Ein Sammelsurium wohlfeiler und wahrhaftiger Erlebnisse der ehrbaren Seefahrer der Revenge, den Nutzen der Mathematik illustrierend

Gesammelt, archiviert und übersetzt von
Markus Brodmann
Andri Cathomen
Simon Kurmann

Mit einem Einband von
Meister Claudio Ludwig

0 Einleitung

Diese Aufgabensammlung ist während des Herbstsemesters 2010 entstanden, und wir hatten einigen Spass damit – ob das allerdings auch für unsere Studenten gilt, kann ich nicht beurteilen.
Die Piratenaufgaben fanden sich zuerst auf den Übungsserien der Analysis für Naturwissenschaftler, kurz MAT182, welche im Herbsemester 2010 von Prof. Markus Brodmann an der Universität Zürich gelesen und von Andri Cathomen und mir betreut wurde. Auf dem dritten Übungsblatt fand sich eine erste, hier nicht wiederholte Bonusaufgabe, welche eher zufällig das Zitat "der schlechteste Pirat, den ich je gesehen habe" beihnaltete, eine weitere auf dem vierten, welche nachträglich zu einer Piratenaufgabe umformuliert wurde, und dann enterten die Piraten der Revenge die Übungsserien und beanspruchten immer mehr Platz für sich: An unserer üblichen Sitzung am Montag diskutierten wir eine Bonusaufgabe zur Fehlerabschätzung, welche ein Kanonen abfeuerndes Piratenschiff beinhaltete, doch verwarfen wir sie schliesslich als zu schwierig. Stattdessen einigten wir uns auf eine Aufgabe zur Russellschen Antinomie. Als ich das Aufgabenblatt schrieb, kleidete ich die Aufgabe in eine kleine Geschichte ein, in der dann doch Piraten auftauchten (und zwar jene aus meinem Lieblingsfilm). Die Antwort von Prof. Brodmann bestand darin, mir umgehend die nächste Bonusaufgabe zu schicken, in der die gleichen Piraten auf einer einsamen Insel strandeteten, und die sich hier beinahe wortwörtlich als Aufgabe 3 findet. Ich lachte laut bei Einführung des Lateiners.
Wir entwarfen danach alle Bonusaufgaben um die Piraten der Revenge herum, und ich nahm mir vor, in jeder Aufgabe mindesten eine neue Anspielung auf mehr oder weniger bekannte fiktive Piraten einzubauen. Die Aufgaben selbst sind eine Mischung aus in der Vorlesung behandeltem Stoff, Denksportaufgaben und allerlei mathematischen und auch physikalischem Problemen. Die meisten Ideen für die Aufgaben stammen von Prof. Brodmann, während ich die Aufgaben formulierte und Andri die Arbeit zufiel, jeweils die Musterlösung zu schreiben und die Bildchen zu erstellen. Alle zitierten Folien beziehen sich auf die Folien zur Vorlesung, die sich im Internet finden lassen:
http://www.math.uzh.ch/index.php?file&key1=14965
Hier finden sich nun alle diese Piratenaufgaben gesammelt, für den Fall, dass noch jemand ausser uns daran Gefallen finden sollte.

Simon Kurmann

1 Die Aufgaben

Aufgabe 1.
a) Sie haben vor sich 25 Goldmünzen aus Rotbarts Schatz und eine Balkenwaage, und Sie wissen, dass 24 der Münzen gleich schwer sind, die letzte aber etwas schwerer ist. Sie dürfen genau dreimal wägen und sich danach eine der Münzen aussuchen. Wie können Sie sich sicher sein, dass sie die schwerere Münze wählen werden?

b) Unter wievielen Münzen können Sie maximal mit k-mal wägen die eine schwerere entdecken, wenn k ein beliebige natürliche Zahl ist?

Aufgabe 2.
Auf seiner Überfahrt nach Amerika wird der irische Barbier Russell vom grausamen Piraten Roberts gefangengenommen, dem berüchtigen Kapitän des Piratenschiffes Revenge, der niemals einen Gefangenen leben lässt. Allerdings hat die Besatzung der Revenge dringend wieder einmal eine Rasur nötig, und so macht der grausame Pirat Roberts dem Barbier ein Angebot: Russell soll für ein Jahr auf dem Schiff bleiben und alle Männer darauf rasieren, die sich nicht selbst rasieren, aber keinen sonst. Wenn ihm dies gelingt, wird der grausame Pirat Roberts ihm nicht nur die Freiheit, sondern auch eine Truhe voller Gold schenken. Wenn Russell jedoch nicht alle Männer an Bord rasiert, die sich nicht selbst rasieren, oder aber einen rasiert, der sich selbst rasiert, dann wird er an der Rahe aufgehängt. Will Russell dieses Angebot nicht annehmen, so wird er in einem Beiboot ohne Wasser und ohne Proviant mitten im Atlantik ausgesetzt. Der kluge Barbier denkt eine Weile über das Angebot nach, kratzt sich dreimal am Kinn und entscheidet sich dann für das Beiboot.
Wie hat Russell erkannt, dass er keine Chance hat, das Jahr auf dem Piratenschiff zu überleben?

Aufgabe 3.
Nach mehrtägigem heftigen Sturm stranden die Piraten der Revenge schliesslich nachts auf einer einsamen Insel. Wo sind sie? Mindestens die geographische Breite möchten sie schätzen. Die Sonne geht endlich auf, und der Kapitän bemerkt, dass wenigstens seine hochmoderne Taschenuhr (gebaut von Thuret in Paris nach den neuesten Vorlagen von Christiaan Huygens) den Sturm überstanden hat und noch läuft. Die Uhr zeigt nun gerade 04:57, und das kommt ins durchnässte Logbuch unter dem heutigen Datum vom 21. Mai. Der Kapitän hofft, durch den höchsten Sonnenstand mit Hilfe des Sextanten die geographische Breite zu ermitteln. Doch bald überzieht sich der Himmel wieder für drei Tage und Nächte. Erst am Morgen des 25. Mai kann man die Sonne am Wasserhorizont durch ein Wolkenloch aufgehen sehen, und zwar gerade um 04:53. Der Kapitän meint im Scherze, der alte Giftzwerg, der immer alle mit seinen gescheiten lateinischen Zitaten nervt, könne jetzt sicher sagen, auf welcher Breite sie sich befänden. Der Kleine macht sich tatsächlich anheischig, dies zu tun, und sagt: "Wir sind etwa auf der Breite von ..."
Bestimmen Sie, welche der folgenden Insel etwa die gleiche nördliche Breite hat wie das gegenwärtig erzwungene Domizil der Piraten:

a) Tasmanien, b) Island, c) Hokkaido, d) Antigua.

(*Einige Hinweise:* Falls es Ihnen jetzt ergeht wie dem grausamen Piraten Roberts und Sie sich fragen, wie der Lateiner das denn wissen will, dann versuchen Sie Folgendes: Beschreiben Sie die Veränderung des Zeitpunktes, an dem die Sonne aufgeht, durch eine Funktion T abhängig vom Jahrestag x (mit dem Nullpunkt beim Frülingsäquinoktium); dies lässt sich mit einer Funktion der Form "$A\sin(\ldots)$" tun - um sowas im Kopf zu berechnen, approximiert der Lateiner das Jahr übrigens durch 12 Monate zu je 30 Tagen und π durch 3. Mit Hilfe der Abschätzung $dT = T'(x_0)dx$ können Sie nun A ungefähr bestimmen.
Der Lateiner kennt ausserdem die Formel

$$S_{x_1} = \frac{12}{\pi} \arccos(\tan(\beta) \cdot \tan(\gamma_{x_1})),$$

wobei S_{x_1} die Zeit des Sonnaufganges an einem Tag x_1 ist, β die nördliche Breite des Standortes, und γ_{x_1} die höchste geographische Breite des Sonnenstandes am Tag x_1. Er verwendet auch hier eine Approximation: Für die Ekliptik näher er $\tan(23.4385°) \approx \frac{1}{2}$ an. Mittlerweile dürfte auch klar sein, dass der Lateiner wohl einmal Mathematik studiert hat - kein Wunder, hat er es nur zum Piraten gebracht.

Schliesslich kennt der Alte nicht nur Latein und Mathematik. Da der erste Maat meist besoffen ist, fällt es oft ihm zu, das Logbuch nachzuführen, und so kennt er die nördliche Breite vieler Inseln und Häfen. Glücklicherweise braucht man derlei in der heutigen Zeit von Atlanten und Internet nicht mehr auswendig zu kennen...
Es mag übrigens hilfreich sein zu wissen, dass sich diese Ereignisse vor Einführung der Sommerzeit abspielten.)

Aufgabe 4.
Die Aurea Helvetica, die als Schiffszeichen zwei Goldvreneli trägt, ankert zwecks Rumladens vor Monkey Island. Heimtückisch hat sich bei Nacht und Nebel auch die Revenge der Insel genähert; sie lauert nun versteckt hinter einem Hügel auf der Gegenseite der Insel in 1732 Fuss Entfernung von der Aurea. Der grausame Pirat Roberts plant, mit der grossen Zwölfpfünder (Maximale Schussweite $m = 2000$ Fuss) dem Rumpf der schnellen Aurea über den Hügel hinweg einen Volltreffer zu versetzen, um sie danach in aller Ruhe entern zu können. Das Azimut und die Entfernung sind bekannt - doch in welchem Winkel muss die Kanone abgefeuert werden, um das verlockende Ziel über den 563 Fuss hohen Inselberg hinweg zu treffen?
Da er seit der kürzlichen Breitebestimmung noch aufgeblasener mit seiner Klugheit angibt als sonst, fällt es wieder dem alten Lateiner zu, dies auszurechnen. Er weiss, dass im Logbuch eine Sammlung loser Blätter mit allerlei ballistischen Formeln aus dem Nachlass von René Descartes verstaut ist, und schickt den Schiffsjungen Guybrush Threepwood, ihm die Formeln für die Schussweite $\delta(\alpha)$ und die maximale Schusshöhe $\beta(\alpha)$ in Abhängigkeit des Elevationswinkels α der Kanone zu holen. Leider ist Guybrush aber ein eigentlicher Analphabet und kann deshalb keine Formel verstehen, in denen α oder β vorkommen. Deshalb bringt er dem Lateiner jeweils fünf Formeln, von denen genau eine richtig ist - bestimmen Sie welche!
Für die Schussweite:

a) $\delta(\alpha) = \cos(m\alpha)$, *b)* $\delta(\alpha) = m\sin(2\alpha)$,
c) $\delta(\alpha) = m\cos(\alpha^2)$, d) $\delta(\alpha) = 2m\sin(\alpha)$,
e) $\delta(\alpha) = m\beta(\alpha)\cos(2\alpha)$.

Für die maximale Schusshöhe:

A) $\beta(\alpha) = \dfrac{\delta(\alpha)}{2}$, B) $\beta(\alpha) = m\sin(2\alpha) - m\cos(2\alpha)$,

C) $\beta(\alpha) = \dfrac{\delta(\alpha)}{\sqrt{2}}\cos(\alpha)$, D) $\beta(\alpha) = \dfrac{1}{2}m\sin^2(\alpha)$,

E) $\beta(\alpha) = m(\cos^2(2\alpha) + \sin^2(\alpha))$.

Berechnen Sie nun, in welchem Winkel die zwölfpfündige Kanone abgefeuert werden muss - hier rechnet der Lateiner übrigens mit der Näherung $\sqrt{3} = 1.732$. Was wäre, wenn der Inselberg 854 Fuss hoch wäre?

Aufgabe 5.

Der Beutezug unserer Piraten war erfolgreich! Dumm nur, dass auch andere Piraten dies mitgekriegt haben, darunter der berüchtigte Captain Blood. So wird den nun die Revenge von Bloods Seahawk gejagt, und da der Revenge das geraubte helvetische Gold schwer im Bauch liegt, holt die grössere und eigentlich langsamere Seahawk stetig auf. Verzweifelt befiehlt der grausame Pirat Roberts also, allen unnötigen Ballast abzuwerfen. Der Schiffsjunge will auch bereits die Gewichte für die Balkenwaage ins Meer werfen, als ihn der Captain gerade noch aufhält – wie sollen denn die notorisch streitsüchtigen Piraten den Schatz aufteilen, wenn sie ihn nicht wägen können? Da es aber immer noch gilt, jedes unnötige Pfund loszuwerden, wendet sich der grausame Pirat wieder einmal an den alten Lateiner in der Crew. Dieser soll nun bestimmen, welche Gewichte denn überhaupt nötig sind, um den Schatz aufzuteilen; der Rest soll über Bord geworfen werden. Der Lateiner, welcher als einstiger Jesuit mit den Schriften von Claude Gaspard Bachet de Méziriac vertraut ist, muss nicht lange überlegen und antwortet: "Da keinem von uns mehr als 40 Pfund Gold zustehen, brauchen wir nur 4 Gewichte, nämlich..." Welche 4 Gewichte reichen aus, um jede ganzzahlige Anzahl an Pfunden bis zu 40 Pfund auf einer simplen Balkenwaage zu wägen? Wenn Sie sich nun wie der grausame Pirat Roberts nicht vorstellen können, wie das gehen soll, versuchen Sie sich an folgenden Teilaufgaben:

a) Geben Sie zwei Gewichte an, mit denen man alle ganzzahligen Massen ≤ 4 Pfund (d.h. 0, 1, 2, 3 und 4 Pfund) mit einer Balkenwaage bestimmen kann. (Hinweis: Die Gewichte können natürlich auch auf die gleiche Waagschale wie die zu wägende Masse gelegt werden.)

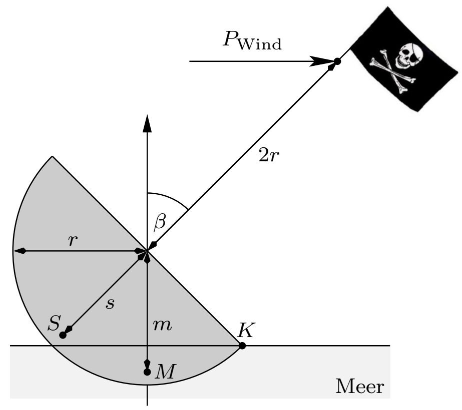
b) Bestimmen Sie nun ein 3. Gewicht so, dass man mit diesem und den beiden aus a) alle ganzzahligen Massen bis 13 Pfund wägen kann, und dann ein 4.

Gewicht so, dass Sie nun mit allen 4 Gewichten alle ganzzahligen Massen bis 40 Pfund auf einer Balkenwaage bestimmen können.

c) Wenn Sie b) lösen konnten, dann versuchen Sie sich noch an dieser Verallgemeinerung: Es seien nun $n, m \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1) < m \leq \frac{1}{2}(3^n - 1)$. Wie viele Gewichte brauchen Sie mindestens, um mit Sicherheit alle ganzzahligen Massen $\leq m$ Pfund auf der Balkenwaage messen zu können?

