WAHRHEIT UND BEWEISBARKEIT

Einleitung: *„Was ist Wahrheit?“ (vgl. Joh 18, 38)*

Liebe Hörerinnen und Hörer! Mit der einleitenden Frage ***„Was ist Wahrheit“*** nehmen wir Bezug auf ***Vers 38*** im ***Kapitel 18*** des ***Johannes-Evangeliums***. Pilatus stellt Jesus im Verhör diese Frage, kurz bevor er Ihn ***geisseln*** lässt und Ihn dann schliesslich – unter dem Druck der Vertreter des Hohen Rates – zur ***Kreuzigung*** ausliefert. Hören wir uns nochmals den Dialog zwischen Jesus und Pilatus an, welcher mit unserer Eingangsfrage endet (vgl. ***Joh 18, 33-38***):

33 ***Pilatus ging wieder in das Prätorium hinein, liess Jesus rufen und fragte Ihn: Bist Du der König der Juden?***
34 ***Jesus antwortete: Sagst Du das von dir aus, oder haben es dir andere über Mich gesagt?***
35 ***Pilatus entgegnete: Bin ich denn ein Jude? Dein eigenes Volk und die Hohenpriester haben Dich an mich ausgeliefert. Was hast Du getan?***
36 ***Jesus antwortete: Mein Königtum ist nicht von dieser Welt. Wenn es von dieser Welt wäre, würden meine Leute kämpfen, damit ich den Juden nicht ausgeliefert würde. Aber Mein Königtum ist nicht von hier.***
37 ***Pilatus sagte zu Ihm: Also bist Du doch ein König? Jesus antwortete: Du sagst es, Ich bin ein König. Ich bin dazu geboren und dazu in die Welt gekommen, dass Ich für die Wahrheit Zeugnis ablege. Jeder, der aus der Wahrheit ist, hört auf Meine Stimme.***
38 ***Pilatus sagte zu Ihm: Was ist Wahrheit?***

Dieser Dialog findet in der bedeutsamsten Stunde der Menschheits-Geschichte statt: ***Jesus***, der wahre ***Sohn Gottes*** ist dabei, sich freiwillig dem ungerechten und feigen Urteil zum ***Tod am Kreuz*** zu unterwerfen, um so für die Schuld der ganzen Menschheit Genugtuung zu leisten und ihr dadurch den Weg zur ***Versöhnung mit dem Vater*** zu eröffnen. Und jetzt, in der Stunde Seiner tiefsten ***Schmach*** und ***Erniedrigung***, findet dieses Gespräch statt, das endet mit der von Pilatus gestellten Frage „Was ist Wahrheit?“ Dass dieser Dialog gerade in diesem Moment stattfindet, gibt ihm eine ***Bedeutung*** und ***Gültigkeit***, die für ***alle Generationen*** bestehen bleibt.

Gehen wir diesen Dialog nochmals durch! Er beginnt damit, dass Pilatus Jesus fragt, ob Er der ***König der Juden*** sei. Er fragt also nicht, ***ob Jesus behaupte***, der König der Juden zu sein. Das deutet darauf hin, dass der Heide Pilatus es ernsthaft in Betracht zieht, dass Jesus tatsächlich nicht nur einer der vielen aufwieglerischen Jüdischen Sektenprediger ist, von denen es damals viele gab. Könnte es tatsächlich sein, dass Er der ***König*** von ***Juda*** aus dem ***Geschlecht Davids*** ist, den das Volk der ***Juden*** erwartet?
Auch in den andern Evangelien stellt Pilatus die Frage nach dem Königtum Jesu direkt ohne ihn zu fragen, ob er behaupte ein König zu sein. So lese wir in ***Mt 27, 11: „Als Jesus vor dem Statthalter stand, fragte Ihn dieser: Bist Du der König der Juden? Jesus antwortete: Du sagst es.“*** Fast wörtlich gleich lesen wir in ***Mk 15, 2*** und in ***Lk 23,.3: „Pilatus fragte Ihn: Bist Du der König der Juden? Er antwortete ihm: Du sagst es.“*** In allen vier Evangelien wird bezeugt, dass Pilatus nach dem Selbstbekenntnis Jesu zu Seinem Königtum versuchte, Ihn nicht zum Tod verurteilen zu müssen. Es war Pilatus klar, dass die Anschuldigungen des Hohen Rates gegen Jesus nicht der Wahrheit entsprachen und dass er mit einer Verurteilung Unrecht und nicht Recht sprechen würde. Denn das wird ja in den Evangelien bezeugt (vgl. ***Mt 27, 18***; ***Mk 15, 10***; ***Lk 23, 14-15, 20,22***).
Wir wissen aber, was weiter geschah: Pilatus gab schliesslich dem ***Druck*** des ***Hohen Rates*** und des aufgewiegelten Volkes nach, und lieferte Jesus dem Tod aus. Wie kam es, dass er – der als ***Statthalter*** des ***Kaisers*** der ***Römischen Weltmacht*** die ***Vollmacht*** hatte nach seinem Gutdünken zu entscheiden – sich von einer Gruppe von Lügnern aus dem unterworfenen und von den Römern

