xM :_R s$. Ist $\overline{s} = s + xM$ die Restklasse von s in M/xM, so folgt $\mathfrak{q} = 0 :_R \overline{s}$, also $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(M/xM)$. ∎

§ Vertauschungssatz für Nichtnullteilerfolgen in lokalen Ringen

5.18 Satz: Vertauschungssatz für Nichtnullteilerfolgen. Sei $(R,\mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, sei M ein endlich erzeugter R-Modul, und sei $(x_i)_{i=1}^r$ eine Nichtnullteilerfolge in $\mathfrak{m}$ bezüglich M. Sei $\sigma \in \mathbb{S}_r$ eine Permutation von $\{1,\ldots,r\}$. Dann ist auch $(x_{\sigma(i)})_{i=1}^r$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M.

Beweis. (Induktion nach r). Wegen (5.2)(C) können wir o.B.d.A. $M \neq 0$ annehmen. Für $r = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $r = 2$. Es ist dann zu zeigen, dass auch x_2, x_1 eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M ist. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. Wegen $x_1R + \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ besitzt $x_1R + \mathfrak{p}$

ein minimales Primoberideal $\mathfrak{q}$, vgl. (2.27). Nach (5.17) ist $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(M/x_1M)$. Wegen $x_2 \in \mathrm{NNT}_R(M/x_1M)$ folgt aus (4.14) sofort, dass $x_2 \notin \mathfrak{q}$. Also ist erst recht $x_2 \notin \mathfrak{p}$. Nach (4.14) folgt so, dass $x_2 \in \mathrm{NNT}_R(M)$. Wegen (3.26) ist $x_2M \subseteq \mathfrak{m}M \neq M$, also $M/x_2M \neq 0$. Nach (1.8)(b) und (4.15) folgt dann $\mathrm{Ass}_R(M/x_2M) \neq \varnothing$. Sei also $\mathfrak{s} \in \mathrm{Ass}_R(M/x_2M)$. Wäre $x_1 \in \mathfrak{s}$, so wäre nach (5.14) auch $\mathfrak{s} \in \mathrm{Ass}_R(M/x_1M)$, und nach (4.14) ergäbe sich wegen $x_2 \in \mathfrak{s}$ der Widerspruch, dass $x_2 \in \mathrm{NT}_R(M/x_1M)$. Also ist $x_1 \notin \mathfrak{s}$, und wir sehen nach (4.14), dass $x_1 \in \mathrm{NNT}_R(M/x_2M)$. Damit ist x_2, x_1 eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M.

Sei $r > 2$. Weil sich σ als Komposition von Nachbartranspositionen darstellen lässt, genügt es, die Behauptung für solche zu zeigen. Sei also $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, und sei σ die Nachbartransposition, welche i und $i+1$ vertauscht. Wir müssen also zeigen, dass die Folge $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_r$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M ist.

Sei zunächst $i > 1$. Im Hinblick auf (5.2)(A) ist $x_2, \ldots, x_r$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M/x_1M. Nach Induktion ist dann $x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_r$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M/x_1M. Weil x_1 bezüglich M ein Nichtnullteiler ist, folgt die Behauptung nach (5.2)(A).

Sei jetzt $i = 1$. Gemäss dem schon behandelten Fall mit $r = 2$ ist x_2, x_1 eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M. Nach (5.2)(A) ist $x_3, \ldots, x_r$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich $M/(x_1M+x_2M) = M/(x_2M+x_1M)$. Wieder nach (5.2)(A) folgt nun, dass $x_2, x_1, x_3, \ldots, x_r$ bezüglich M eine Nichtnullteilerfolge ist. ∎

§ Der Hauptsatz über Nichtnullteilerfolgen

5.19 Lemma. Sei R ein noetherscher Ring, sei M ein R-Modul, und sei $(x_i)_{i=1}^r$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M. Sei $x_0 \in \mathrm{NNT}_R(M) \cap \bigcap_{i=1}^r \mathrm{NNT}_R\big(M/\sum_{j=1}^i x_jM\big)$. Dann ist $(x_i)_{i=0}^r$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M.

Beweis. (Induktion nach r). Sei $r = 1$. Nach (4.14) gilt $x_0 \notin \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/x_1M)$. Wegen $x_0, x_1 \in \mathrm{NNT}_R(M)$ folgt nach (5.14), dass $x_1 \notin \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(M/x_0M)$. Nach (4.14) ist also $x_1 \in \mathrm{NNT}_R(M/x_0M)$. Somit ist x_0, x_1 eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M.

Sei $r > 1$. Nach Induktion ist $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M. Gemäss (5.2)(A) bleibt zu zeigen, dass $x_r \in \mathrm{NNT}_R(\overline{M}_0)$, wo $\overline{M}_0 := M\big/\sum_{j=0}^{r-1} x_jM$. Nach Voraussetzung ist $x_0 \in \mathrm{NNT}_R(\overline{M}_1)$, wo $\overline{M}_1 := M\big/\sum_{j=1}^{r-1} x_jM$. Ebenfalls nach Voraussetzung ist $x_1, \ldots, x_r, x_0$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M. Nach (5.2)(A) ist deshalb x_r, x_0 eine Nichtnullteilerfolge bezüglich $\overline{M}_1$, also $x_0 \in \mathrm{NNT}_R(\overline{M}_1/x_r\overline{M}_1)$. Nach dem bereits behandelten Fall mit $r = 1$ folgt, dass x_0, x_r bezüglich $\overline{M}_1$ eine Nichtnullteilerfolge ist. Gemäss (5.2)(A) ist also $x_1, \ldots, x_{r-1}, x_0, x_r$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M. Damit ist aber x_r Nichtnullteiler bezüglich $M/(x_1M + \cdots + x_{r-1}M + x_0M) = \overline{M}_0$. ∎

5.20 Festsetzung. Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Wir nennen eine Folge $(x_i)_{i=1}^r$ eine ***in $\mathfrak{a}$ maximale Nichtnullteilerfolge bezüglich*** M, wenn es sich um eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M mit Elementen $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{a}$ handelt, und wenn es kein Element $x_{r+1} \in \mathfrak{a}$ so gibt, dass $(x_i)_{i=1}^{r+1}$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M wird.

Im Prinzip ist die Länge der maximalen Nichtnullteilerfolgen (x_i) in einem festen Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ je nach Folge verschieden, und insbesondere kann eine Abhängigkeit vom Startelement x_1 bestehen. Aber im noetherschen Fall wird das durch den folgenden Satz widerlegt!

5.21 Satz: Hauptsatz über Nichtnullteilerfolgen. Sei R ein noetherscher Ring, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Sei $r \in \mathbb{N}$ und $(x_i)_{i=1}^r$ eine Nichtnullteilerfolge in $\mathfrak{a}$ bezüglich M. Dann sind äquivalent:

(i) $r = \mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(M)$.

(ii) Die Folge $(x_i)_{i=1}^r$ ist eine in $\mathfrak{a}$ maximale Nichtnullteilerfolge bezüglich M.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Klar nach der Definition der Tiefe.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $(y_j)_{j=1}^s$ eine weitere Nichtnullteilerfolge in $\mathfrak{a}$ bezüglich M. Es gibt zu zeigen, dass $s \leq r$. Dies tun wir durch Induktion über r. Sei zunächst $r = 1$. Wegen der Maximalität der Nichtnullteilerfolge x_1 bezüglich M ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{NT}_R(M/x_1M)$. Nach (4.14), (4.10) und (2.5) finden wir ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M/x_1M)$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Nach (5.14) folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M/y_1M)$. Gemäss (4.14) ist also $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{NT}_R(M/y_1M)$, d.h. y_1 ist eine in $\mathfrak{a}$ maximale Nichtnullteilerfolge bezüglich M. Demnach ist $s = 1$; insbesondere ist $s \leq r$.

Sei also $r > 1$. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_0 &:= \mathrm{Ass}_R(M), \\
\mathfrak{P}_i &:= \mathrm{Ass}\big(M/\textstyle\sum_{k=1}^i x_kM\big) \quad \text{für } i = 1, \ldots, r-1, \\
\mathfrak{Q}_j &:= \mathrm{Ass}\big(M/\textstyle\sum_{l=1}^j y_lM\big) \quad \text{für } j = 1, \ldots, s-1, \\
\mathfrak{P} &:= \mathfrak{P}_0 \cup \cdots \cup \mathfrak{P}_{r-1}, \\
\mathfrak{Q} &:= \mathfrak{Q}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{Q}_{s-1}.
\end{aligned}$$

Wegen $x_{i+1} \in \mathfrak{a} \cap \mathrm{NNT}_R\big(M/\sum_{k=1}^i x_kM\big)$ für $i = 0, \ldots, r-1$ folgt nach (4.14) sofort, dass $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$. Genauso sieht man, dass $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}$. Weil nach (4.10) die Mengen $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{Q}_j$ jeweils endlich sind, folgt nach (2.5), dass $\mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}} \mathfrak{p} \cup \bigcup_{\mathfrak{q}\in\mathfrak{Q}} \mathfrak{q}$. So finden wir ein Element $z \in \mathfrak{a}$, welches nicht in der rechts stehenden Vereinigung liegt. Nach (4.14) gilt dann

$$\begin{aligned}
&z \in \mathrm{NNT}_R(M), \\
&z \in \mathrm{NNT}_R\big(M/\textstyle\sum_{k=1}^i x_kM\big) \quad \text{für } i = 1, \ldots, r-1, \\
&z \in \mathrm{NNT}_R\big(M/\textstyle\sum_{l=1}^j y_lM\big) \quad \text{für } j = 1, \ldots, s-1.
\end{aligned}$$

Gemäss (5.19) bestehen also in $\mathfrak{a}$ bezüglich M die beiden Nichtnullteilerfolgen $z, x_1, \ldots, x_{r-1}$ und $z, y_1, \ldots, y_{s-1}$. Nach (5.2)(A) ist x_r eine in $\mathfrak{a}$ maximale Nichtnullteilerfolge bezüglich $\overline{M} := M/\sum_{k=1}^{r-1} x_kM$. Nach dem bereits behandelten Fall mit $r = 1$ ist deshalb $\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}(\overline{M}) = 1$. Insbesondere ist z eine in $\mathfrak{a}$ maximale Nichtnullteilerfolge bezüglich $\overline{M}$. Damit gibt es in $\mathfrak{a}$ keine Nichtnullteiler bezüglich $M/\big(zM + \sum_{k=1}^{r-1} x_kM\big) \cong \overline{M}/z\overline{M}$. Also ist $z, x_1, \ldots, x_{r-1}$ eine in $\mathfrak{a}$ maximale Nichtnullteilerfolge bezüglich M. Nach (5.2)(A) ist $x_1, \ldots, x_{r-1}$ also eine in $\mathfrak{a}$ maximale Nichtnullteilerfolge bezüglich M/zM. Weiter ist $y_1, \ldots, y_{s-1}$ eine in $\mathfrak{a}$ liegende

Nichtnullteilerfolge bezüglich M/zM. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $s-1 \leq r-1$. Es folgt $s \leq r$. ∎

§ Einige Schlussfolgerungen

5.22 Korollar. Sei R ein noetherscher Ring, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Sei $x \in \mathfrak{a} \cap \mathrm{NNT}_R(M)$. Dann gelten:

(a) $\mathrm{t}_\mathfrak{a}(M/xM) = \mathrm{t}_\mathfrak{a}(M) - 1$.

(b) $\mathrm{h}_\mathfrak{a}(M/xM) = \mathrm{h}_\mathfrak{a}(M) - 1$.

Beweis. "(a)" Sei zunächst $\mathrm{t}_\mathfrak{a}(M) = \infty$. Nach (5.13) ist dann $\mathfrak{a}M = M$, also gilt ebenfalls $\mathfrak{a}(M/xM) = M/xM$. Wiederum nach (5.13) ist also $\mathrm{t}_\mathfrak{a}(M/xM) = \infty = \infty - 1 = \mathrm{t}_\mathfrak{a}(M) - 1$.

Sei also $\mathrm{t}_\mathfrak{a}(M) < \infty$. Wir ergänzen x zu einer in $\mathfrak{a}$ maximalen Nichtnullteilerfolge $x, x_2, \ldots, x_r$ bezüglich M. Aus (5.21) folgt $r = \mathrm{t}_\mathfrak{a}(M)$. Nach (5.2)(A) ist dann $x_2, \ldots, x_r$ eine in $\mathfrak{a}$ maximale Nichtnullteilerfolge bezüglich M/xM. Nach (5.21) folgt damit die Gleichheit $r - 1 = \mathrm{t}_\mathfrak{a}(M/xM)$.

"(b)" Diese Gleichung folgt direkt aus (5.10), da ja x als Nichtnullteiler bezüglich M nach (4.14) und (4.16) in keinem minimalen Primoberideal von $0 :_R M$ liegt. ∎

5.23 Korollar. Sei R ein noetherscher Ring, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Sei $(x_i)_{i=1}^r$ eine Nichtnullteilerfolge in $\mathfrak{a}$ bezüglich M. Dann gelten:

(a) $\mathrm{t}_\mathfrak{a}\bigl(M/\sum_{i=1}^r x_i M\bigr) = \mathrm{t}_\mathfrak{a}(M) - r$.

(b) $\mathrm{h}_\mathfrak{a}\bigl(M/\sum_{i=1}^r x_i M\bigr) = \mathrm{h}_\mathfrak{a}(M) - r$.

Beweis. (Induktion nach r). Der Fall mit $r = 1$ ist klar nach (5.22). Der Induktionsschritt ist jetzt leicht durchzuführen. ∎

5.24 Korollar. Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und ist $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich R, so gilt:

$$\dim\Bigl(R \Bigm/ \sum_{i=1}^r x_i R\Bigr) = \dim(R) - r.$$

Beweis. Mit (3.16), (5.6)(B), (5.8), (5.23)(b) gilt $\dim\bigl(R/\sum_{i=1}^r x_i R\bigr) = \mathrm{h}\bigl(\mathfrak{m}/\sum_{i=1}^r x_i R\bigr) = \mathrm{h}_{\mathfrak{m}/\sum_{i=1}^r x_i R}\bigl(R/\sum_{i=1}^r x_i R\bigr) = \mathrm{h}_\mathfrak{m}\bigl(R/\sum_{i=1}^r x_i R\bigr) = \mathrm{h}_\mathfrak{m}(R) - r = \mathrm{h}(\mathfrak{m}) - r = \dim(R) - r$. ∎

Kapitel 6

Cohen-Macaulay-Ringe

§ Der Träger eines Moduls

6.1 Festsetzung. Ist R ein Ring und M ein R-Modul, so definieren wir den ***Träger*** $\mathrm{Supp}_R(M)$ von M durch

$$\mathrm{Supp}_R(M) := \left\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \;\middle|\; M_\mathfrak{p} \neq 0\right\}.$$

6.2 Satz. Sei R ein Ring, M ein R-Modul, und sei $\mathfrak{b} \subseteq R$ ein Ideal so, dass $\mathfrak{b}M = 0$ (also so, dass M als $R/\mathfrak{b}$-Modul aufgefasst werden kann). Dann gelten:

(a) $\mathrm{Supp}_R(M) \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{b})$.

(b) $\mathrm{Supp}_{R/\mathfrak{b}}(M) = \left\{\mathfrak{p}/\mathfrak{b} \;\middle|\; \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)\right\}$.

Beweis. "(a)" Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)$. Dann ist $M_\mathfrak{p} \neq 0$. Es gibt also ein $m \in M$ und ein $t \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ so, dass $\frac{m}{t} \in M_\mathfrak{p} \smallsetminus \{0\}$. Es folgt $\frac{sm}{st} = \frac{m}{t} \neq 0$ für alle $s \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$, also $sm \neq 0$ für alle $s \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$. Wir erhalten $\mathfrak{b} \cap (R \smallsetminus \mathfrak{p}) = \varnothing$, also $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$.

"(b)" Zur Inklusion "$\subseteq$": Sei $\mathfrak{q} \in \mathrm{Supp}_{R/\mathfrak{b}}(M)$. Es folgt $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{b})$ und $M_\mathfrak{q} \neq 0$. Es gibt also ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{b})$ mit $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}/\mathfrak{b}$ und ein $m \in M$ und $\bar{t} \in R/\mathfrak{b} \smallsetminus \mathfrak{q}$ so, dass $\frac{m}{\bar{t}} \in M_\mathfrak{q} \smallsetminus \{0\}$. Für alle $s \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ folgt $\frac{sm}{(s+\mathfrak{b})\bar{t}} = \frac{(s+\mathfrak{b})m}{(s+\mathfrak{b})\bar{t}} = \frac{m}{\bar{t}} \neq 0$, also $sm \neq 0$. Wir erhalten so $\frac{m}{1} \in M_\mathfrak{p} \smallsetminus \{0\}$, also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)$.

Zur Inklusion "$\supseteq$": Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)$. Nach Aussage (a) folgt $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Zudem gibt es Elemente $m \in M$ und $t \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ so, dass $\frac{m}{t} \in M_\mathfrak{p} \smallsetminus \{0\}$. Ist $\bar{s} \in R/\mathfrak{b} \smallsetminus \mathfrak{p}/\mathfrak{b}$, so gibt es ein $s \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ mit $\bar{s} = s + \mathfrak{b}$. Wegen $\frac{sm}{st} = \frac{m}{t} \neq 0$ folgt $\bar{s}m = sm \neq 0$, also $\frac{m}{1_{R/\mathfrak{b}}} \in M_{\mathfrak{p}/\mathfrak{b}} \smallsetminus \{0\}$, d.h. $\mathfrak{p}/\mathfrak{b} \in \mathrm{Supp}_{R/\mathfrak{b}}(M)$. ■

6.3 Satz. Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Dann gilt:

$$\mathrm{Supp}_R(M) \subseteq \mathrm{Var}\Big(0 \underset{R}{:} M\Big).$$

Ist M endlich erzeugt, so gilt sogar:

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \mathrm{Var}\Big(0 \underset{R}{:} M\Big).$$

Beweis. Dass $\mathrm{Supp}_R(M) \subseteq \mathrm{Var}(0 :_R M)$ gilt, folgt aus (6.2)(a). Sei $m_1, \ldots, m_r$ ein endliches Erzeugendensysstem von M und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(0 :_R M)$. Ist $M_\mathfrak{p} = 0$, so $\frac{m_1}{1} = \cdots = \frac{m_r}{1} = 0$, also finden wir $u_1, \ldots, u_r \in R \setminus \mathfrak{p}$ mit $u_1 m_1 = u_2 m_2 = \cdots = u_r m_r = 0$. Dann liegt aber das Produkt $\prod_{i=1}^r u_i$ in $(0 :_R M) \cap (R \setminus \mathfrak{p})$, also $\mathfrak{p} \not\supseteq (0 :_R M)$, ein Widerspruch. Also $M_\mathfrak{p} \neq 0$, d.h. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)$. ∎

6.4 Korollar. Sind R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul, so gilt

$$\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M),$$

und die minimalen Elemente von $\mathrm{Ass}_R(M)$ sind genau die minimalen Elemente von $\mathrm{Supp}_R(M)$.

Beweis. Klar aus (6.3) und (4.16). ∎

6.5 Satz. Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ gilt:

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M) \Rightarrow \mathrm{Var}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M).$$

Beweis. Wir können o.E. annehmen, dass $\mathrm{Supp}_R(M) \neq \varnothing$. Sei also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)$. Dann gilt natürlich $\mathrm{Var}(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$. Sei $\mathfrak{q} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{p})$. Wir haben zu zeigen, dass $M_\mathfrak{q} \neq 0$. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann gilt $\frac{m}{1} = 0$ für alle $m \in M$. Für alle $m \in M$ finden wir also $u_m \in R \setminus \mathfrak{q}$ mit $u_m m = 0$. Weil $R \setminus \mathfrak{q} \subseteq R \setminus \mathfrak{p}$ gilt, für alle $m \in M$ und alle $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ finden wir dann $u_m \in R \setminus \mathfrak{p}$ so, dass $\frac{m}{s} = \frac{u_m m}{u_m s} = \frac{0}{u_m s} = 0$. Damit ist $M_\mathfrak{p} = 0$, ein Widerspruch. ∎

6.6 Satz. Seien R ein Ring und $0 \to N \to M \to P \to 0$ eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt:

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \mathrm{Supp}_R(N) \cup \mathrm{Supp}_R(P).$$

Beweis. Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ besteht die exakte Sequenz $0 \to N_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p} \to P_\mathfrak{p} \to 0$ von R-Moduln, vgl. (4.35). Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ gilt somit $M_\mathfrak{p} = 0$ genau dann, wenn $N_\mathfrak{p} = 0$ und $P_\mathfrak{p} = 0$. Die Bahaupung folgt nun unmittelbar. ∎

§ Die Dimension eines Moduls

6.7 Definition. Die ***Dimension*** (genauer: die ***Krull-Dimension***) $\dim_R(M)$ eines R-Moduls M definieren wir durch

$$\dim_R(M) := \sup\left\{ l \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \exists\, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l \in \operatorname{Supp}_R(M) : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l \right\}.$$

Dabei halten wir an der früheren Konvention fest, dass $\sup \varnothing = -\infty$. So gilt:

$$\dim_R(M) = -\infty \iff \operatorname{Supp}_R(M) = \varnothing.$$

Leicht sieht man, dass

$$\dim_R(M) \leq \dim(R).$$

Weil $\operatorname{Supp}_R(R) = \operatorname{Spec}(R)$, folgt sofort

$$\dim_R(R) = \dim(R),$$

d.h. die Dimension von R als Ring stimmt mit der Dimension von R als R-Modul überein.

6.8 Satz. Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Dann gilt:

$$\dim_R(M) = \sup\left\{ \dim(R/\mathfrak{p}) \;\middle|\; \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M) \right\}.$$

Beweis. Nehmen wir an, es gälte $\dim_R(M) > \sup\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M)\} =: s$. Wir finden dann eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ in $\operatorname{Supp}_R(M)$ der Länge $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r > s$. Aber $r \leq \dim(R/\mathfrak{p}_0) \leq s$, Widerspruch.

Andererseits bei allen $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Supp}_R(M)$ liegt jede Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_t$ oberhalb $\mathfrak{p}_0$ beliebiger Länge $t \in \mathbb{N}_0$ ganz in $\operatorname{Supp}_R(M)$, vgl. (6.5). Also $\dim(R/\mathfrak{p}_0) \leq \dim_R(M)$ für alle $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Supp}_R(M)$. Es folgt $\sup\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M)\} \leq \dim_R(M)$. ∎

6.9 Satz: Exaktheit der Dimension. Seien R ein Ring und $0 \to N \to M \to P \to 0$ eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt:

$$\dim_R(M) = \max\left\{ \dim_R(N), \dim_R(P) \right\}.$$

Beweis. Gemäss (6.6) gelten $\operatorname{Supp}_R(N) \subseteq \operatorname{Supp}_R(M)$ und $\operatorname{Supp}_R(P) \subseteq \operatorname{Supp}_R(M)$, und so $\dim_R(N) \leq \dim_R(M)$ und $\dim_R(P) \leq \dim_R(M)$.

Nach (6.6) gilt für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M)$, dass $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(N)$ oder $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(P)$. Ist dabei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(N)$, so $\dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim_R(N)$; ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(P)$, so $\dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim_R(P)$. Auf jeden Fall gilt $\dim(R/\mathfrak{p}) \leq \max\{\dim_R(N), \dim_R(P)\}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M)$. Jetzt schliessen wir mit (6.8). ∎

6.10 Satz: Grundringunabhängigkeit der Dimension. Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul, und sei $\mathfrak{b} \subseteq R$ ein Ideal mit $\mathfrak{b}M = 0$. Dann gilt:

$$\dim_R(M) = \dim_{R/\mathfrak{b}}(M),$$

wobei M im rechts stehenden Term als Modul über $R/\mathfrak{b}$ aufgefasst wird.

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{b})$. Dann gilt $R/\mathfrak{p} \cong (R/\mathfrak{b})/(\mathfrak{p}/\mathfrak{b})$, also $\dim\bigl(R/\mathfrak{p}\bigr) = \dim\bigl((R/\mathfrak{b})/(\mathfrak{p}/\mathfrak{b})\bigr)$. Jetzt schliesst man mit (6.2). ■

6.11 Satz: Dimension endlich erzeugter Moduln. Seien R ein Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt:

$$\dim_R(M) = \dim\bigl(R/(0 \underset{R}{:} M)\bigr).$$

Beweis. Nach (6.3) gilt $\mathrm{Supp}_R(M) = \mathrm{Var}(0 :_R M)$. Nach (2.16)(B) besteht eine Bijektion zwischen $\mathrm{Var}(0 :_R M)$ und $\mathrm{Spec}\bigl(R/(0 :_R M)\bigr)$. Dies zeigt alles. ■

§ Das Lokal-Global-Prinzip für die Gleichheit von Moduln

6.12 Satz: Lokal-Global-Prinzip für die Gleichheit von Moduln. Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul, und seien $U, V \subseteq M$ Untermoduln. Dann sind äquivalent:

(i) $U = V$.

(ii) $U_\mathfrak{p} = V_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$.

(iii) $U_\mathfrak{m} = V_\mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$.

Beweis. Die Implikationen "(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)" sind klar aus den Definitionen und (2.43)(a).

"(iii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $u \in U$. Für jedes $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ gilt also $\frac{u}{1} \in V_\mathfrak{m}$. Für jedes solche $\mathfrak{m}$ gibt es also Elemente $v_\mathfrak{m} \in V$ und $s_\mathfrak{m} \in R \setminus \mathfrak{m}$ derart, dass $\frac{u}{1} = \frac{v_\mathfrak{m}}{s_\mathfrak{m}}$. Mit einem geeigneten Nenner $s'_\mathfrak{m} \in R \setminus \mathfrak{m}$ folgt also $s'_\mathfrak{m} s_\mathfrak{m} u = s'_\mathfrak{m} v_\mathfrak{m} \in V$. Wir setzen $t_\mathfrak{m} := s'_\mathfrak{m} s_\mathfrak{m}$ und können schreiben $t_\mathfrak{m} u \in V$. Wir betrachten das Ideal $\mathfrak{a} := \sum_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)} R t_\mathfrak{m}$ von R. Offenbar ist dann $\mathfrak{a}u \subseteq V$. Wegen $t_\mathfrak{m} \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{m}$ ist jeweils $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{m}$. Nach (2.43)(b) folgt $\mathfrak{a} = R$, also $1 \in \mathfrak{a}$. Damit ist $u \in V$. Dies zeigt, dass $U \subseteq V$. Genauso sieht man, dass $V \subseteq U$. ■

6.13 Korollar. Für einen R-Modul M gilt:

$$M = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Supp}_R(M) = \varnothing \;\Leftrightarrow\; \dim_R(M) = -\infty. \quad ■$$

§ Cohen-Macaulay-Moduln

6.14 Bemerkungen. Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter R-Modul, so gilt nach (6.11) und (3.16) offenbar

$$\dim_R(M) = \mathrm{h}_{\mathfrak{m}}(M).$$

6.15 Definition. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M ein R-Modul. Die ***Tiefe*** $\mathrm{t}(M)$ von M definieren wir dann als die Tiefe $\mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(M)$ von M bezüglich des Maximalideals $\mathfrak{m}$ von R, also

$$\mathrm{t}(M) := \mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(M).$$

6.16 Bemerkung. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Nach (3.26) ist $M \neq 0$ gleichbedeutend zu $\mathfrak{m}M \neq M$. Mit (5.13) schliessen wir:

$$\mathrm{t}(M) = \infty \;\Leftrightarrow\; M = 0.$$

6.17 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, und sei $M \neq 0$ ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt:

$$\mathrm{t}(M) \leq \dim_R(M).$$

Beweis. Gemäss (6.14) ist $\dim_R(M) = \mathrm{h}_{\mathfrak{m}}(M)$. Jetzt schliesst man mit (5.11). ■

6.18 Definition. Ein Modul M über einem lokalen noetherschen Ring $(R, \mathfrak{m})$ heisst ein ***Cohen-Macaulay-Modul*** oder kurz ein ***CM-Modul***, wenn er endlich erzeugt ist und wenn seine Tiefe und seine Dimension übereinstimmen, d.h.

$$\mathrm{t}(M) = \dim_R(M).$$

In dieser Situation gilt dann $M \neq 0$, vgl. (6.16) und (6.13).

6.19 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, sei $d \in \mathbb{N}_0$, sei M ein endlich erzeugter R-Modul, und sei $(x_i)_{i=1}^r$ eine Nichtnullteilerfolge in $\mathfrak{m}$ bezüglich M. Dann sind äquivalent:

(i) M ist ein CM-Modul der Dimension d.

(ii) $M \big/ \sum_{i=1}^r x_i M$ ist ein CM-Modul der Dimension $d - r$.

Beweis. Nach (5.23) und (6.14) bestehen die Gleichheiten

$$\mathrm{t}\big(M \big/ \textstyle\sum_{i=1}^r x_i M\big) = \mathrm{t}(M) - r$$

und

$$\dim_R\big(M \big/ \textstyle\sum_{i=1}^r x_i M\big) = \mathrm{h}_{\mathfrak{m}}\big(M \big/ \textstyle\sum_{i=1}^r x_i M\big) = \mathrm{h}_{\mathfrak{m}}(M) - r = \dim_R(M) - r.$$

Damit folgt alles. ■

6.20 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, sei M ein R-Modul, und sei $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{m}$ ein Ideal mit $\mathfrak{b}M = 0$. Dann sind äquivalent:

(i) M ist ein CM-Modul über R.

(ii) M ist ein CM-Modul über $R/\mathfrak{b}$.

Beweis. Klar wegen der Grundringunabhängigkeit der Tiefe und der Dimension, vgl. (5.4) und (6.10). ∎

§ Der Ungemischtheitssatz

6.21 Satz: Ungemischtheitssatz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei M ein CM-Modul über R mit $\dim_R(M) = d$. Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ gilt dann:

$$\dim(R/\mathfrak{p}) = d.$$

Beweis. Es ist $M \neq 0$ und somit $d \in \mathbb{N}_0$. Wir machen Induktion nach d. Sei zunächst $d = 0$. Nach (6.11) ist dann $\dim\big(R/(0 :_R M)\big) = 0$. Nach (2.48) und (3.5) folgt $\big\{\mathfrak{m}/(0 :_R M)\big\} = \mathrm{Max}\big(R/(0 :_R M)\big) = \mathrm{Spec}\big(R/(0 :_R M)\big)$. Gemäss (2.48) folgt dann $\mathrm{Var}(0 :_R M) = \{\mathfrak{m}\}$. Nach (4.16) ergibt sich daraus $\mathrm{Ass}_R(M) = \{\mathfrak{m}\}$. Weil $R/\mathfrak{m}$ nach (2.46) ein Körper ist, und somit $\dim(R/\mathfrak{m}) = 0$ gilt, ergibt sich die Behauptung.

Sei nun $d > 0$. Ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$, so gilt nach (4.16) offenbar $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(0 :_R M)$. Wegen (6.3) ist also $\dim(R/\mathfrak{p}) \leq d$.

Wegen $\mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(M) = \mathrm{t}(M) = d > 0$ gibt es ein Element $x \in \mathfrak{m} \cap \mathrm{NNT}_R(M)$. Nach (6.19), angewandt mit $r = 1$, ist M/xM ein CM-Modul mit $\dim_R(M/xM) = d - 1$. Wegen $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ und $x \in \mathfrak{m}$ besitzt $xR + \mathfrak{p}$ nach (2.27) ein minimales Primoberideal $\mathfrak{q}$. Nach (5.17) ist $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(M/xM)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\dim(R/\mathfrak{q}) = d - 1$. Weil $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{NT}_R(M)$ und $x \notin \mathrm{NT}_R(M)$ und $\mathfrak{p} \cup \{x\} \subseteq \mathfrak{q}$, ist $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$. Nach (3.1)(C) und (2.16)(B) folgt dann leicht, dass $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq \dim(R/\mathfrak{q}) + 1 = d$. ∎

§ Kettenringe

6.22 Definition. (A) Seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zwei Primideale eines Rings R so, dass $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. Eine ***Primidealkette zwischen*** $\mathfrak{p}$ ***und*** $\mathfrak{q}$ ist eine Primidealkette $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^{l}$ in R so, dass $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}_l \subseteq \mathfrak{q}$.

(B) Seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ wie in (A). Eine ***maximale Primidealkette zwischen*** $\mathfrak{p}$ ***und*** $\mathfrak{q}$ ist eine Primidealkette zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ so, dass $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}_l = \mathfrak{q}$, und so, dass es kein Primideal $\mathfrak{s} \subseteq R$ und keinen Index $i \in \{0, \ldots, l - 1\}$ gibt mit $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{s} \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$.

(C) Ist $\mathfrak{P} \subseteq \mathrm{Spec}(R)$, so heisst $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l$ eine ***maximale Primidealkette in*** $\mathfrak{P}$, wenn $\mathfrak{p}_i \in \mathfrak{P}$ für $i = 0, \ldots, l$ und wenn es kein $\mathfrak{q} \in \mathfrak{P}$ gibt, für welches $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}_0$ oder $\mathfrak{p}_l \subsetneq \mathfrak{q}$ oder $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$ für ein $i \in \{0, \ldots, l-1\}$.

(D) Ein Ring R heisst ein ***Kettenring***, wenn für je zwei Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ von R alle maximalen Primidealketten $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^l$ zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ dieselbe Länge l haben.

6.23 Satz. Die Eigenschaft, Kettenring zu sein, überträgt sich auf Restklassenringe und Bruchringe.

Beweis. Klar nach (2.16)(B) und (3.12)(C). ■

6.24 Lemma. Sei R ein noetherscher Ring der Dimension $d < \infty$. Haben alle maximalen Primidealketten in R die Länge d, so ist R ein Kettenring.

Beweis. Seien $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ zwei Primideale von R. Wegen $\dim(R) < \infty$ gibt es eine maximale Primidealkette $(\mathfrak{q}_j)_{j=0}^l$ zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. Weiter gibt es eine Primidealkette $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^h$ unterhalb $\mathfrak{p}$ der Länge $h = \mathrm{h}(\mathfrak{p})$. Im Integritätsbereich $R/\mathfrak{q}$ gibt es zudem eine maximale Primidealkette $(\overline{\mathfrak{s}_k})_{k=0}^t$ der Länge $t = \dim(R/\mathfrak{q})$. Für $k = 0, \ldots, t$ setzen wir $\mathfrak{s}_k := R \cap \overline{\mathfrak{s}_k}$. Dann ist $(\mathfrak{s}_k)_{k=0}^t$ nach (2.16)(B) eine maximale Primidealkette zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{s}_t$, wobei $\mathfrak{s}_t \in \mathrm{Max}(R)$. Somit ist

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_h = \mathfrak{p} = \mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_l = \mathfrak{q} = \mathfrak{s}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{s}_t$$

eine maximale Primidealkette in R der Länge $h+l+t$. Nach Voraussetzung folgt $h+l+t = d$, und somit erhalten wir $l = d - h - t = \dim(R) - \mathrm{h}(\mathfrak{p}) - \dim(R/\mathfrak{q})$. Wir haben gezeigt, dass die Länge l nur von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ aber nicht von der gewählten maximalen Primidealkette $(\mathfrak{q}_j)_{j=0}^l$ zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ abhängt. ■

6.25 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei M ein CM-Modul über R. Dann gilt:

(a) Alle maximalen Primidealketten in $\mathrm{Var}(0 :_R M)$ haben die Länge $\dim_R(M)$.

(b) Alle maximalen Primidealketten in $R/(0 :_R M)$ haben die Länge $\dim_R(M)$.

(c) $R/(0 :_R M)$ ist ein Kettenring.

Beweis. "(a)" Sei $d := \dim_R(M)$. Weil $\dim_R(M) \leq \dim(R)$, vgl. (6.7), gilt gemäss (3.32) und (3.16), dass $d \in \mathbb{N}_0$. Sei $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^l$ eine maximale Primidealkette in $\mathrm{Var}(0 :_R M)$. Wir müssen zeigen, dass $d = l$. Nach (2.16)(B) hat jede Primidealkette in $\mathrm{Var}(0 :_R M)$ eine Länge $\leq \dim\big(R/(0 :_R M)\big)$ und nach (6.11) ist $\dim\big(R/(0 :_R M)\big) = d$. Daraus folgt $l \leq d$. Es bleibt zu zeigen, dass $l \geq d$. Dies tun wir durch Induktion über d. Für $d = 0$ ist nichts zu zeigen.

Sei also $d > 0$. Dann ist das einzige Maximalideal $\mathfrak{m}/(0:_R M)$ von $R/(0:_R M)$ kein minimales Primideal von $R/(0:_R M)$, also ist $\mathfrak{m}$ kein minimales Primoberideal von $0:_R M$. Wegen $\mathfrak{p}_l = \mathfrak{m}$ und weil $\mathfrak{p}_0$ ein minimales Primoberideal von $0:_R M$ ist, folgt $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_l$, also $l \geq 1$. Wegen $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1$ haben alle Primidealketten zwischen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{m}$ eine Länge $\leq d-1$.

Sei $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. Nach (6.21) ist $\dim(R/\mathfrak{q}) = d$. Zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{m}$ gibt es nach (2.16)(B) also eine Primidealkette der Länge d. Daraus folgt $\mathfrak{p}_1 \not\subseteq \mathfrak{q}$. Dank (4.10) wissen wir, dass $\mathrm{Ass}_R(M)$ eine endliche Menge ist. Also folgt mit (2.5) und (4.14), dass $\mathfrak{p}_1 \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(M)} \mathfrak{q} = \mathrm{NT}_R(M)$.

Wir finden also ein $x \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathrm{NNT}_R(M)$. Nach (6.19) ist M/xM ein CM-Modul der Dimension $d-1$. Wegen $\mathfrak{p}_0 \in \min(0:_R M)$ folgt nach (4.16), dass $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Ass}_R(M)$. Nach (4.14) folgt $x \notin \mathfrak{p}_0$. Wegen $x \in \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_0 \supseteq 0:_R M$ folgt aus der Maximalität in $\mathrm{Var}(0:_R M)$ unserer Kette $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^l$ sofort, dass $\mathfrak{p}_1$ ein minimales Primoberideal von $\mathfrak{p}_0 + xR$ ist. Nach (5.17) folgt $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Ass}_R(M/xM)$.

Nach (6.21) folgt $\dim(R/\mathfrak{p}_1) = \dim_R(M/xM) = d-1$. Also gibt es eine Primidealkette der Länge $d-1$ zwischen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{m}$. Weil die Menge $\mathrm{Ass}_R(M/xM)$ endlich ist, besitzt sie ein bezüglich der Inklusion minimales Mitglied $\overline{\mathfrak{p}}$ mit $\overline{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{p}_1$. Nach (6.21) gilt dann $\dim(R/\overline{\mathfrak{p}}) = d-1$. Daraus folgt natürlich $\overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_1$. Also ist $\mathfrak{p}_1$ in $\mathrm{Ass}_R(M/xM)$ minimal bezüglich der Inklusion.

Nach (4.16) ist $\mathfrak{p}_1$ also ein minimales Primoberideal von $0:_R M/xM$, also ein minimales Mitglied von $\mathrm{Var}(0:_R M/xM)$. Damit ist $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{m}$ eine in $\mathrm{Var}(0:_R M/xM)$ maximale Primidealkette der Länge $l-1$. Wegen $\dim_R(M/xM) = d-1$ folgt nach Induktionsvoraussetzung sofort $l-1 \geq d-1$, also $l \geq d$.

"(b)" Sofort klar aus (a) mit Hilfe von (2.16)(B).

"(c)" Sofort klar aus (b) und (6.24). ■

§ Cohen-Macaulay-Ringe

6.26 Definition. Ein lokaler noetherscher Ring $(R, \mathfrak{m})$ heisst ein ***Cohen-Macaulay-Ring*** oder kurz ein ***CM-Ring***, wenn er über sich selbst ein CM-Modul ist.

6.27 Korollar. Cohen-Macaulay-Ringe sind Kettenringe.

Beweis. Wegen $R \cong R/0 = R/(0:_R R)$ schliesst man sofort mit (6.25). ■

6.28 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei $\mathfrak{a} \subsetneq R$ ein echtes Ideal. Dann sind äquivalent:

(i) $R/\mathfrak{a}$ ist ein CM-Modul über R.

(ii) $R/\mathfrak{a}$ ist ein CM-Ring.

Beweis. Nach (6.20) ist $R/\mathfrak{a}$ genau dann ein CM-Modul über R, wenn $R/\mathfrak{a}$ ein CM-Modul über $R/\mathfrak{a}$ ist. Letzteres ist gleichbedeutend dazu, dass $R/\mathfrak{a}$ ein CM-Ring ist. ■

6.29 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ringund sei $(x_i)_{i=1}^r$ eine Nichtnullteilerfolge in $\mathfrak{m}$ bezüglich R. Dann sind äquivalent:

(i) R ist ein CM-Ring der Dimension d.

(ii) $R/\sum_{i=1}^r x_i R$ ist ein CM-Ring der Dimension $d - r$.

Beweis. Klar aus (6.19) und (6.28). ■

6.30 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring der Dimension $d > 0$. Dann sind äquivalent:

(i) R ist ein CM-Ring.

(ii) Jedes Parametersystem $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ von R ist eine Nichtnullteilerfolge bezüglich R.

(iii) Es gibt ein Parametersystem $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ von R, welches bezüglich R eine Nichtnullteilerfolge ist.

Beweis. Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial, (iii) $\Rightarrow$ (i) ergibt sich sofort aus der Definition des CM-Rings. Es bleibt (i) $\Rightarrow$ (ii) zu zeigen.

Sei also $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ ein Parametersystem von R. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$, und sei $\overline{\overline{\cdot}} : R \to R/\mathfrak{p}$ die Restklassenabbildung. Nach dem Ungemischtheitssatz (6.21) gilt $\dim(R/\mathfrak{p}) = d$, also $\mathrm{h}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = d$. Weiter ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal von $(\overline{\overline{x_1}}, \ldots, \overline{\overline{x_d}})$, vgl. (3.39). Nach dem Krullschen Höhensatz (3.31) folgt insbesondere $\overline{\overline{x_1}} \neq 0$, also $x_1 \notin \mathfrak{p}$. Dies zeigt, dass $x_1 \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)} \mathfrak{p} = \mathrm{NT}(R)$, also $x_1 \in \mathfrak{m} \cap \mathrm{NNT}(R)$. Im Fall $d = 1$ zeigt dies, was wir beweisen wollen.

Sei also $d > 1$. Sei $\overline{\cdot} : R \to R/x_1 R$ die Restklassenabbildung. Nach (6.29) ist $R/x_1 R$ nun ein CM-Ring der Dimension $d - 1$. Nach (3.39) ist $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_d}$ ein Parametersystem in $R/x_1 R$. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_d}$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich $R/x_1 R$. Nach (5.2)(B) ist also $x_2, \ldots, x_d$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich $R/x_1 R$. Nach (5.2)(A) folgt, dass $x_1, \ldots, x_d$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich R ist. ■

§ Lokalisierung von Cohen-Macaulay-Ringen

6.31 Satz. Sei M ein CM-Modul über dem noetherschen lokalen Ring R, und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)$. Dann ist $M_\mathfrak{p}$ ein CM-Modul über dem noetherschen lokalen Ring $R_\mathfrak{p}$.

Beweis. Wir machen Induktion nach $r := \dim_R(M) - \dim(R/\mathfrak{p})$. Sei zunächst $r = 0$. Dann ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Mitglied von $\mathrm{Supp}_R(M) = \mathrm{Var}(0 :_R M)$, also ein minimales Primoberideal von $0 :_R M$, nach (4.16) also schliesslich ein minimales Mitglied von $\mathrm{Ass}_R(M)$. Deshalb ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ nach (4.38) ein minimales Mitglied von $\mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$, also ein minimales Primoberideal von $0 :_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$. Weil aber $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ zugleich das Maximalideal von $R_\mathfrak{p}$ ist, handelt es sich um das einzige Primoberideal von $0 :_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$. Über (6.3) und (2.16)(B) zeigt dies, dass $\dim_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = 0$. Wegen $\mathrm{t}(M_\mathfrak{p}) \geq 0$ und (6.17) ist $M_\mathfrak{p}$ also ein CM-Modul über $R_\mathfrak{p}$.

Sei also $r > 0$. Nach (6.21) ist dann $\mathfrak{p}$ in keinem Mitglied der endlichen Menge $\mathrm{Ass}_R(M)$ enthalten. Gemäss (2.5) gibt es deshalb ein Element $x \in \mathfrak{p}$, welches alle Mitglieder von $\mathrm{Ass}_R(M)$ vermeidet. Gemäss (4.14) gilt also $x \in \mathrm{NNT}_R(M) \cap \mathfrak{p}$. Nach (2.30) und (5.5) folgt aus $\mathfrak{p} \supseteq (0 :_R M) + Rx$ sofort, dass $\mathfrak{p} \supseteq (0 :_R M/xM)$. Nach (6.3) heisst dies, dass $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M/xM)$. Nach (6.19) ist M/xM ein CM-Modul der Dimension $\dim_R(M) - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist deshalb $(M/xM)_\mathfrak{p}$ ein CM-Modul über $R_\mathfrak{p}$. Gemäss (5.15) ist dann auch $M_\mathfrak{p}/(xM)_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}/\frac{x}{1}M_\mathfrak{p}$ ein CM-Modul über $R_\mathfrak{p}$. Wegen (5.16) liegt $\frac{x}{1}$ in $\mathrm{NNT}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. So folgt über (6.19), dass auch $M_\mathfrak{p}$ ein CM-Modul ist. ∎

6.32 Korollar. Die Lokalisierungen eines CM-Rings sind wieder CM-Ringe.

Beweis. Klar aus (6.31). ∎

§ Minimale Erzeugendensysteme

6.33 Festsetzung. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, und sei M ein R-Modul. Dann gilt offenbar $\mathfrak{m}(M/\mathfrak{m}M) = 0$. Also ist $M/\mathfrak{m}M$ gemäss (3.3) in natürlicher Weise ein $R/\mathfrak{m}$-Modul, d.h. ein Vektorraum über $R/\mathfrak{m}$. Wir nennen diesen den ***Restklassenraum*** von M bezüglich $\mathfrak{m}$.

6.34 Lemma. Sei M ein endlich erzeugter Modul über dem lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$, und seien $m_1, \ldots, m_r \in M$. Dann sind äquivalent:

(i) Die Elemente $m_1, \ldots, m_r$ erzeugen den R-Modul M.

(ii) Die Restklassen $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_r}$ modulo $\mathfrak{m}M$ der Elemente $m_1, \ldots, m_r$ erzeugen den Restklassenraum $M/\mathfrak{m}M$.

Beweis. Wir betrachten den Untermodul $N := \sum_{i=1}^r Rm_i$ von M. Die Aussage (i) ist dann äquivalent zu $N = M$ und die Aussage (ii) zu $N + \mathfrak{m}M = M$. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist deshalb sofort klar. Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) ergibt sich aus (3.27). ∎

6.35 Festsetzung. Ein endliches Erzeugendensystem eines R-Moduls M, d.h. eine endliche Familie $(m_i)_{i=1}^r$ von Elementen aus M mit $M = \sum_{i=1}^r Rm_i$, heisst ein ***minimales Erzeugendensystem*** von M, wenn

$$M \neq \sum_{j \neq i} Rm_j$$

für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$. Ein Element $m \in M$ heisst ***basisch***, wenn es in einem minimalen Erzeugendensystem von M vorkommt.

6.36 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt:

(a) Eine endliche Familie $(m_i)_{i=1}^r$ von Elementen aus M ist genau dann ein minimales Erzeugendensystem von M, wenn das System $(\overline{m_i})_{i=1}^r$ der Restklassen modulo $\mathfrak{m}M$ eine Basis des Restklassenraums $M/\mathfrak{m}M$ ist.

(b) Alle minimalen Erzeugendensysteme $(m_i)_{i=1}^r$ von M haben die gleiche Anzahl r von Elementen. Dabei ist r die Dimension des $R/\mathfrak{m}$-Vektorraums $M/\mathfrak{m}M$.

