

GRENZEN DES MENSCHLICHEN ERKENNENS

Einleitung: *Menschliche Erkenntnis und Göttliche Weisheit*

Lassen Sie mich meine Ausführungen mit einer Passage aus dem Alten Testament beginnen, bei der es um die Suche des Menschen nach Erkenntnis und um die Göttliche Weisheit geht, nämlich mit den Versen 1-28 aus Kapitel 28 im *Buch Hiob*:

- 1 *Wohl gibt es einen Fundort für das Silber, / eine Stätte für das Gold, wo man es läutert.*
- 2 *Eisen holt man aus der Erde, / Gestein wird zu Kupfer geschmolzen.*
- 3 *Es setzt der Mensch der Finsternis eine Grenze; / er forscht hinein bis in das letzte, / ins düstere, dunkle Gestein.*
- 4 *Stollen gräbt ein fremdes Volk; / vergessen, ohne Halt für den Fuss, / hängt es, schwebt es, den Menschen fern.*
- 5 *Die Erde, daraus das Brotkorn kommt, / wird in den Tiefen wie im Feuer zerstört.*
- 6 *Fundort des Saphirs ist ihr Gestein, / und Goldstaub findet sich darin.*
- 7 *Kein Raubvogel kennt den Weg dahin; / kein Falkenauge hat ihn erspäht.*
- 8 *Das stolze Wild betritt ihn nicht, / kein Löwe schreitet über ihn.*
- 9 *An harte Kiesel legt er die Hand, / von Grund auf wühlt er Berge um.*
- 10 *In Felsen haut er Stollen ein, / und lauter Kostbarkeiten erblickt sein Auge.*
- 11 *Sickerbäche dämmt er ein, / verborgenes bringt er ans Licht.*
- 12 *Die Weisheit aber, wo ist sie zu finden, / und wo ist der Ort der Einsicht?*
- 13 *Kein Mensch kennt die Schicht, in der sie liegt; / sie findet sich nicht in der Lebenden Land.*
- 14 *Die Urflut sagt: Bei mir ist sie nicht. / Der Ozean sagt: Bei mir weilt sie nicht.*
- 15 *Man kann nicht Feingold für sie geben, / nicht Silber als Preis für sie wägen.*
- 16 *Nicht wiegt sie Gold aus Ofir auf, / kein kostbarer Karneol, kein Saphir.*
- 17 *Gold und Glas stehen ihr nicht gleich, / kein Tausch für sie ist Goldgerät,*
- 18 *nicht zu reden von Korallen und Kristall; / weit über Perlen geht der Weisheit Besitz.*
- 19 *Der Topas von Kusch kommt ihr nicht gleich, / und reinstes Gold wiegt sie nicht auf.*
- 20 *Die Weisheit aber, wo kommt sie her, / und wo ist der Ort der Einsicht?*
- 21 *Verhüllt ist sie vor aller Lebenden Auge, / verborgen vor den Vögeln des Himmels.*
- 22 *Abgrund und Tod sagen: / Unser Ohr vernahm von ihr nur ein Raunen.*
- 23 *Gott ist es, der den Weg zu ihr weiss, / und nur er kennt ihren Ort.*
- 24 *Denn er blickt hin bis zu den Enden der Erde; / was unter dem All des Himmels ist, sieht er.*
- 25 *Als er dem Wind sein Gewicht schuf / und die Wasser nach Mass bestimmte,*
- 26 *Als er dem Regen das Gesetz schuf / und einen Weg dem Donnergewölk,*
- 27 *Damals hat er sie gesehen und gezählt, / sie festgestellt und erforscht.*
- 28 *Doch zum Menschen sprach er: / Seht, die Furcht vor dem Herrn, das ist Weisheit, / das Meiden des Bösen ist Einsicht.*

Vieles, was wir in diesen Versen gehört haben, klingt an das Salomonische *Buch der Weisheit* an. Auch dort geht es ja immer wieder um die Suche des Menschen nach Erkenntnis und um die Göttliche Weisheit. Die Schriftstelle, welche wir eben vernommen haben, führt uns in wunderbaren Worten das Ringen des Menschen nach Erkenntnis, sein Bemühen um Einsicht, sein Forschen nach den Geheimnissen der Schöpfung auf der einen Seite, und die Unermesslichkeit aber auch die Einfachheit der Göttlichen Weisheit auf der anderen Seite vor Augen. Den hier dargestellten Gegensatz möchte ich als Leitgedanke über die nun folgenden Ausführungen stellen, und immer wieder auf diese Gedanken zurückgreifen.

Unser Thema "Grenzen des Menschlichen Erkennens" hat nicht nur Hiob oder Salomon

beschäftigt, sondern war seit frühesten Zeiten etwas, mit dem sich Menschen aller Völker und Kulturen befasst haben. Eine unabsehbare Zahl von theologischen und philosophischen Werken befasst sich mit diesem Thema, aus dem sogar eine eigene philosophische Disziplin entstanden ist, die sogenannte *Erkenntnistheorie*.

Wir wollen uns hier dem Thema ausschliesslich aus der Sicht der Mathematik zuwenden. Doch auch in diesem Teilbereich der Wissenschaft ist die Fülle der Werke, die sich mit dem Thema "Erkenntnis" befassen, unabsehbar. Bereits im Altertum findet man mathematische Fragen, die zu eigentlich philosophischen Überlegungen Anlass gaben, in welchen der Mensch sich fragen musste, was können wir eigentlich als "sichere Wahrheit" anerkennen.

Das Parallelen-Axiom: *Was ist Wahrheit ?*

Ein Blick in die Geschichte der Mathematik

Als erstes Beispiel möchte ich das sogenannte "*Parallelen-Axiom*" aus Euklids "*Elementen*" nennen – also aus dem ersten systematischen Lehrbuch der Geometrie, das aus dem 3. Jahrhundert stammt. Zuerst sollte ich sagen, was man überhaupt unter einem *Axiom* versteht: Ein *Axiom* ist eine Aussage, die man als gegeben voraussetzt, ohne sie zu beweisen, etwa weil man sie als "vollständig einleuchtend" oder "für sicher wahr" hält. Anstelle des Ausdrucks "Axiom" wird oft auch das Wort "Postulat" verwendet. Euklids Buch ist das erste mathematische Werk, in welchem versucht wurde, eine ganze Theorie -- hier die Geometrie der Ebene -- ausgehend von einigen wenigen Axiomen nur durch logische Schlussfolgerungen zu gewinnen. Dieses "*deduktive*" oder "*axiomatische*" Vorgehen wurde später zum Vorbild für alle mathematischen Theorien und ist es bis heute geblieben. Bei diesem Vorgehen bilden die Axiome sozusagen das Fundament, auf dem durch Anwendung des mathematischen Handwerks und durch rein logisches Argumentieren das ganze Gedankengebäude errichtet wird.

Doch nun zurück zum Parallelen-Axiom: Dieses Axiom besagt folgendes: Wählt man in einer Ebene eine Gerade – nennen wir sie g – und einem Punkt – nennen wir in P – ausserhalb dieser Geraden, so gibt es höchstens eine Gerade h in unserer Ebene, welche durch dem Punkt P läuft und die Gerade g nicht schneidet. Man sagt dann, die Gerade h sei zur Geraden g *parallel*. Gleichbedeutend ist es auch zu sagen, dass alle Punkte, welche auf der gleichen Seite der Geraden g liegen und von dieser den gleichen Abstand haben, auf einer einzigen Geraden liegen.

