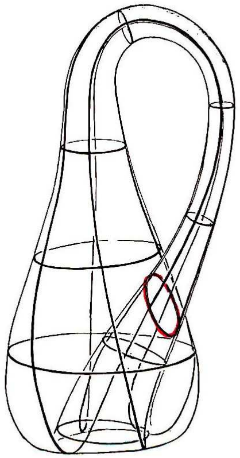
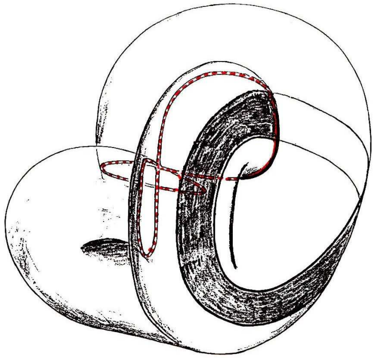
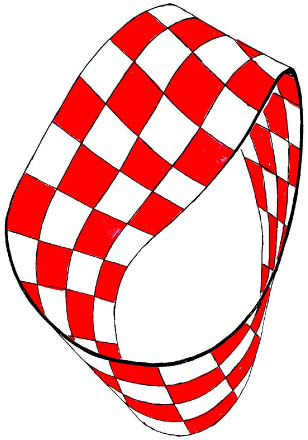
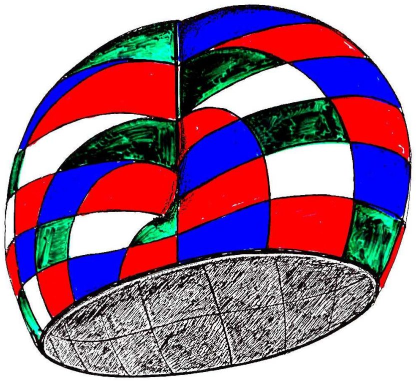


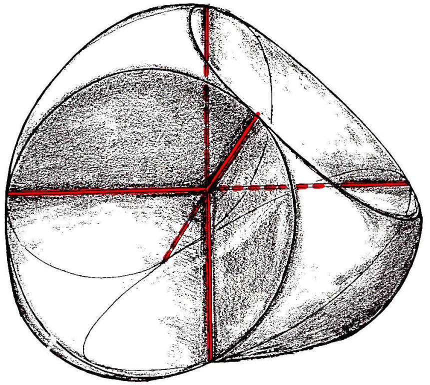
Präsentationen



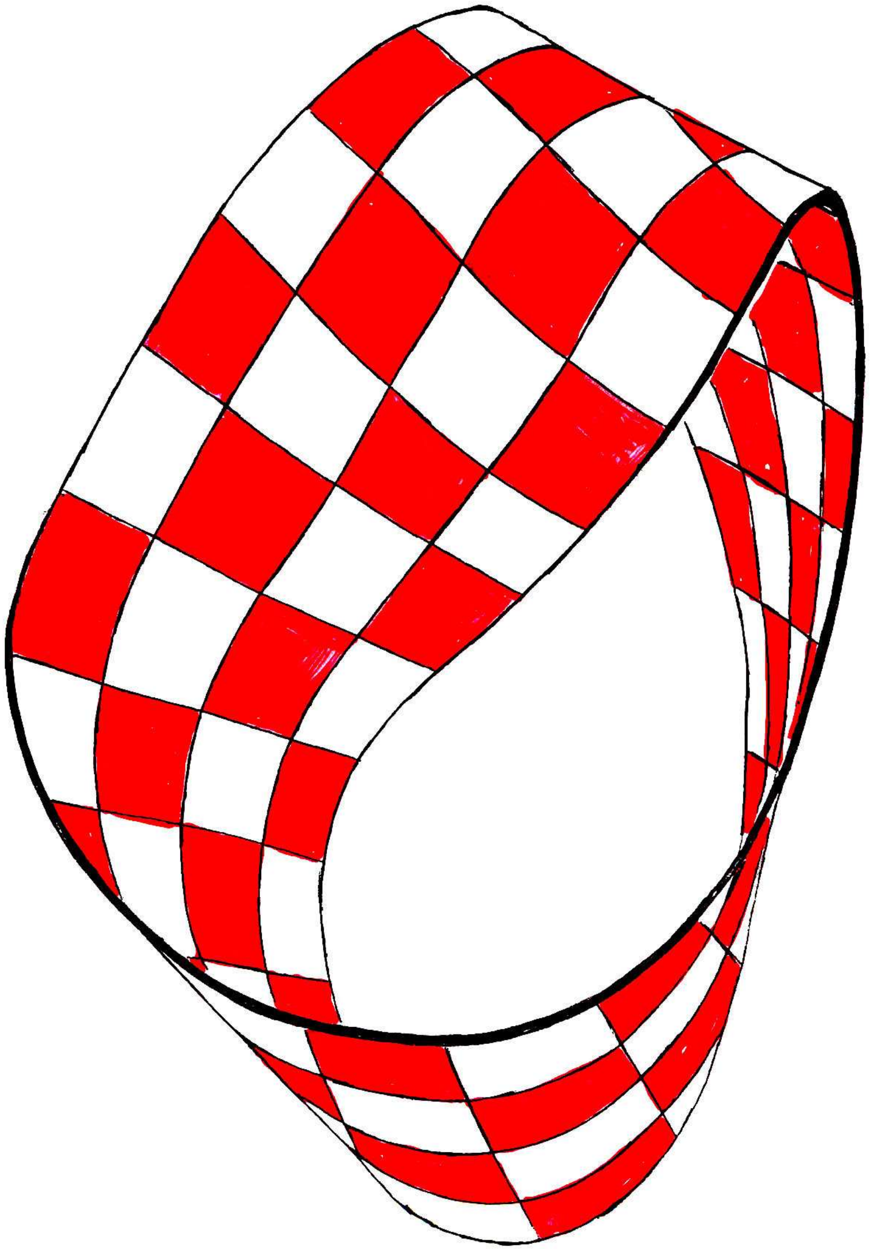


von Flächen





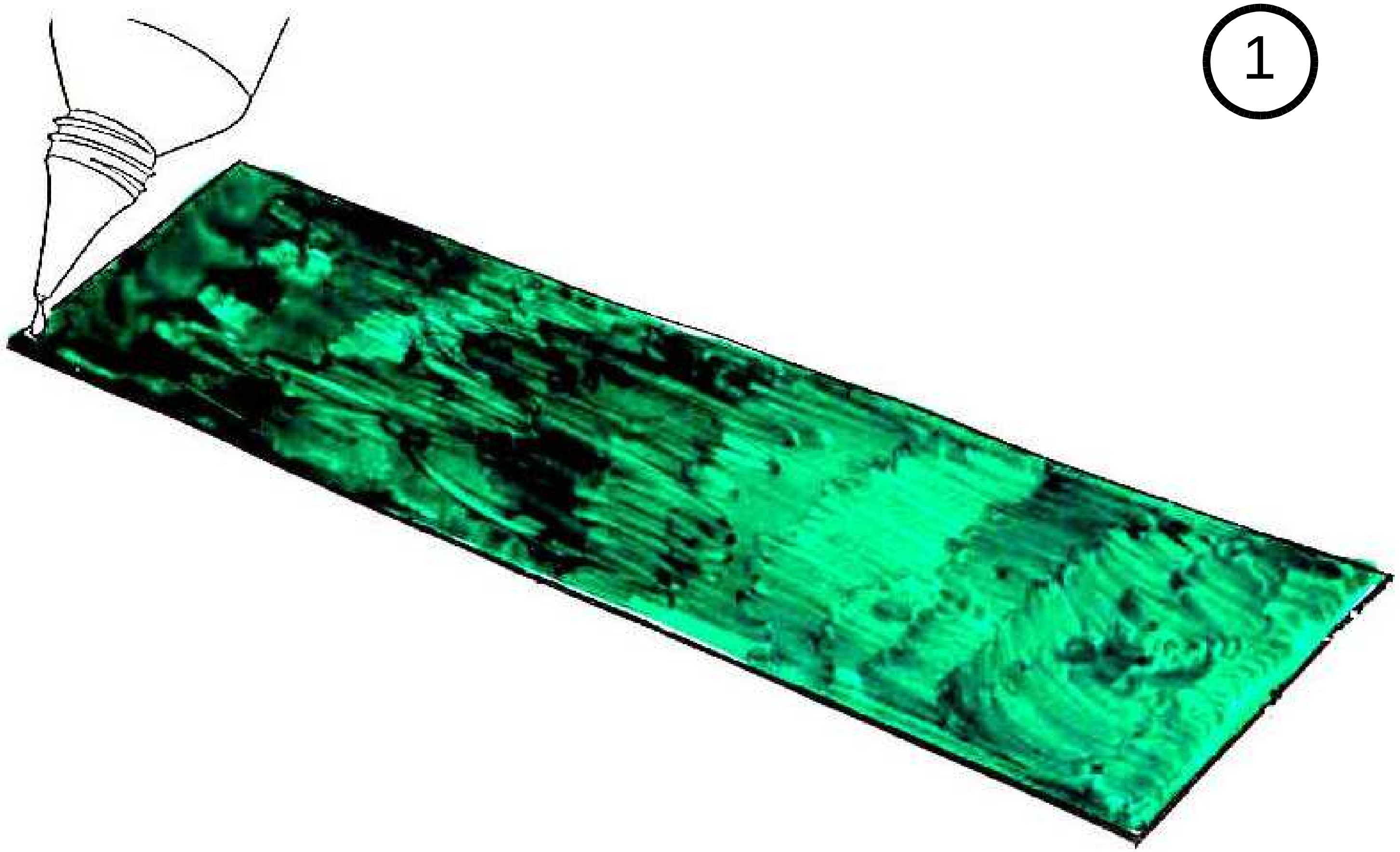
Universität Zürich
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

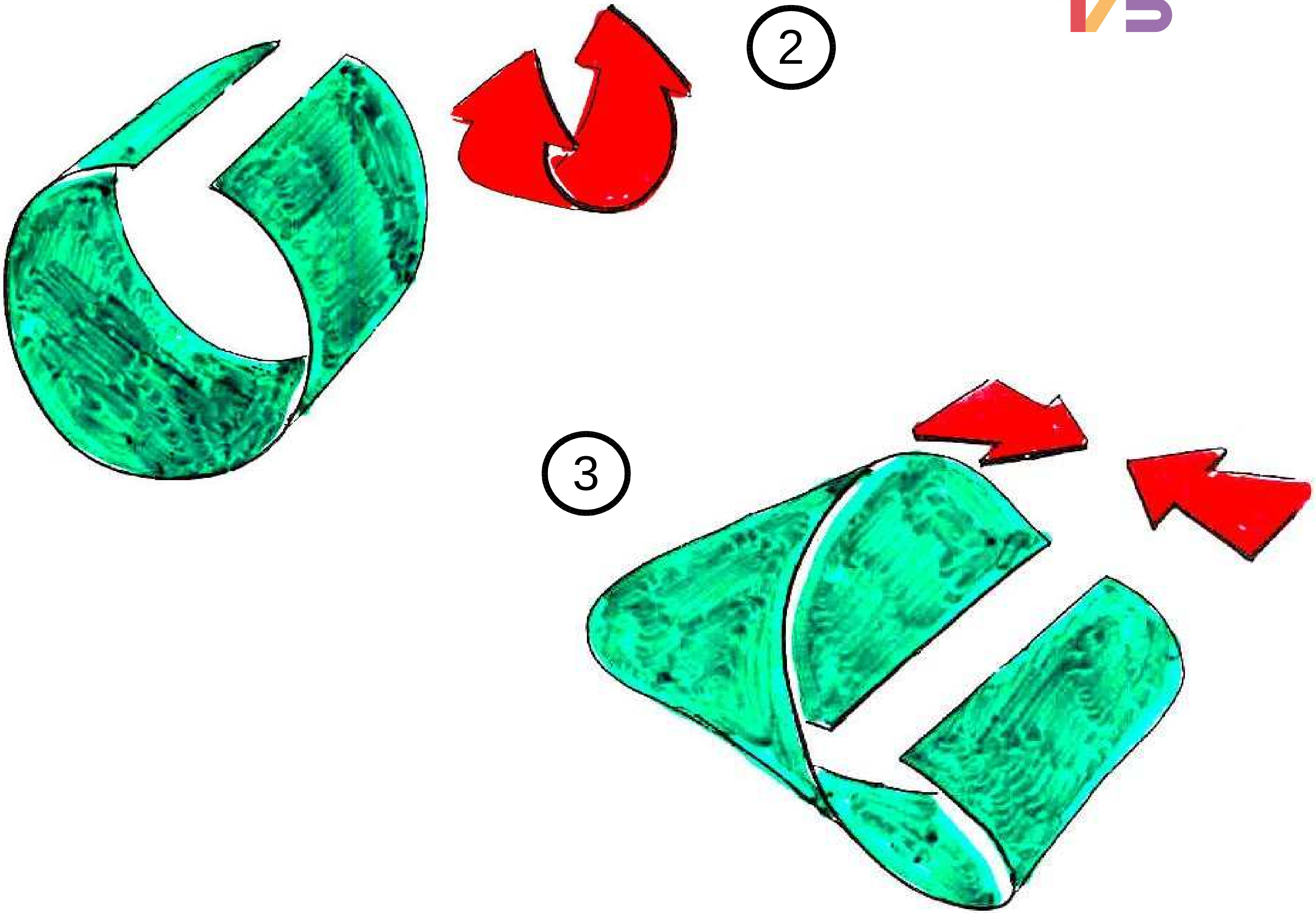


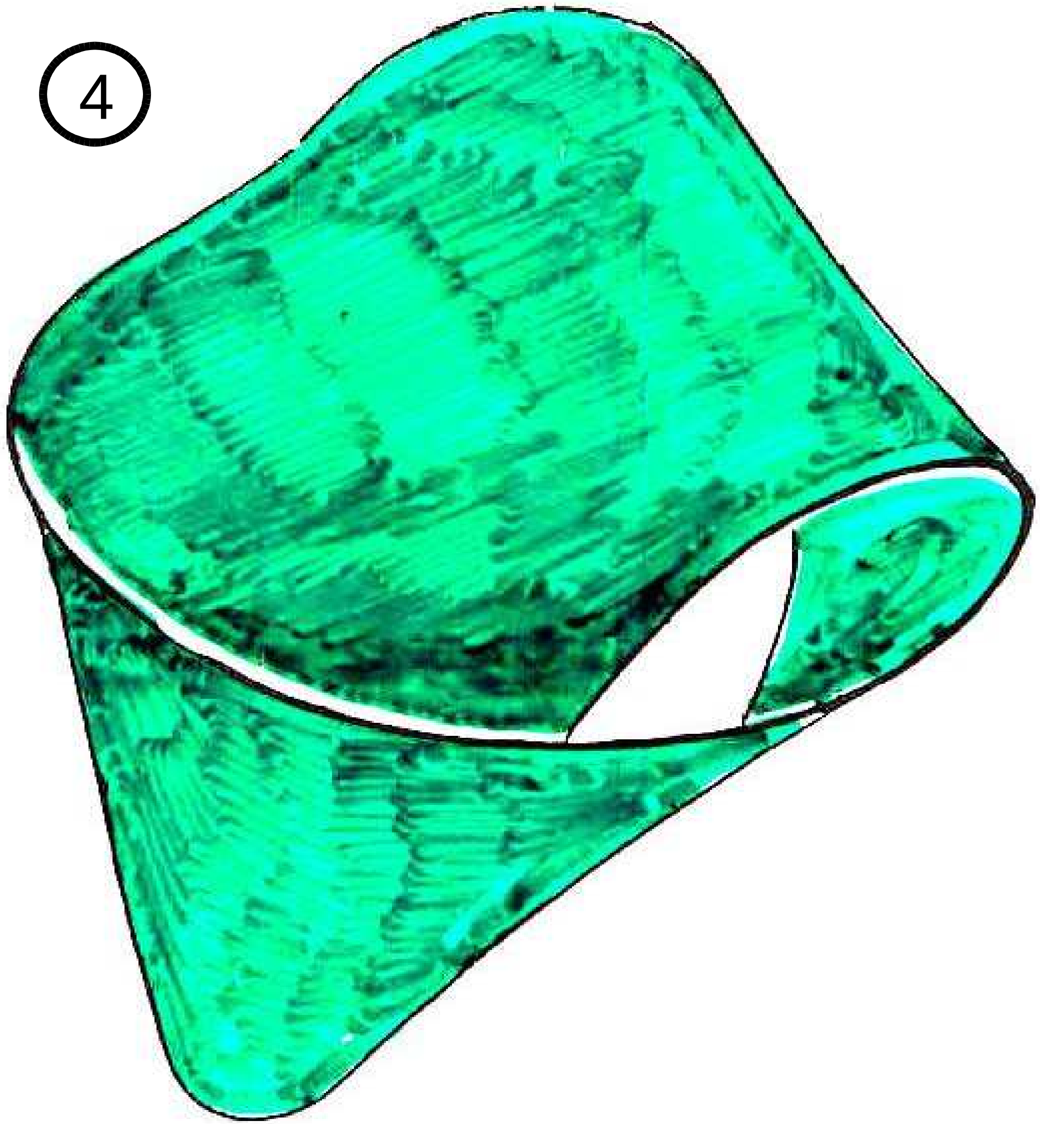
Das Möbius-Band

A. F. Möbius
1790 – 1868
Astronom in Leipzig

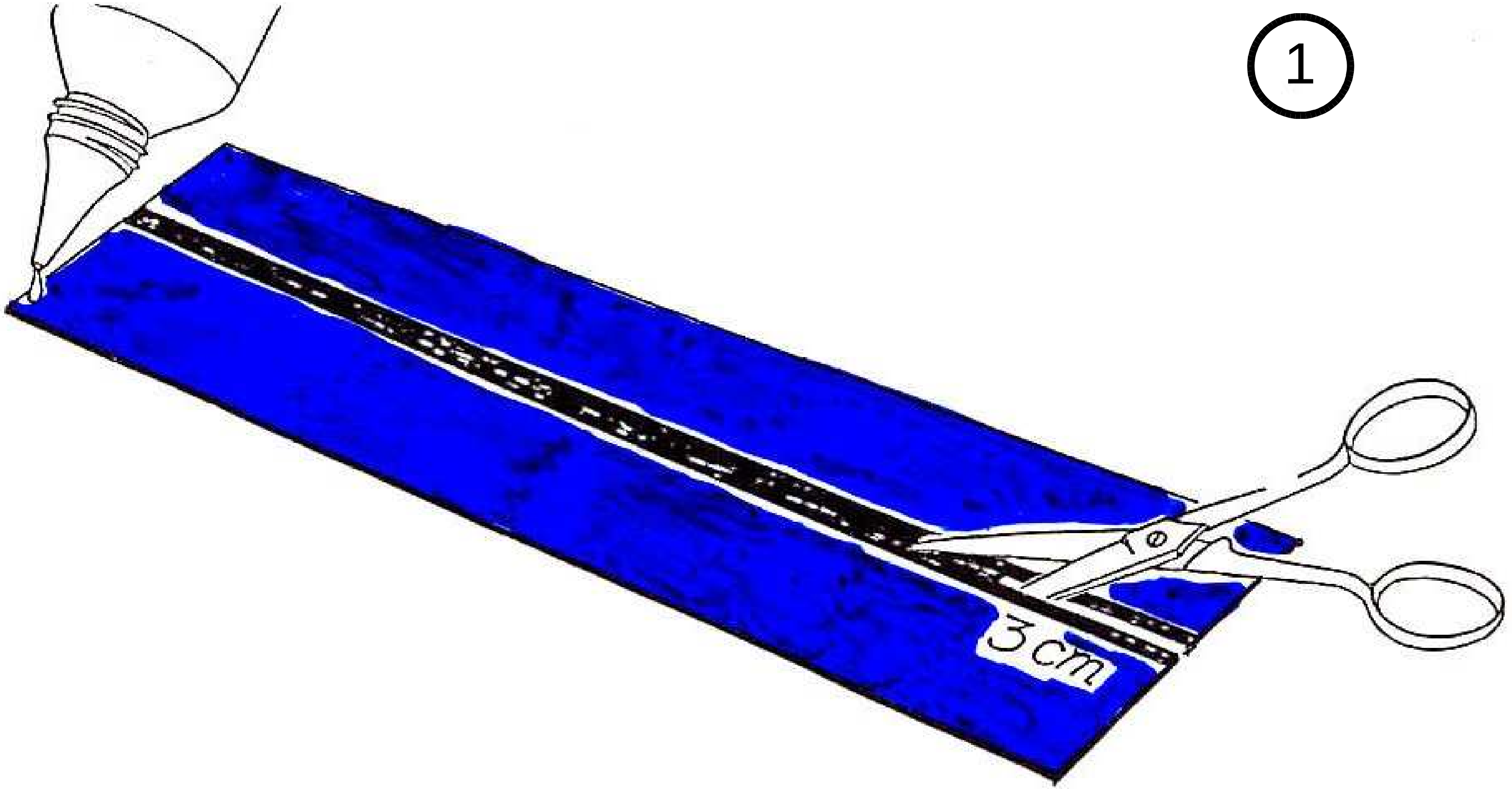
Wir stellen ein Möbius-Band aus einem Papierstreifen her...