(c) Ein Element $m \in M$ ist genau dann basisch, wenn $m \notin \mathfrak{m}M$.

Beweis. Die Aussage (a) folgt direkt aus (6.34), die Aussage (b) direkt aus (a).

"(c)" Sei zunächst m ein basisches Element von M. Dann tritt also m als Element eines minimalen Erzeugendensystems von M auf. Die Restklasse $\overline{m}$ von m modulo $\mathfrak{m}M$ ist nach Aussage (a) deshalb ein Basiselement des Vektorraums $M/\mathfrak{m}M$. Somit gilt $\overline{m} \neq 0$, also $m \notin \mathfrak{m}M$.

Sei umgekehrt $m \in M \setminus \mathfrak{m}M$. Dann ist die Restklasse $\overline{m} \in M/\mathfrak{m}M$ von 0 verschieden und lässt sich deshalb zu einer Basis von $M/\mathfrak{m}$ ergänzen. Wählt man von jedem von $\overline{m}$ verschiedenen Element aus dieser Basis einen Repräsentanten in M, so bilden diese Repräsentanten zusammen mit m nach (a) ein minimales Erzeugendensystem von M, also ist m basisch. ∎

§ Die Einbettungsdimension

6.37 Festsetzung. Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, und ist M ein endlich erzeugter R-Modul, so schreiben wir $\mu(M)$ für die sogenannte ***minimale Erzeugendenzahl*** von M, also für die kleinste Anzahl von Elementen, die nötig sind, um M zu erzeugen. Dabei ist $\mu(0) = 0$. Nach (6.36)(b) haben alle minimalen Erzeugendensysteme von M gerade $\mu(M)$ Elemente. Zudem ist $\mu(M)$ die Dimension des Restklassenraums $M/\mathfrak{m}M$.

6.38 Definition. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt. Deswegen können wir die ***Einbettungsdimension*** $\operatorname{edim}(R)$ definieren als die minimale Erzeugendenzahl von $\mathfrak{m}$, also:

$$\operatorname{edim}(R) := \mu(\mathfrak{m}).$$

6.39 Satz. Für einen noetherschen lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ gilt:

$$\dim(R) \leq \operatorname{edim}(R).$$

Beweis. Nach (3.16) und (3.31) folgt in der Tat $\dim(R) = \operatorname{h}(\mathfrak{m}) \leq \mu(\mathfrak{m}) = \operatorname{edim}(R)$. ∎

§ Reguläre lokale Ringe

6.40 Definition. Ein ***regulärer lokaler Ring*** $(R, \mathfrak{m})$ ist ein noetherscher lokaler Ring, für den gilt:

$$\dim(R) = \operatorname{edim}(R).$$

6.41 Bemerkung. Für einen lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ gilt:

$$\mathfrak{m} = 0 \iff \mu(\mathfrak{m}) = 0.$$

Deshalb ist klar, dass die regulären lokalen Ringe der Dimension 0 genau die Körper sind.

§ Reguläre lokale Ringe sind Integritätsbereiche

6.42 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension d, und sei $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{m}^2$. Dann ist $(R/Rx, \mathfrak{m}/Rx)$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension $d - 1$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{m} \neq 0$, also $0 < \mu(\mathfrak{m}) = \operatorname{edim}(R) = \dim(R) = d$. Wegen $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{m}^2$ ist x nach (6.36)(c) ein basisches Element des R-Moduls $\mathfrak{m}$, also Teil eines minimalen Erzeugendensystems von $\mathfrak{m}$. Mit geeigneten Elementen $x_1, \ldots, x_{d-1} \in \mathfrak{m}$ können wir also schreiben $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_{d-1}, x)$. Wir schreiben $\bar{\cdot}$ für die Restklassenabbildung modulo Rx. Nach (2.48) und (1.17) ist dann $\overline{R} = R/Rx$ ein noetherscher lokaler Ring mit dem Maximalideal $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/Rx$. Wegen $\overline{x} = 0$ gilt nach dem oben Gesagten $\overline{\mathfrak{m}} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{d-1}})$. Deshalb ist $\operatorname{edim}(\overline{R}) = \mu(\overline{\mathfrak{m}}) \leq d-1$. Nach (3.33) und (3.16) ist weiter $d-1 = \mathrm{h}(\mathfrak{m})-1 \leq \mathrm{h}(\overline{\mathfrak{m}}) = \dim(\overline{R})$. Im Hinblick auf (6.39) folgt $d - 1 = \dim(\overline{R}) = \operatorname{edim}(\overline{R})$, also die Behauptung. ∎

6.43 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei $x \in \mathfrak{m}$ derart, dass $Rx \in \operatorname{Spec}(R) \smallsetminus \operatorname{Min}(R)$. Dann ist R ein Integritätsbereich.

Beweis. Nach (2.27)(a) — angewandt mit $\mathfrak{a} = 0$ — gibt es ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(R)$ mit $\mathfrak{p} \subseteq Rx$. Dabei ist $\mathfrak{p} \neq Rx$, also $x \notin \mathfrak{p}$. Sei jetzt $y \in \mathfrak{p}$. Dann gibt es ein Element $z \in R$ so, dass $y = zx$. Wegen $y \in \mathfrak{p}$ und $x \notin \mathfrak{p}$ ist deshalb $z \in \mathfrak{p}$, also $y \in \mathfrak{p}x = x\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{p}$. Damit ist $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{p}$. Weil R noethersch ist, ist $\mathfrak{p}$ als R-Modul endlich erzeugt, und nach dem Lemma von Nakayama (3.26) folgt $\mathfrak{p} = 0$. Also ist 0 ein Primideal von R, d.h. R ist ein Integritätsbereich. ∎

6.44 Satz. Reguläre lokale Ringe sind Integritätsbereiche.

Beweis. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension d. Wir zeigen durch Induktion nach d, dass R ein Integritätsbereich ist. Der Fall mit $d = 0$ ist klar nach (6.41).

Sei also $d > 0$. Dann ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ein $R/\mathfrak{m}$-Vektorraum der Dimension $d > 0$, also $\mathfrak{m}^2 \subsetneq \mathfrak{m}$. Nach (2.41) besitzt R als noetherscher Ring nur endlich viele minimale Primideale, die wegen $\dim(R) = d > 0$ alle echt in $\mathfrak{m}$ enthalten sind. Nach (2.5) finden wir also ein Element $x \in \mathfrak{m}$, welches sowohl $\mathfrak{m}^2$ als auch alle minimalen Primideale von R vermeidet. Wegen $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ ist R/Rx nach (6.42) ein regulärer lokaler Ring der Dimension $d-1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist also R/Rx ein Integritätsbereich, also Rx ein Primideal von R. Weil x in keinem minimalen Primideal von R liegt, ist $Rx \notin \mathrm{Min}(R)$. Gemäss (6.43) ist R also ein Integritätsbereich. ■

§ Reguläre lokale Ringe sind Cohen-Macaulay-Ringe

6.45 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei $x \in \mathfrak{m} \cap \mathrm{NNT}(R)$. Dann sind äquivalent:

(i) R ist ein CM-Ring.

(ii) R/Rx ist ein CM-Ring.

Beweis. Klar nach (6.29). ■

6.46 Satz. Reguläre lokale Ringe sind Cohen-Macaulay-Ringe.

Beweis. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension d. Wir zeigen durch Induktion nach d, dass R ein CM-Ring ist. Der Fall mit $d = 0$ ist klar nach (6.17).

Sei also $d > 0$. Wie im Beweis von (6.44) können wir ein Element $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ finden. Nach (6.44) ist $x \in \mathrm{NNT}(R)$. Nach (6.42) ist R/Rx ein regulärer lokaler Ring der Dimension $d-1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist also R/Rx ein CM-Ring. Mit Hilfe von (6.45) führen wir jetzt den Induktionsschritt durch. ■

§ Polynomringe über regulären lokalen Ringen

6.47 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring, und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Polynomrings $R[X]$ so, dass $\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{m}$. Dann ist auch $R[X]_{\mathfrak{p}}$ ein regulärer lokaler Ring.

Beweis. Sei $d := \dim(R)$. Nach (2.14) ist $\mathfrak{m}R[X]$ ein Primideal von $R[X]$. In R finden wir eine Primidealkette $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^d$ der Länge d. Nach (2.14) ist dann $(\mathfrak{p}_i R[X])_{i=0}^d$ eine Primidealkette der Länge d unterhalb $\mathfrak{m}R[X]$. (Wegen $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i R[X] \cap R$ gilt $\mathfrak{p}_j R[X] \subsetneq \mathfrak{p}_k R[X]$ für $0 \leq j < k \leq d$). Damit ist $\mathrm{h}(\mathfrak{m}R[X]) \geq d$.

Wegen der Regularität von R lässt sich $\mathfrak{m}$ durch d Elemente $x_1, \ldots, x_d$ erzeugen. Deshalb gilt auch $\mathfrak{m}R[X] = \sum_{i=1}^d x_i R[X]$.

Ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}R[X]$, so folgt über (3.17), dass $\dim(R[X]_{\mathfrak{p}}) \geq d$. Weiter ist auch $\mathfrak{p}R[X]_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^d \frac{x_i}{1} R[X]_{\mathfrak{p}}$, also, $\mathrm{edim}(R[X]_{\mathfrak{p}}) \leq d$. Nach (6.39) folgt, dass $R[X]_{\mathfrak{p}}$ regulär ist.

Sei also $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}R[X]$. Im Hinblick auf die Inklusion $\mathfrak{m} \hookrightarrow \mathfrak{p}$ ist dann klar, dass $\mathfrak{m}R[X] \subsetneq \mathfrak{p}$. Nach (3.7) folgt daraus, dass $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \geq d+1$, und (3.17) zeigt, dass $\dim(R[X]_{\mathfrak{p}}) \geq d+1$.

Schreiben wir $\bar{\ }$ für die Restklassenabbildung $R \to R/\mathfrak{m}$, so wird durch die Zuordnung $\sum_{i=0}^{r} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{r} \overline{a_i} X^i$ ein surjektiver Homomorphismus $R[X] \to R/\mathfrak{m}[X]$ von Ringen mit Kern $\mathfrak{m}R[X]$ definiert. Es besteht also ein Isomorphismus $R[X]/\mathfrak{m}R[X] \cong R/\mathfrak{m}[X]$ von Ringen. Weil der rechts stehende Ring ein Hauptidealring ist, ist es auch der links stehende. Also ist $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}R[X]$ in diesem Ring ein Hauptideal, und wir finden ein Polynom $f \in \mathfrak{p}$, dessen Restklasse das Ideal $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}R[X]$ erzeugt. Nach (1.4)(B) ist somit $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}R[X] + fR[X] = (x_1, \ldots, x_d, f)$. Also wird das Maximalideal $\mathfrak{p}R[X]_{\mathfrak{p}}$ von $R[X]_{\mathfrak{p}}$ durch die $d+1$ Brüche $\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_d}{1}, \frac{f}{1}$ erzeugt. Damit ist aber $\mathrm{edim}(R[X]_{\mathfrak{p}}) \leq d+1$. Nach (6.39) folgt also $d+1 \leq \dim(R[X]_{\mathfrak{p}}) \leq \mathrm{edim}(R[X]_{\mathfrak{p}}) \leq d+1$, und wir sehen, dass $R[X]_{\mathfrak{p}}$ regulär ist. ■

6.48 Lemma. Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Polynomrings $R[X]$ so, dass $R_{\mathfrak{p}\cap R}$ ein regulärer lokaler Ring ist. Dann ist auch $R[X]_{\mathfrak{p}}$ ein regulärer lokaler Ring.

Beweis. Wir betrachten die Nennermenge $S := R \setminus \mathfrak{p} \cap R$ in R. Dann ist S auch in $R[X]$ eine Nennermenge. Wegen $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$ ist $\mathfrak{p}' := \mathfrak{p}S^{-1}(R[X])$ nach (3.12)(C) ein Primideal in $S^{-1}(R[X])$.

Wir betrachten jetzt die Nennermenge $T := R[X] \setminus \mathfrak{p}$ in $R[X]$. Dann ist $S \subseteq T$, und es gilt $S^{-1}T = S^{-1}(R[X]) \setminus \mathfrak{p}'$. Nach (3.9)(D) besteht also ein Isomorphismus $(S^{-1}(R[X]))_{\mathfrak{p}'} = (S^{-1}T)^{-1}S^{-1}(R[X]) \cong T^{-1}(R[X]) = R[X]_{\mathfrak{p}}$.

Nach (3.9)(E) besteht ein Isomorphismus $\Phi := \Phi_S : S^{-1}(R[X]) \to R_{\mathfrak{p}\cap R}[X]$. Mit $\mathfrak{p}'' := \Phi(\mathfrak{p}')$ induziert Φ nach (3.9)(F) einen Isomorphismus $(S^{-1}(R[X]))_{\mathfrak{p}'} \cong (R_{\mathfrak{p}\cap R}[X])_{\mathfrak{p}''}$. So besteht ein Isomorphismus $R[X]_{\mathfrak{p}} \cong (R_{\mathfrak{p}\cap R}[X])_{\mathfrak{p}''}$.

Weiter ist die Kontraktion von $\mathfrak{p}''$ auf $R_{\mathfrak{p}\cap R}$ gerade das Maximalideal $(\mathfrak{p} \cap R)_{\mathfrak{p}\cap R}$ von $R_{\mathfrak{p}\cap R}$, denn $\mathfrak{p}'' \cap R_{\mathfrak{p}\cap R} = \mathfrak{p}' \cap R_{\mathfrak{p}\cap R} = S^{-1}\mathfrak{p} \cap S^{-1}R = S^{-1}(\mathfrak{p} \cap R) = (\mathfrak{p} \cap R)_{\mathfrak{p}\cap R}$. Gemäss (6.47) ist dann $(R_{\mathfrak{p}\cap R}[X])_{\mathfrak{p}''}$ regulär. Also ist auch $R[X]_{\mathfrak{p}}$ regulär. ■

6.49 Satz. Sei K ein Körper, und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Polynomrings $K[X_1, \ldots, X_r]$. Dann ist $K[X_1, \ldots, X_r]_{\mathfrak{p}}$ ein regulärer lokaler Ring.

Beweis. (Induktion nach r). Der Fall mit $r = 0$ ist nach (6.41) trivial. Sei also $r > 0$. Sei $R := K[X_1, \ldots, X_{r-1}]$, und sei X eine weitere Unbestimmte. Der durch

$$X_1 \mapsto X_1, \ldots, X_{r-1} \mapsto X_{r-1} \text{ und } X_r \mapsto X$$

definierte Einsetzungshomomorphismus $\Phi : K[X_1, \ldots, X_r] \to R[X]$ ist dann ein Isomorphismus, und $\mathfrak{q} := \Phi(\mathfrak{p}) \subseteq R[X]$ ist ein Primideal. Es besteht also ein Isomorphismus $K[X_1, \ldots, X_r]_{\mathfrak{p}} \cong R[X]_{\mathfrak{q}}$, definiert durch

$$\frac{u}{v} \mapsto \frac{\Phi(u)}{\Phi(v)}, \quad (u \in K[X_1, \ldots, X_r];\ v \in K[X_1, \ldots, X_r] \setminus \mathfrak{p}).$$

Es genügt also zu zeigen, dass $R[X]_{\mathfrak{q}}$ regulär ist. Dies folgt aus (6.48), weil $R_{\mathfrak{q}\cap R}$ nach Induktionsvoraussetzung regulär ist. ■

§ Einige Schlussfolgerungen

6.50 Korollar. Ist K ein Körper und $\mathfrak{p}$ ein Primideal im Polynomring $K[X_1, \ldots, X_r]$, so ist $K[X_1, \ldots, X_r]_{\mathfrak{p}}$ ein CM-Ring.

Beweis. Klar aus (6.49) und (6.46). ■

6.51 Korollar. Polynomringe über Körpern sind Kettenringe.

Beweis. Sei R ein solcher Polynomring, und seien $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ zwei Primideale. Nach (3.12) genügt es zu zeigen, dass alle maximalen Primidealketten zwischen $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}$ gleich lang sind. Dies folgt aus (6.50) und (6.27). ■

Kapitel 7

Projektive Dimension

§ Freie Moduln

7.1 Definition. Einen R-Modul F nennen wir ***frei***, wenn es eine Teilmenge B von F so gibt, dass zu jedem R-Modul M und jeder Abbildung $\varphi : B \to M$ genau ein Homomorphismus $\overline{\varphi} : F \to M$ von R-Moduln existiert, für den $\overline{\varphi}|_B = \varphi$ gilt. Wir sagen dann auch, F sei ***frei über der Basis*** B oder B sei eine ***Basis*** von F. Der Nullmodul ist frei über der Basis $\varnothing$.

7.2 Bemerkung. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass Vektorräume über einem Körper K freie K-Moduln sind, da sie immer Basen besitzen. Sind B und B' zwei Basen eines Vektorraumes F, so wissen wir auch, dass eine Bijektion $B \longleftrightarrow B'$ existiert. Die gemeinsame Kardinalität aller Basen eines Vektorraumes ist bekanntlich seine Dimension.

7.3 Bemerkungen. (A) Seien I eine Indexmenge und $j \in I$. In Verallgemeinerung der Bezeichnungsweise aus (1.13)(D) schreiben wir $e_j^{\oplus I}$ für das Element $(e_i)_{i\in I} \in R^{\oplus I}$, für das $e_j = 1$ und $e_i = 0$ für alle $i \in I \smallsetminus \{j\}$. Ist $\underline{a} = (a_i)_{i\in I} \in R^{\oplus I}$, so ist die ***Trägermenge*** $T(\underline{a}) := \{j \in I \mid a_j \neq 0\}$ von $\underline{a}$ endlich, und wir können schreiben

$$\underline{a} = \sum_{j\in T(\underline{a})} a_j e_j^{\oplus I}.$$

Insbesondere ist $\left(e_j^{\oplus I}\right)_{j\in I}$ ein Erzeugendensystem des R-Moduls $R^{\oplus I}$.

(B) Wir betrachten einen R-Modul M, die Menge $B := \left\{e_j^{\oplus I} \,\middle|\, j \in I\right\} \subseteq R^{\oplus I}$ und eine Abbildung $\varphi : B \to M$. Für $j \in I$ sei $m_j := \varphi(e_j^{\oplus I})$. Durch

$$\underline{a} = (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{j\in T(\underline{a})} a_j m_j$$

wird dann offenbar ein Homomorphismus $\overline{\varphi} : R^{\oplus I} \to M$ von R-Moduln definiert, für den $\overline{\varphi}|_B = \varphi$ gilt. Dabei ist $\overline{\varphi}$ der einzige Homomorphismus mit dieser Eigenschaft. Also ist $R^{\oplus I}$ frei über der Basis B. Wir nennen diese Basis die ***kanonische Basis*** von $R^{\oplus I}$ und nennen $e_j^{\oplus I}$ das ***j-te kanonische Basiselement*** von $R^{\oplus I}$.

(C) Sei F ein freier R-Modul über der Basis $B \subseteq F$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\overline{\varphi} : R^{\oplus B} \to F$ von R-Moduln mit $\overline{\varphi}(e_b^{\oplus B}) = b$ und einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\overline{\psi} : F \to R^{\oplus B}$ von R-Moduln mit $\overline{\psi}(b) = e_b^{\oplus B}$ für alle $b \in B$. Weiter ist $\mathrm{id}_{R^{\oplus B}}$ der einzige Homomorphismus $\overline{\lambda} : R^{\oplus B} \to R^{\oplus B}$ von R-Moduln mit

$$\overline{\lambda}|_{\{e_b^{\oplus B} | b \in B\}} = \mathrm{id}_{\{e_b^{\oplus B} | b \in B\}}$$

und id_F der einzige Homomorphismus $\overline{\mu} : F \to F$ von R-Moduln mit

$$\overline{\mu}|_B = \mathrm{id}_B \,.$$

Weil $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}(b) = b$ und $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}(e_b^{\oplus B}) = e_b^{\oplus B}$ für alle $b \in B$ gelten, sind demnach $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}$ zueinander invers. Insbesondere ist also $\overline{\varphi}$ ein Isomorphismus, d.h. $F \cong R^{\oplus B}$.

(D) Sei F ein über der Basis B freier R-Modul und sei $h : F \xrightarrow{\cong} G$ ein Isomorphismus von R-Moduln. Sofort sieht man dann, dass G frei über der Basis $h(B)$ ist. Die Eigenschaft, freier Modul zu sein, überträgt sich also bei Isomorphie. Nach (C) ist deshalb auch klar, dass ein R-Modul M genau dann frei ist, wenn es eine Menge I so gibt, dass M zum R-Modul $R^{\oplus I}$ isomorph ist.

7.4 Satz. Sei $R \neq 0$. Sei F ein freier R-Modul über der Basis B, und sei G ein freier R-Modul über der Basis C. Dann sind äquivalent:

(i) F ist isomorph zu G.

(ii) Es besteht eine Bijektion $\varphi : B \to C$.

Beweis. "(i)⇒ (ii)" Gemäss (7.3)(C) gilt $R^{\oplus B} \cong F \cong G \cong R^{\oplus C}$. Also o.E. können wir F durch $R^{\oplus B}$ und G durch $R^{\oplus C}$ ersetzen. Sei $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$. Dann sind auch die $R/\mathfrak{m}$-Moduln $F/\mathfrak{m}F$ und $G/\mathfrak{m}G$ isomorph, d.h. es besteht ein $R/\mathfrak{m}$-Vektorraumisomorphismus $\iota : F/\mathfrak{m}F \xrightarrow{\cong} G/\mathfrak{m}G$.

Sei $\overline{\cdot} : R \to R/\mathfrak{m}$ die Restklassenabbildung. Durch $(a_b)_{b \in B} \mapsto (\overline{a_b})_{b \in B}$ wird dann offenbar ein surjektiver Homomorphismus $F \to (R/\mathfrak{m})^{\oplus B}$ von R-Moduln mit Kern $\mathfrak{m}F$ definiert. Deshalb besteht ein Isomorphismus $F/\mathfrak{m}F \xrightarrow{\cong} (R/\mathfrak{m})^{\oplus B}$ von $R/\mathfrak{m}$-Vektorräumen. Genauso besteht ein $R/\mathfrak{m}$-Vektorraumisomorphismus $G/\mathfrak{m}G \xrightarrow{\cong} (R/\mathfrak{m})^{\oplus C}$. Insgesamt besteht also ein $R/\mathfrak{m}$-Vektorraumisomorphismus $(R/\mathfrak{m})^{\oplus B} \xrightarrow{\cong} (R/\mathfrak{m})^{\oplus C}$. Dieser führt die kanonische Basis des ersten Vektorraumes in eine Basis des zweiten über, die nach (7.2) in Bijektion zur kanonischen Basis des zweiten Vektorraumes stehen muss. Da B resp. C in Bijektion zu $\{e_b^{\oplus B} \mid b \in B\}$ resp. $\{e_c^{\oplus C} \mid c \in C\}$ steht, folgt die Existenz einer Bijektion $\varphi : B \to C$.

"(ii) ⇒ (i)" Eine Bijektion $\varphi : B \to C$ induziert zwei Homomorphismen von R-Moduln $\overline{\varphi} : F \to G$ und $\overline{\psi} : G \to F$ mit $\overline{\varphi}|_B = \varphi$ und $\overline{\psi}|_C = \varphi^{-1}$. Wie in (7.3)(C) sieht man, dass $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}$ zueinander invers sind. ■

7.5 Definition. Seien R ein Ring und F ein freier R-Modul. Dann heisst

$$\mathrm{rk}(F) := \min\{\#B \mid B \text{ ist eine Basis von } F\}$$

der Rang von F. Ist $\mathrm{rk}(F) < \infty$, so sagen wir, F sei ***frei von endlichem Rang***. Ist $R \neq 0$, so ist nach 7.4 klar, dass $\mathrm{rk}(F)$ die gemeinsame Kardinalität aller Basen von F ist.

7.6 Bemerkung. (A) Nach (7.4) für $R \neq 0$ sind zwei freie R-Moduln von endlichem Rang genau dann isomorph, wenn sie den gleichen Rang haben.

(B) Nach (7.3)(B) ist folgendes klar: Ist $r \in \mathbb{N}_0$, so ist ein R-Modul F genau dann frei vom Rang r, wenn ein Isomorphismus $F \cong R^{\oplus r}$ besteht.

§ Freie Auflösungen

7.7 Lemma. Sind R ein Ring und M ein R-Modul, so gibt es einen freien R-Modul F und einen surjektiven Homomorphismus $h : F \to M$ von R-Moduln. Ist M endlich erzeugt, so kann man zudem F von endlichem Rang wählen.

Beweis. Sei $(m_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem von M. Sei $F := R^{\oplus I}$. Der durch $e_j^{\oplus I} \mapsto m_j$ induzierte Homomorphismus $h : F \to M$ von R-Moduln ist dann offenbar surjektiv. ■

7.8 Satz. Zu jedem R-Modul M gibt es eine exakte Sequenz

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

von R-Moduln so, dass F_i für $i \in \mathbb{N}_0$ frei ist. Sind R noethersch und M endlich erzeugt, so kann man zudem die freien R-Moduln F_i alle von endlichem Rang wählen.

Beweis. Nach (7.7) besteht ein surjektiver Homomorphismus $F_0 \xrightarrow{d_0} M$ von R-Moduln, wo F_0 ein freier R-Modul ist, der zudem von endlichem Rang gewählt werden kann, wenn M endlich erzeugt ist. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Nehmen wir an, es bestehe bereits eine exakte Sequenz

$$F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

von R-Moduln so, dass F_i für $i \in \{0, \ldots, n\}$ frei und — falls R noethersch und M endlich erzeugt sind — von endlichem Rang ist. Sei $N := \mathrm{Ker}(d_n)$. Nach (7.7) gibt es einen freien R-Modul F_{n+1} und einen surjektiven Homomorphismus $d'_{n+1} : F_{n+1} \to N$ von R-Moduln. Wir betrachten die Komposition $d_{n+1} := \iota \circ d'_{n+1} : F_{n+1} \to F_n$ von d'_{n+1} mit der Inklusionsabbildung $\iota : N \to F_n$. Dann gilt $\mathrm{Im}(d_{n+1}) = \mathrm{Ker}(d_n)$. Sind R noethersch und M endlich erzeugt, so ist F_n von endlichem Rang, also insbesondere endlich erzeugt, gewählt worden, und damit ist N als Untermodul von F_n endlich erzeugt; nach (7.7) können wir also in diesem Fall F_{n+1} von endlichem Rang wählen. So erhalten wir die gewünschte exakte Sequenz durch Rekursion. ■

7.9 Definition. Ist M ein R-Modul, so nennen wir eine exakte Sequenz

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

eine ***freie Auflösung*** von M, wenn die R-Moduln F_n alle frei sind. Sind alle R-Moduln F_n frei von endlichem Rang, so nennen wir die obige Sequenz eine ***freie Auflösung von***

endlichem Rang von M. Gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $F_h = 0$ für alle $h > n$, so schreiben wir die obige Auflösung in der Form

$$0 \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0.$$

§ Projektive Moduln

7.10 Definition. Ein R-Modul P heisst ***projektiv***, wenn es zu jedem surjektiven Homomorphismus $h : N \twoheadrightarrow M$ von R-Moduln und jedem Homomorphismus $l : P \to M$ von R-Moduln einen Homomorphismus $f : P \to N$ von R-Moduln so gibt, dass das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads, "h"] \\ P \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "l"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\ominus"] & M \end{tikzcd}$$

besteht, d.h. $h \circ f = l$.

7.11 Satz. Freie Moduln sind projektiv.

Beweis. Sei F ein freier R-Modul über der Basis B, sei $h : N \to M$ ein surjektiver und $l : F \to M$ ein beliebiger Homomorphismus. Für jedes Basiselement $b \in B$ wählen wir ein Element $n \in N$ so, dass $h(n) = l(b)$, was wegen der Surjektivität von h möglich ist. Dies definiert eine Abbildung $\varphi : B \to N$. Weil B eine freie Basis von F ist, gibt es einen Homomorphismus $f : F \to N$ mit $f|_B = \varphi$. Es folgt $h \circ f|_B = h \circ \varphi = l|_B$. Weil $l : F \to M$ der einzige Homomorphismus $l' : F \to M$ mit $l'|_B = l|_B$ ist, folgt $h \circ f = l$. ∎

§ Schnitte und Retraktionen

7.12 Definitionen. (A) Seien M und N zwei R-Moduln. Wir sagen, M sei ein ***direkter Summand*** von N, und schreiben dafür $M \Subset N$, wenn es einen R-Modul M' und einen Isomorphismus $M \oplus M' \cong N$ gibt.

(B) Sind U und V Untermoduln eines R-Moduls W, so sagen wir, W sei die ***direkte Summe*** von U und V, wenn der durch $(u, v) \mapsto u + v$ definierte Homomorphismus $U \oplus V \to W$ ein Isomorphismus ist. Wir schreiben dann $W = U \oplus V$.

Damit ist $M \Subset N$ offenbar gleichbedeutend dazu, dass es einen injektiven Homomorphismus $\iota : M \to N$ und einen Untermodul $N' \subseteq N$ so gibt, dass $\iota(M) \oplus N' = N$.

(C) Sei $r : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Ein ***Schnitt*** zu r ist ein Homomorphismus $s : N \to M$ von R-Moduln so, dass $r \circ s = \mathrm{id}_N$.

Sei $s : N \to M$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Eine ***Retraktion*** zu s ist ein Homomorphismus $r : M \to N$ so, dass $r \circ s = \mathrm{id}_N$.

Sind $r : M \to N$ und $s : N \to M$ Homomorphismen von R-Moduln, so ist klar, dass s genau dann ein Schnitt zu r ist, wenn r eine Retraktion zu s ist.

7.13 Lemma. Seien $r : M \to N$ und $s : N \to M$ zwei Homomorphismen von R-Moduln so, dass s ein Schnitt zu r (und damit r eine Retraktion zu s) ist. Dann gilt:

(a) s ist injektiv und r ist surjektiv.

(b) $M = \mathrm{Im}(s) \oplus \mathrm{Ker}(r)$.

(c) $N \Subset M$.

Beweis. "(a)" Sofort klar.

"(b)" Sei $m \in M$. Dann ist $u := s \circ r(m) \in \mathrm{Im}(s)$ und mit $v := m - u$ gilt $r(v) = r(m) - r(u) = r(m) - r \circ s \circ r(m) = r(m) - \mathrm{id}_N(r(m)) = r(m) - r(m) = 0$. Es folgt $v \in \mathrm{Ker}(r)$. Also gilt $m = u + v$ mit $u \in \mathrm{Im}(s)$ und $v \in \mathrm{Ker}(r)$. Dies zeigt, dass die durch $(u, v) \mapsto u + v$ definierte Abbildung $\iota : \mathrm{Im}(s) \oplus \mathrm{Ker}(r) \to M$ surjektiv ist.

Seien umgekehrt $u \in \mathrm{Im}(s)$ und $v \in \mathrm{Ker}(r)$ so, dass $u+v = \iota(u, v) = 0$. Dann ist $u = s(w)$ für ein $w \in N$ und es folgt $0 = r(0) = r(u + v) = r(u) + r(v) = r(u) = r \circ s(w) = w$, also $u = s(w) = s(0) = 0$ und mithin auch $v = 0$. Dies zeigt, dass ι auch injektiv ist.

"(c)" Klar aus (a) und (b). ∎

§ Spaltende Sequenzen

7.14 Lemma. Für eine kurze exakte Sequenz $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} T \to 0$ von R-Moduln sind äquivalent:

(i) Es gibt einen Homomorphismus $s : T \to M$, der ein Schnitt zu p ist, d.h. mit

$$p \circ s = \mathrm{id}_T .$$

(ii) Es gibt einen Homomorphismus $r : M \to N$, der eine Retraktion zu i ist, d.h. mit

$$r \circ i = \mathrm{id}_N .$$

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $s : T \to M$ ein Schnitt zu p. Wir definieren einen Homomorphismus $r : M \to N$ durch die Vorschrift $m \mapsto i^{-1}(m - s \circ p(m))$. Wir verwenden hier erstens, dass durch $m \mapsto m - s \circ p(m)$ ein Homomorphismus $M \to M$ definiert wird, zweitens, dass — wegen $p(m - s \circ p(m)) = p(m) - p \circ s \circ p(m) = p(m) - p(m) = 0$ — jeweils $m - s \circ p(m) \in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(i)$, und drittens, dass i injektiv ist. Für $n \in N$ folgt wegen der Injektivität von i und s, dass $r \circ i(n) = i^{-1}(i(n) - s \circ p(i(n))) = i^{-1}(i(n)) - i^{-1}(s(0)) = n$. Damit gilt $r \circ i = \mathrm{id}_N$.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $r : M \to N$ eine Retraktion von i. Wir definieren dann eine Abbildung $s : T \to M$ durch $t \mapsto m - i \circ r(m)$ Für ein $m \in p^{-1}(t)$. Dabei verwenden wir, dass für $m, m' \in p^{-1}(t)$ gilt $m - m' \in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(i)$, d.h. $i \circ r(m - m') = m - m'$, also $m - i \circ r(m) = m' - i \circ r(m')$. Sofort prüft man jetzt nach, dass s ein Homomorphismus ist und dass $p \circ s = \mathrm{id}_T$ gilt. ∎

7.15 Definition. Erfüllt eine kurze exakte Sequenz $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} T \to 0$ von R-Moduln die äquivalenten Bedingungen aus (7.14), so sagen wir, die Sequenz ***spalte***.

7.16 Bemerkung. Sei $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} T \to 0$ eine spaltende exakte Sequenz von R-Moduln. Der Beweis von (7.14) zeigt, dass es für jeden Schnitt $s : T \to M$ zu p eine Retraktion $r : M \to N$ zu i gibt derart, dass $0 \to T \xrightarrow{s} M \xrightarrow{r} N \to 0$ eine spaltende exakte Sequenz ist.

§ Kriterium für die Projektivität von Moduln

7.17 Satz. Für einen R-Modul P sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) P ist projektiv.

(ii) Zu jedem surjektiven Homomorphismus $p : M \twoheadrightarrow P$ gibt es einen Schnitt $s : P \to M$.

(iii) Jede kurze exakte Sequenz von R-Moduln der Form $0 \to N \to M \to P \to 0$ spaltet.

(iv) P ist ein direkter Summand eines freien R-Moduls.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sind P projektiv und $p : M \twoheadrightarrow P$ ein surjektiver Homomorphismus, so gibt es einen Homomorphismus $s : P \to M$ so, dass das kommutative Diagramm von R-Moduln

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "p"] \arrow[d, phantom, "\circleddash"] & \\ P \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_P"'] & & P \end{tikzcd}$$

besteht.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Ist trivial.

"(iii) $\Rightarrow$ (iv)" Nach (7.7) gibt es einen freien R-Modul F und einen surjektiven Homomorphismus $F \to P$. Weil dieser nach Voraussetzung einen Schnitt besitzt, schliessen wir mit (7.13)(c).

"(iv) $\Rightarrow$ (i)" Sei P ein direkter Summand eines freien R-Moduls F. Es gibt also einen R-Modul Q und einen Isomorphismus $\alpha : P \oplus Q \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow F$. Durch $p \mapsto \alpha(p, 0)$ wird dann ein injektiver Homomorphismus $s : P \to F$ definiert. Ist $\pi : P \oplus Q \to P$ der durch $(p, q) \mapsto p$ definierte Projektionshomomorphismus, so ist $r := \pi \circ \alpha^{-1} : F \to P$ eine Retraktion von s. Seien jetzt $h : N \twoheadrightarrow M$ ein surjektiver Homomorphismus von R-Moduln und $l : P \to M$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Weil F nach (7.11) projektiv ist und der Homomorphismus $l \circ r : F \to M$ besteht, gibt es einen Homomorphismus $g : F \to N$ mit $h \circ g = l \circ r$. Betrachten wir den Homomorphismus $f := g \circ s : P \to N$, so folgt $h \circ f = h \circ g \circ s = l \circ r \circ s = l \circ \mathrm{id}_P = l$. ∎

7.18 Lemma. Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und sind M und N zwei endlich erzeugte R-Moduln, so gilt $\mu(M \oplus N) = \mu(M) + \mu(N)$.

Beweis. Natürlich ist auch $M \oplus N$ endlich erzeugt. Der durch $(m, n) \mapsto (m + \mathfrak{m}M, n + \mathfrak{m}N)$ definierte Homomorphismus $M \oplus N \to M/\mathfrak{m}M \oplus N/\mathfrak{m}N$ ist surjektiv und hat offenbar den Kern $\mathfrak{m}(M \oplus N)$. Deshalb besteht ein Isomorphismus von R-Moduln $(M \oplus N)/\mathfrak{m}(M \oplus N) \cong M/\mathfrak{m}M \oplus N/\mathfrak{m}N$, der auch ein Isomorphismus von $R/\mathfrak{m}$-Vektorräumen ist. Nach (6.36)(a) und (1.30) folgt so $\mu(M \oplus N) = \mathfrak{l}_{R/\mathfrak{m}}((M \oplus N)/\mathfrak{m}(M \oplus N)) = \mathfrak{l}_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M \oplus N/\mathfrak{m}N) = \mathfrak{l}_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M) + \mathfrak{l}_{R/\mathfrak{m}}(N/\mathfrak{m}N) = \mu(M) + \mu(N)$. ∎

7.19 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei P ein endlich erzeugter projektiver R-Modul. Dann ist P ein freier R-Modul, und die minimalen Erzeugendensysteme von P sind genau die Basen von P.

Beweis. Sei $r := \mu(P)$, und sei $(p_i)_{i=1}^r$ ein minimales Erzeugendensystem von P. Sei $F := R^{\oplus r}$ und sei $\pi : F \to P$ der durch $(a_1, \dots, a_r) \mapsto \sum_{i=1}^r a_i p_i$ definierte surjektive Homomorphismus, wobei $a_1, \dots, a_r \in R$. Mit $K := \operatorname{Ker}(\pi)$ besteht dann die kurze exakte Sequenz $0 \to K \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} P \to 0$, die nach (7.17) spaltet. Nach (7.16) gilt also $F \cong K \oplus P$. Weil die kanonische Basis $\{e_j^{\oplus r} \mid 1 \leq j \leq r\}$ von F offenbar ein minimales Erzeugendensystem von F ist, gilt $\mu(F) = r$. Weil R noethersch ist, ist K endlich erzeugt. Über (7.18) folgt also $r = \mu(F) = \mu(K \oplus P) = \mu(K) + \mu(P) = \mu(K) + r$, also $\mu(K) = 0$, d.h. $K = 0$. Deshalb ist π ein Isomorphismus. Wegen $\pi(e_j^{\oplus r}) = p_j$ für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ folgt nun aus (7.3)(D), dass P frei ist über der Basis $\{p_i \mid 1 \leq i \leq r\}$. Da offenbar Basen von P auch minimale Erzeugendensysteme sind, sind wir fertig. ∎

§ Projektive Auflösungen und projektive Dimension

7.20 Definition. (A) Sei M ein R-Modul. Eine exakte Sequenz

$$\cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

mit lauter projektiven Moduln P_n nennen wir eine ***projektive Auflösung*** von M.

(B) Ist

$$\cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

eine projektive Auflösung von M und gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $P_h = 0$ für alle $h > n$, so schreiben wir die obige projektive Auflösung in der Form

$$0 \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-2} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0.$$

(C) Ist eine projektive Auflösung von M wie in (B) gegeben, so definieren wir deren ***Länge*** als

$$\sup \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid P_n \neq 0 \} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, -\infty\}.$$

Dabei sei wie schon früher $\sup \varnothing = -\infty$, sodass eine Auflösung der obigen Art genau dann die Länge $-\infty$ hat, wenn alle Moduln P_n verschwinden, also höchstens dann, wenn $M = 0$.

7.21 Satz. Jeder Modul besitzt eine projektive Auflösung.

Beweis. Klar aus (7.8) und (7.11). ■

7.22 Definition. Die ***projektive Dimension*** $\operatorname{pdim}(M)$ eines Moduls M definieren wir als das Infimum der Längen aller projektiven Auflösungen von M.

7.23 Bemerkung. Ist M ein Modul, so ist $\operatorname{pdim}(M) = \infty$ gleichbedeutend dazu, dass M nur projektive Auflösungen

$$\cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

mit lauter projektiven Moduln $P_n \neq 0$ hat. Gilt nämlich in einer solchen Auflösung $P_n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so entsteht durch Ersetzen von P_m durch 0 für $m > n$ wieder eine projektive Auflösung von M.

Weiter ist $\operatorname{pdim}(M) = -\infty$ gleichbedeutend zu $M = 0$, während $\operatorname{pdim}(M) = 0$ äquivalent dazu ist, dass M isomorph zu einem projektiven Modul $P_0 \neq 0$ ist, also, dass M ein nichttrivialer projektiver Modul ist.

§ Minimale freie Auflösungen

7.24 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, sei M ein endlich erzeugter R-Modul, und sei $h : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Dann sind äquivalent:

(i) Für jedes minimale Erzeugendensystem $(m_i)_{i=1}^r$ von M ist $\big(h(m_i)\big)_{i=1}^r$ ein minimales Erzeugendensystem von $\operatorname{Im}(h)$.

(ii) Es gibt ein minimales Erzeugendensystem $(m_i)_{i=1}^r$ von M so, dass $\big(h(m_i)\big)_{i=1}^r$ ein minimales Erzeugendensystem von $\operatorname{Im}(h)$ ist.

(iii) $\mu(M) = \mu(\operatorname{Im}(h))$.

(iv) Der durch $m + \mathfrak{m}M \mapsto h(m) + \mathfrak{m}\operatorname{Im}(h)$ definierte Homomorphismus von R-Moduln $\overline{h} : M/\mathfrak{m}M \to \operatorname{Im}(h)/\mathfrak{m}\operatorname{Im}(h)$ ist ein Isomorphismus.

(v) $\operatorname{Ker}(h) \subseteq \mathfrak{m}M$.

Beweis. Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sind trivial.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)" Ist $(m_i)_{i=1}^r$ ein minimales Erzeugendensystem von M, so ist $r = \mu(M)$. Weiter ist $\big(h(m_i)\big)_{i=1}^r$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Im}(h)$. Wegen $r = \mu(M) = \mu(\operatorname{Im}(h))$ handelt es sich um ein minimales Erzeugendensystem von $\operatorname{Im}(h)$.

"(iii) ⇔ (iv)" Dies ergibt sich aus der Beobachtung, dass $\overline{h}$ surjektiv ist, also genau dann ein Isomorphismus ist, wenn die (endlichen) Dimensionen der Vektorräume $M/\mathfrak{m}M$ und $\operatorname{Im}(h)/\mathfrak{m}\operatorname{Im}(h)$ übereinstimmen.

"(iv) ⇒ (v)" Sei $\operatorname{Ker}(h)$ nicht in $\mathfrak{m}M$ enthalten. Wir finden dann ein Element $m \in \operatorname{Ker}(h) \setminus \mathfrak{m}M$. Es folgt $\overline{m} := m + \mathfrak{m}M \in M/\mathfrak{m}M \setminus 0$ und $\overline{h}(\overline{m}) = h(m) + \mathfrak{m}\operatorname{Im}(h) = 0 + \mathfrak{m}\operatorname{Im}(h) = 0 \in \operatorname{Im}(h)/\mathfrak{m}\operatorname{Im}(h)$. Damit ist $\overline{h}$ aber nicht injektiv, also erst recht kein Isomorphismus.

"(v) ⇒ (iv)" Sei $\operatorname{Ker}(h) \subseteq \mathfrak{m}M$. Wir wählen $m \in M$ so, dass $\overline{m} := m + \mathfrak{m}M \in \operatorname{Ker}(\overline{h})$. Es folgt dann $h(m) + \mathfrak{m}Im(h) = \overline{h}(\overline{m}) = 0 \in \operatorname{Im}(h)/\mathfrak{m}\operatorname{Im}(h)$, also $h(m) \in \mathfrak{m}\operatorname{Im}(h)$. Mit geeigneten Elementen $m_1, \ldots, m_r \in M$ und $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ können wir deshalb schreiben $h(m) = x_1 h(m_1) + ... + x_r h(m_r)$. Es folgt $h(m - x_1 m_1 - \cdots - x_r m_r) = h(m) - (x_1 h(m_1) + \cdots + x_r h(m_r)) = 0$, also $m - x_1 m_1 - \cdots - x_r m_r \in \operatorname{Ker}(h) \subseteq \mathfrak{m}M$, d.h. $m \in \mathfrak{m}M$, also $\overline{m} = 0 \in M/\mathfrak{m}M$. Dies zeigt, dass $\overline{h}$ injektiv ist. Da $\overline{h}$ offensichtlich auch surjektiv ist, ist $\overline{h}$ ein Isomorphismus. ■

7.25 Definition. $(R, \mathfrak{m})$ sei ein lokaler Ring, und M und N seien R-Moduln. Ein Homomorphismus $h : M \to N$ von R-Moduln heisst ***minimal***, wenn M endlich erzeugt ist und h die äquivalenten Bedingungen aus (7.24) erfüllt.

7.26 Bemerkungen. $(R, \mathfrak{m})$ sei ein lokaler Ring, und M und N seien R-Moduln.

(A) Ist $h : M \rightarrowtail N$ ein injektiver Homomorphismus von R-Moduln und ist M endlich erzeugt, so ist h minimal.

(B) Ist $h : M \to N$ ein minimaler Homomorphismus von R-Moduln und ist $T \subseteq N$ ein Untermodul mit $\operatorname{Im}(h) \subseteq T$, so ist auch $h : M \to T$ minimal.

(C) Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Ein Homomorphismus $h : R^{\oplus r} \to N$ ist genau dann minimal, wenn $\mu(\operatorname{Im}(h)) = r$. Ist insbesondere N ein endlich erzeugter R-Modul mit einem minimalen Erzeugendensystem $(n_i)_{i=1}^r$, so ist der durch $(a_1, \ldots, a_r) \mapsto \sum_{i=1}^r a_i n_i$ definierte surjektive Homomorphismus $h : R^{\oplus r} \to N$ minimal.

7.27 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann besitzt M eine freie Auflösung von endlichem Rang

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

so, dass alle Homomorphismen d_n minimal sind.

Beweis. Nach (7.26)(C) besteht ein surjektiver, minimaler Homomorphismus $F_0 \xrightarrow{d_0} M$, wobei $F_0 := R^{\oplus \mu(M)}$ frei von endlichem Rang ist. Nehmen wir also an, es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und bestehe bereits eine exakte Sequenz

$$F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

mit freien R-Moduln F_i von endlichem Rang und mit minimalen Homomorphismen d_i. Weil F_n endlich erzeugt und R noethersch ist, ist $N := \operatorname{Ker}(d_n)$ als Untermodul von F_n

ebenfalls endlich erzeugt. Nach (7.26) finden wir deshalb einen freien R-Modul F_{n+1} von endlichem Rang und einen surjektiven, minimalen Homomorphismus $d'_{n+1} : F_{n+1} \to N$. Durch Komposition mit dem Inklusionshomomorphismus $N \hookrightarrow F_n$ erhalten wir eine exakte Sequenz

$$F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

mit freien Moduln F_i von endlichem Rang und mit minimalen Homomorphismen d_i. Wenn wir rekursiv so fortfahren, erhalten wir die gewünschte freie Auflösung von M. ■

7.28 Definition. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, und sei M ein R-Modul. Eine exakte Sequenz

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

mit freien R-Moduln F_i von endlichem Rang und minimalen Homomorphismen d_i nennen wir eine ***minimale freie Auflösung*** von M.