Bereits im 5. Jahrhundert warfen Arabische Mathematiker die Frage auf, ob das Parallelen-Axiom nicht bereits eine logische Folgerung der übrigen Euklidischen Axiome sei, ob also dieses Axiom gar nicht benötigt würde um die Theorie aufzubauen. Oder, anders gefragt: Ist das Parallelen-Axiom ein Grundstein, den man aus dem Fundament entfernen kann, ohne dass das darauf errichtete Gebäude der Geometrie Schaden leidet? Diese Frage war Anlass zu immer neuen Kontroversen – meist eng mit der philosophischen Frage verbunden, was es überhaupt bedeute, dass eine geometrische Aussage wahr sei.

Erst im 19. Jahrhundert wurde diese Auseinandersetzung durch die Arbeiten des russischen Mathematikers Nikolai Lobatchevski (1829), des ungarischen Mathematikers Janos Bolyai (1831) und des Italienischen Mathematikers Eugenio Beltrami (1886) zum Abschluss gebracht. Dabei fand die Mathematik auch ihren eigenen Weg, wie sie fortan mit derartigen Kontroversen verfahren wollte: Anstatt darüber zu diskutieren, ob ein mathematisches Axiom wahr sei oder nicht, entwickelte man *Modelle von Geometrien* – zum Beispiel auf gekrümmten Flächen – welche allen Euklidischen Axiomen genügten, ausser dem Parallelen-Axiom. Damit war gezeigt, dass das Parallelen-Axiom von den übrigen Euklidischen Axiomen *unabhängig* ist, also nicht aus diesen durch rein logisches Argumentieren folgt. Mit andern Worten: entfernt man den Grundstein des Parallelen-Axioms aus Euklids Axiomen, so wird das auf diesem reduzierten Fundament errichtete Gedankengebäude kleiner. Andererseits kann man anstelle des entfernten Grundsteins auch geeignete

andere Grundsteine einsetzen, erhält dann aber ganz anderes Gebäude als das ursprüngliche. Diese neuartigen Gedankengebäude nennt man *Nicht-Euklidische Geometrien*.

Es ist nicht überraschend, dass dieser neue Ansatz zeitlich mit dem Aufbau einer damals gerade entstehenden Theorie zusammenfiel, der sogenannten *Differentialgeometrie*. Es handelt sich um eine Theorie, die mit den Mitteln der schon im 18. Jahrhundert aufgeblühten *Analysis* versucht, auch gekrümmter geometrischer Objekte Herr zu werden. Dabei ist insbesondere die von Newton und Leibniz begründete *Differentialrechnung* ein unerlässliches Werkzeug.

Es hat allerdings noch zwei bis drei Jahrzehnte gedauert, bis sich die Mathematik der grundlegenden Bedeutung dieses neuen Umgangs mit Axiomen bewusst wurde: Man fragte nun nicht mehr danach, ob ein Axiom wahr sei, sondern nur ob es von andern schon vorgegebenen Axiomen unabhängig sei oder nicht. Damit wurde die an sich philosophische Frage nach der Wahrheit eines Axioms ersetzt durch eine rein "technische" Frage, die man mit den Mitteln der Mathematik selbst angehen konnte. Damit verloren die Axiome aber den Charakter von allgemein anerkannten Grundwahrheiten und konnten nach Belieben weggelassen oder hinzugenommen werden, solange die *Konsistenz*, also die Widerspruchsfreiheit der Axiome untereinander gewahrt war.

Die Axiomatische Natur der Mathematik

Erst jetzt fing man systematisch damit an, mathematische Theorien streng zu axiomatisieren. Zunächst erkannte man, dass auch Euklids Elemente nicht streng deduktiv aufgebaut waren, und Euklid mehrfach ihm selbst einleuchtend erscheinende Aussagen ohne Beweis verwendete, was eigentlich einer nicht erlaubten Hinzunahme neuer Axiome gleichkommt. Erst dem deutschen Mathematiker David Hilbert – zusammen mit seinem Französischen Berufskollegen Henri Poincaré wohl der bedeutendste Mathematiker seiner Zeit – gelang es im Jahre 1899, die Euklidische Geometrie streng axiomatisch zu begründen. Bereits zehn Jahre vorher hatte der Italienische Mathematiker Giuseppe Peano die Arithmetik streng axiomatisch begründet.

Von Hilbert stammt auch die bezeichnende Aussage, dass eine mathematische Theorie nicht "wahr, sondern sicher" sein müsse. Mit "sicher" ist dabei gemeint, dass die Theorie allein durch logische Schlussfolgerungen aus den Grundannahmen der Axiome gewonnen wurde und deshalb unanfechtbar ist, solange man bereit ist, die verwendeten Grundannahmen zu akzeptieren. Eigentlich ist das nur eine erneute Ausformulierung der Absicht Euklids. Doch bei Euklid waren die Axiome noch Aussagen, welche sich ausschliesslich auf die von ihm studierten Objekte bezogen, also auf Punkte und Geraden in der Ebene. Die neue Auffassung war, dass die Axiome nur Beziehungen zwischen Objekten festlegten, und die Objekten selbst nicht mehr definiert werden mussten. So war etwa Euklids fundamentale Definition: "Ein Punkt ist, was keinen Teil hat" überflüssig geworden. Die einzelnen Objekte -- also etwa Punkte und Geraden -- wurden nun nur noch durch ihre gegenseitigen Beziehungen charakterisiert. Dadurch kann eine axiomatisch aufgebaute Theorie in universeller Weise angewandt werden, nämlich überall dort, wo man auf Objekte trifft, deren gegenseitigen Beziehungen den Axiomen genügen.

Es ist wohl kein Zufall, dass schon etwas früher geometrische Theorien entstanden waren, bei welchen die Punkte nicht mehr Punkte, sondern Geraden oder gar höher-dimensionale Räume sind. Ich denke im ersten Fall an die vom Französischen Offizier, Ingenieur und Mathematiker Victor Poncelet begründete *Projektive Geometrie*, die er um 1812, während seiner Gefangenschaft im Napoleonischen Russland-Feldzug in den *Cahiers de Saratow* niederschrieb. Im zweiten Fall denke ich an die vom Deutschen Mathematiker und Sprachwissenschaftler Hermann Grassmann um 1860 begründete – und später nach ihm benannte – Theorie der *Grassmannschen Mannigfaltigkeiten*. Bezeichnend mag auch sein, dass beide Theorien – die heute eine zentrale Rolle in der Mathematik spielen – bei ihrem Erscheinen praktisch keinerlei Beachtung fanden und erst Jahrzehnte nach ihrer Entstehung in ihrer fundamentalen Bedeutung erkannt wurden

Beweisbarkeit statt Wahrheit

Der neue Standpunkt des streng axiomatischen Vorgehens machte schliesslich nicht einmal vor der Logik selbst halt, was – zusammen mit der vom deutschen Mathematiker Georg Cantor um 1890 begründeten Mengenlehre – wesentlich dazu beitrug, dass die Mathematik nach 1900 in eine Phase geriet, die man heute oft als die *Grundlagenkrise der Mathematik* bezeichnet. Aus dieser Krise ging dann schliesslich die *Mathematische Logik* hervor. Ich hoffe, bei späterer Gelegenheit dieses letzte Thema nochmals aufgreifen zu können.

