DER GRIFF NACH DEM UNENDLICHEN

Einleitung: *“ Wie heisst die grösste Zahl ?”*

Liebe Hörerinnen und Hörer. Die Frage nach dem Unendlichen – oder nach der Unendlichkeit – hat die Menschen schon zu allen Zeiten beschäftigt. Genau mit dieser Frage wollen wir uns heute befassen. Dabei stellen wir die Sichtweise der ***Mathematik*** jener der ***Heiligen Schrift*** gegenüber.

Eine Kinderfrage

Beginnen möchte ich mit einer Frage, die Sie vielleicht als Kind einmal selbst gestellt haben, oder welche Ihnen durch Ihre Kinder oder Enkel gestellt wurde: *“Wie heisst die grösste Zahl ?”* Ein grosser Fehler von uns Erwachsenen im Umgang mit Kindern besteht darin, dass wir solche Fragen oft als Ausdruck des kindlichen Unverstandes abtun. Also machen wir es wenigstens jetzt anders!
Hinter der gestellten Frage verbergen sich bei näherem Zusehen gleich zwei Probleme. Da geht es einmal darum, ob es überhaupt eine grösste Zahl gibt. Dann geht es aber auch darum, ob und wie man Zahlen benennen kann, wenn sie zum Beispiel sehr gross sind.
Das Kind kennt vielleicht schon die Namen von grossen Zahlen, wie Hundert, Tausend, Millionen, Milliarden und braucht vielleicht auch schon gerne Ausdrücke wie *“Hunderttausendmillionenmilliarden”* wenn es von einer grossen Zahl reden will. Dahinter steckt wohl die Idee, eine Zahl zu nennen, die so gross ist, dass es keine grössere mehr geben kann – sozusagen *“die grösste Zahl, die man sagen kann”.*
Man kann dem Kind antworten, dass es keine grösste Zahl gibt, weil man ja immer weiter zählen könne. Aber Vorsicht: Die kindliche Findigkeit bringt vielleicht sofort die Gegenfrage hervor: *“Wie kann man denn weiter zählen, wenn man nicht mehr weiss, wie die Zahlen heissen ?”* Der Dialog mit dem Kind könnte dann von erwachsener Seite her so weitergehen: *“Nehmen wir doch einmal an, es gäbe eine grösste Zahl! Du kannst ihr selbst einen Namen geben – sogar etwas komisches wie “Papagei”, wenn Du willst – oder auch “Pluriard”, wenn Dir das besser gefällt. Jetzt nehmen wir diese Zahl und zählen noch 1 dazu. Ist dann die neue Zahl grösser oder nicht, sogar wenn wir nicht einmal wissen, wie sie heisst ?”* Wenn dieses Argument akzeptiert wird, und die neue Zahl als grösser eingestuft wird, kann man leicht zum gemeinsamen Schluss kommen, dass die angenommene grösste Zahl – wie immer sie auch heissen mag – gar nicht die Grösste war. Wenn wir miteinander ein bisschen nachdenken, heisst dies aber, dass es keine grösste Zahl gibt.

Etwas anspruchsvoller könnte es werden, wenn das Kind sagt *“Die grösste Zahl ist eben so gross, dass sie nicht mehr grösser wird, wenn man noch 1 dazu zählt”*. Vielleicht geben wir dieser vom Kind ins Spiel gebrachten Zahl den Namen *“Gotteszahl”* – denn um eine gewöhnliche Zahl, wie die Menschen sie kennen, kann es sich ja nicht handeln. Vielmehr muss diese Zahl grösser sein als jede uns bekannte Zahl. Wir könnten sogar sagen, sie müsse “*unendlich gross”* sein. Aber, dürfen wir dann aber überhaupt noch von einer Zahl reden? Und wenn es solche unendlich grossen Zahlen geben sollte, gibt es dann unter diesen eine Grösste, oder geht es *“auch hier immer weiter”,* wie wir das von den uns vertrauten endlichen Zahlen her kennen?

So sind wir, angeregt durch eine kindliche Frage, in einen Bereich vorgestossen, mit dem sich Philosophen und Mathematiker immer wieder beschäftigt haben. Lassen wir uns dadurch auch gleich an ein Wort Jesu erinnern: ***“Hütet euch davor, einen dieser Kleinen zu verachten! Denn ich sage euch: Ihre Engel im Himmel sehen stets das Angesicht meines Himmlischen Vaters.”*** (Matthäus 18, 10)

Der Ewige Gott: *“Denn der Herr, ihr Gott wird über ihnen leuchten, und sie werden herrschen iu alle Ewigkeit” (siehe Offenbarung 22, 5)*

Eine der grundlegenden Glaubenswahrheiten besagt, dass *der Mensch für das ewige Leben bestimmt ist und dass mit dem leiblichen Tod “nicht alles zu Ende ist”*. Diese Wahrheit wird in der Heiligen Schrift immer wieder bezeugt. Sie übersteigt aber unseren irdischen Verständnis- und Erfahrungshorizont. Sie ist dem *“Denken der Welt”* nicht zugänglich, weil unser diesseitiges Leben ja unter dem *“Fluch der Vergänglichkeit”* steht.
Aus den vielen Schriftstellen, die auf das ewige Leben hinweisen, werden wir nur eine einzige heraus greifen. Diese werden wir dann in Beziehung zum mathematischen Begriff der Unendlichkeit setzen, den wir in der Einleitung aus kindlicher Sicht schon ein wenig kennen gelernt haben. In der Einleitung haben wir auch über grosse Zahlen geredet. Zu diesem Thema werden wir zwei Schriftstellen betrachten.

Die Unvergänglichkeit des Menschen in der Heiligen Schrift

Im Kapitel 2, Vers 23 des Buches der Weisheit lesen wir :***”Gott hat den Menschen zur Unvergänglichkeit erschaffen und ihn zum Bild seines eigenen Wesens gemacht .”*** Hier wird uns die *Unvergänglichkeit des Menschen* vor Augen gestellt, die ihn zum *Ebenbild seines Schöpfers und Gottes* macht. In der Tat, ist ja der Mensch das einzige irdische Wesen, dem Gott Seinen Atem – also Seinen Geist – eingehaucht hat. Im irdischen Fleisch, das aus dem Ackerboden gebildet wurde, nahm Gott durch seinen Geist Wohnung im Menschen, indem er ihm die unsterbliche Seele einhauchte. Dies ist es, was jeden Menschen unvergänglich und zum Abbild Gottes macht. In Kapitel 2, Vers 7 des Buches Genesis lesen wir darüber : ***“ Da formte Gott, der Herr, den Menschen aus Erde vom Ackerboden und blies in seine Nase den Lebensatem. So wurde der Mensch zu einem lebendigen Wesen .“***
Da der Mensch durch seinen Sündenfall die ursprüngliche Einsicht in die göttlichen Wahrheiten verloren hat, sind die eben gemachten Aussagen für ihn zu ***Glaubenswahrheiten*** geworden. Er kann diese Wahrheiten mit seinem menschlichen Verstand nicht mehr direkt erkennen, sondern er muss sie mit Hilfe der Gnade des Glaubens so weit erfassen, als es ihm zum Heil gereicht.

Andrerseits wissen wir, dass Gott sich in den Werken der Schöpfung bezeugt, wie wir etwa in Kapitel 1, Vers 20 des Römerbriefes lesen: ***“ Seit der Erschaffung der Welt wird Seine unsichtbare Wirklichkeit an den Werken der Schöpfung mit der Vernunft wahrgenommen, Seine ewige Macht und Gottheit .”*** So dürfen wir erwarten, dass uns auch vom Irdischen her Hinweise auf unsere Unvergänglichkeit gegeben werden. Die uns von Gott geschenkte Unvergänglichkeit ist etwas “das alle Zeiten überdauert”, etwas “das nie aufhört”, also etwas das “kein Ende” hat, also eben “unendlich” ist. Da wir im irdischen Leben unentrinnbar der ablaufenden Zeit und der Endlichkeit unterworfen sind, übersteigt dieses “Unendliche” unseren Horizont.
Doch mindestens gewisse Vorstellungen des Unendlichen kann sich unser Verstand ja offenbar doch machen, etwa im geometrischen Bild einer “*Geraden, die nie aufhört”* oder in der Idee, dass wir *“immer weiter zählen können”.* Genau darauf hat uns die eingangs gestellte Kinderfrage gebracht. So können wir durch “*unsere – sogar kindliche! – Vernunft die unsichtbare Wirklichkeit der uns von Gott gegebenen Unvergänglichkeit an den Werken der Schöpfung wahrnehmen”* – allerdings nur in einem gewissen Ausmass, wie es unserem beschränkten Denken möglich ist. Natürlich ist diese *“Wahrnehmung unserer Unvergänglichkeit”* erst eine *Vorstufe zum eigentlichen Glaubensakt.* ***Denn Gott erwartet von uns immer den Glauben. Insbesondere kann es keinen wissenschaftlicher Beweis einer Glaubenswahrheit geben, wie etwa der Unvergänglichkeit des Menschen.*** Vergessen wir nämlich nicht, dass Gott über jedem menschlichen Denken unermesslich hoch erhaben ist, sei es noch so klug und “wissenschaftlich”.
Das *“Werk der Schöpfung”* , das uns zur *“Wahrnehmung der unsichtbaren Wirklichkeit unserer Unvergänglichkeit”* geführt hat, ist *“das Schöpfungswerk der Mathematik”* – oder *“das Geschöpf der Mathematik”,* wie wir es in früheren Vorträgen auch genannt haben. Das *mathematische* – oder

im Moment noch eher *prämathematische – Konzept der Unendlichkeit* führte uns ja zur Wahrnehmung der *Unvergänglichkeit im Göttlichen Sinne*. Dabei ist eigentlich gar nicht der mathematische Unendlichkeitsbegriff der Schlüsselpunkt, sondern die Tatsache, dass der Mensch solche Begriff überhaupt bilden kann. Das weist darauf hin, dass wir in unserem Denken auch einen Abglanz des Göttlichen Denkens vorfinden, der unsere eigentliche Alltagserfahrung übersteigt. Gott hat es also in unser Bewusstsein gelegt, dass wir – zum Beispiel im Umgang mit den Zahlen – aus unserer endlichen und beschränkten Alltagswelt heraus auch einen Blick ins Unendliche werfen können.