verachteten Volk der Hebräer derart unter Druck setzen liess, dass er schliesslich gegen seine moralischen Bedenken handelte und das ungerechte Todesurteil fällte?

Um einer Antwort näher zu kommen, dürfen wir wohl ruhig versuchen, uns ein Bild von der ***Person*** des ***Pilatus*** zu machen. Vergessen wir nicht, dass er neben der ***Jungfrau Maria*** das ***einzige menschliche Geschöpf*** ist, das im ***Glaubensbekenntnis*** vorkommt, obwohl er ja Heide war. Natürlich soll durch die Nennung des Statthalters Pontius Pilatus im Glaubensbekenntnis und in den Evangelien zunächst bezeugt werden, dass ***Jesus*** wirklich zu einer ***ganz bestimmten Zeit*** als ***Mensch*** auf Erden gelebt hat und mit der ***Gutheissung*** der ***Römischen Obrigkeit*** den ***Kreuzestod*** erlitt. Durch die Aufzeichnungen der Römisch-Griechischen ***Historiker*** werden diese geschichtlichen Aussagen über Jesus bestätigt. Da die damaligen Römisch-Griechischen Aufzeichnungen nicht unter dem Verdacht der Voreingenommenheit für das Christentum standen, wird so ein objektiver ***historischer Beweis*** für die ***Geschichtlichkeit Jesu*** gegeben. Der Person des Pilatus kommt also im Glaubensbekenntnis und in der Bibel die Bedeutung zu, ***Angelpunkt*** eines Beweises für die ***historische Existenz Jesu*** zu sein – eines Beweises, den man vom Ansatz her ***wissenschaftlich*** nennen muss, da er ja auf Quellen verweist, die im Sinne der Geschichtswissenschaft als objektiv gelten können.

Um unser Bild von der Person des Pontius Pilatus abzurunden, erlauben wir uns, auch auf ***ausser-biblische Überlieferungen zurückzugreifen***. Ganz wichtig ist dabei die ***Ehefrau*** des Pilatus, die auch im ***Matthäus-Evangelium*** erwähnt wird. Sie war es ja, welche Pilatus davor warnte, Jesus zu verurteilen wie wir in ***Mt 27, 19*** lesen können: ***„Während Pilatus auf dem Richterstuhl sass, liess seine Frau ihm sagen: Lass die Hände von diesem Mann. Er ist unschuldig. Ich hatte seinetwegen heute Nacht einen schrecklichen Traum.“***
Über den Traum selbst wird nicht berichtet. War es eine Vision der ***Zerstörung Jerusalems*** und des ***Tempels*** und des ***Untergangs*** der Römischen Provinzen ***Israels***, die von Jesus vorhergesagt worden waren? (vgl. ***Mt 24, 1-2; Mk 13, 1-2; Lk 21, 20-24***.) Diese Ereignisse traten zwischen 70 und 80 nach Christus tatsächlich ein und sie wurden vom Römisch-Jüdischen Historiker ***Flavius Josephus*** genau festgehalten, der auch das schreckliche Ausmass jener Zerstörung beschreibt, welche den ***Untergang der alten Jüdischen Welt*** besiegelte, die mit der ***Berufung Abrahams*** ihren Anfang genommen hatte, mit ihrem ***Zug durch das Rote Meer*** auf wunderbare Weise über die Ägyptische Grossmacht triumphierte und nun in Staub und Asche liegen sollte, bis ***„sich die Zeiten der Heiden erfüllt haben“***. In diesem Vortrag können wir darauf nicht weiter eintreten. Als Anregung zu diesem Thema möchte ich Ihnen, Liebe Hörerinnen und Hörer, aber einen Blick in den zweiten Band der Trilogie ***„Jesus von Nazareth“*** unseres emeritierten ***Papstes Benedikt XVI*** empfehlen.
Der Überlieferung nach trug die Frau des Pontius Pilatus den Namen ***Claudia***. Diesen Namen durfte sie tragen, weil sie aus ***Römisch-Kaiserlichen Geschlecht*** war. Sie war ihrem Mann geistig und moralisch wohl überlegen und übte auf ihn einen guten Einfluss aus. Man kann auch davon ausgehen, dass Pilatus hauptsächlich wegen der hohen ***Herkunft*** seiner ***Frau*** sein Statthalter-Amt erhalten hatte. Die Mitglieder des Hohen Rates wussten darum und konnten darauf setzen, dass er deshalb gegenüber dem Kaiser ***erpressbar*** war.
Man darf auch annehmen, dass Claudia die vornehmen ***Frauen im Gefolge Jesu*** persönlich kannte, zum Beispiel ***„Johanna, die Frau des Chuzas, eines Beamten des Herodes“*** (vgl. ***Lk 8, 3***).
Wie auch heute noch, waren es wohl schon damals die ***Frauen***, welche ihre ***Apostolischen Netze als erste auswarfen***. So wird auch Claudia viel von Jesus gehört und ihn vielleicht sogar persönlich getroffen haben. Obwohl sie Heidin war, muss sie wohl von seiner Lehre und seiner Persönlichkeit berührt und beeindruckt gewesen sein.