Werfen wir einen Blick zurück auf das, was wir im Buch Hiob gelesen haben, und vergleichen wir mit dem eben Gesagten! Im unserem fast zweitausend Jahre umfassenden Streifzug durch die Mathematik erkennen wir ein “Schürfen nach Edelsteinen der Erkenntnis”, wie es im Buch Hiob beschrieben wird. Unzählige und unertwartete Schätze – nämlich ganz neue und weitreichende Theorien – kamen dabei zum Vorschein, wie es unserer Schriftstelle entspricht. Doch führte die ursprüngliche Suche nach Wahrheit schliesslich zur Einsicht, dass dem menschlichen Verstand letztlich nur die Sicherheit des logischen Argumentierens bleibt. Die Suche nach der eigentlichen Wahrheit liegt also jenseits dessen, was menschlichem Denken zugänglich ist. Die ursprüngliche Suche nach Wahrheit hat uns also an eine Grenze des menschlichen Erkennens geführt: Wenn wir etwas mit Sicherheit wissen wollen, so verlieren wir dabei sozusagen den Anspruch auf Wahrheit.

Dies entspricht ja auch der Schlussfolgerung Hiobs, dass die eigentliche Weisheit -- die Göttliche Weisheit – auch dem tiefsten Schürfen nach menschlicher Erkenntnis nicht zugänglich ist.

Bei der vorhin aufgetretenen Frage, was Wahrheit eigentlich sei, sollten wir aber auch eine andere, höchst dramatische Stelle der Heiligen Schrift nicht ausser acht lassen. Im Passionsbericht des Johannes-Evangeliums lesen wir in Kapitel 18, Vers 37 und 38:

³⁷ ***Pilatus sagte zu ihm: Also bist Du doch ein König? Jesus antwortete: Du sagst es, ich bin ein König. Ich bin dazu geboren und dazu in die Welt gekommen, dass ich für die Wahrheit Zeugnis ablege. Jeder der aus der Wahrheit ist, hört auf meine Stimme.***

³⁸ ***Pilatus sagte zu ihm: Was ist Wahrheit? Nachdem er das gesagt hatte ging er wieder zu den Juden hinaus und sagte zu ihnen: Ich finde keinen Grund, ihn zu verurteilen.***

Jesus spricht hier klar von der ewigen und göttlichen Wahrheit. Pilatus, befangen in seinem rein irdischen Denken, fragt, was denn eigentlich Wahrheit sei. Er scheint aber doch zu spüren dass da einer vor ihm steht, der mit königlicher Vollmacht von einer Wahrheit spricht, die alle irdischen Vorstellungen weit übersteigt. Dies löst bei Pilatus immerhin den Entschluss aus, etwas Gutes tun zu wollen und sich nochmals für Jesus einzusetzen. Doch wir wissen, dass es letztlich beim Wollen blieb. Pilatus hatte seinen Geist der göttlichen Wahrheit zu wenig geöffnet, um aus ihr die Kraft zu schöpfen, seine gute Absicht auch umzusetzen. Wie oft handeln wir alle so wie Pilatus? Weil wir die göttliche Wahrheit allzu irdisch auffassen, schöpfen wir aus ihr nicht die Kraft, das Gute auch wirklich zu tun. Und so scheint es mir auch mit jeder noch so klugen menschlichen Erkenntnis zu sein: Wenn sie sich nicht mit der göttlichen Wahrheit verbindet, also mit der göttlichen Weisheit, das heisst mit der Absicht, Gottes Willen zu tun, so kann sie dem Guten nicht dienen. Die vielen schlechten Früchte, die aus für sich genommen grossartigen wissenschaftlichen Entdeckungen hervorgegangen sind, belegen dies klar.

Heisst das nun, dass die Wissenschaft und speziell die Mathematik, uns nicht zum Guten und nicht zu Gott hin führen kann? Anstelle einer direkten Antwort will ich lieber über zwei kleine Erlebnisse berichten: Eine Zeit lang traf ich mich mit einigen unserer Doktorierenden wöchentlich zum Gebet und zur Schriftlesung in meinem Büro. Eine der damaligen Doktorandinnen – sie ist heute Mathematik-Dozentin an der Zürcher Hochschule Winterthur – dankte bei unseren Gebeten Gott jedesmal für ***“das schöne Geschöpf der Mathematik.”*** Das zweite Erlebnis spielte in Vietnam, wo einer meiner ehemaligen jungen Vietnamesischen Mitarbeitern einen zu Gast weilenden Kollegen aus Japan fragte, was ihm an der Mathematik am besten gefalle. Die Antwort meines (wohl Buddhistischen) Japanischen Kollegen war: ***“Ich kann dabei sehen, wie schön Gott denkt.”***

Die Kreiszahl pi: Sind die Zahlen von Gott geschaffen ?

Die Faszination des Kreises

Ein weiteres Beispiel aus der Mathematik, das seit dem Altertum immer wieder die Menschen fasziniert hat, ist die *Kreiszahl pi* – also das Verhältnis zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises. Von der Schule her wissen wir, dass pi ungefähr den Wert 3,14 hat.

Schon in der Antike tauchte das Problem auf, „den genauen Wert von pi zu bestimmen“. Tatsächlich sind schon in jener Zeit zahlreiche *Näherungswerte* für pi angegeben worden. Nennen möchte ich hier nur den Näherungs-Bruchwert 22/7, den wohl einige von Ihnen kennen. Für praktische Anwendungen ist dieser Wert in vielen „Alltagsfällen“ weitaus genügend. Für die Astronomie, die Physik und viele technische Anwendungen ist er allerdings nicht ausreichend genau. Dieser Näherungsbruch erlangte aber auch von der Zahlensymbolik her eine gewisse Aufmerksamkeit: Der Zähler 22 unseres Bruches kann ja als $1 + 3 \times 7$ geschrieben werden und der Nenner als 1×7 . Niemand wird leugnen, dass den dabei auftretenden Zahlen 1, 3 und 7 eine besondere symbolhafte Bedeutung zukommt. Ich möchte es Ihnen, liebe Hörerinnen und Hörer überlassen, sich selbst dazu Ihre Gedanken zu machen.

Erwähnen möchte ich hier auch eine Textstelle aus dem *Ersten Buch der Könige*. In Kapitel 7, Vers 23 lesen wir über die durch Salomon veranlasste Ausstattung des Tempels in Jerusalem:
²³ *Dann machte er das „Meer“. Es wurde aus Bronze gegossen und mass zehn Ellen von einem Rand zum anderen; es war völlig rund und fünf Ellen hoch. Eine Schnur von dreissig Ellen konnte es rings umspannen.*

Heisst das nun, das bei diesem völlig runden Meer das Verhältnis von Umfang und Durchmesser 30/10, also 3 betrug, sodass das Alte Testament für die Zahl pi den Wert 3 angibt? Doch lesen wir weiter. In Vers 26 steht nämlich:

²⁶ *Die Wand des Meeres war eine Handbreit dick. Sein Rand war wie der Rand eines Bechers geformt, einer Lilienblüte gleich...*

Damit hatte das Meer also Kelchform, und damit eine Art *Taille*, und nahm seinen grössten Durchmesser oben am Rand an. Zur Bestimmung des Umfangs wurde das Meer wohl natürlicherweise mit einer Schnur um die Taille umspannt, währendem zur Bestimmung des Durchmessers eine Schnur quer über den oberen Rand gespannt wurde. So wäre es möglich, dass die Länge der um die Taille gelegten Schnur den – im Vergleich zum Durchmesser zu kleinen -- Wert von 30 Ellen annahm. Es bleibt nun eine kleine Rechenaufgabe für Sie, liebe Hörerinnen und Hörer: Wieviele cm betrug der Durchmesser des Meeres an der Taille ? Die im Tempel benutzte Elle war die sogenannte *Königselle* oder *Cubitus* und mass 52.5 cm. Als Näherungswert für pi dürfen Sie 3.14 verwenden.