Die Unzälbarkeit in der Heiligen Schrift

Ein mit der Unendlichkeit verwandter Begriff, auf den man in der Heiligen Schrift immer wieder stösst, ist der Begriff der *Unzählbarkeit,* der meist in Bildern ausgedrückt wird.. Wir finden dieses Bild etwa bei der Verheissung einer grossen Nachkommenschaft. So lesen wir über die mit Ismael schwangere Magd Hagar, die ihrer Herrin Sara davongelaufen war: ***“Der Engel des Herrn sprach zu ihr: Deine Nachkommen will ich so zahlreich machen, dass man sie nicht zählen kann”*** (siehe Genesis 16, 10). Über Abraham, der eben seine Bereitschaft bewiesen hatte, seinen Sohn Isaak auf Verlangen Gottes als Opfer darzubringen, lesen wir: ***“Der Engel des Herrn rief Abraham zum zweitenmal vom Himmel her zu und sprach: Ich habe bei mir geschworen – Spruch des Herrn: Weil du das getan hast und deinen einzigen Sohn mir nicht vorenthalten hast, will ich dir Segen schenken in Fülle und deine Nachkommen zahlreich machen wie die Sterne am Himmel und den Sand am Meeresstrand.”*** (siehe Genesis 22, 15-17). Hier geht es natürlich jeweils um endliche Zahlen, denn wir wissen, dass die Erde nur für eine von Gott bestimmte Zeit besteht und dass auf ihr gleichzeitig immer nur endlich viele Menschen leben. Also wird es nie unendlich viele Menschen geben. Die ganze Schöpfung ist trotz ihrer gewaltigen Grösse nur endlich. Deshalb gibt es auch nur endlich viele Sterne und natürlich auch nur endlich viele Sandkörner am Meeresstrand, wenn ihre Zahl auch gewaltig gross ist..
Kein Mensch kann zum Beispiel die Sandkörner am Meer wirklich zählen, obwohl es nur endlich viele sind. Abschätzen kann man ihre Zahl aber schon. Nehmen wir zum Beispiel an, es gäbe insgesamt 100'000 Kilometer Sandstrände auf der Erde, diese seien im Durchschnitt 100 Meter breit, mit einer Sandschicht von einem Meter bedeckt und ein einzelnes Sandkorn nehme im Durchschnitt einen Kubikmillimeter ein. Dann kommen wir auf die geschätzte Anzahl von 100'000 x 1000 x 100 x 1000'000'000 Sandkörnern, eine Zahl die man mit einer 1 und 19 Nullen schreiben muss, d.h in der Form 10'000'000'000'000'000'000. In deutscher Benennungsweise heisst diese Zahl *10 Trillionen.*. Einfacher ist die in der Mathematik übliche Bennungsweise *“10 hoch 19”* . Diese besagt, dass man unsere Zahl erhält, indem man die Zahl 1 neunzehnmal mit 10 multipliziert. Das heisst ja gerade, dass sie als eine Eins, gefolgt von 19 Nullen, geschrieben werden kann.
Die Astronomen schätzen heute die *“totale Anzahl der Sterne im beobachtbaren Teil des Universums”* auf *“7 mal 10 hoch 22”* – eine Zahl, die man als 7 gefolgt von 22 Nullen schreiben muss.
Um auf unsere ursprüngliche Kinder-Frage zurückzukommen: Liebe Hörerinnen und Hörer, vielleicht wollen Ihre Kinder oder Enkel wissen, wie diese Zahl, die Anzahl der Sterne also, denn heisse. Dann können Sie (in deutscher Benennungsweise) sagen *70 Trilliarden.* Vielleicht können Sie dann nochmals das frühere Gespräch aufgreifen und bemerken: “Auch das ist nicht die grösste Zahl, denn wenn wir 1 dazu zählen, erhalten wir eine noch grössere”.
Die an Abraham ergangene Verheissung will uns natürlich nicht eine Abschätzung der Anzahl seiner Nachkommen nahelegen. Diese Nachkommen sind ja, wie es im Römerbrief heisst ***“die Kinder der Verheissung”*** (siehe Römer 9, 8): ***alle die an Gott glauben, solange die Erde besteht.*** Diese sind natürlich für uns Menschen nicht zählbar, denn nur Gott, der die Herzen kennt, kann sie kennen und zählen. Damit wird also auf eine *“prinzipielle Unzählbarkeit”* durch den Menschen hingewiesen. Natürlich weist das verwendete Bild aber auch auf eine grosse Anzahl dieser für uns unzählbaren Kindern der Verheissung hin.

Unendlichkeiten vergleichen: *vom Kindespiel zum Gedankenexperiment*

Ein Blick in die Welt der Zahlen

Wir wollen uns nun wieder dem Unendlichkeitsbegriff der Mathematik zuwenden. Wir können sicher sagen, dass es unendlich viele sogenannte *natürliche Zahlen* gibt. Das heisst: die Folge dieser Zahlen – die Folge 1,2,3,... – endet nie. Wir stellen uns jetzt diese natürlichen Zahlen als die ganzzahligen Einträge auf einem Massstab vor, der bei 0 beginnt und der nach rechts immer weiter geht. Zwischen den ganzzahligen Einträgen 0,1,2,3,... gibt es überall weitere Punkte auf unserem Massstab, und diese Zwischenpunkte füllen den Massstab lückenlos auf. Diesen lückenlos gefüllten Massstab nennen wir auch den *Zahlenstrahl* – denn wir können ihn uns als einen *Strahl* oder eine *Halbgerade* mit dem Anfangspunkt 0 vorstellen. Die Punkte auf diesem Strahl sind die sogenannten *positiven reellen Zahlen.* Diese Zahlen haben immer in eine Dezimaldarstellung, die allerdings nach dem Komma nicht abbrechen muss.
Weil die positiven reellen Zahlen den Zahlenstrahl lückenlos füllen, sind wir geneigt zu sagen, dass unser Massstab insgesamt mehr Punkte enthält als ganzzahlige Einträge. Wir könnten vielleicht sogar versucht sein zu sagen, dass *"die Anzahl der aller positiven reellen Zahlen grösser ist als die Anzahl aller natürlichen Zahlen"*, wobei allerdings beide Anzahlen unendlich sind.
Wir könnten auf dem Zahlenstrahl auch die *Werte aller Brüche* eintragen – die sogenannten *rationalen Zahlen*. Damit hätten wir wieder alle natürlichen Zahlen erfasst, dazu aber auch noch viele andere Zahlen, wie etwa 1/2 oder 3,1741 oder 4,123123123... . Die Brüche liegen *dicht* auf dem Zahlenstrahl. Das heisst: zwischen zwei beliebigen positiven reellen Zahlen gibt es immer noch Brüche – wie nahe die beiden Zahlen auch beieinander liegen. Es gibt also dem Augenschein nach auch viel mehr Brüche als natürliche Zahlen.
Andrerseits gibt es auch positive reelle Zahlen, die man nicht als Bruch schreiben kann, etwa die Kreiszahl pi, von der wir in einem früheren Vortrag geredet haben, oder die Eulerzahl e, die wir im selben Vortrag kurz erwähnt haben. Viele von Ihnen wissen vielleicht noch von der Sekundarschule her, dass man auch die Quadratwurzel aus 2 nicht als Bruch schreiben kann. Einige von Ihnen wissen vielleicht wohl noch, dass eine reelle positive Zahl genau dann als Bruch geschrieben werden kann, wenn ihre Dezimaldarstellung von einer bestimmten Stelle weg periodisch ist. Ein Beispiel dazu wäre etwa die Zahl 123,781342971697869786978697869786... Die vielen Zahlen, bei denen das nicht der Fall ist, können demnach nicht als Brüche geschrieben werden. Wir könnten somit zur Vorstellung kommen, *"dass die Anzahl der Brüche zwar grösser ist als die der natürlichen Zahlen, aber kleiner als die Anzahl aller positiven reellen Zahlen"*.

Doch ist es denn überhaupt sinnvoll, von Anzahlen zu reden, wenn es um unendlich viele Dinge geht, und können wir in dieser Situation diese Anzahlen wirklich vergleichen? Wir können ja unendlich viele Dinge gar nicht mehr zählen.

Vergleichen: Ein Kinderspiel

Doch lassen wir uns wieder vom Kindergeist zu einer geeigneten Vergleichsmethode inspirieren. Im Alter von etwa zweieinhalb Jahren hat meine Enkeltochter Rona voll Stolz für den Grosspapi bis 11 gezählt, wobei allerdings noch ein paar Lücken auftraten. Leider habe ich damals versäumt folgendes Experiment mit ihr durchzuführen: *Einen Korb mit etwa 20 Äpfeln und einen zweiten Korb mit etwa 20 Birnen vor sie hinzustellen und sie zu fragen, ob jetzt mehr Birnen oder mehr Äpfel da seien.*
Führen wir das Experiment aber wenigstens jetzt in Gedanken durch! Denken wir daran, dass in jedem Korb mehr Früchte sind als Rona zählen kann, nämlich mehr als 11. Was hätte sie aber tun können um die gestellte Frage zu beantworten… ? Etwa folgendes:
Einen Apfel aus dem Apfelkorb nehmen und eine Birne aus dem Birnenkorb nehmen und dann die Birne auf dem Tisch neben den Apfel legen – dann wieder einen Apfel aus dem Apfelkorb nehmen und eine Birne aus dem Birnenkorb nehmen und die beiden Früchte wieder nebeneinander auf den

Tisch legen … und so fort – bis das Spiel nicht mehr weitergeht. Das Spiel könnte aus drei Gründen zu Ende gehen:
1. Es hat keinen Apfel mehr im Apfelkorb, aber noch Birnen im Birnenkorb. Dann wissen wir, dass es mehr Birnen als Äpfel sind.
2. Es hat keinen Apfel mehr im Apfelkorb und keine Birne mehr im Birnenkorb. Dann wissen wir, dass es gleich viele Äpfel wie Birnen sind.
3. Es hat noch Äpfel im Apfelkorb aber keine Birne mehr im Birnenkorb. Dann wissen wir, dass es mehr Äpfel als Birnen sind.
Wir konnten so, *ohne zu zählen, entscheiden, ob mehr Birnen oder mehr Äpfel in den Körben waren*. Anlass zu diesem Vergleichs-Spiel war die Tatsache, dass unsere Probantin Rona die Äpfel und die Birnen noch nicht zählen konnte, weil es für ihre Zählkünste zu viele waren. Wir sind aber mit den obigen Fragen über die verschiedenen Arten von Zahlen in einer vergleichbaren Lage: Wir sind mit unseren Zählkünsten am Ende, denn zählen können wir diese Zahlen ja nicht...