Aufgabe 6.
Ein kurioses Wetterphänomen sucht das Piratenschiff Revenge heim: Sie ankert in einem Atoll, durch eine niedrige Landzunge vor Wellen geschützt, nicht aber vor dem Wind, der darüber hinwegbläst. Tatsächlich bläst der Wind so stark von backbord, dass sich die Revenge im glatten Wasser fast bis zur Reling neigt - nur noch etwas tiefer, und das Deck wird geflutet! Unter der Crew macht sich verständlicherweise Unruhe bereit. Da hat Long John, als Schiffskoch auch für den Rumvorrat zuständig, eine Idee: "Wir könnten einige Rumfässer über Bord werfen – dann wird das Schiff leichter, es liegt weniger tief im Wasser, und die Kante des Rumpfes ist höher über dem Meeresspiegel!" Der Vorschlag stösst zunächst auf Ablehnung – natürlich will kein Pirat sich vom Rum trennen –, und der alte Lateiner runzelt die Stirn; noch etwas Anderes an diesem Vorschlag behagt ihm nicht. Als aber Long John erklärt, man könne die Fässer nachher wieder an Bord nehmen, und der Wind noch einmal zusetzt, so dass sich die Revenge genau bis zur Kante des Decks neigt, findet des Schiffskochs Idee doch breite Zustimmung. Der Captain befiehlt nun wirklich, einige der Fässer von Bord zu werfen, und die Matrosen beeilen sich ungemein, diesem Kommando Folge zu leisten. Da ruft der Lateiner plötzlich: "Nein, wartet! Lasst mich das erst berechnen!" Fieberhaft beginnt er, auf as erstbeste Papier (der Rückseite eines kurzen mathematischen Beweises, geschrieben von einem gewissen Pierre de Fermat, wie leider niemals jemand erfahren soll) einige Formeln zu kritzeln; die Rechnung erweist sich aber als schwieriger als erwartet, und als er nach fünf Minuten immer noch keine Lösung hat, meint der grausame Pirat Roberts, der sich bei seinem letzten Landgang übrigens einen spanischen Akzent zugelegt hat: "Ich hasse warten." Damit lässt er einige Fässer von Bord werfen. Erzürnt darob knüllt der alte Lateiner das Papier zusammen und schleudert es fluchend ins Meer, bevor er sich auf das Schlimmste gefasst macht...
Teilaufgaben b) bis d) werden Ihnen hoffentlich helfen, des Lateiners Sorge zu verstehen. Zuerst aber können Sie sich, so Ihnen der Sinn danach steht, als Repetition der Schwerpunktsberechnung des Teils a) annehmen. Wir denken uns den Schiffsrumpf der Einfachheit halber als Halbzylinder mit Radius r (dies ist die halbe Breite des Decks); die Länge spielt hier keine Rolle, da wir einzig den Querschnitt beim Hauptmast betrachten und uns vorstellen, dass alle relevanten Kräfte in dieser Ebene wirken. Die Gewichtskraft des Schiffes sei G, die Windkraft P, die Auslenkung des Schiffes von der Normallage der Winkel β; die Deckkante K berührt den Meeresspiegel gerade in der kritischen Lage bei $\beta = 45°$. Als Nullpunkt setzen wir den Ankerpunkt des Hauptmastes; die Windkraft P greife an einem Punkt am Hauptmast im Abstand $2r$ vom Nullpunkt an, und der Schwerpunkt S habe Abstand s

vom Nullpunkt. Die Skizze mag Ihnen helfen, die Situation zu verstehen:



a) Berechnen Sie den Abstand m des Metazentrums M vom Ansatzpunkt 0 des Hauptmastes. (Das Metazentrum ist der Schwerpunkt der Auftriebskraft; es liegt in unserer Situation genau unter dem Nullpunkt. Am Besten legen Sie die x-Achse des Koordinatensystemes durch M und verwenden eine analoge Formel zu jener auf Folie 59°°.)

b) Wir betrachten die Situation, bevor Rumfässer von Bord gehen. Drücken Sie die Windkraft P als Produkt der Gewichtskraft G und eines Faktors λ aus; der Faktor $\lambda = \lambda(r, s, \beta)$ hängt ab von r, s und β. Wie gross darf λ höchstens werden, damit es nicht zur Katastrophe kommt? (Hinweis: Betrachten Sie die Drehmomente, die von G und P induziert werden; die Formel dazu ist Drehmoment = Hebelarm × Kraft, wobei der Hebelarm bekanntlich senkrecht zur wirkenden Kraft steht.)

c) Bestimmen Sie in der Situation von b) das Verhältnis $\frac{s}{r}$, wenn λ in der kritischen Lage gerade 10% beträgt.

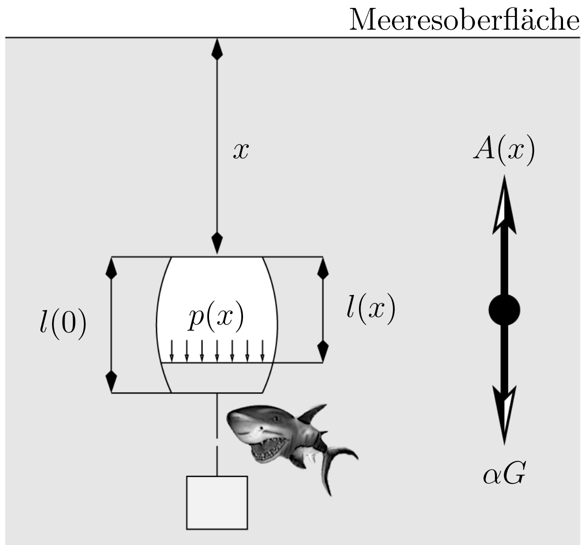
d) Wir überlegen uns nun, was die Entrumung der Revenge für Folgen hat: Offensichtlich steigt das nun leichtere Schiff im Wasser auf, der Punkt K liegt tatsächlich höher über dem Meeresspiegel. Doch was geschieht mit der Auslenkung β? Geben Sie anhand der Formel aus Teil b) eine rein qualitative Überlegung (ohne konkrete Berechnung), wie sich β ändert, wenn der Rum über Bord geht. Dabei verringert sich übrigens nicht nur die Gewichtskraft G, sondern der Schwerpunkt liegt danach auch höher, da der Rum in der Bilge der Revenge gelagert wird, ganz unten im Schiff. (Hinweis: Auf eigen Gefahr können Sie natürlich auch versuchen, die Auswirkungen des Entrumens konkret auszurechnen, doch seien Sie gewarnt – der Lateiner konnte diese

Berechnung nicht in vernünftiger Zeit hinkriegen, da sie recht mühsam ist. So sie Ihnen dennoch gelingen sollte, schreiben Sie doch den Übungsstellern, die wären daran auch interessiert.)

Aufgabe 7.
Nach langer Suche haben die Piraten der Revenge endlich das Wrack der Einhorn gefunden und schicken sich nun an, den legendären Schatz Rackhams des Roten zu heben. Zu diesem Zwecke haben die Piraten, die als mathematikkundige Seefahrer natürlich die Schriften von William Bourne kennen, ein improvisiertes Unterseeboot gebaut: Ein deckelloses Rumfass wird umgekehrt zu Wasser gelassen; unter dem Fass ist ein schwerer Mühlstein an einem Seil befestigt und an der Oberseite ein Seil an einer Winde auf der Revenge. In dieser Taucherglocke sitzt der unglückliche Schiffsjunge Guybrush Threepwood, dessen Protest, er könne nicht schwimmen, als irrelevant abgetan wurde - immerhin ist Schwimmen unter den Seeleuten seiner Zeit keine sonderlich weit verbreitete Fähigkeit. Vom Gewicht des Mühlsteines nach unten gezogen, sinkt das Rumfass dem Meeresgrund entegegen, während zu Guybrushs tiefster Beunruhigung aufgrund des steigenden Wasserdrucks die Luft im Fass immer mehr komprimiert wird. An Bord der Revenge stellt derweil der Lateiner einige Berechnungen an und meint schliesslich: "Gleich hat er die Tiefe erreicht, bei dem der Auftrieb des Fasses auch ohne den Stein nicht mehr reichen würde, das Fass wieder hochzubringen."
Seine Kameraden rätseln noch ob des alten Giftzwerges Kommentar, als Guybrush in der Tiefe unerwünschte Gesellschaft findet: Ein Hai (*Galeocerdo cuvier*) hat die appetitlich zappelnden Beine Guybrushs unter dem Fass entdeckt und will nun ihren Geschmack näher untersuchen. Der Schiffsjunge bemerkt die Gefahr gerade noch rechtzeitig und zieht die Beine im letzten Moment an, so dass der zuschnappende Hai anstatt des saftigen Fleisches nur trockenen Hanf zu beissen bekommt: Sein Biss kappt das Seil des Steines. Das nun plötzlich erheblich leichtere, luftgefüllte Fass beginnt zu steigen, worüber sich der geplagte Guybrush aber nur einen Moment lang freut, bis er realisiert, dass das Fass immer schneller der Wasseroberfläche entgegen rast. Der Hai aber hat die Hoffnung auf den Zwischenimbiss noch nicht aufgegeben und wartet, bis das Fass die Oberfläche erreicht für einen weiteren Angriff - jede Sekunde zählt nun! Wollen die Piraten ihren Kameraden rettn, so muss dies schnell geschehen, und daher beginnt der Lateiner unverzüglich, eine Differentialgleichung aufzustellen, welche das Aufsteigen des Fasses beschreibt, um so den Zeritpunkt des Auftauchens zu bestimmen und bereits dafür bereit zu sein. (Es mag hier angemerkt sein, dass der Lateiner sei-

ner Zeit voraus war, und dass der Verlust seiner Notizen infolge gefrässeiger Nagetiere von ungewöhnlicher Grösse ein trauriger Verlust war für die Mathematik.)
Tatsächlich attackiert der ungeduldige Hai noch einmal von unten, gerade als die Oberkante des Fasses die Meeresoberläche erreicht. Sein Angriff jedoch erfolgt aufgrund mangelnder Kenntnisse von Differentialgleichungen zu einem ungünstigen Zeitpunkt, und so ist die einzige Auswirkung davon, dass er ein Stück Holz abbeisst und das Fass etwas abbremst. Die Angst um Guybrush aber erweist sich schliesslich als unnötig: Das Rumfass beendet seinen Aufstieg nicht an der Wasseroberfläche, sondern schiesst daraus hervor und über Deckhöhe hoch. Als das Fass den höchsten Punkt seiner Bahn erreicht und wieder zu fallen beginnt, schnellt Guybrush unter dem Fass hervor und packt die Reling der Revenge. Nur das Fass fällt ins Wasser zurück, zur Enttäuschung des Hais, derweil das ganze Geschehen den grausamen Piraten Roberts auf eine Idee bringt: "Mir scheint, dies wäre eine gute Methode, ein Schiff zu entern. Wir könnten alle in Rumfässern unter Wasser lauern, hochschiessen, sobald unsere Beute über uns ist, und so an Deck gelangen..."
Er erteilt dem Lateiner also den Befehl, zu berechnen, wie hoch man mit einem Rumfass auf diese Weise aus dem Wasser springen kann, und dieser macht sich unverzüglich an die Arbeit, froh über seine Italienischkenntnisse und seine Bücher von Evangelista Torricelli.
In den folgenden Teilaufgaben können Sie zeigen, dass Sie es dem Lateiner gleich tun können:

a) In welcher Tiefe geschieht der erste Angriff des Hais? Geben Sie eine Formel für die kritische Tiefe x_0 unter dem Meeresspiegel an, bei welcher der Auftrieb des Rumfasses so klein wird wie das Gewicht des Fasses ohne Stein. Verwenden Sie folgende Grössen: G sei die Gewichtskraft des Wassers, welches im Fass Platz finden könnte (natürlich kennen die Piraten diese Grösse, sie müssen ja die Menge des Rums im Fass bestimmen können...), und Fass und Guybrush (ohne Stein!) sollen Gewicht αG, $0 < \alpha < 1$, haben. Der Einfachheit halber messen wir die Tiefe x des Fasses nur an seinem oberen Rand und nehmen an, der Wasserdruck $p(x)$ sei auf der ganzen Fasshöhe gleich; an der Wasseroberfläche sei dieser Druck p_0, und er steige mit der Tiefe x linear an, d.h. $p(x) = p_0 + ax$; dabei ist $p(x)$ umgekehrt proportional zum Volumen x linear an, d.h. $p(x) = p_0 + ax$; dabei ist $p(x)$ umgekehrt proportional zum Volumen der Luft im Fass. $l(x)$ bezeichne die Höhe der eingeschlossenen Luft im Fass in der Tiefe x; wir treffen auch hier eine Vereinfachung und nehmen an, bei $x = 0$ sei $l(0)$ die ganze Fasshöhe. Bestimmen Sie $l(x)$ unter Vernachlässigung des Volumens von Guybrush. Berechnen Sie damit den Auftrieb $A(x)$ in Tiefe x, und bestimmen Sie die kritische Tiefe x_0, bei der die Gewichtskraft αG so gross wird wie $A(x_0)$. (Hinweis: Es mag sich als nützlich erweisen, das Verhältnis von $l(x)$ zu $l(0)$ in eine Formel abhängig von $A(x)$ und $A(0) = -G$ auszudrücken.)



b) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf für die Tiefe $x(t)$ des aufsteigenden Rumfasses zum Zeitpunkt t nach dem Zubeissen des Haies bei $t_0 = 0$.

c) Wie hoch springt das Rumfass aus dem Wasser? Verwenden Sie Ihre Formeln aus a), um die Sprunghöhe des oberen Fassdeckels abhängig von den Parametern p_0, a und α anzugeben. Wir nehmen dabei an, der abbremsende zweite Haiangriff negiere genau die Energie, welche das Fass noch gewänne zwischen dem Zeitpunkt, da seine Oberkante den Meeresspiegel erreicht, und jenem, da dies auch der Unterkante gelingt, das heisst, das Fass gewinne oder verliere keine Geschwindigkeit, während es nur teilweise aufgetaucht ist. (Hinweis: Betrachten Sie dazu kinetische und potenzielle Energie sowie durch ein Integral beschreibbare Arbeit). Da wir über moderne Masseinheiten verfügen, werden unsere Rechnungen etwas weniger mühselig als jene des Lateiners, und wir Altklugen wissen natürlich auch, dass ungefähr $p_0 = 1\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ und $a = 0.1\frac{\text{kp}}{\text{m}\cdot\text{cm}^2}$ gilt. Berechnen Sie damit explizit die Sprunghöhe für $\alpha = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 8.
Widrige Umstände englischer Natur haben die Revenge in den Hohen Norden verschlagen, wo sie nun in einer Bucht ankert und darauf wartet, dass die Winterstürme endlich abflauen. Die Moral an Bord ist arg strapaziert, die gelangweilten Piraten ergehen sich in allerlei gereizten Streiterein - erst gestern hat der englische Patriot Long John den alten leibnizianischen Lateiner in einer betrunkenen Prügelei, ausgelöst von einer Diskussion über den Entdecker dere Differentialrechnung , bewusstlos geschlagen. Um seine Männer von derlei Unfug abzulenken, hat sich der grausame Pirat Roberts einen kleinen Wettbewerb ausgedacht: Mehrere lange Bretter werden nebeneinander vom Deck des Schiffes auf ein Beiboot im Wasser ausgelegt, so dass eine schiefe Rampe entsteht. Acht der Piraten können sich nun alle einen Gegenstand aussuchen, den sie diese Rampe hinunterrollen lassen. Dabei treten jeweils im Ausscheidungsverfahrne zwei Piraten gegeinander an: Wessen Objekt zuerst im Beiboot anlangt, ist eine Runde weiter, der andere ist ausgeschieden. Dem Sieger winkt eine Goldmünze, welche er sich unter dreimaligem Wägen aus 25 aussuchen darf. Während die restlichen Piraten mit allerlei Wetten beschäftigt sind, machen sich die Kandidaten mit ihren erwählten Objekten für die erste Runde bereit. Dies sind die ersten Paarungen:
Partie 1: Mr. Smee, der Bootsmann, schickt seine *Kanonenkugel* ins Rennen gegen Pintels *leeres Fass*.
Partie 2: Long John lässt sein *kegelförmiges Holzbein* rollen; er legt es dafür mit der Spitze und einem Punkt der Grundfläche an die obere Kante der Rampe. Sein Gegner ist Gilgamesh Wulfenbach, um der Tarnung willen unter Piraten, welcher sich einen im Wasser treibenden *Eisblock* ausgesucht hat; der rollt zwar nicht, gleitet aber reibungsfrei.
Partie 3: Der grausame Pirat Roberts nimmt auch gleich selbst teil, und zwar mit einem *vollen Rumfass*. Sein Gegner Ragetti konnte sich das zweite noch volle Rumfass schnappen, was jedoch Pintel erzürnt hat. Deshalb schlägt Pintel gleich vor dem Start ein Loch in Ragettis Fass, so dass Ragetti tatsächlich mit einem *auslaufenden Rumfass* antritt. Erst nach dem Rollrennen kann Ragetti das Leck schliessen, aber da ist bereits die Hälfte des Rums ausgelaufen - was Pintel übrigens den Zorn der restlichen Mannschaft einträgt.
Partie 4: Der riesige Türke, den der grausame Pirat Roberts von seinem letzten Landgang mitbrachte, hat bemerkenswert wenig Schwierigkeiten, gleich eine ganze *Kanone* auf die Rampe zu legen. Diese rollt gegen eine schwere Kupferachse, an deren Enden zwei dünne hölzerne Speichenräder besfestigt sind; der Schiffsjunge Guybrush Threepwood fand diese *Achse mit Rädern* an einer Kutsche, welche zur letzten Beute der Revenge gehörte.