§ Auflösungen von Homomorphismen

7.29 Lemma. Es bestehe das folgende kommutative Diagramm von R-Moduln mit halbexakter erster und exakter zweiter Zeile:

$$\begin{tikzcd} \text{hex:} & P \arrow[r, "c"] & V \arrow[r, "a"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & V' \arrow[d, "h'"] \\ \text{ex:} & Q \arrow[r, "d"'] & W \arrow[r, "b"'] & W'. \end{tikzcd}$$

Ist P projektiv, so gibt es einen Homomorphismus $l : P \to Q$ mit $h \circ c = d \circ l$, d.h. es besteht das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "c"] \arrow[d, dashed, "l"'] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & V \arrow[d, "h"] \\ Q \arrow[r, "d"'] & W. \end{tikzcd}$$

Beweis. Wir setzen $M := \mathrm{Im}(c)$ und $N := \mathrm{Im}(d)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} b(h(M)) &\subseteq b(h(\mathrm{Ker}(a)) \\ &= b \circ h(\mathrm{Ker}(a)) \\ &= h' \circ a(\mathrm{Ker}(a)) \\ &= h'(a(\mathrm{Ker}(a))) \\ &= h'(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

also $h(M) \subseteq \mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Im}(d) = N$. Also gilt $h(\mathrm{Im}(c)) \subseteq N$ und mithin $\mathrm{Im}(h \circ c) \subseteq N$. Es besteht also ein Homomorphismus $h \circ c : P \to N$ und ein surjektiver Homomorphismus $d : Q \twoheadrightarrow N$. Ist P projektiv ist, so gibt es einen Homomorphismus $l : P \to Q$ mit $d \circ l = h \circ c$. ■

7.30 Satz. Sei $h : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, sei

$$\text{hex:} \quad \cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

eine halbexakte Sequenz von R-Moduln mit projektiven R-Moduln P_i, und sei

$$\text{ex:} \quad \cdots \to Q_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} Q_n \xrightarrow{e_n} Q_{n-1} \to \cdots \to Q_1 \xrightarrow{e_1} Q_0 \xrightarrow{e_0} N \to 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gibt es eine Familie

$$\big(h_n : P_n \to Q_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

von Homomorphismen von R-Moduln so, dass die folgenden kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "h_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circleddash"] & M \arrow[d, "h"] \\ Q_0 \arrow[r, "e_0"'] & N \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, dashed, "h_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circleddash"] & P_n \arrow[d, dashed, "h_n"] \\ Q_{n+1} \arrow[r, "e_{n+1}"'] & Q_n \end{tikzcd}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bestehen.

Beweis. Wir setzen

$$P_{-1} := M, \quad Q_{-1} := N, \quad h_{-1} := h$$

und

$$P_{-2} := 0, \quad Q_{-2} := 0, \quad h_{-2} := 0$$

sowie

$$d_{-1} := 0, \quad e_{-1} := 0.$$

Für $n \geq -1$ wollen wir die Homomorphismen h_n rekursiv konstruieren. Wenn $n = -1$, ist $h_n = h$ bereits vorgegeben.

Sei also $n > -1$. Nach Rekursionsvoraussetzung besteht dann das folgende kommutative Diagramm mit halbexakter erster und exakter zweiter Zeile:

$$\begin{tikzcd} \text{hex:} & P_n \arrow[r, "d_n"] & P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "h_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circleddash"] & P_{n-2} \arrow[d, "h_{n-2}"] \\ \text{ex:} & Q_n \arrow[r, "e_n"'] & Q_{n-1} \arrow[r, "e_{n-1}"'] & Q_{n-2}. \end{tikzcd}$$

Weil P_n projektiv ist, finden wir nach (7.29) einen Homomorphismus $h_n : P_n \to Q_n$ von R-Moduln mit $h_{n-1} \circ d_n = e_n \circ h_n$. ∎

7.31 Korollar. Sei $h : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, und seien

$$\cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

und

$$\cdots \to Q_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} Q_n \xrightarrow{e_n} Q_{n-1} \to \cdots \to Q_1 \xrightarrow{e_1} Q_0 \xrightarrow{e_0} N \to 0$$

projektive Auflösungen von M resp. N. Dann gibt es eine Familie

$$\big(h_n : P_n \to Q_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

von Homomorphismen von R-Moduln so, dass die folgenden kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "h_0"'] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & M \arrow[d, "h"] \\ Q_0 \arrow[r, "e_0"'] & N \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, dashed, "h_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & P_n \arrow[d, dashed, "h_n"] \\ Q_{n+1} \arrow[r, "e_{n+1}"'] & Q_n \end{tikzcd}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bestehen. ■

7.32 Definition. In der in (7.31) beschriebenen Situation nennen wir die Familie

$$\big(h_n : P_n \to Q_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

eine ***Auflösung*** von h (zwischen den gegebenen projektiven Auflösungen von M und N).

§ Auflösungen von Schnitten durch Schnitte

7.33 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Es bestehe das folgende kommutative Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd} \text{ex:} & P \arrow[r, "c"] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & V \arrow[r, "a"] \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & V' \\ \text{ex:} & F \arrow[r, "d"'] & W \arrow[r, "b"'] \arrow[u, shift right, "k"'] & W'. \arrow[u, "k'"'] \end{tikzcd}$$

Dabei seien F frei von endlichem Rang, d minimal und k ein Schnitt zu h. Dann gibt es einen Schnitt $s : F \to P$ zu r mit $c \circ s = k \circ d$, d.h. es besteht das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "c"] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & V \\ F \arrow[r, "d"'] \arrow[u, dashed, "s"] & W. \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $\mu := \mathrm{rk}(F) = \mu(F)$. Weil d minimal ist, gilt nach (7.24)(iii) $\mu(\mathrm{Im}(d)) = \mu$, und wir finden Elemente $n_1, \ldots, n_\mu \in N := \mathrm{Im}(d)$, die ein minimales Erzeugendensystem von N bilden. Als Schnitt zu h ist k gemäss (7.13)(a) injektiv, also ist $\overline{k} := k|_N : N \to V$ ebenso injektiv und somit minimal, vgl. (7.26). Deshalb bilden $k(n_1), \ldots, k(n_\mu)$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathrm{Im}(\overline{k}) = k(N)$. Dabei ist

$$a(\mathrm{Im}(\overline{k})) = a \circ k(N) = a \circ k(\mathrm{Ker}(b)) = k' \circ b(\mathrm{Ker}(b)) = k'(0) = 0,$$

also $k(n_i) \in \mathrm{Im}(\overline{k}) \subseteq \mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Im}(c)$ für $i = 1, \ldots, \mu$. Wir finden also Elemente $p_1, \ldots, p_\mu \in P$ so, dass $c(p_i) = k(n_i)$ für $i = 1, \ldots, \mu$. Wir setzen $f_i := r(p_i)$ für $i = 1, \ldots, \mu$. Dann gilt

$$d(f_i) = d \circ r(p_i) = h \circ c(p_i) = h \circ k(n_i) = \mathrm{id}_N(n_i) = n_i,$$

denn k ist ein Schnitt zu h. Weil d minimal ist, definiert die Vorschrift $f + \mathfrak{m}F \mapsto d(f) + \mathfrak{m}N$ ein Isomorphismus $\overline{d} : F/\mathfrak{m}F \xrightarrow{\cong} N/\mathfrak{m}N$ von $R/\mathfrak{m}$-Vektorräumen. Dabei gilt $\overline{d}(f_i + \mathfrak{m}F) = n_i + \mathfrak{m}N$. Weil die Restklassen $n_1 + \mathfrak{m}N, \ldots, n_\mu + \mathfrak{m}N$ gemäss (6.36)(a) eine Basis von $N/\mathfrak{m}N$ bilden, bilden die Restklassen $f_1 + \mathfrak{m}F, \ldots, f_\mu + \mathfrak{m}F$ eine Basis von $F/\mathfrak{m}F$. Also bilden die Elemente $f_1, \ldots, f_\mu$ wieder nach (6.36)(a) ein minimales Erzeugendensystem von F, nach (7.11) und (7.19) also eine Basis von F. Deshalb gibt es einen Homomorphismus $s : F \to P$ mit $s(f_i) = p_i$ für $i = 1, \ldots, \mu$. Jetzt folgen aber

$$c \circ s(f_i) = c(p_i) = k(n_i) = k(d(f_i)) = k \circ d(f_i)$$

und

$$r \circ s(f_i) = r(p_i) = f_i = \mathrm{id}_F(f_i)$$

für $i = 1, \ldots, \mu$. Weil F frei ist über der Basis $\{f_i \mid 1 \leq i \leq \mu\}$, erhalten wir $c \circ s = k \circ d$ und $r \circ s = \mathrm{id}_F$. ■

7.34 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, seien M und N R-Moduln, und seien $r : M \to N$ und $s : N \to M$ Homomorphismen von R-Moduln so, dass s ein Schnitt zu r ist. Sei

$$\cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

eine projektive Auflösung von M, sei

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} F_n \xrightarrow{e_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{e_1} F_0 \xrightarrow{e_0} N \to 0$$

eine minimale freie Auflösung von N, und sei

$$\big(r_n : P_n \to F_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

eine Auflösung von r zwischen den gegebenen projektiven Auflösungen. Dann gibt es eine Auflösung

$$\big(s_n : F_n \to P_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

von s so, dass s_n ein Schnitt zu r_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

Beweis. Wir setzen $P_{-1} := M$, $F_{-1} := N$, $r_{-1} := r$, $s_{-1} := s$ und $P_{-2} := F_{-2} := 0$, $r_{-2} := 0$, $s_{-2} := 0$ sowie $d_{-1} := 0$, $e_{-1} := 0$. Für $n \geq -1$ konstruieren wir die Homomorphismen s_n rekursiv. Wenn $n = -1$, ist $s_n = s$ bereits vorgegeben. Sei also $n > -1$. Nach Rekursionsvoraussetzung besteht dann das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
\text{ex:} & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "r_n"'] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, shift right, "r_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & P_{n-2} \\
\text{ex:} & F_n \arrow[r, "e_n"'] & F_{n-1} \arrow[r, "e_{n-1}"'] \arrow[u, shift right, "s_{n-1}"'] & F_{n-2}. \arrow[u, "s_{n-2}"']
\end{tikzcd}$$

Dabei sind F_n frei von endlichem Rang, e_n minimal und s_{n-1} ein Schnitt zu r_{n-1}. Nach (7.33) gibt es also einen Schnitt $s_n : F_n \to P_n$, für den $d_n \circ s_n = s_{n-1} \circ e_n$ gilt. ■

§ Betti-Zahlen

7.35 Korollar. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, seien M und N R-Moduln, und sei $i : M \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow N$ ein Isomorphismus von R-Moduln. Sind

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0,$$
$$\cdots \to G_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} G_n \xrightarrow{e_n} G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \xrightarrow{e_1} G_0 \xrightarrow{e_0} N \to 0$$

minimale freie Auflösungen von M resp. N, so besteht jede Auflösung

$$\big(i_n : F_n \to G_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

von i (zwischen den vorgegebenen minimalen freien Auflösungen) aus Isomorphismen.

Beweis. Gemäss (7.34) besitzt $j := i^{-1}$ eine Auflösung $(j_n : G_n \to F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ derart, dass $i_n \circ j_n = \mathrm{id}_{G_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist i_n jeweils surjektiv. Die selbe Überlegung, angewandt auf $(j_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, ergibt, dass jedes j_n surjektiv ist. Da aber j_n als Schnitt von i_n injektiv ist, ist j_n jeweils ein Isomorphismus, der offenbar zu i_n invers ist. ■

7.36 Korollar. Sind $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

eine minimale freie Auflösung von M, so hängt der Rang $\mathrm{rk}(F_n)$ des n-ten freien Moduls F_n in dieser Auflösung nur von n und M ab, nicht aber von der gewählten minimalen freien Auflösung von M.

Beweis. Sei $\cdots \to G_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} G_n \xrightarrow{e_n} G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \xrightarrow{e_1} G_0 \xrightarrow{e_0} M \to 0$ eine weitere minimale freie Auflösung von M. Wendet man (7.35) mit $i = \mathrm{id}_M$ an, so ergeben sich Isomorphismen $F_n \cong G_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Nun schliessen wir mit (7.6)(A). ■

7.37 Definition. Seien $(R,\mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $n \in \mathbb{N}_0$. Die n-te ***Betti-Zahl*** $b_n(M)$ von M definieren wir dann als

$$b_n(M) := \operatorname{rk}(F_n),$$

wobei

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

eine minimale freie Auflösung von M ist.

§ Betti-Zahlen und projektive Dimension

7.38 Satz. Sei $(R,\mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist $\operatorname{pdim}(M)$ die gemeinsame Länge aller minimalen freien Auflösungen von M. Insbesondere gilt

$$\operatorname{pdim}(M) = \sup\left\{n \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, b_n(M) \neq 0\right\}.$$

Beweis. Sei $\cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \to \cdots \to P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$ eine projektive Auflösung von M, sei $\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} F_n \to \cdots \to F_0 \xrightarrow{e_0} M \to 0$ eine minimale freie Auflösung von M, und sei $(i_n : P_n \to F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Auflösung von $\mathrm{id}_M : M \to M$ zwischen den gegebenen projektiven Auflösungen. Nach (7.34) ist dann i_n jeweils surjektiv, so dass aus $P_n = 0$ immer $F_n = 0$ folgt. Unter allen projektiven Auflösungen von M ist also unsere minimale freie Auflösung diejenige der kleinsten Länge. Deshalb ist $\operatorname{pdim}(M)$ gerade die Länge der gewählten minimalen freien Auflösung. Daraus folgt die Behauptung. ■

7.39 Lemma. Sei $(R,\mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, sei M ein R-Modul, sei

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

eine minimale freie Auflösung von M, und sei $r \in \mathbb{N}_0$. Dann besteht eine minimale freie Auflösung

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_{r+2} \xrightarrow{d_{r+2}} F_{r+1} \xrightarrow{d} \operatorname{Ker}(d_r) \to 0$$

von $\operatorname{Ker}(d_r)$.

Beweis. Für alle $n \geq r+1$ sind die Moduln F_n frei von endlichem Rang und die Homomorphismen $d_{n+1} : F_{n+1} \to F_n$ und $d : F_{r+1} \to \operatorname{Im}(d_{r+1}) = \operatorname{Ker}(d_r)$, $m \mapsto d_{r+1}(m)$, minimal. ■

7.40 Notation. Im Folgenden sei

$$z' := \begin{cases} z, & \text{falls } z \geq 0 \\ -\infty, & \text{falls } z < 0 \end{cases}, \quad \text{für } z \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}.$$

7.41 Korollar. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, sei M ein endlich erzeugter R-Modul, sei

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

eine minimale freie Auflösung von M, und sei $r \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten:

(a) $b_i\big(\operatorname{Ker}(d_r)\big) = b_{i+r+1}\big(M\big)$ für $i \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\operatorname{pdim}\big(\operatorname{Ker}(d_r)\big) = \big(\operatorname{pdim}(M) - r - 1\big)'$.

Beweis. Klar aus (7.39) und (7.38). ∎

7.42 Korollar. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, sei M ein endlich erzeugter R-Modul, sei F ein freier R-Modul vom Rang $\mu(M)$, und sei $p : F \twoheadrightarrow M$ ein surjektiver Homomorphismus von R-Moduln. Dann gilt:

(a) $b_i\big(\operatorname{Ker}(p)\big) = b_{i+1}\big(M\big)$ für $i \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\operatorname{pdim}\big(\operatorname{Ker}(p)\big) = \big(\operatorname{pdim}(M) - 1\big)'$.

Beweis. Weil p minimal ist, besteht eine minimale freie Auflösung

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F \xrightarrow{p} M \to 0,$$

und wir schliessen mit (7.41). ∎

Kapitel 8

Globale Dimension

§ Globale Dimension

8.1 Definition. Die ***globale Dimension*** $\operatorname{gldim}(R)$ eines noetherschen Rings R ist definiert als das Supremum der projektiven Dimensionen aller endlich erzeugten R-Moduln:

$$\operatorname{gldim}(R) := \sup\Big\{ \operatorname{pdim}(M) \;\Big|\; M \text{ ist endlich erzeugter } R\text{-Modul} \Big\}.$$

§ Komplexe und Doppelkomplexe von Moduln

8.2 Definitionen. Sei R ein Ring.

(A) Ein ***Komplex*** (von R-Moduln) ist eine halbexakte Sequenz von R-Moduln $(h_m)_{m\in\mathbb{Z}}$. Für $m \in \mathbb{Z}$ setzen wir $M_m := \operatorname{Qu}(h_m)$. Dann wird der Komplex $(h_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ auch mit $h_\bullet$, $(M_m, h_m)_{m\in\mathbb{Z}}$, $(M_\bullet, h_\bullet)$ oder missbräuchlich mit $M_\bullet$ bezeichnet.

(B) Sei $(M_\bullet, h_\bullet)$ ein Komplex und sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann heisst der R-Modul

$$H_n(M_\bullet) := H_n(M_\bullet, h_\bullet) := \operatorname{Ker}(h_n)/\operatorname{Im}(h_{n+1})$$

die ***n-te Homologie von*** $M_\bullet$.

8.3 Definitionen. Sei R ein Ring.

(A) Ein ***Doppelkomplex*** (von R-Moduln) ist eine Familie $(h_{m,n}, l_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ von Paaren von Homomorphismen von R-Moduln so, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{Z} : (h_{m,n})_{m\in\mathbb{Z}}$ ist ein Komplex von R-Moduln;

(b) $\forall\, m \in \mathbb{Z} : (l_{m,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ ist ein Komplex von R-Moduln;

(c) $\forall\, (m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \operatorname{Qu}(h_{m,n}) = \operatorname{Qu}(l_{m,n})$;

(d) $\forall\, (m,n) \in \mathbb{Z}^2 : l_{m-1,n} \circ h_{m,n} = h_{m,n-1} \circ l_{m,n}$.

(B) Sei $(h_{m,n}, l_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ ein Doppelkomplex. Für $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ setzen wir $M_{m,n} := \operatorname{Qu}(h_{m,n}) = \operatorname{Qu}(l_{m,n})$. Dann wird der Dopplekomplex $(h_{m,n}, l_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ auch mit

$(h_{\bullet\bullet}, l_{\bullet\bullet})$, $(M_{m,n}, h_{m,n}, l_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, $(M_{\bullet\bullet}, h_{\bullet\bullet}, l_{\bullet\bullet})$ oder missbräuchlich mit $M_{\bullet\bullet}$ bezeichnet. Die Axiome (a)–(d) sind gleichbedeutend mit der Aussage, dass das folgende kommutative Diagramm von R-Moduln besteht

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & M_{m+1,n+1} \arrow[r, "h_{m+1,n+1}"] \arrow[d, "l_{m+1,n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circledequal"] & M_{m,n+1} \arrow[r, "h_{m,n+1}"] \arrow[d, "l_{m,n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circledequal"] & M_{m-1,n+1} \arrow[r] \arrow[d, "l_{m-1,n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M_{m+1,n} \arrow[r, "h_{m+1,n}"] \arrow[d, "l_{m+1,n}"'] \arrow[dr, phantom, "\circledequal"] & M_{m,n} \arrow[r, "h_{m,n}"] \arrow[d, "l_{m,n}"'] \arrow[dr, phantom, "\circledequal"] & M_{m-1,n} \arrow[r] \arrow[d, "l_{m-1,n}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M_{m+1,n-1} \arrow[r, "h_{m+1,n-1}"] \arrow[d] & M_{m,n-1} \arrow[r, "h_{m,n-1}"] \arrow[d] & M_{m-1,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

mit halbexakten "Zeilen" und "Spalten".

(C) Sei $(M_{\bullet\bullet}, h_{\bullet\bullet}, l_{\bullet\bullet})$ ein Doppelkomplex und sei $r \in \mathbb{Z}$. Die Komplexe

$$M_{r\bullet} := (M_{r\bullet}, l_{r\bullet}) := (l_{rn})_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{und} \quad M_{\bullet r} := (M_{\bullet r}, h_{\bullet r}) := (h_{mr})_{m\in\mathbb{Z}}$$

heissen der r-***te Spaltenkomplex*** beziehungsweise der r-***te Zeilenkomplex*** von $M_{\bullet\bullet}$.

(D) Ist $M_{\bullet\bullet}$ ein Doppelkomplex von R-Moduln so, dass $M_{m,n} = 0$, falls $m < r$ oder $n < s$, so wird das zugehörige Diagramm als

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & M_{m+1,n+1} \arrow[r, "h_{m+1,n+1}"] \arrow[d, "l_{m+1,n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circledequal"] & M_{m,n+1} \arrow[r] \arrow[d, "l_{m,n+1}"] & \cdots \arrow[r] & M_{r+1,n+1} \arrow[r, "h_{r+1,n+1}"] \arrow[d, "l_{r+1,n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circledequal"] & M_{r,n+1} \arrow[r] \arrow[d, "l_{r,n+1}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & M_{m+1,n} \arrow[r, "h_{m+1,n}"'] \arrow[d] & M_{m,n} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & M_{r+1,n} \arrow[r, "h_{r+1,n}"'] \arrow[d] & M_{r,n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & M_{m+1,s+1} \arrow[r, "h_{m+1,s+1}"] \arrow[d, "l_{m+1,s+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circledequal"] & M_{m,s+1} \arrow[r] \arrow[d, "l_{m,s+1}"] & \cdots \arrow[r] & M_{r+1,s+1} \arrow[r, "h_{r+1,s+1}"] \arrow[d, "l_{r+1,s+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circledequal"] & M_{r,s+1} \arrow[r] \arrow[d, "l_{r,s+1}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & M_{m+1,s} \arrow[r, "h_{m+1,s}"'] \arrow[d] & M_{m,s} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & M_{r+1,s} \arrow[r, "h_{r+1,s}"'] \arrow[d] & M_{r,s} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

geschrieben.

§ Diagonalfolgen in Doppelkomplexen

8.4 Definition. Sei $(M_{\bullet\bullet}, h_{\bullet\bullet}, l_{\bullet\bullet})$ ein Doppelkomplex von R-Moduln. Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Eine ***Diagonalfolge*** der Stufe r im Doppelkomplex $M_{\bullet\bullet}$ ist eine Folge

$$\left(m_{i,j}\right)_{\substack{i+j=r\\ i,j\geq 0}} = \left(m_{k,r-k}\right)_{k=0}^{r}$$

von Elementen $m_{i,j} \in M_{i,j}$ so, dass

$$h_{i,j}(m_{i,j}) = l_{i-1,j+1}(m_{i-1,j+1})$$

für alle Paare $(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $i + j = r$. Es besteht also die nachfolgend skizzierte Situation

$$\begin{tikzcd}
 & & m_{i-1,j+1} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "l_{i-1,j+1}"] & \cdots \\
 & m_{i,j} \arrow[r, mapsto, "h_{i,j}"] \arrow[d, mapsto, "l_{i,j}"] & \bullet \in M_{i-1,j} & \\
m_{i+1,j-1} \arrow[r, mapsto, "h_{i+1,j-1}"] \arrow[d, mapsto] & \bullet \in M_{i,j-1} & & \\
\vdots & & &
\end{tikzcd}$$

mit $m_{i-1,j+1} \in M_{i-1,j+1}$, $m_{i,j} \in M_{i,j}$ und $m_{i+1,j-1} \in M_{i+1,j-1}$.

8.5 Bemerkung. (A) Sei $M_{\bullet\bullet} = (M_{\bullet\bullet}, h_{\bullet\bullet}, l_{\bullet\bullet})$ ein Doppelkomplex von R-Moduln. Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Sind dann $(m_{i,j})_{i+j=r}$ und $(m'_{i,j})_{i+j=r}$ zwei Diagonalfolgen der Stufe r in $M_{\bullet\bullet}$, so ist es auch deren Summe $(m_{i,j} + m'_{i,j})_{i+j=r}$. Ist $x \in R$, so ist auch die Folge $(xm_{i,j})_{i+j=r}$ eine Diagonalfolge der Stufe r.

(B) Ist $(m_{i,j})_{i+j=r}$ eine Diagonalfolge der Stufe $r > 0$, so gilt

$$\begin{aligned}
h_{r,-1}(l_{r,0}(m_{r,0})) &= h_{r,-1} \circ l_{r,0}(m_{r,0}) \\
&= l_{r-1,0} \circ h_{r,0}(m_{r,0}) \\
&= l_{r-1,0}(h_{r,0}(m_{r,0})) \\
&= l_{r-1,0}(l_{r-1,1}(m_{r-1,1})) \\
&= l_{r-1,0} \circ l_{r-1,1}(m_{r-1,1}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

also $l_{r,0}(m_{r,0}) \in \mathrm{Ker}(h_{r,-1})$. Genau gleich folgt natürlich, dass $h_{0,r}(m_{0,r}) \in \mathrm{Ker}(l_{-1,r})$.

8.6 Lemma. Sei $(M_{\bullet\bullet}, h_{\bullet\bullet}, l_{\bullet\bullet})$ ein Doppelkomplex von R-Moduln so, dass $M_{m,n} = 0$, falls $m < -1$ oder $n < -1$. Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Für alle $m \in \{0, \ldots, r\}$ sei der m-te Spaltenkomplex $(M_{m,\bullet}, l_{m,\bullet})$ exakt. Sei $u \in \mathrm{Ker}(h_{r,-1})$. Dann gibt es eine Diagonalfolge $(m_{i,j})_{i+j=r}$ der Stufe r so, dass $l_{r,0}(m_{r,0}) = u$.

Beweis. Gemäss Voraussetzung ist $l_{r,0} : M_{r,0} \to M_{r,-1}$ surjektiv, und wir finden ein Element $m_{r,0} \in M_{r,0}$ mit $l_{r,0}(m_{r,0}) = u$. Ist $r = 0$, so sind wir fertig.

Nehmen wir also an, es sei $r > 0$ und $0 \leq t < m$ und die Elemente $m_{r,0}, m_{r-1,1}, \ldots, m_{r-t,t}$ seien bereits so gefunden, dass $h_{r-i,i}(m_{r-i,i}) = l_{r-i-1,i+1}(m_{r-i-1,i+1})$ für $i \in \{0, \ldots, t-1\}$. Dann ist sofort klar, dass $h_{r-t,t}(m_{r-t,t}) \in \mathrm{Ker}(l_{r-t-1,t}) = \mathrm{Im}(l_{r-t-1,t+1})$, und wir finden ein Element $m_{r-t-1,t+1} \in M_{r-t-1,t+1}$ mit $h_{r-t,t}(m_{r-t,t}) = l_{r-t-1,t+1}(m_{r-t-1,t+1})$. Durch Rekursion folgt nun die Behauptung. ■

8.7 Lemma. Seien $(M_{\bullet\bullet}, h_{\bullet\bullet}, l_{\bullet\bullet})$ und $r \in \mathbb{N}_0$ wie in (8.6). Zusätzlich sei der $(r+1)$-te Spaltenkomplex $M_{r+1,\bullet}$ exakt. Sei $v \in M_{r+1,-1}$, und sei $(m_{i,j})_{i+j=r}$ eine Diagonalfolge so, dass $l_{r,0}(m_{r,0}) = h_{r+1,-1}(v)$. Dann gibt es eine Folge $(\overline{m}_{r+1-t,t})_{t=0}^{r+1}$ so, dass

$$\forall\, t \in \{0, \ldots, r\} : \overline{m}_{r+1-t,t} \in M_{r+1-t,t};$$
$$l_{r+1,0}(\overline{m}_{r+1,0}) = v;$$
$$\forall\, t \in \{0, \ldots, r\} : l_{r-t,t+1}(\overline{m}_{r-t,t+1}) = m_{r-t,t} - h_{r-t+1,t}(\overline{m}_{r-t+1,t}).$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $l_{r+1,0} : M_{r+1,0} \to M_{r+1,-1}$ surjektiv, und wir finden ein $\overline{m}_{r+1,0} \in M_{r+1,0}$ mit $v = l_{r+1,0}(\overline{m}_{r+1,0})$. Offenbar ist $m_{r,0} - h_{r+1,0}(\overline{m}_{r+1,0}) \in \mathrm{Ker}(l_{r,0}) = \mathrm{Im}(l_{r,1})$. Also gibt es ein $\overline{m}_{r,1} \in M_{r,1}$ mit $l_{r,1}(\overline{m}_{r,1}) = m_{r,0} - h_{r+1,0}(\overline{m}_{r+1,0})$. Ist $r = 0$, so sind wir fertig.

Sei also $r > 0$, sei $0 < s \leq r$, und seien die Elemente $\overline{m}_{r+1-t,t} \in M_{r+1-t,t}$ für alle $t = 0, \ldots, s$ bereits so konstruiert, dass

$$(*) \qquad l_{r-t,t+1}(\overline{m}_{r-t,t+1}) = m_{r-t,t} - h_{r-t+1,t}(\overline{m}_{r-t+1,t}), \quad \forall\, t < s.$$

Wenn wir zeigen können, dass das Element $m_{r-s,s} - h_{r-s+1,s}(\overline{m}_{r-s+1,s})$ von $M_{r-s,s}$ zum Kern von $l_{r-s,s}$ gehört, sind wir vermöge Rekursion fertig; denn, weil der $(r-s)$-te Spaltenkomplex $(M_{r-s,\bullet}, l_{r-s,\bullet})$ exakt ist, finden wir dann ein Element $\overline{m}_{r-s,s+1}$ in $M_{r-s,s+1}$ mit $l_{r-s,s+1}(\overline{m}_{r-s,s+1}) = m_{r-s,s} - h_{r-s+1,s}(\overline{m}_{r-s+1,s})$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} l_{r-s,s}(m_{r-s,s} - h_{r-s+1,s}(\overline{m}_{r-s+1,s})) &= l_{r-s,s}(m_{r-s,s}) - l_{r-s,s} \circ h_{r-s+1,s}(\overline{m}_{r-s+1,s}) \\ &= h_{r-s+1,s-1}(m_{r-s+1,s-1}) - \\ &\quad\; h_{r-s+1,s-1} \circ l_{r-s+1,s}(\overline{m}_{r-s+1,s}) \\ &= h_{r-s+1,s-1}(m_{r-s+1,s-1} - l_{r-s+1,s}(\overline{m}_{r-s+1,s})). \end{aligned}$$

Gemäss $(*)$ für $t = s-1$ ist aber $m_{r-s+1,s-1} = l_{r-s+1,s}(\overline{m}_{r-s+1,s}) + h_{r-s+2,s-1}(\overline{m}_{r-s+2,s-1})$. Das letzte Mitglied in der vorangehenden Kette von Gleichheiten kann also geschrieben werden in der Form $(h_{r-s+1,s-1} \circ h_{r-s+2,s-1})(\overline{m}_{r-s+2,s-1})$ und verschwindet deshalb tatsächlich. ■

8.8 Definition. Sei $M_{\bullet\bullet} = (M_{\bullet\bullet}, h_{\bullet\bullet}, l_{\bullet\bullet})$ ein Doppelkomplex von R-Moduln. Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Seien $u \in M_{r,-1}$ und $v \in M_{-1,r}$. Wir sagen, die Elemente u und v seien ***verknüpft***, wenn es eine Diagonalfolge $(m_{i,j})_{i+j=r}$ der Stufe r in $M_{\bullet\bullet}$ so gibt, dass

$$l_{r,0}(m_{r,0}) = u \quad \text{und} \quad h_{0,r}(m_{0,r}) = v.$$

Wir schreiben dann

$$u \curlywedge v.$$

Etwas genauer sagen wir dann auch, u und v seien ***verknüpft durch die Diagonalfolge*** $(m_{i,j})_{i+j=r}$.

8.9 Bemerkung. Sei $M_{\bullet\bullet} = (M_{\bullet\bullet}, h_{\bullet\bullet}, l_{\bullet\bullet})$ ein Doppelkomplex von R-Moduln. Sei $r \in \mathbb{N}_0$, und seien $u, u' \in M_{r,-1}$ und $v, v' \in M_{-1,r}$. Sei weiter $x \in R$. Sind u und v verknüpft durch die Diagonalfolge $(m_{i,j})_{i+j=r}$, und sind u' und v' verknüpft durch die Diagonalfolge $(m'_{i,j})_{i+j=r}$, so sind $u + u'$ und $v + v'$ verknüpft durch die Diagonalfolge $(m_{i,j} + m'_{i,j})_{i+j=r}$, und xu und xv sind verknüpft durch die Diagonalfolge $(xm_{i,j})_{i+j=r}$, vgl. (8.5)(A). Für $u, u' \in M_{r,-1}$, $v, v' \in M_{-1,r}$ und $x \in R$ können wir also sagen:

$$u \curlywedge v \ \wedge \ u' \curlywedge v' \implies u + u' \curlywedge v + v',$$
$$u \curlywedge v \implies xu \curlywedge xv.$$

Aus (8.5)(B) folgt für $r > 0$, $u \in M_{r,-1}$, $v \in M_{-1,r}$

$$u \curlywedge v \implies u \in \mathrm{Ker}(h_{r,-1}) \ \wedge \ v \in \mathrm{Ker}(l_{-1,r}).$$

8.10 Satz. Sei $M_{\bullet\bullet} = (M_{\bullet\bullet}, h_{\bullet\bullet}, l_{\bullet\bullet})$ ein Doppelkomplex von R-Moduln so, dass $M_{m,n} = 0$, falls $m < -1$ oder $n < -1$. Für alle $m \geq 0$ sei der m-te Spaltenkomplex $(M_{m,\bullet}, l_{m,\bullet})$ exakt. Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten:

(a) Ist $u \in \mathrm{Ker}(h_{r,-1})$, so gibt es ein $v \in M_{-1,r}$ so, dass $u \curlywedge v$. Hierbei gilt immer $v \in \mathrm{Ker}(l_{-1,r})$.

(b) Sind $u \in \mathrm{Im}(h_{r+1,-1})$ und v wie in (a) mit $u \curlywedge v$, so gilt $v \in \mathrm{Im}(l_{-1,r+1})$.

(c) Sind $u \in \mathrm{Ker}(h_{r,-1})$ und $v, v' \in M_{-1,r}$ mit $u \curlywedge v$ und $u \curlywedge v'$, so gilt $v - v' \in \mathrm{Im}(l_{-1,r+1})$.

Beweis. "(a)" Die Existenz von v ergibt sich aus (8.6). Ist $r > 0$, so folgt aus (8.9) sofort, dass $v \in \mathrm{Ker}(l_{-1,r})$. Für $r = 0$ ist dies trivial.

"(b)" Sei $u = h_{r+1,-1}(w)$ mit $w \in M_{r+1,-1}$, und sei v wie in (a). Sei $(m_{i,j})_{i+j=r}$ eine Diagonalfolge der Stufe r, welche u mit v verknüpft. Nach (8.7) gibt es dann ein Element $\overline{m}_{0,r+1} \in M_{0,r+1}$ so, dass mit einem weiteren Element $\overline{m}_{1,r} \in M_{1,r}$ gilt $l_{0,r+1}(\overline{m}_{0,r+1}) = m_{0,r} - h_{1,r}(\overline{m}_{1,r})$. So folgt

$$\begin{aligned}
v &= h_{0,r}(m_{0,r}) \\
&= h_{0,r}(l_{0,r+1}(\overline{m}_{0,r+1}) + h_{1,r}(\overline{m}_{1,r})) \\
&= h_{0,r} \circ l_{0,r+1}(\overline{m}_{0,r+1}) + h_{0,r} \circ h_{1,r}(\overline{m}_{1,r}) \\
&= h_{0,r} \circ l_{0,r+1}(\overline{m}_{0,r+1}) \\
&= l_{-1,r+1} \circ h_{0,r+1}(\overline{m}_{0,r+1}),
\end{aligned}$$

also $v \in \mathrm{Im}(l_{-1,r+1})$.

"(c)" Klar aus (b) und (8.9). ∎

§ Der Homologievergleichssatz

8.11 Satz: Homologievergleich für Doppelkomplexe. Sei $(M_{\bullet\bullet}, h_{\bullet\bullet}, l_{\bullet\bullet})$ ein Doppelkomplex von R-Moduln so, dass $M_{m,n} = 0$, falls $m < -1$ oder $n < -1$, und so, dass der Spaltenkomplex $(M_{m,\bullet}, l_{m,\bullet})$ für alle $m \geq 0$ exakt ist. Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Dann wird durch

$$u + \mathrm{Im}(h_{r+1,-1}) \mapsto v + \mathrm{Im}(l_{-1,r+1}),$$

wobei $u \in \mathrm{Ker}(h_{r,-1})$ und $v \in \mathrm{Ker}(l_{-1,r})$ mit $u \curlywedge v$, ein Homomorphismus von R-Moduln

$$\widetilde{\varphi}_r : H_r(M_{\bullet,-1}) \to H_r(M_{-1,\bullet})$$

von der r-ten Homologie des (-1)-ten Zeilenkomplexes $(M_{\bullet,-1}, h_{\bullet,-1})$ von $M_{\bullet\bullet}$ zur r-ten Homologie des (-1)-ten Spaltenkomplexes $(M_{-1,\bullet}, l_{-1,\bullet})$ definiert. Ist für alle $n \geq 0$ auch der Zeilenkomplex $(M_{\bullet,n}, h_{\bullet,n})$ exakt, so ist $\widetilde{\varphi}_r$ sogar ein Isomorphismus.

Beweis. Dass durch die beschriebene Zuordnung ein Homomorphismus definiert wird, folgt sofort aus (8.9) und (8.10). Ist der Zeilenkomplex $(M_{\bullet,n}, h_{\bullet,n})$ für alle $n \geq 0$ exakt, so wird natürlich durch $v + \mathrm{Im}(l_{-1,r+1}) \to u + \mathrm{Im}(h_{r+1,-1})$, mit $v \in \mathrm{Ker}(l_{-1,r})$ und $u \curlywedge v$, ein Homomorphismus $\widetilde{\psi}_r : H_r(M_{-1,\bullet}) \to H_r(M_{\bullet,-1})$ definiert. Sofort sieht man, dass dieser zu $\widetilde{\varphi}_r$ invers ist. ■

§ Der Doppelkomplex $T_{\bullet\bullet}^{(M,N)}$ zu zwei minimalen freien Auflösungen

8.12 Konstruktion. (A) Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und seien M und N zwei endlich erzeugte R-Moduln. Wir betrachten die Bettizahlen

$$\beta_n := b_n(M) \quad \text{und} \quad \overline{\beta}_n := b_n(N) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Weiter betrachten wir eine minimale freie Auflösung

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

von M und eine minimale freie Auflösung

$$\cdots \to G_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} G_n \xrightarrow{e_n} G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \xrightarrow{e_0} N \to 0$$

von N. Der Einfachheit halber setzen wir

$$F_{-1} := M \quad \text{und} \quad G_{-1} := N.$$

Ist $m \geq 0$, so fassen wir den R-Modul $F_m \cong R^{\oplus \beta_m}$ als den Modul $R^{\beta_m \times 1}$ der β_m-Spalten mit Einträgen in R auf. Analog für jedes $n \geq 0$ fassen wir den R-Modul $G_n \cong R^{\oplus \overline{\beta}_n}$

als den Modul $R^{1\times\overline{\beta}_n}$ der $\overline{\beta}_n$-Zeilen mit Einträgen in R auf. Genauer, setzen wir für $(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ fest:

$$F_m := \begin{cases} R^{\beta_m\times 1}, & \text{falls } \beta_m>0;\\ 0, & \text{falls } \beta_m=0;\end{cases} \qquad \text{und} \qquad G_n := \begin{cases} R^{1\times\overline{\beta}_n}, & \text{falls } \overline{\beta}_n>0;\\ 0, & \text{falls } \overline{\beta}_n=0.\end{cases}$$

(B) Für jedes Paar $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definieren wir nun einen R-Modul $T_{m,n}=T_{m,n}^{(M,N)}$ durch

$$T_{m,n}=T_{m,n}^{(M,N)} := \begin{cases} 0, & \text{falls } m<-1 \text{ oder } n<-1 \text{ oder } m=n=-1;\\ M^{1\times\overline{\beta}_n}, & \text{falls } m=-1 \text{ und } n\geq 0;\\ N^{\beta_m\times 1}, & \text{falls } m\geq 0 \text{ und } n=-1;\\ R^{\beta_m\times\overline{\beta}_n}, & \text{falls } m\geq 0 \text{ und } n\geq 0.\end{cases}$$

Dabei schreiben wir $M^{1\times\overline{\beta}_n}$ für den R-Modul der $\overline{\beta}_n$-Zeilen mit Einträgen aus M, $N^{\beta_m\times 1}$ für den R-Modul der β_m-Spalten mit Einträgen aus N und $R^{\beta_m\times\overline{\beta}_n}$ für den R-Modul der Matrizen vom Format $\beta_m\times\overline{\beta}_n$ mit Einträgen aus R. Wir verwenden die Konvention, dass Matrizenmoduln mit 0 Zeilen oder 0 Spalten und Einträgen aus einem R-Modul U immer Nullmoduln sind, also

$$U^{t\times 0}:=0 \quad \text{und} \quad U^{0\times t}:=0$$

für alle R-Moduln U und alle $t\in\mathbb{N}_0$. Mit den Festsetzungen aus Teil (A) können wir auch schreiben

$$T_{m,n}=T_{m,n}^{(M,N)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } m<-1 \text{ oder } n<-1 \text{ oder } m=n=-1;\\ (F_m)^{1\times\overline{\beta}_n}=(G_n)^{\beta_m\times 1}, & \text{sonst.}\end{cases}$$

(C) Seien $m,n\geq 0$. Seien $\beta_m,\overline{\beta}_n>0$. Wir betrachten die kanonischen Basisspalten

$$e_i^m := \begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Stelle}\\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (i=1,\ldots,\beta_m)$$

von $F_m=R^{\beta_m\times 1}$ und die kanonischen Basiszeilen

$$\overline{e}_j^n := [0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{-te Stelle}}}{1},0,\ldots,0] \qquad (j=1,\cdots,\overline{\beta}_n)$$

von $G_n=R^{1\times\overline{\beta}_n}$. Es gilt $d_m(e_i^m)\in F_{m-1}$ für $i=1,\ldots,\beta_m$ und $e_n(\overline{e}_j^n)\in G_{n-1}$ für $j=1,\ldots,\overline{\beta}_n$. Wir können somit die Zeile

$$D_m := [d_m(e_1^m),\ldots,d_m(e_{\beta_m}^m)]\in(F_{m-1})^{1\times\beta_m}$$

und die Spalte

$$E_n := \begin{bmatrix} e_n(\overline{e}_1^n) \\ \vdots \\ e_n(\overline{e}_{\overline{\beta}_n}^n) \end{bmatrix} \in (G_{n-1})^{\overline{\beta}_n \times 1}$$

definieren. Zusätzlich setzen wir fest:

$$\begin{aligned} D_m &:= 0 \in 0 = (F_{m-1})^{1\times\beta_m}, \quad \text{falls } \beta_m = 0; \\ E_n &:= 0 \in 0 = (G_{n-1})^{\overline{\beta}_n \times 1}, \quad \text{falls } \overline{\beta}_n = 0. \end{aligned}$$

Ist $m > 0$, so gilt $F_{m-1} = R^{\beta_{m-1}\times 1}$, und somit können wir $D_m \in (F_{m-1})^{1\times\beta_m} = R^{\beta_{m-1}\times\beta_m}$ als Matrix vom Format $\beta_{m-1} \times \beta_m$ mit Einträgen in R auffassen. Entsprechendes gilt für E_n, wenn $n > 0$. Wir können also sagen:

$$\begin{aligned} m > 0 &\implies D_m \in R^{\beta_{m-1}\times\beta_m}; \\ n > 0 &\implies E_n \in R^{\overline{\beta}_n \times \overline{\beta}_{n-1}}. \end{aligned}$$

(D) Ist $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und ist $X \in T_{m,n} = R^{\beta_m \times \overline{\beta}_n}$, so gilt

$$D_m X \in (F_{m-1})^{1\times\overline{\beta}_n} = T_{m-1,n}.$$

Entsprechend gilt in dieser Situation auch

$$X E_n \in (G_{n-1})^{\beta_m \times 1} = T_{n-1,m}.$$

Ist $m > 0$ und ist $X \in T_{m,-1} = (G_{-1})^{\beta_m\times 1} = N^{\beta_m \times 1}$, so gilt

$$D_m X \in N^{\beta_{m-1}\times 1} = (G_{-1})^{\beta_{m-1}\times 1} = T_{m-1,-1}.$$

Ist $n > 0$ und ist $X \in T_{-1,n} = (F_{-1})^{1\times\overline{\beta}_n} = M^{1\times\overline{\beta}_n}$, so folgt entsprechend

$$X E_n \in M^{1\times\overline{\beta}_{n-1}} = (F_{-1})^{1\times\overline{\beta}_{n-1}} = T_{-1,n-1}.$$

Zusammenfassend können wir also sagen:

$$\begin{aligned} &\forall\, (m, n) \in (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \cup (\mathbb{N} \times \{-1\}) : X \in T_{m,n} \Longrightarrow D_m X \in T_{m-1,n}; \\ &\forall\, (m, n) \in (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \cup (\{-1\} \times \mathbb{N}) : X \in T_{m,n} \Longrightarrow X_n E_n \in T_{m,n-1}. \end{aligned}$$

Wir können nun für alle Paare $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Abbildungen

$$\begin{aligned} h_{m,n} &= h_{m,n}^{(M,N)} : T_{m,n} \to T_{m-1,n}, \\ l_{m,n} &= l_{m,n}^{(M,N)} : T_{m,n} \to T_{m,n-1} \end{aligned}$$

definieren durch die Vorschriften

$$h_{m,n}(X) := \begin{cases} D_m X, & \text{falls } (m, n) \in (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \cup (\mathbb{N} \times \{-1\}); \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$l_{m,n}(X) := \begin{cases} X E_n, & \text{falls } (m, n) \in (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \cup (\{-1\} \times \mathbb{N}); \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sofort ist klar, dass $h_{m,n}$ und $l_{m,n}$ Homomorphismen von R-Moduln sind.

8.13 Lemma. Es gelten alle Bezeichnungen von (8.12). Sei $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, und seien $\beta_m, \overline{\beta}_n > 0$. Seien $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{\overline{\beta}_n} \in R^{\beta_m \times 1} = F_m$ und $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_{\beta_m} \in R^{1 \times \overline{\beta}_n} = G_n$. Dann gelten:

(a)
$$h_{m,n}\Big(\big[\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{\overline{\beta}_n}\big]\Big) = \Big[d_m(\underline{x}_1), \ldots, d_m(\underline{x}_{\overline{\beta}_n})\Big].$$

(b)
$$l_{m,n}\left(\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{y}_{\beta_m} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e_n(\underline{y}_1) \\ \vdots \\ e_n(\underline{y}_{\beta_m}) \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir schreiben für alle $i \in \{1, \ldots, \overline{\beta}_n\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, \beta_m\}$
$$\underline{x}_i =: \begin{bmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{i\beta_m} \end{bmatrix}, \quad d_m(e_j^m) =: \begin{bmatrix} d_{j1} \\ \vdots \\ d_{j\beta_{m-1}} \end{bmatrix}, \quad d_m(\underline{x}_i) =: \begin{bmatrix} z_{i1} \\ \vdots \\ z_{i\beta_{m-1}} \end{bmatrix}.$$
Wegen $d_m(\underline{x}_i) = d_m\big(\sum_{j=1}^{\beta_m} x_{ij} e_j^m\big) = \sum_{j=1}^{\beta_m} x_{ij} d_m(e_j^m)$ folgt dann $z_{ik} = \sum_{j=1}^{\beta_m} x_{ij} d_{jk}$ für alle $k = 1, \ldots, \beta_{m-1}$ und alle $i = 1, \ldots, \overline{\beta}_n$. So erhalten wir mit $X := [\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{\overline{\beta}_n}] \in (F_m)^{1 \times \overline{\beta}_n} = T_{m,n}$ die Gleichheiten
$$\begin{aligned} h_{m,n}\Big(\big[\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{\overline{\beta}_n}\big]\Big) &= D_n X \\ &= \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{\beta_m 1} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{1\beta_{m-1}} & \cdots & d_{\beta_m \beta_{m-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{\overline{\beta}_n 1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1\beta_m} & \cdots & x_{\overline{\beta}_n \beta_m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{\overline{\beta}_n 1} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{1\beta_{m-1}} & \cdots & z_{\overline{\beta}_n \beta_{m-1}} \end{bmatrix} \\ &= \Big[d_m(\underline{x}_1), \ldots, d_m(\underline{x}_{\overline{\beta}_n})\Big]. \end{aligned}$$
Damit ist Aussage (a) gezeigt. Aussage (b) wird analog bewiesen. ∎

8.14 Lemma. Es gelten die Bezeichnungen von (8.12). Sei $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Wir betrachten die in (8.12)(C) definierten Matrizen
$$\begin{aligned} D_m &\in (F_{m-1})^{1 \times \beta_m}, \quad D_{m+1} \in R^{\beta_m \times \beta_{m+1}}, \\ E_n &\in (G_{n-1})^{\overline{\beta}_n \times 1}, \quad E_{n+1} \in R^{\overline{\beta}_{n+1} \times \overline{\beta}_n}. \end{aligned}$$

Dann gelten für deren Produkte die Gleichheiten:

(a) $D_m D_{m+1} = 0$.