Und so stand nun dieser ***Mensch Pontius Pilatus*** vor Jesus: ***Kein an sich schlechter Mensch***, aber ***ehrgeizig*** und ***Karriere-bewusst***, den Dingen der ***Welt*** zugetan, ***erpressbar*** durch seine ***Position***, ***hin*** und ***her gerissen*** zwischen der ***Zuneigung*** und ***Dankbarkeit*** gegenüber seiner ***Frau*** und dem Bestreben, sich die Vertreter des ***Hohen Rates*** nicht zum ***Feind*** zu machen. Kurz: ein ***Weltmensch***,

wie wir es von Natur aus alle sind – und wie wir es auch jetzt, da wir unsere Menschen-Natur überwunden haben sollten, in unserem Denken und Handeln immer wieder sind.
Und dieser Weltmensch, der uns allen so sehr gleicht, hatte über den zu richten, dem das ***Gericht über die Völker*** und die ganze ***Schöpfung übertragen ist***, über den ***Pantokrator*** dem der ganze Kosmos zu Füssen liegt. Pilatus ahnte sicher, dass da Einer vor ihm stand, dessen Königtum alle menschlichen Vorstellungen übersteigt und der in Seiner ganzen Erniedrigung eine Vollmacht hatte, welche die vergängliche Macht aller irdischen Herrscher verblassen liess. Und Pilatus musste nun von Amts wegen das tun, was wir, die wir ihm so ähnlich sind, freiwillig auch immer wieder tun: ein ***Urteil*** fällen über Ihn, unseren ***Schöpfer, Erlöser*** und ***König***. Und auch er, Pilatus ist dabei hin und her gerissen zwischen dem Bestreben zum ***Guten*** und feiger ***Menschenfurcht***, zwischen ***Wahrheit*** und ***Korrumpierbarkeit***, genau so wie wir es in unserer eigenen Erbärmlichkeit immer wieder sind. Also dürfen wir den Dialog zwischen Jesus und Pilatus ruhig als einen ***Dialog*** zwischen ***Jesus*** und ***uns selbst*** verstehen. Hören wir uns den weiteren Verlauf dieses Dialogs nun von diesem Standpunkt aus an!