Der alte Lateiner fehlt bei diesem Wettbewerb übrigens, da er sich noch von den gestrigen Prügeln erholt. Natürlich hat jeder Pirat eine andere Vorstellung davon, welcher Gegenstand am schnellsten im Beiboot anlangen wird, und so wird fleissig auf alle möglichen Ausgänge gewettet. Sie aber können hoffentlich eine durchdachtere Prognose abgeben, wie der Wettbewerb verlaufen wird; ignorieren Sie dafür Luft- und Rollwiderstand ebenso wie Reibung, gehen Sie davon aus, dass sich nicht nur ein Fass, sondern auch der darin enthaltene Rum gleichmässig drehen, und machen Sie sich ein paar Gedanken zu Roll- und Translationsenergie.

a) Geben Sie, mit Begründung, den Ausgang aller Partien der ersten Runde an.

b) In der zweiten Runde stossen die Sieger aus den Partien 1 und 2 aufeinander, derweil der Sieger der Partie 3 gegen jenen von Partie 4 antritt. Bestimmen Sie wiederum den Ausgang dieser Runde, und geben Sie eine Begründung an.

c) Bestimmen Sie schliesslich den Ausgang des Finales, in welchem die Sieger der zweiten Runde gegeneinander antreten.

Unabhängig von Ihrem prognostizierten Ausgang geschieht in der ersten Runde ein nicht unvorhersehbares Malheur: Long Johns Holzbein rollt nicht ins Beibott, sondern von der Rampe und fällt ins Wasser. Dies bringt ihm nicht nur eine Niederlage, sondern auch den Hohn seiner Kameraden ein. Insbesondere der wieder genesene Lateiner kann sich in den kommenden Tagen allerlei Spötteleien nicht verkneifen, und schliesslich platzt Long John der Kragen: "Das hätte dir genauso gut passieren können!" - "Unsinn," erwidert der Lateiner, "immerhin weiss ich, wie weit vom Rand ich dein Holzbein hätte hinlegen müssen, damit es nicht herunterfällt." Und in der Tat kann er dies berechnen – Sie auch?

d) Wir kennen die Höhe h und den Grundflächendradius r des Kegels, welchen Long John statt eines Beines trägt, und wir wissen auch, dass seine Spitze beim Start auf jenen Rand der Rampe wies, über welchen das Holzbein ins Wasser fiel. Bestimmen Sie den Abstand x, welchen die Spitze zum besagten Rand haben müsste, damit das Holzbein nicht ins Wasser fällt. (Hinweis: Betrachten Sie den Schwerpunkt des Kegels.)

Aufgabe 9.
Anderslautenden Gerüchten zum Trotz fand die Besatzung der Revenge Libertatia nicht auf Hispaniola, und so suchen sie nun in fremden Gezeiten, wo sie Skorbut, Engländer und andere Unannehmlichkeiten erdauern. Endlich langen sie auf einer unbekannten Insel an, auf welcher sich ein ehrwürdiger alter Tempel von gleichmässig zwölfeckigem Grundriss findet, erbaut vom $(\text{Ur})^7$grossvater des aktuellen Herrschers der Insel, welcher ein grosser Gelehrtenkönig war. Der gegenwärtige König, welchem die Piraten wider seinen thronräuberischen Zwillingsbruder Philippe beigestanden haben, führt den grausamen Piraten Roberts und seine Mannen höchstselbst durch den Tempel. Über dem grossen Eingangsportal erblicken sie eine marmorne Tafel, in welche die Formel

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} = \frac{1}{2}$$

eingraviert ist. Der König erklärt: “Diese Formel gehört zu einem Rätsel, welches mein Ahne hinterliess. Einzig mir als seinem Erben ist die Lösung bekannt, und noch niemand vermochte bisher dies Rätsel zu lösen, doch wem dies gelänge, der solle nach Weisung meines weisen Ahnherren mit einem gewaltigen Schatz belohnt werden.” Diese letzten Worte gewinnt die Aufmerksamkeit aller Piraten, welche mit Ausnahme des alten Lateiners beim Anblick der Formel sich gelangweilt abwenden wollten. Auf ihr Drängen nennt ihnen der König, auf die Formel deutend, das ganze Rätsel: *”Siehe, o Vielgewanderter, diese meine Rechnung, und nenne mir ein Äusserstes meines Fehlers im Innersten.”*
Da die Lösung aber weder “ein Mensch” noch im verdrängten Wasser zu finden noch – der Piraten liebste Antwort – mit dem Schwerte zu erzwingen ist, sind die Piraten bald am Ende ihres Griechischs angelangt; einzig der Lateiner hat, in tiefstem Schweigen versunken, noch keine Antwort versucht, noch will er dies augenblicklich tun. Derweil die übrigen Piraten staunen ob der Pracht, welche ihnen der König im Tempel zeigt, wirkt der Lateiner abwesend, beinahe entrückt. Schliesslich, als des Königs Führung gerade ihr Ende findet, lächelt der Lateiner, und er nennt dem König die richtige Antwort auf sein Rätsel, sehr zur Freude seiner Kameraden.
Können Sie die Antwort des Lateiners ebenfalls angeben? Wenn nicht, dann mögne die späteren Erklärungen des Lateiners (und einige weitere Anmerkungen) vielleicht erhellend sein:

a) “Wie es der Zufall will, habe ich mich unlängst der Bestimmung der Zahl π gewidmet, und dabei einige Kommentare des Schotten Gregory über die Summen des Inders Madhava gelesen. Ich fand, dass sich seine Idee allgemeiner fassen lässt, und dass man sie zuerst einmal auf Gleichungen anwenden kann, wie wir sie in Cartesius' Geometrie finden." (Wiederum können wir nur bedauern, dass des Lateiners Aufzeichnungen der Nachwelt nicht erhalten blieben: Er spricht hier von etwas, was wir heute Taylorentwicklung von Polynomen nennen, nach dem Mathematiker Brook Taylor. Ein *Polynom* ist eine Funktion der Form

$$p(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

wobei $d \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl ist und $a_d, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ reellwertige Koeffizienten sind. Beispiele wären etwa $p(x) = 3x^2 + ex + 5.43$ mit $d = 2, a_0 = 5.43, a_1 = e$ und $a_3 = 3$, oder $p(x) = x^5$ mit $d = 5, a_5 = 1$ und $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$. Die *Taylorentwicklung* (mit Entwicklungspunkt 0) eines Polynoms $p(x)$ ist die Funktion

$$\begin{aligned} T_p(x) &= p(0) + p'(0) \cdot x + \tfrac{p''(0)}{2} \cdot x^2 + \tfrac{p'''(0)}{6} \cdot x^3 + \cdots + \tfrac{p^{(d)}(0)}{d!} \cdot x^d \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{d} \tfrac{p^{(i)}(0)}{i!} x^d, \end{aligned}$$

wobei $p^{(i)}$ die i-te Ableitung von p meint und $i! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (i-1) \cdot i$; wir setzen auch $0! = 1$, und die nullte Ableitung einer Funktion ist natürlich die Funktion selbst. Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass

$$p(x) = T_p(x).$$

b) "Diese Summendarstellung können wir aber auch für andere Funktionen aufstellen, zum Beispiel für den Sinus. Damit dies genau wird, braucht man aber unendlich viele Summanden; betrachtet man nur deren endlich viele, so erhält man doch immerhin eine gute Annäherung an den tatsächlichen Wert." (Tun Sie, was der Lateiner vorschlägt: Geben Sie die Taylorentwicklung $T_{\sin}$ des Sinus analog T_p in Teil a) an, und begründen Sie, warum man dafür unendlich viele Summanden braucht. Geben Sie die ersten zehn Summanden der Taylorentwicklung für den Sinus explizit an. Die Taylorentwicklung einer Funktion ist übrigens auch in der naturwisschenschaftlichen Praxis von Nutzen, um Funktionswerte anzunähern, die nicht einfach direkt bestimmt werden können.)

c) "Lasst mich nun die Bedeutung des Rätsels enthüllen: Es bezieht sich natürlich auf diesen Tempel, dessen Grundriss ein gleichseitiges Zwölfeck ist, welches aus zwölf gleichschenkligen Dreicken zusammengesetzt ist, deren Spitzen sich treffen. Das "Innerste" meint den Mittelpunkt des Zwölfecks, und wenn wir die zwölf Winkel in den Spitzen betrachten, so sind sie alle gleich, und es ist nun klar, was die Formel bedeuten soll." (Was meint der Lateiner damit? Geben Sie den Winkel an, von dem er spricht, und erklären Sie die Bedeutung der Formel über dem Portal.)

d) "Schliesslich bedeute das "Äusserste meines Fehlers" natürlich eine Fehlerabschätzung für die Formel über dem Portal, denn eigentlich stimmt sie ja nicht genau, wenn wir den zwölffachen Winkel im Innersten einsetzen. Dank der Summendarstellung des Sinus können wir eine solche Abschätzung nun leicht geben." (Tun Sie genau dies! Bestimmen Sie die Antwort auf des Königs Rätsel, nämlich eine gute Fehlerabschätzung ohne Taschenrechner.)

Aufgabe 10.
Nach mancherlei Abenteuern scheint nun das Ende des grausamen Piraten Roberts und seiner Mannen gekommen: Sie wurden infolge folgenschwerer Verwechslung gefangen genommen vom bis zur siebten See gefürchteten Captain Reis von der Crimson Roger; sicherlich harrt ihrer ein grausames Schicksal! Tatsächlich beschliesst Captain Reis, sich mit den Gefangenen ein kleines Spiel zu erlauben, wie es zu jener Zeit unter schwarzherzigen Schuften und Schurken nicht unüblich war: Am nächsten Tag sollen sich alle Gefangenen mit dem Rücken zum Hintermann in einer Reihe aufstellen, so dass sie ihre Kameraden vor sich sehen. Dann werde jedem der Gefangenen ein Dreispitz aufgesetzt, entweder schwarz oder weiss, und beginnend mit dem Hintersten müsse ein jeder raten, welche Farbe sein eigener, dem Träger nicht sichtbarer Hut hat. Rät er falsch, so soll er eines grausamen Todes sterben – Captain Reis versteht sich wohl auf das Ersinnen stets neuer, ebenso fürchterlicher wie unterhaltsamer Todesarten –; wer jedoch richtig rät, wird nur als Ruderslave an ottomanische Korsaren verkauft, von welch Schicksal man sich immerhin Flucht oder Befreiung erhoffen kann. Einen letzten Abend verbleibt den gefangenen Piraten gemeinsam, und für einmal vermissen sie den alten Lateiner, der ihnen so oft mit seiner besserwisserischen Angeberei auf die Nerven ging, hat dieser sich doch in Patagonien niedergelassen mit des Gelehrtenkönigs Schatz und dem wohlfeilen Schwur, weder zu sterben noch zu ruhn, ehe ihm des Kreises Quadratur geglückt sei. Seine einstigen Kameraden allerdings wünschen sich nun, er wäre noch bei ihnen und könnte ihnen in dieser mieslichen Lage mit Einfallsreichtum und Rechenkunst beistehen.
Die Nacht verstreicht, die Morgendämmerung kündet den Tag des Hüteratens an, als der grausame Roberts nach stundenlangem fingerbemühenden Brüten und Rechnen plötzlich aufspringt und ruft: "Wir brauchen den Lateiner nicht! Ich weiss, wie wir uns alle das Sterben aufsparen können, alle

ausser mir, denn ich werde der hinterste Mann sein!" Und tatsächlich wird seine Idee seiner Männer Leben retten, bevor sie sich in ottomanischer Gefangenschaft aus den Augen verlieren...
Was war des grausamen Piraten Roberts rettender Einfall? Wie kann er als hinterster Mann, der aller anderer Hüte vor sich sieht, dafür sorgen, dass ein jeder vor ihm seine eigene Hutfarbe bestimmen kann? (Hinweis: Überlegen Sie sich, was genau ein jeder Pirat in der Reihe vor sich sieht, und was der Unterschied ist zwischen dem von ihm und vom Mann vor ihm Gesehenen.)

2 Die Lösungen

Lösung 1.
a) Wir legen 8 Goldmünzen in jede Waagschale. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: Sind die 16 Goldmünzen auf der Waagschale gleich schwer, dann muss sich die schwerere unter den 9 übrigen Goldmünzen befinden. Ansonsten befindet sie sich in der Waagschale, die schwerer ist. Wir haben das Problem damit auf das Problem zurückgeführt, aus 9 oder 8 Goldmünzen durch zweimal wägen die schwerere Goldmünze ausfindig zu machen. Sind noch 9 Münzen übrig, unter denen sich die schwerere befindet, dann legen wir je drei Münzen in jede Waagschale. Wieder sind zwei Fälle möglich: Sind die Waagschalen gleich schwer beladen, dann muss die schwerere Münze sich unter den restlichen drei Münzen befinden, ansonsten befindet sie sich in der tiefer liegenden Waagschale mit zwei anderen Münzen. Nun können wir noch einmal wägen, wobei wir je eine der drei Münzen, unter denen sich die schwerere befinden muss, in jede Waagschale legen und eine übrig lassen. Sind die Waagschalen gleich schwer, dann ist die übrig gelassene Münze die schwerere, ansonsten ist es natürlich die in der tieferen Waagschale. Sind nach dem ersten Wägen nur noch acht Münzen übrig, unter denen sich die schwerere befindet, dann können wir analog vorgehen, wobei wir beim nächsten Wägen nur zwei Münzen auf der Seite lassen.

b) Man überlegt sich leicht, dass durch einmal wägen maximal aus drei Münzen die schwerere ausfindig gemacht werden kann. Können wir zweimal wägen, dann ist das Ziel also beim ersten Mal wägen die Gruppe der Verdächtigen auf drei zu reduzieren. Dies können wir höchstens mit $9 = 3 \cdot 3$ Münzen machen, da ein Wägevorgang die Münzen in drei Gruppen unterteilt: die Münzen in der rechten Waagschale, die in der linken und die, die wir nicht auf die Balkenwaage legen. Mit zweimal Wägen können wir also aus neun Münzen die schwerere bestimmen. Können wir dreimal wägen, dann muss der erste Wägevorgang die Verdächtigen also auf 9 reduzieren. Die gleiche Überlegung führt nun dazu, dass wir mit dreimal Wägen maximal aus $3 \cdot 9 = 27$ Münzen die schwerere ausfindig machen können. Durch vollständige Induktion lässt sich also durch die Überlegung der schrittweise Dreiteilung und dem „Drei-Münzen-einmal-wägen-Problem“ als Induktionsverankerung zeigen, dass wir durch k Mal wägen die schwerere Münze aus maximal 3^k Münzen ausfindig machen können.

Interessanter wird die Situation, wenn wir voraussetzen, dass man nicht weiss, ob die Ausreissermünze schwerer oder leichter als die anderen ist.

Dann braucht man, um aus 9 Münzen den Ausreisser zu finden und zu bestimmen, ob er schwerer oder leichter ist, bereits 3 Wägevorgänge. Zudem lässt sich durch einen einzigen Wägevorgang nicht mehr bestimmen, in welcher Gruppe der Ausreisser zu finden ist...

Lösung 2.
Als sich der kluge Barbier Russell am Barte kratzte, wurde er gewahr, dass auch er unter Bartwuchs litt und ein Mann an Bord sein würde. Er würde – wollte er das Jahr auf dem Schiff überstehen – seinen Bart aber genau dann selbst rasieren müssen, wenn er ihn nicht selbst rasiert hätte. Offenbar ein Ding der Unmöglichkeit, wohingegen das Überleben ausgesetzt in einem Beiboot ohne Wasser und ohne Proviant inmitten des Atlantik sehr wohl denkbar war. Deshalb – und um sich den Anblick des gewaltig genüsslich grinsenden grausamen Piraten Roberts vom Ende eines Strickes an der Rahe aus zu ersparen – entschied er sich für das Beiboot.
Es wird berichtet, dass Russell von einem betrunkenen Piraten auf zwei zusammengebundenen Schildkröten gerettet wurde.