(b) $E_{n+1} E_n = 0$.

Beweis. Wir schreiben

$$d_{m+1}(e_i^{m+1}) =: \begin{bmatrix} d_{i,1} \\ \vdots \\ d_{i,\beta_m} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{\beta_m} d_{i,j} e_j^m \qquad (i = 1, \ldots, \beta_{m+1}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} D_m D_{m+1} &= \Big[d_m(e_1^m), \ldots, d_m(e_{\beta_m}^m)\Big] \begin{bmatrix} d_{1,1} & \cdots & d_{\beta_{m+1},1} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{1,\beta_m} & \cdots & d_{\beta_{m+1},\beta_m} \end{bmatrix} \\ &= \Big[\textstyle\sum_{j=1}^{\beta_m} d_{1,j} d_m(e_j^m), \ldots, \sum_{j=1}^{\beta_m} d_{\beta_{m+1},j} d_m(e_j^m)\Big] \\ &= \Big[d_m\big(\textstyle\sum_{j=1}^{\beta_m} d_{1,j} e_j^m\big), \ldots, d_m\big(\sum_{j=1}^{\beta_m} d_{\beta_{m+1},j} e_j^m\big)\Big] \\ &= \Big[d_m\big(d_{m+1}(e_1^{m+1})\big), \ldots, d_m\big(d_{m+1}(e_{\beta_{m+1}}^{m+1})\big)\Big] \\ &= \big[0, \ldots, 0\big] = 0. \end{aligned}$$

Dies beweist die Aussage (a). Die Aussage (b) wird analog bewiesen. ■

8.15 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und seien M und N endlich erzeugte R-Moduln. Dann wird durch die in (8.12) eingeführte Familie

$$\Big((T_{m,n}^{(M,N)} \xrightarrow{h_{m,n}^{(M,N)}} T_{m-1,n}^{(M,N)} \,;\, T_{m,n}^{(M,N)} \xrightarrow{l_{m,n}^{(M,N)}} T_{m,n-1}^{(M,N)})\Big)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$$

von Paaren von Homomorphismen von R-Moduln ein Doppelkomplex

$$T_{\bullet\bullet}^{(M,N)} = (T_{\bullet\bullet}^{(M,N)}, h_{\bullet\bullet}^{(M,N)}, l_{\bullet\bullet}^{(M,N)})$$

von R-Moduln mit den folgenden Eigenschaften definiert:

(a) Es gilt $T_{m,n}^{(M,N)} = 0$, falls $m < -1$ oder $n < -1$ oder $(m, n) = (-1, -1)$.

(b) Für alle $m \geq 0$ ist der m-te Spaltenkomplex $T_{m,\bullet}^{(M,N)} = \big(T_{m,\bullet}^{(M,N)}, l_{m,\bullet}^{(M,N)}\big)$ exakt.

(c) Für alle $n \geq 0$ ist der n-te Zeilenkomplex $T_{\bullet,n}^{(M,N)} = \big(T_{\bullet,n}^{(M,N)}, h_{\bullet,n}^{(M,N)}\big)$ exakt.

Beweis. Seien $m, n \geq 0$. Wegen (8.14) gelten dann für alle $X \in T_{m+1,s}$ und alle $Y \in T_{s,n+1}$ (mit $s \geq -1$, und mit $m, n > 0$, falls $s = -1$) die Gleichheiten

$$\begin{aligned} h_{m,s} \circ h_{m+1,s}(X) &= h_{m,s}(h_{m+1,s}(X)) = h_{m,s}(D_{m+1}X) \\ &= D_m(D_{m+1}X) = (D_m D_{m+1})X = 0X = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} l_{s,n} \circ l_{s,n+1}(Y) &= l_{s,n}(l_{s,n+1}(Y)) = l_{s,n}(YE_{n+1}) \\ &= (YE_{n+1})E_n = Y(E_{n+1}E_n) = Y0 = 0. \end{aligned}$$

Weil $T_{m,n} = 0$, falls $(m,n) = (-1,-1)$ oder $m < -1$ oder $n < -1$, folgen

$$h_{m,n} \circ h_{m+1,n} = 0 \quad \text{und} \quad l_{m,n} \circ l_{m,n+1} = 0$$

für alle Paare $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Sei nun $X \in T_{m,n}$, wobei $m,n \geq 0$ und $(m,n) \neq (0,0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} l_{m-1,n} \circ h_{m,n}(X) &= l_{m-1,n}(h_{m,n}(X)) = l_{m-1,n}(D_m X) \\ &= (D_m X)E_n = D_m(XE_n) = h_{m,n-1}(XE_n) \\ &= h_{m,n-1}(l_{m,n}(X)) = h_{m,n-1} \circ l_{m,n}(X). \end{aligned}$$

Jetzt folgt wieder wie vorhin, dass

$$l_{m-1,n} \circ h_{m,n} = h_{m,n-1} \circ l_{m,n}$$

für alle Paare $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Damit ist gezeigt, dass die in (8.12) eingeführte Familie von Paaren von Homomorphismen tatsächlich einen Doppelkomplex von R-Moduln definiert. Die Aussage (a) ist klar aus den in (8.12) gemachten Festsetzungen. Es gibt also noch, die Exaktheitsaussagen (b) und (c) zu zeigen. Natürlich können wir uns auf den Nachweis von (b) beschränken.

Sei also $m \geq 0$. Wir müssen zeigen, dass $\mathrm{Ker}(l_{m,n}) \subseteq \mathrm{Im}(l_{m,n+1})$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei zunächst $n \geq 0$, und sei $Y \in \mathrm{Ker}(l_{m,n}) \subseteq T_{m,n} = R^{\beta_m \times \overline{\beta}_n}$. Wir schreiben dann

$$Y =: \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{y}_{\beta_m} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \underline{y}_i \in R^{1 \times \overline{\beta}_n} \text{ für alle } i = 1, \ldots, \beta_m.$$

Gemäss (8.13)(b) ist dann $e_n(\underline{y}_i) = 0$, also $\underline{y}_i \in \mathrm{Ker}(e_n) = \mathrm{Im}(e_{n+1})$ für alle $i = 1, \ldots, \beta_m$. Wir finden demnach Elemente $\underline{z}_1, \cdots, \underline{z}_{\beta_m} \in R^{1 \times \overline{\beta}_{n+1}}$ so, dass $e_{n+1}(\underline{z}_i) = \underline{y}_i$ für alle $i = 1, \ldots, \beta_m$. Mit

$$Z := \begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \vdots \\ \underline{z}_{\beta_m} \end{bmatrix} \in R^{\beta_m \times \overline{\beta}_{n+1}} = T_{m,n+1}$$

folgt aus (8.13)(b), dass $l_{m,n+1}(Z) = Y$, also $Y \in \mathrm{Im}(l_{m,n+1})$.

Sei jetzt $Y \in T_{m,-1} = N^{\oplus \beta_m}$. Weil $e_0 : R^{\oplus \overline{\beta}_0} \to N$ surjektiv ist, finden wir Elemente $\underline{u}_1, \cdots, \underline{u}_{\beta_m} \in R^{\oplus \overline{\beta}_0} = R^{1 \times \overline{\beta}_0}$ so, dass

$$Y = \begin{bmatrix} e_0(\underline{u}_1) \\ \vdots \\ e_0(\underline{u}_{\beta_m}) \end{bmatrix}.$$

Mit der Festsetzung

$$U := \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_{\beta_m} \end{bmatrix} \in R^{\beta_m \times \overline{\beta}_0} = T_{m,0}$$

folgt aus (8.13)(b) sofort, dass $l_{m,0}(U) = Y$. Also ist $l_{m,0} : T_{m,0} \to T_{m,-1}$ surjektiv. Weil $T_{m,n} = 0$ für alle $n < -1$ folgt jetzt das Gewünschte. ■

8.16 Korollar. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und seien M und N endlich erzeugte R-Moduln. Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Dann besteht ein Isomorphismus

$$\widehat{\varphi}_r : H_r\big(T^{(M,N)}_{\bullet,-1}\big) \xrightarrow{\cong} H_r\big(T^{(M,N)}_{-1,\bullet}\big)$$

zwischen der r-ten Homologie des (-1)-ten Zeilenkomplexes

$$\big(T^{(M,N)}_{\bullet,-1}, h^{(M,N)}_{\bullet,-1}\big)$$

und der r-ten Homologie des (-1)-ten Spaltenkomplexes

$$\big(T^{M,N}_{-1,\bullet}, l^{(M,N)}_{-1,\bullet}\big)$$

des in (8.12) zu den R-Moduln M und N konstruierten Doppelkomplexes

$$T^{(M,N)}_{\bullet\bullet} = \big(T^{(M,N)}_{\bullet\bullet}, h^{(M,N)}_{\bullet\bullet}, l^{(M,N)}_{\bullet\bullet}\big).$$

Beweis. Klar aus (8.15) und (8.11). ∎

8.17 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann sind die Homomorphismen von R-Moduln

$$h^{(M,R/\mathfrak{m})}_{m,-1}$$

im (-1)-ten Zeilenkomplex

$$\big(T^{(M,R/\mathfrak{m})}_{\bullet,-1}, h^{(M,R/\mathfrak{m})}_{\bullet,-1}\big)$$

des gemäss (8.12) zu den R-Moduln M und $R/\mathfrak{m}$ konstruierten Doppelkomplexes

$$T_{\bullet\bullet} = T^{(M,R/\mathfrak{m})}_{\bullet\bullet} = \big(T^{(M,R/\mathfrak{m})}_{\bullet\bullet}, h^{(M,R/\mathfrak{m})}_{\bullet\bullet}, l^{(M,R/\mathfrak{m})}_{\bullet\bullet}\big)$$

alle Nullhomomorphismen.

Beweis. Sei $m > 0$. Gemäss (8.12)(B) und (D) besteht in den dortigen Bezeichnungen die Situation

$$\begin{array}{ccc}
T_{m,-1} & \xrightarrow{\quad h_{m,-1}\quad} & T_{m-1,-1} \\
\| & & \| \\
(R/\mathfrak{m})^{\beta_m \times 1} & & (R/\mathfrak{m})^{\beta_{m-1} \times 1} \\
\Cup & & \Cup \\
X & \longmapsto & D_m X
\end{array}$$

Weil $d_{m-1} : F_{m-1} \to F_{m-2}$ minimal ist, ist der durch d_{m-1} induzierte Homomorphismus von $R/\mathfrak{m}$-Vektorräumen $\overline{d}_{m-1} : F_{m-1}/\mathfrak{m}F_{m-1} \to \operatorname{Im}(d_{m-1})/\mathfrak{m}\operatorname{Im}(d_{m-1})$ injektiv. Insbesondere ist also $\operatorname{Im}(d_m) = \operatorname{Ker}(d_{m-1}) \subseteq \mathfrak{m}F_{m-1}$, d.h. $d_m(e_i^m) \in \mathfrak{m}F_{m-1}$ für $i = 1, \ldots, \beta_m$. Wegen

$\mathfrak{m}X = 0$, und weil $d_m(e_i^m)$ gerade die i-te Spalte der Matrix D_m ist, folgt $h_{m,-1}(X) = D_mX = 0$ für $X \in T_{m,-1}$. Für $m \leq 0$ ist die Behauptung klar aus (8.12)(B). ∎

§ Charakterisierung der globalen Dimension

8.18 Definition. Sei R ein Ring. Ein R-Modul M heisst ***Subquotient*** eines R-Moduls N, wenn er isomorph ist zu einem Restklassenmodul eines R-Untermoduls von N. Der einzige Subquotient des Moduls 0 ist 0.

8.19 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist der R-Modul $(R/\mathfrak{m})^{\oplus b_n(M)}$ ein Subquotient von $M^{\oplus b_n(R/\mathfrak{m})}$.

Beweis. Im gemäss (8.12) zu den R-Moduln M und $R/\mathfrak{m}$ konstruierten Doppelkomplex $T_{\bullet\bullet} = T_{\bullet\bullet}^{(M,R/\mathfrak{m})}$ gilt $T_{n,-1} = (R/\mathfrak{m})^{\oplus b_n(M)}$ und $T_{-1,n} = M^{\oplus b_n(R/\mathfrak{m})}$. Gemäss (8.17) ist $H_n(T_{\bullet,-1}) = T_{n,-1}$. Weil $H_n(T_{-1,\bullet})$ ein Restklassenmodul eines Untermoduls von $T_{-1,n}$ ist, schliessen wir mit (8.16). ∎

8.20 Korollar. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt:

$$\operatorname{pdim}(M) \leq \operatorname{pdim}(R/\mathfrak{m}).$$

Beweis. Klar aus (8.19) und (7.38). ∎

8.21 Korollar. Für einen noetherschen lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ gilt:

$$\operatorname{gldim}(R) = \operatorname{pdim}(R/\mathfrak{m}).$$

Beweis. Klar aus (8.20) und (8.1). ∎

8.22 Korollar. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring mit $\mathfrak{m} \neq 0$ und $\mathrm{t}(R) = 0$. Dann gilt:

$$\operatorname{gldim}(R) = \infty.$$

Beweis. Wegen $\mathrm{t}(R) = 0$ ist $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(R)$, und nach (4.8) besteht eine kurze exakte Sequenz $0 \to R/\mathfrak{m} \to R \to M \to 0$, in welcher der R-Modul M wegen $\mathfrak{m} \neq 0$ nicht-trivial ist. Wegen $R/\mathfrak{m} \neq 0$ ist $\operatorname{pdim}(R/\mathfrak{m}) \neq -\infty$, und mit Hilfe von (7.42) folgt $\operatorname{pdim}(R/\mathfrak{m}) \leq \operatorname{pdim}(M) - 1$. Nach (8.20) ergibt sich $\operatorname{pdim}(R/\mathfrak{m}) \leq \operatorname{pdim}(R/\mathfrak{m}) - 1$. Es folgt $\operatorname{pdim}(R/\mathfrak{m}) = \infty$, und nach (8.21) ist $\operatorname{gldim}(R) = \infty$. ∎

Kapitel 9

Reguläre lokale Ringe

§ Bettizahlen und Nichtnullteiler

9.1 Bezeichnung. (A) Ist M ein R-Modul, so schreiben wir auch $\mathrm{pdim}_R(M)$ für die projektive Dimension dieses R-Moduls. Wir brauchen diese Schreibweise insbesondere, um Zweideutigkeiten zu vermeiden.

(B) Sind $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul, so schreiben wir $b_i^R(M)$ für die i-te Betti-Zahl dieses R-Moduls. Dabei setzen wir für $i < 0$ fest, dass $b_i^R(M) = 0$.

9.2 Lemma. Seien R ein Ring und $0 \to N \xrightarrow{h} M \xrightarrow{l} T \to 0$ eine exakte Sequenz von R-Moduln, und sei weiter $x \in \mathrm{NNT}_R(T)$. Mit den Homomorphismen $\overline{h}$ und $\overline{l}$ von R/xR-Moduln gegeben durch

$$n + xN \overset{\overline{h}}{\mapsto} h(n) + xM \quad \text{und} \quad m + xM \overset{\overline{l}}{\mapsto} l(m) + xT$$

besteht dann die exakte Sequenz

$$0 \to N/xN \xrightarrow{\overline{h}} M/xM \xrightarrow{\overline{l}} T/xT \to 0.$$

Beweis. Die Surjektivität von l impliziert die von $\bar{l}$. Zudem ist $\mathrm{Ker}(\bar{l}) = (xM + l^{-1}(xT))/xM$. Weil l surjektiv ist, gilt $xT = l(xM)$, also $l^{-1}(xT) = xM + \mathrm{Ker}(l)$. Deshalb gilt $\mathrm{Ker}(\bar{l}) = (xM + \mathrm{Ker}(l))/xM = (xM + \mathrm{Im}(h))/xM = \mathrm{Im}(\overline{h})$. Schliesslich ist $\mathrm{Ker}(\overline{h}) = (h^{-1}(xM) + xN)/xN$. Offenbar ist $h^{-1}(xM) \supseteq xN$. Sei umgekehrt $u \in h^{-1}(xM)$. Mit einem geeigneten Element $m \in M$ gilt dann $h(u) = xm$. Es folgt dann $xl(m) = l(xm) = l(h(u)) = l \circ h(u) = 0(u) = 0$, und wegen $x \in \mathrm{NNT}_R(T)$ gilt $l(m) = 0$. Also ist $m \in \mathrm{Ker}(l) = \mathrm{Im}(h)$. Mit geeignetem $n \in N$ ist also $m = h(n)$, also $h(xn) = xh(n) = xm = h(u)$. Weil h injektiv ist, folgt $u = xn \in xN$. Also ist $h^{-1}(xM) = xN$, d.h. $\mathrm{Ker}(\overline{h}) = 0$. ∎

9.3 Lemma. Seien R ein Ring und P ein projektiver R-Modul. Ist $x \in \mathrm{NNT}(R)$, so ist $x \in \mathrm{NNT}_R(P)$.

Beweis. Nach (7.17) ist P direkter Summand eines freien R-Moduls F. Schon wegen $P \subseteq F$ genügt also zu zeigen, dass $x \in \mathrm{NNT}_R(F) = \mathrm{NNT}(R^{\oplus I})$, wobei I eine Basis von F ist. Dies ist aber sofort klar. ∎

9.4 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, sei M ein endlich erzeugter R-Modul, und sei $x \in \mathfrak{m} \cap \mathrm{NNT}(R) \cap \mathrm{NNT}_R(M)$. Dann gilt:

(a) $b_n^{R/xR}(M/xM) = b_n^R(M)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\mathrm{pdim}_{R/xR}(M/xM) = \mathrm{pdim}_R(M)$.

Beweis. Im Hinblick auf (7.38) genügt es, (a) zu beweisen. Dies tun wir durch Induktion nach n. Zunächst setzen wir $\overline{R} := R/xR$, $\overline{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/xR$ und $\overline{M} := M/xM$. Wegen $x \in \mathfrak{m}$ hat der kanonische surjektive Homomorphismus von R-Moduln $M \to \overline{M}/\mathfrak{m}\overline{M}$ den Kern $\mathfrak{m}M$. Wegen $\mathfrak{m}\overline{M} = \overline{\mathfrak{m}}\overline{M}$ besteht so ein Isomorphismus von R-Moduln $M/\mathfrak{m}M \cong \overline{M}/\overline{\mathfrak{m}}\overline{M}$. Es folgt $b_0^{R/xR}(M/xM) = b_0^{\overline{R}}(\overline{M}) = \mu(\overline{M}) = \mathfrak{l}_{\overline{R}/\overline{\mathfrak{m}}}(\overline{M}/\overline{\mathfrak{m}}\overline{M}) = \mathfrak{l}_{\overline{R}}(M/\mathfrak{m}M) = \mathfrak{l}_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M) = \mu(M) = b_0^R(M)$. Dies beweist den Fall mit $n = 0$.

Sei also $n > 0$. Sei $\mu := \mu(M) = b_0^R(M)$. Dann besteht die kurze exakte Sequenz $0 \to N \to R^{\oplus\mu} \to M \to 0$ von R-Moduln. Gemäss (9.2) induziert diese wegen $x \in \mathrm{NNT}_R(M)$ die exakte Sequenz $0 \to N/xN \to R^{\oplus\mu}/xR^{\oplus\mu} \to M/xM \to 0$. Nach (9.3) ist $x \in \mathrm{NNT}_R(R^{\oplus\mu})$, also $x \in \mathrm{NNT}_R(N)$. Der durch $(a_1, \dots, a_\mu) \mapsto (a_1 + xR, \dots, a_\mu + xR)$ definierte surjektive Homomorphismus von R-Moduln $R^{\oplus\mu} \to (R/xR)^{\oplus\mu}$ hat den Kern $xR^{\oplus\mu}$, und wir erhalten so einen Isomorphismus von R-Moduln $R^{\oplus\mu}/xR^{\oplus\mu} \cong (R/xR)^{\oplus\mu}$ von R/xR-Moduln. Mithin besteht die exakte Sequenz von R/xR-Moduln $0 \to N/xN \to (R/xR)^{\oplus\mu} \to M/xM \to 0$. Nach dem Fall mit $n = 0$ ist $\mu = b_0^R(M) = b_0^{R/xR}(M/xM) = \mu_{R/xR}(M/xM)$. Mit (7.42) folgt $b_n^{R/xR}(M/xM) = b_{n-1}^{R/xR}(N/xN)$ und $b_n^R(M) = b_{n-1}^R(N)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist aber $b_{n-1}^{R/xR}(N/xN) = b_{n-1}^R(N)$, und wir sind fertig. ∎

§ Die Formel von Auslander-Buchsbaum

9.5 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei $\mathrm{t}(R) = 0$. Sei M ein endlich erzeugter R-Modul endlicher projektiver Dimension. Dann ist M frei.

Beweis. Sei $d := \mathrm{pdim}(M)$. Gemäss (7.19) und (7.23) genügt es zu zeigen, dass $d \le 0$. Nehmen wir das Gegenteil an! Wir finden dann nach (7.38) eine minimale freie Auflösung $0 \to F_d \xrightarrow{e_d} F_{d-1} \to \cdots \to F_0 \xrightarrow{e_0} M \to 0$ von M. Mit geeigneten Zahlen $r, s \in \mathbb{N}$ können wir annehmen, es sei $F_d = R^{\oplus r}$ und $F_{d-1} = R^{\oplus s}$, und erhalten damit die exakte Sequenz $0 \to R^{\oplus r} \xrightarrow{h} R^{\oplus s} \xrightarrow{l} \mathrm{Im}(l) \to 0$ mit minimalen Homomorphismen $h := e_d$ und $l := e_{d-1}$.

Wegen $\mathrm{t}(R) = 0$ ist $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R(R)$. Wir finden also ein $x \in R$ mit $0 :_R x = \mathfrak{m}$. Wegen $\mathfrak{m} \neq R$ ist $x \neq 0$. Weil M nicht frei ist, ist R kein Körper, also $\mathfrak{m} \neq 0$. Deshalb kann x in R nicht invertierbar sein, und wir erhalten, dass $x \in \mathfrak{m} \setminus 0$. Weil l minimal ist, gilt $\mathrm{Ker}(l) \subseteq \mathfrak{m}R^{\oplus s}$, also $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathfrak{m}R^{\oplus s} = \mathfrak{m}^{\oplus s}$. Seien $u := (x, 0, \ldots, 0)$, $v := (1, 0, \ldots, 0) \in R^{\oplus r}$. Weil h injektiv ist, folgt der Widerspruch $0 \neq h(u) = h(xv) = xh(v) \in x\,\mathrm{Im}(h) \subseteq x\mathfrak{m}^{\oplus s} = 0^{\oplus s} = 0$. ∎

9.6 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, sei T ein endlich erzeugter R-Modul mit $\mathrm{t}(T) > 0$, und sei $N \subsetneq T$ ein echter R-Untermodul mit $\mathrm{t}(T/N) = 0$. Dann ist $\mathrm{t}(N) = 1$.

Beweis. Wegen $\mathrm{t}(T) > 0$ gibt es ein $x \in \mathfrak{m} \cap \mathrm{NNT}_R(T)$. Insbesondere ist damit auch $x \in \mathrm{NNT}_R(N)$. Dies besagt natürlich, dass $\mathrm{t}(N) > 0$. Gemäss (5.22)(a) bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{t}(N/xN) = 0$, also dass $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R(N/xN)$. Wir setzen $\overline{T} := T/N$ und finden wegen $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R(\overline{T})$ ein Element $\overline{t} \in \overline{T} \setminus 0$ mit $0 :_R \overline{t} = \mathfrak{m}$. Es ist dann $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R(R\overline{t})$. Wegen $R\overline{t} \subseteq 0 :_{\overline{T}} x = (N :_T x)/N$ folgt nach (4.7)(a) sofort $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R\big((N :_T x)/N\big)$. Weil x bezüglich T ein Nichtnullteiler ist, ist die durch $t + N \mapsto xt + xN$ definierte Abbildung $T/N \to T/xN$ injektiv und bildet auch $(N :_T x)/N$ nach N/xN ab. Nach (4.6) folgt so, dass $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R(N/xN)$. ∎

9.7 Lemma. Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring und sind M und N endlich erzeugte R-Moduln, so gilt $\mathrm{t}(M \oplus N) = \min\{\mathrm{t}(M), \mathrm{t}(N)\}$.

Beweis. Wir können annehmen, es seien $M, N \neq 0$, also $\mathrm{t}(M), \mathrm{t}(N) \in \mathbb{N}_0$. Wir machen Induktion nach $\tau := \min\{\mathrm{t}(M), \mathrm{t}(N)\}$. Sei $\tau = 0$. Dann ist $\mathrm{t}(M) = 0$ oder $\mathrm{t}(N) = 0$. Nehmen wir etwa an, es sei $\mathrm{t}(M) = 0$. Dann ist $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. Die kurze exakte Sequenz $0 \to M \to M \oplus N \to N \to 0$ von R-Moduln zeigt dann über (4.6), dass $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R(M \oplus N)$, also dass $\mathrm{t}(M \oplus N) = 0$.

Sei also $\tau > 0$. Dann gilt $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_R(M)$ und $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_R(N)$. Jetzt zeigt (4.6), dass $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_R(M \oplus N)$, also dass $\mathrm{t}(M \oplus N) > 0$. Wir finden also ein $x \in \mathfrak{m} \cap \mathrm{NNT}_R(M \oplus N)$. Wegen der injektiven Homomorphismen von R-Moduln $M \to M \oplus N$ und $N \to M \oplus N$ ist $x \in \mathrm{NNT}_R(M) \cap \mathrm{NNT}_R(N)$, und es folgt $\mathrm{t}(M/xM) = \mathrm{t}(M) - 1$ und $\mathrm{t}(N/xN) = \mathrm{t}(N) - 1$. Nach Induktion ist also $\mathrm{t}(M/xM \oplus N/xN) = \tau - 1$. Der durch $(m, n) \mapsto (m + xM, n + xN)$ definierte surjektive Homomorphismus von R-Moduln $M \oplus N \to M/xM \oplus N/xN$ hat offenbar den Kern $x(M \oplus N)$. Deshalb besteht ein Isomorphismus $(M \oplus N)/x(M \oplus N) \cong M/xM \oplus N/xN$. Dieser zeigt über (5.22)(a), dass $\mathrm{t}(M \oplus N) = \tau$. ∎

9.8 Lemma. Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring und F ein freier R-Modul von endlichem Rang $r > 0$, so ist $\mathrm{t}(F) = \mathrm{t}(R)$.

Beweis. Wir machen Induktion nach r. Ist $r = 1$, so ist $R \cong F$, und wir sind fertig. Ist $r > 1$, so bestehen die Isomorphismen $F \cong R^{\oplus r} \cong R \oplus R^{\oplus r-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $R^{\oplus r-1}$ von der gleichen Tiefe wie R, und wir schliessen mit (9.7). ■

9.9 Satz: Formel von Auslander-Buchsbaum. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter R-Modul endlicher projektiver Dimension. Dann gilt:

$$\operatorname{pdim}(M) + \operatorname{t}(M) = \operatorname{t}(R).$$

Beweis. Wir machen Induktion nach $\operatorname{t}(R)$. Ist $\operatorname{t}(R) = 0$, so ist M nach (9.5) frei von endlichem Rang. Insbesondere ist gemäss (7.11) und (7.23) $\operatorname{pdim}(M) = 0$. Nach (9.8) gilt aber auch $\operatorname{t}(M) = \operatorname{t}(R) = 0$.

Sei also $\operatorname{t}(R) > 0$. Sei zunächst $\operatorname{t}(M) > 0$. Dann zeigt (9.7), dass $\operatorname{t}(R \oplus M) > 0$ gilt. Wir finden also ein $x \in \operatorname{NNT}_R(R \oplus M) \cap \mathfrak{m}$. Insbesondere ist $x \in \operatorname{NNT}_R(R) \cap \operatorname{NNT}_R(M)$. Nach (9.4)(b) ist $\operatorname{pdim}_{R/xR}(M/xM) = \operatorname{pdim}_R(M)$. Nach (5.22)(a) und (5.4) gilt $\operatorname{t}(M/xM) = \operatorname{t}(M) - 1$ und $\operatorname{t}(R/xR) = \operatorname{t}(R) - 1$, und zwar unabhängig davon, ob M/xM und R/xR als Moduln über R oder über R/xR auffasst werden. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\operatorname{pdim}_{R/xR}(M/xM) + \operatorname{t}(M/xM) = \operatorname{t}(R/xR)$, also $\operatorname{pdim}(M) + \operatorname{t}(M) - 1 = \operatorname{t}(R) - 1$. Dies beweist die behauptete Gleichheit, falls $\operatorname{t}(M) > 0$.

Sei also $\operatorname{t}(M) = 0$. Sei $\mu := b_0(M) = \mu(M)$, sei $F := R^{\oplus\mu}$, sei $p : F \to M$ ein surjektiver Homomorphismus, und sei $N := \operatorname{Ker}(p)$. Nach (9.8) ist $\operatorname{t}(F) = \operatorname{t}(R) > 0$, und wegen (9.6) folgt aus $\operatorname{t}(F/N) = \operatorname{t}(M) = 0$, dass $\operatorname{t}(N) = 1$. Nach (9.8) ist M nicht frei. Nach (7.38) ist demnach $\operatorname{pdim}(M) > 0$. Gemäss (7.42) ist also $\operatorname{pdim}(N) = \operatorname{pdim}(M) - 1$. Nach dem schon behandelten Fall mit $\operatorname{t}(M) > 0$, angewandt auf den R-Modul N, folgt demnach $\operatorname{pdim}(M) - 1 = \operatorname{pdim}(N) = \operatorname{t}(R) - \operatorname{t}(N) = \operatorname{t}(R) - 1$, d.h. $\operatorname{pdim}(M) = \operatorname{t}(R)$, also die Behauptung, falls $\operatorname{t}(M) = 0$. ■

§ Minimale freie Auflösungen und Nichtnullteiler

9.10 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, sei M ein R-Modul, und sei $x \in \mathfrak{m} \cap \operatorname{NNT}_R(M) \cap \operatorname{NNT}(R)$. Sei

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

eine minimale freie Auflösung von M. Gegeben seien die Homomorphismen von R-Moduln $e_0 : F_0 \to M/xM,\ a \mapsto d_0(a)/xM$ und $e_1 : F_0 \oplus F_1 \to F_0,\ (a, b) \mapsto xa + d_1(b)$ und schliesslich $e_n : F_{n-1} \oplus F_n \to F_{n-2} \oplus F_{n-1},\ (a, b) \mapsto \big(-d_{n-1}(a),\, xa + d_n(b)\big)$ für $n > 1$. Dann ist

$$\cdots \to F_n \oplus F_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} F_{n-1} \oplus F_n \to \cdots \to F_0 \oplus F_1 \xrightarrow{e_1} F_0 \xrightarrow{e_0} M/xM \to 0$$

eine minimale freie Auflösung des R-Moduls M/xM.

Beweis. Wegen $F_{n-1} \oplus F_n \cong R^{\oplus b^R_{n-1}(M)} \oplus R^{\oplus b^R_n(M)} \cong R^{\oplus\left(b^R_{n-1}(M)+b^R_n(M)\right)}$ ist $F_{n-1} \oplus F_n$ für alle $n > 0$ ein freier R-Modul.

Weil $d_0 : F_0 \to M$ surjektiv ist, gilt dasselbe natürlich auch für $e_0 : F \to M/xM$. Weiter ist offenbar $\operatorname{Ker}(e_0) = \operatorname{Ker}(d_0) + xF_0 = \operatorname{Im}(d_1) + xF_0 = \operatorname{Im}(e_1)$. Wegen der Minimalität von d_0 gilt zudem $\operatorname{Ker}(d_0) \subseteq \mathfrak{m}F_0$. Somit ist $\operatorname{Ker}(e_0) = \operatorname{Ker}(d_0) + xF_0 \subseteq \mathfrak{m}F_0$. Also ist e_0 minimal.

Sei jetzt $(a, b) \in F_1 \oplus F_2$. Dann ist $e_1 \circ e_2(a, b) = e_1(e_2(a, b)) = e_1(-d_1(a), xa + d_2(b)) = -xd_1(a) + d_1(xa + d_2(b)) = -xd_1(a) + xd_1(a) + d_1 \circ d_2(b) = 0$. Also ist $\operatorname{Ker}(e_1) \supseteq \operatorname{Im}(e_2)$. Sei umgekehrt $(u, v) \in \operatorname{Ker}(e_1)$. Dann ist $xu + d_1(v) = e_1(u, v) = 0$. Wir setzen zunächst $N := \operatorname{Ker}(d_0) = \operatorname{Im}(d_1)$. Nach (9.2) besteht ein durch $w + xN \mapsto w + xF_0$ gegebener injektiver Homomorphismus von R-Moduln $\bar{\imath} : N/xN \to F_0/xF_0$. Es gilt $\bar{\imath}(d_1(v) + xN) = d_1(v) + xF_0 = (xu + d_1(v)) + xF_0 = 0 + xF_0 = 0$, also $d_1(v) \in xN = x\operatorname{Im}(d_1)$. Wir finden also ein Element $a \in F_1$ mit $d_1(v) = xd_1(a) = d_1(xa)$. Es folgt $d_1(v - xa) = 0$, also $v - xa \in \operatorname{Ker}(d_1) = \operatorname{Im}(d_2)$. Wir finden also ein Element $b \in F_2$ mit $d_2(b) = v - xa$. Weiter ist $xu = -d_1(v) = -d_1(xa) = -xd_1(a)$, d.h. $x(u + d_1(a)) = 0$. Wegen (9.3) ist $x \in \operatorname{NNT}_R(F_0)$, und es folgt $u + d_1(a) = 0$, also $u = -d_1(a)$. So folgt schliesslich $e_2(a, b) = (-d_1(a), xa + d_2(b)) = (u, xa + v - xa) = (u, v)$. Damit ist gezeigt, dass $\operatorname{Ker}(e_1) = \operatorname{Im}(e_2)$. Weil d_0 und d_1 minimal sind, ist $\operatorname{Im}(d_1) = \operatorname{Ker}(d_0) \subseteq \mathfrak{m}F_0, \operatorname{Im}(d_2) = \operatorname{Ker}(d_1) \subseteq \mathfrak{m}F_1$. Wegen $x \in \mathfrak{m}$ folgt so $\operatorname{Ker}(e_1) = \operatorname{Im}(e_2) \subseteq \mathfrak{m}(F_0 \oplus F_1)$, und e_1 ist ebenfalls minimal.

Seien jetzt $n > 1$ und $(a, b) \in F_n \oplus F_{n+1}$. Dann gilt $e_n \circ e_{n+1}(a, b) = e_n(e_{n+1}(a, b)) = e_n(-d_n(a), xa + d_{n+1}(b)) = (-d_{n-1}(-d_n(a)), -xd_n(a) + d_n(xa + d_{n+1}(b))) = (d_{n-1} \circ d_n(a), - d_n(xa) + d_n(xa) + d_n \circ d_{n+1}(b)) = (0, 0)$. Also ist $\operatorname{Ker}(e_n) \supseteq \operatorname{Im}(e_{n+1})$. Sei umgekehrt $(u, v) \in \operatorname{Ker}(e_n)$. Dann ist $(-d_{n-1}(u), xu + d_n(v)) = e_n(u, v) = (0, 0)$. Also ist $d_{n-1}(u) = 0$, d.h. $u \in \operatorname{Ker}(d_{n-1}) = \operatorname{Im}(d_n)$. Wir finden also ein $a \in F_n$ mit $d_n(a) = u$. Weiter ist jetzt $d_n(xa + v) = xd_n(a) + d_n(v) = xu + d_n(v) = 0$, also $xa + v \in \operatorname{Ker}(d_n) = \operatorname{Im}(d_{n+1}))$. Wir finden also ein Element $b \in F_{n+1}$ mit $d_{n+1}(b) = xa + v$ und erhalten $e_{n+1}(-a, b) = (-d_n(-a), -xa + d_{n+1}(b)) = (d_n(a), -xa + xa + v) = (u, v)$. Dies zeigt, dass $\operatorname{Ker}(e_n) = \operatorname{Im}(e_{n+1})$. Wegen der Minimalität von d_n und d_{n-1} ist wieder $\operatorname{Im}(d_{n+1}) = \operatorname{Ker}(d_n) \subseteq \mathfrak{m}F_n$ und $\operatorname{Im}(d_n) = \operatorname{Ker}(d_{n-1}) \subseteq \mathfrak{m}F_{n-1}$, also $\operatorname{Ker}(e_n) = \operatorname{Im}(e_{n+1}) \subseteq \mathfrak{m}(F_n \oplus F_{n-1})$, was zeigt, dass e_n minimal ist. ∎

9.11 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, sei M ein endlich erzeugter R-Modul, sei $x \in \mathfrak{m} \cap \operatorname{NNT}_R(M) \cap \operatorname{NNT}(R)$, und sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$b^R_n(M/xM) = b^R_n(M) + b^R_{n-1}(M).$$

Beweis. Wegen $R^{\oplus b^R_n(M)} \oplus R^{\oplus b^R_{n-1}(M)} \cong R^{\oplus\left(b^R_n(M)+b^R_{n-1}(M)\right)}$ klar aus (9.10). ∎

§ Bettizahlen und Nichtnullteilerfolgen

9.12 Bezeichnung. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren den ***Binomialkoeffizienten*** "n tief k" wie üblich durch

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{falls } k \leq n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir erinnern an die ***Additionsformel von Pascal***

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

9.13 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, sei M ein endlich erzeugter R-Modul, und es bilden $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m} \cap \mathrm{NNT}(R)$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich M. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt dann:

$$b_n^R\Big(M \Big/ \sum_{j=1}^{r} x_j M\Big) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} b_{n-i}^R(M).$$

Beweis. Wir machen Induktion nach r. Für $r = 0$ ist die Behauptung klar. Sei also $r \geq 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gelten mit $\overline{M} := M/\sum_{j=1}^{r-1} x_j M$ die Formeln

$$b_n^R(\overline{M}) = \textstyle\sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} b_{n-i}^R(M) \quad \text{und} \quad b_{n-1}^R(\overline{M}) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} b_{n-i-1}^R(M).$$

Weiter ist $M/\sum_{j=1}^{r} x_j M \cong \overline{M}/x_r\overline{M}$. Dabei ist $x_r \in \mathfrak{m} \cap \mathrm{NNT}_R(\overline{M}) \cap \mathrm{NNT}(R)$. Nach (9.11) folgt deshalb mit Hilfe der Additionsformel aus (9.12), dass

$$\begin{aligned}
b_n^R\big(M/\textstyle\sum_{j=1}^{r} x_j M\big) &= b_n^R\big(\overline{M}/x_r\overline{M}\big) \\
&= b_n^R(\overline{M}) + b_{n-1}^R(\overline{M}) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} b_{n-i}^R(M) + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} b_{n-i-1}^R(M) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} b_{n-i}^R(M) + \sum_{i=1}^{r} \binom{r-1}{i-1} b_{n-i}^R(M) \\
&= b_n^R(M) + \textstyle\sum_{i=1}^{r-1} \binom{r-1}{i} b_{n-i}^R(M) + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r-1}{i-1} b_{n-i}^R(M) + b_{n-r}^R(M) \\
&= b_n^R(M) + \textstyle\sum_{i=1}^{r-1} \left(\binom{r-1}{i} + \binom{r-1}{i-1}\right) b_{n-i}^R(M) + b_{n-r}^R(M) \\
&= b_n^R(M) + \textstyle\sum_{i=1}^{r-1} \binom{r}{i} b_{n-i}^R(M) + b_{n-r}^R(M) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} b_{n-i}^R(M).
\end{aligned}$$

■

9.14 Korollar. Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und bilden $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich R, so gilt:

(a) $b_n^R\big(R/\sum_{i=1}^{r} x_i R\big) = \binom{r}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\mathrm{pdim}_R\big(R/\sum_{i=1}^{r} x_i R\big) = r$.

Beweis. Gemäss (7.38) genügt es, die Aussage (a) zu beweisen. Nach dem Vertauschungssatz (5.18) gilt $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{NNT}(R)$. Jetzt schliesst man mit (9.13) unter Beachtung der Tatsache, dass $b_0^R(R) = 1$ und $b_j^R(R) = 0$ für $j \neq 0$. ■

§ Bettizahlen und globale Dimension regulärer lokaler Ringe

9.15 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension $d > 0$ und sei $x_1, \ldots, x_d$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$. Dann ist $x_1, \ldots, x_d$ eine Nichtnullteilerfolge bezüglich R.

Beweis. Natürlich ist $x_1, \ldots, x_d$ ein Parametersystem von R. Jetzt schliesst man mit (6.46) und (6.30). ■

9.16 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension $d \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

(a) $b_n^R(R/\mathfrak{m}) = \binom{d}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\operatorname{gldim}(R) = d$.

Beweis. "(a)" Ist $d = 0$, so ist R ein Körper, also $R/\mathfrak{m} \cong R$, und die minimale freie Auflösung $\cdots \to 0 \to 0 \to R \xrightarrow{\mathrm{id}_R} R \to 0$ von R zeigt uns, dass $b_0^R(R/\mathfrak{m}) = b_0^R(R) = 1$ und $b_n^R(R/\mathfrak{m}) = b_n^R(R) = 0$ für alle $n > 0$.

Sei $d > 0$. Wir schreiben $\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^d x_i R$ mit geeigneten Elementen $x_1, \ldots, x_d$ aus $\mathfrak{m}$ und schliessen mit (9.15) und (9.14)(a).

"(b)" Ist $d = 0$, so gilt mit demselben Argument wie in (a) nach (8.21) und (7.38), dass $\operatorname{gldim}(R) = \operatorname{pdim}(R/\mathfrak{m}) = \operatorname{pdim}(R) = 0$.

Sei $d > 0$. Wir behalten die Bezeichnungen von (a) fest. Dann können wir schliessen mit (9.15), (9.14)(b) und (8.21). ■

§ Einige Schlussfolgerungen

9.17 Korollar. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring. Für jeden endlich erzeugten R-Modul $M \neq 0$ gilt dann:

$$\operatorname{pdim}(M) + \mathrm{t}(M) = \dim(R).$$

Beweis. Klar aus (9.16)(b), (9.9) und (6.46). ■

9.18 Korollar. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension $d \in \mathbb{N}_0$, und sei $M \neq 0$ ein endlich erzeugter R-Modul. Dann sind äquivalent:

(i) M ist ein CM-Modul der Dimension d.

(ii) M ist frei.

Beweis. O.E. sei $d > 0$, denn sonst ist M ein Vektorraum über dem Körper R, also erfüllt M die beiden Bedingungen.

"(i) $\Rightarrow$ (ii)" Ist M ein CM-Modul der Dimension d, so gilt $\mathrm{t}(M) = d$. Nach (9.17) folgt daraus, dass $\mathrm{pdim}(M) = 0$. Nach (7.23) und (7.19) folgt, dass M frei ist.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Ist M frei, so folgt aus (9.8), dass $\mathrm{t}(M) = \mathrm{t}(R)$, und wegen $\dim_R(R) = \dim(R)$ und (6.46) sind wir fertig. ■

9.19 Definition. Ein Modul M über einem Integritätsbereich R heisst ***torsionsfrei***, wenn $\mathrm{NNT}_R(M) = R \setminus \{0\}$.

9.20 Korollar. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension 1, und sei $M \neq 0$ ein endlich erzeugter R-Modul. Dann sind äquivalent:

(i) M ist torsionsfrei.

(ii) M ist frei.

Beweis. Da $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Integritätsbereich der Dimension 1 ist, ist $\mathrm{Spec}(R) = \{(0), \mathfrak{m}\}$. Die Torsionsfreiheit von M ist gemäss (4.14) gleichbedeutend zu $\mathrm{Ass}_R(M) = \{(0)\}$, also (wegen $M \neq 0$, d.h. $\mathrm{Ass}_R(M) \neq \varnothing$) zu $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_R(M)$, d.h. zu $\mathrm{t}(M) \geq 1$. Wegen $\mathrm{t}(M) \leq \dim(R) = 1$ ist M also genau dann torsionsfrei, wenn M ein CM-Modul der Dimension 1 ist. Jetzt schliesst man mit (9.18). ■

§ Homologische Charakterisierung regulärer lokaler Ringe

9.21 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und seien M und N endlich erzeugte R-Moduln so, dass $M \Subset N$. Dann gilt:

(a) $b_n(M) \leq b_n(N)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\mathrm{pdim}_R(M) \leq \mathrm{pdim}_R(N)$.

Beweis. Gemäss (7.38) genügt es, die Aussage (a) zu beweisen. Sei

$$\cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \cdots \to \cdots F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

eine minimale freie Auflösung von M, und sei

$$\cdots \to G_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} G_n \cdots \to \cdots G_0 \xrightarrow{e_0} N \to 0$$

eine minimale freie Auflösung von N. Weil M ein direkter Summand von N ist, gibt es zwei Homomorphismen von R-Moduln $r : N \to M$ und $s : M \to N$ so, dass s ein Schnitt zu r ist. Nach (7.31) gibt es eine Auflösung $(r_n : G_n \to F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von r zwischen unseren minimalen freien Auflösungen. Nach (7.34) gibt es eine Familie $(s_n : F_n \to G_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Homomorphismen von R-Moduln so, dass s_n jeweils ein Schnitt zu r_n ist. Also gilt $F_n \Subset G_n$ und damit $b_n^R(M) = \mathrm{rk}(F_n) \leq \mathrm{rk}(G_n) = b_n^R(N)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. ■

9.22 Lemma. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{m}^2$. Dann gilt $R/\mathfrak{m} \Subset \mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$.

Beweis. Sei $d := \mathrm{edim}(R)$. Nach (6.36) finden wir dann Elemente $x_2, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ so, dass $\mathfrak{m} = (x, x_2, \ldots, x_d)$. Wir betrachten die zwei folgenden Untermoduln $U := xR/x\mathfrak{m}$ und $V := \big(x\mathfrak{m} + \sum_{i=2}^d x_i R\big)/x\mathfrak{m}$ des R-Moduls $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$. Der durch $y \mapsto xy + x\mathfrak{m}$ definierte und surjektive Homomorphismus von R-Moduln $h : R \to U$ erfüllt $\mathrm{Ker}(h) \supseteq \mathfrak{m}$. Gemäss dem Lemma von Nakayama ist $x\mathfrak{m} \subsetneq xR$, also $U \neq 0$. Deshalb ist $\mathrm{Ker}(h) \subsetneq R$, also $\mathrm{Ker}(h) = \mathfrak{m}$. Es besteht also ein Isomorphismus von R-Moduln $R/\mathfrak{m} \cong U$. Deshalb sind wir fertig, wenn wir zeigen können, dass $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m} = U \oplus V$. Offenbar gilt $U + V = \mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$. Es bleibt also zu zeigen, dass $U \cap V = 0$. Sei also $y \in \mathfrak{m}$ so, dass die Restklasse $\overline{y}$ von y modulo $x\mathfrak{m}$ zu $U \cap V$ gehört. Es ist zu zeigen, dass $y \in x\mathfrak{m}$.