Im letzten Dezember hatte ich anlässlich einer Mathematik-Konferenz in Hanoi beim Frühstück ein Gespräch zum obigen Thema mit meinem Amerikanischen Kollegen Gennady Lyubeznik. Gennady ist orthodoxer Jude und kennt die hebräische Thora – also unser Altes Testament – sehr gut. Ich fragte ihn um seine Meinung zum Umfang/Durchmesser-Problem des bronzenen Meeres. Seine Antwort: Das Meer war in Grundriss überall gleichmässig rund, wobei in der Mathematik dem Wort „rund“ das Wort „gekrümmt“ entspricht. Der Grundriss war also – mathematisch gesprochen – eine sogenannten *glatten Kurve*. Damit könnte er eine *Ellipse* mit grösstem Durchmesser 10 Ellen gewesen sein. Der kleinste Durchmesser der Ellipse, nennen wir ihn y, war so gewählt, dass der Umfang der Ellipse 30 Ellen betrug.

Ich bin jetzt versucht, Ihnen, liebe Hörerinnen und Hörer die Aufgabe zu stellen, den kleinsten Ellipsendurchmesser zu bestimmen. Wenn Sie das tun möchten, muss ich allerdings eine Warnung vorausschicken. Man kann nämlich den genauen Umfang einer Ellipse nicht mit Hilfe einer einfachen Formel aus dem grössten Durchmesser x und dem kleinsten Durchmesser y bestimmen.

Man muss dazu vielmehr den Grenzwert einer sogenannten *unendlichen Reihe* berechnen, was unsere Aufgabe schwierig macht. Es gibt allerdings einfache *Näherungsformeln* für den Ellipsenumfang -- also Formeln, die zwar relativ einfach sind, aber nur ungefähre Werte liefern. Eine dieser Formeln gibt für den Umfang den ungefähren Wert "pi mal die Quadratwurzel aus dem Produkt von x mit y" an. Vielleicht wollen Sie es mit dieser Formel versuchen...

Die Natur der Kreiszahl pi

Bestimmen kann man pi eigentlich nur als Grenzwert, das heisst durch die Berechnung von Zahlen, "die pi so nahe kommen wie man will, ohne den wahren Wert je zu erreichen". Dies wurde auch schon in der Antike versucht. Man kann dazu etwa zuerst den Umfang eines Quadrates berechnen, dessen 4 Ecken auf einem Kreis vom Durchmesser 1 liegen. Dann berechnet man den Umfang eines regelmässigen Achtecks dessen Ecken auf unserem Kreis liegen; dann den Umfang eines regelmässigen Sechzehnecks usw. Man verdoppelt also bei jedem Schritt die Eckenzahl. Es ist einleuchtend, dass die Umfänge unserer Vielecke dann immer weniger vom Umfang pi unseres Kreises abweichen, denn diese Vielecke schmiegen sich ja unserem Kreis immer besser an. Man gelangt zum Beispiel nach 10 Schritten bis zum regulären 2048-Eck, dessen Umfang bis zu 5 Stellen nach dem Komma mit dem Kreisumfang pi übereinstimmt. Wichtig ist, dass die Berechnung der Umfänge unserer Näherungs-Vielecke zwar sehr aufwändig ist, aber bereits mit der an der Sekundarschule gelernten Mathematik verstanden und bewältigt werden kann. Heute steht uns für die Berechnung der vielen auftretenden Quadratwurzeln natürlich der Taschenrechner oder der Computer zur Verfügung, währenddem früher viel rechnerische "Handarbeit" erbracht werden musste.

Seit dem 18. Jahrhundert wurden mit Hilfe der Analysis viele andere Grenzwert-Darstellungen für pi gefunden, was zu effizienteren -- also schnelleren -- näherungsweise Berechnungsverfahren führte. So konnte man die Zahl pi schon um 1770 bis auf 10 Stellen nach dem Komma berechnen. Heute, im Zeitalter der Hochleistungscomputer lässt sich pi bis auf hunderte von Millionen Stellen nach dem Komma berechnen, wobei der Rekord immer höher geschraubt wird. Diese gigantischen Berechnungen haben natürlich keinerlei direkten Anwendungsnutzen. Sie sind aber als Test-Feld für neue *numerische Näherungsmethoden* und neue Computer von einiger Bedeutung.

Ein weiteres mit pi zusammenhängendes Problem ist die Frage nach der "*Quadratur des Kreises*". Bei diesem schon in der Antike diskutierten Problem geht es darum, mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus dem Durchmesser eines Kreises ein Quadrat zu konstruieren, dessen Fläche gleich gross ist, wie die des Kreises. Das Problem ist gleichbedeutend mit der Frage, ob man aus einer Strecke mit Hilfe von Zirkel und Lineal eine neue Strecke derart konstruieren kann dass das Verhältnis der Längen der beiden Strecken genau pi beträgt. Interessanterweise ist dieses Problem eigentlich eine Frage nach der Natur der Zahl pi. Der grosse Deutsche Mathematiker Carl Friederich Gauss hat nämlich als 19-Jähriger im Jahre 1795 eine Konstruktion für das regelmässige 17-Eck gefunden und alle (Prim-)Zahlen charakterisiert die als Eckenzahl eines mit Zirkel und Lineal konstruierbaren regelmässigen Vielecks vorkommen. Gleichzeitig bemerkte, er, dass man nur dann eine Strecke aus einer vorgegebenen mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, wenn das Längenverhältnis der beiden Strecken eine Zahl von einem ganz bestimmten Typ ist. Es muss sich nämlich um eine Zahl handeln, die man aus den ganzen Zahlen durch wiederholtes (aber nur endlich vielfaches) Durchführen der vier arithmetischen Grundoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) und des Ziehens von Quadratwurzeln gewinnen kann.

Damit war das Problem der Quadratur des Kreises auf die Frage reduziert, ob die Zahl pi vom eben beschriebenen Typ sei. Erst im Jahre 1882 wurde diese Frage durch den Deutschen Mathematiker Ferdinand Lindemann entschieden. Lindemann zeigte mit einem sehr anspruchsvollen Beweis, dass die Zahl pi eine sogenannte *transzendente Zahl* ist. Das heisst, dass pi nicht Lösung einer sogenannten *algebraischen Gleichung* mit ganzzahligen Koeffizienten ist.

Deshalb kann man π aus den ganzen Zahlen nicht einmal gewinnen durch wiederholtes Anwenden der vier Grundoperationen und das Ziehen von Wurzeln beliebiger Ordnung -- also erst recht nicht von Quadratwurzeln. Damit war gezeigt, dass die angestrebte Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist. Gleichzeitig war aber auch die schon in der Antike gehegte Hoffnung zerschlagen, man könne π durch einen geschlossenen Term darstellen, in dem nur Brüche und Wurzeln vorkommen. Der Ruhm Lindemanns war damals so gross, dass die Zahl π die *Lindemannsche Zahl* genannt wurde, eine Bezeichnung, die sich in Deutschen Schulbüchern längere Zeit gehalten hat. Heute ist diese Bezeichnung allerdings nicht mehr gängig.