Übertragung ins Gedanken-Experiment

Versuchen wir nun in einem gewagten *Gedankenexperiment* das Äpfel- und Birnenkorb-Spiel auf die natürlichen Zahlen (anstelle der Äpfel) und die positiven reellen Zahlen (anstelle der Birnen) zu übertragen.
In Gedanken legen wir alle natürlichen Zahlen 1,2,3,... in einen Korb links vor uns, und alle reellen positiven Zahlen zwischen 0 und 1 in einen Korb rechts vor uns. Aus dem linken Korb greifen wir die Zahl 1 heraus. Aus dem rechten Korb greifen wir eine positive reelle Zahl (zwischen 0 und 1) heraus, die wir x(1) nennen, und die wir in Gedanken neben die gezogene natürliche Zahl 1 vor uns auf den Tisch legen. Die Zahl x(1) liegt zwischen 0 und 1 und hat deshalb eine Dezimaldarstellung, die mit 0,... beginnt, also vielleicht aussehen könnte wie: x(1) = 0,46210978522547...
Nun greifen wir aus dem linken Korb die natürliche Zahl 2 heraus und gleichzeitig aus dem rechten Korb eine positive reelle Zahl x(2) (zwischen 0 und 1) und legen die beiden herausgegriffenen Zahlen wieder nebeneinander auf den Tisch. Wieder hat x(2) eine Dezimaldarstellung, die mit 0,... beginnt, und könnte also etwa die Form x(2) = 0,03260943312854... haben. Da wir x(1) schon vorher aus dem rechten Korb genommen haben, ist x(2) natürlich von x(1) verschieden.
So fahren wir nun immer weiter und erhalten ***Zahlen x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), ... die alle voneinander verschieden sind und die alle eine Dezimaldarstellung der Form 0,... haben.***
Nun bilden wir eine neue Zahl, der wir den Namen y geben wollen. Diese Zahl y soll wieder eine Dezimaldarstellung der Form 0,... haben, wobei unter den Dezimalziffern (nach dem Komma) nie eine 0 oder eine 9 vorkommen soll. Die erste Dezimalziffer von y (nach dem Komma) wählen wir so, dass sie verschieden ist von der ersten Dezimalziffer von x(1), die zweite Dezimalziffer von y wählen wir so, dass sie verschieden ist von der zweiten Dezimalziffer von x(2), die dritte Dezimalziffer von y wählen wir so, dass sie verschieden ist von der dritten Dezimalziffer von x(3).... So fahren wir immer weiter fort.
Die auf diese Weise gebildete Zahl y liegt zwischen 0 und 1, ist also im rechten Korb enthalten. Aber bei unserem Spiel kann sie nie gezogen werden.
Denn würde diese Zahl y einmal gezogen, so müsste sie ja mit einer der gezogenen Zahlen x(1), x(2), x(3), x(4), x(5),.... übereinstimmen. Weil die erste Dezimalziffer von y verschieden ist von der ersten Dezimalziffer von x(1), stimmt y aber nicht mit x(1) überein. Weil die zweite Dezimalziffer von y verschieden ist von der zweiten Dezimalziffer von x(2), stimmt y aber nicht mit x(2) überein.Weil die dritte Dezimalziffer von y verschieden ist von der dritten Dezimalziffer von x(3), stimmt y aber nicht mit x(3) überein... und so fort. So sehen wir schliesslich, dass y mit keiner der Zahlen x(1), x(2), x(3), x(4), x(5),... übereinstimmt. Das heisst aber, dass y tatsächlich bei unserem Spiel nie gezogen werden kann, also im rechten Korb zurückbleibt.
Aber was heisst das: ***Wie immer wir auch die Zahlen x(1), x(2), x(3), x(4), x(5),... ziehen: Es gibt immer noch Zahlen, die im rechten Korb zurückbleiben. Im Sinne unseres Experimentes könnten wir also sagen, dass im rechten Korb mehr Zahlen sind als im linken. Dass würde also heissen, dass es mehr reelle Zahlen gibt als natürliche Zahlen.***

Nun wagen wir ein zweites Gedankenexperiment. Wir leeren zuerst den rechten Korb und füllen ihn dann neu mit allen positiven Brüchen. Dabei schreiben wir alle Brüche gekürzt. Das heisst, dass wir etwa 1/2 anstatt 2/4 schreiben, oder 3/2 anstatt 15/10, oder 5/1 anstatt 30/6.
Die Summe des Zählers und des Nenners eines Bruches wollen wir die *Höhe* dieses Bruches nennen. So hat etwa der Bruch 1/2 die Höhe 1+2 = 3, der Bruch 3/2 die Höhe 3+2 = 5 und der Bruch 5/1 die Höhe 5+1 = 6.
Es gibt genau einen Bruch der Höhe 2, nämlich den Bruch 1/1. Es gibt genau 2 Brüche der Höhe drei, nämlich 1/2 und 2/1. Es gibt genau 2 Brüche der Höhe 4, nämlich 1/3 und 3/1. Wenn man so weiterfährt sieht man leicht folgendes: *Die Anzahl der Brüche, welche eine bestimmte Höhe haben, ist immer kleiner als diese Höhe.*
Dies erlaubt es nun, die Brüche durch zu nummerieren: Wir fangen an mit dem einzigen Bruch der Höhe 2 (also mit 1/1). Dann fahren wir weiter mit den Brüchen der Höhe 3 und nummerieren diese nach der Grösse des Zählers. (D.h. wir fahren weiter mit 1/2, 2/1). Dann fahren wir weiter mit den Brüchen der Höhe 4 und nummerieren diese wieder nach der Grösse des Zählers. (D.h. wir fahren weiter mit 1/3, 3/1). Dann fahren wir fort mit den Brüchen der Höhe 5 und nummerieren diese nach der Grösse des Zählers. (D.h. wir fahren weiter mit 1/4, 2/3, 3/2, 3/1) ... So fortfahrend erhalten wir die folgende *Aufzählung von Brüchen* 1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, 1/5, 5/1, 1/6, 2/5, 3/4, 4/3, 5/2, 6/1, 1/7, 3/5, 5/3, 7/1,...
Diese Aufzählung muss natürlich alle Brüche umfassen, denn zu jeder vorgegebenen Höhe kommen ja alle Brüche mit dieser Höhe vor.
Nun ziehen wir aus dem linken Korb die natürliche Zahl 1 und aus dem rechten Korb den ersten Bruch in unserer Aufzählung (also 1/1) und legen beide Zahlen nebeneinander vor uns auf den Tisch. Dann ziehen wir aus dem linkem Korb die natürliche Zahl 2 und aus dem rechten Korb den zweiten Bruch in unserer Aufzählung (also 1/2) und legen die beiden Zahlen wieder nebeneinander vor uns auf den Tisch… Wenn wir immer so weiterfahren *"bis ins Unendliche"* werden *"schliesslich beide Körbe leer"* . Denn unsere Aufzählung umfasst ja alle Brüche – und nach unserer Ziehungs-Methode wird jeder Bruch irgendwann einmal aus dem rechten Korb gezogen.
Wir können also im Sinne unseres Experimentes sagen, dass es gleich viele Brüche wie natürliche Zahlen gibt.

Cantors Mengenlehre: *Die Mathematik greift nach dem Unendlichen*

Die beiden vorangehenden Gedankenexperimente enthalten in eingekleideter Form Ideen, die auf den deutschen Mathematiker *Georg Cantor* (1845-1918) zurückgehen. Cantor begründete damit eine ganz neue Theorie, die sogenannte *Mengenlehre.* Lassen Sie mich nicht davor zurückschrecken, dazu ein paar Worte zu sagen. Wenn Ihnen die nun folgenden Ausführungen zu trocken erscheinen, schalten sie bitte nicht gleich Ihr Radio aus, liebe Hörerinnen und Hörer. Auch ich bete immer wieder während wissenschaftlichen Vorträgen, die mir langweilig erscheinen oder die ich nicht verstehe... Und keine Angst: Es wird später wieder konkreter.

Der Begriff der Menge

Unter einer *Menge* versteht man eine Gesamtheit von Objekten. So bilden etwa die Äpfel in unserem Korb eine Menge, genauso wie die Birnen im anderen Korb. Aber auch die natürlichen Zahlen bilden eine Menge, die *Menge der natürlichen Zahlen.* In unserem ersten Gedankenexperiment sind wir aber auch der *Menge der positiven reellen Zahlen* begegnet. Im zweiten Gedankenexperiment kam die *Menge der positiven Brüche* ins Spiel.
Die Objekte, die in einer Menge vorkommen, nennt man die *Elemente* dieser Menge. Im Fall des Apfelkorbes sind die einzelnen Äpfel die Elemente, im Fall des Birnenkorbes die einzelnen Birnen. Die natürlichen Zahlen sind die Elemente der Menge der natürlichen Zahlen, die positiven reellen Zahlen sind die Elemente der Menge der positiven reellen Zahlen und die positiven Brüche sind die Elemente der Menge der positiven Brüche.
Eine Menge mit unendlich vielen Elementen heisst eine *unendliche Menge.* Die Menge der

natürlichen Zahlen, die Menge der positiven reellen Zahlen und die Menge der positiven Brüche sind unendliche Mengen.

Transfinite Zahlen

Eine wichtige Grösse einer Menge ist ihre *Mächtigkeit* oder ***Kardinalität,*** welche angibt, wie gross die Menge ist, d. h. *"wie viele Elemente die Menge enthält"*. Bei einer endlichen Menge – etwa der Menge der Äpfel in unserem Korb – handelt es sich um die uns vertraute Anzahl. Die Kardinalität einer unendlichen Menge ist natürlich keine endliche Zahl mehr, sie liegt ja *jenseits des Endlichen.* Man spricht deshalb auch von einer *transfiniten Zahl.* Die Mächtigkeiten oder Kardinalitäten nennt man auch *Kardinalzahlen* und die unendlichen Kardinalitäten heissen deshalb ***transfinite Kardinalzahlen.***
*Die **kleinste transfinite Kardinalzahl** ist die Kardinalität der Menge der natürlichen Zahlen*. Man bezeichnet diese Zahl üblicherweise mit dem Symbol ***Aleph_0,*** also mit dem Buchstaben Aleph, dem ersten Buchstaben des Hebräischen Alphabets; dazu kommt rechts der tief gesetzte Subskript 0 – der andeutet, dass wir mit dieser Kardinalzahl *"gerade erst am Anfang der Unendlichkeit stehen"*.