Wegen $\overline{y} \in U$ können wir mit einem geeigneten Element $a \in R$ schreiben $y = xa$. Wegen $\overline{y} \in V$ können wir mit geeigneten Elementen $b \in \mathfrak{m}$ und $a_2, \ldots, a_d \in R$ schreiben $y = xb + \sum_{i=2}^d x_i a_i$. Wir erhalten so $xa = y = xb + \sum_{i=2}^d x_i a_i$, also $x(a-b) = \sum_{i=2}^d x_i a_i$. Das Element $a - b$ kann aber in R nicht invertierbar sein, denn sonst wäre $x \in (x_2, \ldots, x_d)$, also $\mathfrak{m} = (x, x_2, \ldots, x_d) = (x_2, \ldots, x_d)$, was der Festsetzung $\mathrm{edim}(R) = d$ widerspräche. Also ist $a - b \in \mathfrak{m}$. Wegen $b \in \mathfrak{m}$ folgt $a \in \mathfrak{m}$, also ist in der Tat $y = xa \in x\mathfrak{m}$. ■

9.23 Satz. Jeder noethersche lokale Ring $(R, \mathfrak{m})$ endlicher globaler Dimension ist regulär.

Beweis. Wir machen Induktion nach $d := \dim(R)$. Ist $d = \dim(R) = 0$, so ist auch $\mathrm{t}(R) = 0$, vgl. (6.17). Nach (8.22) ergibt sich dann wegen $\mathrm{gldim}(R) < \infty$, dass $\mathfrak{m} = 0$. Also ist R ein Körper, mithin ein regulärer lokaler Ring, vgl. (6.41).

Sei jetzt $\dim(R) > 0$. Dann ist $\mathfrak{m} \neq 0$, und aus $\mathrm{gldim}(R) < \infty$ folgt mit (8.22) sofort dass $\mathrm{t}(R) > 0$, also dass $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_R(R)$. Sei $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\} = \mathrm{Ass}_R(R)$. Dann gilt $\mathfrak{p}_i \subsetneqq \mathfrak{m}$ für $i = 1, \ldots, r$. Wegen $\mathfrak{m} \neq 0$ folgt nach Nakayama, dass $\mathfrak{m}^2 \subsetneq \mathfrak{m}$. Gemäss dem Vermeidungslemma (2.5) existiert deshalb ein Element $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus (\mathfrak{m}^2 \cup \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_r)$. Nach (4.14) ist $x \in \mathrm{NNT}(R)$. Natürlich ist dann erst recht $x \in \mathrm{NNT}_R(\mathfrak{m})$.

Sei $\overline{R} := R/xR$. Weil R von endlicher globaler Dimension ist, folgt nun aus (9.4)(b), dass $\mathrm{pdim}_{\overline{R}}(\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}) = \mathrm{pdim}_R(\mathfrak{m}) < \infty$. Weiter ist der R-Modul $R/\mathfrak{m}$ gemäss (9.22) ein direkter Summand des R-Moduls $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$. Weil jeder R-Untermodul von $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$ gemäss (3.3) auch ein $\overline{R}$-Untermodul ist, ist $R/\mathfrak{m}$ auch als $\overline{R}$-Untermodul ein direkter Summand von $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$. Deshalb folgt aus (9.21) dass $\mathrm{pdim}_{\overline{R}}(R/\mathfrak{m}) \leq \mathrm{pdim}_{\overline{R}}(\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}) < \infty$. Nun ist aber $\overline{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/xR$ das Maximalideal des lokalen Rings $\overline{R}$, und es besteht ein Isomorphismus $R/\mathfrak{m} \cong \overline{R}/\overline{\mathfrak{m}}$ sowohl von R-Moduln als auch von $\overline{R}$-Moduln. So folgt $\mathrm{pdim}_{\overline{R}}(\overline{R}/\overline{m}) < \infty$.

Nach (8.21) ergibt sich somit $\mathrm{gldim}(\overline{R}) < \infty$. Wegen $x \in \mathrm{NNT}(R)$ folgt aus (5.24) sofort, dass $\dim(\overline{R}) = \dim(R) - 1 = d - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(\overline{R}, \overline{\mathfrak{m}})$ deshalb ein regulärer lokaler Ring der Dimension $d-1$. Insbesondere finden wir $d-1$ Elemente $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{d-1} \in \overline{R}$ so, dass $\overline{\mathfrak{m}} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{d-1})$. Für $i = 1, \ldots, d-1$ wählen wir $x_i \in \mathfrak{m}$ so, dass $x_i + xR = \overline{x}_i$. Dann folgt $\mathfrak{m}/xR = (x_1, \ldots, x_{d-1})/xR$, also $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_{d-1}, x)$. Damit ist $\mathrm{edim}(R) \leq d = \dim(R)$. Also ist R regulär. ■

9.24 Korollar. Für einen noetherschen lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ sind äquivalent:

(i) R ist regulär lokal.

(ii) $b_n^R(R/\mathfrak{m}) = \binom{\dim(R)}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) $\mathrm{pdim}_R(R/\mathfrak{m}) = \dim(R)$.

(iv) $\mathrm{gldim}(R) = \dim(R)$.

(v) $\mathrm{pdim}_R(R/\mathfrak{m}) < \infty$.

(vi) $\mathrm{gldim}(R) < \infty$.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" folgt aus (9.16)(a), "(ii) $\Rightarrow$ (iii)" aus (7.38), "(iii) $\Leftrightarrow$ (iv)" aus (8.21), "(iii) $\Rightarrow$ (v)" aus (3.32) und (3.16), "(v) $\Leftrightarrow$ (vi)" aus (8.21). "(vi) $\Rightarrow$ (i)" ist gerade die Aussage von (9.23). ■

§ Nenneraufnahme und projektive Dimension

9.25 Lemma. Seien R ein Ring und $S \subseteq R$ eine Nennermenge.

(a) Ist F ein freier R-Modul, so ist $S^{-1}F$ ein freier $S^{-1}R$-Modul. Falls $0 \notin S$, so gilt zudem:

$$\mathrm{rk}_{S^{-1}R}(S^{-1}F) = \mathrm{rk}_R(F).$$

(b) Ist P ein projektiver R-Modul, so ist $S^{-1}P$ ein projektiver $S^{-1}R$-Modul.

Beweis. "(a)" Wir können gemäss (7.3)(C) schreiben $F \cong R^{\oplus I}$, wo $I \subseteq F$ eine Basis von F ist. Gemäss (4.35)(A) und (7.3)(D) genügt es zu zeigen, dass ein Isomorphismus

$$S^{-1}(R^{\oplus I}) \to (S^{-1}R)^{\oplus I}$$

besteht. Ein solcher wird in der Tat vermittelt durch die Vorschrift

$$\frac{(a_i)_{i \in I}}{s} \mapsto \left(\frac{a_i}{s}\right)_{i \in I}$$

für $s \in S$ und $(a_i)_{i \in I} \in R^{\oplus I}$ mit $\#\{i \in I \mid a_i \neq 0\} < \infty$.

"(b)" Nach (7.17) existieren ein freier R-Modul F und ein R-Modul N so, dass $P \oplus N \cong F$. Durch

$$\frac{(p,n)}{s} \mapsto \left(\frac{p}{s}, \frac{n}{s}\right)$$

wird ein Isomorphismus

$$S^{-1}(P \oplus N) \cong S^{-1}P \oplus S^{-1}N$$

von $S^{-1}R$-Moduln definiert. Gemäss (4.35)(A) folgt $S^{-1}P \oplus S^{-1}N \cong S^{-1}F$, und wir schliessen mit (a) und (7.17). ∎

9.26 Satz. Sind R ein Ring, $S \subseteq R$ eine Nennermenge und M ein R-Modul, so gilt:

$$\mathrm{pdim}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) \leq \mathrm{pdim}_R(M).$$

Beweis. Ist

$$\cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

eine projektive Auflösung des R-Moduls M, so ist nach (4.35)(B) und (9.25)(b) die Sequenz

$$\cdots \to S^{-1}P_{n+1} \xrightarrow{S^{-1}d_{n+1}} S^{-1}P_n \to \cdots \to S^{-1}P_1 \xrightarrow{S^{-1}d_1} S^{-1}P_0 \xrightarrow{S^{-1}d_0} S^{-1}M \to 0$$

eine projektive Auflösung des $S^{-1}R$-Moduls $S^{-1}M$. ∎

§ Lokalisierungen regulärer lokaler Ringe

9.27 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring, und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Dann ist der lokale Ring $R_\mathfrak{p}$ ebenfalls regulär.

Beweis. Das Maximalideal von $R_\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. Nach (5.15) besteht ein Isomorphismus $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \cong (R/\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ von $R_\mathfrak{p}$-Moduln. Gemäss (9.26) folgt sofort $\mathrm{pdim}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) \leq \mathrm{pdim}_R(R/\mathfrak{p})$. Weil aber R regulär ist, folgt mit (9.24) die Ungleichung $\mathrm{pdim}_R(R/\mathfrak{p}) < \infty$. Wenn wir jetzt (9.24) auf den Ring $R_\mathfrak{p}$ anwenden, so folgt die Behauptung. ∎

Kapitel 10

Faktorialität

§ Primelemente und Zerlegung in Primfaktoren

10.1 Bemerkungen und Definitionen. (A) Sei R ein Integritätsbereich. Ein Element $x \in R$ heisst dann ein ***Primelement***, wenn das Hauptideal xR von R ein Primideal von R ist, d.h. wenn $xR \in \mathrm{Spec}(R)$. Ist R^* die Menge der invertierbaren Elemente von R, so können wir sagen, dass x genau dann ein Primelement ist, wenn $x \in R \smallsetminus R^*$ und $\forall\, u, v \in R : (uv \in xR \implies u \in xR \vee v \in xR)$.

(B) Einen Ring R nennt man bekanntlich ***faktorieller Ring***, wenn er ein Integritätsbereich ist und jedes Element $x \in R \smallsetminus (R^* \cup \{0\})$ als Produkt $x = x_1 x_2 \cdots x_r$ endlich vieler Primelemente $x_1, \ldots, x_r \in R$ geschrieben werden kann. Eine derartige Produktdarstellung von x heisst dann eine ***Zerlegung in Primfaktoren*** von x. Leicht prüft man üblicherweise in der elementaren Algebra nach, dass eine solche Zerlegung in Primfaktoren im Wesentlichen *eindeutig* ist. Genauer: Ist $x = x'_1 \cdots x'_{r'}$ eine zweite Zerlegung von x in Primfaktoren, so gilt $r' = r$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathbb{S}_r$ so, dass $x_{\sigma(i)} R = x'_i R$ für $i = 1, \ldots, r$. Gleichbedeutend: Ist $x = x'_1 \cdots x'_{r'}$ eine zweite Zerlegung von x in Primfaktoren, so gilt $r' = r$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathbb{S}_r$ und Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in R^*$ so, dass $x'_i = \varepsilon_i x_{\sigma(i)}$ für $i = 1, \ldots, r$.

(C) Körper und Hauptidealringe sind bekanntlich faktoriell.

§ Noethersche faktorielle Ringe

10.2 Satz. Sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) R ist faktoriell.

(ii) Jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ der Höhe 1 ist ein Hauptideal.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Weil R ein Integritätsbereich ist, gilt $(0) \in \mathrm{Spec}(R)$. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ der Höhe 1. Wir wählen $x \in \mathfrak{p} \smallsetminus \{0\}$. Nun zerlegen wir x in Primfaktoren und schreiben

$x = x_1 \cdots x_r$ mit $x_iR \in \operatorname{Spec}(R) \smallsetminus \{(0)\}$. Wegen $x_1 \cdots x_r = x \in \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ gibt es einen Index $i \in \{1, \ldots, r\}$ mit $x_i \in \mathfrak{p}$. Es folgt $x_iR \subseteq \mathfrak{p}$. Somit erhalten wir die Inklusionen von Primidealen $(0) \subsetneq x_iR \subseteq \mathfrak{p}$. Wegen $\operatorname{h}(\mathfrak{p}) = 1$ folgt $\mathfrak{p} = x_iR$.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Wir setzen nun voraus, dass jedes Primideal von R der Höhe 1 ein Hauptideal ist. Nehmen wir aber an, R sei nicht faktoriell. Dann ist die Menge

$$U := \big\{x \in R \smallsetminus (R^* \cup \{0\}) \bigm| x \text{ besitzt keine Zerlegung in Primfaktoren}\big\}$$

nicht-leer. Insbesondere ist also auch $\mathbb{I} := \{xR \mid x \in U\}$ eine nicht-leere Menge von Idealen von R. Weil R noethersch ist, besitzt $\mathbb{I}$ ein bezüglich der Inklusion maximales Mitglied xR, mit $x \in U$. Wegen $x \notin R^*$ ist $xR \subsetneq R$. Nach (2.27) besitzt xR also ein minimales Primoberideal $\mathfrak{p}$. Nach dem Krullschen Hauptideallemma (3.28) folgt $\operatorname{h}(\mathfrak{p}) \leq 1$. Wegen $0 \neq x \in \mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{p} \neq (0)$. Weil R ein Integritätsbereich ist, gilt $(0) \in \operatorname{Spec}(R)$. In R besteht also die Primidealkette $(0) \subsetneq \mathfrak{p}$, und diese zeigt, dass $\operatorname{h}(\mathfrak{p}) \geq 1$. Also ist $\operatorname{h}(\mathfrak{p}) = 1$.

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal. Wir finden also ein $t \in R$ so, dass $\mathfrak{p} = tR$. Wegen $x \in \mathfrak{p}$ gibt es also ein $y \in R$ mit $x = ty$. Wegen $x \neq 0$ ist $y \neq 0$. Weiter ist $y \notin R^*$, denn sonst wäre $xR = tyR = tR = \mathfrak{p}$, also x ein Primelement, im Widerspruch zu $x \in U$. Also ist $y \in R \smallsetminus (R^* \cup \{0\})$.

Offenbar gilt $xR \subseteq yR$. Wäre dabei $y \in xR$, so gäbe es ja ein $s \in R$ mit $y = xs$ und wir hätten $x = txs = xts$. Weil R ein Integritätsbereich ist, ergäbe sich dann $1 = ts$, also $t \in R^*$ und damit der Widerspruch $\mathfrak{p} = tR = R$. Also ist $y \notin xR$, d.h. $xR \subsetneq yR$.

Wegen $y \in R \smallsetminus (R^* \cup \{0\})$ und der Maximalität von xR in $\mathbb{I}$ folgt $y \notin U$. Also hat y eine Zerlegung in Primfaktoren $y = y_1 \cdots y_r$. Es folgt $x = t \cdot y_1 \cdots y_r$. Weil t ein Primelement ist, hat x also eine Zerlegung in Primfaktoren, im Widerspruch zu $x \in U$. Also war unsere Annahme falsch und damit ist R faktoriell. ∎

§ Bruchringe faktorieller Ringe

10.3 Festsetzungen und Notationen. (A) Sei R ein Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge mit $0 \notin S$. Nach (3.9)(C) hat der durch $x \mapsto \frac{x}{1}$ definierte kanonische Homomorphismus von Ringen $\eta_S : R \to S^{-1}R$ gerade den Kern 0 und ist damit injektiv.

(B) Natürlich ist $R \smallsetminus \{0\} \subseteq R$ eine Nennermenge. Sofort sieht man, dass

$$\operatorname{Quot}(R) := (R \smallsetminus \{0\})^{-1}R$$

ein Körper ist. Man nennt diesen den ***Quotientenkörper*** von R. Nach Teil (A) ist der kanonische Homomorphismus von Ringen $\eta := \eta_{R \smallsetminus \{0\}} : R \to \operatorname{Quot}(R)$ injektiv. Wir wollen ab jetzt R immer als Unterring von $\operatorname{Quot}(R)$ auffassen, und zwar vermöge η.

(C) Ist $S \subseteq R$ eine beliebige Nennermenge mit $0 \notin S$, so gilt $S \subseteq R \smallsetminus \{0\}$. Leicht rechnet man nach, dass durch $\frac{x}{s} \mapsto \frac{x}{s}$ für $x \in R$ und $s \in S$ ein injektiver Homomorphismus von Ringen $\varphi_S : S^{-1}R \to \operatorname{Quot}(R)$ definiert wird, der im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, tail, "\eta_S"'] \arrow[dr, tail, "\eta"] \arrow[d, phantom, "\ominus"] & \\ S^{-1}R \arrow[rr, tail, "\varphi_S"'] & & \operatorname{Quot}(R) \end{tikzcd}$$

erscheint. Wir wollen ab jetzt immer $S^{-1}R$ identifizieren mit

$$\varphi_S(S^{-1}R) = \left\{ \frac{x}{s} \;\middle|\; x \in R,\, s \in S \right\} \subseteq \mathrm{Quot}(R).$$

So können wir alle Bruchringe von R ausser 0 als Unterringe von $\mathrm{Quot}(R)$ auffassen. Für jede Nennermenge $S \subseteq R$ mit $0 \notin S$ gilt also

$$R \subseteq S^{-1}R \subseteq \mathrm{Quot}(R).$$

(D) Mit den obigen Bezeichnungen besteht —wie man leicht nachrechnet— ein Isomorphismus von Körpern

$$\begin{aligned}\Psi_S : \mathrm{Quot}(R) &\to \mathrm{Quot}(S^{-1}R),\\ \frac{x}{y} &\mapsto \frac{x}{y}\end{aligned}$$

für $x \in R$ und $y \in R \smallsetminus \{0\}$, wobei

$$\Psi_S^{-1}\left(\frac{\frac{x}{s}}{\frac{y}{t}}\right) = \frac{xt}{ys}$$

für alle $x \in R$, $y \in R \smallsetminus \{0\}$ und $s, t \in S$. Wir identifizieren ab jetzt $\mathrm{Quot}(R)$ mit $\mathrm{Quot}(S^{-1}R)$ vermöge Ψ_S. Dann gilt die ***Doppelbruchregel***

$$\frac{\frac{x}{s}}{\frac{y}{t}} = \frac{xt}{ys}$$

für alle $x \in R$, $y \in R \smallsetminus \{0\}$ und $s, t \in S$.

10.4 Satz. Ist R ein faktorieller Ring und ist $S \subseteq R$ eine Nennermenge mit $0 \notin S$, so ist auch der Bruchring $S^{-1}R$ faktoriell.

Beweis. Zunächst ist R ein Integritätsbereich und es gilt $S^{-1}R \subseteq \mathrm{Quot}(R)$. Also ist $S^{-1}R$ ein Integritätsbereich. Wir wählen $y \in S^{-1}R \smallsetminus ((S^{-1}R)^* \cup \{0\})$. Es gibt dann ein $x \in R$ und ein $s \in S$ mit $y = \frac{x}{s}$. Wegen $y \neq 0$ ist $x \neq 0$. Wegen $\frac{1}{s} \in (S^{-1}R)^*$ und $y = \frac{1}{s}x \notin (S^{-1}R)^*$ ist $x \notin (S^{-1}R)^*$. Wegen $R \subseteq S^{-1}R$ ist $R^* \subseteq (S^{-1}R)^*$. Also ist $x \notin R^*$. Somit hat x eine Zerlegung in Primfaktoren $x = x_1 x_2 \cdots x_r$, wobei jedes x_i ein Primelement von R ist.

Wegen $x_1 x_2 \cdots x_r = sy \notin (S^{-1}R)^*$ sind einige der Primfaktoren $x_i \notin (S^{-1}R)^*$. Nach allfälliger Umnumerierung können wir deshalb annehmen, es gebe ein $t \in \{1, \ldots, r\}$ mit $x_1, \ldots, x_t \notin (S^{-1}R)^*$ und mit $x_{t+1}, \ldots, x_r \in (S^{-1}R)^*$. Setzen wir $\varepsilon := \frac{1}{s}\prod_{j=t+1}^r x_j$, so ist $\varepsilon \in (S^{-1}R)^*$.

Sei $i \in \{1, \ldots, t\}$. Dann ist $x_i \notin (S^{-1}R)^*$, also $x_i S^{-1}R \cap (S^{-1}R)^* = \varnothing$ und wegen $S \subseteq (S^{-1}R)^*$ folgt $x_i R \cap S = \varnothing$, d.h. $x_i R \in \mathrm{Spec}_S(R)$ und damit $x_i S^{-1}R = (x_i R)S^{-1}R \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$, vgl. auch (3.12)(C). Also ist x_i ein Primelement von $S^{-1}R$. Wegen $\varepsilon \in (S^{-1}R)^*$ ist dann insbesondere $\varepsilon x_1 S^{-1}R = x_1 S^{-1}R \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$, d.h. εx_1 ist ein Primelement von $S^{-1}R$. Wegen $y = (\varepsilon x_1) \cdot x_2 \cdots x_t$ erhalten wir so in $S^{-1}R$ eine Zerlegung von y in Primfaktoren. ∎

§ Ein Faktorialitätskriterium für noethersche Ringe

10.5 Festsetzung. (A) Sei R ein Ring und $x \in R$. Dann ist $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq R$ offensichtlich eine Nennermenge. In dieser Situation braucht man folgende Notationen:

$$R_x := \{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}^{-1}R,$$
$$\eta_x : R \xrightarrow{\eta_{\{x^n \mid n\in\mathbb{N}_0\}}} R_x.$$

Ist M ein R-Modul, so schreibt man entsprechend

$$M_x := \{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}^{-1}M.$$

Ist $h : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, so schreiben wir

$$h_x : M_x \xrightarrow{\{x^n \mid n\in\mathbb{N}_0\}^{-1}h} N_x.$$

(B) Genau dann liegt 0 nicht in der Nennermenge $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, wenn $x \in R \setminus \sqrt{0}$, also wenn x nicht nilpotent ist.

10.6 Satz. Sei R ein noetherscher Integritätsbereich, und sei $x \in R \setminus \{0\}$ ein Primelement so, dass R_x faktoriell ist. Dann ist auch R faktoriell.

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $\operatorname{h}(\mathfrak{p}) = 1$. Nach (10.2) ist zu zeigen, dass $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist. Ist $x \in \mathfrak{p}$, so folgt aus $(0) \subsetneq xR \subseteq \mathfrak{p}$ und $\operatorname{h}(\mathfrak{p}) = 1$ zusammen mit $xR \in \operatorname{Spec}(R)$ sofort, dass $xR = \mathfrak{p}$.

Sei also $x \notin \mathfrak{p}$. Dann ist $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cap \mathfrak{p} = \varnothing$, d.h. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}_{\{x^n \mid n\in\mathbb{N}_0\}}(R)$. Nach (3.13)(a) folgt, dass $\mathfrak{p}R_x \subseteq R_x$ ein Primideal der Höhe 1 ist — vgl. auch (3.12)(C). Nach (3.10) ist R_x noethersch. Nach (10.2) gibt es also ein $z \in R_x \setminus \{0\}$ so, dass $\mathfrak{p}R_x = zR_x$. Mit geeignetem $y \in R \setminus \{0\}$ können wir schreiben $z = \frac{y}{x^n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Wir wollen uns nun überlegen, dass es ein $r \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $y \notin x^rR$. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann ist $0 \neq y \in \bigcap_{s\in\mathbb{N}} x^sR =: \mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal ist. Sei nun $u \in \mathfrak{a}$. Dann gibt es zu jedem $s \in \mathbb{N}$ ein $r_s \in R$ mit $u = x^s r_s$. Wir schreiben $u = x \cdot x^{s-1}r_s$. Für alle $s, t \in \mathbb{N}$ gilt dann $x \cdot x^{s-1}r_s = u = x \cdot x^{t-1}r_t$, also $x^{s-1}r_s = x^{t-1}r_t$. Es gibt also ein $v \in R$ so, dass $x^{s-1}r_s = v$ für alle $s \in \mathbb{N}$. Natürlich ist dann $v \in \mathfrak{a}$. Weiter ist aber auch $u = x \cdot x^{s-1}r_s = xv$, also $u \in x\mathfrak{a}$. Es gilt also $\mathfrak{a} \subseteq x\mathfrak{a}$, d.h. $\mathfrak{a} = x\mathfrak{a}$, d.h. $\mathfrak{a} = xR\mathfrak{a}$. Weil R noethersch ist, ist $\mathfrak{a}$ als R-Modul endlich erzeugt. Nach (3.25) gibt es also ein $t \in xR$ mit $(1+t)\mathfrak{a} = 0$. Es folgt $(1+t)y = 0$ also $1+t = 0$, also $1 = -t \in xR = \mathfrak{p} \subsetneq R$, ein Widerspruch. Also gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ so, dass $y \notin x^rR$. Wir wählen $r \in \mathbb{N}$ minimal mit dieser Eigenschaft und setzen $s = r - 1$. Dann gilt $s \in \mathbb{N}_0$, $y \in x^sR$ und $y \notin x^{s+1}R$.

Wir finden ein $t \in R$ so, dass $y = x^s t$. Dann folgt $t \notin xR$. Wegen $x \in (R_x)^*$ folgt $\mathfrak{p}R_x = zR_x = \frac{y}{x^n}R_x = x^n\frac{y}{x^n}R_x = yR_x = x^s tR_x = tR_x$.

Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{p} = tR$. Zunächst ist $tR \subseteq tR_x \cap R = \mathfrak{p}R_x \cap R = \mathfrak{p}$, vgl. (3.12)(C), also $tR \subseteq \mathfrak{p}$. Sei umgekehrt $w \in \mathfrak{p}$. Dann ist $w \in \mathfrak{p}R_x = tR_x$, also $w = t \cdot \frac{v}{x^k}$ für geeignete $v \in R$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir wollen annehmen, k sei minimal mit der Eigenschaft, dass es ein $v \in R$ gibt mit $w = t\frac{v}{x^k}$. Wir behaupten, dass dann $k = 0$. Andernfalls hätten wir ja $tv = x^k w \in xR \in \operatorname{Spec}(R)$. Wegen $t \notin xR$ wäre dann $v \in xR$, also $v = xv'$ für ein $v' \in R$. Es folgt $w = t\frac{v}{x^k} = t\frac{xv'}{x^k} = t\frac{v'}{x^{k-1}}$, ein Widerspruch zur Minimalität von k. Also ist $k = 0$. Damit ist aber $w = tv \in tR$. Dies zeigt, dass $\mathfrak{p} \subseteq tR$. Insgesamt ist jetzt gezeigt, dass $\mathfrak{p} = tR$, also dass $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal von R ist. ■

§ Ein Lokal-Global-Prinzip für projektive Moduln

10.7 Lemma. Sei R ein Integritätsbereich, und sei P ein endlich erzeugter R-Modul so, dass $P_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ ein projektiver $R_\mathfrak{p}$-Modul ist. Dann ist P torsionsfrei.

Beweis. Seien $x \in R \setminus \{0\}$ und $p \in P$ so, dass $xp = 0$. Wir müssen zeigen, dass $p = 0$.

Nehmen wir das Gegenteil an! Dann ist $p \neq 0$, also $Rp \neq 0$. Nach (6.12) oder seinem Korollar (6.13) gibt es also ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $(Rp)_\mathfrak{p} \neq 0$. Wir fassen $(Rp)_\mathfrak{p}$ als den durch $\frac{p}{1} \in P_\mathfrak{p}$ erzeugten $R_\mathfrak{p}$-Untermodul von $P_\mathfrak{p}$ auf und erhalten $\frac{p}{1} \neq 0$.

Weil $P_\mathfrak{p}$ ein projektiver $R_\mathfrak{p}$-Modul ist, gibt es einen freien $R_\mathfrak{p}$-Modul G so, dass $P_\mathfrak{p}$ ein direkter Summand von G ist. Insbesondere ist $P_\mathfrak{p}$ isomorph zu einem $R_\mathfrak{p}$-Untermodul H von G. Weil $R_\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist, ist G ein torsionsfreier $R_\mathfrak{p}$-Modul. Damit ist der $R_\mathfrak{p}$-Untermodul H aber auch torsionsfrei über $R_\mathfrak{p}$. Wegen $P_\mathfrak{p} \cong H$ ist also $P_\mathfrak{p}$ torsionsfrei über $R_\mathfrak{p}$. Betrachten wir das Element $\frac{x}{1} \in R_\mathfrak{p}$, so folgt $\frac{x}{1} \cdot \frac{p}{1} = \frac{xp}{1} = \frac{0}{1} = 0$. Wegen $\frac{p}{1} \neq 0$ und weil $P_\mathfrak{p}$ torsionsfrei ist, folgt $\eta_\mathfrak{p}(x) = \frac{x}{1} = 0$. Weil R ein Integritätsbereich ist, ist der kanonische Homomorphismus $\eta_\mathfrak{p} : R \to R_\mathfrak{p}$ injektiv. Es folgt der Widerspruch $x = 0$. ■

10.8 Satz. Sei R ein Integritätsbereich, und sei P ein endlich erzeugter R-Modul so, dass $P_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ ein projektiver $R_\mathfrak{p}$-Modul ist. Dann ist P projektiv.

Beweis. Gemäss (10.7) ist P torsionsfrei. Sei nun $p_1, \ldots, p_r$ ein Erzeugendensystem von P. O.E. sei $r \neq 0$. Sei $F := R^{\oplus r}$, sei $\pi : F \to P$ der durch $(a_1, \ldots, a_r) \mapsto \sum_{i=1}^r a_i p_i$ definierte Homomorphismus von R-Moduln, und sei $N := \operatorname{Ker}(\pi)$. Es besteht dann die exakte Sequenz

$$(*) \qquad 0 \to N \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{\pi} P \to 0.$$

Nach (7.17) genügt es zu zeigen, dass $(*)$ spaltet.

Sei zunächst $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Wenn wir (4.35)(B) anwenden mit $S = R \setminus \mathfrak{p}$, so erhalten wir eine exakte Sequenz von $R_\mathfrak{p}$-Moduln $0 \to N_\mathfrak{p} \xrightarrow{\iota_\mathfrak{p}} F_\mathfrak{p} \xrightarrow{\pi_\mathfrak{p}} P_\mathfrak{p} \to 0$. Nach Voraussetzung ist $P_\mathfrak{p}$ ein projektiver $R_\mathfrak{p}$-Modul. Nach (7.17) "(i) $\Leftrightarrow$ (ii)" gibt es also einen Homomorphismus von $R_\mathfrak{p}$-Moduln $\sigma^{(\mathfrak{p})} : P_\mathfrak{p} \to F_\mathfrak{p}$ mit $\pi_\mathfrak{p} \circ \sigma^{(\mathfrak{p})} = \mathrm{id}_{P_\mathfrak{p}}$. Wegen $R \setminus \mathfrak{p} \subseteq R \setminus \{0\} = \operatorname{NNT}_R(R^{\oplus r}) = \operatorname{NNT}_R(F)$ ist der durch $f \mapsto \frac{f}{1}$ definierte kanonische Homomorphismus von R-Moduln $\eta_\mathfrak{p} : F \to F_\mathfrak{p}$ injektiv, vgl. (4.33)(C).

Nun schreiben wir $\sigma^{(\mathfrak{p})}(\frac{p_i}{1}) =: \frac{d_i}{s_i}$, wobei $d_i \in F$ und $s_i \in R \setminus \mathfrak{p}$ für $i = 1, \ldots, r$. Mit $s^{(\mathfrak{p})} := s_1 \cdots s_r$ und $c_i := \prod_{j \neq i} s_j d_i$ folgt, dass $s^{(\mathfrak{p})} \in R \setminus \mathfrak{p}$, $c_i \in F$ und $\frac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\sigma^{(\mathfrak{p})}(\frac{p_i}{1}) = \frac{c_i}{1} = \eta_\mathfrak{p}(c_i)$ für $i = 1, \ldots, r$. Es gilt also $\frac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\sigma^{(\mathfrak{p})}(\frac{p_i}{1}) \in \eta_\mathfrak{p}(F)$ für alle $i \in 1, \ldots, r$. Schreiben wir $\overline{\eta}_\mathfrak{p}$ für den durch $p \mapsto \frac{p}{1}$ definierten kanonischen Homomorphismus von R-Moduln $P \to P_\mathfrak{p}$, so folgt, dass $\frac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\sigma^{(\mathfrak{p})}(\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}(p_i)) \in \eta_{\mathfrak{p}}(F)$ für $i = 1, \ldots, r$. Weil P durch die Elemente $p_1, \ldots, p_r$ erzeugt ist, erhalten wir damit sofort, dass $\frac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\sigma^{(\mathfrak{p})}(\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}(P)) \subseteq \eta_{\mathfrak{p}}(F) \subseteq F_{\mathfrak{p}}$. Weil $\eta_{\mathfrak{p}} : F \to F_{\mathfrak{p}}$ injektiv ist, existiert der zu $\eta_{\mathfrak{p}}$ inverse Homomorphismus von R-Moduln $\eta_{\mathfrak{p}}^{-1} : \eta_{\mathfrak{p}}(F) \xrightarrow{\cong} F$. So können wir schliesslich einen Homomorphismus von R-Moduln

$$\varphi^{(\mathfrak{p})} : P \to F,\ p \mapsto \eta_{\mathfrak{p}}^{-1}\big(\tfrac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\sigma^{(\mathfrak{p})}\big(\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}(p)\big)\big)$$

definieren. Dabei gilt $\varphi^{(\mathfrak{p})}(p_i) = \eta_{\mathfrak{p}}^{-1}\big(\frac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\sigma^{(\mathfrak{p})}(\frac{p_i}{1})\big) = \eta_{\mathfrak{p}}^{-1}\big(\eta_{\mathfrak{p}}(c_i)\big) = c_i$ für $i = 1, \ldots, r$.

Jetzt lassen wir $\mathfrak{p}$ ganz $\operatorname{Spec}(R)$ durchlaufen und setzen $\mathfrak{a} := \sum_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)} Rs^{(\mathfrak{p})}$. Wegen $s^{(\mathfrak{p})} \notin \mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Nach (2.27)(b) folgt $\mathfrak{a} = R$. Insbesondere ist also $1 \in \mathfrak{a}$. Deshalb finden wir endlich viele Primideale $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t \in \operatorname{Spec}(R)$ und Elemente $a_1, \cdots, a_t \in R$ so, dass $1 = \sum_{l=1}^t a_l s^{(\mathfrak{p}_l)}$. Nun betrachten wir den Homomorphismus von R-Moduln

$$\varphi := \textstyle\sum_{l=1}^t a_l \varphi^{(\mathfrak{p}_l)} : P \to F.$$

Vorübergehend halten wir nun wieder ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ fest. Weil P torsionsfrei ist, ist $\operatorname{NNT}_R(P) = R \smallsetminus \{0\}$, also $R \smallsetminus \mathfrak{p} \subseteq \operatorname{NNT}_R(P)$. Deswegen ist der kanonische Homomorphismus von R-Moduln $\overline{\eta}_{\mathfrak{p}} : P \to P_{\mathfrak{p}}$ injektiv, vgl. (4.33)(C).

Für alle $f \in F$ gilt die Beziehung $\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}\big(\pi(f)\big) = \frac{\pi(f)}{1} = \pi_{\mathfrak{p}}\big(\frac{f}{1}\big) = \pi_{\mathfrak{p}}\big(\eta_{\mathfrak{p}}(f)\big)$. Mit beliebigem $p \in P$ und mit $f := \eta_{\mathfrak{p}}^{-1}\big(\frac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\sigma^{(\mathfrak{p})}\big(\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}(p)\big)\big) = \varphi^{(\mathfrak{p})}(p)$ folgt

$$\begin{aligned}
\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}\big(\pi\big(\varphi^{(\mathfrak{p})}(p)\big)\big) &= \pi_{\mathfrak{p}}\big(\eta_{\mathfrak{p}}\big(\eta_{\mathfrak{p}}^{-1}\big(\tfrac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\sigma^{(\mathfrak{p})}\big(\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}(p)\big)\big)\big)\big)\\
&= \pi_{\mathfrak{p}}\big(\tfrac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\sigma^{(\mathfrak{p})}\big(\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}(p)\big)\big)\\
&= \tfrac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\pi_{\mathfrak{p}}\big(\sigma^{(\mathfrak{p})}\big(\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}(p)\big)\big)\\
&= \tfrac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\pi_{\mathfrak{p}} \circ \sigma^{(\mathfrak{p})}\big(\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}(p)\big)\\
&= \tfrac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\operatorname{id}_{P_{\mathfrak{p}}}\big(\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}(p)\big)\\
&= \tfrac{s^{(\mathfrak{p})}}{1}\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}(p)\\
&= \overline{\eta}_{\mathfrak{p}}\big(s^{(\mathfrak{p})}p\big).
\end{aligned}$$

Weil $\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}$ injektiv ist, erhalten wir $\pi\big(\varphi^{(\mathfrak{p})}(p)\big) = s^{(\mathfrak{p})}p$. Nun folgt

$$\begin{aligned}
\pi \circ \varphi(p) &= \pi\big(\varphi(p)\big)\\
&= \pi\big(\textstyle\sum_{l=1}^t a_l\varphi^{(\mathfrak{p}_l)}(p)\big)\\
&= \textstyle\sum_{l=1}^t a_l\pi\big(\varphi^{(\mathfrak{p}_l)}(p)\big)\\
&= \textstyle\sum_{l=1}^t a_l s^{(\mathfrak{p}_l)}p\\
&= \big(\textstyle\sum_{l=1}^t a_l s^{(\mathfrak{p}_l)}\big)p\\
&= p.
\end{aligned}$$

Damit ist $\pi \circ \varphi = \operatorname{id}_P$. Also spaltet die Sequenz $(*)$. ■

§ Ein Kürzungssatz für Ideale

10.9 Satz. Sei R ein Integritätsbereich, sei $r \in \mathbb{N}_0$, und sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal derart, dass $\mathfrak{a} \oplus R^{\oplus r}$ ein freier R-Modul ist. Dann ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal.

Beweis. Falls $\mathfrak{a} = 0$, ist nichts zu zeigen. Sei also $\mathfrak{a} \neq 0$. Nach Voraussetzung gibt es eine Zahl $t \in \mathbb{N}_0$ und einen Isomorphismus von R-Moduln $\varphi : \mathfrak{a} \oplus R^{\oplus r} \to R^{\oplus t}$.

Sei K der Quotientenkörper von R, vgl. (10.3). Die Inklusionen $\mathfrak{a} \subseteq R \subseteq K$ erlauben, $\mathfrak{a} \oplus R^{\oplus r} \subseteq K \oplus K^{\oplus r} = K^{\oplus(r+1)}$ und $R^{\oplus t} \subseteq K^{\oplus t}$ zu schreiben. Sei $a \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$. In $\mathfrak{a} \oplus R^{\oplus r}$ betrachten wir die $r+1$ Elemente

$$v_1 := (a, 0, 0, \dots, 0, 0),\ v_2 := (0, 1, 0, \dots, 0, 0),\ \dots,\ v_{r+1} := (0, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

von $\mathfrak{a} \oplus R^{\oplus r}$. Diese sind sicher linear unabhängig über R; also sind deren $r+1$ Bilder $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$, $\dots$, $\varphi(v_{r+1}) \in R^{\oplus t}$ ebenfalls linear unabhängig über R und damit über K, denn φ ist ja ein Isomorphismus. Es folgt $t \geq r+1$.

Umgekehrt, betrachten wir die t kanonischen Basiselemente

$$e_1 := (1, 0, 0, \dots, 0, 0),\ e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0, 0),\ \dots,\ e_t := (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

von $R^{\oplus t}$. Wieder sind dann die t Urbilder $\varphi^{-1}(e_1)$, $\varphi^{-1}(e_2)$, $\dots$, $\varphi^{-1}(e_t) \in \mathfrak{a} \oplus R^{\oplus r} \subseteq K^{\oplus(r+1)}$ linear unabhängig über R. Es folgt $r+1 \geq t$. Also ist $t = r+1$.

Für $i = 1, \dots, r+1$ wählen wir $a_i \in \mathfrak{a}$ und $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,r} \in R$ so, dass $\varphi^{-1}(e_i) = (a_i, \lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,r})$. Wir betrachten nun die Matrix

$$\Lambda := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{r+1} \\ \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} & \cdots & \lambda_{r+1,1} \\ \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{r+1,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1,r} & \lambda_{2,r} & \cdots & \lambda_{r+1,r} \end{bmatrix}$$

aus $R^{(r+1)\times(r+1)} \subseteq K^{(r+1)\times(r+1)}$. Wegen $a_1, a_2, \dots, a_{r+1} \in \mathfrak{a}$ folgt durch Entwickeln nach der ersten Zeile von Λ sofort, dass $\det(\Lambda) \in \mathfrak{a}$; also gilt $\det(\Lambda)R \subseteq \mathfrak{a}$.

Wegen des Isomorphismus von R-Moduln $\varphi : \mathfrak{a} \oplus R^{\oplus r} \to R^{\oplus(r+1)}$ wird $\mathfrak{a} \oplus R^{\oplus r}$ durch die Elemente $\varphi^{-1}(e_1), \varphi^{-1}(e_2), \dots, \varphi^{-1}(e_{r+1})$ erzeugt. Für jeden Index $i \in \{1, \dots, r+1\}$ gibt es also Elemente $\mu_{i,1}, \mu_{i,2}, \dots, \mu_{i,r+1}$ so, dass gilt

$$\begin{aligned} v_i &= \textstyle\sum_{j=1}^{r+1} \mu_{i,j} \varphi^{-1}(e_j) \\ &= \Big(\textstyle\sum_{j=1}^{r+1} \mu_{i,j} a_j,\ \sum_{j=1}^{r+1} \mu_{i,j} \lambda_{j,1},\ \sum_{j=1}^{r+1} \mu_{i,j} \lambda_{j,2},\ \dots,\ \sum_{j=1}^{r+1} \mu_{i,j} \lambda_{j,r} \Big). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Matrix

$$\mathrm{M} := \begin{bmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,r+1} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \cdots & \mu_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{r+1,1} & \mu_{r+1,2} & \cdots & \mu_{r+1,r+1} \end{bmatrix}$$

aus $R^{(r+1)\times(r+1)} \subseteq K^{(r+1)\times(r+1)}$, so erhalten wir die Gleichheit

$$\begin{bmatrix} a & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{M} \cdot \Lambda^t$$

in $R^{(r+1)\times(r+1)} \subseteq K^{(r+1)\times(r+1)}$. Es folgt $a = \det(\Lambda)\det(\mathrm{M})$, also $a \in \det(\Lambda)R$. Es folgt $\mathfrak{a} \subseteq \det(\Lambda)R$. Also ist $\mathfrak{a} = \det(\Lambda)R$. Damit ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal. ■

§ Faktorialität regulärer lokaler Ringe

10.10 Satz. Reguläre lokale Ringe sind faktoriell.

Beweis. Sei $(R, \mathfrak{m})$ regulär, lokal und von der Dimension d. Wir machen Induktion über d. Ist $d = 0$, so ist R ein Körper (vgl. (6.41)) und damit faktoriell (vgl. (10.1)(C)).

Sei also $d > 0$. Wir wählen $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{m}^2$, was wegen $\mathfrak{m} \neq 0$ gemäss Nakayama möglich ist. Dann ist aber $\overline{R} := R/xR$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension $d-1$ (vgl. (6.42)). Insbesondere ist $\overline{R}$ ein Integritätsbereich (vgl. (6.44)), also $Rx \subseteq R$ ein Primideal (vgl. (2.2)(C)). Also ist $x \in R$ ein Primelement. Nach (10.6) genügt es zu zeigen, dass der Bruchring R_x faktoriell ist. Sei also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R_x)$ von der Höhe 1. Nach (10.2) genügt es zu zeigen, dass $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist.

Sei K der Quotienkörper von R. Es gilt dann $R \subseteq R_x \subseteq K$ (vgl. (10.3)). Dabei ist $\mathfrak{q} := \mathfrak{p} \cap R \in \operatorname{Spec}(R)$. Es gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_x$ (vgl. (3.12)(C)) und $\mathrm{h}(\mathfrak{q}) = 1$ (vgl. (3.13)(b)). Nach (9.24) gilt $\operatorname{pdim}_R(\mathfrak{q}) \leq d$, und deshalb besitzt $\mathfrak{q}$ eine minimale freie Auflösung der Form

$$0 \to F_t \xrightarrow{d_t} F_{t-1} \xrightarrow{d_{t-1}} F_{t-2} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} \mathfrak{q} \to 0$$

mit $t := \operatorname{pdim}_R(\mathfrak{q}) \leq d$.

Beachtet man, dass $\mathfrak{q}_x = \mathfrak{p}$, und benutzt man (4.35)(B), so erhält man eine exakte Sequenz von R_x-Moduln

$$0 \to (F_t)_x \xrightarrow{(d_t)_x} (F_{t-1})_x \xrightarrow{(d_{t-1})_x} (F_{t-2})_x \to \cdots \to (F_1)_x \xrightarrow{(d_1)_x} (F_0)_x \xrightarrow{(d_0)_x} \mathfrak{q} \to 0.$$

Dabei ist $(F_i)_x$ jeweils ein freier R_x-Modul von endlichem Rang, denn mit $b_i := b_i(\mathfrak{q})$ bestehen ja Isomorphismen von R_x-Moduln $(F_i)_x \cong (R^{\oplus b_i})_x \cong (R_x)^{\oplus b_i}$.

Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $N_i := \operatorname{Ker}((d_i)_x)$. Dann erhalten wir exakte Sequenzen von R_x-Moduln

$$(*) \qquad 0 \to N_0 \to (F_0)_x \xrightarrow{(d_0)_x} \mathfrak{p} \to 0,$$

$$(**) \qquad 0 \to N_i \to (F_i)_x \xrightarrow{(d_i)_x} N_{i-1} \to 0 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, t.$$

Wir wollen uns nun überlegen, dass $\mathfrak{p}$ ein projektiver R_x-Modul ist. Nach (10.8) genügt es zu zeigen, dass $\mathfrak{p}_\mathfrak{s} = \mathfrak{p}(R_x)_\mathfrak{s}$ für jedes $\mathfrak{s} \in \operatorname{Spec}(R_x)$ ein projektiver $(R_x)_\mathfrak{s}$-Modul ist. Wir wählen dazu $\mathfrak{s} \in \operatorname{Spec}(R_x)$ fest und setzen $\mathfrak{t} := \mathfrak{s} \cap R$. Dann gelten $\mathfrak{t} \in \operatorname{Spec}(R)$ und $\mathrm{h}(\mathfrak{t}) = \mathrm{h}(\mathfrak{s})$ (vgl. (3.13)(b)). Weiter gelten im Quotientenkörper K von R offenbar die Gleichheiten $(R_x)_\mathfrak{s} = R_\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{p}_\mathfrak{s} = \mathfrak{q}R_\mathfrak{t} = \mathfrak{q}_\mathfrak{t}$, wie man unter Verwendung der Doppelbruchregel aus (10.3)(D) leicht nachprüft.

Ist $\mathfrak{q} \nsubseteq \mathfrak{t}$, so ist $\mathfrak{p}_\mathfrak{s} = \mathfrak{q}R_\mathfrak{t} = R_\mathfrak{t} = (R_x)_\mathfrak{s}$, und wir sind fertig. Sei also $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{t}$. Wegen $\mathrm{h}(\mathfrak{q}) = 1$ ist auch $\mathfrak{q}R_\mathfrak{t} = \mathfrak{q}_\mathfrak{t}$ ein Primideal der Höhe 1 im lokalen Ring $R_\mathfrak{t}$. Nach (9.27) ist $R_\mathfrak{t}$ ein regulärer lokaler Ring. Wegen $\mathfrak{t} = \mathfrak{s} \cap R$ und $\mathfrak{s} \in \operatorname{Spec}(R_x)$ ist $x \notin \mathfrak{t}$ (vgl. (3.12)(A)). Weil $(R, \mathfrak{m})$ lokal ist, gilt $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{m}$. Es folgt also $\mathfrak{t} \subsetneq \mathfrak{m}$. Damit ist $\mathrm{h}(\mathfrak{t}) < \mathrm{h}(\mathfrak{m}) = \dim(R) = d$ (vgl. (3.16)), also $\dim(R_\mathfrak{t}) = \mathrm{h}(\mathfrak{t}) < d$ (vgl. (3.17)). Nach Induktion ist $R_\mathfrak{t}$ also faktoriell. Wie wir oben festgestellt haben, ist $\mathfrak{q}_\mathfrak{t} \subseteq R_\mathfrak{t}$ ein Primideal der Höhe 1. Nach (10.2) ist

$\mathfrak{q}_\mathfrak{t}$ also ein Hauptideal, d.h. $\mathfrak{q}_\mathfrak{t} = yR_\mathfrak{t}$ für ein $y \in R_\mathfrak{t}$. Wegen $\mathfrak{q}_\mathfrak{t} \neq 0$ ist $y \neq 0$. Weil $R_\mathfrak{t}$ ein Integritätsbereich ist, wird durch $z \mapsto yz$ ein Isomorphismus von $R_\mathfrak{t}$-Moduln $R_\mathfrak{t} \to \mathfrak{q}_\mathfrak{t}$ definiert. Also ist $\mathfrak{p}_\mathfrak{s} = \mathfrak{q}_\mathfrak{t}$ ein freier Modul vom Rang 1 über $R_\mathfrak{t} = (R_x)_\mathfrak{s}$ und damit sicher projektiv (vgl. (7.11)). Also ist $\mathfrak{p}$ ein projektiver R_x-Modul.