Lösung 3.
Wir gehen wie in den Hinweisen vorgeschlagen vor und konstruieren zuerst eine Funktion $T(x)$, welche die Differenz zwischen 06:00 Uhr und der Zeit des Sonnenaufgangs beschreibt. Wir wählen 06:00 Uhr aus folgendem Grund als Fixpunkt: An den beiden Äquinoktion (21. März und 23. September) sind Tag und Nacht genau gleich lang, das heisst, die Sonne steht 12 Stunden am Himmel; den Zenit erreicht sie am Mittag, der Sonnenaufgang ist also um 06:00 Uhr. Dies ist der Mittelwert der Zeit des Sonnenaufgangs. Die Uhrzeit, zu der die Sonne am Tag x aufgeht, wäre dann also $06:00 - T(x)$ Uhr. Dazu machen wir folgende Annahmen:

- Das Jahr hat der Einfachheit halber 360 Tage.
- Für einen Monat veranschlagen wir 30 Tage.
- Der Verlauf der Funktion $T(x)$ lässt sich durch eine Sinusfunktion beschreiben.
- Die Periode der Sinusfunktion sollte einem Jahr entsprechen, das heisst 360 Tage sollten 2π entsprechen.

- ◇ Den noch unbekannten maximalen Ausschlag von $T(x)$ bezeichnen wir mit A.
- ◇ Die Nullstellen der Sinusfunktion entsprechen gerade den Äquinoktien - also dem 21. März und dem 23. September. Wir setzen den Nullpunkt beim Frühlingsäquinoktium an, das heisst, $x = 0$ Tage entspricht dem 21. März.
- ◇ Durch die Vereinfachung der Monatslänge fällt das Herbstäquinoktium auf den 21. September.

Mit diesen Annahmen können wir die folgende Funktion aufstellen:

$$T(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360 \text{ Tage}} x\right).$$

Nun wollen wir A berechnen. Wir wissen, dass die Sonne am 21. Mai um 04:57 Uhr aufgegangen ist. 4 Tage später ist sie 4 Minuten früher aufgegangen. Mittels der Formel

$$dT = T'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$$

können wir mit diesen Angaben die Amplitude A abschätzen, da wir wissen, dass eine Abweichung dx von 4 Tagen zu einer Abweichung dT von 4 Minuten führt. Dazu berechnen wir erst die Ableitung

$$T'(x) = A\frac{2\pi}{360 \text{ Tage}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{360 \text{ Tage}} x\right)$$

und werten diese bei $x_0 = 60$ Tage, was dem 21. Mai entspricht, also 60 Tage nach dem Frühlingsäquinoktium, aus:

$$\begin{aligned} T'(60 \text{ Tage}) &= A\tfrac{2\pi}{360 \text{ Tage}} \cdot \cos\left(\tfrac{2\pi}{360 \text{ Tage}} 60 \text{ Tage}\right) \\ &= A\tfrac{2\pi}{360 \text{ Tage}} \cdot \cos\left(\tfrac{2\pi}{6}\right) = A\tfrac{2\pi}{360 \text{ Tage}} \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \\ &= A\tfrac{2\pi}{360 \text{ Tage}} \cdot \tfrac{1}{2} = A\tfrac{\pi}{360 \text{ Tage}}. \end{aligned}$$

Jetzt können wir $dT = 4$ min und $dx = 4$ Tage einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} dT = T'(x_0) \cdot \mathrm{d}x \quad &\Leftrightarrow \quad 4 \text{ min} = A\tfrac{\pi}{360 \text{ Tage}} \cdot 4 \text{ Tage} \\ &\Leftrightarrow \quad 4 \text{ min} = A\tfrac{\pi}{90} \Leftrightarrow A = 4 \text{ min} \cdot \tfrac{90}{\pi} \\ &\overset{1}{\Leftrightarrow} \quad A \approx 4 \text{ min} \cdot \tfrac{90}{3} \Leftrightarrow A \approx 120 \text{ min} = 2 \text{ h}. \end{aligned}$$

Nun haben wir eine Approximation von $T(x)$:

$$T(x) \approx 2 \text{ h} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360 \text{ Tage}} x\right).$$

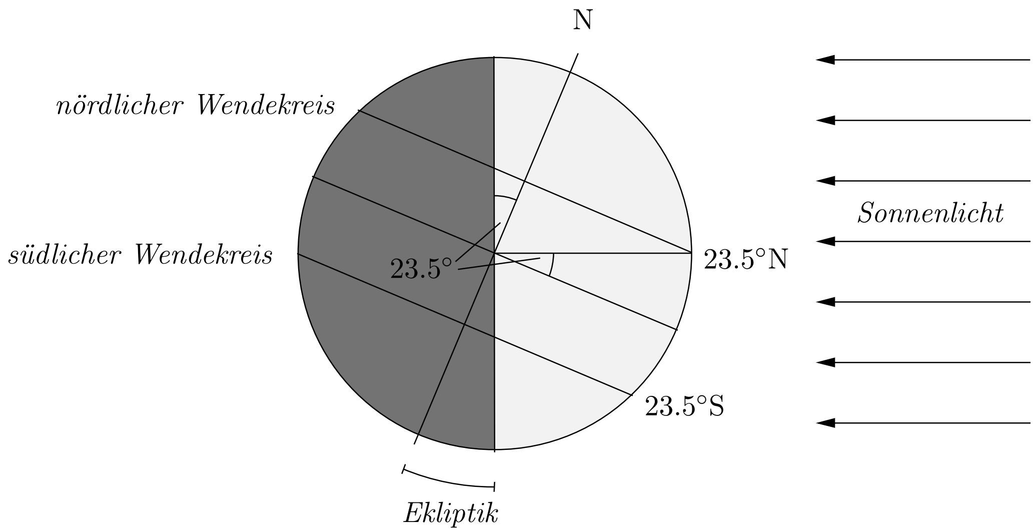
[1]Wir nähern π durch 3 an.

Nun haben wir noch die Formel

$$S_{x_1} = \frac{12\ \mathrm{h}}{\pi} \arccos(\tan(\beta) \cdot \tan(\gamma_{x_1}))$$

gegeben, mit deren Hilfe wir die nördliche geographische Breite β unseres Standortes bestimmen können. Wir benötigen dazu jedoch die höchste geographische Breite des Sonnenstandes an einem Tag x_1. Wir kennen diesen explizit für den längsten Tag: Er entspricht am Tag der Sommersonnenwende, also dem 21. Juni, gerade der Ekliptik. Die folgende Skizze sollte den Sachverhalt veranschaulichen:

Erdbeleuchtung zur Sommersonnenwende



Der 21. Juni ist gerade 3 Monate nach dem 21. März, dem Frühlingsäquinoktion, also bei $x_1 = 90$ Tage. Die höchste geographische Breite des Sonnenstandes entspricht dann gerade der Ekliptik, also $\gamma_{x_1} = 23.5°$. Wir benötigen noch die Zeit des Sonnenaufgangs am 21. Juni, diese können wir nun mit $T(x)$ berechnen:

$$\begin{aligned} S_{x_1} &= 6\ \mathrm{h} - T(x_1) = 6\ \mathrm{h} - 2\ \mathrm{h} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360\ \mathrm{Tage}} 90\ \mathrm{Tage}\right) \\ &= 6\ \mathrm{h} - 2\ \mathrm{h} \cdot \sin\left(\frac{1\pi}{2}\right) = 6\ \mathrm{h} - 2\ \mathrm{h} \cdot 1 = 4\ \mathrm{h}. \end{aligned}$$

Somit können wir einsetzen:

$$
\begin{aligned}
S_{x_1} &= \tfrac{12\text{ h}}{\pi}\arccos(\tan(\beta)\cdot\tan(\gamma_{x_1}))\\
&\Leftrightarrow\ 4\text{ h} = \tfrac{12\text{ h}}{\pi}\arccos(\tan(\beta)\cdot\tan(23.5^\circ))\\
&\overset{2}{\Leftrightarrow}\ 4\text{ h} \approx \tfrac{12\text{ h}}{\pi}\arccos\big(\tan(\beta)\cdot\tfrac{1}{2}\big)\\
&\Leftrightarrow\ 4\text{ h}\tfrac{\pi}{12\text{ h}} \approx \arccos\big(\tfrac{1}{2}\tan(\beta)\big)\\
&\Leftrightarrow\ \tfrac{\pi}{3} \approx \arccos\big(\tfrac{1}{2}\tan(\beta)\big)\\
&\Leftrightarrow\ \cos\big(\tfrac{\pi}{3}\big) \approx \tfrac{1}{2}\tan(\beta)\\
&\Leftrightarrow\ \tfrac{1}{2} \approx \tfrac{1}{2}\tan(\beta) \Leftrightarrow \beta \approx 45^\circ.
\end{aligned}
$$

Die Insel liegt also auf 45° nördlicher Breite. Das wir eine nÃűrdliche Breite haben, wird sofort klar, wenn man bedenkt, dass die Sonne im Mai vor 06:00 Uhr aufgegangen ist. Schlagen wir die geographischen Breitengrade der aufgelisteten Inseln nach, so kommt nur Hokkaido in Frage.

Lösung 4.

Der Lateiner überlegt sich kurz, dass die Schussweite bei Winkel $\alpha = 0^\circ$ Null sein muss, daher fallen a) und c) weg. Ebenso muss die Schussweite Null sein, wenn er den Winkel $\alpha = 90^\circ$ wählt, womit d) ausfällt. e) fällt auch weg, da bei $\alpha = 90^\circ$ weder die maximale Schusshöhe noch $\cos(2\alpha)$ Null ist, die Funktion als ganzes also auch nicht Null sein kann. Es bleibt also nur noch die Formel b) übrig, welche die obigen Annahmen erfüllt. Der Lateiner weiss somit, dass die maximale Schussweite gegeben ist durch

$$\text{b)}\qquad \delta(\alpha) = m\sin(2\alpha)\,.$$

Für die maximale Schusshöhe muss gelten, dass sie für $\alpha = 0^\circ$ Null ist. Damit kann der Alte die Formeln B) und E) ausschliessen. Offensichtlich darf die maximale Schusshöhe bei einem Winkel von $\alpha = 90^\circ$ nicht Null sein, womit die Formeln A) und C) wegfallen. Der Lateiner kann somit durch ein einfaches Ausschlussverfahren herausfinden, dass die maximale Schusshöhe gegeben ist durch

$$\text{D)}\qquad \beta(\alpha) = \frac{1}{2}m\sin^2(\alpha)\,.$$

Die gewünschte Schussweite ist nun gegeben, und es ist bekannt, dass die maximale Schussweite m der Kanone 2000 Fuss beträgt. Mit der Formel für

[2] Wir wenden die in der Aufgabenstellung vorgeschlagene Näherung $\tan(23.5^\circ) \approx \frac{1}{2}$ an.

die Schussweite lässt sich damit der Winkel berechnen:

$$\delta(\alpha) = 1732 \text{ Fuss} \Leftrightarrow m\sin(2\alpha) = 1732 \text{ Fuss} \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \frac{1.732}{2} \approx \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

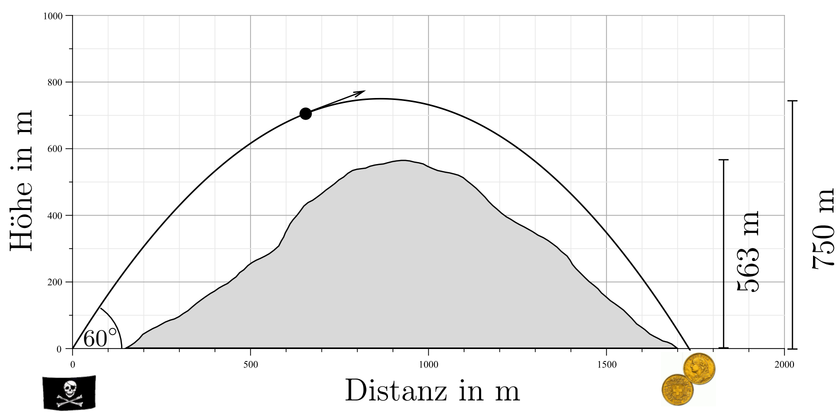
Daraus folgt $2\alpha \in \{60°, 120°\}$. Der Winkel α kann also 30° oder 60° betragen. Entscheiden lässt sich dies durch Einsetzen in die Formel für die maximale Schusshöhe. Diese liefert für $\alpha = 30°$ die maximal Schusshöhe

$$\beta(30°) = \frac{1}{2}m\sin^2(30°) = 1000 \text{ Fuss} \cdot \frac{1}{4} < 563 \text{ Fuss}.$$

Bleibt nur noch $\alpha = 60°$. Hier gilt

$$\beta(60°) = \frac{1}{2}m\sin^2(60°) = 1000 \text{ Fuss} \cdot \frac{3}{4} = 750 \text{ Fuss} > 563 \text{ Fuss}.$$

Der gesuchte Winkel beträgt also 60°, da bei 30° der Inselberg erschossen wird.



Hätte der Berg eine Höhe von 854 Fuss gehabt, wäre ein Treffer nicht zu bewerkstelligen gewesen, da für eine grössere Schusshöhe ein grösserer Winkel nötig wäre. Da aber die Schussweite bei 45° maximal ist, resultiert eine Erhöhung des Abschusswinkels aus iii) in einer Verringerung der maximalen Schussweite. Die Aurea wäre damit nicht mehr zu treffen gewesen.
Rechnet man nach, wäre mindestens ein Abschusswinkel von etwa 67.7° nötig gewesen, wobei die Kanonenkugel aber bereits nach circa 1404 Fuss runtergekommen wäre.

Lösung 5.
a) Durch Ausprobieren findet man leicht heraus, dass mit den 1-Pfund und 3-Pfund Gewichten jedes ganzzahlige Gewicht zwischen 0 und 4 Pfund auf der Balkenwaage bestimmen kann[3]. Dies sieht man auch anhand folgender Tabelle:

Masse (linke Waagschale)	Gewichte (linke Waagschale)	Gewichte (rechte Waagschale)
0	0	0
1	0	1
2	1	3
3	0	3
4	0	$1 + 3$

Damit wäre Teilaufgabe a) gelöst.

b) Wir machen uns – statt blindlings rumzupröbeln – folgende Überlegungen: Mit dem 1-Pfund- und dem 3-Pfund-Gewicht sind schon alle ganzzehligen Gewichte bis 4 abgedeckt, wir müssen also nur noch die Massen von 5 bis 13 Pfund betrachten, wobei wir immer noch die Gewichte 1 und 3 verwenden dürfen. Wir wählen also ein möglichst grosses Gewicht, welches uns zusammen mit dem 1- und 3-Pfund-Gewicht erlaubt, 5 Pfund zu wägen. Dieses Gewicht ist 9 Pfund:

Masse (linke Waagschale)	Gewichte (linke Waagschale)	Gewichte (rechte Waagschale)
5	$1 + 3$	9

Ausserdem können wir damit auch gerade 13 Pfund wägen:

Masse (linke Waagschale)	Gewichte (linke Waagschale)	Gewichte (rechte Waagschale)
13		$1 + 3 + 9$

Da wir mit den Gewichten 1 und 3 alle ganzen Zahlen bis 4 erzeugen können, können wir anders gesagt in beide Richtungen alle ganzen Zahlen bis 4 Pfund von 9 Pfund abweichen – wir können also mit dem 9er Gewicht und den bisherigen Gewichten alle ganzen Zahlen von 9-4=5 bis 9+3+1=13 erzeugen. Analog überlegt man sich, dass die Gewichte von 14 = 27-13 bis 40 = 27+13 durch hinzunehmen eines 27-Pfund-Gewichts erreicht werden können.

[3]Man bedenke, dass man die Gewichte auch in dieselbe Waagschale wie das Wägegut legen kann.