Übrigens, liebe Hörerinnen und Hörer, bin ich sicher, dass sie mit dem Buchstaben Aleph und dem Hebräischen Alphabet nicht ganz unvertraut sind, denn sonst wären Sie ja mit dem ***Psalm 119*** nicht vertraut. Dieser längste aller Psalmen ist ein gewaltiger Lobgesang auf Gottes Wort, der aus 176 Versen besteht und aufgeteilt ist in 22 Strophen zu je 8 Versen. Die 22 Strophen sind mit den 22 Buchstaben des Hebräischen Alphabets nummeriert, beginnend bei Vers 1 mit der Strophe Aleph und endend mit Vers 176 in der Strophe Taw. *In den Antwortpsalmen der Heiligen Messe bekommen wir übrigens immer wieder Ausschnitte aus Psalm 119 zu hören.*

Die Mengen der Kardinalität Aleph_0 nennt man auch *abzählbare Mengen.* Denn diese Mengen lassen sich genau so abzählen (oder aufzählen) wie wir das bei unserem zweiten Gedankenexperiment mit den positiven Brüchen getan haben. Insbesondere können wir also sagen: ***Die Menge der (positiven) Brüche hat die Kardinalität Aleph_0.***
Unser erstes Gedankenexperiment zeigt, dass die Menge der (positiven) reellen Zahlen nicht abzählbar ist, also eine Kardinalität hat, die grösser ist als Aleph_0. Die Menge der reellen Zahlen nennt man auch das ***Kontinuum,*** denn diese Menge erscheint uns ja geometrisch als Zahlengerade, hat also kein Lücken und ist deshalb *kontinuierlich.* Wir können unsere Einsicht also auch zusammenfassen, indem wir sagen: ***Die Kardinalität des Kontinuums ist grösser als Aleph_0.*** Weil Mengen der Kardinalität Aleph_0 abzählbar sind, sagt man auch: ***Das Kontinuum ist nicht abzählbar.***

Unendlichkeit der Unendlichkeiten

Von den Mathematikern seiner Zeit wurden Cantors Ideen zunächst vehement abgelehnt. Erst der grosse Deutsche Mathematiker David Hilbert (1862-1943) hat einige Zeit später den emphatischen Ausspruch gewagt: *"Wir wollen uns nicht mehr aus dem Paradies vertreiben lassen, das uns Cantor erschlossen hat."* Der anfänglichen Ablehnung zum trotz, haben Cantors Ideen und seine Mengenlehre schliesslich die gesamte Mathematik grundlegend beeinflusst. Ab 1960 fanden sogar die einfachsten Grundbegriffe der Mengenlehre ihren Zugang in die Mathematikbücher der Sekundar- und Mittelschulen.
Die krasse Ablehnung seiner Ideen durch die Fachwelt hat Cantor sehr belastet, sodass er zeitweise in depressive Zustände verfiel. Besonders gekränkt war er, weil seine wiederholten Anstrengungen, in Berlin eine Professur zu erhalten, fruchtlos blieben. So blieb er bis zu seiner Pensionierung Professor in Halle an der Saale – eine Stadt, die er nie mochte. Enttäuscht von den Mathematikern zog er sich von der Lehre im Fach Mathematik zurück und unterrichtete dafür im Fach Philosophie, in dem er ebenfalls ein sehr grosses Wissen hatte.

Doch nicht nur bei den Mathematikern erregten Cantors Ideen Anstoss, sondern auch bei den Philosophen und ganz besonders bei den ***Theologen.*** Cantor bewies nämlich das Folgende: ***Zu jeder transfiniten Kardinalzahl gibt es eine grössere.*** Damit hat er gezeigt, dass unsere ursprüngliche Kinderfrage nach der grössten Zahl auch im Bereich des Transfiniten – das heisst im Bereich des Unendlichen – eine negative Antwort hat.

Viele Theologen der damaligen Zeit verstanden dies – und den Umgang Cantors mit dem Unendlichen überhaupt – als einen philosophischen Angriff auf die Existenz Gottes, den ***"einzigen Unendlichen über allen Unendlichkeiten"*** (Thomas von Aquin). Jetzt kam da ein Mathematiker daher und sagte, dass es mit den *"Unendlichkeiten immer weitergehe"*. Überdies masste er sich an, mit dem Unendlichen so umzugehen, wie es der Mensch bisher nur mit endlichen Dingen getan hatte. Vor allem die sogenannten *Neo-Scholastiker* oder *Neo-Thomisten,* die sich auf die Lehre des *Thomas von Aquin* bezogen, sahen damals in Cantor's Ideen eine Gefahr für den Glauben.

Ein Päpstliches Wort

Cantor war Katholik, obwohl er in der streng Evangelischen Luther- und Melanchton-Stadt Halle lehrte. Er sah die Dinge ganz anders als die Theologen, und erhob nie den Anspruch, dass die von ihm definierten transfiniten Zahlen der Unendlichkeit Gottes in irgend einer Weise Abbruch tun würden. Im Gegenteil, war er davon überzeugt, dass ihm seine Ideen über die Unendlichkeit als *göttliche Offenbarung* gegeben worden waren. Er fühlte sich daher berufen, *diese Ideen über das Unendliche den Theologen darzulegen, damit die Kirche diesbezüglich nicht einem Irrtum verfalle.* Er dachte, dass diese Ideen die Theologie sogar zu einer tieferen Gotteserkenntnis führen würden. So entstand eine sehr ausgedehnte Korrespondenz, die auch Kardinäle und sogar Papst Leo XIII mit einschloss.
Es war ein gewisser *Kardinal Franzelin* – Professor der Philosopie und Theologie – der sich daraufhin eingehend mit der philosophischen Seite von Cantors Werk auseinandersetzte und zum Schluss kam, dass *Cantors Lehre vom Unendlichen nicht im Widerspruch zum Christlichen Glauben stehe.*
Papst Leo XIII hat dies später in einem allgemeineren Schreiben mit eingeschlossen. Er empfahl dabei, ***die Kirche solle sich neuen wissenschaftlichen Erkenntnissen nicht verschliessen, sondern diese vielmehr prüfen und fragen, wo diese zum Wohl der Menschen oder zur Vertiefung des Glaubens beitragen können.***
Diese kirchliche Anerkennung war für Cantor schliesslich doch noch eine Genugtuung.

Irdische Erkenntnis und Ewige Weisheit: *"Ich gehe nicht um mit Dingen, die mir zu wunderbar und zu hoch sind." (siehe Psalm 131, Vers 1)*

Liebe Hörerinnen und Hörer! Damit sind wir für heute am Ende des Abenteuers *"Nachdenken über das Unendliche"* angelangt. Dieses Abenteuer – *der Griff nach dem Unendlichen* mit unserem begrenzten menschlichen Verstand – hat uns wieder auf eine neue Weise an die Grenzen des menschlichen Erkennens geführt. Zu einem späteren Zeitpunkt werden wir hören, wie es mit diesem Abenteuer weiterging.

Ausblick und Schlussfolgerung

Cantors anfänglich umstrittene Ideen trugen ganz wesentlich dazu bei, dass die Mathematik um 1900 anfing, sich intensiv mit ihren eigenen gedanklichen Grundlagen auseinanderzusetzen. Dies führte schliesslich zu einem ganz neuen Eigenverständnis der Mathematik, das auch die Beziehung zur Philosophie und zur Theologie grundlegend veränderte. Diese Neuorientierung, von der auch die Physik und die anderen Naturwissenschaften nicht unbeeinflusst blieben, muss im Lichte des

persönlichen Glaubens an einen lebendigen Gott gesehen und verstanden werden. Das kann wesentlich dazu beitragen, Missverständnisse und Vorurteile über das Verhältnis zwischen Wissenschaft und Glauben abzubauen.
Wir haben dazu bereits in unseren Vorträgen “Grenzen des menschlichen Erkennens” und “Wissenschaft, mit den Augen des Glaubens betrachtet” einiges gesagt. Die Schlussfolgerung, die wir damals gezogen haben können wir jetzt von Neuem untermauern – auch mit Blick auf Cantors persönlicher Einstellung zu seinen Erkenntnissen: ***Wissenschaftliche Erkenntnis steht nicht im Widerspruch zu einem persönlich gelebten Glauben.***

Lob der Göttlichen Weisheit

Nun bleibt uns eigentlich nichts anderes mehr übrig, als unseren Blick vom Ringen um menschliche Erkenntnis wieder auf die göttliche Weisheit zu richten, der wir ja all unser menschliches Wissen verdanken.
Lassen Sie uns das tun mit dem ***Lob auf die Göttliche Weisheit,*** wie es im Buch der Weisheit, Kapitel 7, Vers 22 bis Kapitel 8, Vers 1 so wunderbar festgehalten ist:

“ 7, 22 In ihr ist ein Geist, / gedankenvoll, heilig, einzigartig, mannigfaltig, zart, beweglich, / durchdringend, unbefleckt, klar, / unverletzlich, das Gute liebend, scharf,
23 nicht zu hemmen, wohltätig, menschenfreundlich, / fest, sicher, ohne Sorge, alles vermögend, alles überwachend / und alle Geister durchdringend, / die denkenden, reinen und zartesten.
24 Denn die Weisheit ist beweglicher als alle Bewegung; / in ihrer Reinheit durchdringt und erfüllt sie alles.
25 Sie ist ein Hauch der Kraft Gottes und reiner Ausfluss der Herrlichkeit des Allherrschers; / darum fällt kein Schatten auf sie.
26 Sie ist der Widerschein des ewigen Lichts, / der ungetrübte Spiegel von Gottes Kraft, / das Bild Seiner Vollkommenheit.
27 Sie ist nur eine und vermag doch alles, / ohne sich zu ändern, erneuert sie alles. / Von Geschlecht zu Geschlecht tritt sie für heilige Seelen ein / und schafft Freunde Gottes und Propheten;
28 denn Gott liebt nur den, der mit der Weisheit zusammenwohnt.
29 Sie ist schöner als die Sonne / und übertrifft jedes Sternbild. / Sie ist strahlender als das Licht;
30 denn diesem folgt die Nacht, / doch über die Weisheit siegt keine Schlechtigkeit.
8, 1 Machtvoll entfaltet sie ihre Kraft von einem Ende bis zum andern / und durchwaltet voll Güte das All .”

Mit dem Unendlichen rechnen: *Ein Blick in die Transfinite Arithmetik*

Teilmengen und Potenzmengen

Wir haben in unserem letzten Vortrag bereits über die von Georg Cantor eingeführten ***transfiniten Kardinalzahlen*** gesprochen, das heisst von Zahlen, die jenseits des Endlichen liegen – also von unendlich grossen Zahlen. Von Zahlen erwartet man zweierlei: dass man sie immer auf ihre Grösse hin miteinander ***vergleichen*** kann, und dass man mit ihnen ***rechnen*** kann – dass man mit ihnen also gewisse ***arithmetische Operationen*** durchführen kann. Cantor hat mit Hilfe der Mengenlehre gezeigt, dass dies für die transfiniten Kardinalzahlen tatsächlich möglich ist. Er hat damit die sogenannte ***transfinite Arithmetik*** begründet – eine Arithmetik also, die mit „unendlich grossen Zahlen operiert“. Natürlich ist es in diesem Vortrag nicht möglich, dieses *Rechnen mit dem Unendlichen* zu begründen. Schon nur um etwa die ***Vergleichbarkeit der transfiniten Kardinalzahlen*** zu zeigen, muss auf ein wichtiges Prinzip der Mengenlehre zurückgreifen, das sogenannte ***Wohlordnungsprinzip.*** Darauf kann ich hier nicht weiter eingehen.