Mit Seiner Gegenfrage ***„Sagst Du das von dir aus, oder haben es dir andere über Mich gesagt?“*** aus ***Vers 34*** gibt Jesus Pilatus die Möglichkeit, seinen Glauben persönlich zu bezeugen, dass jetzt der wahre König der Juden vor ihm steht – der vom Jüdischen Volk erwartete Messias. Doch, Pilatus weicht aus, wie wir in ***Vers 35*** lesen: ***„Bin ich denn ein Jude? Dein eigenes Volk und die Hohenpriester haben Dich an mich ausgeliefert. Was hast Du getan?“*** Pilatus findet nicht den Mut und die Kraft zu einem persönlichen Zeugnis und macht die ganze Sache zu einer Angelegenheit zwischen Jesus und seinem Volk. Jesus geht auf dieses taktische Ausweich-Manöver des Pilatus nicht ein und beantwortet die Frage nicht, was Er denn getan habe. Vielmehr legt Jesus dar, was Pilatus in seinem Inneren auch ahnt (vgl. ***Vers 36***): ***„Mein Königtum ist nicht von dieser Welt. Wenn es von dieser Welt wäre, würden meine Leute kämpfen, damit ich den Juden nicht ausgeliefert würde. Aber Mein Königtum ist nicht von hier.“*** Im ***Vers 37*** erreicht der Dialog seinen Höhepunkt. Jesus selbst macht die Frage des Pilatus ***„Also bist Du doch ein König?“*** zum Zeugnis, in dem er sagt ***„ Du sagst es, Ich bin ein König.“*** Dann aber spricht Jesus mit der Vollmacht des ***Mensch gewordenen Wortes*** weiter, in einer Weise, welche dem irdisch eingestellten Pilatus nicht mehr zugänglich ist – wie das ja oft auch bei uns der Fall ist, wenn Jesus in Seiner göttlichen Vollmacht zu uns spricht: ***„Ich bin dazu geboren und dazu in die Welt gekommen, dass Ich für die Wahrheit Zeugnis ablege.“*** Jesus ist also ein König, der nicht gekommen ist um ***Macht*** auszuüben, sondern um für die ***Wahrheit*** Zeugnis abzulegen. Aber gerade darin besteht ja seine alles übersteigende ***Macht*** und ***Herrlichkeit***: die Macht des ***Wortes***, das auf ewig bestehen bleibt und ***Himmel*** und ***Erde*** überdauert (vgl. ***Mt 24, 35; Mk 13, 31; Lk 21, 33***). Und Jesu Reich ist kein Reich der irdischen Macht, sondern ein Reich, zu dem die gehören, die aus Seiner Wahrheit sind, wie Er zu Pilatus sagt: ***„Jeder, der aus der Wahrheit ist, hört auf Meine Stimme.“*** Mit diesen Sätzen drückt Jesus den Kern dessen aus, was im ***Prolog des Johannes-Evangeliums*** geschrieben steht. Jesus spricht dabei nicht von einer Wahrheit die man ***kennt***, oder die man für ***richtig*** oder gar für ***bewiesen*** hält, sondern von einer ***Wahrheit aus der man ist.*** Bezugnehmend auf das nächtliche Gespräch zwischen Jesus und Nikodemus (siehe ***Joh 3, 1-21***) können wir sagen: Es geht Jesus um die Wahrheit, aus der wir wieder-geboren werden müssen – die ***Wahrheit des Glaubens*** an Jesus Christus, aus der wir durch das Wasser und den Geist in der Taufe geboren werden müssen. Es handelt sich bei dieser Wahrheit um das Mensch gewordenen Wort selbst, also um Jesus, wie Er es uns auch selbst bezeugt (vgl. ***Joh 14, 6***).

Natürlich übersteigt das, was Jesus in den zwei Sätzen im ***Vers 37*** sagt, bei Weitem das, was Pilatus verstehen kann. Auch der Schriftgelehrte ***Nikodemus –*** der „Lehrer Israels“, wie in Jesus nannte – konnte die Worte Jesu ja nicht erfassen. Wie hätte der Heide Pilatus sie also verstehen können? Und doch sind sie durch die Heilige Schrift für alle ***Zeiten*** und ***Generationen*** festgehalten, gesprochen zum wankelmütigen und in der Welt verhafteten Pontius Pilatus, der uns in unserer eigenen Erbärmlichkeit so sehr gleicht.