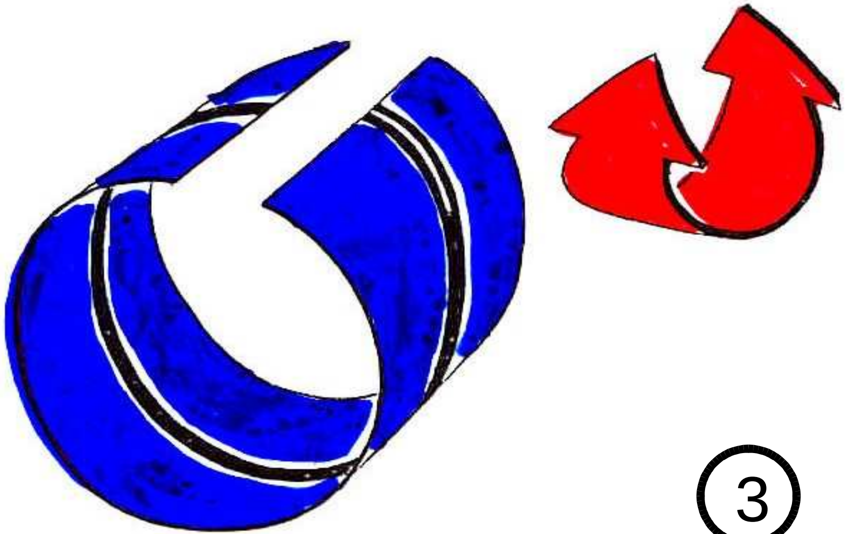

2
3


4

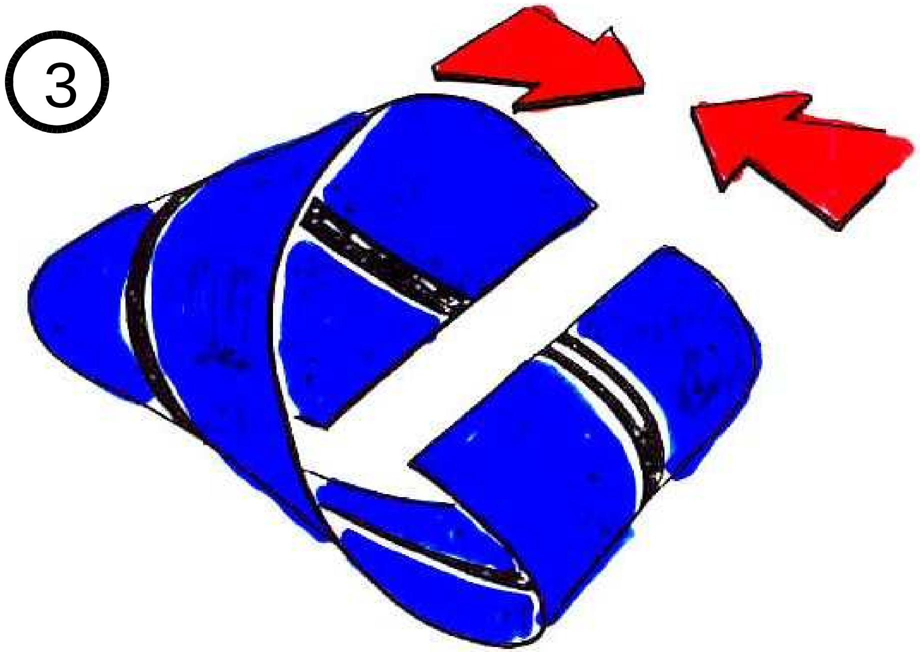
Wir zerschneiden das Möbius-Band...



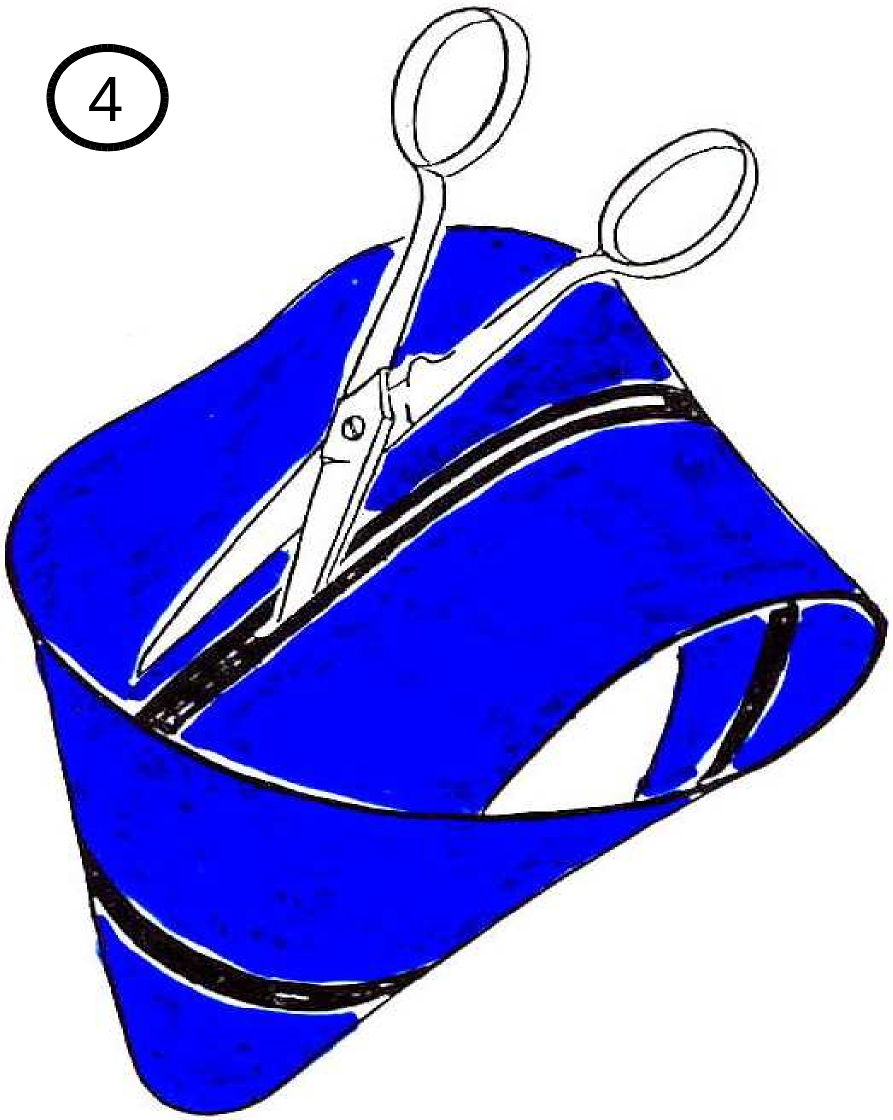
2



3



4

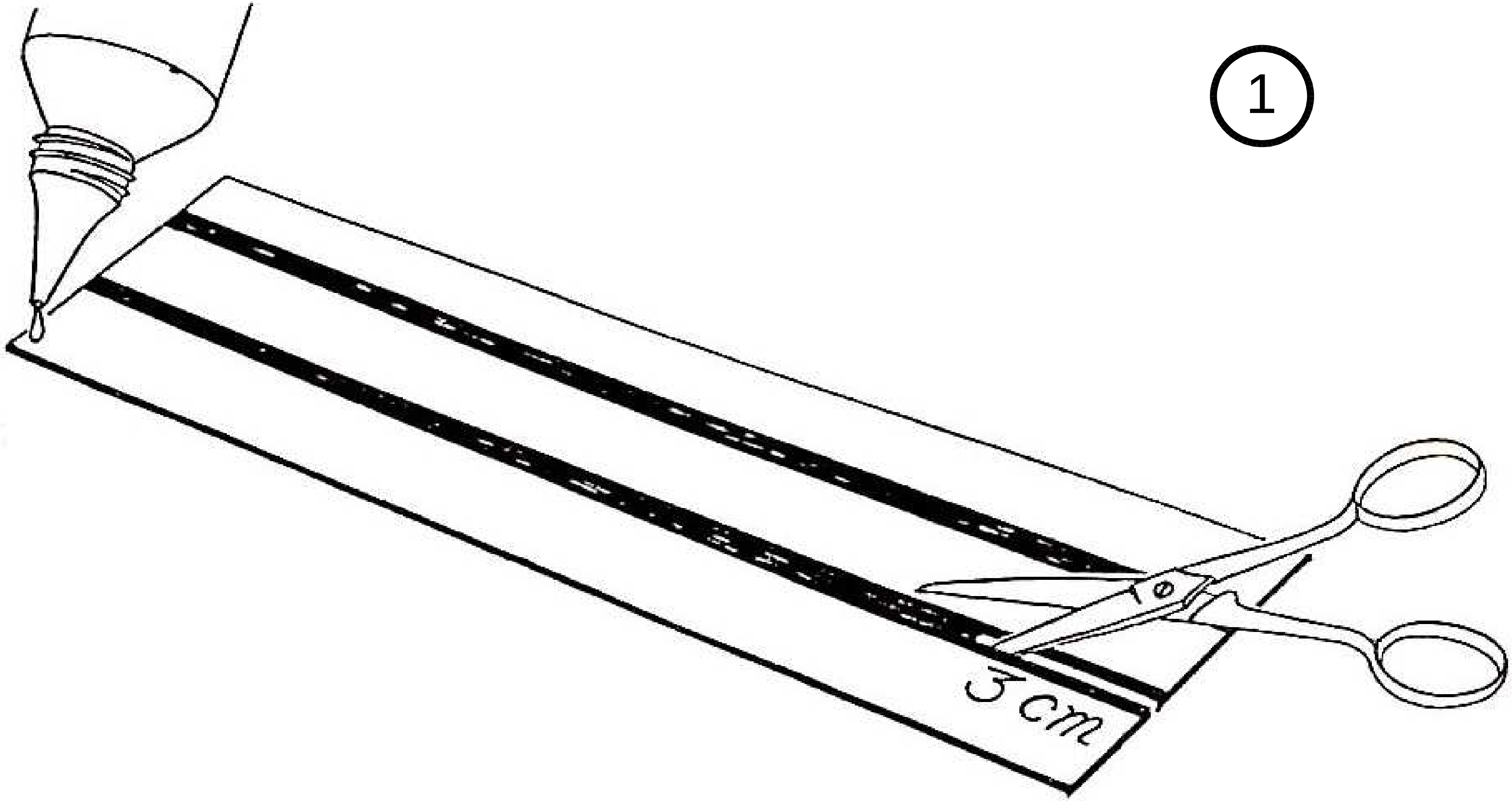


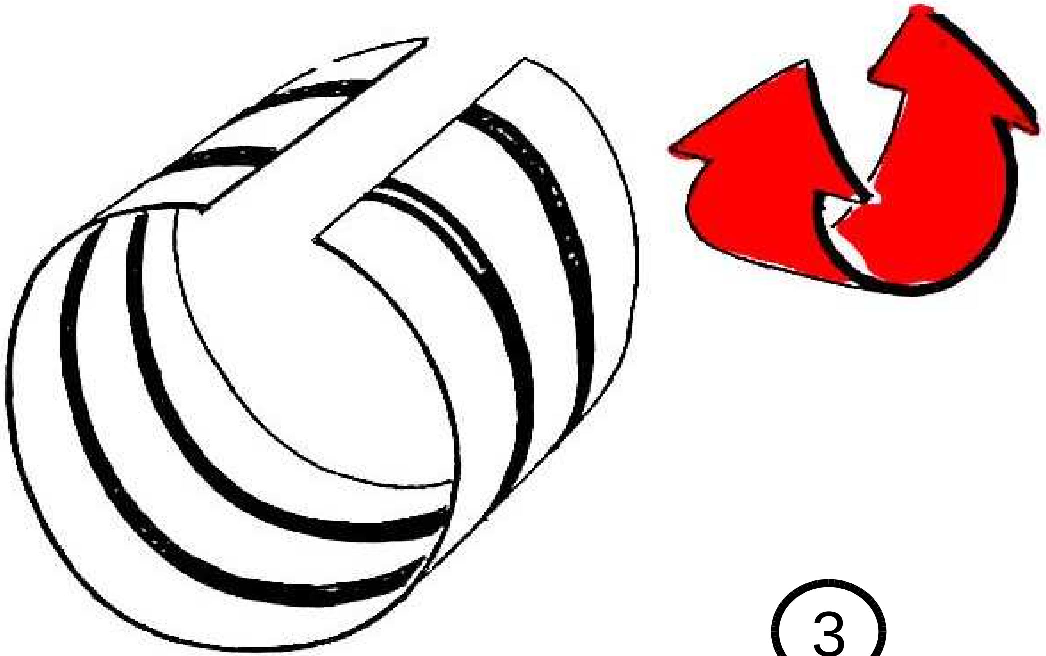
?

Erst raten, was herauskommt – dann schneiden!

Nun etwas komplizierter...

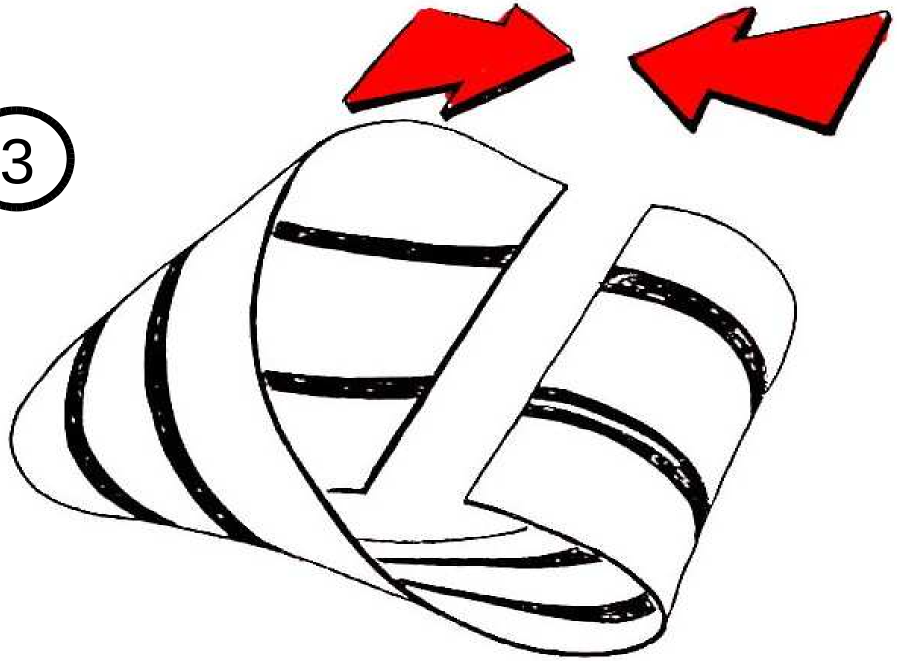
1



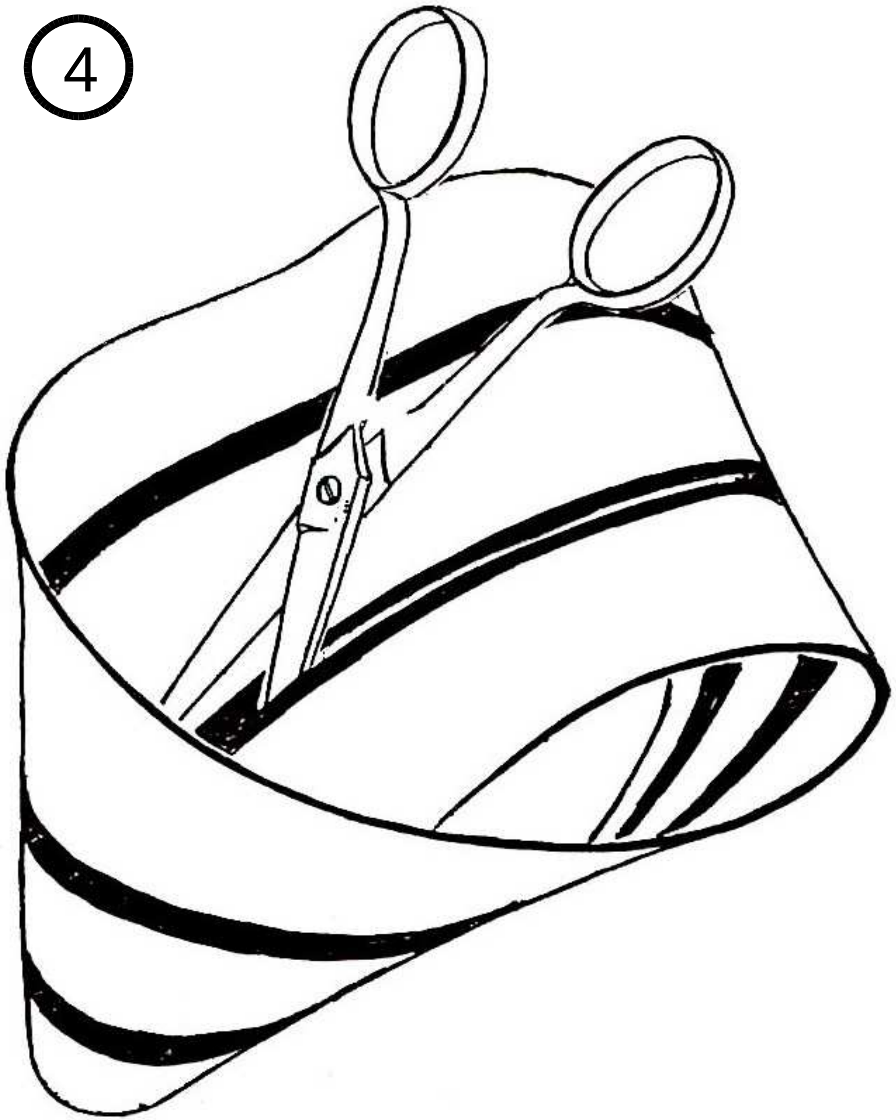


2

3



4



?

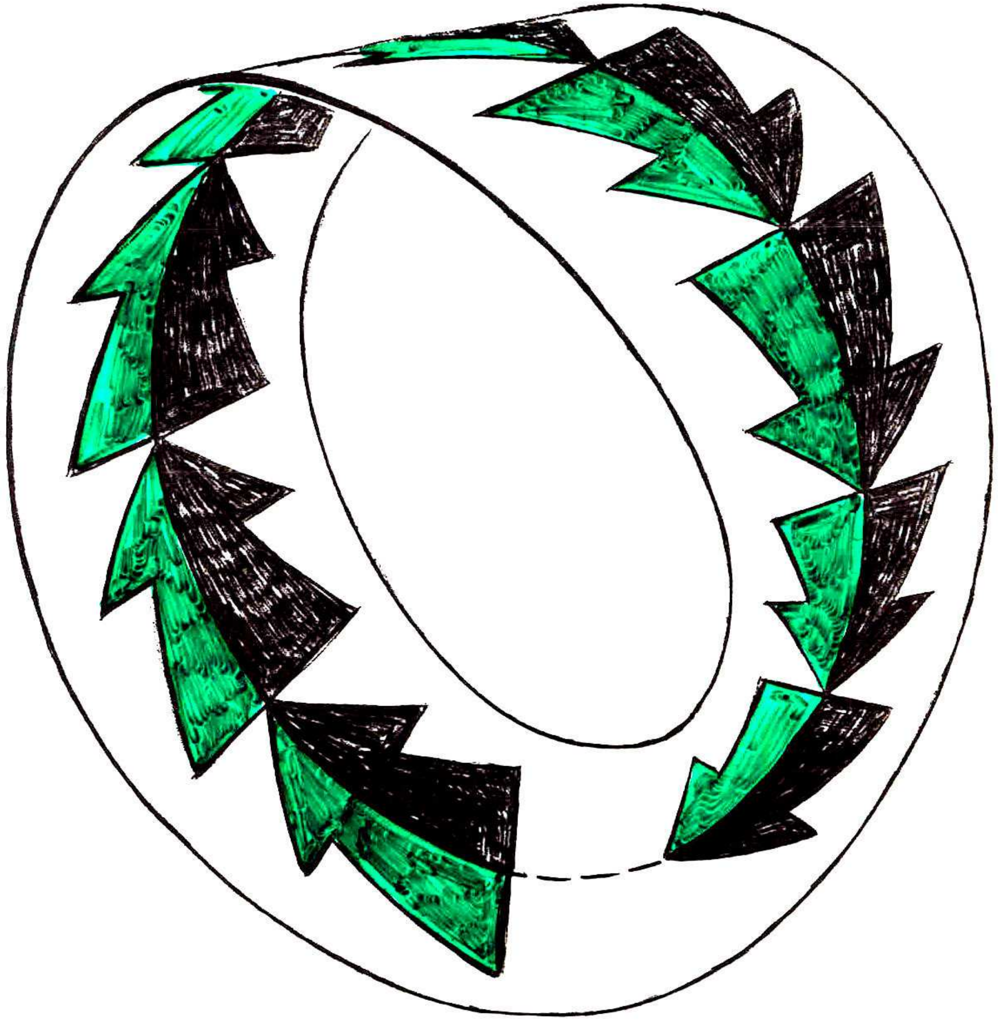
Auch hier gilt: erst raten, dann schneiden!