Nach (7.17) und (7.16) folgt mit der Sequenz $(*)$, dass $N_0 \oplus \mathfrak{p} \cong (F_0)_x$. Nach (7.17) folgt, dass N_0 ein projektiver R_x-Modul ist. Mit (7.17) und (7.16) folgt aus $(**)$, dass $N_1 \oplus N_0 \cong (F_1)_x$ und nach (7.17) auch, dass N_1 ein projektiver R_x-Modul ist. In gleicher Weise folgt aus $(**)$, dass $N_2 \oplus N_1 \cong (F_2)_x$ und dass N_2 ein projektiver R_x-Modul ist. Es ist also $N_i \oplus N_{i-1} \cong (F_i)_x$ für $i = 1, \ldots, t$. Die R_x-Moduln

$$U := \bigoplus\nolimits_{0 \le 2j \le t} (F_{2j})_x \qquad \text{und} \qquad W := \bigoplus\nolimits_{0 \le 2j+1 \le t} (F_{2j+1})_x$$

sind jeweils frei von endlichem Rang. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} \oplus W &= \mathfrak{p} \oplus (F_1)_x \oplus (F_3)_x \oplus (F_5)_x \oplus \cdots \\
&\cong \mathfrak{p} \oplus (N_0 \oplus N_1) \oplus (N_2 \oplus N_3) \oplus (N_4 \oplus N_5) \oplus \cdots \\
&\cong (\mathfrak{p} \oplus N_0) \oplus (N_1 \oplus N_2) \oplus (N_3 \oplus N_4) \oplus \cdots \\
&\cong (F_0)_x \oplus (F_2)_x \oplus (F_4)_x \oplus \cdots \\
&= U,
\end{aligned}$$

d.h. $\mathfrak{p} \oplus W \cong U$. Aus (10.9) und (7.6)(B) folgt, dass $\mathfrak{p} \subseteq R_x$ ein Hauptideal ist. ∎

Kapitel 11

Normalität

§ Ganze Erweiterungen

11.1 Definitionen. Seien R ein Ring und X eine Unbestimmte.

(A) Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ mit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in R$ und $a_n \in R \smallsetminus \{0\}$. Wir nennen a_n den ***Leitkoeffizienten*** von f. Dem Nullpolynom ordnen wir den Leitkoeffizienten 0 zu.

(B) Ein Polynom $f \in R[X]$ heisst ***unitär***, wenn sein Leitkoeffizient in R eine Einheit, d.h. invertierbar ist.

11.2 Bemerkung. Wir erinnern an den euklidischen Restsatz für Polynome:

Ist $g \in R[X]$ ein unitäres Polynom und ist $f \in R[X]$ ein beliebiges Polynom, so gibt es eindeutig bestimmte Polynome $h, l \in R[X]$ so, dass

$$\mathrm{Grad}(l) < \mathrm{Grad}(g) \quad \text{und} \quad f = gh + l.$$

Diesen Satz beweist man bekanntlich leicht durch Induktion über den Grad von f.

11.3 Lemma. Sei R ein Ring, sei R' ein Erweiterungsring von R, sei $x \in R'$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(i) Es besteht eine Gleichung $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$.

(ii) $R[x] = R + Rx + \cdots + Rx^{n-1}$.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $M := R + Rx + \cdots + Rx^{n-1}$. Natürlich gilt $M \subseteq R[x]$. Sei also $y \in R[x]$. Sei X eine Unbestimmte und sei $g := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in R[X]$. Wir finden ein Polynom $f \in R[X]$ mit $f(x) = y$. Weil g unitär vom Grad n ist, finden wir nach (11.2) zwei Polynome $h, l \in R[X]$ mit $\mathrm{Grad}(l) < n$ und $gh + l = f$. Es folgt $y = f(x) = g(x)h(x) + l(x)$. Wegen $g(x) = 0$ ist also $y = l(x)$. Natürlich ist $l(x) \in M$, also $y \in M$.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Ist $R[x] = R + Rx + \cdots + Rx^{n-1}$, so gibt es wegen $x^n \in R[x]$ Elemente $b_0, \ldots, b_{n-1} \in R$ mit $x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}$. Mit $a_i := -b_i$ für $i = 0, \ldots, n-1$ folgt $x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$. ■

11.4 Definitionen. Sei R ein Ring und sei R' ein Erweiterungsring von R.

(A) Sei $x \in R'$. Eine Gleichung der Form

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$ nennen wir eine ***ganze Gleichung vom Grad*** n ***für*** x ***über*** R.

(B) Genügt $x \in R'$ einer ganzen Gleichung über R, so sagen wir, x sei ***ganz über*** R. Die Menge

$$\overline{R} := \left\{ x \in R' \;\middle|\; x \text{ ist ganz über } R \right\} \subseteq R'$$

der über R ganzen Elemente von R' nennen wir den ***ganzen Abschluss von*** R ***in*** R'.

(C) Ist R' gerade der ganze Abschluss von R in R', so sagen wir auch, R' sei ***ganz über*** R oder R' sei ein ***ganzer Erweiterungsring von*** R oder $R \subseteq R'$ sei eine ***ganze (Ring-)Erweiterung***.

§ Kriterien für die Ganzheit

11.5 Lemma. Sei R ein Ring, sei R' ein Erweiterungsring von R und sei $x \in R'$. Dann sind äquivalent:

(i) Das Element x ist ganz über R.

(ii) Der Ring $R[x] \subseteq R'$ ist als R-Modul endlich erzeugt.

(iii) Es gibt einen Unterring R'' von R' mit $R[x] \subseteq R''$ und so, dass R'' als R-Modul endlich erzeugt ist.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Klar nach (11.3).

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Trivial.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)" Wir schreiben $R'' = \sum_{i=1}^{n} R m_i$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m_1, \ldots, m_n \in R''$. Für jeden Index $i \in \{1, \ldots, n\}$ finden wir wegen $x m_i \in R''$ Elemente $a_{i1}, \ldots, a_{in} \in R$ so, dass $x m_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j$. Betrachten wir die Matrix $A := [a_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n] \in R^{n \times n}$ und steht $I_n \in R^{n \times n}$ für die Einheitsmatrix, so folgt

$$(xI_n - A) \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nach (3.24) ergibt sich $\det(xI_n - A)\, m_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, also $\det(xI_n - A)\, R'' = 0$. Wegen $1 \in R''$ folgt $\det(xI_n - A) = 0$. Wegen $A \in R^{n \times n}$ ist dies eine ganze Gleichung für x über R. ■

11.6 Lemma. Sei R ein Ring, sei R' ein Erweiterungsring von R, der als R-Modul endlich erzeugt ist, und sei M' ein endlich erzeugter R'-Modul. Dann ist M' auch als R-Modul endlich erzeugt.

Beweis. Mit jeweils endlich vielen Elementen $r_1, \ldots, r_s \in R'$ und $m_1, \ldots, m_t \in M'$ können wir schreiben

$$R' = \textstyle\sum_{i=1}^{s} Rr_i \quad \text{und} \quad M' = \sum_{j=1}^{t} R'm_j.$$

Natürlich gilt $r_i m_j \in M'$ für alle $(i,j) \in \{1, \ldots, s\} \times \{1, \ldots, t\}$. Wir wollen zeigen, dass M' über R gerade durch diese $s \cdot t$ Elemente erzeugt wird. Ist $m \in M'$, so gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_t \in R'$ so, dass $m = \sum_{j=1}^{t} x_j m_j$. Zu jedem $j \in \{1, \ldots, t\}$ gibt es Elemente $a_{j1}, \ldots, a_{js} \in R$ mit $x_j = \sum_{i=1}^{s} a_{ji} r_i$. Es folgt

$$m = \textstyle\sum_{j=1}^{t} x_j m_j = \sum_{j=1}^{t} \big(\sum_{i=1}^{s} a_{ji} r_i\big) m_j = \sum_{\substack{1 \le i \le s \\ 1 \le j \le t}} a_{ij} r_i m_j \in \sum_{\substack{1 \le i \le s \\ 1 \le j \le t}} Rr_i m_j.$$

Also ist M' über R durch das System $\big\{r_i m_j \bigm| (i,j) \in \{1, \ldots, s\} \times \{1, \ldots, t\}\big\}$ erzeugt. ■

11.7 Satz. Seien R ein Ring und R' ein Erweiterungsring von R. Sei $\overline{R}$ der ganze Abschluss von R in R'. Dann ist $\overline{R}$ ein Unterring von R' mit $R \subseteq \overline{R}$.

Beweis. Es ist klar, dass jedes Element $x \in R$ ganz über R ist. Deshalb gilt $R \subseteq \overline{R}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\overline{R}$ ein Unterring von R' ist. Seien also $x, y \in \overline{R}$. Wegen $1_{R'} = 1_R \in R \subseteq \overline{R}$ müssen wir nur zeigen, dass $x + y \in \overline{R}$ und $xy \in \overline{R}$.

Weil y ganz ist über R, ist y erst recht ganz über $R[x]$. Nach (11.3) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $R[x,y] = R[x][y] = R[x] + R[x]y + \cdots + R[x]y^{n-1}$. Nach (11.5) ist $R[x]$ endlich erzeugt als R-Modul. Also ist auch $R[x,y]$ endlich erzeugt als R-Modul. Damit ist $R[x,y]$ ein Unterring von R', der als R-Modul endlich erzeugt ist, vgl. (11.6).

Zudem gilt $R[x+y] \subseteq R[x,y]$ und $R[xy] \subseteq R[x,y]$. Nach (11.5) folgt, dass $x+y$ und xy ganz über R sind, also $x + y \in \overline{R}$ und $xy \in \overline{R}$. ■

§ Ganze Erweiterungen und Bruchringe

11.8 Bemerkung. Sei R ein Ring, sei R' ein Erweiterungsring von R und sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge. Dann ist S auch eine Nennermenge in R' und der Bruchring $S^{-1}R'$ stimmt überein mit dem $S^{-1}R$-Bruchmodul $S^{-1}R'$, den wir erhalten, wenn wir R' als R-Modul auffassen. Nach (4.32)(D) können wir $S^{-1}R$ demnach in natürlicher Weise als Unterring von $S^{-1}R'$ auffassen, indem wir für $x \in R$ und $s \in S$ die Brüche $\frac{x}{s} \in S^{-1}R$ und $\frac{x}{s} \in S^{-1}R'$ identifizieren. In diesem Sinne wollen wir $S^{-1}R$ immer als Unterring von $S^{-1}R'$ auffassen.

11.9 Satz. Sei R ein Ring, sei R' ein Erweiterungsring von R und sei $\overline{R}$ der ganze Abschluss von R in R'. Sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge. Dann ist $S^{-1}\overline{R}$ der ganze Abschluss von $S^{-1}R$ in $S^{-1}R'$.

Beweis. Mit $\overline{S^{-1}R}$ bezeichnen wir den ganzen Abschluss von $S^{-1}R$ in $S^{-1}R'$. Wir müssen zeigen, dass $\overline{S^{-1}R} = S^{-1}\overline{R}$.

Sei zunächst $y \in S^{-1}\overline{R}$. Wir finden dann Elemente $x \in \overline{R}$ und $s \in S$ mit $y = \frac{x}{s}$. Dabei genügt x einer ganzen Gleichung $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$. Es folgt

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{s} y^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{s^n} = \frac{x^n}{s^n} + \frac{a_{n-1}}{s}\frac{x^{n-1}}{s^{n-1}} + \cdots + \frac{a_0}{s^n} = \frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{s^n} = \frac{0}{s^n} = 0.$$

Damit ist y ganz über $S^{-1}R$, also $y \in \overline{S^{-1}R}$.

Sei nun $y \in \overline{S^{-1}R}$. Dann besteht eine ganze Gleichung $y^n + b_{n-1}y^{n-1} + \cdots + b_0 = 0$ mit $b_0, \ldots, b_{n-1} \in S^{-1}R$. Die $n + 1$ Brüche $y, b_0, \ldots, b_{n-1} \in S^{-1}R'$ können mit einem gemeinsamen Nenner $s \in S$ geschrieben werden, also gilt $y = \frac{x}{s}, b_0 = \frac{a_0}{s}, \ldots, b_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{s}$ für $x \in R'$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$. Es folgt

$$\frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + sa_{n-2}x^{n-2} + \cdots + s^{n-1}a_0}{s^n} = y^n + b_{n-1}y^{n-1} + \cdots + b_0 = 0.$$

Wir finden also ein $t \in S$ mit $t(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + sa_{n-2}x^{n-2} + \cdots + s^{n-1}a_0) = 0$. Daraus folgt $(tx)^n + ta_{n-1}(tx)^{n-1} + t^2 sa_{n-2}(tx)^{n-2} + \cdots + t^n s^{n-1}a_0 = 0$. Damit ist tx ganz über R, d.h. $tx \in \overline{R}$. Es folgt $y = \frac{tx}{ts} \in S^{-1}\overline{R}$. ∎

11.10 Korollar. Sei R ein Ring, sei R' ein ganzer Erweiterungsring von R und sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge. Dann ist $S^{-1}R'$ ein ganzer Erweiterungsring von $S^{-1}R$.

Beweis. Klar aus (11.9) mit $\overline{R} = R'$. ∎

§ Normale Ringe

11.11 Definition. Sei R ein Ring und sei R' ein Erweiterungsring von R. Wir sagen, R sei ***ganz abgeschlossen in*** R', wenn R mit dem ganzen Abschluss von R in R' übereinstimmt, d.h. wenn jedes über R ganze Element $x \in R'$ bereits zu R gehört.

11.12 Lemma. Sei R ein Ring, sei R' ein Erweiterungsring von R und sei $S \subseteq R$ eine Nennermenge. Ist R ganz abgeschlossen in R', so ist $S^{-1}R$ ganz abgeschlossen in $S^{-1}R'$

Beweis. Klar nach (11.9). ∎

11.13 Definition. Ein ***normaler Ring*** ist ein Integritätsbereich, der in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen ist.

11.14 Satz. Ist R ein normaler Ring und ist $S \subseteq R$ eine Nennermenge, so ist auch $S^{-1}R$ ein normaler Ring.

Beweis. Klar nach (10.3)(D) und (11.12). ∎

§ Normalität faktorieller Ringe

11.15 Satz. Faktorielle Ringe sind normal.

Beweis. Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K. Sei $x \in K \smallsetminus \{0\}$ ganz über R. Nach (11.3) finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $R[x] = R + Rx + \cdots + Rx^{n-1}$. Es folgt $x^n \in R + Rx + \cdots + Rx^{n-1}$. Wir können schreiben $x = \frac{a}{s}$, wo $a, s \in R \smallsetminus \{0\}$ keinen gemeinsamen Primfaktor haben. Es folgt

$$s^{n-1}x^n \in Rs^{n-1} + Rxs^{n-1} + \cdots + Rx^{n-1}s^{n-1} = Rs^{n-1} + Ras^{n-2} + \cdots + Ra^{n-1} \subseteq R,$$

also $a^n = s^{n-1}x^n s \in Rs$. Weil a und s keinen gemeinsamen Primfaktor haben, muss s eine Einheit in R sein, und mithin folgt $x \in R$. ■

11.16 Korollar. Reguläre lokale Ringe sind normal.

Beweis. Klar nach (10.10) und (11.15) ■

§ Eindimensionale reguläre lokale Ringe

11.17 Lemma. Sei R ein noetherscher Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Sei $x \in K$ und sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \neq 0$ und mit $x\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$. Dann ist x ganz über R.

Beweis. Durch Induktion folgt sofort, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt $x^n\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$. Also ist $x^n\mathfrak{a} \subseteq R$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $a \in \mathfrak{a} \smallsetminus \{0\}$. Es folgt $x^n a \in R$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also $x^n \in \frac{1}{a}R$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Weil $\frac{1}{a}R$ ein R-Modul ist, folgt $R[x] \subseteq \frac{1}{a}R$. Weil $\frac{1}{a}R$ ein endlich erzeugter R-Modul ist und weil R noethersch ist, ist auch der R-Untermodul $R[x] \subseteq \frac{1}{a}R$ endlich erzeugt. Nach (11.5) ist x ganz über R. ■

11.18 Satz. Für einen eindimensionalen noetherschen lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ sind äquivalent:

(i) R ist regulär.

(ii) R ist normal.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Klar aus (11.16).

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei R normal. Wegen $\dim(R) = 1$ ist $\mathfrak{m} \neq 0$. Nach Nakayama folgt $\mathfrak{m}^2 \neq \mathfrak{m}$, d.h. $\mathfrak{m}^2 \subsetneq \mathfrak{m}$. Es gibt also ein $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{m}^2$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathfrak{m} = Rx$.

Nehmen wir das Gegenteil an! Dann ist $\mathfrak{m} \neq Rx$, d.h. $Rx \subsetneq \mathfrak{m}$. Damit wird aber $(Rx :_R \mathfrak{m}) \neq R$, also $(Rx :_R \mathfrak{m}) \subsetneq R$, d.h. $(Rx :_R \mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}$.

Ist $a \in (Rx :_R \mathfrak{m})$, so folgt nun $a\mathfrak{m} \subseteq Rx \cap \mathfrak{m}^2$, also $a\mathfrak{m} \subseteq Rx$ und $x \notin a\mathfrak{m}$. Insbesondere ist auch $\varepsilon x \notin a\mathfrak{m}$ für jede Einheit $\varepsilon \in R^* = R \setminus \mathfrak{m}$ von R. Jedes Element von $a\mathfrak{m}$ gehört also zu $\mathfrak{m}x$. Es folgt $a\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}x$. In $K := \mathrm{Quot}(R)$ gilt deshalb $\frac{a}{x}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$. Nach (11.17) ist $\frac{a}{x} \in K$ also ganz über R. Es folgt $\frac{a}{x} \in R$, also $a \in xR$. Dies zeigt, dass $(Rx :_R \mathfrak{m}) \subseteq Rx$, also $(Rx :_R \mathfrak{m}) = Rx$.

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ folgt nun

$$\begin{aligned}(Rx \underset{R}{:} \mathfrak{m}^n) &= \big((Rx \underset{R}{:} \mathfrak{m}) \underset{R}{:} \mathfrak{m}^{n-1}\big) = (Rx \underset{R}{:} \mathfrak{m}^{n-1}) \\ &= \big((Rx \underset{R}{:} \mathfrak{m}) \underset{R}{:} \mathfrak{m}^{n-2}\big) = (Rx \underset{R}{:} \mathfrak{m}^{n-2}) \\ &= \cdots = (Rx \underset{R}{:} \mathfrak{m}) = Rx \subseteq \mathfrak{m}.\end{aligned}$$

Andererseits ist $0 \subsetneq \mathfrak{m}$ die einzige maximale Primidealkette in R, denn $(R, \mathfrak{m})$ ist ja ein lokaler Integritätsbereich der Dimension 1. Wegen $x \neq 0$ folgt, dass $\mathfrak{m}$ das einzige (minimale) Primoberideal von Rx ist. Somit wird $\sqrt{Rx} = \mathfrak{m}$, vgl. (2.30). Nach (2.38) gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^n \subseteq Rx$. Es folgt $Rx :_R \mathfrak{m}^n = R \nsubseteq \mathfrak{m}$, ein Widerspruch. ∎

§ Zwei Resultate über normale Ringe

11.19 Satz. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein normaler noetherscher lokaler Ring mit $\dim(R) > 1$. Dann ist auch $\mathrm{t}(R) > 1$.

Beweis. Nehmen wir an, es sei $\mathrm{t}(R) \leq 1$ und wählen wir $x \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$. Weil R ein Integritätsbereich ist, folgt $x \in \mathrm{NNT}(R)$. Nach (5.22)(a) erhalten wir $\mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(R/xR) = \mathrm{t}_{\mathfrak{m}}(R) - 1 = \mathrm{t}(R) - 1 \leq 0$. Deshalb ist $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{NT}_R(R/xR)$. Nach (1.8)(b), (4.10), (4.14) und (2.5) folgt $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R(R/xR)$. Wir finden also ein Element $\overline{y} \in R/xR$ mit $(0 :_R \overline{y}) = \mathfrak{m}$. Wir wählen $y \in R$ mit $\overline{y} = y + xR$. Dann folgt $(xR :_R y) = \mathfrak{m}$, also $y\mathfrak{m} \subseteq xR$.

Nehmen wir zunächst an, es sei $y\mathfrak{m} = xR$. Dann gilt in R_y die Beziehung $\mathfrak{m} = \frac{x}{y}R$. Insbesondere ist $\frac{x}{y} \in \mathfrak{m}$, d.h. $\frac{x}{y} \in R$, also $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal. Nach dem Krullschen Hauptidealemma folgt $\mathrm{h}(\mathfrak{m}) \leq 1$ und damit der Widerspruch $\dim(R) \leq 1$.

Deshalb gilt $y\mathfrak{m} \subsetneq xR$. Es folgt, dass $x \notin y\mathfrak{m}$ und damit $\varepsilon x \notin y\mathfrak{m}$ für alle $\varepsilon \in R \setminus \mathfrak{m} = R^*$. Wir erhalten $y\mathfrak{m} \subseteq x\mathfrak{m}$. In $K := \mathrm{Quot}(R)$ gilt also $\frac{y}{x}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$. Nach (11.17) ist der Bruch $\frac{y}{x} \in K$ ganz über R. Weil R normal ist, folgt $\frac{y}{x} \in R$, also $y \in xR$ und damit der Widerspruch, dass $\mathfrak{m} = (xR :_R y) = R$. ∎

11.20 Satz. Sei L ein Integritätsbereich und sei $(R_i)_{i \in I}$ eine Familie normaler Unterringe von L. Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} R_i$ ein normaler Unterring von L.

Beweis. Indem wir L durch $\mathrm{Quot}(L)$ ersetzen, können wir annehmen, L sei ein Körper. $R := \bigcap_{i \in I} R_i$ ist natürlich ein Unterring von L. Insbesondere ist R ein Integritätsbereich. Sei $K := \big\{\frac{x}{s} \in L \,\big|\, x \in R,\ s \in R \setminus \{0\}\big\}$ und sei $K_i := \big\{\frac{x}{s} \in L \,\big|\, x \in R_i,\ s \in R_i \setminus \{0\}\big\}$ für jedes $i \in I$. Es gilt dann $R \subseteq K \subseteq K_i$ für alle $i \in I$. Zudem können wir identifizieren

$K = \mathrm{Quot}(R)$ und $K_i = \mathrm{Quot}(R_i)$ für alle $i \in I$. Sei nun $x \in K$ ganz über R. Dann ist $x \in K_i$ für alle $i \in I$. Zudem ist x ganz über $R_i \supseteq R$ für alle $i \in I$. Weil R_i normal ist, folgt $x \in R_i$ für alle $i \in I$, also $x \in \bigcap_{i \in I} R_i = R$. Dies zeigt, dass R normal ist. ■

§ Die Eigenschaften R_n und S_n

11.21 Definition. Sei R ein noetherscher Ring und sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir sagen, der Ring R habe die ***n-te Serre-Eigenschaft*** R_n, wenn der lokale Ring $R_\mathfrak{p}$ *regulär* ist für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ mit $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \leq n$.

11.22 Definition. Sei R ein noetherscher Ring und sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir sagen, der Ring R habe die ***n-te Serre-Eigenschaft*** S_n, wenn

$$\mathrm{t}(R_\mathfrak{p}) \geq \min\{n, \mathrm{h}(\mathfrak{p})\}$$

für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$.

11.23 Bemerkungen. (A) Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal des noetherschen Rings R. Nach (6.14) gilt $\mathrm{t}(R_\mathfrak{p}) \leq \dim(R_\mathfrak{p}) = \mathrm{h}(\mathfrak{p})$. Die Serre-Eigenschaft S_n besagt also, dass $\mathrm{t}(R_\mathfrak{p})$ maximal ist, falls $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \leq n$, und dass $\mathrm{t}(R_\mathfrak{p}) \geq n$, falls $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) > n$. Anders gesagt:

- R hat genau dann die Eigenschaft S_n, wenn für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$
  (1) $R_\mathfrak{p}$ ein CM-Ring ist, falls $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \leq n$, und
  (2) $\mathrm{t}(R_\mathfrak{p}) \geq n$, falls $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) > n$.

(B) Leicht prüft man nach:

- Jeder noethersche Ring hat die Eigenschaft S_0.
- Jeder reduzierte noethersche Ring hat die Eigenschaft R_0.

(C) Sofort ist auch folgendes klar:

- Ist $m < n$ und hat R die Eigenschaft R_n, so hat R auch die Eigenschaft R_m.
- Ist $m < n$ und hat R die Eigenschaft S_n, so hat R auch die Eigenschaft S_m.

11.24 Lemma. Für einen noetherschen Ring R sind äquivalent:

(i) R hat die Eigenschaft S_2.

(ii) Es gilt $\mathrm{Ass}_R(R) = \mathrm{Min}(R)$ und für jedes $x \in \mathrm{NNT}_R(R)$ und jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/xR)$ ist $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) = 1$.

Beweis. "(i) ⇒ (ii)" Es gelte für R die Eigenschaft S_2. Sei $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(R)$. Dann ist $\mathrm{t}(R_\mathfrak{q}) = 0$. Weil R die Eigenschaft S_2 erfüllt, folgt $\mathrm{h}(\mathfrak{q}) = 0$, also $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(R)$. Gemäss (4.16) gilt auch $\mathrm{Min}(R) \subseteq \mathrm{Ass}_R(R)$.

Sei jetzt $x \in \mathrm{NNT}_R(R)$ und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/xR)$. Dann ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}((R/xR)_\mathfrak{p})$, vgl. (4.38), also $\mathrm{t}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}((R/xR)_\mathfrak{p}) = 0$. Wegen $(R/xR)_\mathfrak{p} \cong R_\mathfrak{p}/xR_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}/\frac{x}{1}R_\mathfrak{p}$, s. (5.15), und

$\frac{x}{1} \in \mathrm{NNT}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})$, s. (5.16), folgt $\mathrm{t}(R_\mathfrak{p}) = \mathrm{t}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) = \mathrm{t}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/\frac{x}{1}R_\mathfrak{p})+1 = 0+1 = 1$. Wegen der S_2-Eigenschaft von R folgt $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) = 1$.

"(ii) $\Rightarrow$(i)" Es gelte (ii). Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Ist $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) = 0$, so gilt $0 \leq \mathrm{t}(R_\mathfrak{p}) \leq \dim(R_\mathfrak{p}) = \mathrm{h}(\mathfrak{p}) = 0$, also $\mathrm{t}(R_\mathfrak{p}) = 0$.

Ist $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) = 1$, so ist $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Min}(R) = \mathrm{Ass}_R(R)$, also $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})$, vgl. (4.38), also $\mathrm{t}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) > 0$. Wegen $\mathrm{t}(R_\mathfrak{p}) = \mathrm{t}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) \leq \dim(R_\mathfrak{p}) = \mathrm{t}(\mathfrak{p}) = 1$ folgt $\mathrm{t}(R_\mathfrak{p}) = 1 = \mathrm{h}(\mathfrak{p})$.

Sei $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \geq 2$. Wegen $\mathrm{Ass}_R(R) = \mathrm{Min}(R)$ ist $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(R)$. Nach (2.5), (4.10) und (4.14) folgt $\mathfrak{p} \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{q}\in\mathrm{Ass}_R(R)} \mathfrak{q} = \mathrm{NT}_R(R)$. Wir finden also ein $x \in \mathfrak{p} \cap \mathrm{NNT}_R(R)$. Wegen $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \geq 2$ folgt $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}_R(R/xR)$, also $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}((R/xR)_\mathfrak{p})$, also $\mathrm{t}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}((R/xR)_\mathfrak{p}) > 0$. Wieder ist $(R/xR)_\mathfrak{p} \cong R_\mathfrak{p}/\frac{x}{1}R_\mathfrak{p}$ und $\frac{x}{1} \in \mathrm{NNT}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})$, also $\mathrm{t}(R_\mathfrak{p}) = \mathrm{t}((R/xR)_\mathfrak{p}) + 1 > 1$, d.h. $\mathrm{t}(R_\mathfrak{p}) \geq 2$.

Damit ist gezeigt, dass R die Eigenschaft S_2 hat, vgl. (11.23)(A). ■

11.25 Satz. Sei R ein noetherscher Integritätsbereich mit der Eigenschaft S_2. Dann gilt in $\mathrm{Quot}(R)$ die Gleichheit:

$$R = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)\\ \mathrm{h}(\mathfrak{p})=1}} R_\mathfrak{p}.$$

Beweis. Sei $\overline{R} := \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R),\,\mathrm{h}(\mathfrak{p})=1} R_\mathfrak{p}$. Ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ mit $h(\mathfrak{p}) = 1$, so gilt $R \subseteq R_\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{Quot}(R)$. Es folgt $R \subseteq \overline{R}$.

Sei nun $x \in \overline{R}$. Ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ mit $h(\mathfrak{p}) = 1$, so folgt $x \in R_\mathfrak{p}$. Wir finden also ein Element $s^{(\mathfrak{p})} \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ so, dass $s^{(\mathfrak{p})}x \in R$. Mit $\mathfrak{a} := \sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R),\,\mathrm{h}(\mathfrak{p})=1} s^{(\mathfrak{p})}R$ folgt $\mathfrak{a}x \subseteq R$.

Sei $a \in \mathfrak{a} \smallsetminus \{0\}$ und sei $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\} := \mathrm{Ass}_R(R/aR)$. Nach (11.24) ist $\mathrm{h}(\mathfrak{p}_i) = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$. Wegen $\mathfrak{a} \ni s^{(\mathfrak{p}_i)} \notin \mathfrak{p}_i$ folgt $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$. Nach (2.5) gibt es also ein $b \in \mathfrak{a} \smallsetminus (\mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_r \cup \{0\})$. Nach (4.14) ist $b \in \mathrm{NNT}_R(R/aR)$, also ist (a, b) eine Nichtnullteilerfolge bezüglich R. Wegen $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{a}$ gelten $ax \in R$ und $bx \in R$. Weil (a, b) bezüglich R eine Nichtnullteilerfolge ist, gilt $aR \cap bR = abR$. Es folgt $abx \in aR \cap bR = abR$, also $abx \in abR$, also $x \in R$. Dies zeigt, dass $\overline{R} \subseteq R$. ■

§ Das Normalitätskriterium von Serre

11.26 Satz: Normalitätskriterium von Serre. Für einen noetherschen Integritätsbereich R sind äquivalent:

(i) R ist normal.

(ii) R erfüllt die Bedingungen R_1 und S_2.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei R normal. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Dann ist gemäss (11.14) auch $R_\mathfrak{p}$ normal. Sei $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) = 0$. Dann ist $R_\mathfrak{p}$ ein Körper, also regulär. Sei $h(\mathfrak{p}) = 1$. Dann ist $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$. Nach (11.18) ist $R_\mathfrak{p}$ regulär. Damit hat R die Eigenschaft R_1.

Es bleibt zu zeigen, dass R die Bedingung S_2 erfüllt. Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $\operatorname{h}(\mathfrak{p}) \leq 1$ ist gemäss (6.46) $R_\mathfrak{p}$ ein CM-Ring; für alle diese $\mathfrak{p}$ gilt also $\operatorname{t}(R_\mathfrak{p}) = \operatorname{h}(\mathfrak{p})$. Es ist noch zu zeigen, dass $\operatorname{t}(R_\mathfrak{p}) \geq 2$, falls $\operatorname{h}(\mathfrak{p}) \geq 2$. In diesem Fall ist aber $\dim(R_\mathfrak{p}) \geq 2$, und wir können mit (11.19) schliessen.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" R erfülle S_2 und R_1. Nach (11.25) gilt $R = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R),\, \operatorname{h}(\mathfrak{p})=1} R_\mathfrak{p}$. Für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $\operatorname{h}(\mathfrak{p}) = 1$ ist $R_\mathfrak{p}$ aber regulär und damit normal, vgl. (11.18). Nach (11.20) folgt jetzt, dass R normal ist. ∎

Kapitel 12

Ganze Erweiterungen und Primideale

§ Endliche ganze Erweiterungen

12.1 Satz. Sei R ein Ring und sei R' ein Erweiterungsring von R. Dann sind äquivalent:

(i) Es existieren endlich viele über R ganze Elemente $x_1, \ldots, x_n \in R'$ derart, dass $R' = R[x_1, \ldots, x_n]$.

(ii) R' ist ein endlich erzeugter ganzer Erweiterungsring von R.

(iii) R' ist ein endlich erzeugter R-Modul.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Es gelte (i). Dann ist $R' = R[x_1, \ldots, x_n]$ ein endlich erzeugter Erweiterungsring von R. Es bleibt zu zeigen, dass R' ganz über R ist.

Sei $\overline{R}$ der ganze Abschluss von R in R'. Wir müssen zeigen, dass $R' = \overline{R}$. Gemäss (11.7) gilt $\overline{R} \subseteq R'$. Es bleibt also zu zeigen, dass $R' \subseteq \overline{R}$. Nach Voraussetzung gilt $x_1, \ldots, x_n \in \overline{R}$. Weil $\overline{R}$ gemäss (11.7) ein R umfassender Ring ist, folgt $R' = R[x_1, \ldots, x_n] \subseteq \overline{R}$.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Sei R' ein endlich erzeugter ganzer Erweiterungsring von R. Wir finden also endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n \in R'$ so, dass $R' = R[x_1, \ldots, x_n]$. Wir zeigen durch Induktion, dass $R[x_1, \ldots, x_i]$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ ein endlich erzeugter R-Modul ist.

Der Fall mit $i = 0$ ist klar. Sei also $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $R[x_1, \ldots, x_{i-1}]$ ein endlich erzeugter R-Modul. Zudem ist x_i ganz über R, also erst recht über $R[x_1, \ldots, x_{i-1}]$. Nach (11.5) ist $R[x_1, \ldots, x_i] = R[x_1, \ldots, x_{i-1}][x_i]$ demnach ein endlich erzeugter $R[x_1, \ldots, x_{i-1}]$-Modul. Damit folgt aber mit (11.6), dass auch $R[x_1, \ldots, x_n]$ ein endlich erzeugter R-Modul ist.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)" Sei R' ein endlich erzeugter R-Modul. Wir finden dann endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n \in R'$ so, dass $R' = \sum_{i=1}^{n} Rx_i$. Es folgt $R' = R[x_1, \ldots, x_n]$, denn R' ist ja ein Ring. Insbesondere gilt $R[x_i] \subseteq R'$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nach (11.5) ist x_i also ganz über R für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. ∎

12.2 Definition. Sei R ein Ring und sei R' ein Erweiterungsring von R. Gelten die äquivalenten Bedingungen (12.1)(i)–(iii), so sagen wir, R' sei ***endlich ganz über*** R oder R' sei ein ***endlicher ganzer Erweiterungsring*** von R oder $R \subseteq R'$ sei eine ***endliche ganze (Ring-)Erweiterung***.

12.3 Satz: Transitivitätssatz für endliche ganze Erweiterungen. Sei R ein Ring, sei R' ein endlicher ganzer Erweiterungsring von R und sei R'' ein endlicher ganzer Erweiterungsring von R'. Dann ist R'' ein endlicher ganzer Erweiterungsring von R.

Beweis. Nach Voraussetzung ist R' ein endlich erzeugter R-Modul und R'' ein endlich erzeugter R'-Modul. Nun schliesst man mit (11.6). ■

12.4 Korollar: Transitivitätssatz für ganze Erweiterungen. Sei R ein Ring, sei R' ein ganzer Erweiterungsring von R und sei R'' ein ganzer Erweiterungsring von R'. Dann ist R'' ein ganzer Erweiterungsring von R.

Beweis. Sei $x \in R''$. Wir müssen zeigen, dass x ganz über R ist. Wir wissen, dass x über R' ganz ist. Deswegen finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R'$ so, dass $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$. Insbesondere ist x ganz über $R[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ und somit ist $R[a_0, \ldots, a_{n-1}, x] = R[a_0, \ldots, a_{n-1}][x]$ eine endliche ganze Erweiterung von $R[a_0, \ldots, a_{n-1}]$. Weil R' ganz über R ist, ist $R[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ eine endliche ganze Erweiterung von R. Nach (12.3) ist $R[a_0, \ldots, a_{n-1}, x]$ also eine endliche ganze Erweiterung von R. Insbesondere ist x ganz über R. ■

§ Das Kontraktionslemma

12.5 Lemma. Sei R ein Ring, sei R' ein ganzer Erweiterungsring von R und sei

$$\mathfrak{a} \subsetneq R$$

ein echtes Ideal von R. Dann ist das Erweiterungsideal $\mathfrak{a}R'$ ebenfalls ein echtes Ideal, d.h. es gilt:

$$\mathfrak{a}R' \subsetneq R'.$$

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann gilt $1 \in \mathfrak{a}R'$. Wir finden also ein $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{a}$ und $y_1, \ldots, y_n \in R'$ derart, dass $1 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Wir setzen $R'' := R[y_1, \ldots, y_n]$. Dann gilt $1 \in \mathfrak{a}R''$, also $\mathfrak{a}R'' = R''$. Zudem ist R'' ein endlicher ganzer Erweiterungsring von R, also ein endlich erzeugter R-Modul. Nach (3.25) gibt es deshalb ein $x \in \mathfrak{a}$ mit $(1+x)R'' = 0$. Es folgt $1+x = (1+x)1 = 0$, also der Widerspruch $1 = -x \in \mathfrak{a}$. ■

12.6 Bemerkungen. (A) Sei R ein Ring, sei R' ein Erweiterungsring von R und sei $\mathfrak{a}' \subsetneq R'$ ein echtes Ideal. Mit $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}' \cap R$ besteht dann ein injektiver Homomorphismus von Ringen

$$\iota_{\mathfrak{a}'} : R/\mathfrak{a} \to R'/\mathfrak{a}', \ x + \mathfrak{a} \mapsto x + \mathfrak{a}'.$$

Wir werden in Zukunft $R/\mathfrak{a}$ vermöge $\iota_{\mathfrak{a}'}$ als Unterring von $R'/\mathfrak{a}'$ auffassen, indem wir $x + \mathfrak{a}$ mit $x + \mathfrak{a}'$ für alle $x \in R$ identifizieren.

(B) Es gelten die Bezeichnungen aus (A). Sei $\overline{\cdot} : R' \to R'/\mathfrak{a}', \ x \mapsto x + \mathfrak{a}'$ die Restklassenabbildung. Sofort prüft man nach:

(a) $x \in R \ \Rightarrow \ \overline{x} \in R/\mathfrak{a}$.

(b) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in R'$ derart, dass $R' = R[x_1, \ldots, x_n]$, so gilt

$$R'/\mathfrak{a}' = (R/\mathfrak{a})[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n].$$

(c) Ist $x \in R'$ und sind $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$ derart, dass

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

so besteht für $\overline{x} \in R'/\mathfrak{a}'$ über $R/\mathfrak{a}$ die ganze Gleichung

$$\overline{x}^n + \overline{a}_{n-1}\overline{x}^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0 = 0.$$

12.7 Lemma. Sei R ein Ring, sei R' ein Erweiterungsring von R, sei $\mathfrak{a}' \subsetneq R'$ ein echtes Ideal und sei $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}' \cap R$. Dann gelten:

(a) Ist R' endlich erzeugt über R, so ist $R'/\mathfrak{a}'$ endlich erzeugt über $R/\mathfrak{a}$.

(b) Ist R' ganz über R, so ist $R'/\mathfrak{a}'$ ganz über $R/\mathfrak{a}$.

(c) Ist R' endlich ganz über R, so ist $R'/\mathfrak{a}'$ endlich ganz über $R/\mathfrak{a}$.

Beweis. Die Aussage (a) ist klar aus (12.6)(B)(b), während (b) klar ist aus (12.6)(B)(c). Die Aussage (c) folgt sofort aus (a) und (b). ■

12.8 Satz: Kontraktionslemma. Sei R ein Ring, sei R' ein ganzer Erweiterungsring von R, sei $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ ein Ideal und sei $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R')$ so, dass

$$\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{a}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{a}' \cap R.$$

Dann gilt:

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{a}'.$$

Beweis. Nach (12.7)(b) ist $\overline{R'} := R'/\mathfrak{p}'$ ein ganzer Erweiterungsring von $\overline{R} := R/(\mathfrak{p}' \cap R)$. Wir betrachten das Ideal $\overline{\mathfrak{a}'} := \mathfrak{a}'/\mathfrak{p}' \subseteq R'/\mathfrak{p}' = \overline{R'}$. Es gilt $\overline{\mathfrak{a}'} \cap \overline{R} = (\mathfrak{a}' \cap R)/(\mathfrak{p}' \cap R) = 0$. Es genügt zu zeigen, dass $\overline{\mathfrak{a}'} = 0$. Sei also $y \in \overline{\mathfrak{a}'}$. Dann ist y ganz über $\overline{R}$. Sei n die kleinste natürliche Zahl so, dass y über $\overline{R}$ einer ganzen Gleichung vom Grad n genügt. Es besteht dann eine Gleichung $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \overline{R}$. Es folgt $a_0 \in y\overline{R'} \cap \overline{R} \subseteq \overline{\mathfrak{a}'} \cap \overline{R} = 0$, also $a_0 = 0$. Ist $n = 1$, so folgt $y = -a_0 = 0$ und wir sind fertig.

Sei also $n > 1$. Dann folgt $(y^{n-1} + a_{n-1}y^{n-2} + \cdots + a_1)y = 0$. Wegen der Minimalität von n gilt $y^{n-1} + a_{n-1}y^{n-2} + \cdots + a_1 \neq 0$. Wegen $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R')$ ist $\overline{R'} = R'/\mathfrak{p}'$ ein Integritätsbereich. Es folgt $y = 0$. ■

12.9 Korollar: Kontraktionslemma für Primideale. Sei R ein Ring, sei R' ein ganzer Erweiterungsring und seien $\mathfrak{p}', \mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec}(R')$ so, dass

$$\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{q}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{q}' \cap R.$$

Dann gilt:

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}'.$$

Beweis. Man wende (12.8) an mit $\mathfrak{a}' := \mathfrak{q}'$. ■

§ Das Lying-Over-Lemma

12.10 Satz. Sei R ein Ring, sei R' ein ganzer Erweiterungsring von R, sei $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ ein Ideal und sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ so, dass

$$\mathfrak{a}' \cap R \subseteq \mathfrak{p}.$$

Dann gibt es ein $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R')$ so, dass

$$\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{p}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}.$$

Beweis. Seien $\overline{R'} := R'/\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}' \cap R$, $\overline{R} := R/\mathfrak{a}$ und $\overline{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/\mathfrak{a}$. Nach (12.7)(b) ist $\overline{R'}$ ganz über $\overline{R}$.

Nehmen wir an, es gebe ein Primideal $\overline{\mathfrak{p}'} \in \operatorname{Spec}(\overline{R'})$ so, dass $\overline{\mathfrak{p}'} \cap \overline{R} = \overline{\mathfrak{p}}$. Sei $\mathfrak{p}' := \overline{\mathfrak{p}'} \cap R'$. Dann ist $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R')$ und wegen (2.16)(B) gilt $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{p}'$. Weiter besteht das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, tail, "x \mapsto x"] \arrow[d, two heads, "x \mapsto x+\mathfrak{a}"'] & R' \arrow[d, two heads, "x \mapsto x+\mathfrak{a}'"] \\ \overline{R} \arrow[r, tail, "x+\mathfrak{a} \mapsto x+\mathfrak{a}'"'] & \overline{R'} \end{tikzcd}$$

und damit folgt $\mathfrak{p} = \overline{\mathfrak{p}} \cap R = (\overline{\mathfrak{p}'} \cap \overline{R}) \cap R = (\overline{\mathfrak{p}'} \cap R') \cap R = \mathfrak{p}' \cap R$, wobei die zweite Gleichheit wegen unserer Annahme gilt, während die dritte aus dem kommutativen Diagramm abzulesen ist. Es genügt also, den Fall mit $\mathfrak{a}' = 0$ zu betrachten und zu zeigen, dass es ein $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R')$ so gibt, dass $\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}$.

Sei $S := R \setminus \mathfrak{p}$. Nach (11.9) ist $S^{-1}R'$ ein ganzer Erweiterungsring von $S^{-1}R = R_\mathfrak{p}$. Der Ring $R_\mathfrak{p}$ ist lokal mit Maximalideal $\mathfrak{m} := \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Nach (12.5) ist $\mathfrak{m}S^{-1}R' \subsetneq S^{-1}R'$. Es gibt also ein $\mathfrak{m}' \in \mathrm{Max}(S^{-1}R')$ mit $\mathfrak{m}S^{-1}R' \subseteq \mathfrak{m}'$. Es folgt $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}S^{-1}R' \cap R_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}' \cap R_\mathfrak{p} \subsetneq R_\mathfrak{p}$. Wegen $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R_\mathfrak{p})$ erhalten wir $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R_\mathfrak{p}$. Sei $\mathfrak{p}' := \mathfrak{m}' \cap R'$. Dann ist $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R')$. Es folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{m} \cap R = (\mathfrak{m}' \cap R_\mathfrak{p}) \cap R = \mathfrak{m}' \cap R = (\mathfrak{m}' \cap R') \cap R = \mathfrak{p}' \cap R$. ∎

12.11 Korollar: Lying-Over-Lemma. Sei R ein Ring, sei R' ein ganzer Erweiterungsring von R und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Dann gibt es ein $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R')$, das "über $\mathfrak{p}$ liegt", d.h. so, dass

$$\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}.$$

Dabei gilt:

$$\mathfrak{p}' \in \min(\mathfrak{p}R').$$

Beweis. Die Existenz von $\mathfrak{p}'$ folgt, indem man (12.10) mit $\mathfrak{a}' = 0$ anwendet. Dabei gilt $\mathfrak{p}' \supseteq (\mathfrak{p}' \cap R)R' = \mathfrak{p}R'$, also $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Var}(\mathfrak{p}R')$. Ist $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Var}(\mathfrak{p}R')$ mit $\mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{q}'$, so folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R \supseteq \mathfrak{q}' \cap R \supseteq \mathfrak{p}R' \cap R \supseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{q}' \cap R$. Gemäss (12.9) folgt $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}'$. Dies zeigt, dass $\mathfrak{p}'$ in $\mathrm{Var}(\mathfrak{p}R')$ bezüglich der Inklusion minimal ist. ∎

§ Das Going-Up-Lemma

12.12 Satz: Going-Up-Lemma. Sei R ein Ring und sei R' ein ganzer Erweiterungsring von R, sei $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ ein Ideal und sei

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$$

eine Primidealkette in $\mathrm{Var}(\mathfrak{a}' \cap R)$. Dann gibt es eine Primidealkette

$$\mathfrak{p}'_0 \subsetneq \mathfrak{p}'_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_r$$

in $\mathrm{Var}(\mathfrak{a}')$ so, dass

$$\mathfrak{p}'_i \cap R = \mathfrak{p}_i$$

für jedes $i \in \{0, \ldots, r\}$.