Mehr Glück hatte da der aus Basel gebürtige grosse Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783), der allerdings immer im Ausland gewirkt hat, nämlich in St. Petersburg und Berlin. Die nach ihm benannte Euler-Zahl – die Basis der natürlichen Logarithmen, mit dem ungefähren Wert 2,72, und meist mit e bezeichnet – durfte ihren Namen beibehalten. Auch die Euler-Zahl ist übrigens transzendent, was allerdings auch erst im Jahre 1873 durch den Französischen Mathematiker Charles Hermite gezeigt wurde.

Grenzen unseres Wissens

Werfen wir auch von diesem zweiten Exkurs einen Blick auf unsere Schriftstelle aus dem Buch Hiob. Gleich zweimal hat hier das tiefe Schürfen nach den verborgenen Schätzen menschlichen Wissens an die Grenzen der menschlichen Erkenntnis geführt.

Zu einem handelt es sich um die gewonnene Einsicht, dass es mathematische Probleme gibt, die zwar sehr präzise gestellt sind, aber grundsätzlich unlösbar sind – wie die oben genannte Quadratur des Kreises. Dabei kann es aber sehr schwierig sein, die Unlösbarkeit eines Problems wirklich zu beweisen, wie dies auch bei der Quadratur des Kreises der Fall war. Hier konnte ja erst mit der bereits sehr hoch entwickelten Mathematik des ausgehenden 19. Jahrhunderts die Unlösbarkeit des fast 2000 Jahre alten Problems bewiesen werden. Das hat meines Erachtens auch Gleichnis-Charakter: Wie oft müht sich der Mensch fieberhaft damit ab, ein Problem zu lösen, das “von höherer Warte aus gesehen” unlösbar ist. Auch manche Dinge, nach welchen die Wissenschaft heute mit grossen Aufwand sucht, könnten ja von dieser Art sein, wie etwa in der Physik die kontrollierte Kernfusion oder die vollständige Entschlüsselung der Geheimnisse der Elementarteilchen. Vielleicht wird aber auch hier der wissenschaftliche Fortschritt selbst einmal dazu führen, diese Probleme – mindestens in ihrer heutigen Form – als unlösbar zu erkennen. Denn gerade dort, wo der Mensch danach strebt, das Tun Gottes in der Schöpfung erkennen zu wollen, könnte er schliesslich zur gleichen Einsicht gelangen, wie sie Kohelet in Kapitel 8, Vers 16 und 17 beschreibt:

¹⁶ Als ich mir vorgenommen hatte zu erkennen, was Wissen wirklich ist, und zu beobachten, welches Geschäft eigentlich auf der Erde getätigt wird, da sah ich ein, dass der Mensch, selbst wenn er seinen Augen bei Tag und bei Nacht keinen Schlaf gönnt, das Tun Gottes in seiner Ganzheit nicht wiederfinden kann, das Tun, das unter der Sonne getan wurde..

¹⁷ Deshalb strengt der Mensch, danach suchend, sich an und findet es doch nicht wieder. Selbst wenn der Gebildete behauptet, er erkenne – er kann es doch nicht wiederfinden.

Die Natur der Zahlen

Eine andere Grenze des menschlichen Erkennens wird mit der Frage nach der Natur der Kreiszahl π aufgezeigt. Hier kommen wir ebenfalls mit einem Thema in Berührung, welches die Menschen seit dem Altertum immer wieder beschäftigt hat: das Wesen Zahlen. Da finden wir schon früh die philosophische Frage, ob die Zahlen von Gott geschaffen, oder Produkte des menschlichen Geistes sind. Oder sind nur gewisse Zahlen von Gott geschaffen, etwa die sogenannten *natürlichen Zahlen*, das heisst die Zahlen 0,1,2,3,..., die wir zum Zählen verwenden? Die weiteren Zahlen wären dann vom Menschen stufenweise aus diesem “Grundmaterial” geschaffen worden, zunächst

etwa die *negativen ganzen Zahlen* wie $-1, -2, -3, \dots$, dann die *rationalen Zahlen*, das heisst die Brüche, dann alle *reellen Zahlen* und schliesslich die *komplexen Zahlen*. Diese Ansicht hat der Deutsche Mathematiker Leopold Kronecker (1823-1891) vertreten mit der Aussage: "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht; alles andere ist Menschenwerk."

Tatsächlich lernen wir ja in der Schule und am Gymnasium die Zahlen gemäss dem oben beschriebenen schrittweisen Vorgehen kennen. Der Aufbau des gesamten Zahlensystems aus den natürlichen Zahlen lässt sich in der Tat in vollkommen logischer Strenge vollziehen, was heute üblicherweise in den ersten Wochen eines Mathematik-Studiums getan wird. Man gelangt bei diesem Aufbau -- ins Bildliche übertragen -- schrittweise von den mit $0, 1, 2, \dots$ markierten Punkten des (beidseitig unbegrenzten) "Zahlenmassstabs" zu allen Punkten dieses Massstabs, also zur Gerade aller reellen Zahlen – der sogenannten *Zahlengeraden* – und schliesslich erweitert man diese Zahlengerade noch zur *Ebene der komplexen Zahlen*. Diese Vorgehensweise spricht also für Kroneckers Ansicht.

Andreseits hat der schon früher genannte Französische Mathematiker Henri Poincaré gezeigt, dass man aus einer mit sehr wenig Struktur versehenen Geraden (sozusagen ein Massstab ohne die markierten Punkte $0, 1, 2, \dots$) in logisch strenger Weise die natürlichen Zahlen konstruieren kann – damit also die Punkte $0, 1, 2, \dots$ auf dem Massstab findet. Man könnte deshalb Kronecker mit der Aussage entgegentreten, dass "Gott zuerst die Gerade geschaffen habe, und alles andere Menschenwerk sei", speziell auch die ganzen Zahlen.

Natürlich sind wir mit der Gegenüberstellung dieser beiden Auffassungen an den Rand des rein Anekdotes geraten. Aber wir haben ein Thema berührt, das die Erkenntnistheorie immer wieder beschäftigt hat, und über das sehr viel geschrieben und diskutiert wurde: Sind Mathematiker Entdecker oder Erfinder? Genauer gefragt: Werden in der rein gedanklichen Welt der Mathematik nur Dinge entdeckt, die schon vorher bestanden haben, oder werden die Objekte der Mathematik vom Menschlichen Geist geschaffen? Die Frage kann auch differenzierter gestellt werden, indem man nach mathematischen Objekten fragt, die "schon von Anfang an" oder – in der Sprache des Deutschen Philosophen Immanuel Kant (1724-1804) -- "a priori" gegeben waren, und solchen, die daraus vom menschlichen Geist geschaffen wurden. Dass man auf diese Fragen keine allgemein verbindliche Antwort erwarten kann, wird durch die abweichenden Standpunkte von Kronecker und Poincaré ziemlich einleuchtend belegt.

Persönlich beschäftige ich mich deshalb nicht mit diesen philosophischen Fragen. Vielmehr bin ich Gott einfach dankbar, dass ich in diesem schönen und faszinierenden Gebiet der Mathematik arbeiten darf; dass er mir dadurch gezeigt hat, wie er im Menschen die Liebe zu einer abstrakten geistigen Welt wecken kann, die den meisten Menschen kalt und leblos erscheinen mag; dass er mir mit der Mathematik aber auch ein "Vehikel" geschenkt hat, das mich mit vielen Menschen in Kontakt brachte, sei es als Lehrer, als Arbeits- und Forschungskollege, als fachlicher Berater oder ganz einfach als Freund.

Ordnung und Chaos: Ist alles nur Zufall?