Statt dessen möchte ich nur eine einzige arithmetische Operation mit transfiniten Kardinalzahlen erklären. Dazu machen wir zuerst eine Vorbetrachtung. Wir haben früher schon die Zahl 10 Trillionen erwähnt, die man in der Form 10^19 schreiben kann. Das bedeutet, dass man diese Zahl erhält, indem man die Zahl eins neunzehnmal mit 10 multipliziert. Man nennt diese Zahl auch die *19-te Potenz von 10* ist. Dabei heisst die Zahl 10 die *Basis* der Potenz, und die Zahl 19 der *Exponent.*
Das Gleiche kann man natürlich auch tun, indem man die Basis 10 durch die Basis 2 ersetzt und den Exponenten 19 durch irgendeine positive ganze Zahl, die wir mit n benennen wollen. So kann man also die Potenzen 2^n bilden, wo n irgendeine natürliche Zahl ist, also irgendeine der Zahlen 1,2,3,4,5,... . Man nennt die Zahl 2^n die ***n-te Potenz von 2***. Diese wird gebildet, indem man die Zahl 1 genau n-mal mit der Zahl 2 multipliziert. Es gilt also 2^1 =1x2 =2, 2^2 = 1x2x2 = 4, 2^3 = 1x2x2x2 = 8, 2^4=1x2x2x2x2=16, 2^5=1x2x2x2x2x2=32, … Man kann nach diesem Rezept auch die 0-te Potenz von 2 bilden, und erhält 2^0 = 1. Die Zahlen 2^n – also die n-ten Potenzen von 2 – nennt man auch ***Zweierpotenzen***.
Nun führen wir ein Konzept der Mengelehre ein, welches mit den Zweierpotenzen zusammenhängt: den Begriff der Teilmenge. Als erstes betrachten wir dazu die sogenannte ***leere Menge***, also die Menge, die gar keine Elemente enthält. Um auf unser früheres Kinderexperiment zurückzugreifen: die leere Menge von Birnen besteht aus allen Birnen, die sich im leeren Birnenkorb befinden. Als Denkaufgabe stellt sich hier die Frage, ob die leere Menge von Birnen und die leere Menge von Äpfeln gleich sind oder nicht. Als Lösungshinweis dazu sei bemerkt, dass zwei Mengen als gleich gelten, wenn sie die selben Elemente enthalten.
Nun nehmen wir eine beliebige Menge her. Um einfach über sie reden zu können, bezeichnen wir sie mit *M*. Eine ***Teilmenge*** von *M* ist eine Menge, die nur einen Teil der Elemente von *M* enthält. *Die Menge M selbst, aber auch die leere Menge betrachtet man immer als Teilmengen von M.* Nehmen wir zum Beispiel an, *M* sei die leere Menge. Dann ist *M* die einzige Teilmenge von *M.* In diesem Fall hat *M* also 0 Elemente und eine, also 2^0 Teilmengen. Nehmen wir als nächstes an, die Menge *M* enthalte nur ein einziges Element. Dann sind die leere Menge und die Menge *M* selbst die einzigen Teilmengen von *M.* In diesem Fall hat *M* also 1 Element und zwei, d.h. 2^1 Teilmengen. Nehmen wir schliesslich an, *M* enthalte genau zwei Elemente, etwa die beiden Zahlen 1 und 2. Dann hat *M* genau vier, also 2^2 verschiedene Teilmengen – nämlich: die leere Menge, die Menge *M* selbst, die Menge, die nur die Zahl 1 enthält und die Menge, die nur die Zahl 2 enthält.
Allgemein kann man sagen: Besteht die Menge *M* aus n verschiedenen Elementen – wobei n wieder irgendeine der Zahlen 0,1,2,3,4,5,... ist – so hat sie genau 2^n verschiedene Teilmengen.
Jetzt bilden wir aus unserer Menge *M* eine neue Menge, nämlich ***die Menge aller Teilmengen von M***. Die Elemente dieser neuen Menge sind also die Teilmengen von *M.* Diese neue Menge nennt man die ***Potenzmenge*** von *M* und bezeichnet sie mit *P(M).* Der Name "Potenzmenge" bezieht sich auf die vorhin gemachte Feststellung, dass die Zweierpotenz 2^n die Anzahl der Elemente der Menge *P(M)* ist, wenn die Menge *M* genau n Elemente enthält. Wenn wir anstatt von „Anzahl" wieder von *Kardinalität* reden, können wir also sagen: *2 hoch die Kardinalität von M ist gerade die Kardinalität der Potenzmenge P(M) von M*. Zumindest für endliche Mengen *M* ist es so.
Gemäss Cantor kann man dies aber auch auf beliebige Mengen übertragen und sagen: ***Ist M eine Menge der Kardinalität Aleph, so ist 2^Aleph die Kardinalität der Potenzmenge P(M) von M***. Das heisst aber: ***Zu jeder Kardinalzahl Aleph können wir durch Bilden einer Potenzmenge die Zweierpotenz 2^Aleph definieren.***

Die Cantor'sche Ungleichung

Nun wollen wir die Kardinalzahlen Aleph und 2^Aleph vergleichen. Wir tun das mit einer Überlegung, welche sich an unser früheres Gedankenexperiment mit den beiden Körben anlehnt. Wir gehen diesmal aber etwas abstrakter vor und lassen die Vorstellung von den beiden Körben weg. Wir betrachten dazu eine Menge *M* der Kardinalität Aleph. Zu jedem Element *e* dieser Menge *M* wählen wir eine Teilmenge von *M* aus, die wir mit *T(e)* bezeichnen. Jedem Element *e* der Menge *M* wird dadurch also das Element *T(e)* der Potenzmenge *P(M)* zugeordnet. Anders gesagt, haben wir jedes Element *e* der Menge *M* auf ein Element *T(e)* der Potenzmenge *P(M) von M abgebildet*.

In der Sprache der Mathematik haben wir dadurch eine ***Abbildung von der Menge M in die Potenzmenge P(M) von M definiert***.
Nun bilden wir eine besondere Teilmenge von *M,* die wir mit *X* bezeichnen wollen. ***Diese Teilmenge X bestehe genau aus den Elementen e von M, für welche e kein (!) Element von T(e) ist.*** Wir behaupten: ***Die Menge X ist von allen Mengen T(e) verschieden.***
Den Beweis führen wir mit dem Verfahren der ***Reductio ad Absurdum,*** der *Zurückführung auf das Absurde,* einem Beweis-Prinzip, das schon in der Antiken Griechischen Philosophie angewendet wurde. Man nimmt dabei an die gemachte Behauptung sei falsch. Aus dieser Annahme – das heisst aus der Negation der Behauptung – leitet man dann etwas in sich Widersprüchliches ab. Dann kann aber die gemachte Annahme – das heisst die Negation der gemachten Behauptung – nicht gelten. Deshalb muss die Behauptung gelten.
Versuchen wir dies nun mit unserer Behauptung, dass die Menge *X* von allen Mengen *T(e)* verschieden ist. ***Nehmen wir also an, unsere Behauptung sei falsch! Dann ist X = T(e) für ein Element e von M.***
Nehmen wir zuerst an, *e* sei ein Element von *T(e).* Dann kann *e* nicht zu *X* gehören – denn *X* besteht ja aus allen Elementen *e* von *M,* die nicht zu *T(e)* gehören. Andrerseits sind die Mengen *X* und *T(e)* gleich. Weil *e* zu *T(e)* gehört, so muss *e* also auch zu *X* gehören. Also muss *e* gleichzeitig zu *X* gehören und nicht zu *X* gehören, was natürlich nicht möglich ist.
Somit kann *e* kein Element von *T(e)* sein. Dann gehört *e* zu *X.* Weil die Mengen *X* und *T(e)* gleich sind, gehört *e* also auch zu *T(e).* Damit gehört *e* gleichzeitig zu *T(e)* und nicht zu *T(e),* was wiederum nicht möglich ist.
Die Annahme, dass X und T(e) für ein Element e übereinstimmen, führt also auf einen Widerspruch! Das heisst nach dem Prinzip der Reductio ad Absurdum, dass unsere Behauptung richtig ist. Die Menge *X* ist also tatsächlich von allen Mengen *T(e)* verschieden. Das bedeutet aber: ***Wie auch immer man die Menge M in ihre Potenzmenge P(M) abbildet, gibt es Elemente in der Potenzmenge P(M), die man nicht erreicht.*** In der Sprache der Mengenlehre ausgedrückt heisst das: ***Es gibt keine surjektive Abbildung von einer Menge M auf ihre Potenzmenge P(M).***
Dies heisst aber, dass die Kardinalität der Potenzmenge *P(M)* grösser ist als die Kardinalität der Menge *M.* Weil *M* die Kardinalität Aleph und *P(M)* die Kardinalität 2^Aleph hat, gilt also die Ungleichung ***2^Aleph > Aleph –*** die sogenannte ***Cantor'sche Ungleichung.*** Diese besagt inbesondere: ***Zu jeder Kardinalzahl Aleph gibt es immer noch eine grössere*** – zum Beispiel die Kardinalzahl 2^Aleph. Erinneren wir uns daran, dass gerade dieser Lehrsatz der Transfiniten Arithmetik eine sehr ausgedehnte philosophische und theologische Kontroverse auslöste, die selbst vor dem Vatikan nicht halt machte.

Bereits früher haben wir die *Menge der natürlichen Zahlen* betrachtet, also die Menge mit den Elementen 1,2,3,4,5,... . Deren (unendliche, also transfinite) Kardinalität haben wir mit Aleph_0 bezeichnet. Gleichzeitig haben wir auch das *Kontinuum* betrachtet, also die Menge aller reellen Zahlen – das heisst die Menge aller Punkte auf der Zahlengeraden. Die *Kardinalität des Kontinuums* ist gerade 2^Aleph_0, was wir hier nicht beweisen wollen. Bereits im letzten Vortrag haben wir dargelegt, dass die Kardinalität des Kontinuums grösser ist als Aleph_0 und damit gezeigt, dass die Ungleichung ***2^Aleph_0 > Aleph_0*** besteht. Diese Ungleichung nennt man auch die ***spezielle Cantor'sche Ungleichung.*** Man erhält diese Ungleichung natürlich auch direkt, indemm man in die Cantor'sche Ungleichung anstelle von Aleph einfach Aleph_0 einsetzt.