Zusammengefasst benötigen wir also für ganzzahlige Gewichte bis 13 Pfund je ein 1-, 3-, und 9-Pfundgewicht, während für Gewichte bis 40 Pfund je ein 1-Pfund-, ein 3-Pfund-, ein 9-Pfund- und ein 27-Pfundgewicht reichen.

c) **Behauptung:** Seien $n \in \mathbb{N}$ und $m = \frac{1}{2}(3^n - 1)$. Dann lassen sich alle ganzzahligen Gewichte zwischen 0 und m Pfund mit je einem 1-Pfund-, 3-Pfund-, 3^2-Pfund, …, 3^{n-2}-Pfund und einem 3^{n-1}-Pfund-Gewicht wägen, also mit n Gewichten.[4]

Beweis. Jede ganze Zahl g im Intervall $[0, m]$ lässt sich darstellen als Summe von Termen der Form $a \cdot 3^i$, wobei $a \in \{1, 2\}$ und $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Dies entspricht gerade der Darstellung der Zahl g im Dreiersystem. Lassen wir auch $a = 0$ zu, dann können wir schreiben

$$g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 3^i \text{ mit } a_i \in \{0, 1, 2\}.$$

Wählen wir zum Beispiel $n = 5$, d. h. $m = \frac{1}{2}\left(3^5 - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot 242 = 121$, dann lässt sich $g = 79 \in [0, 121]$ schreiben als

$$\begin{aligned} g &\overset{5}{=} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 27 + 0 \cdot 81 \\ &= 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^4 \\ &= \sum_{i=0}^{4} a_i \cdot 3^i \text{ mit } a = (a_i)_{i=0}^4 = (1, 2, 2, 2, 0). \end{aligned}$$

Die Zahl 2221 (umgekehrt geschrieben, weil wir bei der Zahldarstellung von der grössten zur kleinsten Potenz gehen) entspricht nämlich gerade der Darstellung der Zahl 79 im Dreiersystem[6].
Betrachten wir also die Dreierdarstellung von Zahlen g im Intervall $[0, m]$ für $m = \frac{1}{2}(3^n - 1)$, dann sind diese höchstens n-stellig. Damit hätten wir gezeigt, dass wir mit je zwei 1-Pfund-, 3-Pfund-, 3^2-Pfund, …, 3^{n-2}-Pfund und zwei 3^{n-1}-Pfund-Gewichten jedes Gewicht zwischen 0 und m Pfund abwägen können. Dies sind aber immer noch doppelt soviele Gewichte, wie wir

[4] Es genügt die Aussage für $m = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ zu zeigen, da damit natürlich auch alle ganzzahligen Gewichte bis zu einer kleineren Zahl gewogen werden können.

[5] Wir gehen für diese Zerlegung von der grössten zur kleinsten Dreierpotenz vor. Das heisst, wir schauen, wie oft passt 81 in 79, ziehen das dann ab, und schauen dann, wie oft 27 noch reinpasst, ziehen das wieder ab, usw.

[6] Man denke zum Beispiel an die Dezimaldarstellung, 79 wäre eigentlich $7 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$; oder $121 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$ usw.

eigentlich haben wollten. Wir müssen also irgendwie versuchen, aus der eben beschriebenen Darstellung der Zahl g den Koeffizienten 2 wegzubekommen. Nun können wir aber noch die Möglichkeit ausnutzen, Gewichte in die Gleiche Waagschale wie das Wägegut zu legen. Die mit dem Wägegut hineingelegten Gewichte subtrahiert man von den Gewichten, die man in die Waagschale ohne das Wägegut gelegt hat, um das Gewicht des Wägegutes zu erhalten. Bräuchten wir also vom 3^i-Pfund-Gewicht zwei Stück, können wir ausnutzen, dass $2 \cdot 3^i = 3 \cdot 3^i - 3^i = 3^{i+1} - 3^i$ gilt. Ersetzen wir nun von der kleinsten Dreierpotenz her in unserer Darstellung jedes $2 \cdot 3^i$ durch ein $-1 \cdot 3^i + 1 \cdot 3^{i+1}$ und dadurch entstehende $3 \cdot 3^j$ durch 3^{j+1}, dann erhalten wir eine Darstellung der Form[7]

$$g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 3^i, \text{ mit } a_i \in \{-1, 0, 1\}.$$

Jedes Gewicht, welches nun eine -1 als Koeffizienten hat, kommt in die Waagschale mit dem Wägegut, jedes mit einer 1 als Koeffizienten legen wir in die andere Waagschale, und jedes mit einer 0 als Koeffizienten wird nicht benötigt, um g zu wägen. Damit hätten wir einerseits gezeigt, dass die Behauptung gilt, andererseits auch gerade einen Algorithmus beschrieben, um ein bestimmtes Gewicht g mit den angegebenen Gewichten zu wägen. $\square$

Vielleicht hilft zur Verbildlichung ein Zahlbeispiel:

Beipiel: Wir betrachten nochmals den Fall $n = 5$ und $g = 79$. Wir hatten die Darstellung

$$g = 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^4.$$

gefunden. Eliminieren wir nun von hinten nach vorne – wie beschrieben –

[7]Bei der Transformation kann es nicht passieren, dass der letzte Koeffizient –also der von 3^{n-1} – grösser als 1 wird, da die Summe aller kleineren Gewichte gerade $\sum_{i=0}^{n-2} 3^i = \frac{1}{2}\left(3^{n-1} - 1\right)$ (lässt sich leicht nachrechnen) ergibt; würde man also alle kleineren Gewichte in die Waagschale mit dem Wägegut legen, müsste immer noch $g \geq 3^{n-1} - \frac{1}{2}\left(3^{n-2} - 1\right) > \frac{1}{2}\left(3^{n-2} - 1\right)$ gelten; g wäre also grösser als m, was nach Voraussetzung nicht der Fall sein kann.

die 2-er-Koeffizienten, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
g &= 1\cdot 3^0 & &+2\cdot 3^1 & &+2\cdot 3^2 & &+2\cdot 3^3 & &+0\cdot 3^4\\
&= 1\cdot 3^0 & &-1\cdot 3^1 & &+1\cdot 3^2+2\cdot 3^2 & &+2\cdot 3^3 & &+0\cdot 3^4\\
&= 1\cdot 3^0 & &-1\cdot 3^1 & &+3\cdot 3^2 & &+2\cdot 3^3 & &+0\cdot 3^4\\
&= 1\cdot 3^0 & &-1\cdot 3^1 & &+0\cdot 3^2 & &+1\cdot 3^3+2\cdot 3^3 & &+0\cdot 3^4\\
&= 1\cdot 3^0 & &-1\cdot 3^1 & &+0\cdot 3^2 & &+3\cdot 3^3 & &+0\cdot 3^4\\
&= 1\cdot 3^0 & &-1\cdot 3^1 & &+0\cdot 3^2 & &+0\cdot 3^3 & &+1\cdot 3^4+0\cdot 3^4\\
&= 1\cdot 3^0 & &-1\cdot 3^1 & &+0\cdot 3^2 & &+0\cdot 3^3 & &+1\cdot 3^4\\
&= 1\cdot 1 & &-1\cdot 3 & &+0\cdot 9 & &+0\cdot 27 & &+1\cdot 81
\end{aligned}$$

Wir können also das Gewicht $g = 79$ wägen, indem wir das 3-Pfund-Gewicht in die Waagschale mit dem Wägegut legen, während wir das 1-Pfund-Gewicht und das 81-Pfund-Gewicht in die andere Waagschale legen. Dann wiegt die rechte Waagschale[8] $g + 3$ Pfund = 82 Pfund, während die linke Waagschale $1 + 81$ Pfund = 82 Pfund wiegt.

Weils einen Heidenspass macht, noch ein weiteres Zahlbeispiel: Sei immer noch $n = 5$, und wählen wir diesmal $g = 61$, dann berechnen wir die Dreierpotenzensumme und eliminieren die 2-er-Koeffizienten:

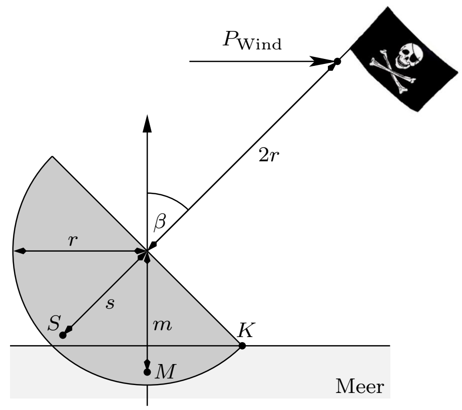
$$\begin{aligned}
g &= 1\cdot 1 & &+2\cdot 3 & &+0\cdot 9 & &+2\cdot 27 & &+0\cdot 81\\
&= 1\cdot 3^0 & &+2\cdot 3^1 & &+0\cdot 3^2 & &+2\cdot 3^3 & &+0\cdot 3^4\\
&= 1\cdot 3^0 & &-1\cdot 3^1 & &+1\cdot 3^2+0\cdot 3^2 & &+2\cdot 3^3 & &+0\cdot 3^4\\
&= 1\cdot 3^0 & &-1\cdot 3^1 & &+1\cdot 3^2 & &+2\cdot 3^3 & &+0\cdot 3^4\\
&= 1\cdot 3^0 & &-1\cdot 3^1 & &+1\cdot 3^2 & &-1\cdot 3^3 & &+1\cdot 3^4+0\cdot 3^4\\
&= 1\cdot 3^0 & &-1\cdot 3^1 & &+1\cdot 3^2 & &-1\cdot 3^3 & &+1\cdot 3^4\\
&= 1\cdot 1 & &-1\cdot 3 & &+1\cdot 9 & &-1\cdot 27 & &+1\cdot 81
\end{aligned}$$

Wir können also 61 Pfund wägen indem wir in die Waagschale mit dem Wägegut das 3-Pfund-Gewicht und das 27-Pfund-Gewicht legen, während wir in die andere Waagschale das 1-Pfund-Gewicht, das 9-Pfund-Gewicht und das 81-Pfund-Gewicht legen. Dann wiegt die Waagschale mit dem Wägegut 61+3+27 Pfund = 91 Pfund und die ohne Wägegut bringt ebenfalls 1+9+81 Pfund = 91 Pfund auf die Waage.

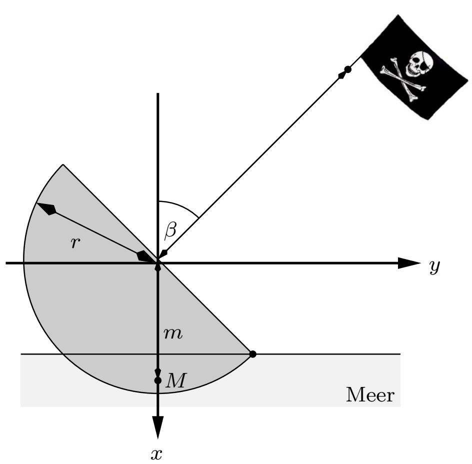
Dies ist übrigens ein altes mathematischers Problem, welches bereits im 17. Jahrhundert vom yeitweiligen Jesuiten Claude Gaspar Bachet de Méziriac untersucht wurde. Bachet hat auch die Arithmetik von Diophantus ins Französische übersetzt; in eine solche Übersetzung kritzelte Fermat seinen berühmten letzten Satz.

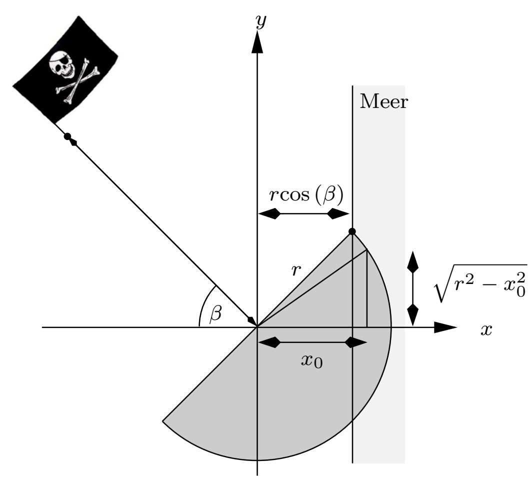
[8] Vorausgesetzt, in der rechten Waagschale liegt das Wägegut.

Lösung 6.
a) Wir rufen uns nochmal die Situation anhand der Skizze in Erinnerung:



Um das Metazentrum zu bestimmen, gilt es im dargestellten Querschnitt des Schiffes den Schwerpunkt der unter der Meereshöhe liegenden Fläche zu berechnen. Dazu legen wir das Koordinatensystem so fest, dass die x-Achse durch den Hauptmastankerpunkt senkrecht nach unten zeigt. Das Bildchen links soll dies verdeutlichen. Drehen wir das ganze noch, dann befinden wir uns in der rechts dargestellten Situation.





Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich der Rand des Schiffsquerschnitts unter der Wasseroberfläche durch die Funktion

$$\sqrt{r^2 - x^2}$$

beschreiben. Auch sieht man damit, dass der Abstand zwischen Hauptmastankerpunkt und Wasseroberfläche gerade $r\sin(\beta)$ beträgt, in der kritischen Lage ist dies $r\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}r}{2}$. Nun können wir die Formel aus den Vorlesungsfolien auf Seite 59°° verwenden:

$$m = x_S = \frac{\int\limits_{r\sin(\beta)}^{r} x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{r\sin(\beta)}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x} \overset{9}{=} \frac{\left(-\frac{1}{3}\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{r\sin(\beta)}^{r}}{\left(\frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right)\Big|_{r\sin(\beta)}^{r}}$$

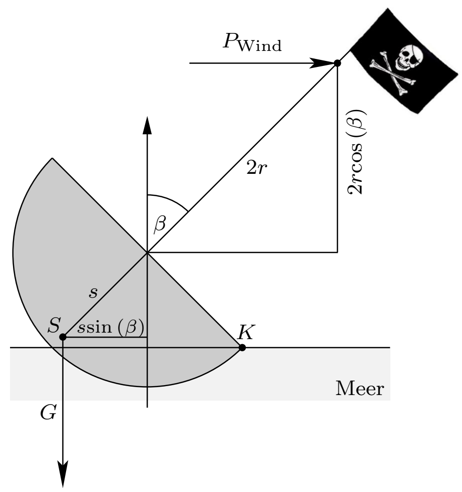
Für $\beta = 45°$ ist also:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{\frac{1}{3}\left(r^2 - \frac{1}{2}r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{r^2}{2}\arcsin(1) - \frac{\sqrt{2}r}{4}\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}r^2} - \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{8}}r^3}{\frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}r^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{6\sqrt{2}}r^3}{\frac{r^2}{4}\left(\pi - 1 - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{12}r}{\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}r}{\frac{\pi}{2} - 1} = \frac{2\sqrt{2}r}{3\pi - 6}. \end{aligned}$$

b) Wir interessieren uns nun für die Drehmomente M_W, welches aus der vom Wind erzeugten Kraft P_W resultiert, und M_G, welches von der Gewichtskraft

[9] Wir benutzen die Formeln $\int x\sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}$ und $\int \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$ aus einer Integralsammlung.

P_G herkommt. Dazu betrachten wir folgende Skizze:



Das Drehmoment M errechnet sich aus Hebelarm h, senkrecht zur Kraft, mal Kraft F, also

$$M = h \cdot F.$$

Damit und mit etwas Trigonometrie (vgl. die eingezeichneten Hebelarme in der obigen Skizze) ergibt sich

$$M_W = h_w \cdot P_w \overset{10}{=} 2r\cos(\beta)\,\lambda G \qquad \text{und} \qquad M_G = h_G \cdot G = s\sin(\beta)\,G.$$

In einer stabilen Schieflage heben sich die wirkenden Drehmomente gerade auf, es gilt $M_W = M_G$. Das heisst für λ:

$$M_W = M_G \Leftrightarrow 2r\cos(\beta)\,\lambda G = s\sin(\beta)\,G \Leftrightarrow 2r\cos(\beta)\,\lambda = s\sin(\beta)$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{s\sin(\beta)}{2r\cos(\beta)} = \frac{1}{2}\frac{s}{r}\tan(\beta)\,.$$

Das grösste λ vor dem Unglück gibt 45°; wird λ grösser, das heisst der Wind bläst stärker, wird die Deckkante K unter Wasser gedrückt. Somit ist der grösste Faktor λ vor der Katastrophe

$$\lambda_{\text{krit}} = \frac{s}{2r}\tan(45^\circ) = \frac{s}{2r}.$$

c) Nehmen wir an, in der kritischen Lage, also wenn $M_W = M_G$ und $\beta = \frac{\pi}{4}$ gilt, sei $\lambda = 0.1$, dann ergibt sich mit Teilaufgabe b)

$$0.1 = \lambda = \frac{1}{2}\frac{s}{r}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{s}{r} = 0.2 \cdot \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 0.2.$$

[10] Wir verwenden, wie in der Aufgabenstellung veranschlagt, dass $P_W = \lambda G$.

d) Sind die Rumfässer einmal von Bord, dann wird der Schwerpunkt S des Schiffes höher zu liegen kommen und die Strecke s somit kleiner. Zugleich wird $\lambda = \frac{P_W}{G}$ grösser, da G kleiner wird. Betrachten wir nun $\beta = \arctan\left(\frac{2\lambda r}{s}\right)$, so wird das Argument $\frac{2\lambda r}{s}$ grösser, β also ebenfalls grösser - das Schiff neigt sich also stärker! Zugleich aber steigt das Schiff wegen der kleineren Gewichtskraft G etwas aus dem Wasser, K liegt also bei 45° ein Stück über dem Wasser. Zu bestimmen, ob dies ausreicht, die Deckkante über dem Meeresspiegel zu halten, ist eine vetrackt aufwendige Rechnung. Eine angemessene Reaktion wäre also, die Musterlösung zu zerknüllen und sich auf das Schlimmste gefasst zu machen.