Beweis. Wir machen Induktion nach r. Der Fall mit $r = 0$ ist klar nach (12.10). Sei also $r > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Primidealkette $\mathfrak{p}'_0 \subsetneq \mathfrak{p}'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}'_{r-1}$ in $\mathrm{Var}(\mathfrak{a}')$ so, dass $\mathfrak{p}'_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ für jedes $i \in \{0, \ldots, r-1\}$. Wendet man (12.10) an mit $\mathfrak{p}'_{r-1}$ anstelle von $\mathfrak{a}'$, so findet man ein $\mathfrak{p}'_r \in \mathrm{Var}(\mathfrak{p}'_{r-1}) \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{a}')$ mit $\mathfrak{p}'_r \cap R = \mathfrak{p}_r$. ∎

12.13 Korollar. Sei R ein Ring, sei R' ein ganzer Erweiterungsring von R und sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ eine Primidealkette in R. Dann gelten:

(a) Es gibt eine Primidealkette $\mathfrak{p}'_0 \subsetneq \mathfrak{p}'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}'_r$ in R' so, dass $\mathfrak{p}'_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ für jedes $i \in \{0, \ldots, r\}$.

(b) Ist $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R')$ mit $\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}_0$, so kann die Primidealkette aus (a) zusätzlich so gewählt werden, dass $\mathfrak{p}'_0 = \mathfrak{p}'$.

Beweis. Die Aussage (a) folgt aus (12.12) angewendet mit $\mathfrak{a}' := 0$. Zum Nachweis von (b) wende man (12.12) an mit $\mathfrak{a}' := \mathfrak{p}'$. ∎

12.14 Korollar. Sei R ein Ring, sei R' ein ganzer Erweiterungsring von R und sei $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R')$. Dann gilt:

$$\mathfrak{p}' \in \mathrm{Max}(R') \iff \mathfrak{p}' \cap R \in \mathrm{Max}(R).$$

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Max}(R')$. Nehmen wir an, es wäre $\mathfrak{p}' \cap R \notin \mathrm{Max}(R)$. Dann gibt es ein $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ mit $\mathfrak{p}' \cap R \subsetneq \mathfrak{m}$. Wendet man (12.13)(b) auf die Primidealkette $\mathfrak{p}' \cap R \subsetneq \mathfrak{m} =: \mathfrak{p}_1$ an, so findet man ein Primideal $\mathfrak{p}'_1 \in \mathrm{Spec}(R')$ mit $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}'_1$. Dies widerspricht der Maximalität von $\mathfrak{p}'$.

"$\Leftarrow$" Sei $\mathfrak{p}' \cap R \in \mathrm{Max}(R)$. Nehmen wir an, es wäre $\mathfrak{p}' \notin \mathrm{Max}(R')$. Dann gibt es ein $\mathfrak{m}' \in \mathrm{Max}(R')$ mit $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{m}'$. Zudem gilt $\mathfrak{p}' \cap R \subseteq \mathfrak{m}' \cap R \subsetneq R$, also $\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{m}' \cap R$. Dies steht in Widerspruch zu (12.9). ∎

§ Ganze Erweiterungen und Dimension

12.15 Satz. Seien R ein Ring, R' ein ganzer Erweiterungsring von R und $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R')$. Dann gilt:

$$\mathrm{h}(\mathfrak{p}' \cap R) \geq \mathrm{h}(\mathfrak{p}').$$

Beweis. Sei $\mathfrak{p}'_0 \subsetneq \mathfrak{p}'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}'_r$ eine Primidealkette in R' unterhalb $\mathfrak{p}'$. Nach (12.9) ist dann $\mathfrak{p}'_0 \cap R \subsetneq \mathfrak{p}'_1 \cap R \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}'_r \cap R$ eine Primidealkette in R unterhalb $\mathfrak{p}' \cap R$. ∎

12.16 Satz. Seien R ein Ring, R' ein ganzer Erweiterungsring von R und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ von endlicher Höhe. Dann gibt es ein $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R')$ so, dass

$$\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p} \quad \text{und} \quad \mathrm{h}(\mathfrak{p}') = \mathrm{h}(\mathfrak{p}).$$

Beweis. Sei $h := \mathrm{h}(\mathfrak{p})$. Es gibt eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_h = \mathfrak{p}$ in R. Nach (12.13)(a) gibt es eine Primidealkette $\mathfrak{p}'_0 \subsetneq \mathfrak{p}'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}'_h$ in R' so, dass $\mathfrak{p}'_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, h\}$. Setzen wir $\mathfrak{p}' := \mathfrak{p}'_h$, so folgt $\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}$ und $\mathrm{h}(\mathfrak{p}') \geq h$. Nach (12.15) gilt $\mathrm{h}(\mathfrak{p}') \leq h$. Es folgt $\mathrm{h}(\mathfrak{p}') = h$. ■

12.17 Satz. Sei R ein Ring und sei R' ein ganzer Erweiterungsring von R. Dann gilt:

$$\dim(R') = \dim(R).$$

Beweis. Unter Beachtung von (12.15) erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}\dim(R') &= \sup\{\mathrm{h}(\mathfrak{p}') \mid \mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R')\}\\ &\leq \sup\{\mathrm{h}(\mathfrak{p}' \cap R) \mid \mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R')\}\\ &\leq \sup\{\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}\\ &= \dim(R),\end{aligned}$$

also $\dim(R') \leq \dim(R)$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ eine Primidealkette in R, so gibt es nach (12.13)(a) eine Primidealkette $\mathfrak{p}'_0 \subsetneq \mathfrak{p}'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}'_r$ der selben Länge in R'. Es folgt $\dim(R') \geq \dim(R)$. ■

12.18 Lemma. Seien R ein Ring und R' ein ganzer Erweiterungsring von R. Seien $\mathfrak{a} \subseteq R$ und $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ Ideale. Dann gelten:

(a) $\mathrm{Var}(\mathfrak{a}' \cap R) = \{\mathfrak{p}' \cap R \mid \mathfrak{p}' \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a}')\}$.

(b) $\mathrm{Var}(\mathfrak{a}R' \cap R) = \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$.

Beweis. "(a)" Die Inklusion "$\supseteq$" ist sofort klar. Sei also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a}' \cap R)$. Nach (12.10) gibt es ein $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a}')$ mit $\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}$. Dies beweist die Inklusion "$\subseteq$".

"(b)" Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}R' \cap R$ gilt $\mathrm{Var}(\mathfrak{a}R' \cap R) \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$. Sei also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$. Nach (12.11) gibt es ein $\mathfrak{p}' \in \min(\mathfrak{p}R')$ mit $\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}$. Es folgt $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}R' \cap R \subseteq \mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}R' \cap R \supseteq \mathfrak{a}R' \cap R$. ■

12.19 Satz. Seien R ein Ring und R' ein ganzer Erweiterungsring von R. Seien $\mathfrak{a} \subsetneq R$ und $\mathfrak{a}' \subsetneq R'$ echte Ideale. Dann gelten:

(a) $\dim(R/(\mathfrak{a}' \cap R)) = \dim(R'/\mathfrak{a}')$.

(b) $\dim(R/\mathfrak{a}) = \dim(R'/\mathfrak{a}R')$.

Beweis. "(a)" Klar aus (12.7)(b) und (12.17).

"(b)" Gemäss (12.18)(b) gilt $\dim(R/\mathfrak{a}) = \dim(R/(\mathfrak{a}R' \cap R))$. Gemäss Aussage (a) gilt $\dim(R/(\mathfrak{a}R' \cap R)) = \dim(R'/\mathfrak{a}R')$. ■

§ Der Endlichkeitssatz für ganze Erweiterungen

12.20 Lemma. Sei R ein Ring endlicher Länge. Dann gilt:

$$\#\operatorname{Spec}(R) \leq \mathfrak{l}(R).$$

Beweis. Sei $l := \mathfrak{l}(R)$ und seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \in \operatorname{Spec}(R)$ paarweise verschieden. Nach (3.5) ist $\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Min}(R)$, denn diese Richtung von (3.5) gilt offensichtlich ohne die Voraussetzung, dass R noethersch ist. Also gilt $\mathfrak{p}_j \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$. Für jeden Index $i \in \{1, \ldots, r\}$ setzen wir $\mathfrak{a}_i := \mathfrak{p}_i \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$. Für alle $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ gilt $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$, das ist klar. Gäbe es ein $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ mit $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_{i+1}$, d.h. mit $\mathfrak{p}_i \cap (\mathfrak{p}_{i+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r) = \mathfrak{p}_{i+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$, so wäre $\mathfrak{p}_{i+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r \subseteq \mathfrak{p}_i$ (denn für beliebige Mengen ist $A \cap B = B$ äquivalent zu $B \subseteq A$). Nach (2.3) gäbe es aber ein $j \in \{i+1, \ldots, r\}$ mit $\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}_i$, im Widerspruch zum oben Gesagten. Wir erhalten so in R die Idealkette $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{a}_r = \mathfrak{p}_r \subsetneq R$ der Länge r. Es folgt $r \leq l$. ■

12.21 Lemma. Seien R ein Ring, R' ein Erweiterungsring von R und $x_1, \ldots, x_n \in R'$ so, dass $R' = \sum_{i=1}^n Rx_i$. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Dann gilt:

$$1 \leq \#\{\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R') \mid \mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}\} \leq n.$$

Beweis. Sei $F := \{\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R') \mid \mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}\}$. R' ist ein endlicher ganzer Erweiterungsring von R. Nach (12.11) ist also $F \neq \varnothing$, d.h. $\#F \geq 1$. Es bleibt zu zeigen, dass $\#F \leq n$.

Natürlich gilt $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}R' \cap R$. Nach (12.18)(b) ist aber auch $\mathfrak{p} \in \operatorname{Var}(\mathfrak{p}) = \operatorname{Var}(\mathfrak{p}R' \cap R)$, also $\mathfrak{p}R' \cap R \subseteq \mathfrak{p}$. Also gilt $\mathfrak{p}R' \cap R = \mathfrak{p}$.

Seien nun $\overline{R'} := R'/\mathfrak{p}R'$ und $\pi' : R' \to \overline{R'}$ die Restklassenabbildung. Dann ist $\overline{R'}$ ein Erweiterungsring von $\overline{R} := R/\mathfrak{p}$ und es gilt $\overline{R'} = \sum_{i=1}^n \overline{R}\overline{x}_i$.

Wir erinnern an die in (2.16)(B) definierte kanonische Bijektion $\operatorname{Var}(\mathfrak{p}R') \to \operatorname{Spec}(\overline{R'})$ gegeben durch $\mathfrak{p}' \mapsto \mathfrak{p}'/\mathfrak{p}R' = \pi'(\mathfrak{p}')$. Ist $\mathfrak{p}' \in F$, so gilt $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$, also $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'R' \in \operatorname{Var}(\mathfrak{p}R')$, und mit $\overline{\mathfrak{p}'} := \pi'(\mathfrak{p}')$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{p}'} \cap \overline{R} &= (\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}R') \cap R/\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}R') \cap (R/(\mathfrak{p}R' \cap R)) = (\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}R') \cap ((R + \mathfrak{p}R')/\mathfrak{p}R') \\ &= (\mathfrak{p}' \cap R + \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{p}R')/\mathfrak{p}R' = (\mathfrak{p} + \mathfrak{p}R')/\mathfrak{p}R' = \mathfrak{p}R'/\mathfrak{p}R' = 0.\end{aligned}$$

Mit $\overline{F} := \{\overline{\mathfrak{p}'} \in \operatorname{Spec}(\overline{R'}) \mid \overline{\mathfrak{p}'} \cap \overline{R} = 0\}$ induziert die oben erwähnte kanonische Bijektion deswegen eine Injektion $F \rightarrowtail \overline{F}$ gegeben durch $\mathfrak{p}' \mapsto \mathfrak{p}'/\mathfrak{p}R' = \pi'(\mathfrak{p}')$. Es genügt also zu zeigen, dass $\#\overline{F} \leq n$. Dazu können wir R, $\mathfrak{p}$ beziehungsweise R' durch $\overline{R}$, 0 beziehungsweise $\overline{R'}$ ersetzen (man beachte hierbei, dass $\pi'(R) = R/\mathfrak{p} \subseteq R'/\mathfrak{p}R'$ und $\pi'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}/\mathfrak{p} \subseteq R'/\mathfrak{p}R'$, wie man aus einem kommutativen Diagramm wie jenem im Beweis von (12.10) ablesen kann). Damit können wir uns auf den Fall beschränken, dass R ein Integritätsbereich ist und dass

$\mathfrak{p} = 0$. Wir müssen in dieser Situation zeigen, dass $F := \{\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R') \mid \mathfrak{p}' \cap R = 0\}$ höchstens n Elemente umfasst.

Sei $S := R \smallsetminus \{0\}$. Dann ist $K := S^{-1}R$ der Quotientenkörper von R, $S^{-1}R'$ ist ein Erweiterungsring von K, und es gilt $S^{-1}R' = \sum_{i=1}^{n} K\frac{x_i}{1}$. Wir erinnern an die in (3.12)(C) definierte kanonische Bijektion $\operatorname{Spec}_S(R') \to \operatorname{Spec}(S^{-1}R')$, $\mathfrak{p}' \mapsto \mathfrak{p}'S^{-1}R'$. Offenbar ist $\operatorname{Spec}_S(R') = F$. Es genügt also zu zeigen, dass $\#\operatorname{Spec}(S^{-1}R') \leq n$. Jedes Ideal von $S^{-1}R'$ ist natürlich insbesondere auch ein Vektorraum über dem Unterkörper $K \subseteq S^{-1}R'$. Deshalb gilt

$$\mathfrak{l}(S^{-1}R') \leq \mathfrak{l}_K(S^{-1}R') = \mathfrak{l}_K\big(\textstyle\sum_{i=1}^{n} K\frac{x_i}{1}\big).$$

Weil $\mathfrak{l}_K(\bullet)$ aber gerade die K-Vektorraumdimension ist, folgt $\mathfrak{l}(S^{-1}R') \leq n$. Mit (12.20) folgt $\#\operatorname{Spec}(S^{-1}R') \leq n$. ∎

12.22 Satz: Endlichkeitssatz für ganze Erweiterungen. Sei R ein Ring und sei R' ein endlicher ganzer Erweiterungsring von R. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ gilt:

$$1 \leq \#\{\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R') \mid \mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}\} \leq n.$$

Beweis. Klar aus (12.21) und (12.2). ∎

§ Vergleich der Spektren

12.23 Bemerkungen und Definitionen. (A) Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei Mengen X und Y heisst ***endlich***, wenn es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $\#f^{-1}(y) \leq n$ für alle $y \in Y$.

(B) Eine (stetige) Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X und Y heisst ***schwach diskret***, wenn für jeden Punkt $x \in X$ gilt $\{x\} = \overline{\{x\}} \cap f^{-1}(f(x))$, wobei $\overline{\bullet}$ für den topologischen Abschluss steht.

(C) Eine (stetige) Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X und Y heisst ***diskret***, wenn für jeden Punkt $x \in X$ und jede Menge $Z \subseteq f^{-1}(f(x))$ gilt $Z = \overline{Z} \cap f^{-1}(f(x))$.

(D) Diskrete Abbildungen zwischen topologischen Räumen sind schwach diskret. Endliche schwach diskrete Abbildungen zwischen topologischen Räumen sind diskret.

12.24 Satz. Sei R ein Ring, sei R' ein ganzer Erweiterungsring von R und sei $\iota : R \hookrightarrow R'$ die Inklusionsabbildung. Dann gelten:

(a) Die auf den Spektren induzierte Abbildung

$$\mathrm{Spec}(\iota) : \mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(R)$$

ist surjektiv, abgeschlossen und schwach diskret.

(b) Ist R' ein endlicher ganzer Erweiterungsring von R, so ist die Abbildung $\mathrm{Spec}(\iota)$ zudem endlich und diskret.

Beweis. "(a)" Die Abbildung $\mathrm{Spec}(\iota)$ ist gegeben durch $\mathfrak{p}' \mapsto \mathfrak{p}' \cap R$. Die Surjektivität dieser Abbildung folgt also aus (12.11).

Zum Nachweis der Abgeschlossenheit von $\mathrm{Spec}(\iota)$ wählen wir eine abgeschlossene Menge $Z' \subseteq \mathrm{Spec}(R')$. Mit einem geeigneten Ideal $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ können wir $Z' = \mathrm{Var}(\mathfrak{a}')$ schreiben. Nach (12.18)(a) folgt $\mathrm{Spec}(\iota)(Z') = \mathrm{Spec}(\iota)(\mathrm{Var}(\mathfrak{a}')) = \{\mathfrak{p}' \cap R \mid \mathfrak{p}' \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a}')\} = \mathrm{Var}(\mathfrak{a}' \cap R)$. Damit ist $\mathrm{Spec}(\iota)(Z')$ abgeschlossen in $\mathrm{Spec}(R)$. Dies zeigt, dass die Abbildung $\mathrm{Spec}(\iota)$ abgeschlossen ist.

Sei schliesslich $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R')$. Wir wollen zeigen, dass $\overline{\{\mathfrak{p}'\}} = \mathrm{Var}(\mathfrak{p}')$. Ist $Z' \subseteq \mathrm{Spec}(R')$ abgeschlossen mit $\mathfrak{p}' \in Z'$, so können wir ein Ideal $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ so finden, dass $Z' = \mathrm{Var}(\mathfrak{a}')$. Es folgt $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{p}'$, also $\mathrm{Var}(\mathfrak{p}') \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{a}') \subseteq Z'$. Insbesondere gilt $\mathrm{Var}(\mathfrak{p}') \subseteq \overline{\{\mathfrak{p}'\}}$. Weil $\mathrm{Var}(\mathfrak{p}')$ abgeschlossen ist und $\mathfrak{p}'$ enthält, folgt $\overline{\{\mathfrak{p}'\}} = \mathrm{Var}(\mathfrak{p}')$. Unter Beachtung von (12.9) erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
\overline{\{\mathfrak{p}'\}} \cap \mathrm{Spec}(\iota)^{-1}(\mathrm{Spec}(\iota)(\mathfrak{p}')) &= \mathrm{Var}(\mathfrak{p}') \cap \mathrm{Spec}(\iota)^{-1}(\mathfrak{p}' \cap R) \\
&= \mathrm{Var}(\mathfrak{p}') \cap \{\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(R') \mid \mathfrak{q}' \cap R = \mathfrak{p}' \cap R\} \\
&= \{\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(R') \mid \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{q}' \text{ und } \mathfrak{q}' \cap R = \mathfrak{p}' \cap R\} \\
&= \{\mathfrak{p}'\}.
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathrm{Spec}(\iota)$ schwach diskret.

"(b)" Die Endlichkeit von $\mathrm{Spec}(\iota)$ folgt aus (12.22). Weil gemäss (a) die Abbildung $\mathrm{Spec}(\iota)$ schwach diskret ist, ist sie natürlich auch diskret, vgl. (12.23)(D). ∎

§ Ganzheit über normalen Ringen

12.25 Bemerkungen und Definitionen. (A) Sei R ein Ring, sei R' ein Erweiterungsring von R und sei X eine Unbestimmte. Sei $f \in R[X]$ ein unitäres Polynom. Wir fassen $R[X]$ in natürlicher Weise als Unterring von $R'[X]$ auf. Dann gilt

(a) $$fR'[X] \cap R[X] = fR[X].$$

Ist nämlich $u \in fR'[X] \cap R[X]$, so finden wir ein Polynom $q' \in R'[X]$ mit $u = fq'$ und Polynome $q, r \in R[X]$ mit $u = fq + r$ und $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(f)$. Es folgt $fq' = fq + r$, also $r = fq' - fq = f(q' - q)$, d.h. $\mathrm{Grad}(f \cdot (q' - q)) = \mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(f)$. Weil f

unitär ist, folgt $q' - q = 0$, also $q' = q$, d.h. $u = fq \in fR[X]$. Damit ist die Inklusion "$\subseteq$" bewiesen. Die Inklusion "$\supseteq$" ist direkt klar.

(B) Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{a} \subseteq K[X]$ ein von 0 verschiedenes Ideal. Wir wählen ein Polynom von minimalem Grad in $\mathfrak{a} \smallsetminus \{0\}$ mit Leitkoeffizienten 1. Ist $g \in \mathfrak{a} \smallsetminus \{0\}$ ein weiteres Polynom von minimalem Grad und mit Leitkoeffizient 1, so gilt $f - g \in \mathfrak{a}$ und $\mathrm{Grad}(f - g) < \mathrm{Grad}(f)$, also $f - g = 0$. Deshalb ist f eindeutig bestimmt. Man nennt f das ***Minimalpolynom*** von $\mathfrak{a}$. Aus (11.2) folgt sofort, dass $\mathfrak{a} = fK[X]$.

(C) Sei R' ein Erweiterungsring von K und sei $x \in R'$. Sei $\Phi_x : K[X] \to R'$ der durch $X \mapsto x$ definierte Einsetzungshomomorphismus. Ist Φ_x injektiv, so heisst x ***transzendent*** über K. Andernfalls heisst x ***algebraisch*** über K. Somit ist x genau dann algebraisch über K, wenn $\mathrm{Ker}(\Phi_x) \neq 0$, also genau dann, wenn es ein Polynom $g \in K[X] \smallsetminus \{0\}$ so gibt, dass $g(x) = 0$. Weil K ein Körper ist, können wir ein solches g mit Leitkoeffizient 1 wählen. Also können wir sagen:

(b) $$x \text{ algebraisch über } K \iff x \text{ ganz über } K.$$

Ist x algebraisch über K, so nennt man das Minimalpolynom des Ideals $\mathrm{Ker}(\Phi_x) \subseteq K[X]$ das ***Minimalpolynom von x über*** K. Gemäss Teil (A) ist das Minimalpolynom f von x über K das Polynom kleinsten Grades $f \in K[X]$ mit Leitkoeffizient 1 so, dass $f(x) = 0$. Es gilt aber auch $\mathrm{Ker}(\Phi_x) = fK[X]$. Anders gesagt:

(c) $$\text{Ist } g \in K[X] \text{ mit } g(x) = 0, \text{ so gilt } f \mid g.$$

Weiter induziert Φ_x einen Isomorphismus von K-Algebren

(d) $$K[X]/(f) \xrightarrow{\cong} K[x],\ X + (f) \mapsto x.$$

(D) Sei $f \in K[X] \smallsetminus \{0\}$. Ein Erweiterungskörper K' von K heisst ein ***Zerfällungskörper von f über*** K, wenn f in $K'[X]$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. wenn es Elemente $a \in K \smallsetminus \{0\}$ und $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n \in K'$ so gibt, dass

$$f = a(X - \lambda'_1)(X - \lambda'_2) \cdots (X - \lambda'_n).$$

Aus der Algebra wissen wir, dass jedes Polynom $f \in K[X] \smallsetminus \{0\}$ einen solchen Zerfällungskörper besitzt.

12.26 Lemma. Sei R ein Ring und sei R' ein ganzer Erweiterungsring von R. Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und sei $x \in \mathfrak{a}R'$. Dann genügt x einer ganzen Gleichung der Form

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

mit $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathfrak{a}$.

Beweis. Mit geeigneten Elementen $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{a}$ und $y_1, \ldots, y_n \in R'$ können wir schreiben $x = \sum_{i=1}^n b_i y_i$. Wir setzen $R'' := R[y_1, \ldots, y_n, x]$. Dann ist R'' ein endlicher ganzer Erweiterungsring von R und es gilt $x \in \mathfrak{a}R''$, also $xR'' \subseteq \mathfrak{a}R''$. Insbesondere ist R'' ein endlich erzeugter R-Modul. Wir finden also ein $m \in \mathbb{N}$ und Elemente $t_1, \ldots, t_m \in R''$ so, dass $R'' = \sum_{i=1}^m Rt_i$ gilt. Insbesondere gilt nun $xt_i \in \mathfrak{a}R'' = \sum_{j=1}^m \mathfrak{a}t_j$ für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$. Mit geeigneten Elementen $c_{ij} \in \mathfrak{a}$ können wir also schreiben $xt_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}t_j$ für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Wir betrachten nun die Matrix $C := [c_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq m] \in \mathfrak{a}^{m \times m}$ und erhalten die Gleichung

$$(C - xI_m) \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei $I_m \in R'^{m \times m}$ die Einheitsmatrix ist. Nach dem Satz von Kramer (3.24) folgt, dass $\det(C - xI_m)t_i = 0$ für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$, also $\det(C - xI_m)R'' = 0$ und damit schliesslich $\det(C - xI_m) = 0$. Wegen $c_{ij} \in \mathfrak{a}$ gilt aber $\det(C - xI_m) = (-1)^m(x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0)$ mit geeigneten Elementen $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathfrak{a}$. ■

12.27 Satz. Seien R ein normaler Ring, K' ein Erweiterungskörper von $K := \operatorname{Quot}(R)$ und R' der ganze Abschluss von R in K'. Seien $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $x \in \mathfrak{a}R'$. Dann ist $x \in K'$ algebraisch über K und, wenn

$$f = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0 \in K[X]$$

das Minimalpolynom von x über K ist, dann gilt

$$c_i \in \sqrt{\mathfrak{a}}$$

für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Beweis. Trivialerweise ist x algebraisch über K. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K' und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ so, dass $f = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$. Sei $\overline{R}$ der ganze Abschluss von R in L. Dann gilt $R' \subseteq \overline{R}$.

Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Var}(\mathfrak{a})$. Wegen $x \in \mathfrak{a}R' \subseteq \mathfrak{p}R'$ gibt es nach (12.26) ein Polynom

$$h := X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_0 \in R[X] \subseteq K[X]$$

mit $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathfrak{p}$ so, dass $h(x) = 0$. Weil f das Minimalpolynom von x über K ist, folgt $h \in fK[X]$. Wir finden also ein $g \in K[X]$ mit $h = fg$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $h(\lambda_i) = f(\lambda_i)g(\lambda_i) = 0$, weswegen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ganz über R sind. Damit gilt $R'' := R[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \subseteq \overline{R}$, und insbesondere ist R'' ein ganzer Erweiterungsring von R.

Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ folgt aus der obigen Gleichung $h(\lambda_i) = 0$ auch, dass $\lambda_i'^m = -a_{m-1}\lambda_i'^{m-1} - \cdots - a_0 \in \mathfrak{p}R''$. Nach (12.11) gibt es ein $\mathfrak{p}'' \in \operatorname{Spec}(R'')$ mit $\mathfrak{p}'' \cap R = \mathfrak{p}$, denn R'' ist ja ganz über R. Es folgt $\mathfrak{p}R'' \subseteq \mathfrak{p}''$, also $\lambda_i^m \in \mathfrak{p}''$ und somit $\lambda_i \in \mathfrak{p}''$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Durch Koeffizientenvergleich folgt aus $X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0 = f = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$, dass $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathfrak{p}'' \subseteq R''$. Insbesondere sind $c_0, \ldots, c_{n-1} \in K$ ganz über R und, weil R normal ist, folgt $c_0, \ldots, c_{n-1} \in R$. Damit erhalten wir schliesslich $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathfrak{p}'' \cap R = \mathfrak{p}$. Daraus folgt nun $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Var}(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. ■

§ Das Going-Down-Lemma

12.28 Satz. Sei R ein normaler Ring, sei R' ein integrer ganzer Erweiterungsring von R und seien $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ und $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec}(R')$ mit

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}' \cap R.$$

Dann gibt es ein $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R')$ so, dass

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{q}'.$$

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$S' := \{st \mid s \in R \setminus \mathfrak{p},\ t \in R' \setminus \mathfrak{q}'\}.$$

Weil die Mengen $R \setminus \mathfrak{p}$ und $R' \setminus \mathfrak{q}'$ abgeschlossen sind unter Multiplikation, ist auch S' abgeschlossen unter Multiplikation. Wir wollen zuerst zeigen, dass $S' \cap \mathfrak{p}R' = \varnothing$.

Nehmen wir das Gegenteil an! Dann gibt es ein $x \in S' \cap \mathfrak{p}R'$. Weil R' integer ist, gilt $0 \notin S'$, also $x \neq 0$.

Seien K' der Quotientenkörper von R', $K \subseteq K'$ der Quotientenkörper von R und $\overline{R}$ der ganze Abschluss von R in K'. Dann ist $R' \subseteq \overline{R}$ und wegen $x \in \mathfrak{p}R'$ folgt auch $x \in \mathfrak{p}\overline{R}$. Sei nun $f = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0 \in K[X]$ das Minimalpolynom von x über K. Nach (12.27) folgt $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Mit geeigneten Elementen $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ und $t \in R' \setminus \mathfrak{q}'$ können wir auch $x = st$ schreiben.

Sei $g := X^n + \frac{c_{n-1}}{s}X^{n-1} + \cdots + \frac{c_0}{s^n} \in K[X]$ und sei $h := X^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_0 \in K[X]$ das Minimalpolynom von t über K. Wenn wir (12.27) mit t anstelle von x und R anstelle von $\mathfrak{a}$ anwenden, so erhalten wir $b_0, b_1, \ldots, b_m \in R$. Offenbar ist aber auch $g(t) = \frac{1}{s^n}f(st) = \frac{1}{s^n}f(x) = 0$. Deshalb gilt $h \mid g$, also $m \leq n$.

Sei $k := X^m + sb_{m-1}X^{m-1} + \ldots + s^m b_0$. Dann gilt $k(x) = x^m + sb_{m-1}x^{m-1} + \cdots + s^m b_0 = s^m h(t) = 0$. Es folgt $f \mid k$, also $n \leq m$. Damit ist $m = n$, und g ist bereits das Minimalpolynom von t über K. Dies bedeutet, dass $g = h$, also, dass $\frac{c_i}{s^{n-i}} = b_i \in R$ für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Daraus folgt wegen $c_i \in \mathfrak{p}$ und $s \in R \setminus \mathfrak{p}$, dass $b_i \in \mathfrak{p}$ für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. So folgt aus $t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_0 = 0$, dass $t^n \in \mathfrak{p}R' \subseteq (\mathfrak{q}' \cap R)R' \subseteq \mathfrak{q}'$, also der Widerspruch $t \in \mathfrak{q}'$.

Es gilt also $S' \cap \mathfrak{p}R' = \varnothing$. Damit hat die Menge

$$\mathbb{I}_{S'}(\mathfrak{p}R') := \{\mathfrak{b}' \subseteq R' \text{ Ideal} \mid \mathfrak{p}R' \subseteq \mathfrak{b}' \subseteq R' \setminus S'\}$$

ein bezüglich der Inklusion maximales Mitglied $\mathfrak{p}'$, welches zudem zu $\operatorname{Spec}(R')$ gehört, vgl. (2.25). Wegen $\mathfrak{p}' \subseteq R' \setminus S' \subseteq R' \setminus (R' \setminus \mathfrak{q}') = \mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}R' \cap R \subseteq \mathfrak{p}' \cap R \subseteq (R' \setminus S') \cap R = R \setminus S' \subseteq R \setminus (R \setminus \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{p}'$ das Erwünschte. ■

12.29 Korollar: Going-Down-Lemma. Sei R ein normaler Ring, sei R' ein integrer ganzer Erweiterungsring von R, sei

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$$

eine Primidealkette in R und sei $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R')$ mit

$$\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}_r.$$

Dann gibt es eine Primidealkette

$$\mathfrak{p}'_0 \subsetneq \mathfrak{p}'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}'_r$$

in R' so, dass

$$\mathfrak{p}'_r = \mathfrak{p}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}'_i \cap R = \mathfrak{p}_i$$

für alle $i \in \{0, \dots, r\}$.

Beweis. Folgt leicht durch Induktion über r aus (12.28). ■

12.30 Korollar. Seien R ein normaler Ring und R' ein integrer ganzer Erweiterungsring von R. Seien $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ und $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R')$. Dann gelten:

(a) $\operatorname{h}(\mathfrak{p}') = \operatorname{h}(\mathfrak{p}' \cap R)$.

(b) $\mathfrak{p}' \in \min(\mathfrak{p}R') \iff \mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}$.

Beweis. "(a)" Folgt leicht aus (12.29) und (12.15).

"(b)" Es gelte $\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}$. Dann gilt $\mathfrak{p}' \supseteq (\mathfrak{p}' \cap R)R' = \mathfrak{p}R'$. Ist $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec}(R')$ mit $\mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{q}' \supseteq \mathfrak{p}R'$, so folgt $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}'$ wie im Beweis von (12.11). Dies zeigt die Implikation "$\Leftarrow$".

Wir zeigen jetzt die Implikation "$\Rightarrow$". Sei $\mathfrak{p}' \in \min(\mathfrak{p}R')$. Dann gilt $\mathfrak{p}' \cap R \supseteq \mathfrak{p}R' \cap R \supseteq \mathfrak{p}$. Nach (12.28) gibt es ein $\mathfrak{p}'' \in \operatorname{Spec}(R')$ so, dass $\mathfrak{p}'' \subseteq \mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}'' \cap R = \mathfrak{p}$. Damit gilt auch $\mathfrak{p}R' \subseteq \mathfrak{p}''$. Wegen $\mathfrak{p}' \in \min(\mathfrak{p}R')$ folgt dann $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}'$, also $\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}'' \cap R = \mathfrak{p}$. ■

§ Ganze Erweiterungen von Körpern

12.31 Bemerkungen und Definitionen. (A) Sei K ein Körper und sei R' ein Erweiterungsring von K. Sei $x \in R'$. Wir haben bereits bemerkt, dass x genau dann algebraisch über K ist, wenn x ganz über K ist, vgl. (12.25)(C)(b). Über einen Körper sind also die Begriffe "ganz" und "algebraisch" synonym.

(B) Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen von (A). Entsprechend dem eben Festgestellten sagen wir, R sei ***algebraisch über*** K, wenn R ganz über K ist, also wenn jedes Element $y \in R$ algebraisch über K ist. Genauso sprechen wir nun vom algebraischen Abschluss von K in R anstelle vom ganzen Abschluss von K in R.

12.32 Satz. Sei K ein Körper und sei R' ein integrer ganzer Erweiterungsring von K. Dann ist R' ein Körper.

Beweis. Weil R' ein Integritätsbereich ist, gilt $0 \in \mathrm{Spec}(R')$. Weil K ein Körper ist, gilt $\mathfrak{p}' \cap K = 0$ für alle $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R')$. Nach (12.9) folgt $\mathfrak{p}' = 0$, also $\mathrm{Spec}(R') = \{0\}$. Somit ist R' ein Körper. ■

12.33 Korollar. Sei R ein Integritätsbereich und sei R' ein integrer ganzer Erweiterungsring von R. Dann ist $(R \smallsetminus 0)^{-1}R'$ ein Körper. Genauer gilt:

$$(R \smallsetminus 0)^{-1}R' = \mathrm{Quot}(R').$$

Beweis. Es gilt $R' \subseteq (R \smallsetminus 0)^{-1}R' \subseteq (R' \smallsetminus 0)^{-1}R' = \mathrm{Quot}(R')$. Insbesondere ist $(R \smallsetminus 0)^{-1}R'$ ein Integritätsbereich. Wir wissen auch, dass $(R \smallsetminus 0)^{-1}R'$ ganz über $(R \smallsetminus 0)^{-1}R = \mathrm{Quot}(R)$ ist, vgl. (11.10). Nach (12.32) ist $(R \smallsetminus 0)^{-1}R'$ ein Körper, also $(R \smallsetminus 0)^{-1}R' \supseteq \mathrm{Quot}(R')$. ■

Kapitel 13

Algebren über Körpern

§ Algebraische Unabhängigkeit

13.1 Notation. Im folgenden seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $X_1, \ldots, X_n$ Unbestimmte.

13.2 Bemerkungen und Definitionen. (A) Sei R ein Erweiterungsring des Körpers K und seien $x_1, \ldots, x_n \in R$. Wir sagen, die Familie $(x_1, \ldots, x_n) := (x_i)_{i=1}^n$ sei ***algebraisch unabhängig über*** K, wenn der durch $X_i \mapsto x_i$ definierte Einsetzungshomomorphismus

$$\Phi_{x_1,\ldots,x_n} : K[X_1, \ldots, X_n] \to R$$

injektiv ist. Gleichbedeutend ist, dass für jedes Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n] \smallsetminus \{0\}$ gilt $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Ist der Einsetzungshomomorphismus $\Phi_{x_1,\ldots,x_n}$ nicht injektiv, so sagen wir, die Familie $(x_1, \ldots, x_n)$ sei ***algebraisch über*** K. In diesem Fall gibt es ein Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n] \smallsetminus \{0\}$ so, dass $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

(B) In den Notationen von (A) sagen wir missbräuchlich, die Elemente $x_1, \ldots, x_n$ seien algebraisch unabhängig bzw. algebraisch über K, falls die Familie $(x_1, \ldots, x_n)$ die entsprechende Eigenschaft hat. Zu beachten ist dies in den Fällen mit $n = 0$ oder $n = 1$. Die leere Familie ist algebraisch unabhängig. Ist $n = 1$, so stimmen diese beiden Begriffe mit "transzendent über K" bzw. "algebraisch über K" gemäss (12.25)(C) überein.

(C) Leicht prüft man folgendes nach:

(a) Sind $x_1, \ldots, x_n$ algebraisch unabhängig über K und ist $\sigma \in \mathbb{S}_n$ eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$, so sind auch $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ algebraisch unabhängig über K.

(b) Sind $x_1, \ldots, x_n$ algebraisch unabhängig über K und ist $m \in \{0, \ldots, n\}$, so sind auch $x_1, \ldots, x_m$ algebraisch unabhängig über K.

13.3 Notationen und Bemerkungen. (A) Sei L ein Erweiterungskörper von K und sei $\mathcal{M} \subseteq L$. Wir schreiben $K(\mathcal{M})$ für den kleinsten Unterkörper von L, der sowohl K als auch $\mathcal{M}$ umfasst. Wir nennen $K(\mathcal{M})$ den ***über*** K ***durch*** $\mathcal{M}$ ***erzeugten Unterkörper von*** L. Offenbar gilt

$$\bigcap_{\substack{M \subseteq L \text{ Unterkörper} \\ K, \mathcal{M} \subseteq M}} M \;=\; K(\mathcal{M}) \;=\; \mathrm{Quot}(K[\mathcal{M}]).$$

Sind $x_1, \ldots, x_n \in L$ so setzen wir

$$K(x_1, \ldots, x_n) := K(\{x_1, \ldots, x_n\}).$$

(B) In $\mathrm{Quot}(K[X_1, \ldots, X_n])$ können wir den Unterkörper $K(X_1, \ldots, X_n)$ betrachten und erhalten

$$K(X_1, \ldots, X_n) = \mathrm{Quot}(K[X_1, \ldots, X_n]).$$

Wir nennen $K(X_1, \ldots, X_n)$ den ***rationalen Funktionenkörper über*** K ***in den Unbestimmten*** $X_1, \ldots, X_n$.

(C) Es gelten die Bezeichnungen von (A). Sind $x_1, \ldots, x_n \in L$ algebraisch (also ganz) über K, so ist $K[x_1, \ldots, x_n]$ gemäss (12.1) ein ganzer (also algebraischer) Erweiterungsring von K. Nach (12.32) ist $K[x_1, \ldots, x_n]$ zudem ein Körper, d.h. es gilt $K(x_1, \ldots, x_n) = K[x_1, \ldots, x_n]$. Wir können also zusammenfassen:

(a) Sind $x_1, \ldots, x_n \in L$ algebraisch über K, so gilt

$$K(x_1, \ldots, x_n) = K[x_1, \ldots, x_n],$$

und der Körper $K(x_1, \ldots, x_n)$ ist algebraisch über K.

Vermöge der Transitivität der Ganzheit, vgl. (12.4), folgt damit insbesondere:

(b) Sind $x_1, \ldots, x_n$ algebraisch über K und ist $y \in L$ algebraisch über $K(x_1, \ldots, x_n)$, so ist y algebraisch über K.

13.4 Lemma. Sei L ein Erweiterungskörper von K, seien $x_1, \ldots, x_n \in L$ algebraisch unabhängig über K und sei $y \in L$. Dann sind äquivalent:

(i) $x_1, \ldots, x_n, y$ sind algebraisch unabhängig über K.

(ii) y ist transzendent über $K(x_1, \ldots, x_n)$.

Beweis. Sei Y eine weitere Unbestimmte. Wir betrachten die drei Einsetzungshomomorphismen

$$\Phi_{\underline{x},y} : K[X_1, \ldots, X_n, Y] \to L, \quad X_1 \mapsto x_1, \ \ldots, \ X_n \mapsto x_n, \ Y \mapsto y;$$
$$\Phi_{\underline{x}} : K[X_1, \ldots, X_n] \to L, \quad X_1 \mapsto x_1, \ \ldots, \ X_n \mapsto x_n;$$
$$\Phi_y : K(x_1, \ldots, x_n)[Y] \to L, \quad Y \mapsto y.$$

"(i) $\Rightarrow$ (ii)" Seien $x_1, \ldots, x_n, y$ algebraisch unabhängig über K. Dann ist $\Phi_{\underline{x},y}$ injektiv. Sei $f \in \mathrm{Ker}(\Phi_y)$. Wir müssen zeigen, dass $f = 0$. Wir schreiben $f = \sum_{i=0}^{d} q_i Y^i$, wobei $q_0, \ldots, q_d \in K(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Quot}(K[x_1, \ldots, x_n])$. Mit geeigneten Elementen $p_0, \ldots, p_d \in K[x_1, \ldots, x_n]$ und $s \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ können wir für jedes $i \in \{0, \ldots, d\}$ auch $q_i = \frac{p_i}{s}$ schreiben. Wir finden Polynome $P_0, \ldots, P_d \in K[X_1, \ldots, X_n]$ so, dass $\Phi_{\underline{x}}(P_i) = p_i$ für jedes $i \in \{0, \ldots, d\}$. Wir setzen $F := \sum_{i=0}^{d} P_i Y^i \in K[X_1, \ldots, X_n, Y]$. Es folgt

$$\begin{aligned}\Phi_{\underline{x},y}(F) &= \textstyle\sum_{i=0}^{d} P_i(x_1, \ldots, x_d) y^i = \sum_{i=0}^{d} \Phi_{\underline{x}}(P_i) y^i \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{d} p_i y^i = \sum_{i=0}^{d} s q_i y^i = s \sum_{i=0}^{d} q_i y^i = s\Phi_y(f) = 0,\end{aligned}$$

also $F = 0$. Es folgt $P_i = 0$, also $p_i = \Phi_{\underline{x}}(P_i) = 0$ und damit $q_i = 0$ für alle $i \in \{0, \ldots, d\}$, also schliesslich $f = 0$.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei y transzendent über $K(x_1, \ldots, x_n)$, d.h. Φ_y injektiv. Sei $F \in \mathrm{Ker}(\Phi_{\underline{x},y})$. Wir müssen zeigen, dass $F = 0$. Wir können $F = \sum_{i=0}^{d} P_i Y^i$ mit $P_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$ für $i \in \{0, \ldots, d\}$ schreiben. Es folgt

$$\begin{aligned}\Phi_y\big(\textstyle\sum_{i=0}^{d} \Phi_{\underline{x}}(P_i) Y^i\big) &= \textstyle\sum_{i=0}^{d} \Phi_{\underline{x}}(P_i) y^i = \sum_{i=0}^{d} P_i(x_1, \ldots, x_n) y^i \\ &= F(x_1, \ldots, x_n, y) = \Phi_{\underline{x},y}(F) = 0,\end{aligned}$$

also $\sum_{i=0}^{d} \Phi_{\underline{x}}(P_i) Y^i = 0$, d.h. $\Phi_{\underline{x}}(P_i) = 0$ für alle $i \in \{0, \ldots, d\}$. Nach Voraussetzung ist $\Phi_{\underline{x}}$ injektiv. Es folgt $P_0 = P_1 = \cdots = P_d = 0$, also $F = 0$. ■

13.5 Lemma. Sei L ein Erweiterungskörper von K, seien $x_1, \ldots, x_n \in L$ algebraisch unabhängig über K, sei $m \in \mathbb{N}_0$ und seien $y_1, \ldots, y_m \in L$. Dann sind äquivalent:

(i) $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ sind algebraisch unabhängig über K.

(ii) $y_1, \ldots, y_m$ sind algebraisch unabhängig über $K(x_1, \ldots, x_n)$.

Beweis. Wir machen Induktion nach m. Der Fall mit $m = 0$ ist trivial. Der Fall mit $m = 1$ ist nach (13.4) klar. Sei also $m > 1$.

"(i) $\Rightarrow$(ii)" Seien $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ algebraisch unabhängig über K. Nach (13.4) ist y_m transzendent über $K(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1})$ und nach Induktion sind $y_1, \ldots, y_{m-1}$ algebraisch unabhängig über $M := K(x_1, \ldots, x_n)$. Wendet man (13.4) mit M anstelle von K an, so sieht man, dass $y_1, \ldots, y_m$ algebraisch unabhängig über $K(x_1, \ldots, x_n)$ sind.

"(ii) $\Rightarrow$(i)" Seien $y_1, \ldots, y_m$ algebraisch unabhängig über $M := K(x_1, \ldots, x_n)$. Nach (13.2)(C)(b) sind $y_1, \ldots, y_{m-1}$ algebraisch unabhängig über M. Nach (13.4) ist y_m transzendent über $M(y_1, \ldots, y_{m-1}) = K(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1})$, und nach Induktionsvoraussetzung sind $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}$ algebraisch unabhängig über K. Wieder mit (13.4) folgt, dass $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ algebraisch unabhängig über K sind. ■

13.6 Lemma. Sei L ein Erweiterungskörper von K, sei $n \in \mathbb{N}_0$, seien $x_0, \ldots, x_n \in L$ algebraisch unabhängig über K und sei $y \in L$ transzendent über K. Dann gibt es einen Index $i \in \{0, \ldots, n\}$ so, dass $y, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ über K algebraisch unabhängig sind.

Beweis. Durch Induktion über n. Der Fall mit $n = 0$ ist klar. Sei $n > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ so, dass $y, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}$ über K algebraisch unabhängig sind. Sind $y, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}$ algebraisch unabhängig über K, so sind wir fertig. Sind $y, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ algebraisch unabhängig über K, so sind wir ebenfalls fertig.

Wir nehmen deshalb an, dass sowohl die Elemente $y, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}$ als auch die Elemente $y, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ über K algebraisch abhängig seien. Weil

$x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}$ über K algebraisch unabhängig sind, folgt aus (13.4) und der Vertauschungsaussage (13.2)(C)(a), dass y algebraisch über $M := K(x_0, \dots, x_{n-1})$ ist.

Weil $y, x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}$ algebraisch unabhängig über K sind, folgt mit (13.4) aus der zweiten Annahme, dass x_n über $K(y, x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \subseteq M(y)$ algebraisch ist, also auch über $M(y)$. Damit ist x_n nach (13.3)(C)(b) sogar über M algebraisch. Weil $x_0, \dots, x_{n-1}, x_n$ algebraisch unabhängig über K sind, widerspricht dies (13.4). Die beiden getroffenen Annahmen können also nicht gleichzeitig gelten, und wir sind fertig. ■

13.7 Satz: Austauschsatz für algebraisch unabhängige Familien. Sei L ein Erweiterungskörper von K. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$. Seien $x_1, \dots, x_n \in L$ algebraisch unabhängig über K und seien $y_1, \dots, y_m \in L$ algebraisch unabhängig über K. Dann gibt es Indizes $i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}$ so, dass $y_1, \dots, y_m, x_{i_{m+1}}, x_{i_{m+2}}, \dots, x_{i_n}$ über K algebraisch unabhängig sind.