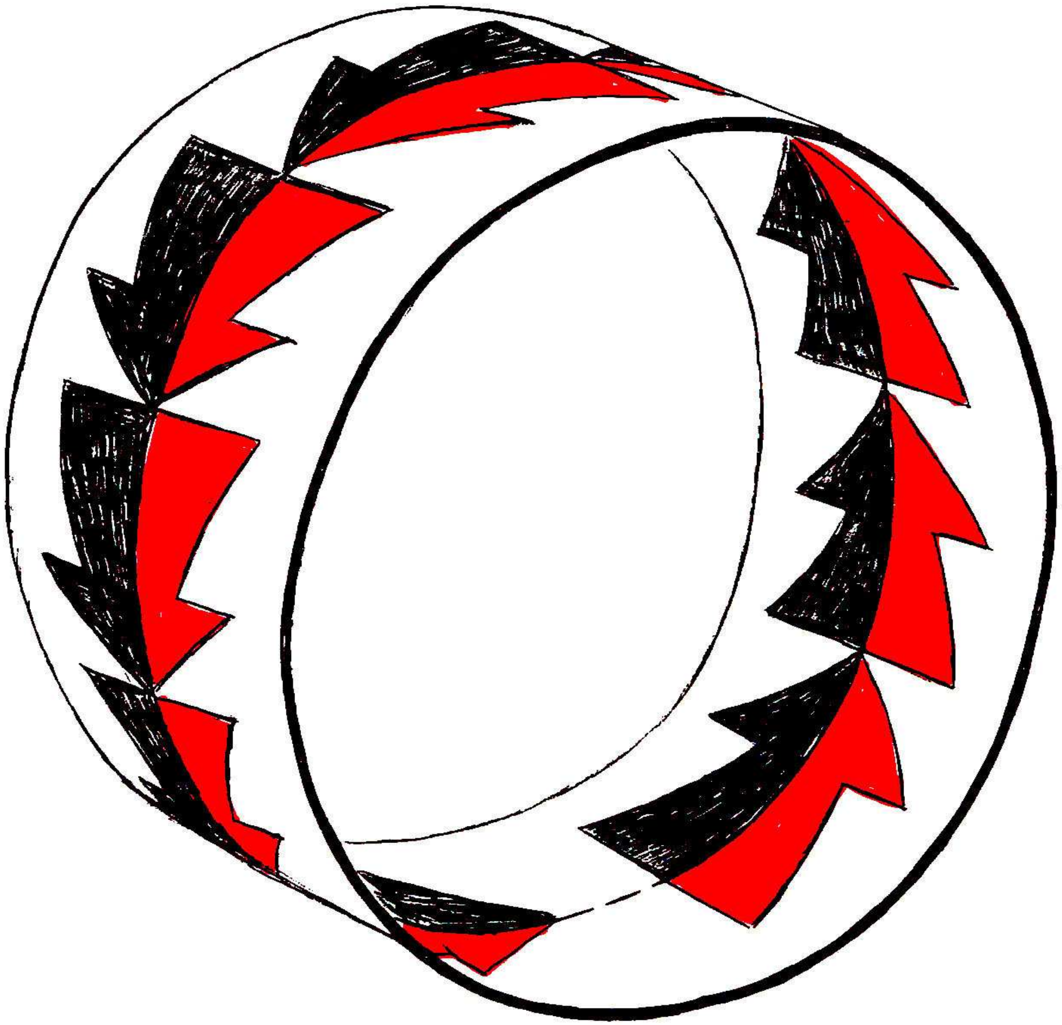
Das Möbius-Band – ein Band mit nur einer Seite

Versucht man „Vorder-“ und „Rückseite“ in verschiedenen Farben zu bemalen, so gibt es Probleme...

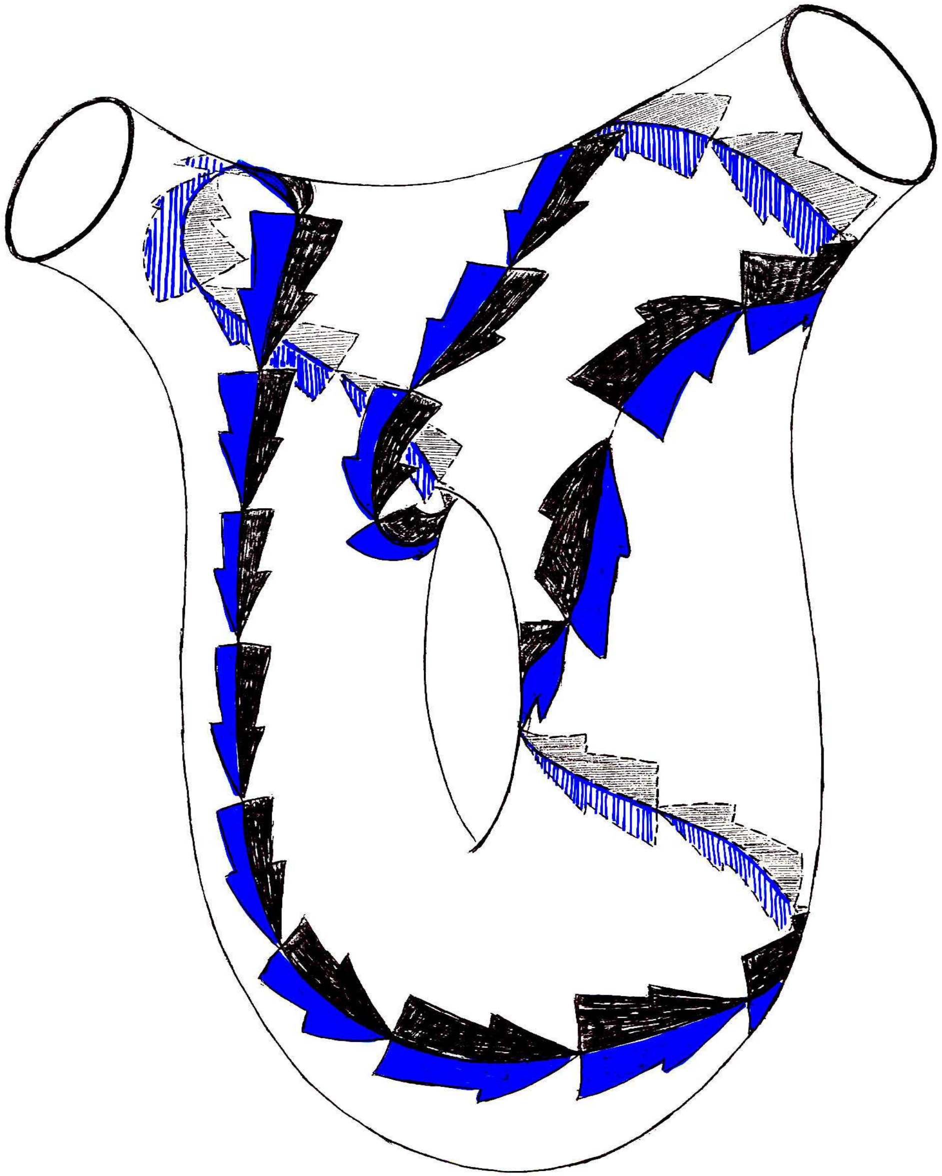
Das Möbius-Band ist nicht orientierbar...

... das heisst, eine Figur lässt sich längs eines geschlossenen Weges so verschieben, dass sie „seitenverkehrt zurück kommt“.





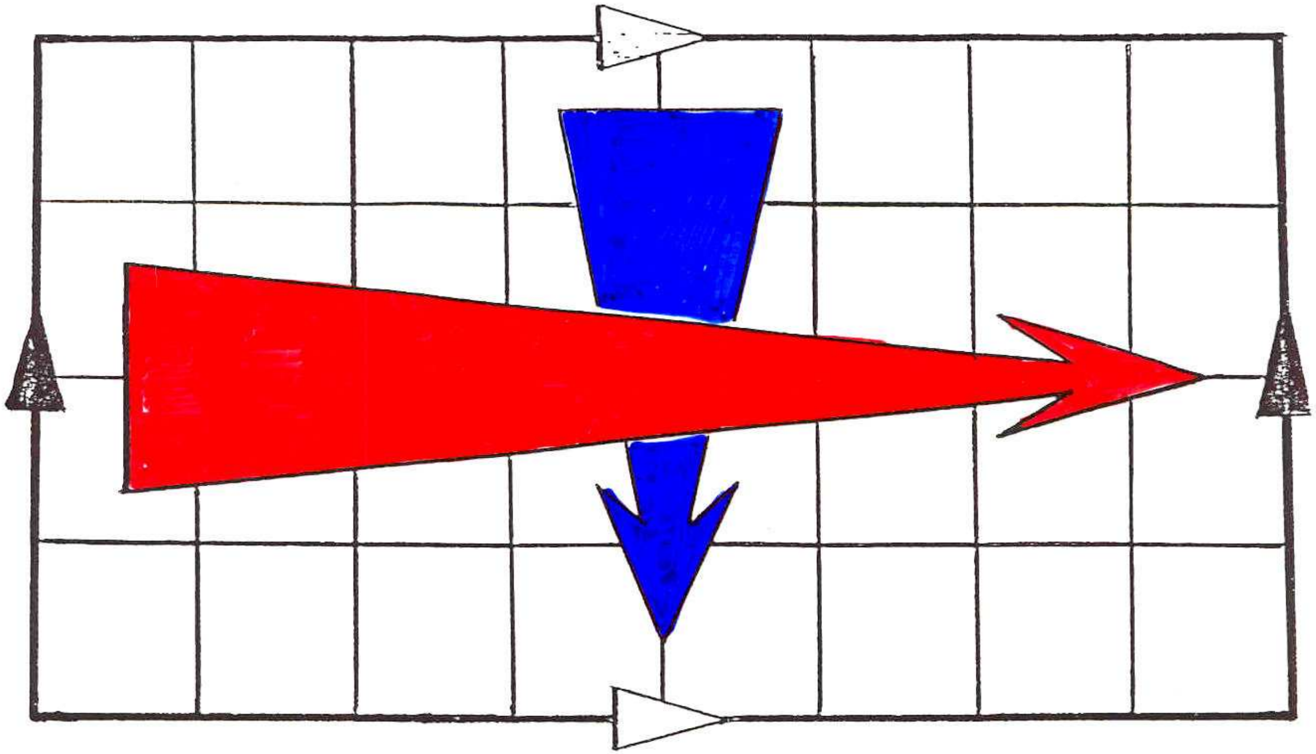
Ein „gewöhnliches“ Band ist orientierbar.



Auch diese Fläche ist orientierbar.

Wir basteln in Gedanken eine weitere Fläche...

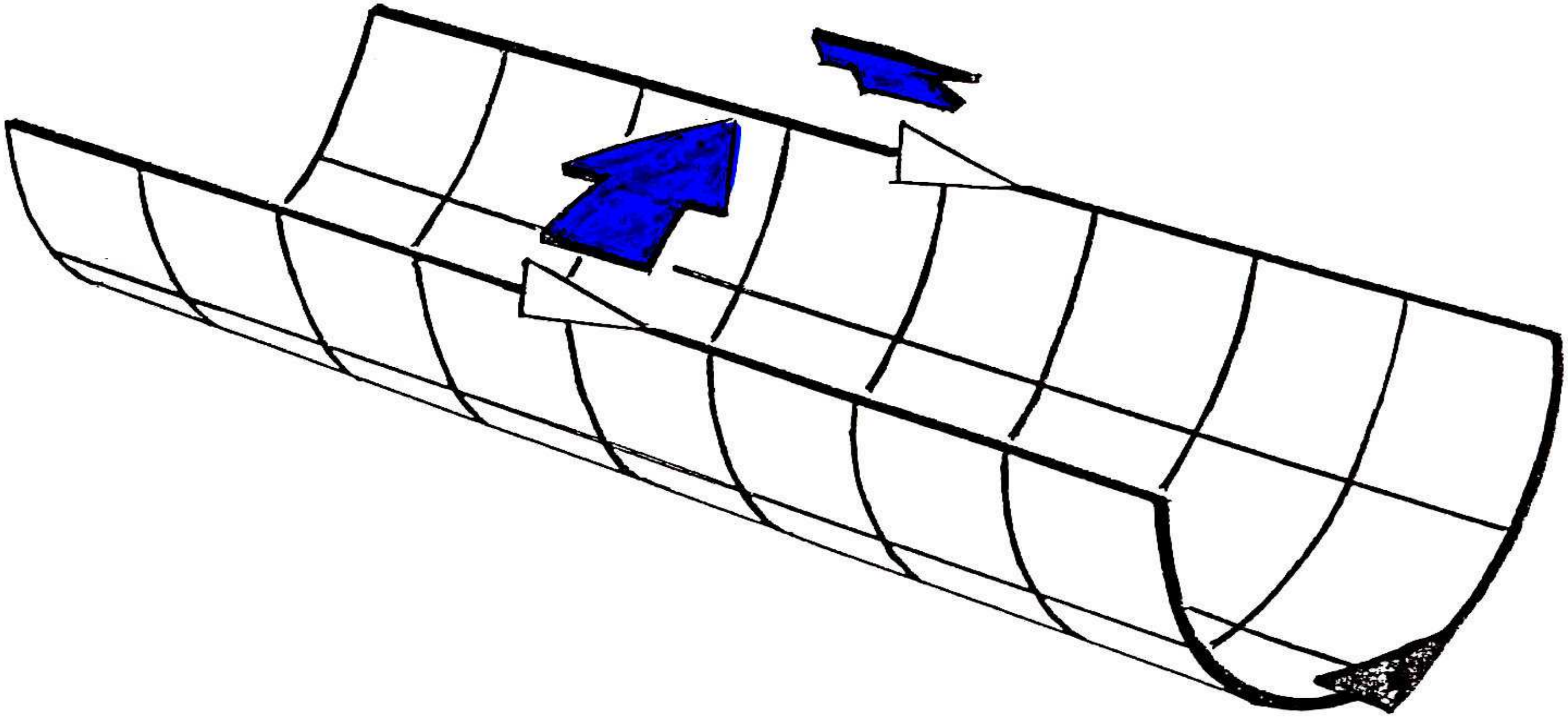
Die gegenüberliegenden Seiten eines Rechtecks werden wie angegeben verklebt:



Hinweis: Zuerst die „blaue“ Verklebung durchführen.

1

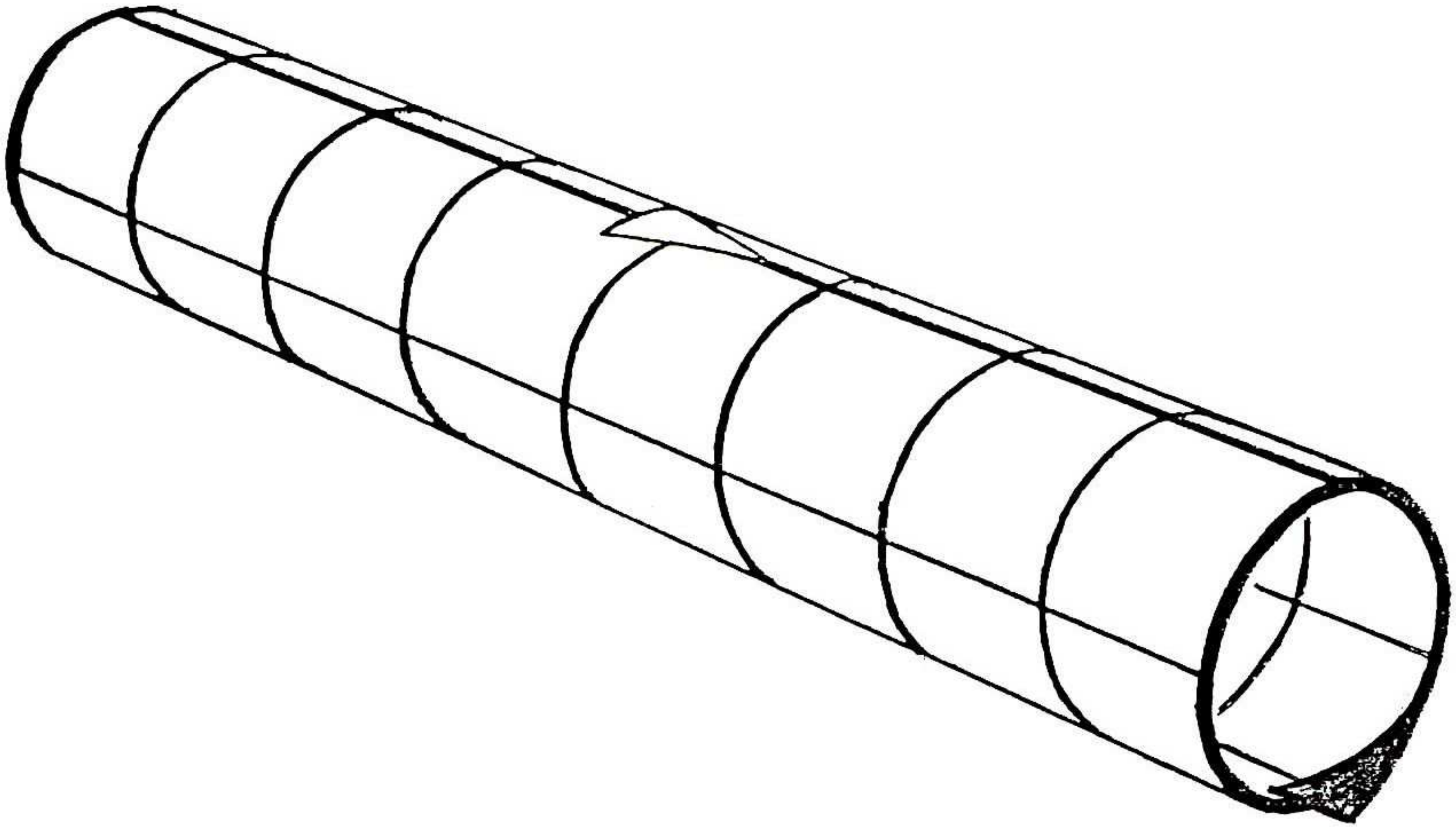
Eine halbe Röhre...



Sehen Sie schon, was herauskommt?

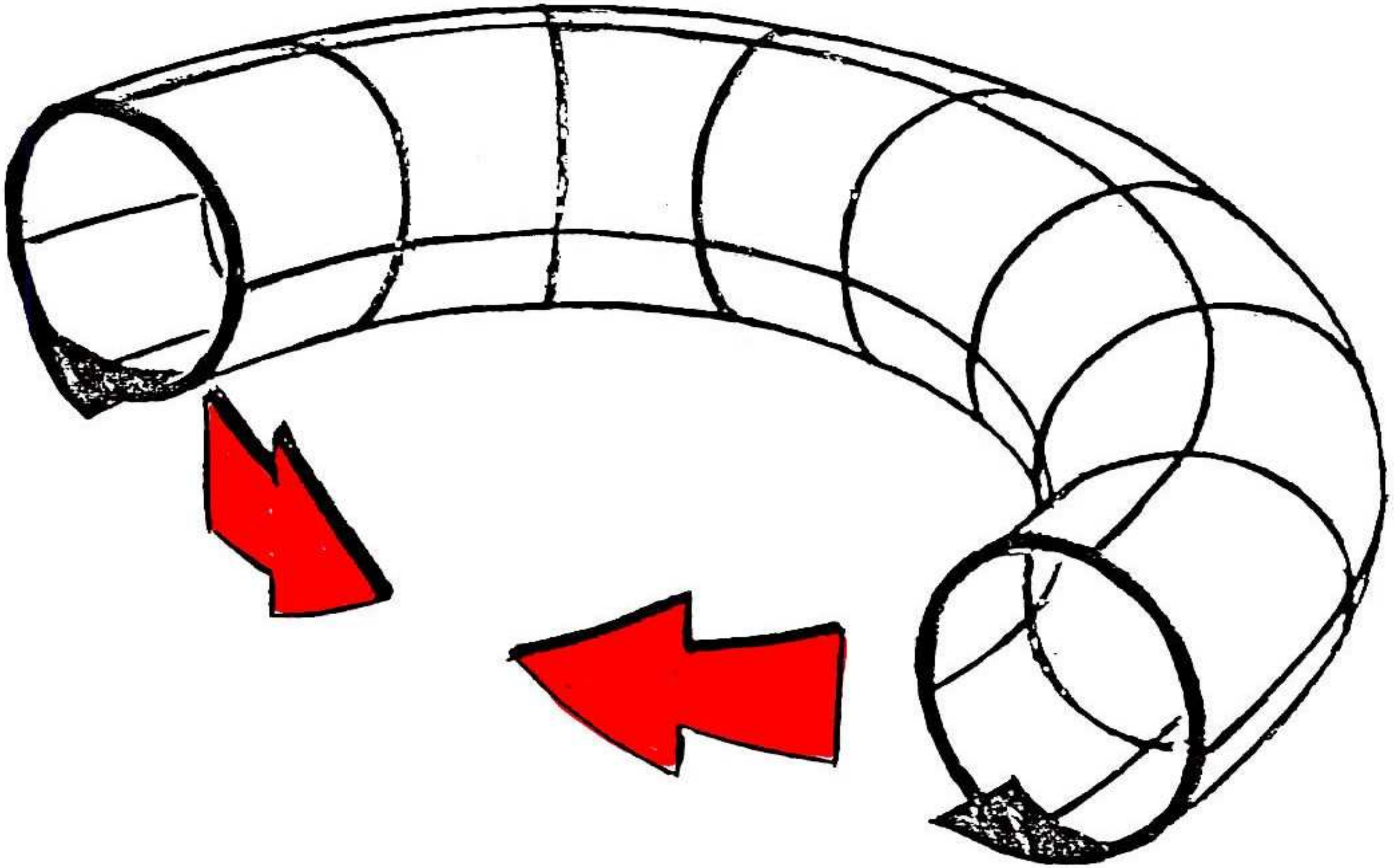
2

Eine Röhre...