Lösung 7.
a) Wir schreiben für die Höhe des Fasses $l_0 := l(0)$, da die Höhe der eingeschlossenen Luftsäule zu Beginn gerade der Höhe des Fasses entspricht. Nun ist die Höhe des eingeschlossenen Luftvolumens $l(x)$ umgekehrt proportional zum Wasserdruck $p(x) = ax + p_0$, es gilt also

$$\frac{l(x)}{l_0} = \frac{p_0}{p(x)} = \frac{p_0}{ax + p_0}.$$

Lösen wir diese Gleichung nach $l(x)$ auf ergibt sich

$$l(x) = \frac{l_0 \cdot p_0}{ax + p_0}. \tag{1}$$

Die Auftriebskraft $A(x)$ ist proportional zum Luftvolumen im Fass in der Tiefe x und damit auch proportional zu $l(x)$. Da $A(0)$ gerade G entspricht erhalten wir

$$\frac{A(x)}{A(0)} = \frac{A(x)}{G} = \frac{l(x)}{l(0)}.$$

In Kombination mit Gleichung (1)erhalten wir die Beschreibung der Auftriebskraft

$$A(x) = \frac{G \cdot l(x)}{l(0)} = \frac{G \cdot l_0 \cdot p_0}{l_0\,(ax + p_0)} = \frac{G \cdot p_0}{ax + p_0}.$$

Für die kritische Tiefe x_0 gilt nun, dass die Auftriebskraft gerade der Gewichtskraft von Fass und Guybrush entspricht, es gilt also

$$A(x_0) = \alpha G.$$

Setzen wir die eben hergeleitet Formel für A ein erhalten wir

$$\begin{aligned} A(x_0) = \alpha G \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{G \cdot p_0}{a x_0 + p_0} = \alpha G && \Leftrightarrow \quad \tfrac{p_0}{a x_0 + p_0} = \alpha \\ &\Leftrightarrow \quad p_0 = \alpha \left(a x_0 + p_0\right) && \Leftrightarrow \quad p_0 = a \cdot \alpha x_0 + \alpha \cdot p_0 \\ &\Leftrightarrow \quad p_0 - \alpha \cdot p_0 = a \cdot \alpha x_0 && \Leftrightarrow \quad x_0 = \tfrac{p_0 - \alpha \cdot p_0}{a \cdot \alpha} \\ &\Leftrightarrow \quad x_0 = \tfrac{p_0}{a} \left(\tfrac{1}{\alpha} - 1\right). \end{aligned}$$

b) Die Tiefe des Fasses zum Zeitpunkt t sei also $x(t)$. Beim Auftauchen des Fasses wirken Auftriebskraft $A(x(t))$ (abhängig von der Tiefe des Fasses) und Gewichtskraft αG des Fasses einander entgegen. Wir betrachten nun die aus αG und $A(x(t))$ resultierende Kraft

$$R(x(t)) = A(x(t)) - \alpha G.$$

Wir wollen daraus die Beschleunigung des Fasses berechnen. Dazu verwenden wir das aus der Physik bekannte Gesetz

$$\text{Kraft} \;=\; \text{Masse} \;\times\; \text{Beschleunigung}.$$

Die Masse m des Fasses entspricht dabei der Gewichtskraft αG dividiert durch die Erdbeschleunigung $g \approx 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, also

$$m = \frac{\alpha G}{g}. \tag{2}$$

Dadurch erhalten wir

$$R(x(t)) = m \cdot \ddot{x}(t) = \frac{\alpha G}{g} \cdot \ddot{x}(t),$$

wobei $\ddot{x}(t)$ die zweite Ableitung von $x(t)$, also die nach oben gerichtete Beschleunigung des Fasses, bezeichnet. Durch umformen erhalten wir die Beschleunigung

$$\ddot{x}(t) = \frac{gR(x(t))}{\alpha G} = g \cdot \frac{A(x(t)) - \alpha G}{\alpha G}.$$

Damit haben wir für die Tiefe $x(t)$ des aufsteigenden Rumfasses eine Differentialgleichung zweiter Ordnung hergeleitet:

$$\ddot{x}(t) = g \cdot \frac{A(x(t)) - \alpha G}{\alpha G}.$$

Als Anfangsbedingung eignet sich natürlich

$$x(0) = x_0.$$

c) Nun wollen wir berechnen, wie hoch das Fass aus dem Wasser springt. Die Höhe lässt sich aus der Formel für die potentielle Energie

$$E_{\mathrm{pot}} = mgh$$

berechnen. Wir gehen davon aus, dass die gesamte kinetische Energie vom Zeitpunkt des Auftauchens (t_1 bis zum Moment t_2, an dem sich das Fass am höchsten Punkt über dem Meeresspiegel befindet, in potentielle Energie umgewandelt wird. Wir können also die kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}}(t_1)$ zum Zeitpunkt des Auftauchens mit der potentiellen Energie $E_{\mathrm{pot}}(t_2)$ des Fasses, am höchsten Punkt gleichsetzen:

$$E_{\mathrm{kin}}(t_1) = E_{\mathrm{pot}}(t_2) = mgh.$$

Die kinetische Energie zum Zeitpunkt des Auftauchens entspricht gerade der Arbeit W, welche beim Auftauchen "frei"wird, und das ist die gleiche Arbeit, die wir aufwenden müssten, um das Fass bis zur Tiefe x_0 zu drücken:

$$W = \int\limits_0^{x_0} R(x)\,\mathrm{d}x.$$

Um das Integral zu berechnen, setzen wir die in Teilaufgabe a) berechneten Werte ein:

$$\begin{aligned}
W &= \int\limits_0^{x_0} R(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{x_0} A(x) - \alpha G\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{x_0} \frac{G \cdot p_0}{ax + p_0} - \alpha G\,\mathrm{d}x \\
&= G \int\limits_0^{x_0} p_0 \cdot \frac{1}{ax + p_0} - \alpha\,\mathrm{d}x = G\left(\frac{p_0}{a}\ln(ax + p_0) - \alpha x\right)\Big|_0^{x_0} \\
&= G\left(\frac{p_0}{a}\ln(ax_0 + p_0) - \alpha x_0 - \frac{p_0}{a}\ln(a \cdot 0 + p_0) + \alpha \cdot 0\right) \\
&\overset{11}{=} G\left(\frac{p_0}{a}\ln\left(a \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{p_0}{a} + p_0\right) - \alpha \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{p_0}{a} - \frac{p_0}{a}\ln(p_0)\right) \\
&= G\left(\frac{p_0}{a}\ln\left(\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} + 1\right) p_0\right) - (1-\alpha) \cdot \frac{p_0}{a} - \frac{p_0}{a}\ln(p_0)\right) \\
&= G\left(\frac{p_0}{a}\ln\left(\frac{1}{\alpha} \cdot p_0\right) - (1-\alpha) \cdot \frac{p_0}{a} - \frac{p_0}{a}\ln(p_0)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= G\left(\frac{p_0}{a}\left(-\ln(\alpha)+\ln(p_0)\right) - \frac{p_0}{a}\cdot(1-\alpha) - \frac{p_0}{a}\ln(p_0)\right) \\
&= \frac{p_0 G}{a}\left(-\ln(\alpha)+\ln(p_0)-(1-\alpha)-\ln(p_0)\right) \\
&= -\frac{p_0 G}{a}\left(\ln(\alpha)+(1-\alpha)\right).
\end{aligned}
$$

Setzen wir also dies mit der potentiellen Energie zum Zeitpunkt t_2 gleich, ergibt sich

$$-\frac{p_0 G}{a}\left(\ln(\alpha)+(1-\alpha)\right) = E_{\text{pot}}(t_2) = mgh,$$

woraus wir h bestimmen können:

$$
\begin{aligned}
h &= -\frac{p_0 G}{mga}\left(\ln(\alpha)+(1-\alpha)\right) \overset{12}{=} -\frac{p_0 G}{\frac{\alpha G}{g} ga}\left(\ln(\alpha)+(1-\alpha)\right) \\
&= -\frac{p_0}{a\alpha}\left(\ln(\alpha)+(1-\alpha)\right)
\end{aligned}
$$

Setzen wir $p_0 = 1\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$, $a = 0.1\,\frac{\text{kp}}{\text{m}\cdot\,\text{cm}^2}$ und $\alpha = \frac{1}{2}$, dann erhalten wir

$$
\begin{aligned}
h &= -\frac{p_0}{a\alpha}\left(\ln(\alpha)+(1-\alpha)\right) = -\frac{10}{\frac{1}{2}\,\frac{1}{\text{m}}}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+(1-\frac{1}{2})\right) \\
&= -20\text{ m}\cdot\left(-\ln(2)+\frac{1}{2}\right) \\
&\approx -20\text{ m}\cdot\left(-0.7+\frac{1}{2}\right) = 20\cdot 0.2\text{ m} = 4\text{ m}.
\end{aligned}
$$

Guybrush schiesst also mitsamt Fass etwa 4 Meter hoch aus dem Wasser.

[11] Wir setzen die Formel für x_0 aus Teilaufgabe a) ein.
[12] Wir setzen die Masse m aus Gleichung (2) ein.

Lösung 8.
Wir machen uns zu dieser Aufgabe dieselben Überlegungen wie in den Vorlesungsfolien auf Seite 60^V und folgende: Beim Start haben alle Gegenstände ausschliesslich potentielle Energie, welche sich beim Hinunterrollen zu verschiedenen Teilen in Translations- und Rotationsenergie umwandelt. Dabei gilt: Je höher die Translationsenergie, desto schneller erreicht ein Gegenstand das Ziel. Für die Rotationsenergie gilt (vgl. Folien S. 60^{IV}): Je stärker die Masse gegen aussen verteilt ist, desto höher die Rotationsenergie. Daher lässt sich schliessen, dass ein Gegenstand um so schneller ist, desto näher die Masse an der Rotationsachse ist. Wir versuchen dies auf die anstehenden Partien anzuwenden:

a) Wir warten gespannt auf den Ausgang der Partien:

Partie 1 Beim leeren Fass ist die Masse ganz aussen, im Holz, konzentriert, wohingegen die Masse bei der Kanonenkugel von der Rotationsachse aus gesehen gegen aussen hin abnimmt. Daher muss die Kanonenkugel dieses Rennen gewinnen.

Partie 2 Das kegelförmige Holzbein rollt nicht einfach nach unten, sondern macht eine Bogenbewegung: Die punktförmige und damit massefreie Spitze erfährt gar keine Beschleunigung nach unten und verharrt sich drehend an Ort und Stelle, derweil der Rest des Kegels um sie herum rollt. Kein Wunder fällt es seitlich vom Brett... Dies nutzt der Eisblock natürlich kaltblütig aus und siegt in dieser Runde.

Partie 3 Das volle Rumfass gewinnt. Man muss hier bedenken, dass der Ausgang nicht von der absoluten Masse abhängt, sondern nur von der Verteilung der Masse; beim vollen Rumfass ist ein grösserer Anteil der Masse nahe der Rotationsachse zu finden, während bei dem auslaufenden Fass die aussen liegende Masse des Holzes einen immer grösser werdenden Anteil der Gesamtmasse ausmacht und die Beschleunigung deshalb zunehmend kleiner wird als jene des rollenden Fasses.

Partie 4 Bei dieser Partie gewinnt klar die Achse mit Rädern. Sie scheint vom Gesichtspunkt minimer Rotationsenergie her perfekt zu sein, da fast die ganze Masse um die Rotationsachse konzentriert ist, während aussen kaum ins Gewicht fallende Holzräder zu finden sind. Bei der Kanone gilt genau das Gegenteil: Fast die ganze Masse ist aussen zu finden, während die Kanone innen ausgehöhlt ist.

b) Das Halbfinale ist da, die Spannung ist kaum auszuhalten:

Halbfinale 1 Es treten Kanonenkugel und Eisblock gegeneinander an. Der Gewinner ist schnell ermittelt, denn wenn man sich die Situation mit dem Eisblock, der reibungsfrei die Rampe hinunterrollt, genauer anschaut, bemerkt man, dass dieser überhaupt keine Energie in Rotationsenergie umwandelt und daher die gesamte potentielle Energie in Translationsenergie umwandeln kann. Die rollende Kanonenkugel hat daher keine Chance.

Halbfinale 2 Hier treten das volle Rumfass und die Achse mit Rädern gegeneinander an. Wie bereits angesprochen verliert die Achse kaum Energie in Form von Rotationsenergie, während das Rumfass die zu einem erheblichen Teil macht. Die Achse muss also diese Partie gewinnen.

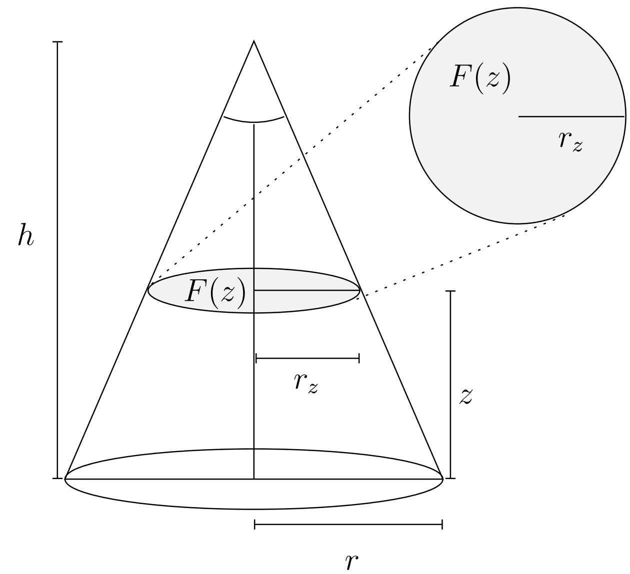
c) Nun geht es um alles – wer darf sich nun unter dreimaligem Wägen eine von 25 Goldmünzen aussuchen?

Platz 3 und 4 Hier tritt noch die Kanonenkugel gegen das volle Rumfass an, das Rennen entspricht genau dem der Walze gegen die Kugel (vgl. Vorlesungsfolien). Der dritte Platz geht also an die Kanonenkugel, ins Rennen geworfen von Bootsmann Mr. Smee. Der grausame Pirat Roberts und sein volles Rumfass müssen sich also mit dem unglücklichen vierten Platz und einem Trostbesäufnis zufrieden geben. Ob dies nun zur einer weniger gereizten Atmosphäre führt, bleibt offen...