Die Kontinuumshypothese: *Ein Mathematisches Problem schreibt Geistesgeschichte*

Liegt nichts dazwischen?

Mit der speziellen Cantor'schen Ungleichung 2^Aleph_0 > Aleph_0 taucht natürlich die Frage auf, ob es zwischen den beiden Kardinalzahlen Aleph_0 uns 2^Aleph_0 noch weitere Kardinalzahlen

gibt. Etwas genauer gesagt: *Gibt es eine Kardinalzahl Bet so, dass gleichzeitig gilt: Aleph_0 < Bet und Bet < 2^Aleph_0 ?* Die gleiche Frage kann man auch so formulieren: *Gibt es eine Menge von Zahlen, deren Kardinalität grösser ist als jene der Menge der natürlichen Zahlen, aber kleiner als die Kardinalität des Kontinuums?* Schon Cantor stellte sich diese Frage, war aber überzeugt, dass dies nicht so sei. Er formulierte dies 1878 als *Hypothese,* die wir hier in der folgenden Form aussprechen wollen: ***Es gibt zwischen Aleph_0 und 2^Aleph_0 keine weitere Kardinalzahl.*** Diese Hypothese ging schon bald als ***Kontinuumshypothese*** in die Mathematik ein. Der Name bezieht sich darauf, dass 2^Aleph_0 die Kardinalität des Kontinuums ist. Die sogenannte ***verallgemeinerte Kontiuumshypthese*** besagt sogar: ***Es gibt keine Kardinalzahl Aleph so, dass zwischen Aleph und 2^Aleph noch eine weitere Kardinalzahl vorkommt.***
Schon Cantor versuchte immer wieder erfolglos, die Kontiuumshypothese zu beweisen. Als sich um 1900 die Widerstände gegen die Mengenlehre aufgelöst hatten, versuchten zahlreiche Mathematiker die Kontinuumshypothese zu beweisen – wie etwa der schon mehrfach erwähnte grosse Deutsche Mathematiker David Hilbert. Gleichzeitig versuchten andere Mathematiker hartnäckig, diese Hypothese zu widerlegen. Beide Parteien blieben aber in ihrem Bemühen erfolglos. So entstand um die Kontinuumshypthese eine teilweise sehr hitzig geführte Kontroverse.
Allmählich setzte sich aber die Einsicht durch, dass die Klärung dieser Streitfrage nach einem ganz neuen Ansatz verlangte. Als Basis und Fundament für die Entscheidung solcher Fragen sollte nämlich als erstes ein allgemein anerkanntes ***System von Axiomen für die Mengenlehre*** festgelegt werden. Auf diesem soliden Fundament sollte dann die ganze Theorie nach streng logischen Regeln aufgebaut werden.
In unserem früheren Vortrag über die Grenzen des menschlichen Erkennens haben wir den Begriff des Axioms bereits kennengelernt. Nochmals sei hier daran erinnert, dass ein ***Axiom*** eine Aussage ist, die man ohne Beweis annimmt. In der Mathematik baut man heute jede Theorie auf, indem man ***aus einem vorher vereinbarten System von Axiomen nur durch logische Schlussfolgerung alle Lehrsätze der Theorie beweist.***
Wir haben im Vortrag über die Grenzen des Erkennens bereits auch gehört, dass der Griechische Mathematiker Euklid schon in der Antike den Aufbau der Geometrie aus einem von ihm vorgeschlagenen Axiomensystem vorgezeichnet hat. Allerdings hielt Euklids Vorgehen einer kritischen Betrachtung noch nicht stand. Es war erst David Hilbert, der im ausgehenden 19. Jahrhundert den axiomatischen Aufbau der Geometrie in strenger Weise durchführte. Ein wichtiger Anstoss, sich mit der Axiomatik der Geomtrie zu befassen, war die mehr als tausend Jahre andauernde Kontroverse um Euklids *Parallelen-Axiom.*

Das Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel

Die Geschichte der Mengenlehre ist in gewisser Hinsicht vergleichbar mit der Geschichte der Geomerie: Auch in der Mengenlehre gab eine Kontroverse – diesmal ausgelöst durch die Kontinuumshypothese – den Anlass dazu, nach Axiomen zu fragen, und dann die ganze Theorie auf der soliden Basis dieser Axiome streng logisch aufzubauen. Allerdings besteht auch ein beachtlicher Unterschied zwischen der Situation in der Geometrie und jener in der Mengenlehre: Geht es im ersten Fall nur um eine mathematische Teildisziplin, so geht es im Fall der Mengenlehre um die ganze Mathematik. Denn praktisch jede mathematische Theorie wird mittlerweile im Rahmen der Mengenlehre formuliert und aufgebaut.
Das gebräuchlichste Axiomensystem für die Mengenlehre geht auf den Deutschen Mathematiker Ernst Zermelo (1871-1953) und den Deutsch-Israelischen Mathematiker Abrahem Halevi Fraenkel (1891-1965) zurück. Im Jahre 1907 schlug Zermelo ein erstes Axiomensystem vor. Im Jahre 1921 ergänzte Fraenkel dieses System, und im Jahre 1930 fügte Zermelo seinerseits nochmals eine weitere Ergänzung hinzu. Eine ganz besonders wichtige Rolle in diesem Axiomensystem spielt das sogenannte ***Auswahlaxiom,*** auf das wir noch zu sprechen kommen werden. Der Norwegische Mathematiker Thoralf Skolem (1887-1963) formulierte in Jahre 1929 das Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel im sogenannten *Prädikatenkalkül* der formalen Logik und legte damit den Grundstein für alle späteren logischen Untersuchungen der Mengenlehre.

Ernst Zermelo entdeckte um 1905 das vorhin schon erwähnte *Auswahlaxiom*, mit dem sich das von Cantor verwendete *Wohlordnungsprinzip* streng begründen liess. Dies gab den Ausschlag, dass Zermelo noch im selben Jahr Dozent an der Universität Göttingen wurde, der damaligen "Welthochburg" der mathematischen Wissenschaften. Im Jahre 1910 trat Zermelo an der Universität Zürich eine Professur an. Um 1913 bewies er wieder ein Aufsehen erregendes Resultat, in dem er zeigte, dass *jedes endliche Spiel eine Lösung hat*. Das heisst etwa am Beispiel des Schachspiels: aus jeder vorgegeben Spielstellung heraus kann entweder weiss oder schwarz den Gegner matt setzen, oder es können beide Parteien mindestens ein Remis erzwingen. Das Resultat von Zermelo ist ein Grundstein der sogenannten *Spieltheorie,* einer Theorie, die heute zahlreiche Anwendungen findet – etwa im Bereich der Logik, der Wirtschaft und der Sozialwissenschaften.
Aus gesundheitlichen Gründen musste Zermelo 1916 seine Lehrtätigkeit an der Universität Zürich aufgeben und zog in den Hochschwarzwald. Er wurde daraufhin zum Honorarprofessor der Universität im nahe gelegenen Freiburg im Breisgau ernannt – und konnte dort wegen gesundheitlicher Besserung ab 1926 wieder unterrichten. Allerdings verlor er 1935 seine Stellung, weil er sich weigerte, seine Vorlesungen mit dem Hitlergruss zu eröffnen. Er war von einem Kollegen und einem seiner Assistenten denunziert worden. Damit stand Zermelo nicht nur ohne Anstellung da, sondern er war auch als Wissenschaftler praktisch mundtod gemacht. Denn mindestens in einer Deutschen wissenschaftlichen Zeitschrift konnte er seine Ideen nun nicht mehr veröffentlichen. Nach dem zweiten Weltkrieg wurde er rehabilitiert und an der Universität Freiburg wieder als Honorarprofessor eingesetzt.

Abraham Halevi Fraenkel trug ursprünglich den ersten Vornamen Adolf. Er kämpfte im Ersten Weltkrieg als Soldat der Deutschen Wehrmacht – und habilitierte sich gleichzeitig. Er war der Typ des frühreifen Wissenschaftlers und veröffentlichte bereits im Alter von 19 Jahren im *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* – einer auch heute noch sehr hoch angesehenen wissenschaftlichen Zeitschrift – zwei Artikel über *die Berechnung des Osterfestes* und *die Osterrechnung nach dem Gregorianischen Kalender.*

Liebe Hörerinnen und Hörer, erlauben Sie mir, dass ich an diesem Punkt meine mathematisch ausgerichteten Ausführungen kurz unterbreche. Wussten Sie, dass wir in diesem Jahr Zeugen eines sehr bedeutsamen und schönen Gnadenzeichens wurden? In diesem Jahr fielen nämlich das ***Osterfest der Westlichen Kirchen und der Griechisch Orthodoxen Kirche*** zusammen. Dies war seit dem ersten Ostern, der ***Auferstehung Jesu Christi***, nur 37 mal der Fall. Wie viele andere Menschen denken vielleicht auch Sie, dass das ***gemeinsame Begehen des Hochfestes der Auferstehung unseres Herrn durch alle Christlichen Kirchen einem innigen Wunsch Jesu entspricht.*** Das gemeinsame Feiern des bedeutendsten Christlichen Festes wäre doch ein eindrückliches Zeichen für die von Jesus beim Vater so flehentlich erbetene ***Einheit unter allen Christen*** (siehe ***Johannes 17, Verse 20-23***). Vielleicht gehören auch Sie zu den Menschen, die darum beten, dass die ***Zusammenlegung der Osterdaten der Östlichen und Westlichen Kirche*** bald Wirklichkeit werde. Mich freut auch besonders, dass ein Berufskollege, der dem Jüdischen Volk enstammte, Anlass dazu gab, dieses Thema hier aufzugreifen.

Auf Grund seiner hervorragenden Habilitationsschrift wurde Fraenkel bereits im Jahre 1916 Dozent an der Universität Marburg. 1928 wurde er Professor an der Universität Kiel und war zwischendurch 4 Jahre Gastprofessor an der neu gegründeten Hebräischen Universität in Jerusalem. 1933 verlor er wegen seiner Jüdischen Abstammung seine Professur in Kiel und musste ohne Geld und ohne jegliche Habe mit seiner Frau und seinen zwei Kindern Deutschland auf Umwegen fluchtartig verlassen. Dass Fraenkel später seinen ersten Vornamen "Adolf" im Namensregister streichen liess, ist daher nicht weiter erstaunlich. 1938 wurde er Rektor der Hebräischen Universität in Jerusalem. Nach dem zweiten Weltkrieg wurde er an der Universität Kiel rehabilitiert, zum Honorarprofessor ernannt und entschädigt für die ihm früher unter fadenscheinigen Begründungen vorenthaltene Lohnzahlung durch das vormalige Deutsche Reich.