Die Anwendungen der Mathematik: die Welt in Formeln fassen

Unsere dritte Exkursion soll uns in den Bereich der Anwendungen der Mathematik führen. Vorausschicken möchte ich einige allgemeine Gedanken über das Verhältnis zwischen der Mathematik und ihrer Anwendung in der materiellen Welt. Wie schon früher gesagt, spielt sich die mathematische Tätigkeit primär in einer rein gedanklichen Welt ab, wobei man allerdings eingestehen muss, dass die Möglichkeit, etwas niederzuschreiben, unverzichtbar ist. Dies entspricht dem im Grunde übertriebenen Ausspruch, dass "die Mathematiker mit Papier und Bleistift Welten

erschaffen“, der aber doch etwas von der Faszination wiedergibt, welche der Mathematik inne wohnt. Mein zweiter Sohn Simon scheint davon schon als kleiner Junge etwas geahnt zu haben: Als ich einmal versuchte eine sogenannte *Boy'sche Fläche* (in der Sprache der Mathematik: ein *eingebettetes Modell der projektiven Ebene*) zu skizzieren, schaute er mir zu und fragte etwas altklug: “Zeichnest Du wieder Universen?”

Ich möchte den vorhin ausgesprochenen allgemeinen Gedanken noch präzisieren: Die Mathematik untersucht nicht direkt die Objekte der realen materiellen Welt, sondern Denkmodelle, welche diese Objekte beschreiben. Diese Denkmodelle sind in der Sprache der Mathematik formuliert, etwa durch sogenannte *Differentialgleichungen* oder andere mathematische Objekte. Aus der Anwendungspraxis stammende Probleme werden so in rein mathematische Probleme umgesetzt. Diese mathematischen Probleme werden dann gelöst, die Lösungen untersucht und das Ganze durch “Rückübersetzung” aus dem Modell in die reale Wirklichkeit übertragen. In einem etwas gewagten Vergleich könnte man also sagen, die Mathematiker seien die Dichter unter den Wissenschaftlern und Ingenieuren, denn sie befassen sich nicht direkt mit der realen Welt, sondern “schreiben über diese Gedichte”, ähnlich wie es Dichter tun. Die Gedichte der Mathematiker müssen allerdings einer sehr strengen Grammatik folgen, eben den Gesetzen der Mathematik, was in der eigentlichen Dichtkunst – besonders heute – kaum mehr eine Entsprechung hat.

Beispiele von Anwendungen der Mathematik im Alltag

Die meisten Menschen erachten Gedichte als etwas zwar Schönes, das aber von geringem praktischen Wert ist. Bei den Gedichten der Mathematik ist es vielleicht eher umgekehrt: Nur wenige Menschen erfreuen sich am Wohlklang der mathematischen Poesie, aber deren praktische Bedeutung ist meist unbestritten. Allerdings kann man in Gesprächen immer wieder feststellen, dass das Ausmass der Bedeutung der “Schlüsseltechnologie Mathematik” den meisten Menschen nicht bewusst ist. Dies hängt damit zusammen, dass die Mathematik in den Objekten des Alltags meist “unsichtbar eingebaut” ist. Ich möchte dazu nur ein paar wenige Beispiele aus dem Alltag nennen:

Sind Sie heute schon mit dem Tram oder der Bahn gefahren? Sie werden dabei kaum bemerkt haben, dass in die Leistungssteuerung der Lokomotive oder des Triebwagens ein beeindruckendes Paket an *Differentialgleichungen* und *Integraltransformationen* eingebaut ist.

Vielleicht waren Sie aber mit dem Auto unterwegs und hatten Ihr “GPS”-Gerät eingeschaltet, zu dessen Betrieb eine rechte Portion *Differentialgeometrie* nötig ist, insbesondere weil auch die nach der *allgemeinen Relativitätstheorie* vorhandene *Raumkrümmung* berücksichtigt werden muss.

Oder haben Sie den Börsenteil Ihrer Zeitung angeschaut? War Ihnen dabei bewusst, dass die Finanzprodukte heute mit anspruchsvollen mathematischen Methoden bewertet werden, zum Beispiel mit Hilfe von *Stochastischen Differentialgleichungen*?

Wenn Sie am Bankomaten oder am Postomaten Geld bezogen haben, so haben Sie sich auf die Sicherheit Ihres PIN verlassen, und damit der *Mathematischen Kryptographie* vertraut, welche heute sehr fortgeschrittene Methoden verwendet, etwa aus der Theorie der *Elliptischen Kurven*.

Vielleicht haben Sie vor Kurzem den Uetliberg-Turm bestiegen, eventuell sogar mit Ihren Kindern oder Enkeln, ohne dabei daran gedacht zu haben, dass die Stabilität dieses Turmes gegenüber Wind-Böen wohl einmal zuverlässig mit der *Methode der Finiten Elemente* berechnet werden musste.

Das Licht werden Sie heute auch sicher mehrmals ein- oder ausgeschaltet haben, ohne zu bedenken, dass die heute europaweit verbundene Elektrizitätsversorgung mit Hilfe von sehr umfangreichen Berechnungen aus der *Netzwerktheorie* überwacht und gesteuert wird.

Ich hoffe, dass Sie nie mit einem Computertomographen in Kontakt kamen und es auch nie kommen werden. Trotzdem erwähne ich, dass dieses Gerät nur dank der Theorie der sogenannten *Radon-Nikodym-Transformationen* betrieben werden kann.

Und schliesslich das Wetter... Wie ist es denn heute? Doch davon später...

Wir können also wohl sagen, dass es heute unausweichlich ist, auf Schritt und Tritt mit Anwendungen der Mathematik in Berührung zu kommen, auch wenn uns dies in den meisten Fällen gar nicht bewusst wird.

Fehlerhafte Anwendungen

Ich habe jetzt über erfolgreiche Anwendungen der Mathematik geredet, und hoffe, dass Sie mir diese Propaganda für mein Tätigkeitsgebiet nicht übel nehmen. Nun möchte ich aber auch über Situationen reden, in welchen die Anwendungen der Mathematik zu Fehlleistungen oder gar Unglücksfällen führen kann, was leider auch immer wieder vorkommt. Hier muss man natürlich verschiedene Fehlerquellen unterscheiden.

Als erstes kann ein mathematisches Modell an sich falsch gehandhabt werden. Es werden also bei der Anwendung sogenannte *Rechen-Fehler* gemacht, wobei dies heute natürlich normalerweise *Programmierfehler* oder *Falscheingaben* in den Computer sind. Diese Fehlerquelle kann durch gute Fachkenntnis der Beteiligten und mit gewissenhaften Kontrollen weitgehend eliminiert werden.

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, dass das Modell zwar an sich korrekt gehandhabt wurde, dass es aber in Tat und Wahrheit die Objekte, die es hätte beschreiben sollen, falsch modellierte. Das könnte etwa der Fall sein, weil im Modell eine Gleichung vorkommt, die in Wirklichkeit gar nicht erfüllt ist. Diese Art von Fehlern zu vermeiden, ist in der Regel eine grosse Herausforderung für die beteiligten Ingenieure und Wissenschaftler. Mathematischen Modelle stellen die Wirklichkeit fast immer vereinfacht dar, weil sonst entweder die Berechnungen zu umfangreich oder die Erhebung der Ausgangsdaten zu aufwändig wird. In allen Anwendungsgebieten entwickelt sich mit der Zeit eine Art "Erfahrungskultur" über die erlaubten Anwendungsbereiche von Modellen, d.h. der Situationen, in welchen die mit Hilfe eines bestimmten Modells errechneten Werte nicht zu sehr verschieden sind den wirklichen Werten. Es gehört aber in manchen Fällen zur "hohen Schule der Ingenieurkunst", mit Sachverstand und Erfahrung abzuschätzen, ob ein bestimmtes Modell in gewissen Grenz-Situationen noch angewendet werden kann, oder ob man nicht besser nach einem anderen Modell sucht.