Finale Es treten der Eisblock und die Achse mit Rädern gegeneinander an. Ein rasantes Rennen ist zu erwarten, da beide fast alle Energie in Translationsenergie umsetzen können. Da der Eisblock nicht nur fast alle Energie, sondern die ganze Energie umwandeln kann, gewinnt er auch diese Partie. Der unbestrittene Sieger des Wettkampfes ist also Gilgamesh Wulfenbach. Der zweite Platz geht an den Schiffsjungen Guybrush Threepwood, der erst kürzlich dem gefrässigen Schlund eines Tigerhais entkommen ist.

d) Das Holzbein fällt von der Rampe, wenn sein Schwerpunkt neben ihr zu liegen kommt. Wir bestimmen also zuerst allgemein den Schwerpunkt eines Kegels mit Höhe h und Grundflächenradius r. Wir verwenden dazu die Formel aus den Vorlesungsfolien auf Seite 59°°, wobei wir statt x_S die z-Koordinate z_S des Schwerpunkts berechnen, und daher alles nach z integrieren. Wir setzen den Ursprung ins Zentrum der Basisfläche des Kegels, so dass die Spitze des Kegels die Koordinaten $(0, 0, h)$ hat. Wenn wir nun

Querschnitte $F(z)$ des Kegels normal zur z-Achse betrachten (vgl. Skizze), dann nimmt der Radius dieser Querschnitte r_z linear ab.



Mit dem Strahlensatz gilt

$$r_z = -\frac{r}{h} \cdot (z - h).$$

Für die Fläche der jeweiligen Querschnitte gilt

$$F(z) = \pi r_z^2.$$

Nun können wir die Formel anwenden:

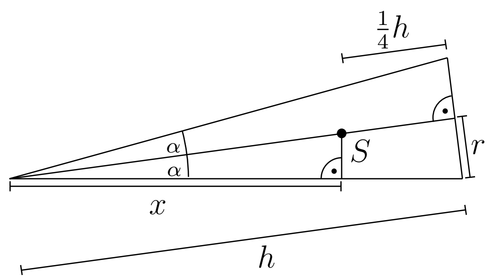
$$\begin{aligned} z_S &= \frac{\int\limits_0^h z \cdot F(z)\,\mathrm{d}z}{\int\limits_0^h F(z)\,\mathrm{d}z} = \frac{\int\limits_0^h z \cdot \pi r_z^2\,\mathrm{d}z}{\int\limits_0^h \pi r_z^2\,\mathrm{d}z} = \frac{\int\limits_0^h z \cdot \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot (z-h)^2\,\mathrm{d}z}{\int\limits_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot (z-h)^2\,\mathrm{d}z} \\ &= \frac{\pi \cdot \frac{r^2}{h^2}}{\pi \cdot \frac{r^2}{h^2}} \frac{\int\limits_0^h z \cdot (z-h)^2\,\mathrm{d}z}{\int\limits_0^h (z-h)^2\,\mathrm{d}z} = \frac{\int\limits_0^h z \cdot (z-h)^2\,\mathrm{d}z}{\int\limits_0^h (z-h)^2\,\mathrm{d}z} = \frac{\int\limits_0^h z^3 - 2hz^2 + h^2 z\,\mathrm{d}z}{\int\limits_0^h z^2 - 2hz + h^2\,\mathrm{d}z} \end{aligned}$$

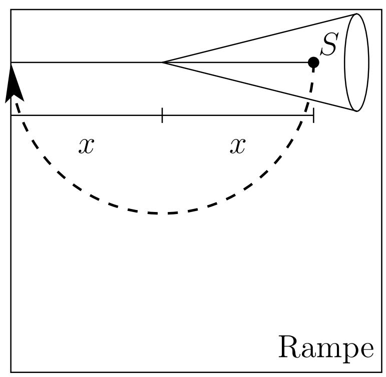
$$= \frac{\left(\frac{1}{4}z^4 - \frac{2}{3}hz^3 + \frac{1}{2}h^2z^2\right)\Big|_0^h}{\left(\frac{1}{3}z^3 - hz^2 + h^2z\right)\Big|_0^h} = \frac{\frac{1}{4}h^4 - \frac{2}{3}h^4 + \frac{1}{2}h^4}{\frac{1}{3}h^3 - h^3 + h^3} = \frac{\frac{3}{12}h^4 - \frac{8}{12}h^4 + \frac{6}{12}h^4}{\frac{1}{3}h^3}$$

$$= \frac{\frac{1}{12}h^4}{\frac{1}{3}h^3} = \frac{1}{4}h.$$

Der Schwerpunkt liegt also bei einem Viertel der Höhe des Kegels.

Der Schwerpunkt macht nun, da das Holzbein reibungsfrei rollt, genau einen Halbkreis. Damit das Holzbein nicht herunterfällt, muss der Abstand der Spitze zum Rand mindestens so gross sein wie jener der Spitze zum Auflagepunkt unter dem Schwerpunkt. Wir machen uns folgenden Skizze eines Querschnitts durch den Kegel:





Mit ein wenig Trigonometrie sieht man, dass der Winkel α gegeben ist durch

$$\alpha = \arctan\left(\frac{r}{h}\right)$$

und x sich dann als

$$x = \frac{3}{4}h \cdot \cos(\alpha) = \frac{3}{4}h \cdot \cos\left(\arctan\left(\frac{r}{h}\right)\right)$$

entpuppt.

Lösung 9.
a) Ein Polynom, wie in der Aufgabenstellung erwähnt, kann in der Form

$$p(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{j=0}^{d} a_j x^j \tag{3}$$

geschrieben werden, wobei $a_d, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ reelwertige Koeffizienten sind und $d \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl ist.
Um $T_p(x)$ zu berechnen, werden die Ableitungen $p^{(i)}(x)$ für $i \in \{0, \ldots, d\}$ benötigt. Dazu gehen wir schrittweise vor:
Zuerst einmal gilt $p^{(0)}(x) = p(x)$. Die nullte Ableitung entspricht der Funktion selber. Die erste Ableitung können wir dank der Linearität der Ableitung summandenweise berechnen:

$$p^{(1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j=0}^{d} a_j x^j = \sum_{j=0}^{d} a_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^j = \sum_{j=0}^{d} a_j j x^{j-1} \overset{13}{=} \sum_{j=1}^{d} j a_j x^{j-1}.$$

Ausgeschrieben ergibt sich also

$$p^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^{d} j a_j x^{j-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (d-1)a_{d-1}x^{d-2} + d a_d x^{d-1}.$$

Um uns ein Bild von der Situation machen zu können, berechnen wir noch die zweite Ableitung von $p(x)$:

$$\begin{aligned} p^{(2)}(x) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2} p(x) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2} \textstyle\sum_{j=0}^{d} a_j x^j = \sum_{j=0}^{d} a_j \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2} x^j \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{d} a_j j(j-1)x^{j-2} \overset{14}{=} \sum_{j=2}^{d} j(j-1)a_j x^{j-2}. \end{aligned}$$

Aus den ersten zwei Ableitungen lässt sich die folgende Regel erahnen:

$$p^{(n)}(x) = \sum_{j=n}^{d} j(j-1)\cdots(j-n+1)a_j x^{j-n}.$$

Benützen wir noch die in der Aufgabenstellung erwähnte Fakultät

$$j! = j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdots 2 \cdot 1,$$

[13] Der Summand für $j = 0$ verschwindet, da er j, also 0, als Faktor enthält.

[14] Die Summanden fr̈ $j = 0$ und $j = 1$ verschwinden, da sie entweder den Faktor 0 oder den Faktor $1 - 1 = 0$ enthalten.

können wir $j(j-1)\cdots(j-n+1)$ schreiben als

$$\begin{aligned} j(j-1)\cdots(j-n+1) &= \frac{j(j-1)\cdots(j-n+1)\cdot(j-n)\cdot(j-n-1)\cdots 2\cdot 1}{(j-n)\cdot(j-n-1)\cdot(j-n-2)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{j!}{(j-n)!} \end{aligned}$$

und erhalten damit die verkürzte Schreibweise

$$p^{(n)}(x) = \sum_{j=n}^{d} a_j \frac{j!}{(j-n)!} x^{j-n}.$$

Wir wollen nun diese allgemeine Formel für die n-te Ableitung eines Polynoms mittels vollständiger Induktion beweisen:

Behauptung: Für ein Polynom der Form $p(x) = \sum_{j=0}^{d} a_j x^j$ mit $d \in \mathbb{N}_0$ und $a_d, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$p^{(n)}(x) = \sum_{j=n}^{d} a_j \frac{j!}{(j-n)!} x^{j-n}.$$

Beweis. Wie bereits angesprochen, wollen wir dies mittel vollständiger Induktion beweisen. Wir machen also eine Induktionsverankerung und zeigen dann den Induktionsschritt.
Verankerung: Die Verankerung wurde bereits für $p^{(1)}(x)$ und $p^{(2)}(x)$ gezeigt.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, es gelte

$$p^{(n-1)}(x) = \sum_{j=n-1}^{d} a_j \frac{j!}{(j-(n-1))!} x^{j-(n-1)},$$

und versuchen damit auf $p^{(n)}(x)$ zu schliessen. Dazu leiten wir $p^{(n-1)}(x)$

einfach einmal ab. Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
p^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p^{(n-1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{j=n-1}^{d} a_j \frac{j!}{(j-(n-1))!} x^{j-(n-1)} \\
&\overset{15}{=} \sum_{j=n-1}^{d} a_j \frac{j!}{(j-(n-1))!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{j-(n-1)} \\
&= \sum_{j=n-1}^{d} a_j \frac{j!}{(j-(n-1))!} \left(j-(n-1)\right) x^{j-(n-1)-1} \\
&\overset{16}{=} \sum_{j=n}^{d} a_j \frac{j!}{(j-(n-1)-1)!} x^{j-(n-1)-1} \\
&= \sum_{j=n}^{d} a_j \frac{j!}{(j-n+1-1)!} x^{j-n+1-1} \\
&= \sum_{j=n}^{d} a_j \frac{j!}{(j-n)!} x^{j-n},
\end{aligned}
$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Bevor wir weiterfahren, wollen wir diese Formel an einem konkreten Beispiel studieren: Wir betrachten das Polynom

$$
p(x) = 6x^7 + 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 5 = \sum_{i=0}^{7} a_i x^i,
$$

wobei

$$
a_7 = 6, a_6 = a_5 = 0, a_4 = 2, a_3 = 2, a_2 = -4, a_1 = 1, a_0 = -5.
$$

Wir wollen nun die 5te Ableitung berechnen. Leiten wir stur Schritt für

[15] Wir verwenden wieder die Linearität der Ableitung.

[16] Es gilt $\frac{j!}{(j-(n-1))!}(j-(n-1)) = \frac{j! \cdot \cancel{(j-(n-1))}}{\cancel{(j-(n-1))}(j-(n-1)-1)(j-(n-1)-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{j!}{(j-(n-1)-1)(j-(n-1)-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{j!}{(j-(n-1)-1)!}$. Zudem verschwindet hier auch der Summand für $j = n-1$ (man beachte den Summenindex), da dieser den Faktor $j-(n-1) = n-1-(n-1) = 0$ enthält.

Schritt ab, erhalten wir der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
p^{(1)}(x) &= 6 \cdot 7x^6 + 2 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 1;\\
p^{(2)}(x) &= 6 \cdot 7 \cdot 6x^5 + 2 \cdot 4 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2x - 4 \cdot 2;\\
p^{(3)}(x) &= 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5x^4 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x + 2 \cdot 3 \cdot 2;\\
p^{(4)}(x) &= 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2;\\
p^{(5)}(x) &= 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3x^2 = 6 \cdot 7 \cdot 360x^2 = 6 \cdot 2520x^2 = 15120x^2.
\end{aligned}$$

Wenden wir stattdessen die Formel an mit $n = 5, d = 7$ und

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_6, a_7) = (-5, 1, -4, 2, 2, 0, 0, 6),$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
p^{(5)}(x) &= \sum_{j=5}^{7} a_j \frac{j!}{(j-n)!} x^{j-n}\\
&= a_5 \frac{5!}{(5-5)!} x^{5-5} + a_6 \frac{6!}{(6-5)!} x^{6-5} + a_7 \frac{7!}{(7-5)!} x^{7-5}\\
&= 0 \cdot \frac{5!}{(0)!} x^0 + 0 \cdot \frac{6!}{1!} x^1 + 6 \frac{7!}{(2)!} x^2 = 6 \frac{7!}{(2)!} x^2\\
&= 6 \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cancel{\cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{2 \cdot 1}} x^2 = 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3x^2 = 15120x^2.
\end{aligned}$$

Mit der Formel können wir also direkt (ohne mehrmaliges Ableiten) eine höhere Ableitung bestimmen.
Nun wollen wir aber wieder zur Taylorapproximation kommen: Für die Taylorfunktion müssen wir die gerade hergeleiteten Ableitungen an der Stelle $x = 0$ auswerten. Dazu nehmen wir die soeben bewiesene Formel und setzen $x = 0$ ein:

$$p^{(n)}(0) = \sum_{j=n}^{d} a_j \frac{j!}{(j-n)!} 0^{j-n}.$$

Dadurch verschwinden alle Summanden, ausser der n-te, da dort $0^{n-n} = 0^0 = 1$ vorkommt. Es ergibt sich also

$$p^{(n)}(0) = \sum_{j=n}^{d} a_j \frac{j!}{(j-n)!} 0^{j-n} = a_n \frac{n!}{(n-n)!} 0^{n-n} = a_n \frac{n!}{(0)!} 0^0 = n! \cdot a_n.$$

Sodala, nun sind wir nur noch eine Zeile vom Zeigen des zu Zeigenden entfernt: Setzen wir die eben berechnete Formel für die n-te Ableitung von $p(x)$ an der Stelle $x = 0$ in die Formel für die Taylorfunktion vom Aufgabenblatt ein, dann ergibt sich

$$T_p(x) = \sum_{i=0}^{d} \frac{p^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{d} \frac{i! \cdot a_i}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = p(x).$$

Wir erhalten also wieder unser Polynom $p(x)$ in der Schreibweise wie in Gleichung (3).

Um noch ein konkretes Beispiel anzuschauen, kommen wir auf das oben bereits betrachtete Polynom zurück:

$$p(x) = 6x^7 + 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 5 = \sum_{i=0}^{7} a_i x^i, a = (-5, 1, -4, 2, 2, 0, 0, 6).$$

Wir benötigen dazu die ersten sieben Ableitungen, wobei wir fünf davon bereits berechnet haben:

$$p^{(1)}(x) = 6 \cdot 7x^6 + 2 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 1 = 42x^6 + 8x^3 + 6x^2 - 8x + 1;$$
$$p^{(2)}(x) = 252x^5 + 24x^2 + 12x - 8;$$
$$p^{(3)}(x) = 1260x^4 + 48x + 12;$$
$$p^{(4)}(x) = 5040x^3 + 48;$$
$$p^{(5)}(x) = 15120x^2;$$
$$p^{(6)}(x) = 30240x;$$
$$p^{(7)}(x) = 30240.$$

Für das Taylorpolynom brauchen wir nur die jeweiligen Auswertungen der Ableitungen an der Stelle $x = 0$ (die Nullte Ableitung ist das Polynom selber), also

$$\begin{aligned}
p^{(0)}(0) &= p(0) = -5;\\
p^{(1)}(0) &= 1;\\
p^{(2)}(0) &= -8;\\
p^{(3)}(0) &= 12;\\
p^{(4)}(0) &= 48;\\
p^{(5)}(0) &= 0;\\
p^{(6)}(0) &= 0;\\
p^{(7)}(0) &= 30240.
\end{aligned}$$

Nun können wir das Talorpolynom berechnen (wir setzen $d = 7$ und die eben aufgelisteten Ableitungen ein):

$$\begin{aligned}
T_p(x) &= \textstyle\sum_{i=0}^{7} \frac{p^{(i)}(0)}{i!} x^i\\
&= \tfrac{p^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \tfrac{p^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \tfrac{p^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \tfrac{p^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \tfrac{p^{(4)}(0)}{4!}x^4\\
&\quad + \tfrac{p^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \tfrac{p^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \tfrac{p^{(7)}(0)}{7!}x^7\\
&= \tfrac{p^{(0)}(0)}{1} + \tfrac{p^{(1)}(0)}{1}x + \tfrac{p^{(2)}(0)}{2}x^2 + \tfrac{p^{(3)}(0)}{6}x^3 + \tfrac{p^{(4)}(0)}{24}x^4\\
&\quad + \tfrac{p^{(5)}(0)}{120}x^5 + \tfrac{p^{(6)}(0)}{720}x^6 + \tfrac{p^{(7)}(0)}{5040}x^7\\
&= \tfrac{-5}{1} + \tfrac{1}{1}x + \tfrac{-8}{2}x^2 + \tfrac{12}{6}x^3 + \tfrac{48}{24}x^4 + \tfrac{0}{120}x^5 + \tfrac{0}{720}x^6 + \tfrac{30240}{5040}x^7\\
&= -5 + x - 4x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 6x^7\\
&= 6x^7 + 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 5\\
&= p(x).
\end{aligned}$$