Was bleibt da Pilatus anderes übrig als schliesslich kleinlaut zu fragen: ***„Was ist Wahrheit?“*** wie wir es ja so oft auch tun.
Und wie wir oft selbst auch, verhält sich Pilatus danach ***zwiespältig***: die Kraft und dem Mut, gegen das Drängen des Hohen Rates die Verurteilung Jesu zu verhindern, findet er nicht. Aber immerhin hält er daran fest, dass Jesus der König der Juden sei und so legt er – der Heidnische Emporkömmling und korrumpierbare Weltmensch – doch noch ein Teilzeugnis für Jesus als Messias ab, das allen Generationen erhalten bleiben wird. Dieses Zeugnis ist festgehalten in ***Hebräisch*** und in den beiden damaligen Heidnischen ***Weltsprachen*** des ***Lateinischen*** und des ***Griechischen***, was seine ***Universalität*** unterstreicht. Rufen wir uns die entsprechenden Verse aus dem Johannes-Evangelium nochmals in Erinnerung: (vgl. ***Joh 19, 19 - 22***)

19 ***Pilatus ließ auch ein Schild anfertigen und oben am Kreuz befestigen; die Inschrift lautete: Jesus von Nazaret, der König der Juden.***
20 ***Dieses Schild lasen viele Juden, weil der Platz, wo Jesus gekreuzigt wurde, nahe bei der Stadt lag. Die Inschrift war hebräisch, lateinisch und griechisch abgefasst.***
21 ***Die Hohenpriester der Juden sagten zu Pilatus: Schreib nicht: Der König der Juden, sondern dass Er gesagt hat: Ich bin der König der Juden.***
22 Pilatus antwortete: Was ich geschrieben habe, habe ich geschrieben.

Vom Sinn der Beweise: *“Das soll für sie ein Beweis Meiner Gesetzestreue sein” (vgl. Mk 1, 44)*

Die Frage nach der Wahrheit, die Pilatus sozusagen stellvertretend für uns alle stellt, hat die Menschen aller Generationen beschäftigt – sei es im Alltag, in der Religion, in der Philosophie und in den Wissenschaften. Wenn wir mit einer Aussage konfrontiert werden, deren Wahrheit uns zweifelhaft oder unbegreiflich erscheint, fragen wir in der Regel nach einem ***Beweis***. Sätze wie ***„ich glaube nur, was bewiesen ist“*** oder ***„wahr ist, was man beweisen kann“***, kommen uns immer wieder zu Gehör oder wir sprechen sie selbst aus. Sie entspringen der Vorstellung, dass ***Wahrheit*** und ***Beweisbarkeit*** weitgehend das Selbe sind.
Doch das Gespräch zwischen Jesus und Pilatus zeigt, dass dieses Gleichsetzen von Wahrheit und Beweisbarkeit an sich problematisch ist. Jesus spricht ja von einer ***absoluten Wahrheit***, einer ***Wahrheit aus der man sein muss***. Es geht hier also um eine Wahrheit, welche den rein menschlichen Intellekt übersteigt, eine Wahrheit aus der und in der man ***Leben muss – eine Wahrheit die personifiziert ist in Jesus Christus, dem Fleisch gewordenen Wort Gottes, das vor aller Zeit war*** (vgl. ***Joh 1, 1-4***).

Demgegenüber sind beweisbare Wahrheiten immer ***relative Wahrheiten***. Jeder Beweis geht ja von – menschlich betrachtet – unbestreitbar richtigen Annahmen aus und versucht aus diesen mit logischen oder mindestens unanfechtbaren Argumenten das Gewünschte zu begründen. Die Aussagen, die man so beweisen kann, bleiben aber immer im Bereich dessen, was wir mit unserem menschlichen Verstand begreifen und erarbeiten können. Auf diese Weise eine absolute Wahrheit zu beweisen – wie Jesus sie versteht – käme einem ***Turmbau zu Babel*** gleich: dem Versuch aus irdischen Steinen und mit Hilfe menschlicher Geschicklichkeit und Arbeit ein Gedankengebäude zu errichten, das zum Himmel empor reicht. Die Wahrheit, von der Jesus spricht, kann durch menschliche Anstrengung und auf Grund unseres menschliche Verstandes nicht bewiesen oder erlangt werden. Jeder Beweis muss da versagen. Nur die ***Gnade*** des ***Glaubens*** bewirkt, dass wir aus dieser Wahrheit sind.