3

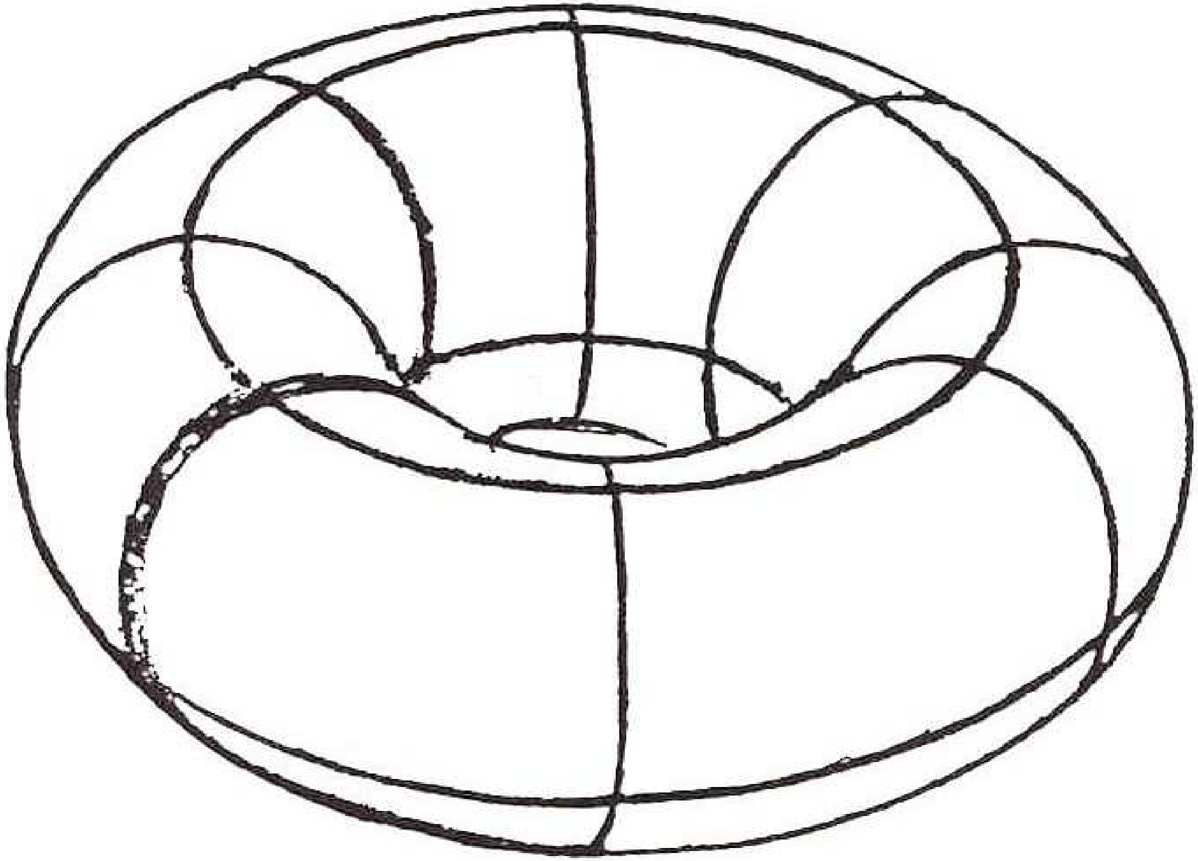
Eine gekrümmte Röhre...



Universität Zürich
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

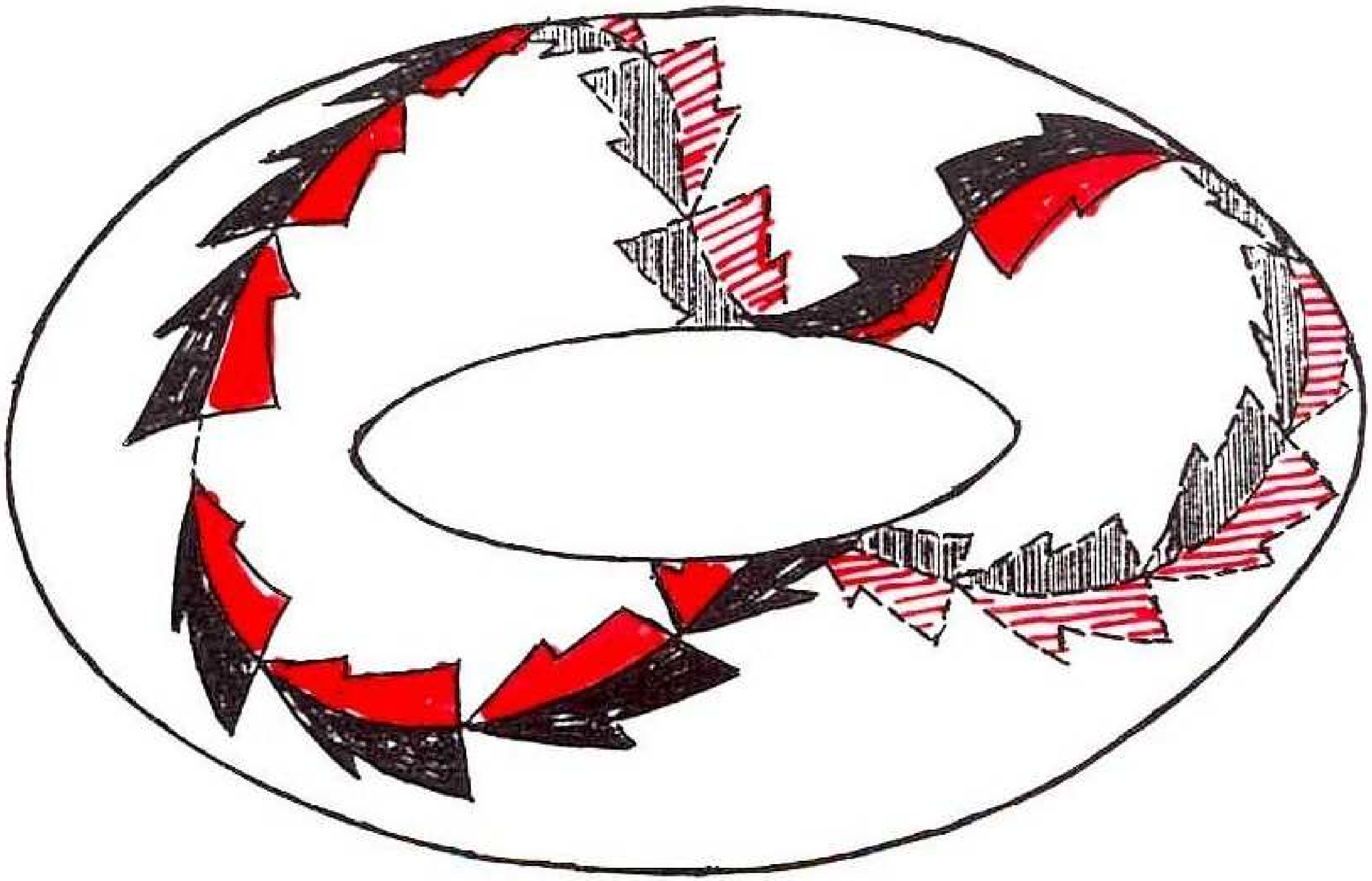
4

Ein Schwimmreifen!



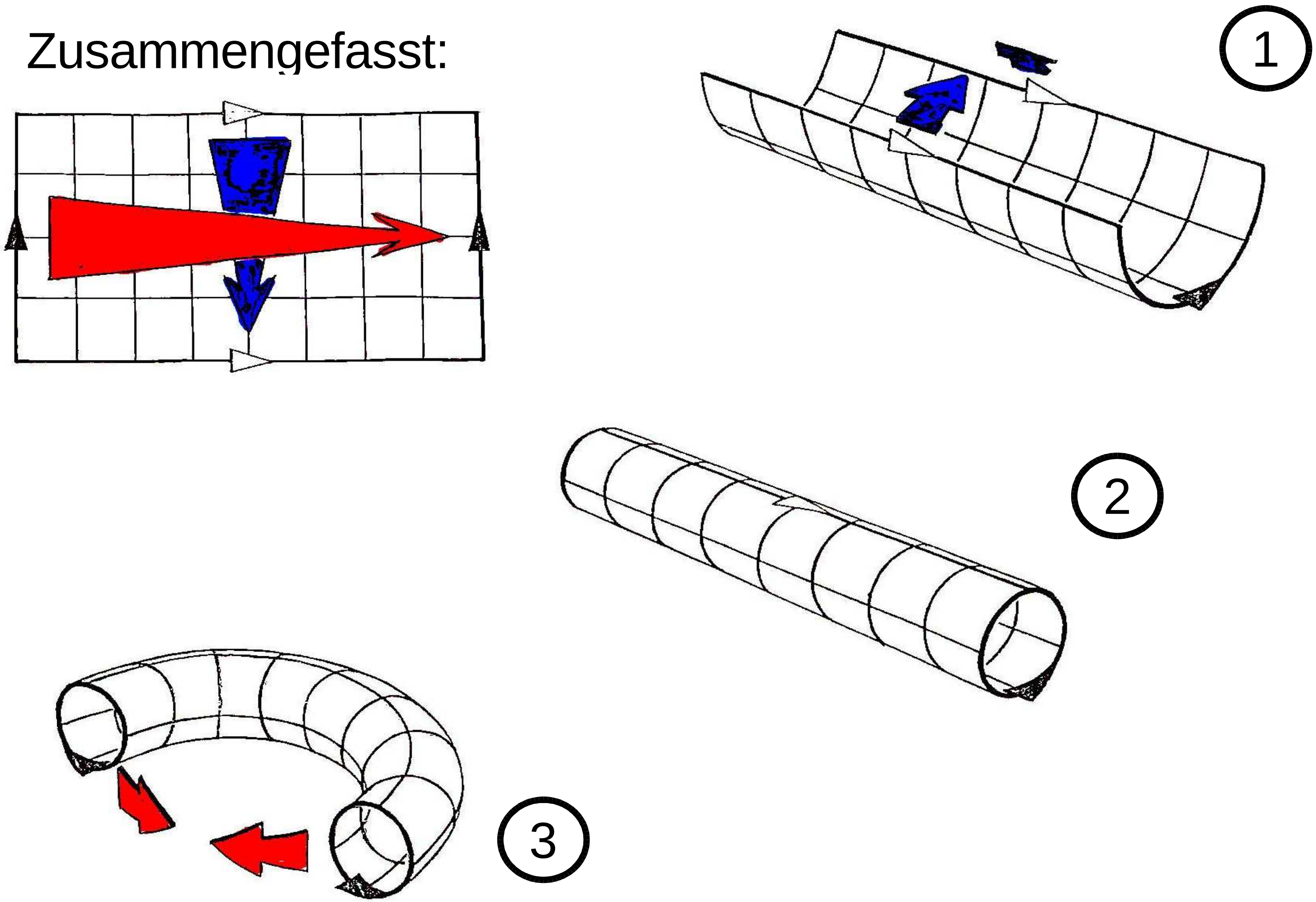
... für gewöhnlich Torus genannt.

Universität Zürich
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

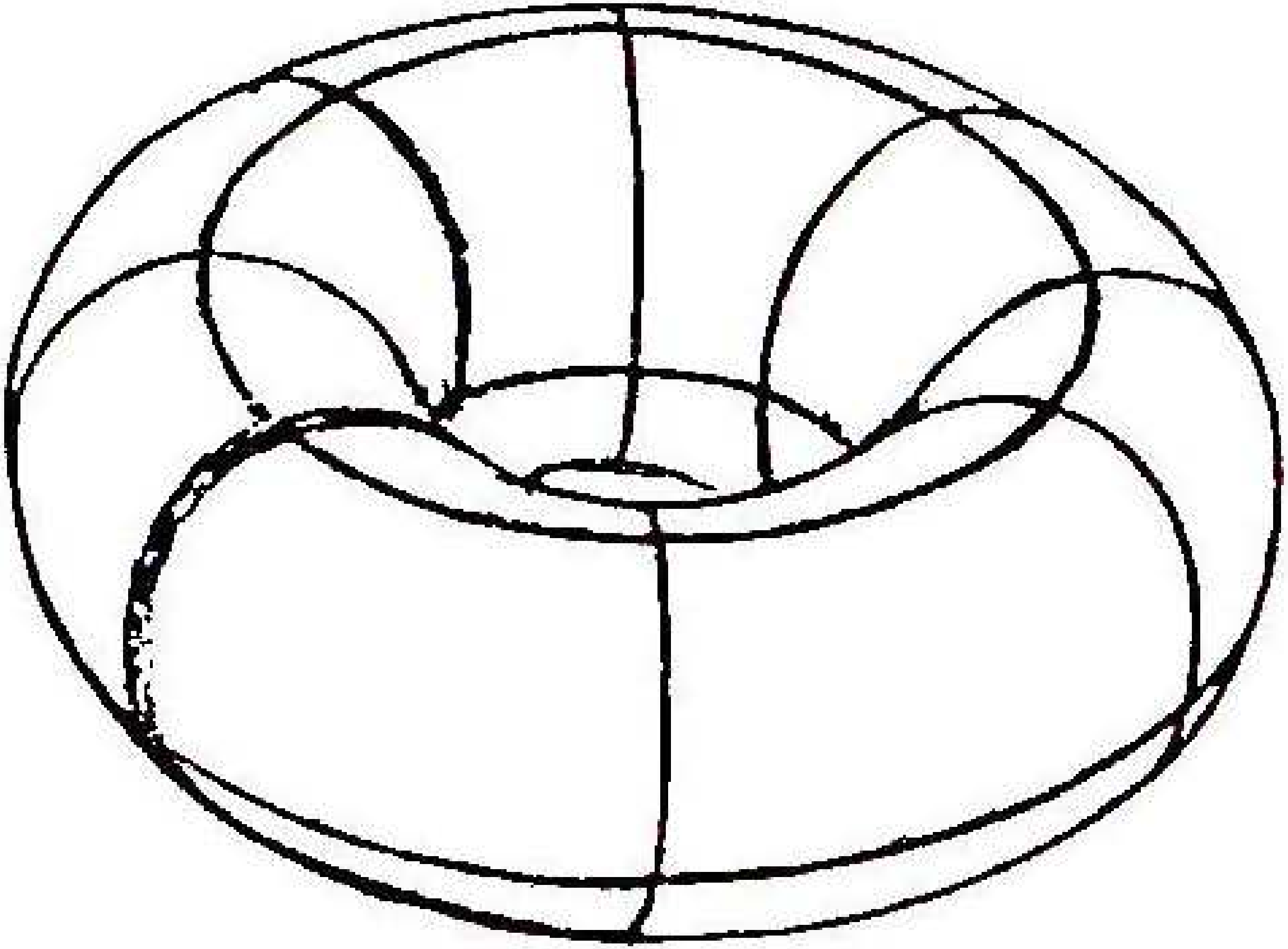


Der Torus ist eine geschlossene, orientierbare Fläche.

Zusammengefasst:

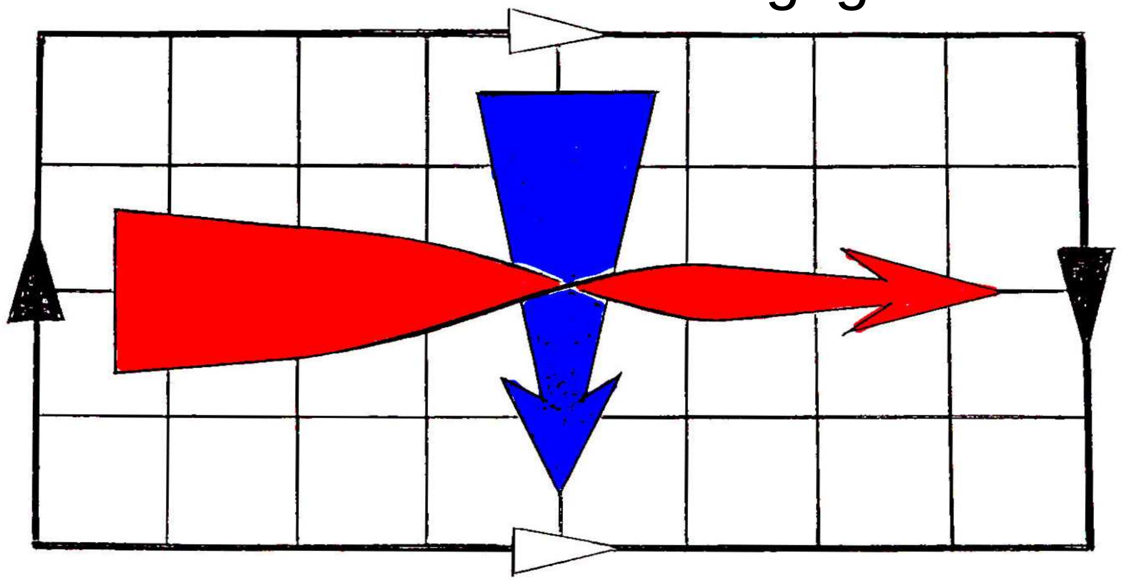


4



Ein Blick in höhere Dimensionen...

Wir verkleben die gegenüberliegenden Seiten
eines Rechtecks wie angegeben:

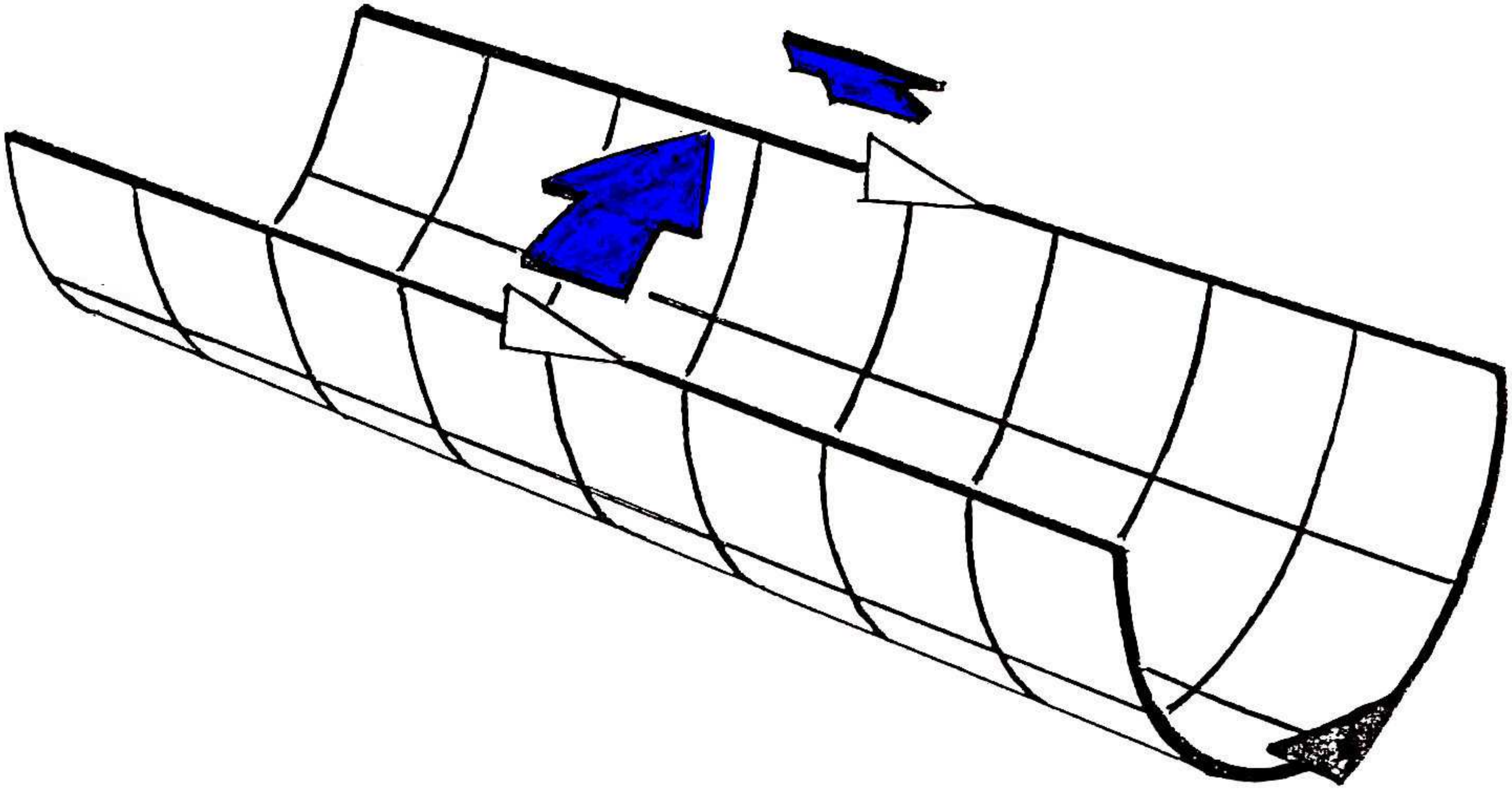


Man beachte den Unterschied zum vorherigen Fall (Torus):
eine der schmalen Seiten wird vor dem Verkleben umgedreht!