Beweis. Durch Induktion nach m. Der Fall mit $m = 0$ ist offensichtlich. Der Fall mit $m = 1$ ist klar nach (13.6). Sei also $m > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung und wegen (13.2)(C)(b) gibt es Indizes $j_m, j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \in \{1, \dots, n\}$ so, dass $y_1, \dots, y_{m-1}, x_{j_m}, x_{j_{m+1}}, \dots, x_{j_n}$ über K algebraisch unabhängig sind. Nach (13.5) sind $x_{j_m}, x_{j_{m+1}}, \dots, x_{j_n}$ also algebraisch unabhängig über $N := K(y_1, \dots, y_{m-1})$. Nach (13.4) ist y_m transzendent über N. Nach (13.6) gibt es also einen Index $k \in \{m, \dots, n\}$ so, dass $y_m, x_{j_m}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_n}$ algebraisch unabhängig über N sind. Wir setzen $\{i_{m+1}, \dots, i_n\} := \{j_m, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n\}$. Damit sind $y_m, x_{i_{m+1}}, \dots, x_{i_n}$ algebraisch unabhängig über $N = K(y_1, \dots, y_{m-1})$. Nach (13.5) folgt die Behauptung. ■

§ Transzendenzgrad und Transzendenzbasen

13.8 Definition. Sei L ein Erweiterungskörper von K. Wir definieren den ***Transzendenzgrad*** $\operatorname{trdeg}_K(L)$ ***von*** L ***über*** K als das Supremum der Längen aller endlichen Folgen $(x_1, \dots, x_n)$ in L, welche über K algebraisch unabhängig sind:

$$\operatorname{trdeg}_K(L) := \sup\Big\{n \in \mathbb{N}_0 \;\Big|\; \exists\, x_1, \dots, x_n \in L : (x_i)_{i=1}^n \text{ ist algebraisch unabhängig über } K\Big\}.$$

13.9 Beispiel. Der Transzendenzgrad von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ ist unendlich.

13.10 Bemerkungen. (A) In den obigen Bezeichnungen ist klar, dass $\operatorname{trdeg}_K(L) = 0$ genau dann gilt, wenn L algebraisch über K ist.

(B) Leicht sieht man:

(a) $\operatorname{trdeg}_K(K(X_1, \dots, X_n)) = n$.

(b) Sind $K \subseteq L \subseteq M$ Körper und ist M algebraisch über L, so gilt

$$\operatorname{trdeg}_K(M) = \operatorname{trdeg}_K(L).$$

13.11 Bemerkung und Definition. Sei L ein Erweiterungskörper von K. Eine endliche Familie $(x_i)_{i=1}^n$ von Elementen aus L heisst eine ***(endliche) Transzendenzbasis von*** L ***über*** K, wenn die folgenden zwei Aussagen gelten:

(a) $x_1, \dots, x_n$ sind über K algebraisch unabhängig;

(b) $x_1, \dots, x_n, y$ sind für alle $y \in L$ über K algebraisch abhängig.

Nach (13.4) kann man die Bedingung (b) ersetzen durch:

(b′) L ist algebraisch über $K(x_1, \dots, x_n)$.

13.12 Satz. Sei L ein Erweiterungskörper von K. Ist $(x_1, \dots, x_n)$ eine Transzendenzbasis von L über K, so gilt

$$\operatorname{trdeg}_K(L) = n.$$

Insbesondere bestehen alle Transzendenzbasen von L über K aus genau n Elementen.

Beweis. Einfach aus (13.7). ∎

13.13 Satz. Sei L ein Erweiterungskörper von K und seien $a_1, \dots, a_n \in L$ derart, dass $L = K(a_1, \dots, a_n)$. Dann gibt es $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ so, dass $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ eine Transzendenzbasis von L über K bilden. Insbesondere gilt:

$$\operatorname{trdeg}_K(L) \leq n.$$

Beweis. Wir finden natürlich eine (eventuell leere) Menge $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ so, dass $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ über K algebraisch unabhängig und $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}, a_j$ für jeden Index $j \in \mathbb{J} := \{1, \dots, n\} \smallsetminus \{i_1, \dots, i_m\}$ über K algebraisch abhängig sind.

Sei $M := K(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$. Dann gilt $L = M(\{a_j \mid j \in \mathbb{J}\})$. Nach (13.4) ist a_j für jedes $j \in \mathbb{J}$ algebraisch über dem Körper M. Damit ist L gemäss (13.3)(C)(b) algebraisch über M, d.h. jedes Element $y \in L$ ist algebraisch über M. Nach (13.4) folgt, dass $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}, y$ für jedes $y \in L$ algebraisch abhängig sind. Also bilden $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ eine Transzendenzbasis von L über K. ∎

§ Das Normalisationslemma

13.14 Lemma. Seien R ein integrer Erweiterungsring von K, $r := \operatorname{trdeg}_K(\operatorname{Quot}(R)) < \infty$ und $x_1, \dots, x_r \in R$ so, dass R ganz über $K[x_1, \dots, x_r]$ ist. Dann sind $x_1, \dots, x_r$ algebraisch unabhängig über K.

Beweis. Nach (11.10) ist $K(x_1, \dots, x_r) \subseteq \operatorname{Quot}(R)$ eine ganze Ringerweiterung. Somit ist $\operatorname{Quot}(R)$ algebraisch über $K(x_1, \dots, x_r)$. Nach (13.10)(B)(b) gilt deshalb

$$\operatorname{trdeg}_K(K(x_1, \dots, x_r)) = \operatorname{trdeg}_K(\operatorname{Quot}(R)) = r.$$

Nach (13.12) und (13.13) gibt es also eine Teilfolge der Länge r von $(x_i)_{i=1}^n$, die eine Transzendenzbasis von $K(x_1, \dots, x_r)$ über K ist. Folglich ist $(x_i)_{i=1}^r$ eine Transzendenzbasis von $K(x_1, \dots, x_r)$ über K, also insbesondere algebraisch unabhängig über K. ∎

13.15 Lemma. Seien R ein Ring und R' ein Erweiterungsring von R. Weiter seien $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \overline{\mathcal{M}} \subseteq R'$ so, dass $R[\mathcal{M}_1] \subseteq R[\overline{\mathcal{M}}]$ und $R[\mathcal{M}_0 \cup \overline{\mathcal{M}}] \subseteq R'$ (endliche) ganze Ringerweiterungen sind. Dann ist R' (endlich) ganz über $R[\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1]$.

Beweis. Leicht sieht man, dass $R[\mathcal{M}_0 \cup \overline{\mathcal{M}}]$ (endlich) ganz über $R[\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1]$ ist. Aus (12.3) und (12.4) folgt die Behauptung. ■

13.16 Lemma. Seien R ein Ring, R' ein Erweiterungsring von R und $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ ein Ideal. Seien $k, l, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq l \leq n$ und seien $x_1, \ldots, x_n \in R'$ so, dass

$$x_1, \ldots, x_l \in \mathfrak{a}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}' \cap R[x_{k+1}, \ldots, x_n] = \sum_{i=k+1}^{l} x_i R[x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

Dann gilt:

$$\mathfrak{a}' \cap R[x_1, \ldots, x_n] = \sum_{i=1}^{l} x_i R[x_1, \ldots, x_n].$$

Beweis. "$\supseteq$" Klar wegen $x_1, \ldots, x_l \in \mathfrak{a}'$.

"$\subseteq$" Sei $g \in \mathfrak{a}' \cap R[x_1, \ldots, x_n]$. Wir können g in der Form $g = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}_0^k} g_{\underline{\nu}} x_1^{\nu_1} \cdots x_k^{\nu_k}$ mit $g_{\underline{\nu}} \in R[x_{k+1}, \ldots, x_n]$ für $\underline{\nu} \in \mathbb{N}_0^k$ schreiben, wobei die Elemente $g_{\underline{\nu}}$ fast alle 0 sind. Wegen $g_{\underline{0}} \in R[x_{k+1}, \ldots, x_n]$, $g \in \mathfrak{a}'$ und $h := \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}_0^k \setminus \{\underline{0}\}} g_{\underline{\nu}} x_1^{\nu_1} \cdots x_k^{\nu_k} \in \mathfrak{a}'$ gilt also $g_{\underline{0}} = g - h \in \mathfrak{a}' \cap R[x_{k+1}, \ldots, x_n] = \sum_{i=k+1}^{l} x_i R[x_{k+1}, \ldots, x_n] \subseteq \sum_{i=k+1}^{l} x_i R[x_1, \ldots, x_n]$. Wegen $h \in \sum_{i=1}^{k} x_i R[x_1, \ldots, x_n] \subseteq \sum_{i=1}^{l} x_i R[x_1, \ldots, x_n]$ folgt $g = g_{\underline{0}} + h \in \sum_{i=1}^{l} x_i R[x_1, \ldots, x_n]$ und daraus die Behauptung. ■

13.17 Lemma. Seien R ein Erweiterungsring von K und $x_1, \ldots, x_n \in R$ algebraisch unabhängig über K so, dass R ganz über $K[x_1, \ldots, x_n]$ ist. Für jedes $k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt dann:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x_i R \right) \cap K[x_1, \ldots, x_n] = \sum_{i=1}^{k} x_i K[x_1, \ldots, x_n].$$

Beweis. Sei $R' := K[x_1, \ldots, x_n]$. Weil $x_1, \ldots, x_n$ über K algebraisch unabhängig sind, ist der Einsetzungshomomorphismus $\Phi : K[X_1, \ldots, X_n] \to R'$, gegeben durch $X_i \mapsto x_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, ein Isomorphismus. Seien $k \in \{0, \ldots, n\}$ und $\mathfrak{q}' := \sum_{i=1}^{k} X_i K[X_1, \ldots, X_n]$. Wegen $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec}(K[X_1, \ldots, X_n])$ folgt deshalb $\mathfrak{p}' := \sum_{i=1}^{k} x_i R' = \Phi^{-1}(\mathfrak{q}') \in \operatorname{Spec}(R')$. Weil R ganz über R' ist, folgt aus (12.11), dass ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $\mathfrak{p} \cap R' = \mathfrak{p}'$ existiert. Wegen $x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$ gilt $\sum_{i=1}^{k} x_i R \subseteq \mathfrak{p}$, was $\left(\sum_{i=1}^{k} x_i R\right) \cap R' \subseteq \mathfrak{p} \cap R' = \mathfrak{p}'$ impliziert. Die Inklusion "$\supseteq$" gilt offensichtlich. ■

13.18 Lemma. Sei $R := K[X_1, \ldots, X_n]$ und sei $f \in R$ von positivem Grad. Dann gibt es über K algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \ldots, x_n \in R$ so, dass $x_1 = f$ und dass gelten:

(a) R ist eine endliche ganze Erweiterung von $K[x_1, \ldots, x_n]$.

(b) $fR \cap K[x_1, \ldots, x_n] = x_1 K[x_1, \ldots, x_n]$

Beweis. Wir können

$$f = \sum\nolimits_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathcal{M}} c_{\nu_1\ldots\nu_n} X_1^{\nu_1} \ldots X_n^{\nu_n}$$

schreiben, wobei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{N}^n$, $\mathcal{M} \nsubseteq \{(0,\ldots,0)\}$, $\#\mathcal{M} < \infty$ und $c_{\nu_1\ldots\nu_n} \in K \setminus \{0\}$ für alle $(\nu_1,\ldots,\nu_n) \in \mathcal{M}$. Es gilt dann

$$N := \mathrm{Grad}(f) = \max\left\{\sum\nolimits_{i=1}^n \nu_i \;\middle|\; (\nu_1,\ldots,\nu_n) \in \mathcal{M}\right\}.$$

Wir setzen weiter

$$p_j := (N+1)^{j-1} \qquad \text{für jedes } j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\sigma : \mathcal{M} \to \mathbb{N}_0,\ (\nu_1,\ldots,\nu_n) \mapsto \sum\nolimits_{j=1}^n p_j \nu_j.$$

Wegen unserer Wahl von N ist $\underline{\nu}$ die $(N+1)$-ale Zahldarstellung von $\sigma(\underline{\nu})$ für jedes $\underline{\nu} \in \mathcal{M}$, und somit ist σ bekanntlich injektiv. Es existiert also ein eindeutig bestimmtes n-Tupel $\underline{\mu} = (\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \mathcal{M}$ so, dass

$$\sigma(\underline{\mu}) = \overline{\sigma} := \max(\sigma(\mathcal{M})).$$

Wir setzen nun

$$x_1 := f,\ x_2 := X_2 - X_1^{p_2},\ \ldots,\ x_n := X_n - X_1^{p_n}.$$

Es folgt

$$\sum\nolimits_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathcal{M}} c_{\nu_1\ldots\nu_n} X_1^{\nu_1}(x_2 + X_1^{p_2})^{\nu_2} \cdots (x_n + X_1^{p_n})^{\nu_n} - x_1 = f - x_1 = 0.$$

Gemäss unserer Wahl von $\underline{\mu}$ können wir diese Gleichung in der Form

$$c_{\underline{\mu}} X_1^{\overline{\sigma}} + \sum\nolimits_{j=0}^{\overline{\sigma}-1} g_j X_1^j = 0 \qquad \text{mit } g_j \in K[x_1,\ldots,x_n] \text{ für alle } j \in \{0,\ldots,\overline{\sigma}-1\}$$

schreiben. Multiplikation mit $c_{\underline{\mu}}^{-1}$ liefert nun eine ganze Gleichung für X_1 über $K[x_1,\ldots,x_n]$. Offenbar ist $X_i = x_i + X_1^{p_i} \in K[x_1,\ldots,x_n][X_1]$ für jedes $i \in \{2,\ldots,n\}$. Daraus folgt, dass $R = K[x_1,\ldots,x_n][X_1]$, und daraus folgt nun, dass R endlich ganz über $K[x_1,\ldots,x_n]$ ist.

Nach (13.14) und (13.10)(B)(a) sind $x_1,\ldots,x_n$ algebraisch unabhängig über K, und nach (13.17) gilt $fR \cap K[x_1,\ldots,x_n] = x_1 K[x_1,\ldots,x_n]$. ∎

13.19 Lemma. Sei $R := K[X_1,\ldots,X_n]$. Sei $\mathfrak{a} \subsetneq R$ ein Ideal. Dann gibt es über K algebraisch unabhängige Elemente $x_1,\ldots,x_n \in R$ so, dass gelten:

(a) R ist eine endliche ganze Erweiterung von $K[x_1,\ldots,x_n]$.

(b) Es gibt ein $k \in \{0,\ldots,n\}$ so, dass $\mathfrak{a} \cap K[x_1,\ldots,x_n] = \sum_{i=1}^k x_i K[x_1,\ldots,x_n]$.

Beweis. Ist $\mathfrak{a} = 0$, so setzen wir $x_i := X_i$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k := 0$. Wir nehmen also an, es sei $\mathfrak{a} \neq 0$.

Wir führen eine Induktion nach n. Der Fall mit $n = 0$ kann wegen $0 \neq \mathfrak{a} \subsetneq R = K$ nicht eintreten.

Sei $n = 1$. Es gibt ein $f \in R = K[X_1]$ mit $\mathfrak{a} = fR$. Wir wählen $k = 1$ und können mit (13.18) schliessen.

Sei also $n > 1$. Wir wählen $f \in \mathfrak{a} \setminus 0$. Nach (13.18) finden wir Elemente $\overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n \in R$ so, dass $f, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n$ über K algebraisch unabhängig sind, R über $K[f, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n]$ endlich ganz ist und $fR \cap K[f, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n] = fK[f, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n]$ gilt. Wir setzen $\overline{R} := K[X_2, \dots, X_n]$. Der Einsetzungshomomorphismus

$$\Phi : \overline{R} \to K[\overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n], \ X_i \mapsto \overline{x}_i \ \text{ für } i \in \{2, \dots, n\}$$

ist ein Isomorphismus, denn $\overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n$ sind ja algebraisch unabhängig über K. Nach Induktionsvoraussetzung finden wir über K algebraisch unabhängige Elemente $y_2, \dots, y_n \in \overline{R}$ und eine Zahl $k \in \{1, \dots, n\}$ so, dass $\overline{R}$ endlich ganz über $K[y_2, \dots, y_n]$ ist und

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{a} \cap K[\overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n]) \cap K[y_2, \dots, y_n] = \textstyle\sum_{i=2}^k y_i K[y_2, \dots, y_n]$$

gilt. Wir setzen $x_i := \Phi(y_i)$ für jedes $i \in \{2, \dots, n\}$. Dann sind $x_2, \dots, x_n$ algebraisch unabhängig über K, und $K[\overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n]$ ist endlich ganz über $K[x_2, \dots, x_n]$. Wegen

$$\mathfrak{a} \cap K[x_2, \dots, x_n] = (\mathfrak{a} \cap K[\overline{x}_2, \dots, \overline{x}_2]) \cap K[x_2, \dots, x_n]$$

erhalten wir auch

$$\mathfrak{a} \cap K[x_2, \dots, x_n] = \textstyle\sum_{i=2}^k x_i K[x_2, \dots, x_n].$$

Wir setzen $x_1 := f$. Nach (13.15) ist R endlich ganz über $K[x_1, \dots, x_n]$. Aus (13.14) und (13.10)(B)(a) folgt, dass $x_1, \dots, x_n$ algebraisch unabhängig über K sind. Die Gleichung

$$\mathfrak{a} \cap K[x_1, \dots, x_n] = \textstyle\sum_{i=1}^k x_i K[x_1, \dots, x_n].$$

folgt nun aus (13.16). ■

13.20 Lemma. Sei $R := K[X_1, \dots, X_n]$. Sei $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{a}_r$ eine aufsteigende Folge von Idealen in R so, dass $\mathfrak{a}_r \subsetneq R$. Dann gibt es über K algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \dots, x_n \in R$ und eine aufsteigende Folge $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_r$ von Zahlen in $\{0, \dots, n\}$ so, dass gelten:

(a) R ist endlich ganz über $K[x_1, \dots, x_n]$.

(b) $\mathfrak{a}_s \cap K[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^{k_s} x_i K[x_1, \dots, x_n]$ für alle $s \in \{1, \dots, r\}$.

Beweis. Wir führen eine Induktion über r. Der Fall mit $r = 1$ ist klar nach (13.19).

Sei also $r > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es über K algebraisch unabhängige Elemente $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n \in R$ und eine aufsteigende Folge $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_{r-1}$ in $\{0, \dots, n\}$ so, dass R ganz über $K[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n]$ ist und

$$\mathfrak{a}_s \cap K[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n] = \textstyle\sum_{i=1}^{k_s} \overline{x}_i K[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n]$$

für alle $s \in \{1, \ldots, r-1\}$ gilt. Sei $k := k_{r-1}$. Für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ setzen wir $x_i := \overline{x}_i$. Der Einsetzungshomomorphismus

$$\Phi : K[X_{k+1}, \ldots, X_n] \to K[\overline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_n],\ X_i \mapsto \overline{x}_i \text{ für } i \in \{k+1, \ldots, n\}$$

ist ein Isomorphismus, weil ja $\overline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_n$ über K algebraisch unabhängig sind. Wir setzen $R' := K[X_{k+1}, \ldots, X_n]$. Nach (13.19) finden wir über K algebraisch unabhängige Elemente $y_{k+1}, \ldots, y_n \in R'$ und eine Zahl $k_r \in \{k, \ldots, n\}$ so, dass R' über $K[y_{k+1}, \ldots, y_n]$ ganz ist und

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{a}_r \cap K[\overline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_n]) \cap K[y_{k+1}, \ldots, y_n] = \textstyle\sum_{i=k+1}^{k_r} y_i K[y_{k+1}, \ldots, y_n]$$

gilt. Wir setzen $x_i := \Phi(y_i)$ für alle $i \in \{k+1, \ldots, n\}$. Wenden wir auf die obige Gleichheit beidseits den Isomorphismus Φ an, so erhalten wir sofort

$$\mathfrak{a}_r \cap K[x_{k+1}, \ldots, x_n] = \textstyle\sum_{i=k+1}^{k_r} x_i K[x_{k+1}, \ldots, x_n],$$

wobei $K[\overline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_n]$ ganz über $K[x_{k+1}, \ldots, x_n]$ ist. Nach (13.15) ist also R ganz über $K[x_1, \ldots, x_n]$. Nach (13.14) und (13.10)(B)(a) sind deshalb $x_1, \ldots, x_n$ algebraisch unabhängig über K. Nach (13.16) gilt weiter

$$\mathfrak{a}_r \cap K[x_1, \ldots, x_n] = \textstyle\sum_{i=1}^{k_r} x_i K[x_1, \ldots, x_n],$$

und aus (13.17) folgen die entsprechenden Gleichheiten für $\mathfrak{a}_s$ mit $s \in \{1, \ldots, r-1\}$. ∎

13.21 Satz: Starkes Normalisationslemma. Sei R eine endlich erzeugte K-Algebra. Sei $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{a}_r$ eine aufsteigende Folge von Idealen in R so, dass $\mathfrak{a}_r \subsetneq R$. Dann gibt es über K algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \ldots, x_n \in R$ und eine aufsteigende Folge von Zahlen $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_r$ in $\{0, \ldots, n\}$ so, dass gelten:

(a) R ist endlich ganz über $K[x_1, \ldots, x_n]$.

(b) $\mathfrak{a}_s \cap K[x_1, \ldots, x_s] = \sum_{i=1}^{k_s} x_i K[x_1, \ldots, x_n]$ für alle $s \in \{1, \ldots, r\}$.

Beweis. Mit geeigneten Elementen $a_1, \ldots, a_m \in R$ können wir $R = K[a_1, \ldots, a_m]$ schreiben. Seien $X_1, \ldots, X_m$ Unbestimmte. Wir betrachten den Einsetzungshomomorphismus

$$\Phi : K[X_1, \ldots, X_m] \to R,\ X_i \mapsto a_i \text{ für } i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Natürlich ist Φ surjektiv. Wir setzen

$$\mathfrak{b}_0 := \operatorname{Ker}(\Phi) \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}_j := \Phi^{-1}(\mathfrak{a}_j) \text{ für } j \in \{1, \ldots, r\}.$$

Sei $R' := K[X_1, \ldots, X_m]$. Nach (13.20) finden wir über K algebraisch unabhängige Elemente $u_1, \ldots, u_m \in R'$ und Zahlen $l_0, \ldots, l_r \in \{1, \ldots, m\}$ mit $l_0 \leq l_1 \leq \cdots \leq l_r$ derart, dass R' ganz über $K[u_1, \ldots, u_m]$ ist und dass

$$\mathfrak{b}_s \cap K[u_1, \ldots, u_m] = \textstyle\sum_{i=1}^{l_s} u_i K[u_1, \ldots, u_m]$$

für alle $s \in \{0, \ldots, r\}$ gilt. Wir setzen

$$\begin{aligned} n &:= m - l_0, \\ k_s &:= l_s - l_0 && \text{für } s \in \{1, \ldots, r\}, \\ x_i &:= \Phi(u_{i+l_0}) && \text{für } i \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Wegen $u_1, \ldots, u_{l_0} \in \mathfrak{b}_0 = \mathrm{Ker}(\Phi)$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi(K[u_1, \ldots, u_m]) &= K[\Phi(u_1), \ldots, \Phi(u_m)] \\ &= K[0, \ldots, 0, \Phi(u_{l_0+1}), \ldots, \Phi(u_m)] \\ &= K[x_1, \ldots, x_n]. \end{aligned}$$

Weiter ist $\Phi(R') = R$. Weil R' ganz über $K[u_1, \ldots, u_m]$ ist, folgt nun leicht, dass R ganz über $\Phi(K[u_1, \ldots, u_m]) = K[x_1, \ldots, x_n]$ ist. Somit ist Aussage (a) bewiesen.

Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_0 \cap K[u_{l_0+1}, \ldots, u_m] &= (\mathfrak{b}_0 \cap K[u_1, \ldots, u_m]) \cap K[u_{l_0+1}, \ldots, u_m] \\ &= \left(\textstyle\sum_{i=1}^{l_0} u_i K[u_1, \ldots, u_m]\right) \cap K[u_{l_0+1}, \ldots, u_m] \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, weil $u_1, \ldots, u_m$ über K algebraisch unabhängig sind. Durch Einschränken von Φ erhalten wir unter Beachtung der Definition der Elemente $x_1, \ldots, x_n$ einen Isomorphismus von K-Algebren

$$\Psi := \Phi|_{K[u_{l_0+1}, \ldots, u_m]} : K[u_{l_0+1}, \ldots, u_m] \xrightarrow{\cong} K[x_1, \ldots, x_n].$$

Weil die Elemente $u_{l_0+1}, \ldots, u_m$ über K algebraisch unabhängig sind, folgt dasselbe für $x_1 = \Psi(u_{l_0+1}), \ldots, x_n = \Psi(u_m)$. Schliesslich gilt für alle $s \in \{1, \ldots, r\}$ auch

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_s \cap K[x_1, \ldots, x_n] &= \Phi(\Phi^{-1}(\mathfrak{a}_s \cap K[x_1, \ldots, x_n])) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}(\mathfrak{a}_s) \cap \Phi^{-1}(K[x_1, \ldots, x_n])) \\ &= \Phi(\mathfrak{b}_s \cap (\mathrm{Ker}(\Phi) + K[u_1, \ldots, u_m])) \\ &= \Phi(\mathfrak{b}_s \cap (\mathfrak{b}_0 + K[u_1, \ldots, u_m])) \\ &= \Phi(\mathfrak{b}_0 + \mathfrak{b}_s \cap K[u_1, \ldots, u_m]) \\ &= \Phi\left(\mathfrak{b}_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{l_s} u_i K[u_1, \ldots, u_m]\right) \\ &= \Phi(\mathfrak{b}_0) + \textstyle\sum_{i=1}^{l_s} \Phi(u_i) K[\Phi(u_1), \ldots, \Phi(u_m)] \\ &= \Phi(\mathfrak{b}_0) + \textstyle\sum_{i=1}^{l_s} \Phi(u_i) K[0, \ldots, 0, \Phi(u_{l_0+1}), \ldots, \Phi(u_m)] \\ &= \textstyle\sum_{i=l_0+1}^{l_s} \Phi(u_i) K[\Phi(u_{l_0+1}), \ldots, \Phi(u_m)] \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k_s} x_i K[x_1, \ldots, x_n]. \end{aligned}$$

Jetzt ist auch Aussage (b) bewiesen. ■

§ Der Kettensatz

13.22 Lemma. Sei R ein Erweiterungsring von K, sei $n \in \mathbb{N}$, seien $c_1, \dots, c_n \in K$ und seien $x_1, \dots, x_n \in R$ über K algebraisch unabhängig so, dass $R = K[x_1, \dots, x_n]$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)R \in \mathrm{Max}(R).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{m} := \sum_{i=1}^{n}(x_i - c_i)R$. Leicht sieht man, dass $R = K + \mathfrak{m}$. Ist $\mathfrak{m} \neq R$, so ist $\mathfrak{m} \cap K = 0$ und der Isomorphismus $R/\mathfrak{m} = (K + \mathfrak{m})/\mathfrak{m} \cong K/K \cap \mathfrak{m} = K/0 \cong K$ zeigt, dass $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathfrak{m} \subsetneq R$.

Sei $\mathfrak{n} := \sum_{i=1}^{n}(X_i - c_i)K[X_1, \dots, X_n]$. Der durch $X_i \mapsto x_i$ definierte Einsetzungshomomorphismus $\Phi : K[X_1, \dots, X_n] \to K[x_1, \dots, x_n]$ erfüllt $\Phi(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. Weil $x_1, \dots, x_n$ über K algebraisch unabhängig sind, ist Φ injektiv. Wegen $K[x_1, \dots, x_n] = K[\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_n)]$ ist Φ surjektiv. Also ist Φ und ist ein Isomorphismus. Es genügt also zu zeigen, dass $\mathfrak{n}$ ein echtes Ideal ist, also dass $1 \notin \mathfrak{n}$.

Dazu betrachten wir den Einsetzungshomomorphismus $\Psi : K[X_1, \dots, X_n] \to K$, gegeben durch $X_i \mapsto c_i$. Es gilt $\Psi(1) = 1$, also $1 \notin \mathrm{Ker}(\Psi) \supseteq \mathfrak{n}$, d.h. $1 \notin \mathfrak{n}$. ∎

13.23 Definition. Sei R ein Ring. Eine ***maximale Primidealkette in*** R ist eine maximale Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ in $\mathrm{Spec}(R)$, vgl. (6.22)(C). Es handelt sich also um eine Primidealkette so, dass $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Min}(R)$, $\mathfrak{p}_r \in \mathrm{Max}(R)$ und für keinen Index $i \in \{0, \dots, r-1\}$ und kein $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ gilt $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$.

13.24 Satz: Kettensatz. Sei R ein integrer, endlich erzeugter Erweiterungsring von K. Sei $t := \mathrm{trdeg}_K(\mathrm{Quot}(R))$. Dann gelten:

(a) $t < \infty$.

(b) Jede Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ in R hat Länge $r \leq t$.

(c) Ist $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ eine maximale Primidealkette in R, so gilt $r = t$.

Beweis. "(a)" Sei $L := \mathrm{Quot}(R)$. Wir finden $a_1, \dots, a_m \in R$ mit $R = K[a_1, \dots, a_m]$. Nach (13.3)(A) folgt $L = K(a_1, \dots, a_m)$, und mit (13.13) erhalten wir $t = \mathrm{trdeg}_K(L) \leq m$.

"(b)" Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ eine Primidealkette in R. Nach (13.21) finden wir über K algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \dots, x_n \in R$ und eine aufsteigende Folge von Zahlen $k_0 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_r$ in $\{0, \dots, n\}$ so, dass R ganz über $\tilde{R} := K[x_1, \dots, x_n]$ ist und dass für alle $s \in \{0, \dots, r\}$ gilt $\mathfrak{p}_s \cap \tilde{R} = \sum_{i=1}^{k_s} x_i \tilde{R}$. Weil R ganz über $\tilde{R}$ ist, ist nach dem Kontraktionslemma (12.9) immer $\mathfrak{p}_s \cap \tilde{R} \subsetneq \mathfrak{p}_{s+1} \cap \tilde{R}$, und damit aber auch $k_s < k_{s+1}$ für alle $s \in \{0, \dots, r-1\}$. Daraus folgt insbesondere, dass $r \leq n$. Weil R ganz über $\tilde{R}$ ist, folgt mit (11.10), dass $(\tilde{R} \setminus 0)^{-1}R$ ganz über $(\tilde{R} \setminus 0)^{-1}\tilde{R} = \mathrm{Quot}(\tilde{R}) = K(x_1, \dots, x_n)$

ist. Nach (12.33) ist $(\tilde{R} \setminus 0)^{-1}R = \operatorname{Quot}(R) = L$. Also ist L algebraisch über K. Es folgt $t = \operatorname{trdeg}_K(L) = \operatorname{trdeg}_K(K(x_1, \ldots, x_n)) = n$ nach (13.10)(B). Insbesondere ist jetzt $r \leq t$.

"(c)" Sei unsere Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ nun maximal. Dann ist $\mathfrak{p}_0 = 0$, also $k_0 = 0$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $k_r = n = t$. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann ist $k_r < n$. Nach (13.22) ist $\sum_{i=1}^r x_i\tilde{R} \in \operatorname{Max}(\tilde{R})$. Nach (12.13) gibt es also ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $\mathfrak{p}_r \subseteq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \cap \tilde{R} = \sum_{i=1}^n x_i\tilde{R} \supsetneq \mathfrak{p}_r \cap \tilde{R}$. Insbesondere folgt $\mathfrak{p}_r \subsetneq \mathfrak{q}$, was der Maximalität der Kette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ widerspricht.

Wir wählen $s \in \{0, \ldots, r-1\}$ und wollen zeigen, dass $k_s + 1 = k_{s+1}$, woraus die Behauptung folgt. Nehmen wir das Gegenteil an! Wir haben oben gesehen, dass $k_s < k_{s+1}$. Es folgt also $k_s + 1 < k_{s+1}$. Sei nun $\overline{R} := R/\mathfrak{p}_s$. Betrachten wir den Restklassenhomomorphismus $\overline{\cdot} : R \to \overline{R}$. Dann ist K ein Unterring von $\overline{R}$, und $\overline{R}$ ist ein Integritätsbereich und zudem über K endlich erzeugt. Wegen $\overline{x}_1 = 0, \ldots, \overline{x}_{k_s} = 0$ ist $\overline{R}$ eine ganze Erweiterung von $K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n] = K[\overline{x}_{k_s+1}, \ldots, \overline{x}_n] =: T$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(\overline{\cdot}) \cap K[x_{k_s+1}, \ldots, x_n] &= (\mathfrak{p}_s \cap \tilde{R}) \cap K[x_{k_s+1}, \ldots, x_n] \\ &= \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k_s} x_i\tilde{R}\right) \cap K[x_{k_s+1}, \ldots, x_n] = 0.\end{aligned}$$

Einschränkung der Restklassenabbildung $\overline{\cdot} : R \to \overline{R}$ liefert deshalb einen Isomorphismus

$$\overline{\cdot}|_{K[x_{k_s+1}, \ldots, x_n]} : K[x_{k_s+1}, \ldots, x_n] \xrightarrow{\cong} T.$$

Schaltet man diesem den durch $X_i \mapsto x_i$ definierten Einsetzungsisomorphismus

$$K[X_{k_s+1}, \ldots, X_n] \xrightarrow{\cong} K[x_{k_s+1}, \ldots, x_n]$$

vor, so erhält man mit $S := K[X_{k_s+1}, \ldots, X_n]$ einen Isomorphismus von K-Algebren

$$\rho : S \xrightarrow{\cong} T, \ X_i \mapsto \overline{x}_i \quad \text{für } i \in \{k_s + 1, \ldots, n\}.$$

Nun ist S als Polynomring bekanntlich faktoriell, also normal, vgl. (11.15). Also ist auch T normal. Weiter ist $X_{k_s+1}S \in \operatorname{Spec}(S) \setminus \{0\}$. Also ist $\overline{x}_{k_s+1}T = \rho(X_{k_s+1}S) \in \operatorname{Spec}(T) \setminus \{0\}$. Wegen $k_{s+1} > k_s + 1$ ist $X_{k_{s+1}} \notin X_{k_s+1}S$. Es folgt $\overline{x}_{k_{s+1}} \notin \overline{x}_{k_s+1}T$.

Schliesslich ist $\overline{\mathfrak{p}}_{s+1} \in \operatorname{Spec}(\overline{R})$ und wegen $\overline{x}_{k_s+1} \in \overline{\mathfrak{p}}_{s+1}$ folgt $\overline{x}_{k_s+1}T \subsetneq \overline{\mathfrak{p}}_{s+1} \cap T$. Weil T normal ist, gibt es nach (12.28) ein $\overline{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Spec}(\overline{R})$ mit $\overline{\mathfrak{q}} \subseteq \overline{\mathfrak{p}}_{s+1}$ und $\overline{\mathfrak{q}} \cap T = \overline{x}_{k_s+1}T$. Insbesondere gilt $0 \subsetneq \overline{\mathfrak{q}} \subsetneq \overline{\mathfrak{p}}_{s+1}$. Sei $\mathfrak{q} := (\overline{\cdot})^{-1}(\overline{\mathfrak{q}}) = \overline{\mathfrak{q}} \cap R$. Dann ist $\mathfrak{q} \in \operatorname{Var}(\mathfrak{p}_s)$ mit $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}_s = \overline{\mathfrak{q}}$. Es folgt $\mathfrak{p}_s \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}_{s+1}$. Dies widerspricht der Maximalität unserer Kette. ■

13.25 Korollar. Sei R eine integre, endlich erzeugte K-Algebra und setzen wir $t := \operatorname{trdeg}_K(\operatorname{Quot}(R))$. Dann gelten:

(a) Ist $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ eine Primidealkette der Länge r in R, so gibt es eine Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_t$ der Länge t in R derart, dass $\{\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_r\} \subseteq \{\mathfrak{q}_0, \ldots, \mathfrak{q}_t\}$.

(b) Eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ in R ist genau dann maximal, wenn sie von der Länge t ist, d.h. wenn $r = t$.

(c) $\dim(R) = t$.

Beweis. Aussagen (a) und (b) folgen aus (13.24). Aussage (c) folgt aus (a) und (b). ∎

§ Der schwache Nullstellensatz

13.26 Bemerkung. (A) Der Körper K heisst bekanntlich ***algebraisch abgeschlossen***, wenn es zu jedem Polynom $g \in K[X]$ von positivem Grad ein $x \in K$ so gibt, dass $g(x) = 0$.

(B) Ist $x \in K$, so ist $X - x \in K[X]$ das Minimalpolynom von x über K. Mit (12.25)(C) folgt daraus sofort der ***Satz von Vieta***, der besagt:

(a) Ist $g \in K[X]$ und ist $x \in K$ so, dass $g(x) = 0$, dann gilt $(X - x) \mid g$.

Durch Induktion folgt daraus leicht, dass ein Polynom über einem algebraischen abgeschlossenen Körper vollständig in Linearfaktoren zerfällt:

(b) Ist K algebraisch abgeschlossen und ist $g \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $d > 0$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $a \in K$ und bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmte Elemente $x_1, \ldots, x_d \in K$ derart, dass

$$g = a(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_d),$$

d.h. K ist ein Zerfällungskörper von g über K.

(C) Sei nun K algebraisch abgeschlossen und sei R ein integrer Erweiterungsring von K. Sei $x \in R$. Leicht sieht man mit (B)(b):

(a) Ist $f \in K[X] \setminus \{0\}$ mit $f(x) = 0$, so gilt $x \in K$, d.h. jedes über K algebraische Element $x \in R$ gehört schon zu K.

Insbesondere folgt:

(b) Ist K algebraisch abgeschlossen und ist L ein algebraischer Erweiterungskörper von K, so folgt $L = K$.

13.27 Lemma. Sei L ein Erweiterungskörper von K, der als Ring über K endlich erzeugt ist, d.h. $L = K[x_1, \ldots, x_n]$ für geeignete $x_1, \ldots, x_n \in L$. Dann ist L algebraisch über K.

Beweis. Weil L ein Körper ist, gilt $\dim(L) = 0$. Weil L eine integre endlich erzeugte K-Algebra ist, gilt $\operatorname{trdeg}_K(L) = \dim(L)$, vgl. (13.25). Es folgt $\operatorname{trdeg}_K(L) = 0$. Also ist L algebraisch über K, vgl. (13.10)(A). ∎

13.28 Lemma. Sei K algebraisch abgeschlossen und sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(K[X_1, \ldots, X_n])$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Elemente $x_1, \ldots, x_n \in K$ so, dass

$$\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - x_i) K[X_1, \ldots, X_n].$$

Beweis. Sei $L := K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$. Sei weiter $\overline{\cdot} : K[X_1, \dots, X_n] \to L$ die Restklassenabbildung. Wegen $K \cap \mathfrak{m} = 0$ liefert die Abbildung $\overline{\cdot}$ eine Einbettung von K in L. Wir können also K als Unterkörper von L auffassen. Dann gilt $L = K[\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n]$. Nach (13.27) ist L also ein algebraischer Erweiterungskörper von K. Nach (13.26)(C) folgt $L = K$. Wir setzen $x_i := \overline{X}_i \in K$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$. Es folgt $\overline{X_i - x_i} = \overline{X}_i - x_i = 0$, also $X_i - x_i \in \mathrm{Ker}(\overline{\cdot}) = \mathfrak{m}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Es gilt also $\sum_{i=1}^n (X_i - x_i)K[X_1, \dots, X_n] \subseteq \mathfrak{m}$. Nach (13.22) ist das linksstehende Ideal maximal. Es folgt $\sum_{i=1}^n (X_i - x_i)K[X_1, \dots, X_n] = \mathfrak{m}$. Damit ist die Existenz der Elemente $x_1, \dots, x_n$ gezeigt. Zum Nachweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, es gelte $\sum_{i=1}^n (X_i - y_i)K[X_1, \dots, X_n] = \mathfrak{m}$ für gewisse Elemente $y_1, \dots, y_n \in K$. Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt dann $y_i - x_i = (X_i - x_i) - (X_i - y_i) \in \mathfrak{m} \cap K = 0$, also $y_i = x_i$. Dies beweist die Eindeutigkeit der Elemente x_i. ■

13.29 Satz: Schwacher Nullstellensatz. Sei K algebraisch abgeschlossen, sei $n \in \mathbb{N}_0$ und sei $\mathfrak{a} \subsetneq K[X_1, \dots, X_n]$ ein echtes Ideal. In den Notationen von (1.23) gilt dann:

$$V(\mathfrak{a}) \neq \varnothing.$$

Beweis. Wegen $\mathfrak{a} \subsetneq K[X_1, \dots, X_n]$ gibt es ein $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(K[X_1, \dots, X_n])$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Nach (13.28) finden wir Elemente $x_1, \dots, x_n \in K$ so, dass $\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^n (X_i - x_i)K[X_1, \dots, X_n]$. Sei $f \in \mathfrak{a}$. Für geeignete Polynome $g_1, \dots, g_n \in K[X_1, \dots, X_n]$ gilt also $f = \sum_{i=1}^n (X_i - x_i)g_i$. Insbesondere folgt nun $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i)g(x_1, \dots, x_n) = 0$. Dies zeigt, dass $(x_1, \dots, x_n) \in V(\mathfrak{a})$. ■

§ Das Hilbertsche Durchschnittslemma

13.30 Satz: Hilbertsches Durchschnittslemma. Sei R eine endlich erzeugte K-Algebra und sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt:

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \max(\mathfrak{a})} \mathfrak{m}.$$

Beweis. Wegen $\max(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$ und $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$, vgl. (2.30), müssen wir nur noch zeigen, dass $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \max(\mathfrak{a})} \mathfrak{m} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann gibt es ein Element $x \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in \max(\mathfrak{a})} \mathfrak{m} \setminus \sqrt{\mathfrak{a}}$. Gemäss (2.30) gibt es also ein $\mathfrak{p} \in \min(\mathfrak{a})$ mit $x \notin \mathfrak{p}$. Seien $\overline{R} := R/\mathfrak{p}$ und $\overline{\cdot} : R \to \overline{R}$ die Restklassenabbildung. Dann ist $\overline{x} \neq 0$, also $\overline{x}\overline{R} \neq 0$. Ist $\overline{x}\overline{R} = \overline{R}$, so folgt $xR + \mathfrak{p} = R$. Für jedes $\mathfrak{n} \in \max(\mathfrak{p})$ folgt dann $x \notin \mathfrak{n}$. Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ ist $\max(\mathfrak{p}) \subseteq \max(\mathfrak{a})$. Es folgt der Widerspruch, dass $x \notin \mathfrak{n}$ für ein $\mathfrak{n} \in \max(\mathfrak{a})$. Also ist $\overline{x}\overline{R} \subsetneq \overline{R}$. Nach (13.21) gibt es nun über K algebraisch unabhängige Elemente $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n \in \overline{R}$ und ein $k \in \{0, \dots, n\}$ so, dass $\overline{R}$ ganz über $K[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n]$ ist und dass $\overline{x}\overline{R} \cap K[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n] = \sum_{i=1}^k \overline{x}_i K[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n]$ gilt. Nach dem Kontraktionslemma (12.8) gilt wegen $\overline{x} \neq 0$ zudem $\overline{x}\overline{R} \cap K[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n] \neq 0$. Damit folgt $k \geq 1$. Nach (13.22) gilt weiter $\overline{\mathfrak{m}} := (\overline{x}_1 - 1)K[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n] + \sum_{i=2}^n \overline{x}_i K[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n] \in \mathrm{Max}(K[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n])$. Nach dem Lying-Over-Lemma (12.11) finden wir ein $\overline{\mathfrak{n}} \in \mathrm{Spec}(\overline{R})$ mit

$\overline{\mathfrak{n}} \cap K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n] = \overline{\mathfrak{m}}$. Nach (12.14) folgt $\overline{\mathfrak{n}} \in \operatorname{Max}(\overline{R})$. Wegen $1 = \overline{x}_1 + (1 - \overline{x}_1) \in \overline{x}\overline{R} + \overline{\mathfrak{n}}$ ist $\overline{x} \notin \overline{\mathfrak{n}}$. Setzen wir $\mathfrak{n} := \overline{\mathfrak{n}} \cap R = (\bar{\cdot})^{-1}(\overline{\mathfrak{n}})$. Dann folgt $\mathfrak{n} \in \max(\mathfrak{p}) \subseteq \max(\mathfrak{a})$ und $x \notin \mathfrak{n}$. Dies ist aber ein Widerspruch. ■

§ Der Nullstellensatz

13.31 Bemerkungen und Definitionen. (A) In der in (13.1) vereinbarten Notation sei $V \subseteq K^n$ eine algebraische Menge. Wir können also schreiben $V = V(\mathfrak{a}) = V_{K^n}(\mathfrak{a})$, wobei $\mathfrak{a}$ ein Ideal des Polynomrings $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist, vgl. (1.23)(A). Wir setzen nun

$$I(V) := I_{K^n}(V) := \big\{ f \in K[X_1, \ldots, X_n] \bigm| f(V) = 0 \big\}.$$

Sofort sieht man, dass $I(V)$ ein perfektes Ideal von $K[X_1, \ldots, X_n]$ oder aber nicht echt ist, d.h.

$$I(V) \in \operatorname{Perf}\big(K[X_1, \ldots, X_n]\big) \cup \big\{K[X_1, \ldots, X_n]\big\}.$$

Dieses Ideal heisst das ***Verschwindungsideal*** von V in $K[X_1, \ldots, X_n]$.

(B) Es gelten die obigen Bezeichnungen. Sofort prüft man nach:

(a) Die leere Menge ist eine algebraische Menge und es gilt

$$I(\varnothing) = K[X_1, \ldots, X_n].$$

(b) Seien $V, W \subseteq K^n$ algebraische Mengen. Dann gilt

$$V \subseteq W \implies I(V) \supseteq I(W).$$

(c) Sind $V_1, \ldots, V_r \subseteq K^n$ algebraische Mengen, so gilt

$$I(V_1 \cup \cdots \cup V_r) = I(V_1) \cap \cdots \cap I(V_r).$$

(d) Ist $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal, so gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq I(V(\mathfrak{a})).$$

(e) Ist $V \subseteq K^n$ eine algebraische Menge, so gilt

$$V(I(V)) = V.$$

(C) Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$. Dann ist die einpunktige Menge $\{(x_1, \ldots, x_n)\}$ algebraisch, denn es gilt:

$$\begin{aligned}\{(x_1, \ldots, x_n)\} &= V(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n) \\ &= V\big((X_1 - x_1)K[X_1, \ldots, X_n] + \cdots + (X_n - x_n)K[X_1, \ldots, X_n]\big).\end{aligned}$$

Offenbar ist $1 \notin I(\{(x_1, \ldots, x_n)\})$, also $I(\{(x_1, \ldots, x_n)\}) \subsetneq K[X_1, \ldots, X_n]$. Mit Hilfe von (B)(d) und (13.22) folgt:

(a) $I(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - x_i) K[X_1, \ldots, X_n]$.

Mit (13.28) folgt nun insbesondere:

(b) Ist K algebraisch abgeschlossen, so besteht eine Bijektion

$$\varepsilon_K^n : K^n \to \mathrm{Max}(K[X_1, \ldots, X_n]),\ p \mapsto I(\{p\}).$$

13.32 Satz: Nullstellensatz. Sei K algebraisch abgeschlossen und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann gilt:

$$I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Beweis. Gemäss (13.31)(B)(d) genügt es zu zeigen, dass $I(V(\mathfrak{a})) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Sei also $f \in I(V(\mathfrak{a}))$. Nach (13.30) genügt es zu zeigen, dass $f \in \mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m} \in \max(\mathfrak{a})$. Nach (13.28) gibt es für jedes solche $\mathfrak{m}$ einen Punkt $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ so, dass $\mathfrak{m} = (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$. Insbesondere folgt $(x_1, \ldots, x_n) \in V(\mathfrak{m}) \subseteq V(\mathfrak{a})$, also $(x_1, \ldots, x_n) \in V(\mathfrak{a})$. Aus $f \in I(V(\mathfrak{a}))$ folgt $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, also $f \in I(\{(x_1, \ldots, x_n)\}) = \mathfrak{m}$, vgl. (13.31)(C)(a). ∎

13.33 Korollar. Sei K algebraisch abgeschlossen und seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale von $K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann gelten:

(a) $\mathfrak{a} \subsetneq K[X_1, \ldots, X_n] \iff V(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$.

(b) $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \iff \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Beweis. Folgt leicht aus (13.29), (13.31)(B)(e), (13.32) und daraus, dass $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$. ∎

Sachregister