Doch scheut auch ***Jesus*** nicht davor zurück, ***Beweise*** zu geben. Ein Beispiel haben wir im Titel bereits angesprochen. Hier will Jesus dem Hohen Rat beweisen, dass er nicht gekommen ist, das

Gesetz zu ***übertreten*** oder es aufzuheben, sondern es zu ***erfüllen***. Allerdings geht das von Jesus vollzogene Erfüllen des Gesetzes ja weit darüber hinaus, Vorschriften zu beachten und einzuhalten. Es geht darum, dass ***Er dieses Gesetz schliesslich durch Seinen Tod am Kreuz endgültig und stellvertretend für die ganze Menschheit erfüllen wird***. Also ist der oben zitierte Beweis für die Gesetzestreue Jesu kein Beweis im Sinne des Menschen. Er ist vielmehr ein ***Hinweis*** auf eine ***absolute Wahrheit***, die nur dem Glaubenden zugänglich ist: nämlich dass Er, Jesus selbst, der ***Messias*** ist, der die unter dem Gesetz begangenen Übertretungen am Kreuz sühnen wird.

Gleiches lässt sich auch von Jesu Hinweis auf Seine Vollmacht zur Sündenvergebung sagen, der uns in den ***Versen 3-12*** im ***Kapitel 2*** des ***Markus-Evangeliums*** überliefert ist:

3 ***Da brachte man einen Gelähmten zu Ihm; er wurde von vier Männern getragen.***
4 ***Weil sie ihn aber wegen der vielen Leute nicht bis zu Jesus bringen konnten, deckten sie dort, wo Jesus war, das Dach ab, schlugen (die Decke) durch und ließen den Gelähmten auf seiner Tragbahre durch die Öffnung hinab.***
5 ***Als Jesus ihren Glauben sah, sagte er zu dem Gelähmten: Mein Sohn, deine Sünden sind dir vergeben!***
6 ***Einige Schriftgelehrte aber, die dort saßen, dachten im Stillen:***
7 ***Wie kann dieser Mensch so reden? Er lästert Gott. Wer kann Sünden vergeben außer dem einen Gott?***
8 ***Jesus erkannte sofort, was sie dachten, und sagte zu ihnen: Was für Gedanken habt ihr im Herzen?***
9 ***Ist es leichter, zu dem Gelähmten zu sagen: Deine Sünden sind dir vergeben!, oder zu sagen: Steh auf, nimm deine Tragbahre und geh umher?***
10 ***Ihr sollt aber erkennen, dass der Menschensohn die Vollmacht hat, hier auf der Erde Sünden zu vergeben. Und Er sagte zu dem Gelähmten:***
11 ***Ich sage dir: Steh auf, nimm deine Tragbahre, und geh nach Hause!***
12 ***Der Mann stand sofort auf, nahm seine Tragbahre und ging vor aller Augen weg. Da gerieten alle außer sich; sie priesen Gott und sagten: So etwas haben wir noch nie gesehen.***

Die erste Schlüsselstelle dieses Textes ist der ***Vers 5***: ***"Als Jesus ihren Glauben sah, sagte er zu dem Gelähmten: Mein Sohn, deine Sünden sind dir vergeben!"*** Jesus will also in die ***gläubigen Herzen*** etwas eingiessen, was weit über die rein körperliche Heilung des Gelähmten hinausgeht: ***den Glauben daran, dass Er die Vollmacht hat, Sünden zu vergeben, weil Er der Messias ist***. Genau um diese Wahrheit zu bezeugen, ist Er ja gekommen. Die anwesenden theologisch gebildeten Zweifler wollen oder können diese Wahrheit nicht annehmen. Und jetzt ergreift Jesus die Gelegenheit. Er bezeugt Seine Vollmacht auf der Erde Sünden zu vergeben durch ein ***Zeichen***. Im ***Vers 10*** – der zweiten Schlüsselstelle unseres Textes – lesen wir dazu die bedeutsamen Worte: ***"Ihr sollt aber erkennen, dass der Menschensohn die Vollmacht hat, hier auf der Erde Sünden zu vergeben."*** Und nach diesem Hinweis auf Seine Vollmacht setzt Jesus das Zeichen, das alle ausser sich geraten und Gott preisen lässt: ***Er heilt den Gelähmten***.