Hinweis: Zuerst die „blaue“ Verklebung durchführen.

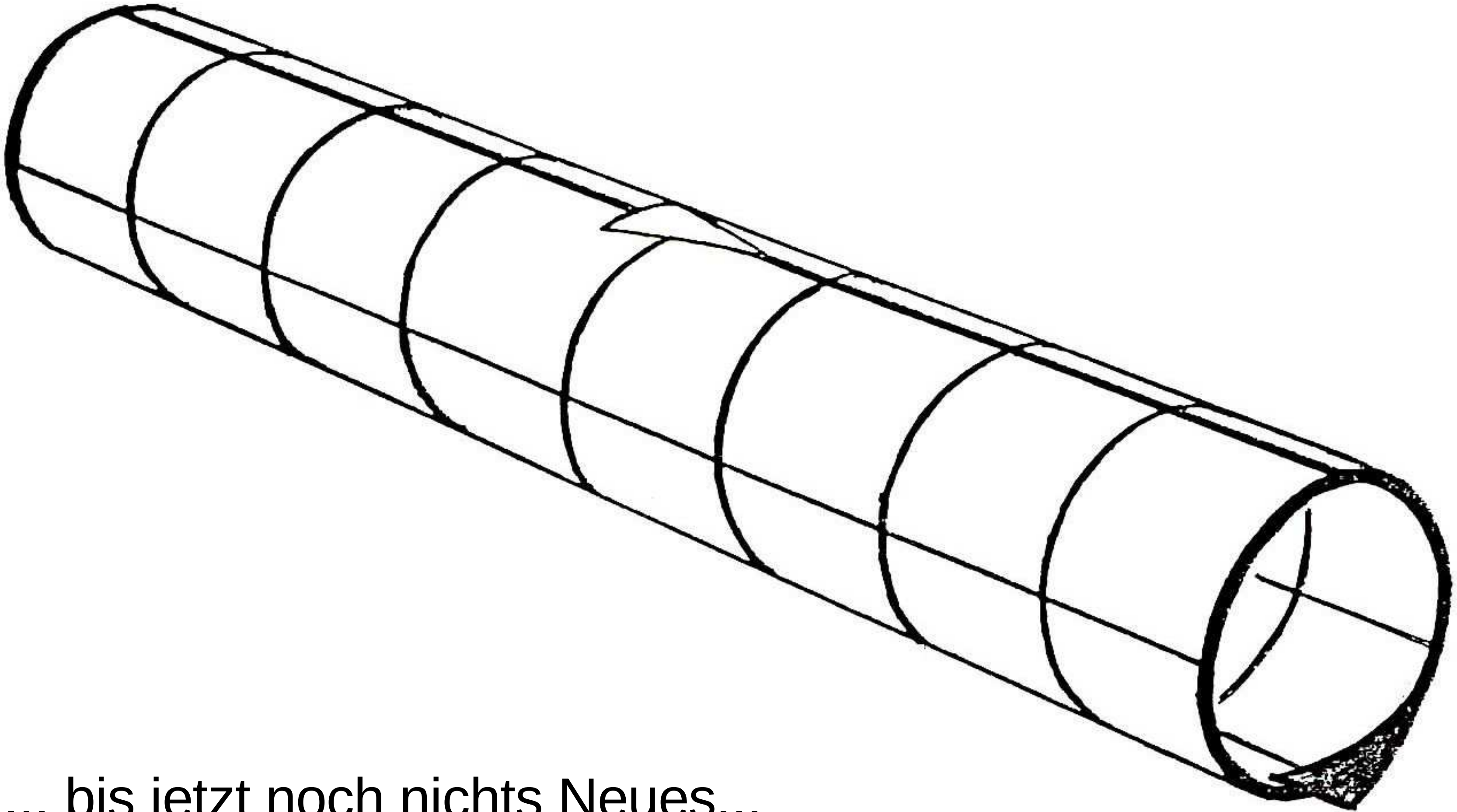
1

Eine halbe Röhre...



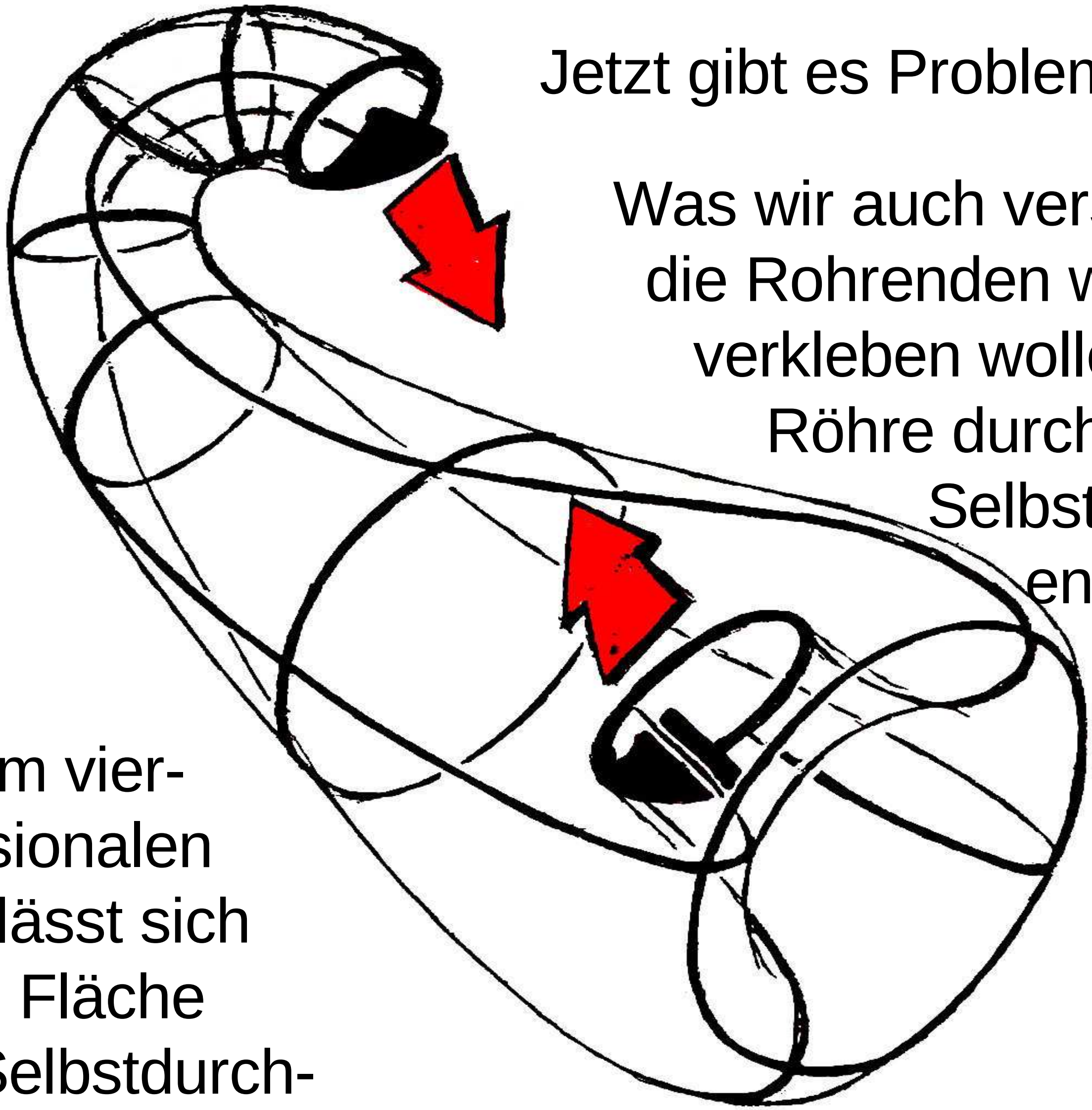
2

Eine Röhre...



... bis jetzt noch nichts Neues...

3



Jetzt gibt es Probleme!

Was wir auch versuchen – wenn wir die Rohrenden wie vorgeschrieben verkleben wollen, müssen wir die Röhre durchstossen, also eine Selbstdurchdringung der entstehenden Fläche in Kauf nehmen.

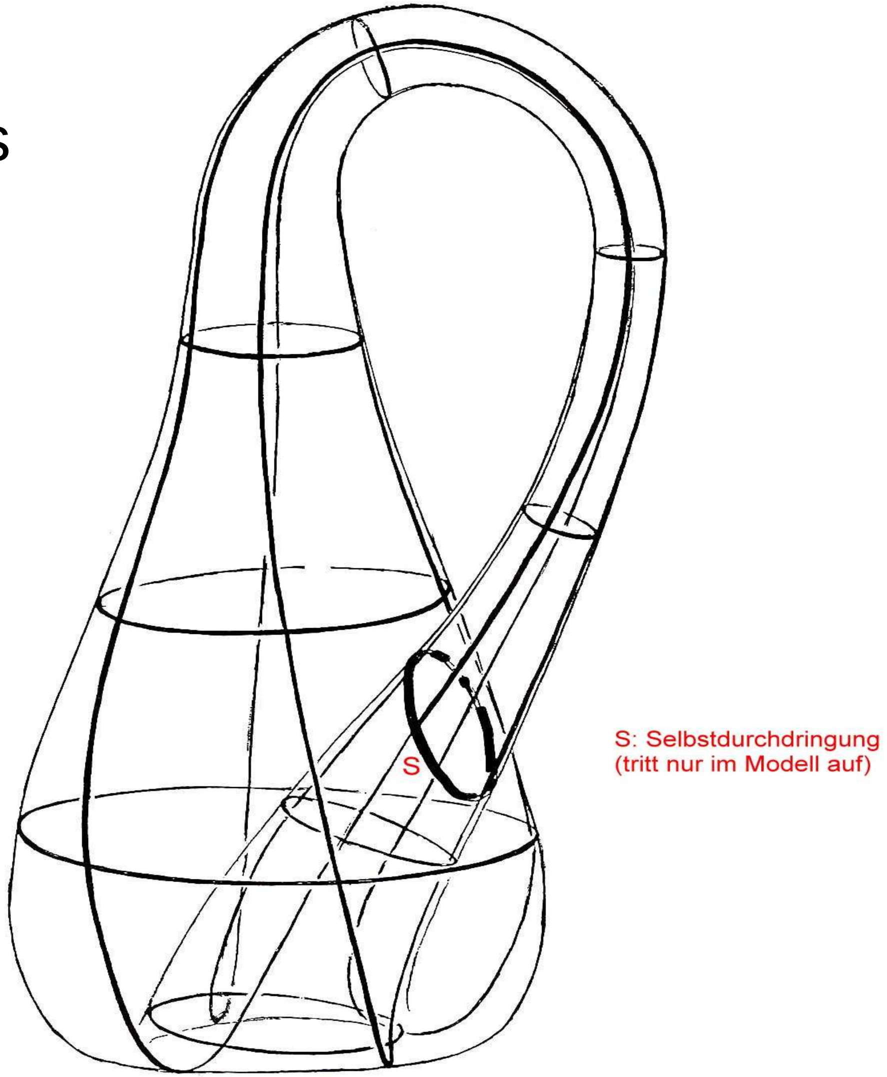
Aber: Im vier-dimensionalen Raum lässt sich unsere Fläche ohne Selbstdurch-dringungen schliessen!

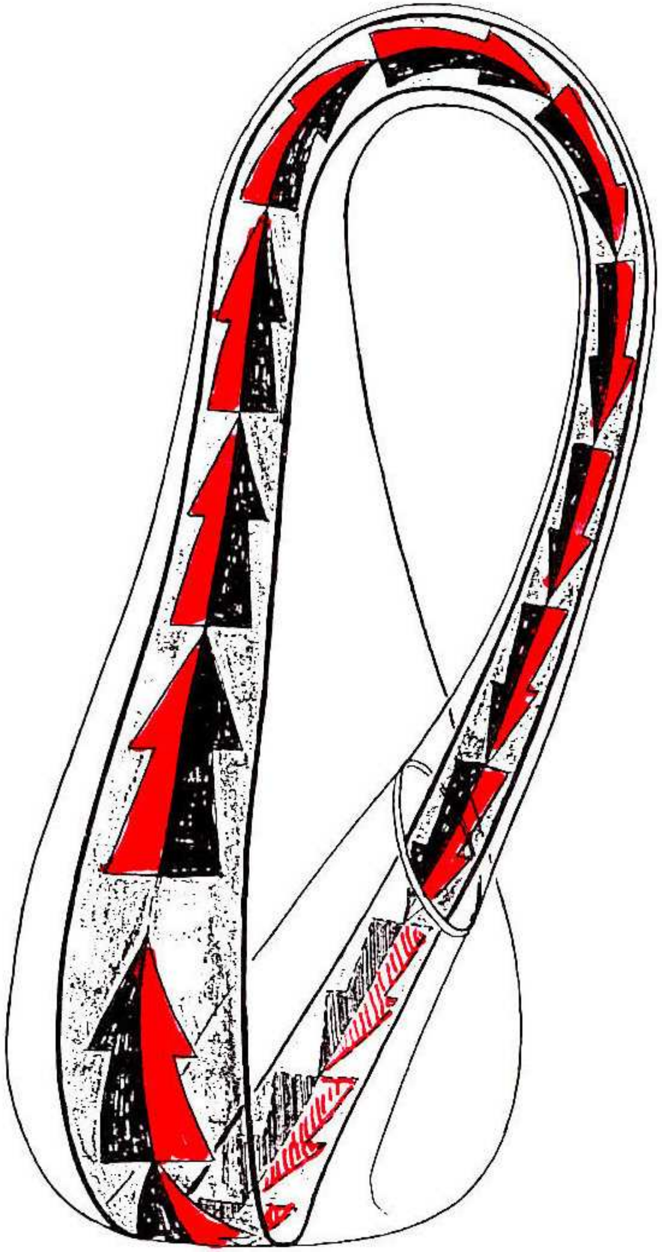
4 Wir bleiben im dreidimensionalen Raum, fahren fort...

... und erhalten ein sogenanntes Modell einer geschlossenen Fläche, die sich im vier-dimensionalen Raum befindet:

Die Kleinsche Flasche.

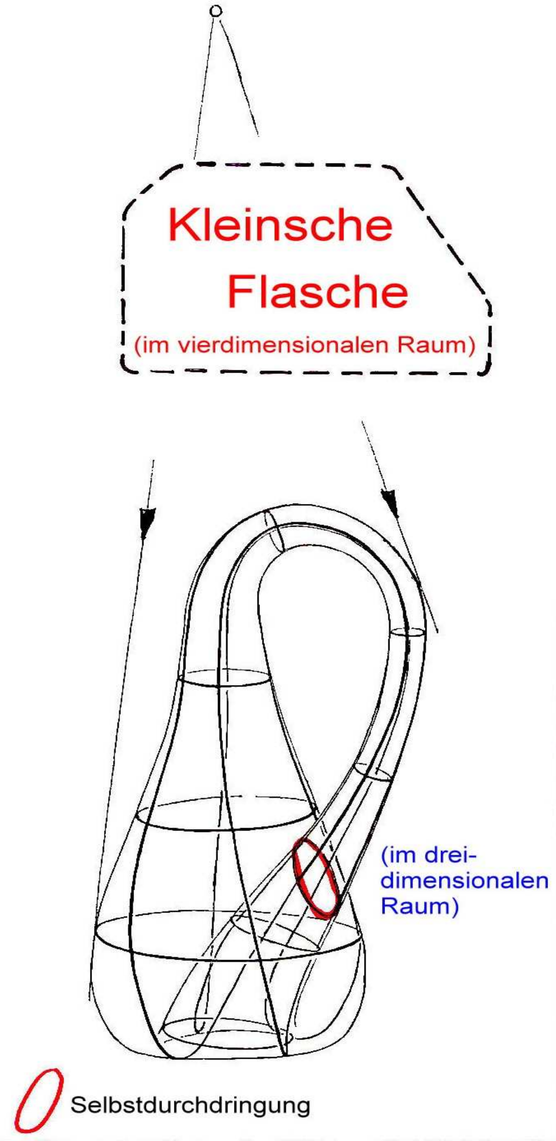
F. Klein
1849 – 1924
Mathematiker in Göttingen





Die Kleinsche Flasche ist nicht orientierbar...

... denn wie am Modell gezeigt, enthält sie ein Möbius-Band!

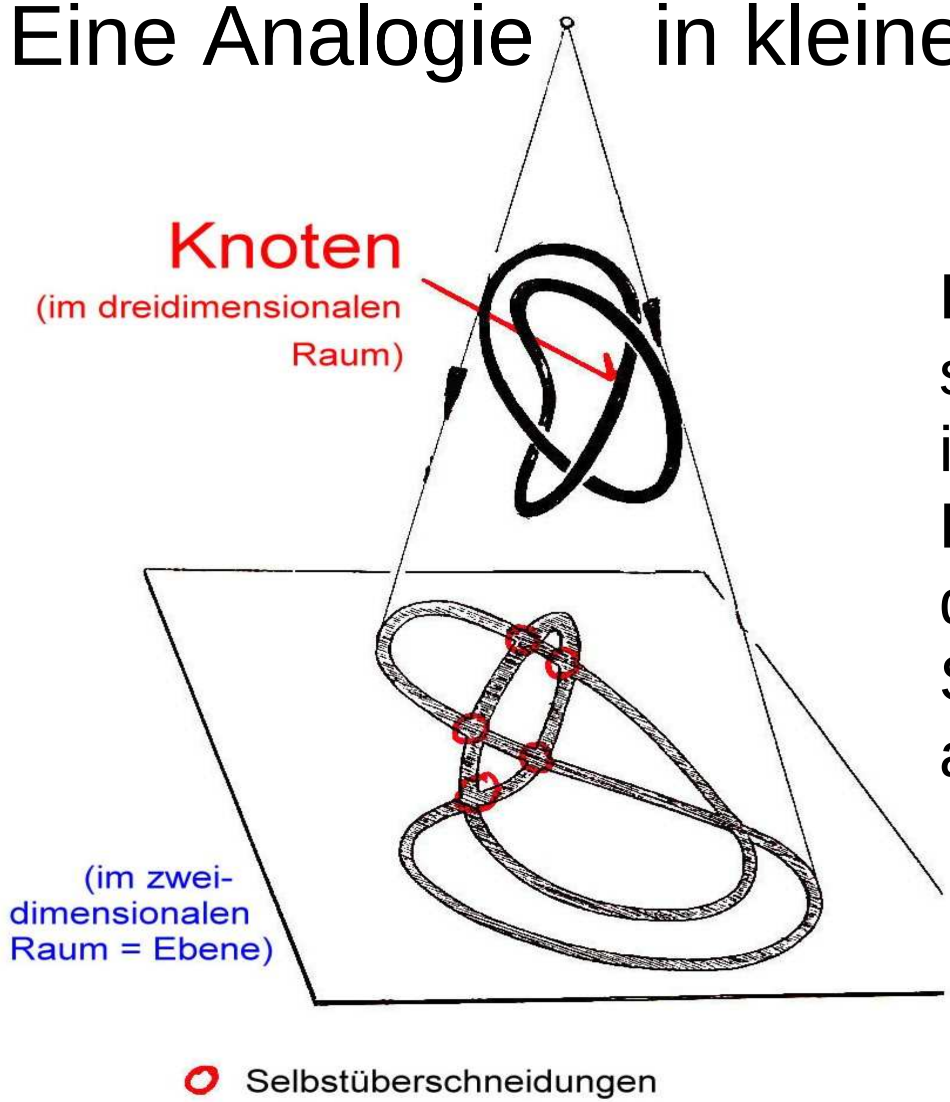


Es gilt folgender Satz:

Eine geschlossene nicht orientierbare Fläche (wie z.B. die Kleinsche Flasche) kann im dreidimensionalen Raum nicht realisiert werden.