Wir erhalten also (wie erwartet) genau unser Polynom $p(x)$. Wir benötigen also nur die Werte der Ableitungen des Polynoms an der Stelle $x = 0$, um das ganze Polynom zu kennen.

b) Setzen wir $p(x) = \sin(x)$, dann gilt:

$$
\begin{array}{rcl}
p^{(1)}(x) & = & \cos(x)\,; \\
p^{(2)}(x) & = & -\sin(x)\,; \\
p^{(3)}(x) & = & -\cos(x)\,; \\
p^{(4)}(x) & = & \sin(x)\,; \\
p^{(5)}(x) & = & \cos(x)\,; \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Werten wir bei $x = 0$ aus, dann ergibt sich

$$
\begin{array}{rcccl}
p^{(0)}(0) & = & p(0) & = & \sin(0) = 0; \\
p^{(1)}(0) & = & \cos(0) & = & 1; \\
p^{(2)}(0) & = & -\sin(0) & = & 0; \\
p^{(3)}(0) & = & -\cos(0) & = & -1; \\
p^{(4)}(0) & = & \sin(0) & = & 0; \\
p^{(5)}(0) & = & \cos(0) & = & 1; \\
 & \vdots & & &
\end{array}
$$

Wir sehen also, dass die geraden Ableitungen verschwinden und die ungeraden alternierend 1 oder -1 ergeben. Für $k \in \mathbb{N}$ sind es genau die $(4k-1)$-ten Ableitungen, die -1 ergeben, und die $(4k-3)$-ten Ableitungen, die 1 ergeben.
Wir können die Taylorfunktion also folgendermassen angeben:

$$
\begin{aligned}
T_p(x) = \sum_{i=0}^{d} \frac{p^{(i)}(0)}{i!} x^i &\overset{17}{=} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \frac{p^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!} x^{(2k-1)} \\
&\overset{18}{=} x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \pm \frac{1}{\left(2 \cdot \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1\right)!} x^{2 \cdot \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1}.
\end{aligned}
$$

Die Frage ist nun, wie hoch man d wählen muss, damit für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$T_p(x) = \sin(x)$$

[17] Die gerade Ableitungen fallen weg; dies können wir dadurch beschreiben, dass wir die Summenlaufvariable durch $2k-1$ in der Summe ersetzen; da wir dadurch nur noch halb soviele Summanden haben, geht die Summe nur noch bis $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, also der grössten ganzen Zahl kleiner $\frac{d}{2}$ ($\lfloor \bullet \rfloor$ steht für abrunden).

[18] Gemäss $\star$ gilt nun $p^{(4k-1)}(0) = -1$ und $p^{(4k-3)}(0) = 1$.

gilt. Insbesondere müsste dann für ein beliebig grosses $n \in \mathbb{N}$ auch

$$T_p(n \cdot 2\pi) = \sin(n \cdot 2\pi) = 0$$

gelten. Wir machen nun eine Grenzwertüberlegung: Nehmen wir an, d sei eine natürliche Zahl. Dann ist $T_p(x)$ ein Polynom vom Grad $2 \cdot \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$, das heisst $2 \cdot \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$ ist die höchste Potenz von x, die noch in $T_p(x)$ vorkommt. Diese Potenz von x hat nun entweder ein positives oder ein negatives Vorzeichen. Betrachten wir nun den Grenzwert von $T_p(x)$ für x gegen ∞, dann hängt dieser Grenzwert nur von der höchsten Potenz von x ab.[19] Ist dieser Koeffizient negativ, geht der Funktionswert gegen $-\infty$, ansonsten gegen $+\infty$. In Formeln können wir schreiben

$$\lim_{x \to \infty} T_p(x) = \pm\infty.$$

Dies bedeutet nun aber, dass der Funktionswert $T_p(x)$ ab einem genügend grossen x-Wert sich immer weiter von 0 entfernt, ohne jemals wieder in die Nähe von 0 zu kommen. Dies widerspricht nun aber der Voraussetzung, dass $T_p(x) = \sin(x)$, denn für beliebig grosse x-Werte finden wir immer einen grösseren Wert $x_0 > x$, der ein Vielfaches von 2π ist, und für den deshalb gelten muss: $T_p(x_0) = \sin(x_0) = 0$. Die Annahme, d sei eine natÃijrliche Zahl, führt also zu einem Widerspruch. d kann also keine natürliche Zahl sein. Wir haben damit bewiesen, dass mit keinem $d \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $T_p(x) = \sin(x)$ gelten kann. Nimmt man jedoch unendlich viele Summanden, dann kann man die Grenzwertüberlegung nicht mehr auf diese Weise machen, da dann kein grösster Summand mehr existiert. Zudem werden wir in Teilaufgabe d) sehen, dass der Fehlerterm $|T_p(x) - \sin(x)|$ beliebig klein wird, wenn man immer mehr Summanden dazu nimmt; für unendlich viele Summanden gilt damit also die Gleichheit: $T_p(x) = \sin(x)$.
Wir wollen nun die konkrete Taylorentwicklung von $\sin(x)$ anschauen: Die Taylorentwicklung bis zum zehnten Summanden sieht folgendermassen aus, wenn man die geraden Summanden, die sowieso Null ergeben, beiseite lässt:

$$T_p^{10}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9.$$

Berechnet man noch die Fakultäten, ergibt sich

$$T_p^{10}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9.$$

[19] Ein bekanntes Beispiel: $\lim_{x\to\infty} -4x^3 + 3x^2 - 2x + 4 = -\infty$, da die höchste Potenz von x einen negativen Koeffizienten hat.

c) Der Grundriss des Tempels ist offenbar ein regelmässiges Zwölfeck. Zieht man vom Mittelpunkt dieses Zwölfecks eine Linie zu jeder Ecke, dann schliessen zwei benachbarte Linien den Winkel

$$\alpha = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

ein. Nun gilt $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Die Formel, welche auf der marmornen Tafel über dem Eingangsportal zu erblicken ist, entspricht gerade der Taylorentwicklung von $\sin(x)$ für $x = \frac{\pi}{6}$, wie wir sie in Teilaufgabe c) angeschaut haben (hier nur bis zum 7-ten Glied).

d) Wenn wir annehmen, dass die Taylorentwicklung von $\sin(x)$ mit unendlich vielen Summanden genau der Funktion $\sin(x)$ entspricht, dann gilt

$$T_p^\infty(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots = \sin(x)\,.$$

Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass der Summand $\frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^9$, also der Summand, vor welchem die Taylorentwicklung auf der marmornen Tafel abgebrochen wurde, eine obere Grenze für den Fehler darstellt, welcher auf der marmornen Tafel gemacht wird.
Wir machen dazu ein paar leicht nachzuvollziehende Abschätzungen: Es gilt

$$\left(\frac{\pi}{6}\right)^9 > \left(\frac{\pi}{6}\right)^{11} > \left(\frac{\pi}{6}\right)^{13} > \left(\frac{\pi}{6}\right)^{15} > \left(\frac{\pi}{6}\right)^{17} > \cdots$$

und natürlich auch

$$\frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^9 > \frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{11} > \frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{13} > \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{15} > \frac{1}{17!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{17} > \cdots\,.$$

Da die Fakultäten zunehmen, sieht man leicht, dass auch

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^9 & > & 2\frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{11} \\
\frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{11} & > & 2\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{13} \\
\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{13} & > & 2\frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{15} \\
\frac{1}{17!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{17} & > & 2\frac{1}{19!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{19} \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Fassen wir zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{11} &> 2\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{13}\\ &> \frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{13} + 2\frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{15}\\ &> \frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{13} + \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{15} + 2\frac{1}{17!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{17}\\ &> \frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{13} + \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{15} + \frac{1}{17!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{17} + 2\frac{1}{19!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{19} > \cdots\end{aligned}$$

Führen wir diese Überlegung weiter, sehen wir, dass

$$\frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{11} > \frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{13} + \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{15} + \frac{1}{17!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{17} + \frac{1}{19!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{19} + \cdots$$

gilt.
Schliesslich gilt also

$$\begin{array}{rcl}\frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{9} & = & \frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{9} - \frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{11} + \frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{11}\\ & > & \frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{9} - \frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{11} + \frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{13} + \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{15} + \frac{1}{17!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{17} + \cdots\\ & > & \frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{9} - \frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{11} + \frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{13} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{15} + \frac{1}{17!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{17} + \cdots\\ & \vdots & \end{array}$$

Der Fehler den wir machen, indem wir die Taylorapproximation nur bis zum Summenglied $\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^7$ berechnen, ist also kleiner als

$$\frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^9 \approx 8 \cdot 10^{-9}.$$

Übrigens kann man allgemein zeigen, dass das nächste Glied in der Taylorentwicklung gerade eine obere Grenze für den Fehler darstellt, den man mit der Approximation des Sinus durch die Taylorfunktion macht.
Allerdings funktioniert die Taylorapproximation nicht bei allen Funktionen. Ein Beispiel für eine Funktion, bei der die Taylorapproximation schief geht, ist

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Diese Funktion ist unendlich oft differenzierbar an der Stelle $x = 0$. Wertet man die Ableitungen an der Stelle $x = 0$ aus, ergeben jedoch alle Null, womit die Taylorfunktion die Nullfunktion ergibt:

$$T_f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{0}{i!} x^i = 0.$$

Funktionen, welche man durch die Taylorfunktion approximieren kann, nennt man analytische Funktionen.

Lösung 10.
Sei p die Anzahl Piraten, die gefangen genommen wurden. Wir bezeichnen mit n_i die Anzahl weisser Hüte auf den ersten i Piraten. Diese Zahl ist jedem Pirat bekannt, der hinter dem i-ten Piraten aufgestellt ist.
Wir machen uns nun folgende Überlegung: Wenn der i-te Pirat weiss, ob n_i gerade oder ungerade ist, dann kann er sagen, welche Farbe sein Hut hat. Ist zum Beispiel n_i gerade und er hat eine ungerade Anzahl weisser Hüte vor sich, dann muss er selbst einen weissen tragen, hat er bereits eine gerade Anzahl weisser Hüte vor sich, dann kann er selbst keinen weissen Tragen, da n_i sonst ungerade wäre.
Es gilt also einen Weg zu finden, wie der i-te Pirat herausfinden kann, ob n_i gerade oder ungerade ist. Dies lässt sich folgendermassen bewerkstelligen: Der grausame Pirat Roberts ist der hinterste Pirat, er kennt also n_{p-1}, die Anzahl weisser Hüte auf allen anderen Piraten ausser ihm. Er verabredet mit seiner Mannschaft nun, dass er am Morgen rate, er habe einen weissen Hut, wenn n_{p-1} gerade ist, und umgekehrt, er habe einen schwarzen Hut, wenn n_{p-1} ungerade ist. Damit weiss der zweitletzte ($(p-1)$-te) – wie wir oben bereits herausgefunden haben – welche Farbe sein Hut hat. Sobald dieser aber seine Farbe sagt, wissen alle anderen Piraten, ob n_{p-2} gerade oder ungerade ist, denn hat er einen weissen Hut, dann gilt $n_{p-2} = n_{p-1} - 1$, ansonsten $n_{p-2} = n_{p-1}$. So weiss also auch der drittletzte Pirat welche Farbe sein Hut hat, und sobald dieser seine Farbe errät, können alle anderen n_{p-3} berechnen. Dies geht so weiter bis zum vordersten Piraten, der einen weissen Hut aufhat, wenn n_1 ungerade ist, und einen schwarzen, wenn n_1 gerade ist. Auf diese Weise können sich alle Piraten ausser dem grausamen Piraten Roberts vor dem Tode in die Rudersklaverei retten. Der grausame Pirat Roberts kann nur hoffen, dass er einen weissen Hut trägt, wenn er eine gerade Anzahl weisser Hüte vor sich hat, oder einen schwarzen, wenn er eine ungerade Anzahl weisser Hüte vor sich sieht. Ansonsten erwartet den grausamen Pirat Roberts einen ebenso fürchterlichen wie unterhaltsamen Tod.

Wir betrachten noch abschliessend ein Beispiel, wie sich das tödliche Spiel entwickeln könnte:
Wir nehmen an, die Piraten seien in der folgenden Reihenfolge aufgestellt: Mr. Smee, Pintel, Long John, Gilgamesh Wulfenbach, Ragetti, der riesige Türke, der Schiffsjunge Guybrush Threepwood, und am Ende der Kolon-

ne stehe der grausame Pirat Roberts. Zudem seien die Hutfarben der eben erwähnten Piraten folgendermassen die folgenden:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Pirat	Mr. Smee	Pintel	Long John	Gilgamesh Wulfenbach	Ragetti	riesiger Türke	Guybrush Threepwood	Roberts
Hutfarbe	Schwarz	Weiss	Schwarz	Schwarz	Schwarz	Weiss	Weiss	Schwarz

Wir haben also 8 Piraten, also $p = 8$, $p - 1 = 7$. Betrachten wir die n_i's dazu, dann ergibt sich:

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
0	1	1	1	1	2	3	4

Nun geht das Entkommen in die Rudersklaverei folgendermassen vor sich:

Pirat Roberts sieht alle anderen Piraten vor sich, er kennt also $n_7 = 3$, es hat also eine ungerade Anzahl weisser Hüte. Daher sagt der grausame Pirat Roberts 'schwarz'; damit ist er zufälligerweise gerettet, und alle Piraten wissen, dass n_7 eine ungerade Zahl ist. Guybrush Threepwood kennt $n_6 = 2$. Er hat also eine gerade Zahl weisser Hüte vor sich, weiss aber, dass n_7 ungerade ist, daher muss er selbst einen weissen Hut tragen. Sobald er dies erraten hat, wissen alle Piraten vor ihm, da nun ein weisser Hut wegfällt, dass n_6 gerade sein muss. Da der riesige Türke nur einen weissen Hut (er kennt $n_5 = 1$) auf den Leuten vor sich sieht, weiss er damit, dass auch sein Hut weiss sein muss. Sobald er dies errät, wissen nun alle, dass n_5 ungerade sein muss. Ragetti sieht einen weissen Hut vor sich, also kann er selbst keinen weissen Hut tragen, da sonst n_5 gerade wäre. Damit ist auch er einem so grausamen wie unterhaltsamen Tod entgangen, und alle anderen wissen, dass n_4 immer noch ungerade sein muss. Gilgamesh Wulfenbach sieht, wie Ragetti, noch einen weissen Hut vor sich und weiss damit, dass auch er keinen weissen mehr tragen kann; auch sie entgehem somit dem drohenden Ende. Die restlichen Piraten wissen also, dass auch n_3 ungerade sein muss, insbesondere weiss Long John, dass er einen schwarzen Hut trägt, da immer noch ein weisser Hut vor ihm zu sehen ist. Pintel und Mr. Smee wissen daher, dass n_2 auch ungerade ist, und da Pintel Mr. Smees schwarzen Hut vor sich sieht, weiss Pintel, dass er selbst einen weissen aufhaben muss, da n_2 sonst gerade wäre. Damit bleibt nur noch Mr. Smee, der nun aber nachdem, Pintel erraten hat, dass er einen weissen Hut trägt, ausrechnet, dass n_1 gerade sein muss und er daher einen schwarzen Hut auf dem Kopf hat. Damit wären alle Piraten in die Rudersklaverei gerettet, sogar der grausame Pirat Roberts, der sein Überleben allein der Tatsache zu verdanken hat, dass er einen schwarzen Hut trug, während die Anzahl weisser Hüte, die er vor sich erblickte, ungerade war.

Es gibt übrigens auch einen empirischen Beleg für das Funktionieren dieser algorithmischen Methode, welche der grausame Pirat Roberts ersann: Da uns die späteren Abenteuer aller Mitglieder seiner Mannschaft – mit Ausnahme des riesigen Türken und des sowieso abwesenden Lateiners – überliefert sind, müssen sie ihre Begegnung mit Captain Reis überlebt haben.


MAT182