Ob die notorischen gelehrten Zweifler nach diesen Geschehnissen wirklich daran glaubten, dass Jesus tatsächlich der angekündigte Messias ist, wissen wir nicht. Wahrscheinlich war es aber eher nicht so. Denn wer in seinem Herzen nicht die Bereitschaft zum kindlichen Glauben trägt, lässt sich auch durch Beweise nicht überzeugen. Ein Beweis spricht ja primär das irdisch-menschliche Denken an. Er bleibt also im Bereich des Irdischen, selbst wenn er sich auf ein Wunder stützt. Deshalb kann er für sich selbst genommen die von Gott geschenkte Glaubensgnade nicht erwecken. Jesus selbst bringt das ja in seiner Erzählung über den armen Lazarus und den Reichen Prasser zum Ausdruck indem Er durch Abraham spricht: (vgl. ***Lk, 16, 31***) ***"Wenn sie auf Mose und die Propheten nicht hören, werden sie sich auch nicht überzeugen lassen, wenn einer von den Toten aufersteht."*** Auf "Mose und die Propheten zu hören" meint hier natürlich das gläubige Hören, das sich im Halten der Gebote niederschlägt.

Die beiden „Beweise“ Jesu, die wir hier angeführt haben sind also nicht Beweise im menschlichen oder im wissenschaftlichen Sinn. Es sind vielmehr ***Zeichen*** oder ***Hinweise***, die eine absolute und überirdische Wahrheit bezeugen, eine Wahrheit, die den menschliche Verstand übersteigt und deren Erfassen der Gnade eines lebendigen Glaubens bedarf.

Wir wollen uns nun in diesem Vortrag aber auch dem Wesen rein irdischer Beweise zuwenden, also Beweise betrachten, die man oft leichthin als ***wissenschaftlich*** bezeichnet. Doch eigentlich gibt es “den” wissenschaftlichen Beweis gar nicht. Zwischen dem, was ein Jurist, ein Historiker, ein Philosoph, ein Philologe, ein Mediziner, ein Biologe, ein Physiker oder ein Mathematiker unter einem Beweis versteht, können nämlich Welten liegen. Wir werden uns deshalb auf den ***Beweis-Begriff der Mathematik*** beschränken, der sich ausschliesslich auf die Prinzipien der reinen ***Logik*** beruft und deshalb als unanfechtbar gelten kann.
Denken wir dabei aber auch daran, dass mit mathematischen Beweisen auch nur mathematische Thesen bewiesen werden können. Die vielen mathematischen ***Gottesbeweise***, die vor allem im 17. und 18. Jahrhundert erbracht wurden, sind demnach keine Beweise im strengen Sinn. Sie sind vielmehr als Hinweise zu verstehen, welche den Glauben ihrer Verfasser widerspiegeln. Die zum Glauben nötige Gnade können sie aber nicht erwecken. Sie können gläubige oder glaubensbereite Menschen aber tatsächlich im Glauben bestärken. Für nicht glaubende Menschen kann ein Gott, dessen Existenz man mit logischen Argumenten zu beweisen versucht, kaum zu einem Gott werden, wie Ihn das gläubige Herz kennt: ein ***persönlicher, lebendiger und liebender Gott***.

Bevor wir uns mit dem Beweis-Begriff auseinandersetzen, müssen wir uns dem Begriff der Wahrheit im menschlichen Sinne näher zuwenden. Beweise sind ja kein Selbstzweck. Sie sollen vielmehr immer eine Wahrheit belegen, also der Wahrheitsfindung dienen. Der Begriff des Beweises ist also dem Begriff der Wahrheit untergeordnet.

Antinomien: *Logische Selbstverneinung als Denkfalle*

Wir wollen uns jetzt deshalb dem Wahrheitsbegriff zuwenden – und zwar auf rein irdische Art – das heisst vom menschlichen Intellekt her. Dies soll auf eine provozierende Weise geschehen, die uns zunächst eher als abstraktes und weltfremdes Gedankenspiel erscheinen mag. Später werden uns solche absurd erscheinenden Gedanken im Zusammenhang mit den logischen Grundlagen der Mathematik wieder begegnen.

Viele von Ihnen, liebe Hörerinnen und Hörer haben wohl schon vom ***Speaker's Corner*** im ***Hyde Park*** von ***London*** gehört – einer typisch Britischen Institution. Dort darf man, an einer Ecke des grossen Hyde Parks, öffentliche Reden halten. Jeder, der glaubt den Menschen etwas erzählen oder mitteilen zu müssen, darf dort öffentlich vortragen. Man darf über alles reden, wobei erwartet wird, dass man nichts unanständiges sagt. Die einzige Regel ist, dass man ***nichts Beleidigendes*** über die ***Königin*** oder den ***König*** sagt.
Stellen wir uns vor, wir stehen dort und da kommt ein Mann herbei, der einen kleinen Schemel mit sich bringt: seine Rednertribüne. Er besteigt diese Tribüne und wartet bis sich genügend viele Neugierige um ihn herum versammelt habne. Dann beginnt er mit seiner Rede. Sie lautet: ***„Ich lüge!“*** *Dann verlässt er seine Privat-Tribüne und taucht mit seinem Schemel im verblüfften Publikum unter.*
„A short speech, indeed! (Wirklich, eine kurze Rede!)“ hört man einige Zuhörer kommentieren. Doch nach einem Augenblick des nachdenklichen Schweigens beginnt im Publikum ein lebhaftes Gemurmel, und wir wären nicht in England, wenn nicht schon bald auch Wetten abgeschlossen würden: „Wetten, er hat gelogen!“ gegen „Wetten, er hat nicht gelogen!“ Doch werden sich beide