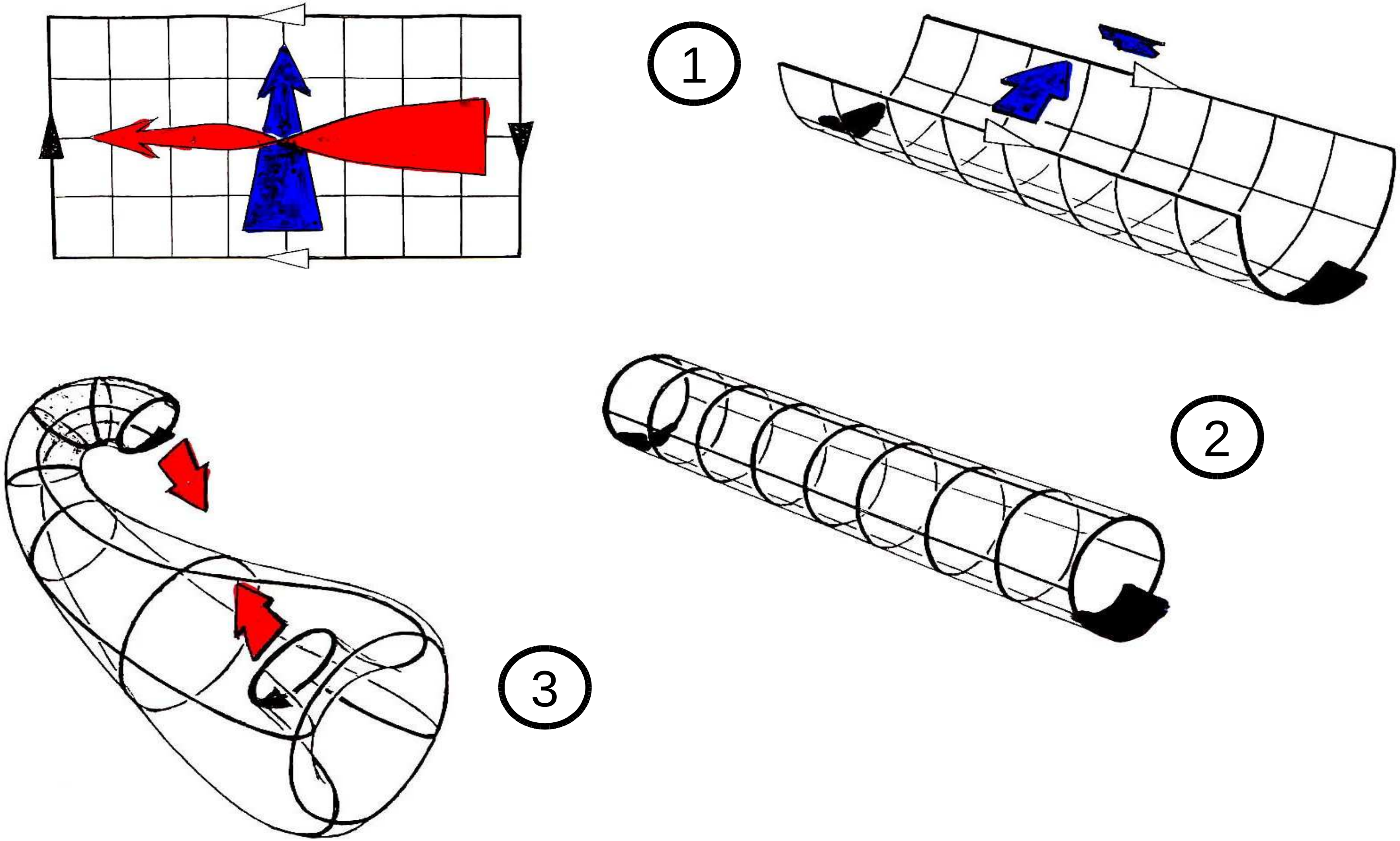
Alle Modelle einer solchen Fläche haben Selbstdurchdringungen.

Eine Analogie in kleinerer Dimension...

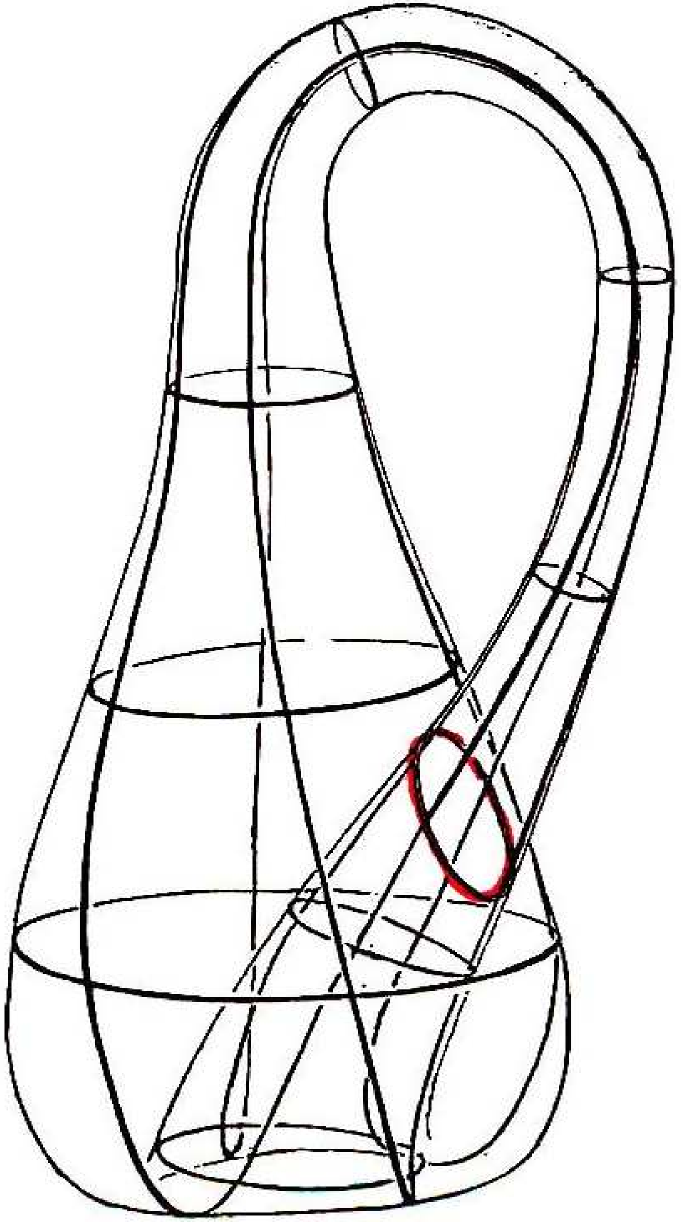


Ein Knoten ist eine ge-schlossene Kurve, die nicht in der Ebene realisierbar ist. Das Modell des Knotens in der Ebene weist Selbstüberschneidungen auf.

Zusammengefasst: Die Entstehung der Kleinschen Flasche

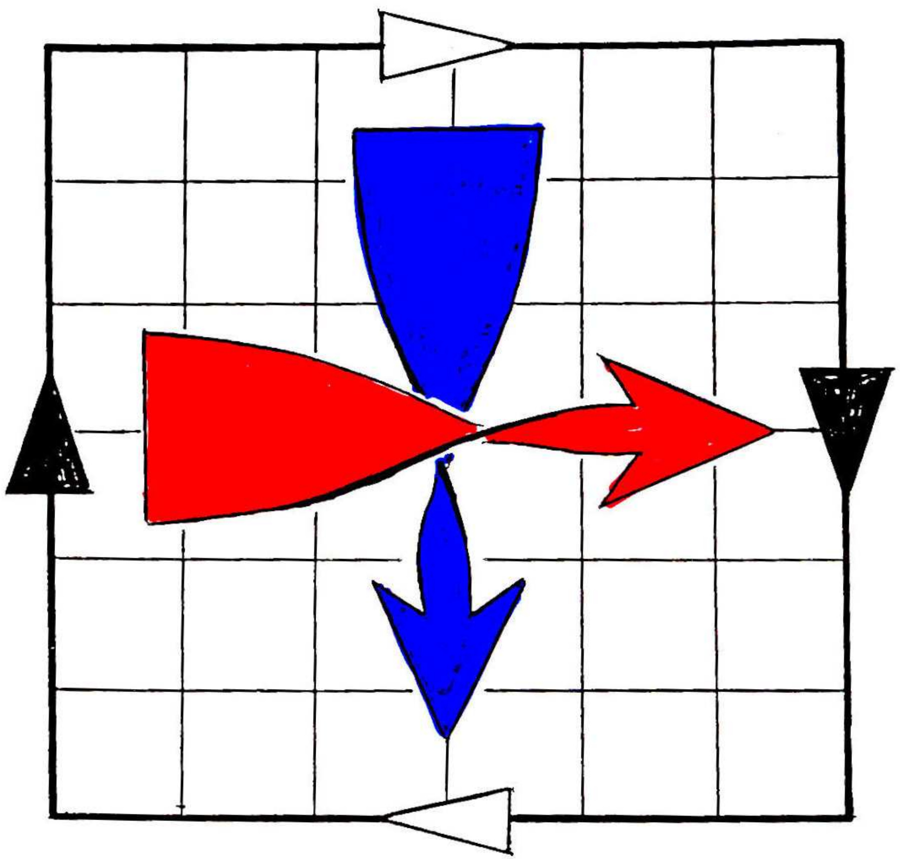


4

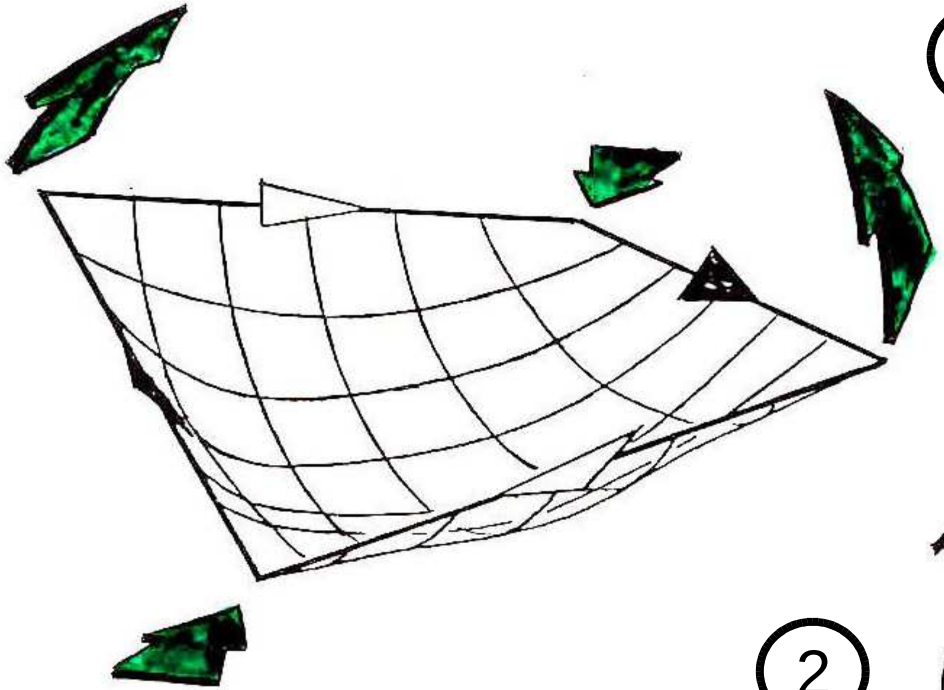


Eine weitere geschlossene, nicht orientierbare Fläche...

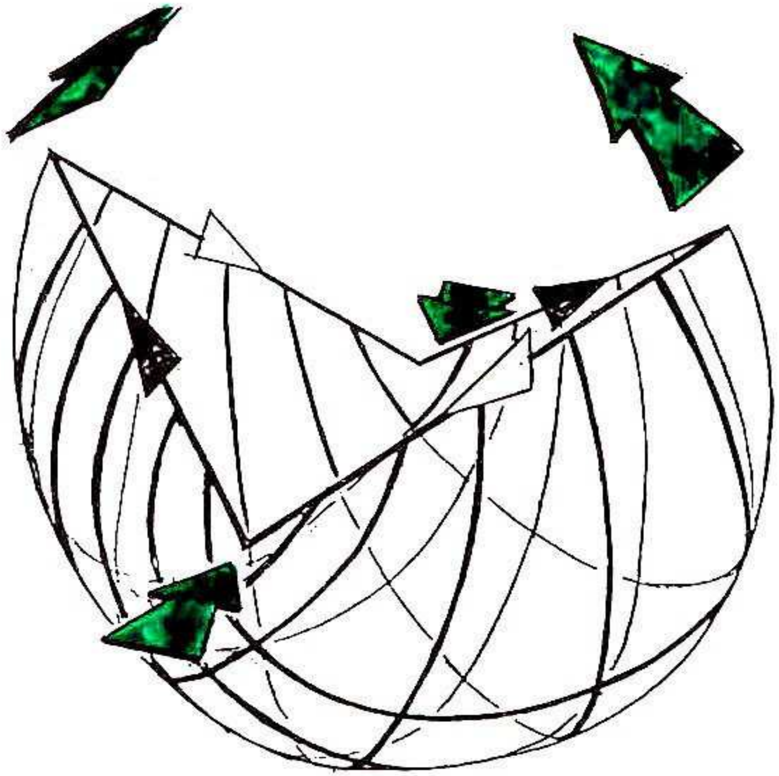
Wir verkleben die gegenüberliegenden
Seiten eines Quadrates wie folgt:



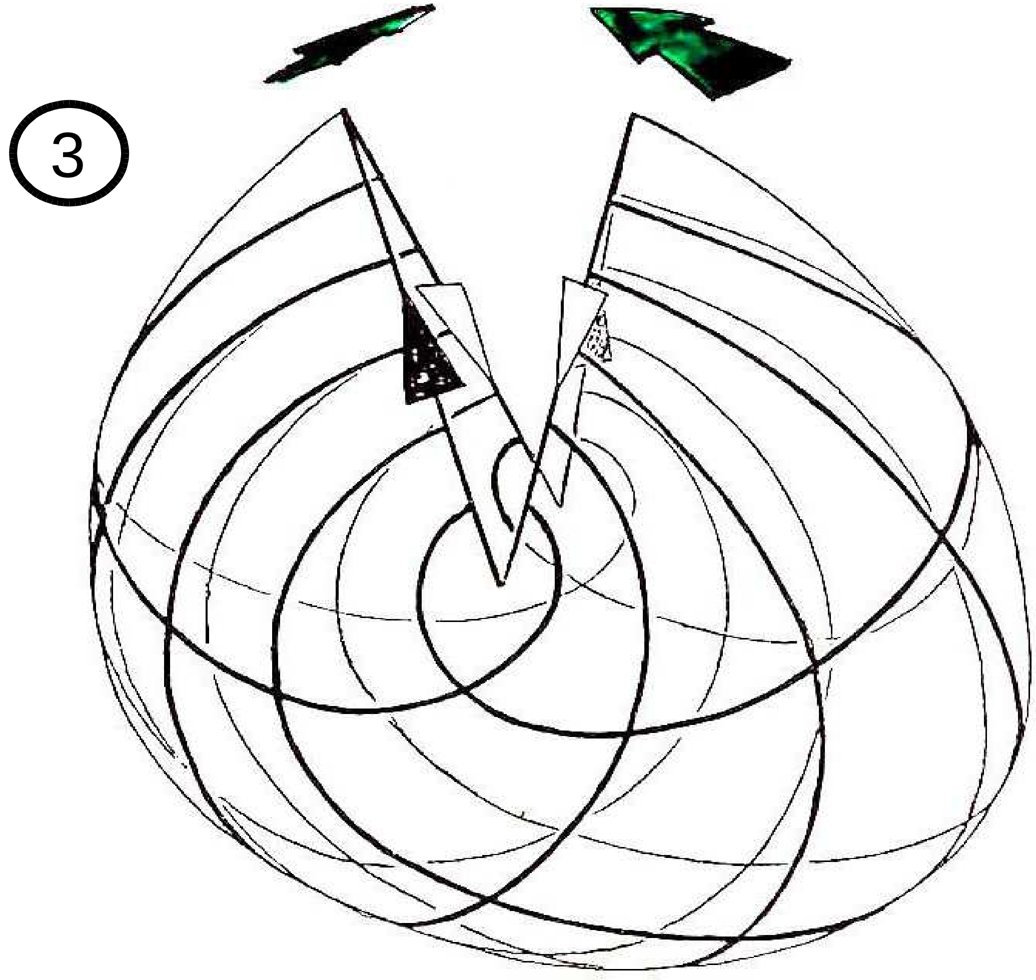
1

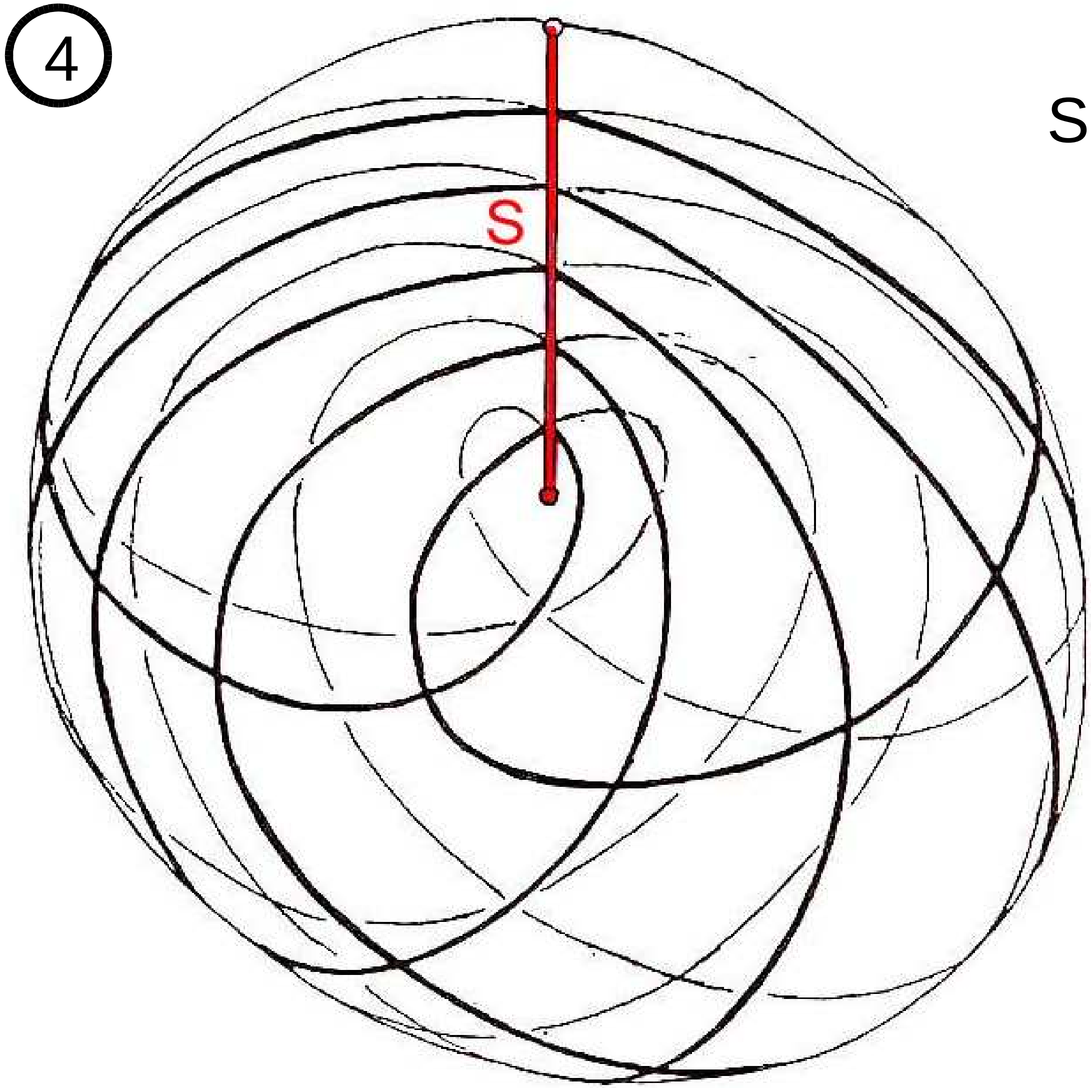


2



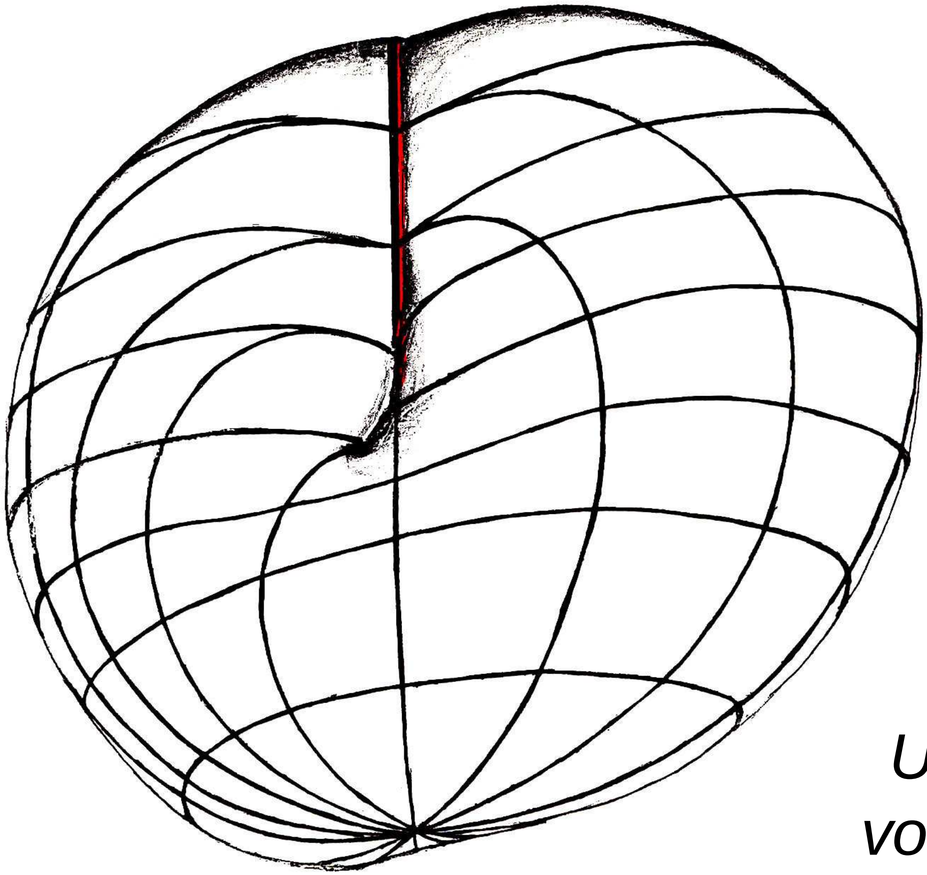
... und erhalten bei Schritt 3 wieder Schwierigkeiten – eine unvermeidbare Selbstdurchdringung.