Sichere Prognose unmöglich !

Die dritte Möglichkeit besteht darin, dass das Modell die Wirklichkeit sehr gut modelliert und richtig gehandhabt wird, aber trotzdem keine sichere Voraussage der realen Geschehnisse erlaubt. Genau mit diesem dritten Fall wollen wir uns befassen.

Dazu beginne ich mit dem *Gravitationsgesetz* das vom Englischen Physiker und Mathematiker Isaac Newton im Jahre 1687 gefunden wurde. Dieses Gesetz besagt, dass zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 , die voneinander den Abstand r haben, sich gegenseitig mit einer Kraft der Grösse $p = (G \times m_1 \times m_2) : r^2$ anziehen. Dabei ist G eine *universelle Konstante*, das heisst nicht von den beiden Körpern abhängig: die sogenannte *Gravitationskonstante*. Wir betrachten nun auch das ebenfalls von Newton entdeckte *Kraftwirkungsgesetz*. Dieses besagt, dass ein Körper der Masse m durch die Einwirkung einer Kraft der Grösse p eine Beschleunigung der Grösse $a = p:m$ erfährt. Durch Kombination des Gravitationsgesetzes und des Kraftwirkungsgesetzes erhält man ein System von Differentialgleichungen, welches die Bewegung von zwei Körpern unter dem gegenseitigen Einfluss der Gravitation beschreibt. Kennt man den genauen Ort und die genaue Geschwindigkeit der beiden Körper zu einer bestimmten Anfangszeit, so erlauben es diese Differentialgleichungen, den genauen Standort und die genaue Geschwindigkeit der beiden Körper für alle Zeiten vorauszubestimmen. Mit Hilfe dieser neuen Theorie gelang es Newton, die drei in den Jahren 1609 und 1616 vom Deutschen Astronomen Johannes Kepler durch Beobachtung gefundenen *Bewegungsgesetze der Planeten* rein rechnerisch, bis auf kleine Abweichungen, zu bestätigen. Es ist nicht erstaunlich, dass diese wissenschaftliche Leistung eine eigentliche

Revolution in der Physik auslöste, mit dem Bestreben, letztlich die ganze Natur durch einige wenige universelle und mathematisch formulierte Grundgesetze zu erfassen.

Sogar die kleinen Abweichungen zwischen den Newtonschen Berechnungen und den Keplerschen Beobachtungen, konnte man später mit Methoden der sogenannten *Störungsrechnung* erklären. Sie resultierten im Wesentlichen aus der Störung der Gravitationskraft zwischen der Sonne und jedem Planeten durch den Einfluss der übrigen (weit entfernten) Planeten.

Niemand konnte es den Physikern und Mathematikern verdenken, auch gleichzeitig drei (oder mehr) Körper auf die Reise zu schicken, die entsprechenden Differentialgleichungen aufzustellen und deren Lösungen zu diskutieren. Auch hier sind aus den genauen Positionen und Geschwindigkeiten zu einer bestimmten Anfangszeit die Positionen und Geschwindigkeiten aller beteiligter Körper für alle spätern Zeiten genau vorausbestimmt. Allerdings können hier die Bahnen der einzelnen Körper nicht mehr durch sogenannte *elementare Funktionen* beschrieben werden, sodass man sich mit Näherungsrechnungen begnügen muss. Fundamentalere aber ist die Tatsache, dass in diesem Fall das System der Differentialgleichungen nicht mehr *stabil* ist: Es kann vorkommen, dass die kleinste Änderung der Anfangsposition oder der Anfangsgeschwindigkeit zu einem völlig andern Bahnverlauf führt. Wir haben es also mit einem sogenannten *instabilen dynamischen System* zu tun.

Instabilität und Katastrophen

Das eben beschriebene Verhalten solcher Systems nennt man *deterministisch-chaotisch*. Der Wortteil deterministisch besagt, dass der genaue Anfangszustand des Systems die spätern Zustände für alle Zeiten genau festlegt. Der Wortteil *chaotisch* deutet an, dass sich das System bei ganz minimalen Änderungen des Anfangszustandes völlig anders verhalten kann.

Insbesondere trifft diese Situation also auf die Bewegung von drei, und erst recht von mehr als drei Planeten zu. Das heisst unser Planetensystem ist in diesem Sinne *instabil*. Theoretisch könnte der Aufschlag eines winzig kleinen Meteoriten die Erde oder einen andern Planeten aus der Bahn werfen, und schliesslich das ganze Sonnensystem durcheinanderwirbeln. Warum ist dies aber bis heute nicht eingetroffen? Zu Beginn des 20. Jahrhunderts hat der schon genannte Französische Mathematiker Henri Poincaré eine fundamentale Arbeit über die *Stabilität dynamischer Systeme* geschrieben und auch Evidenz dafür gegeben, warum unser Sonnensystem bis jetzt bestehen konnte. Es zeigt sich nämlich, dass es auch in einem instabilen System Zustände gibt, in welchen kleine Störungen auch später nie zu grossen Abweichungen führen. Ja, in besonders günstigen Zuständen kann es sogar so sein, dass sich das System nach einer kleinen Störung allmählich wieder dem ungestörten Zustand nähert, allerdings vielleicht ohne in jemals wieder ganz zu erreichen. Solche Systemzustände heissen *stabil*. Durch umfangreichen Berechnungen zeigte Poincaré, dass der Verlauf der Planetenbahnen darauf hinweist, dass sich das Sonnensystem tatsächlich insgesamt in einem stabilen Zustand befindet. Ausnahme sind die Planetoïdenbahnen, die in einem "instabilen Gürtel" verlaufen, was vermutlich auch dazu geführt hat, dass diese vormaligen kleinen Planeten auf ihrer "Schüttelbahn" nach und nach auseinanderbrachen. Poincarés theoretisch fundierten Stabilitätsaussagen über unser Planetensystem sind mittlerweile durch umfangreiche Computersimulationen nach-bestätigt worden.

Die Untersuchung der Bewegung von drei oder mehr Körpern wird meist als *Dreikörper-* oder *Mehrkörperproblem* angesprochen. Auch heute noch sind diese Probleme der Gegenstand umfangreicher mathematischer Untersuchungen.

Systeme, die sich deterministisch-chaotisch verhalten, treten in der Praxis aber auch sonst öfter auf. Machen wir uns nochmals klar, was in solchen Systemen geschieht: Wenn der Zustand des Systems zu einer bestimmten Anfangszeit genau bekannt ist, so ist er für alle spätern Zeitpunkte genau festgelegt. Eine minime Veränderung des Anfangszustandes kann aber dazu führen, dass sich das System schon nach kurzer Zeit ganz anders verhält. Wollen wir nun ein solch deterministisch-

chaotisches Modell praktisch verwenden, um Vorhersagen zu machen, so ergibt sich folgendes Problem: Wir können die Werte, die den Anfangszustand beschreiben, niemals ganz genau kennen. Wenn wir aber in unser Modell Anfangswerte eingeben, die nur um sehr wenig falsch sind, so könnte dieses ein Verhalten voraussagen, das völlig anders ist, als das aus den richtigen Anfangswerten resultierende. Fazit: Es könnte unmöglich, oder mindestens sehr problematisch sein, mit diesem Modell brauchbare Vorhersagen zu machen.