Die Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese: *Das Ende einer Kontroverse*

Gödels Verträglichkeits-Beweis

Mit der Axiomatisierung der Mengenlehre war nun der Ausgangspunkt für einen neuartigen Zugang zur Kontinuumshypothese gegeben. Anstatt diese Hypothese beweisen oder widerlegen zu wollen, konnte man nun folgendes fragen: *Ist die Kontinuumshypthese verträglich mit den Axiomen von Zermelo und Fraenkel ?* Oder – ausgedrückt in der Sprache der Mathematischen Logik: ***Ist die Kontinuumshypthese konsistent bezüglich des Axiomensystems von Zermelo-Fraenkel ?*** Genauer war nun folgendes zu tun: *Man nehme an, das Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel sei konsistent,* also in sich widerspruchsfrei. Dann nehme man zu diesem Axiomensystem noch die Kontinuumshypothese hinzu und zeige, dass das so *erweiterte System von Aussagen immer noch konsistent, also in sich widerspruchsfrei,* ist.

Dem Mährisch-Österreichisch-Amerikanischen Mathematiker Kurt Gödel (1906-1978) gelang es im Jahre 1940 tatsächlich, diese *Verträglichkeit der Kontinuumshypothese mit den Axiomen der Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel* zu zeigen. Gödel hat gleichzeitig sogar noch mehr gezeigt, nämlich: auch die *verallgemeinerte Kontinuumshypothese*, von der wir vorhin kurz geredet haben, ist mit den Axiomen von Zermelo-Fraenkel verträglich. Zudem bewies er, dass das bereits erwähnte *Auswahlaxiom* bezüglich der Axiome von Zermelo-Fraenkel konsistent ist. Das heisst folgendes: ***Erhält man nach Entfernung des Auswahlaxioms aus dem Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel ein in sich widerspruchsfreies System von Aussagen, so ist auch das ganze Axiomensystem widerspruchsfrei.***

Damit war zum einen die Kontroverse um die Kontinuumshypothese weitgehend beendet. Wer jetzt an dieser Hypothese festhalten wollte, war sozusagen eingeladen, dies weiterhin zu tun. Denn durch die Hinzunahme dieser Hypothese konnte kein Widerspruch entstehen. *Allerdings war damit die Kontinuumshypothese nicht in irgendeiner Form bewiesen.* Es war nur gezeigt, dass man diese Hypothese, ausgehend von den Axiomen von Zermelo-Fraenkel, nicht widerlegen kann.
Für die Entwicklung der Mathematik war aber auch die oben erwähnte ***Konsistenz (oder Verträglichkeit) des Auswahlaxioms*** sehr bedeutsam. Denn um dieses Axiom hatte sich ebenfalls eine Kontroverse entwickelt. Beim Aufbau vieler mathematischer Theorien greift man nämlich auf das sogenannte ***Lemma von Zorn*** zurück, das im Jahre 1935 vom Deutsch-Amerikanischen Mathematiker Max-August Zorn (1906-1993) bewiesen worden war. Dieses sehr bedeutsame Lemma beruht aber seinerseits auf dem Auswahlaxiom.Wer also das Auswahlaxiom nicht akzeptieren wollte, durfte auch das Zorn'sche Lemma nicht verwenden, und konnte so eine ganze Reihe mathematischer Ergebnisse nicht benutzen, die auf diesem Lemma beruhen. *Durch Gödels Verträglichkeitsbeweis für das Auswahlaxiom war nun das Lemma von Zorn als wichtiges Werkzeug der Mathematik legitimiert.*

Max Zorn doktorierte 1930 an der Universität Hamburg und wurde danach Assistent an der Universität Halle an der Saale. Unter dem Druck des Nazi-Regimes musste er 1933 mit seiner Frau und seinen zwei Kindern Deutschland verlassen und emigrierte in die USA. Nach Aufenthalten an der Yale University und der University of California in Los Angeles wurde er schliesslich Professor an der University of Indiana.

Auch Kurt Gödels Leben war sehr bewegt. Schon im im Jahre 1930, also im Alter von 24 Jahren, veröffentlichte er eine fundamentale Arbeit, in welcher er die sogenannte ***Vollständigkeit des logischen Prädikatenkalküls*** bewies. Bereits ein Jahr später veröffentlichte er eine Arbeit von epochaler Bedeutung: den Beweis der sogenannten ***Unvollständigkeit des Arithmetischen Systems der Principia Arithmetica.*** Wir hoffen, in einem späteren Vortrag auf diese Arbeit und ihre Bedeutung für die Mathematik und die Philosophie zurückkommen.

Im Jahre 1933 wurde Gödel im Alter von nur 26 Jahren Privatdozent an der Universität Wien. Dort war er auch Mitglied des sogenannten *Wiener Kreises,* eines losen Zusammenschlusses von Philosophen und Wissenschaftlern, welche in der Logik und der Erkenntnistheorie nach neuen Wegen suchten. Als Gödels Jüdischer Freund Moritz Schlick – ebenfalls Mitglied des Wiener Kreises – im Jahre 1936 von einen fanatisierten Nazi-Studenten erschossen worden war, fiel Gödel in eine tiefe paranoide Depression und musste mehrere Wochen in einer psychiatrischen Klinik verbringen. Diese Erkrankung holte ihn später in seinem Leben immer wieder ein und zwang ihn zu wiederholten Klinik-Aufenthalten.
Im Jahre 1939, nach dem Anschluss Österreichs an das Nazi-Reich, wurde Gödel die weitere Dozententätigkeit in Wien untersagt. Der bisher in Haft gehaltene Mörder Schlicks wurde von den Nazis unverzüglich auf freien Fuss gesetzt und als Held gefeiert. Gödel floh 1940 mit seiner Frau – einer vormaligen Tänzerin, die er gegen den starken Widerstand seiner Familie geheiratet hatte – durch Russland in die USA. Mittlerweile war sein wissenschaftlicher Ruf schon so gross, dass er bald an der Princeton University eine Professur erhielt.
Wohl unter dem Einfluss seines ebenfalls in Princeton tätigen Freundes Albert Einstein wandte sich Gödel nun der *allgemeinen Relativitätstheorie* zu. Er befasste sich aber auch mit dem formal - logischen Aspekt der *philosophischen Gottesbeweise*, und veröffentlichte seine Ideen dazu in einer wissenschaftlichen Schrift. Die Fertigstellung dieser mathematisch sehr anspruchsvolle Arbeit wurde für ihn zu einem mühsamen Kampf, denn er musste sie mehrmals zur Korrektur zurückrufen. Durch die ihm verordneten Antidepressiva litt er nämlich unter Konzentrationsstörungen, sodass ihm mehrfach ernsthafte Fehler unterliefen.
Immer wieder litt Gödel unter seinen Verfolgungsideen und glaubte, dass ihn jemand vergiften wolle. Dies führte dazu, dass er völlig vereinsamte und schliesslich nur noch ass, was seine letzte Vertraute – seine Frau – ihm zubereitet hatte. Als diese wegen einer schweren Krankheit für längere Zeit ins Krankenhaus musste, wurde Gödel vorsorglich in eine psychiatrische Klinik verbracht. Aber auch dort weigerte er sich hartnäckig, etwas zu essen und hungerte sich dadurch schliesslich selbst zu Tode.
Nebst seinen wissenschaftlichen Arbeiten hinterliess Gödel auch eine umfangreiche Korrespondenz zu philosophischen und religiösen Fragen. Gödel war Lutheranisch getauft, fühlte sich aber keiner Kirche verpflichtet. Er bezeichnete sich selbst als *gläubigen Theisten,* glaubte also an einen persönlichen Gott der über allem steht. Er stand damit im Gegensatz zur *pantheistischen Auffassung* Albert Einsteins, gemäss welcher sich Gott ausschliesslich durch und in der Natur manifestiert und nicht Persönlichkeitscharakter hat, sondern eher ein geistiges Prinzip darstellt. Was bei Gödels Auffassung allerdings zu fehlen scheint, ist der Kern des christlichen Glaubens, nämlich dass ***Gott in seinem Sohn Jesus Christus Mensch geworden ist, um die Menschheit durch seinen Kreuzestod aus der Sünde zu erlösen und mit Sich zu versöhnen.***

Cohens Unabhängigkeits-Beweis

Wie schon vorhin bemerkt, zeigt Gödels Veträglichkeits-Beweis, dass sich die Kontinuumshypothese auf Grund der Axiome von Zermelo-Fraenkel nicht widerlegen lässt. Damit wäre immerhin noch denkbar, dass sich diese Hypothese doch noch aus den genannten Axiomen beweisen liesse. Wollte man auch dies widerlegen, müsste man die sogenannte ***Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese von den Zermelo-Fraenkel-Axiomen*** zeigen. Man müsste also annehmen, die Kontinuumshypothese sei falsch, und dann zeigen, dass man so in keinen Widerspruch zu den Zermelo-Fraenkel Axiomen gerät – vorausgesetzt, dass diese Axiome unter sich konsistent, also widerspruchsfrei, seien.

Im Jahre 1963 gelang es dem Amerikanischen Mathematiker Paul Cohen (1934-2007) diese ***Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese (von den Zermelo-Fraenkel Axiomen)*** zu zeigen. Gleichzeitig zeigte er auch die ***Unabhängigkeit des Auswahlaxioms.*** Um seine Beweise zu führen, hatte Cohen zuvor eine ganz neue mathematisch-logische Methode entwickelt, das sogenannte

Forcing. Vereinfacht gesagt, erlaubt diese Methode, aus einem in einer formalen Sprache niedergeschriebenen System von Axiomen, ein *Modell* für dieses System zu finden. Man versucht also – sehr populär gesagt – aus einer aufgeschriebenen Geschichte die Wirklichkeit herzustellen, welche durch die Geschichte beschrieben wird. Damit dies möglich ist, muss allerdings eine ganze Reihe von Bedingungen erfüllt sein, die man mit teilweise sehr aufwändigen Überlegungen nachprüfen muss. In zwei ganz kurzen Arbeiten in den *Proceedings of the Americam Academy of Sciences* gab Cohen einen Überblick über seine Beweise und verwies für die Einzelheiten auf sein Buch über das Forcing. Im Jahre 1969 habe ich als angehender Diplomand an der Universität Basel an einem Seminar teilgenommen, in welchem uns Cohens Forcing und die detaillierte Darstellung seiner Unabhängigkeitsbeweise ein ganzes Semester lang beschäftigten. Das Forcing selbst ist mittlerweile technisch vereinfacht und mehrfach erweitert worden. Es zählt heute zu den *Standard-Werkzeugen der mathematischen Logik*.
Mit seinem Beweis hat Cohen die klassische Mengelehre zu ihrem Abschluss gebracht. Es ist deshalb nicht erstaunlich, dass ihm für diese Leistung die ***Fields-Medaille*** verliehen wurde, die höchste mathematische Auszeichnung, die vom Prestige her dem Ihnen wohl eher bekannten *Nobel-Preis* entspricht.