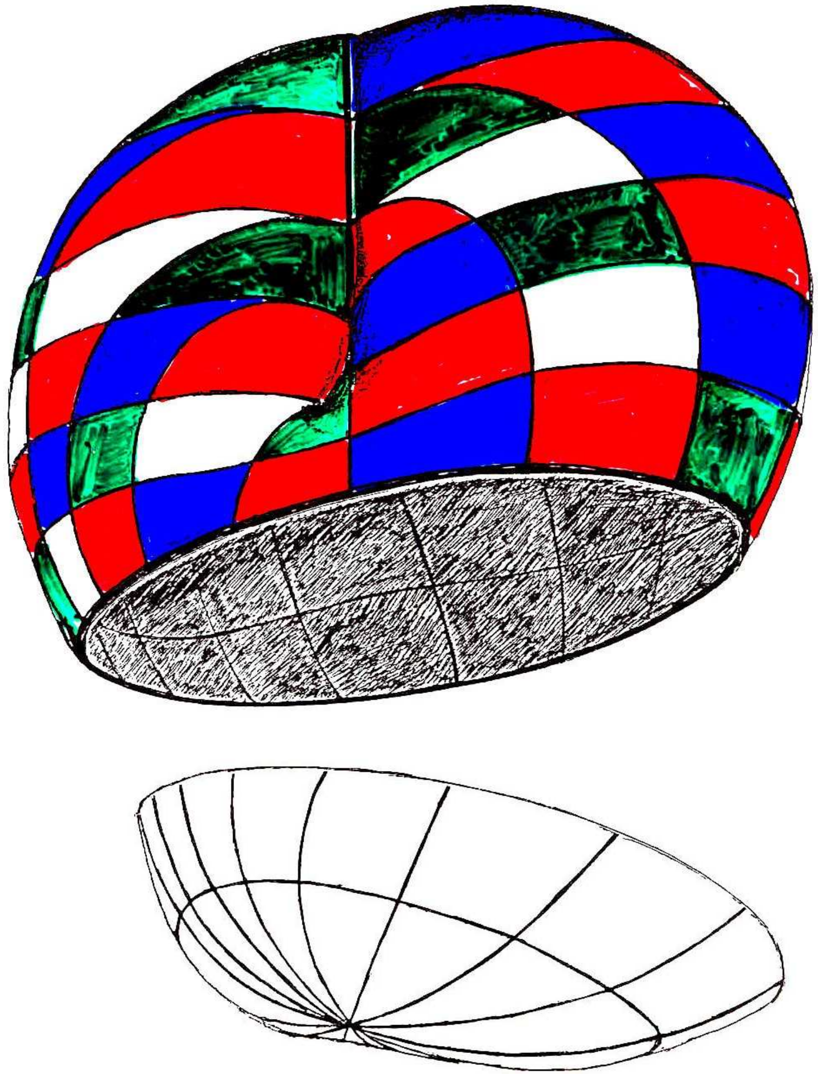


Nehmen wir die Selbstdurchdringung in Kauf, so entsteht in Schritt 4 eine geschlossene Fläche...

Das Kreuzhaubenmodell der projektiven Ebene

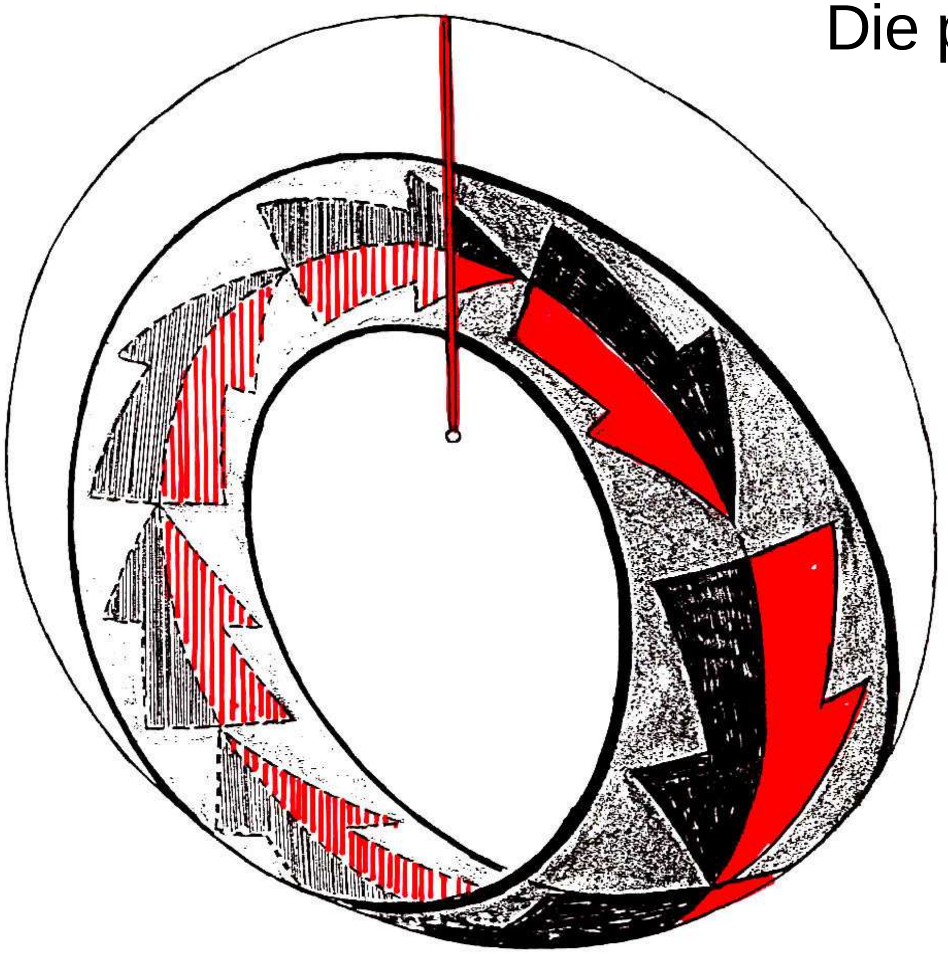


J. Steiner
1796 – 1863
Kuhjunge aus Utzensdorf, Schüler von H. Pestalozzi und Mathematiker in Berlin



Zur Erklärung des Namens schneiden wir den unteren Teil des Modells weg.

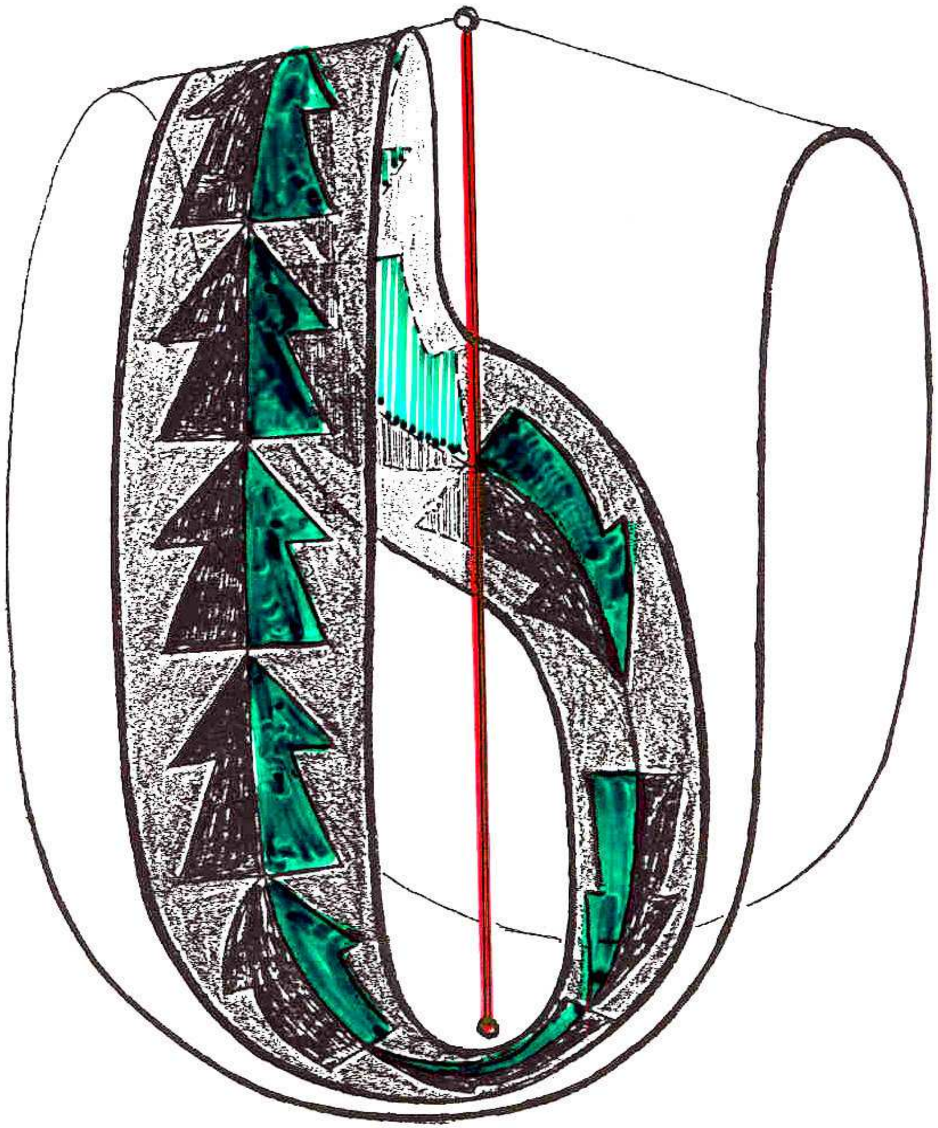
Die projektive Ebene ist eine geschlossene, nicht orientierbare Fläche.



Wie hier am Kreuzhaubenmodell sichtbar gemacht, enthält die projektive Ebene nämlich ein Möbius-Band.

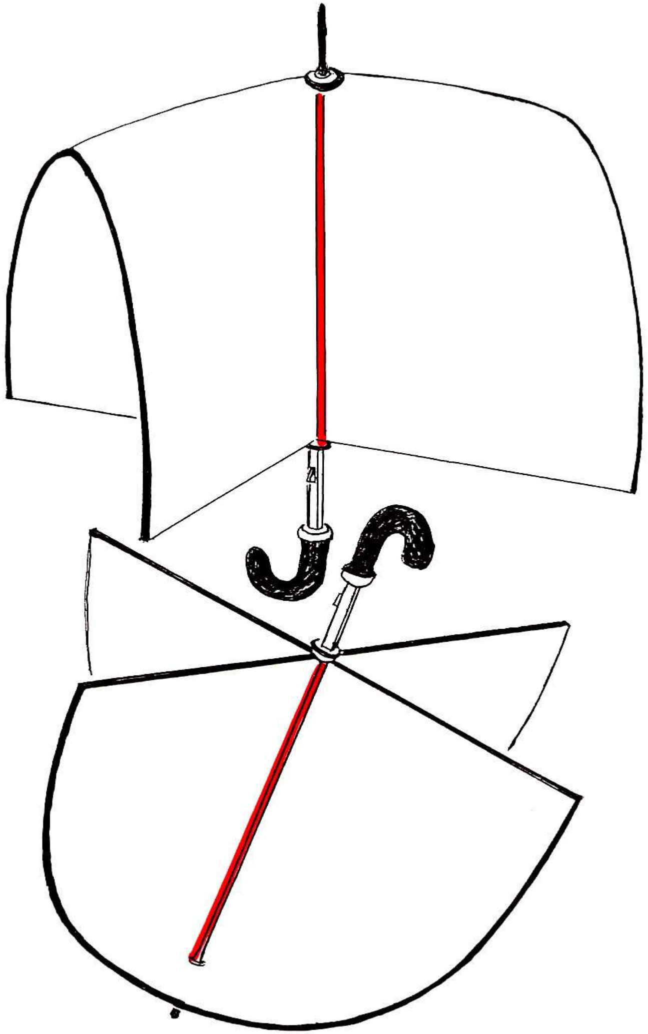
Durch Herausschneiden desjenigen Stückes aus dem Kreuzhaubenmodell, welches die Selbstdurchdringung enthält erhalten wir einen

doppelten
Whitney-Schirm.



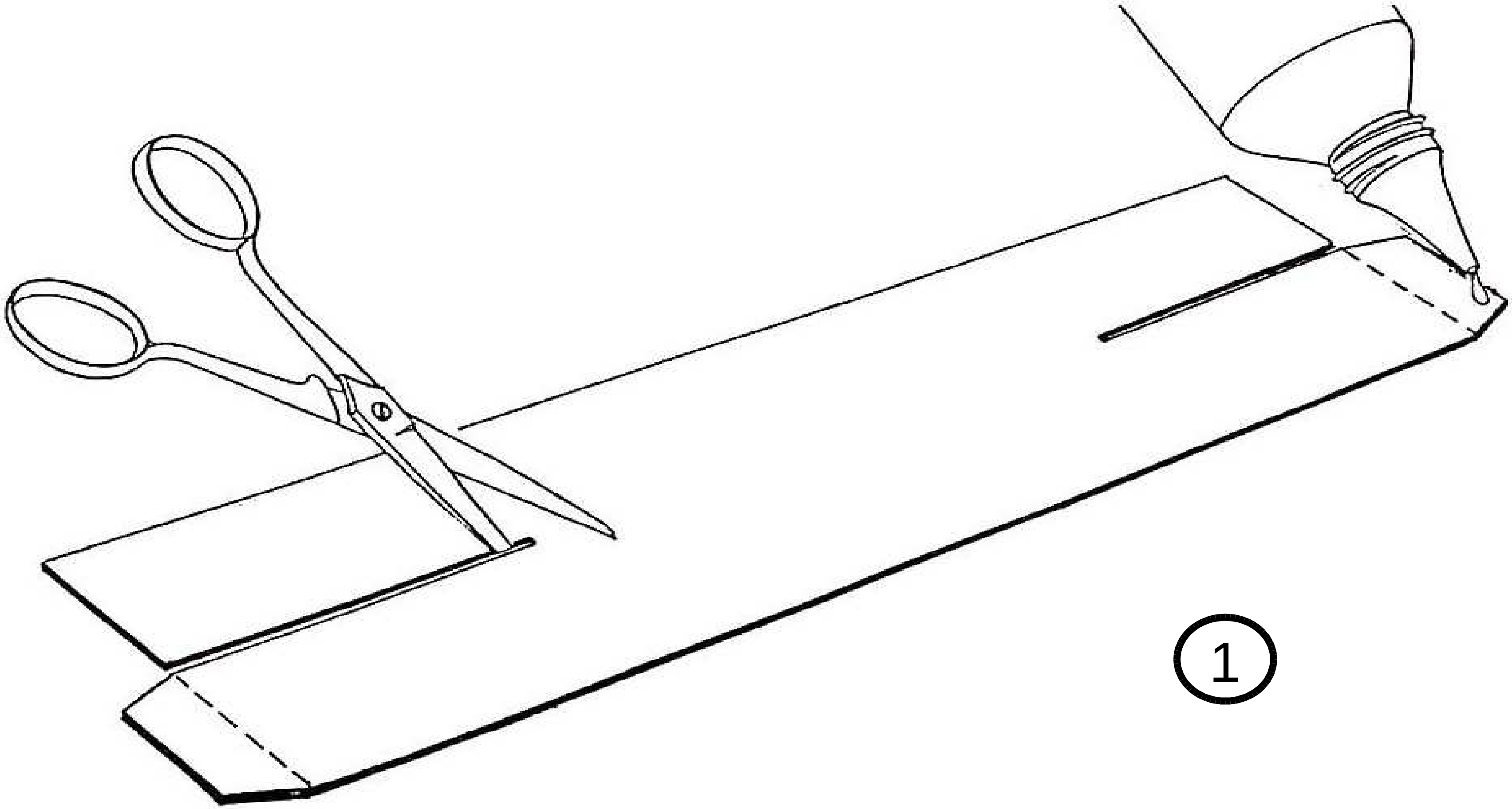
H. Whitney
1907 – 1989
Amerikanischer
Mathematiker

Durch Zerschneiden erhält man daraus zwei Whitney-Schirme.

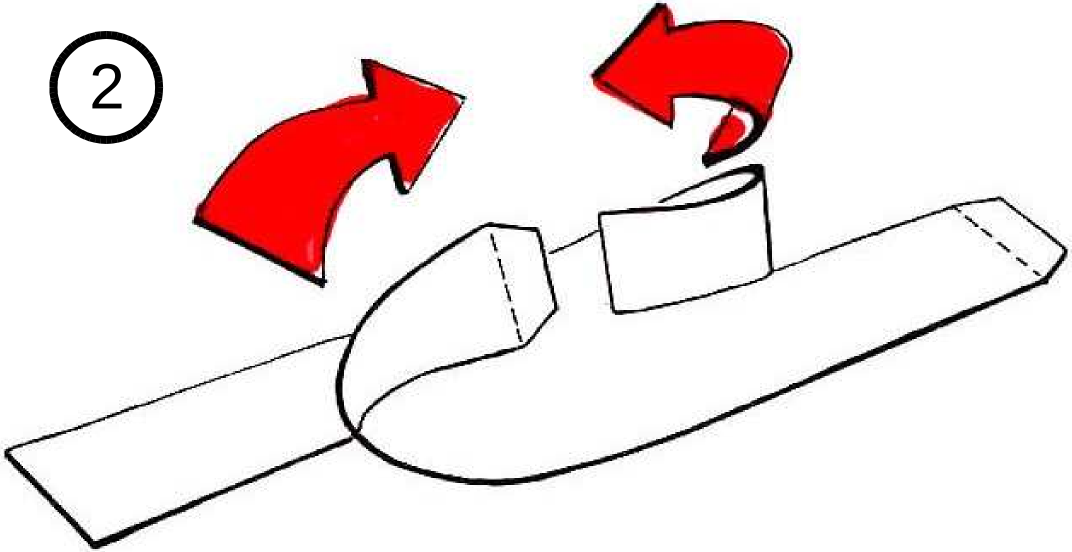


Universität Zürich
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

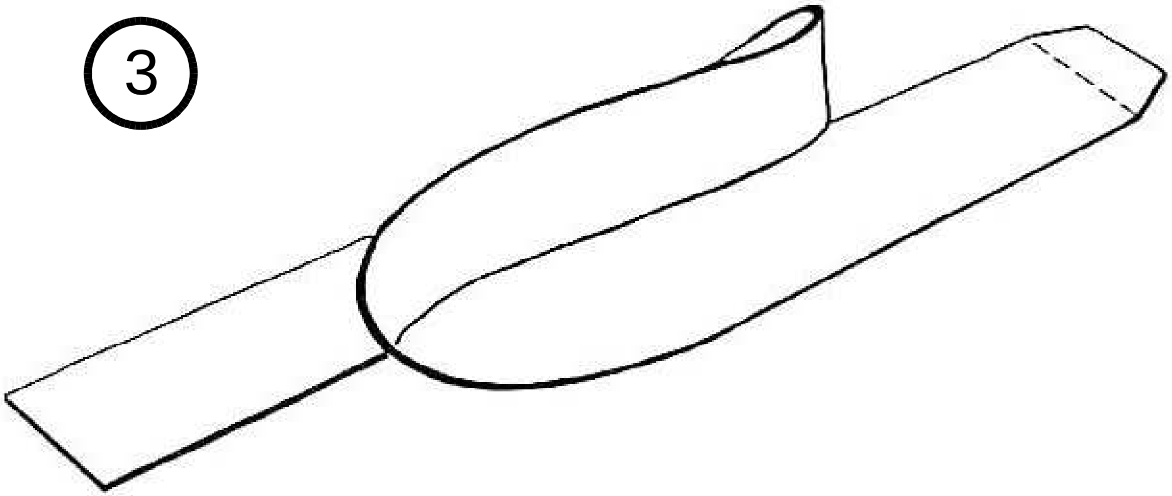
Wir basteln einen doppelten Whitney-Schirm aus einem Papierstreifen...