Ein deterministisch-chaotisches System verhält sich demnach in vielen Fällen “unberechenbar” und scheint “vom blinden Zufall” beherrscht zu sein. In Wirklichkeit ist beides aber nur die Folge davon, dass wir in keinem Moment den Zustand des Systems mit ausreichender Genauigkeit feststellen können. In der Praxis werden deshalb deterministisch-chaotische Systeme oft mit Methoden der *Stochstik* und *Wahrscheinlichkeitstheorie* behandelt. Man betrachtet dann sozusagen die Messungenauigkeiten der Anfangswerte als zufällige Abweichungen und begnügt sich mit “wahrscheinlich” eintreffenden Vorhersagen. Dadurch werden die Modelle unempfindlicher gegen kleine Messfehler der Anfangswerte, erlauben aber in der Regel nur noch kurzfristige Prognosen.

Vertrauensfrage: Wann haben Sie zum letzten Mal unerwartet Ihren Regenschirm aufspannen müssen? Dann sind Sie vermutlich unschuldiges Opfer des eben beschriebenen Phänomens geworden. Tatsächlich verhält sich das Wetter deterministisch-chaotisch. Trotz Verbesserungen durch immer genauer bestimmte Anfangswerte (d.h. durch immer mehr und immer bessere Wetter-Satelliten) und immer genauere Berechnungen (d.h. durch immer leistungsfähigere Computer) bleibt das Wetter, was es halt schon immer war: ziemlich unberechenbar.... Da das Wetter ein deterministisch-chaotisches Verhalten zeigt, ist also nicht von der Hand zu weisen, was ein Amerikanischer Metereologe einmal gesagt hat: “Ein Schmetterling, der sich am Amazonas auf einer Blüte niederlässt, könnte dadurch in Nebraska einen Wirbelsturm auslösen”. Die Metereologen verwenden natürlich ausgiebig die schon vorhin erwähnten Methoden der Stochastik und der Wahrscheinlichkeitstheorie, die sie gerne als *Monte-Carlo Methoden* bezeichnen. Dies nimmt Bezug auf das *Roulette-Spiel*, das ja den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit unterworfen ist .

In manchen Systemen ist das deterministisch-chaotische Verhalten auch verbunden mit sogenannten *Katastrophen*, das heisst mit unvermittelten, sprunghaften Zustandsänderungen. Der mathematische Katastrophenbegriff ist alledings “wertfrei”: Wenn man Ihnen ohne Vorankündigung morgen den Lohn oder die Rente verdoppelt, ist das im Sinne der Mathematik eine Katastrophe, wohl aber kaum im landläufigen Sinn... Wenn Sie aber bei Katastrophen in deterministisch-chaotischen Systemen an die Börse gedacht haben, so liegen sie richtig: Es handelt sich um eines der vielen Beispiele zu diesem Phänomen, wobei in diesem Fall die Katastrophe üblicherweise auch im landläufigen Sinne eine Katastrophe ist.

Wir sind nicht allwissend

Mit den deterministisch-chaotischen Systemen sind wir durch die Mathematik wieder an eine neuartige Grenze des menschlichen Erkennens geführt worden. Etwas burschikos könnte man im Hinblick auf solche Systeme sagen: “Wenn ich in einem einzigen Moment allwissend wäre (also den Zustand des Systems vollständig kennen würde), so bliebe ich es für alle Zeiten (weil dann der Zustand des Systems für immer eindeutig festgelegt ist)”. Das Problem ist nur, dass wir auch mit den besten wissenschaftlichen Methoden in keinem Moment den Zustand eines Systems vollständig erfassen können, dass wir also in keinem Augenblick allwissend sind. Deshalb erscheinen uns diese Systeme einem rein zufälligen Verhalten unterworfen zu sein. In der Praxis verstehen wir solche Systeme oft recht gut, wenn wir annehmen, ihr Verhalten sei tatsächlich zufällig. Wer sich in diese Thematik weiter vertiefen will, dem sei das Buch “Spielt Gott Roulette?” des Englischen Mathematikers Ian Stewart empfohlen, das 1990 in deutscher Übersetzung beim Birkhäuser-Verlag erschienen ist.

Mit Stewart können wir sagen, dass Gott sicher nicht Roulette spielt mit der Welt, denn er ist allwissend und hat dies nicht nötig. Dem kleinen Menschen aber, der sich leider allzuoft nicht mehr von Gott zu unterscheiden weiss, bleibt wegen seines Mangels an umfassendem Wissen nichts anderes übrig als der Griff in die "Trickkiste des Glückspiels". Damit will ich natürlich in keiner Weise die Anwendungen von Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie verunglimpfen. Diese Methoden sind in der Tat ein unglaublich leistungsfähiges Werkzeug, um Systeme zu untersuchen, in welchen Einflüsse wirken, die wir nicht genau erfassen können. Aber dem immer wieder gezogenen Rückschluss, dass letztlich "alles in der Welt durch zufällige Effekte zustande komme", möchte ich doch ausdrücklich entgegenreten.

Es bleibt uns ein letzter kurzer Blick auf unsere Eingangsverse aus dem Buch Hiob, nämlich auf Vers 28 der zitierten Schriftstelle:

Doch zum Menschen sprach er: / Seht die Furcht vor dem Herrn, das ist Weisheit, / das Meiden des Bösen ist Einsicht.

Die Anwendung der durch ihre Klarheit faszinierenden Newtonschen Mechanik hat uns auf einen Weg geführt an dessen Ende wir erkennen mussten: "Wir sind nicht allwissend". Alle Erkenntnis der Welt liegt letztlich nur bei dem, der alles erschaffen hat. Dies einzugestehen ist Furcht vor dem Herrn, also Weisheit. Sich nicht aus irdischem Stolz über unser menschliches Wissen zu überheben, ist Meiden Bösen, also Einsicht.

Doch blicken wir auch zurück auf die vielen wunderschönen Erkenntnisse, in welche Gott dem suchenden Menschen im Verlaufe der Zeiten Einblick geschenkt hat. Er ist ja nicht nur der Schöpfer des unermesslichen Universums, sondern auch ein liebender Vater, der sich freut, wenn sich seine Geschöpfe an seinen Werken erfreuen, sie erforschen und sie zu ihrem Wohle nutzbar machen. Andererseits bleibt unserer irdischen Erkenntnis eine Grenze gesetzt, die wir gerade mit dem Fortschritt der Wissenschaft, immer klarer erkennen können, eine Grenze, von welcher schon der Apostel Paulus in seinen ersten Brief an die Korinther, Kapitel 13, Verse 8 – 10 und 12 schreibt:

⁸ ***... Erkenntnis vergeht. Denn Stückwerk ist unser Erkennen,...***

¹⁰ ***Wenn aber das Vollendete kommt, / vergeht alles Stückwerk.***

¹² ***Jetzt schauen wir in einen Spiegel / und sehen nur rätselhafe Umrisse, / dann aber schauen wir von Angesicht zu Angesicht.***

Jetzt erkenne ich unvollkommen, / dann aber werde ich durch und durch erkennen, / so wie auch ich durch und durch erkannt worden bin.

Markus Brodmann
Prof. em. Dr. Phil II
Institut für Mathematik der Universität
Winterhurerstrasse 190
8057 Zürich
brodmann@math.uzh.ch

2. März 2014