Das Verträglichkeitsresultat von Gödel und das Unabhängigkeitsresultat von Cohen besagen zusammen: ***Die Kontinuumshypothese ist in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre nicht entscheidbar.*** Mit andern Worten: *Ist die Zermelo-Fraenkel-Mengelehre konsistent, also in sich widerspruchsfrei, so kann man, ohne einen Widerspruch zu erhalten, annehmen die Kontinnumshypothese gelte oder sie gelte nicht. Beides führt zu widerspruchsfreien Mengenlehren.* Das bedeutet insbesondere: ***Man kann die Kontinuumshypothese aus den Zermelo-Fraenkel Axiomen weder beweisen noch widerlegen.***

Rückblick und Zusammenfassung: *Was soll nun gelten?*

Konsistenz anstelle von Wahrheit

Wie schon oben gesagt wurde, beruhen sowohl Gödels Verträglichkeitsbeweis als auch Cohens Unabhängigkeitsbeweis auf der Annahme, dass das Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel konsistent, also in sich widerspruchsfrei ist. Damit ist eine weitere ganz wichtige Grundfrage angesprochen: ***Ist das Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel konsistent?*** Dies im streng mathematisch-logischen Sinn zu beweisen ist nicht mehr möglich. Und doch sind die Mathematiker der Meinung, dass dies so sei.
Aus einem nicht konsistenten Axiomensystem kann man nämlich *jede Aussage beweisen.* Da die Mengenlehre sozusagen die ganze Mathematik umfasst, müsste man aus den Axiomen von Zermelo und Fraenkel also jede – auch offensichtlich falsche – mathematische Aussage beweisen können, wenn das System dieser Axiome ***nicht konsistent*** wäre. Man könnte dann zum Beispiel mit einem korrekten Beweis – der auf den Zermelo-Fraenkel Axiomen beruht– zeigen, dass 1+1 = 3 ist. So etwas skurriles ist aber bis jetzt niemandem gelungen. Würde aber ein solcher Beweis gefunden, wäre unser Axiomensystem in der Tat nicht konsistent. Mittlerweile sind zehntausende von mathematischen Beweisen geführt worden. Wurde dabei angeblich einmal etwas Falsches bewiesen, so fand man immer einen logischen Fehler im Beweis. Das heisst: ***Man kann davon ausgehen, dass die Zermelo-Fraenkel-Axiome konsistent sind***.

Fassen wir zusammen: Die klassische philosophische ***Frage nach der Wahrheit***, also die Frage, ob die einzelnen Axiome wahr seien, stellt man jetzt gar nicht mehr. Man stellt stattdessen die ***Frage nach der Konsistenz des gesamten Axiomensystems***. Da man diese Konsistenz mit logisch-mathematischen Argumenten nicht nachweisen kann, begnügt man sich mit der Tatsache, dass noch niemand aus den Axiomen etwas Falsches beweisen konnte. Axiome sind gemäss dieser Auffassung immer etwas willkürlich Vereinbartes und werden letztlich nur dadurch legitimiert, dass

die überwiegende Mehrheit der Mathematiker sie akzeptiert. Diese Willkür bei der Festsetzung von Axiomen führt dazu, dass mehrere Axiomensysteme gebräuchlich sind. So bestehen heute für die Mengelehre mehr als ein Duzend solcher Systeme.
Die Gebäude, die auf diesen verschiedenen axiomatischen Fundamenten errichtet werden, unterscheiden sich natürlich voneinander. Allerdings sind die Unterschiede sozusagen erst in den „höheren Etagen" zu sehen. Bei allem, was Sie in der Schule und am Gymnasium in der Mathematik gelernt haben, sind noch keine Unterschiede zu sehen. Auch bei allem was im Bereich der Ingenieur- oder Naturwissenschaften an Mathematik normalerweise zur Anwendung kommt, treten noch keine Unterschiede zutage. Sie müssen also nicht befürchten, dass Ihre Kinder oder Enkel eines Tages nachhause kommen und sagen, 3 + 4 sei jetzt 5, weil die Mathematiker sich für ein anderes Axiomensystem entschieden hätten. Frühestens in zweiten Semesters eines Mathematikstudiums wird man in der Regel mit Fragen konfrontiert, deren Beantwortung von den zugelassenen Axiomen abhängt, zum Beispiel dem Auswahlaxiom.

Das Ur-Fundament

Unser Nachdenken über das Unendliche hat uns dazu geführt, das gedankliche Fundament der Mathematik zu betrachten. Es wurde so zum Ausgangspunkt einer teilweise abenteuerlichen Reise durch die neuere Geistesgeschichte. Am Ende dieser Reise stand eine neue Sicht der Mathematik und ihrer Grundlagen.
Die philosophisch gemeinte Ur-Frage: ***„Was gilt nun eigentlich?"*** ist der fast verlegenen Frage gewichen: ***„Was soll nun gelten?"*** Statt nach einem für alle Zeiten unverrückbar gültigen und unbezweifelbaren Ur-Fundament zu fragen, welches das Gebäude der Mathematik tragen soll, versucht man sich nun auf pragmatische Weise auf ein geeignetes Axiomen-Fundament für dieses Gebäude zu einigen. Entsprechend der Art, wie das entstehende Gebäude aussehen soll, ist man auch bereit das Fundament anzupassen. Das Fundament wird erst durch das auf ihm errichtete Gebäude gerechtfertigt. Nie kann man mit mathematischer Sicherheit ausschliessen, dass das so eifrig und kunstvoll errichtete Gebäude nicht eines Tages in sich zusammenbricht, weil sein Fundament nicht konsistent war.
Auch die Naturwissenschaften haben sich eine ähnliche Sicht angeeignet, was besonders klar in der Physik zutage tritt. Dort kommt allerdings noch der Faktor der ***experimentellen Beobachtbarkeit*** hinzu.
All das dürfen wir schon als Zeichen und Hinweis dafür verstehen, dass unserem Denken und Erkennen Grenzen gesetzt sind.

Unsere Reise durch die neuere Geschichte der Mathematik hat hat uns vor Augen geführt, dass sich mit fortschreitender wissenschaftlicher Erkenntnis auch die Grenzen der menschlichen Erkenntnisfähigkeit immer klarer zeigen. Denn eines haben wir bei unserem Streifzug gesehen: Dem Anspruch, alles mit absoluter Sicherheit zu wissen, kann unser Verstand nicht genügen. Doch heisst das jetzt, dass wir uns resigniert von der Wissenschaft als Quelle von Erkenntnissen abwenden müssen?

Diese Frage will ich mit ein paar persönlichen Vorstellungen beantworten. Ich möchte dazu die Wissenschaftler mit Kindern vergleichen, die daran sind, in einem Garten eine Hütte zu bauen. Begeistert und eifrig werkeln sie mit Hammer, Säge, Nägeln und Schrauben und sehen voll Freude das Werk ihrer Hände wachsen – und es erscheint ihnen strahlend schön und grossartig. In einem nachdenklichen Augenblick sieht das eine oder andere der Kinder zwar vielleicht schon, dass die Hütte etwas wacklig ist, weil sie nicht so gut im Boden verankert und nicht allzu solide aufgebaut ist. Auch das Dach ist stellenweise undicht und die Wände halten den Wind nicht sehr gut ab. Doch nützlich ist die Hütte allemal schon so: Man kann sich in ihr um den Tisch setzen und vielleicht eine gemeinsam gekochte Suppe essen. Wenn es regnet, bietet die Hütte Schirm, auch wenn es an der einen oder anderen Stelle noch durch das Dach tropft. Sogar vor dem kalten Wind bietet sie einen gewissen Schutz, auch wenn dieser schon noch durch einige Ritzen hereinbläst.

Man kann aber auch nur ruhig in der Hütte sitzen, sich Geschichten erzählen, ein Buch lesen oder einfach durch das vielleicht etwas schiefe Fenster hinaus schauen und den vorbeiziehenden Wolken nachträumen…
Aber, da ist noch Einer, ein Vater, dem der Garten gehört und der weiss, dass das eigentliche Fundament für die Hütte der Boden ist, den Er in diesem Garten bereitet hat. Er ist es auch, der für die Kinder Bretter, Nägel, Schrauben und Werkzeuge bereitgestellt hat. Auch die Geschicklichkeit, den Fleiss, die Ausdauer und die Begeisterung, die sie für ihr Werk brauchen, hat er ihnen verliehen. Er sieht natürlich sehr gut, dass die Hütte recht wacklig dasteht und einem ernsthaften Sturm nicht standhalten kann. Da er aber selbst einmal Kind geworden ist, kann er das ganze Werk gleichzeitig mit den Augen der Kinder sehen, sich wie sie daran freuen und sich mit ihnen darüber wundern, was da Schönes entstanden ist. Wenn unter den Kindern vielleicht auch nur einige wenige sind, die erahnen, wer eigentlich die Hütte wirklich erbaut hat, segnet er doch ihretwegen das ganze Werk, mit all seinen Stärken aber auch seinen Mängeln.

Ist es aber da noch wichtig, ob die Hütte in wissenschaftlicher Forschung, in handwerklicher oder in künstlerischer Tätigkeit, in Hausarbeit oder in irgendeiner anderen Arbeit errichtet wurde? Wo soll da in den Augen das Vaters noch ein Unterschied bestehen? Wichtig ist schliesslich doch nur eines: ***dass Er das Haus baut!*** Und so möchte ich meine Ausführungen mit dem ersten Satz aus Vers 1 von Psalm 127 beschliessen:

„Wenn nicht der Herr das Haus baut, müht sich jeder umsonst, der daran baut.“

Markus Brodmann
Grüzenstrasse 24
CH-8400 Winterthur

30. Oktober 2014

Prof. em. Dr. Phil II
Institut für Mathematik der Universität
Winterhurerstrasse 190
8057 Zürich
brodmann@math.uzh.ch