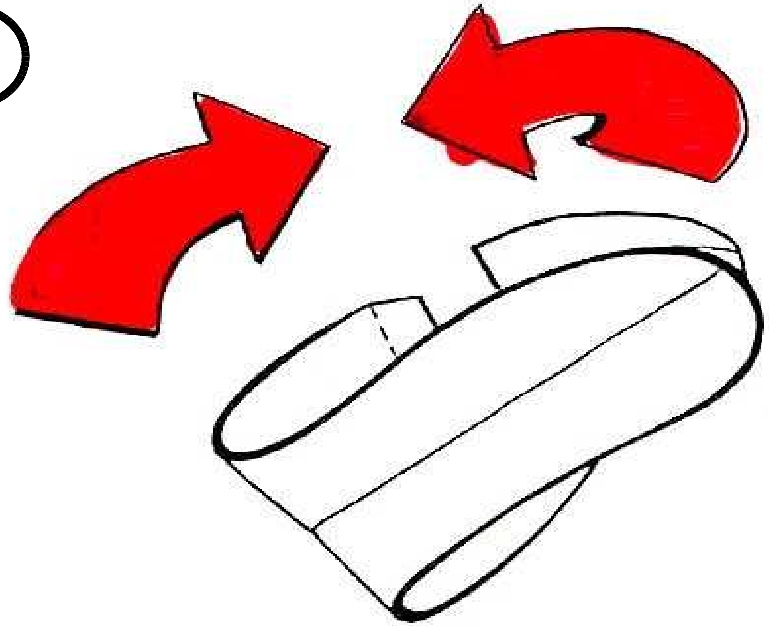
2



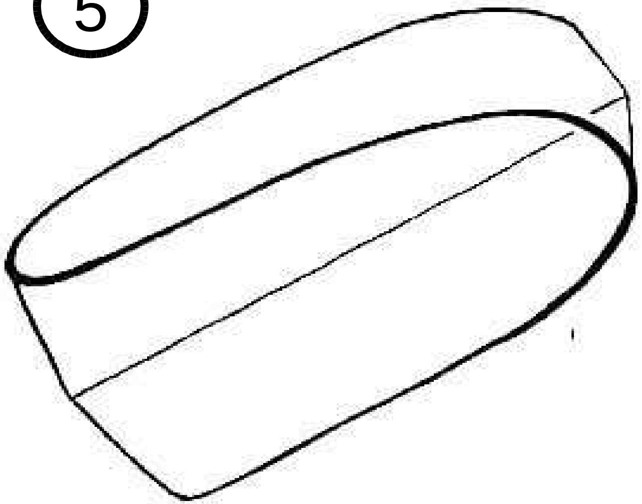
3



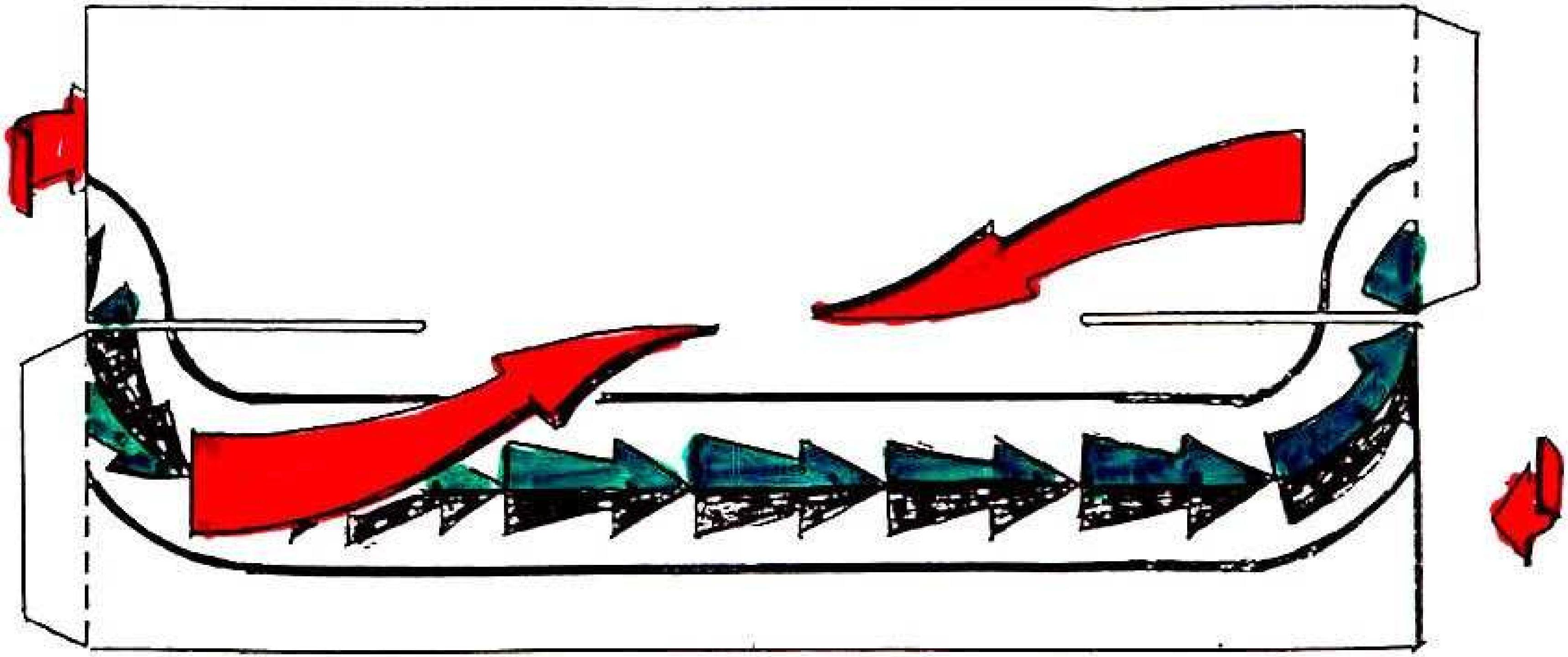
4



5

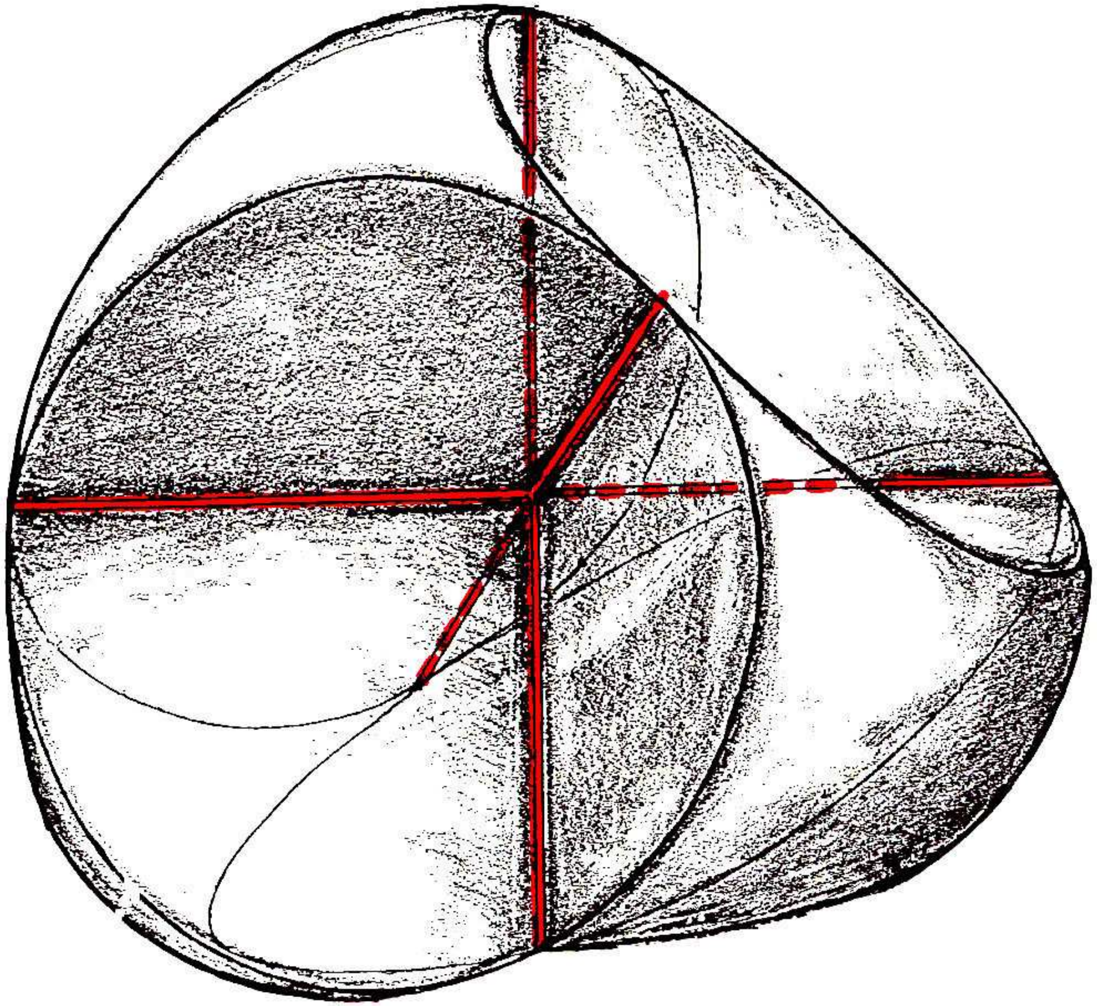


... sogar mit einem Möbius-Band darauf!

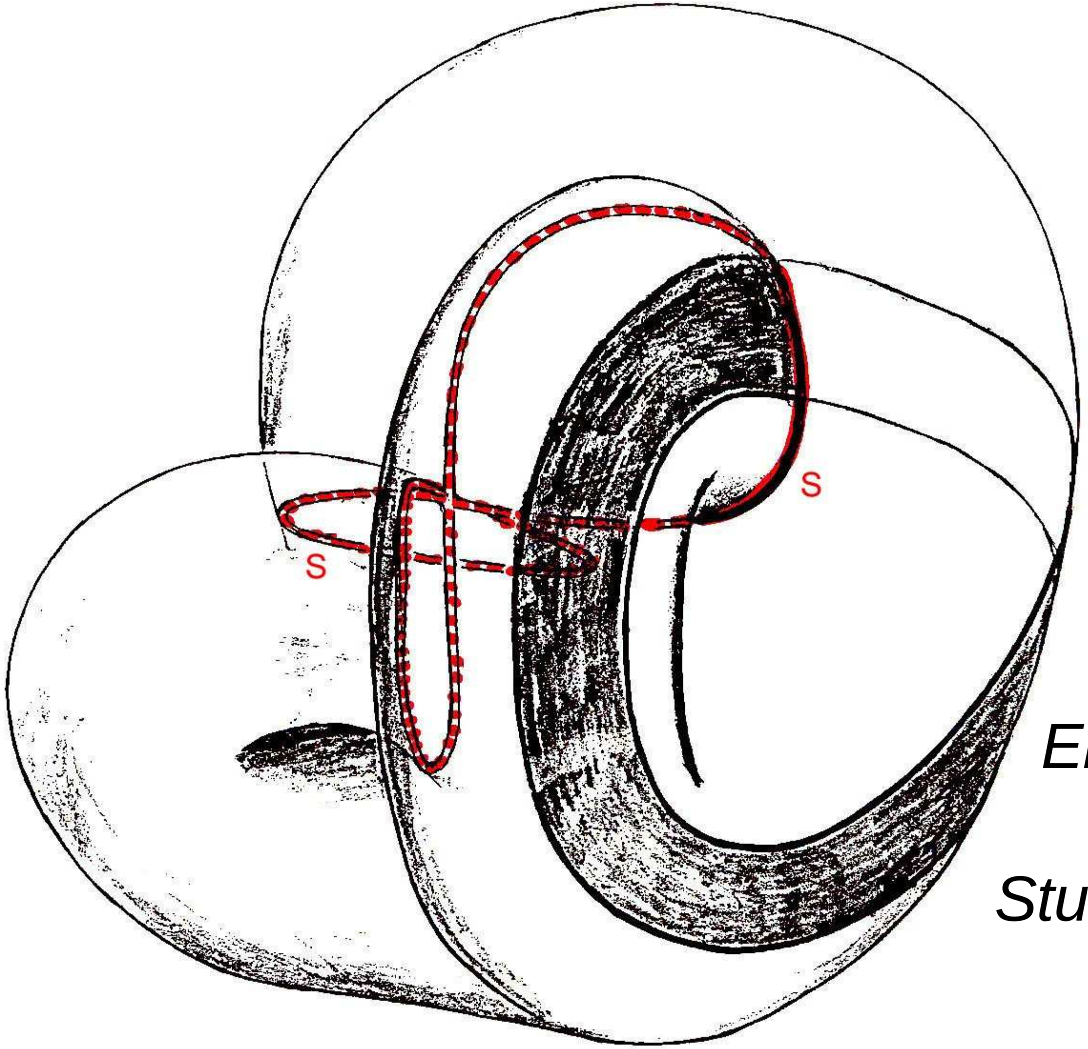


Weitere Modelle der projektiven Ebene sind...

Die Steinersche Römerfläche,



entdeckt von J. Steiner während einer Reise nach Rom...



Die Boysche Fläche,

hier mit einem „aufgemalten“ Möbius-Band.

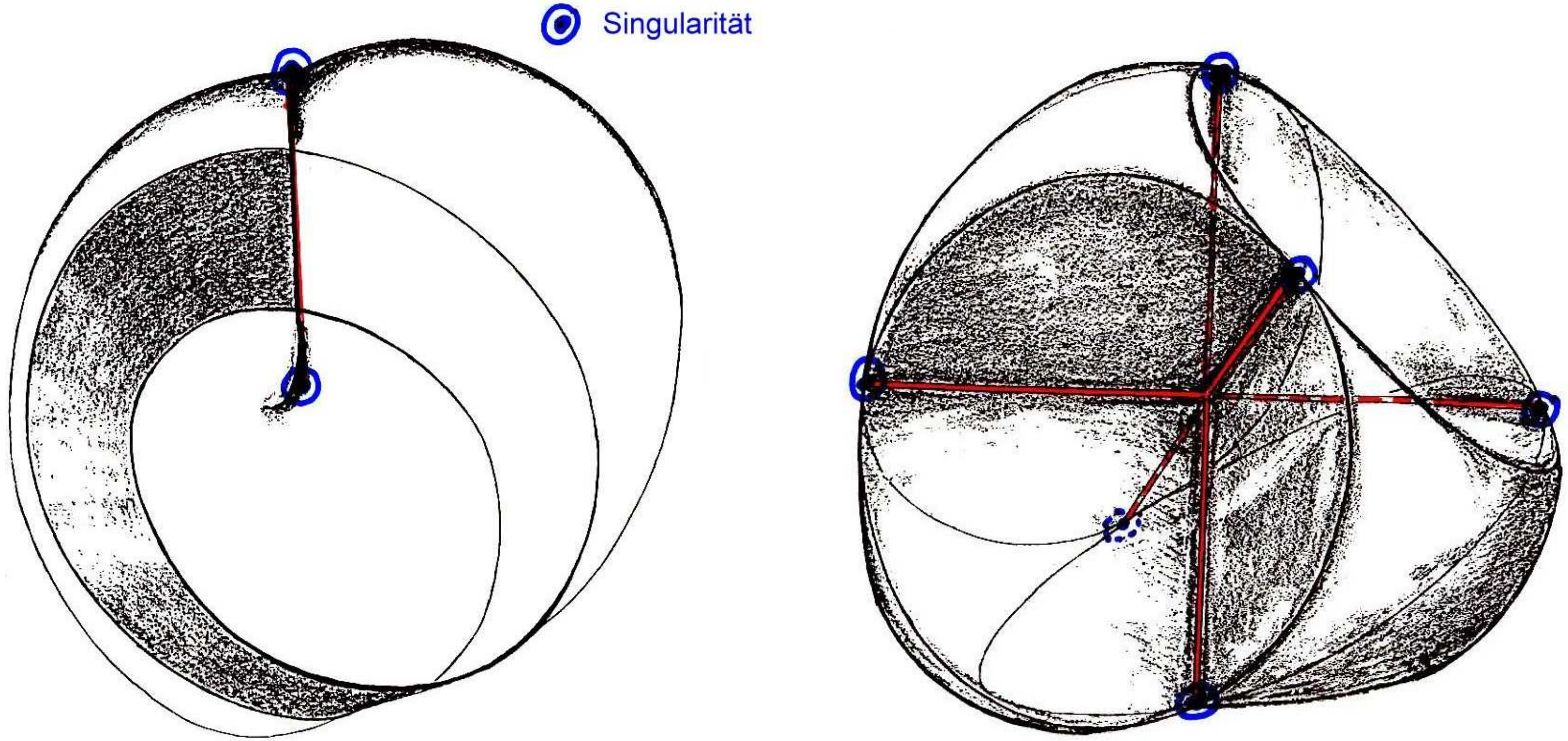
Entdeckt 1909 von W. Boy

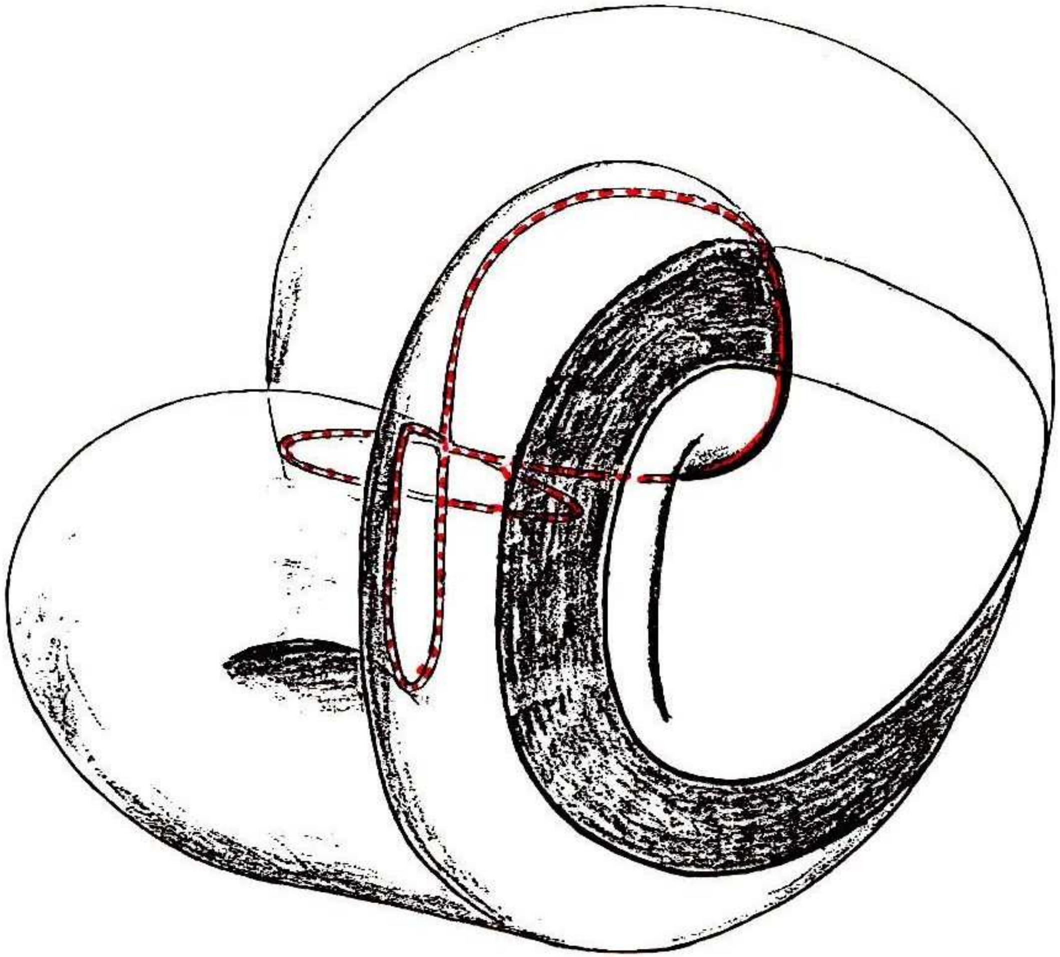
Student von D. Hilbert

Göttingen

Ein wichtiger Unterschied

Das Kreuzhaubenmodell und die Steinersche Römerfläche sind Modelle der projektiven Ebene mit Singularitäten...





... während die Boysche Fläche ein singularitätenfreies Modell ist.

Es gilt folgender Satz:

Jede geschlossene Fläche im vierdimensionalen Raum kann so in den dreidimensionalen Raum projiziert werden, dass alle auftretenden Singularitäten auf Whitney-Schirmen erscheinen.

H. Whitney hat weiter gezeigt:

Realisiert man die projektive Ebene im vierdimensionalen Raum, so hat jede Projektion Singularitäten.

Fazit:

Die Boysche Fläche ist das Modell einer Realisierung der projektiven Ebene im fünfdimensionalen Raum.