Parteien schwer tun damit zu ***entscheiden,*** wer jetzt gewinnen soll. Wetten wir doch im Geist selbst mit!
Nehmen wir zuerst an, unser Redner hätte ***nicht gelogen*** als er sagte: „Ich lüge!“ Dann wäre seine Behauptung „Ich lüge!“ also wahr. Dann hätte er aber ***doch gelogen.*** Nehmen wir umgekehrt an, unser Redner hätte ***gelogen*** als er sagte: „Ich lüge!“ Dann wäre seine Behauptung „Ich lüge!“ also falsch. Dann hätte er aber ***doch nicht gelogen.***
Ob das in unserer Kurz-Rede Gesagte also wahr oder falsch ist, lässt sich ***grundsätzlich nicht*** entscheiden. Die Rede besteht nämlich aus einer Aussage, die ihre eigene Verneinung mit einschliesst. Es handelt sich also um eine ***selbst-verneinende Aussage***, oder eine sogenannte ***Antinomie***.

Eine weitere Geschichte ähnlicher Art, diesmal Irischen Ursprungs: *In einem kleinen Irischen Dorf schliesst der Barbier Abends im Dorf-Pub – nach einigen Gläsern Whiskey, wie gemunkelt wird – mit dem ebenfalls anwesenden honorablen Gemeindepräsidenten – der vermutlich auch schon einiges an Distilliertem intus hatte – einen rechtsgültigen Vertrag ab:* ***„Der Barbier wird genau diejenigen Männer rasieren, die sich nicht selbst rasieren.“*** *Der Barbier rasiert sich weiterhin täglich selbst. Nach einen Jahr wird er vorgeladen und zum Entrichten einer Busse aufgefordert: Er hätte den Vertrag gebrochen, und einen rasiert, der sich selbst rasiert: nämlich sich selbst. „Das passiert mir nicht nochmals“, denkt der Barbier und lässt sich von diesem Tag an von seinem Nachbarn rasieren. Doch staunt er nicht wenig, als er ein Jahr später wieder wegen Vertragsbruchs zu einer Busse verdonnert wird.*
Doch warum wurde diese zweite Busse ausgesprochen? In der Tat hat der Barbier sich ja nicht mehr selbst rasiert. Gemäss Vertrag hätte er sich dann aber selbst rasieren müssen. Der abgeschlossene Vertrag konnte vom Barbier also grundsätzlich gar nicht eingehalten werden. Die Aussage: „Der Barbier wird genau diejenigen Männer rasieren, die sich nicht selbst rasieren“ enthält nämlich einen ***Selbstwiderspruch***, weil der Barbier selbst zu denen gehört, über welche die Aussage gemacht wird. Es handelt sich also bei der Vertragsbedingung wieder um eine ***Antinomie***. Diese Antinomie geht übrigens im Wesentlichen auf den berühmten Englischen Philosophen ***Bertrand Russell*** (1872 – 1970) zurück. Wir werden später nochmals auf diese Antinomie zu sprechen kommen.

Ein letztes Beispiel könnte auch in der Schweiz spielen, da es hier zu Lande ja bekanntlich besonders bösartige Mathematiklehrer gibt, vielleicht weil sie beim Vortragenden studiert haben.
Da kommt also der Herr Lehrer in die Klasse und sagt, es gäbe heute eine Mathematik-Klausur. Sie sei aber ganz harmlos, denn man müsse nur eine Frage beantworten – die Frage, die er jetzt eben an die Tafel schreiben werde. Er schreibt an die Tafel nur den einen Satz: ***„X ist die kleinste Zahl, die durch diesen Satz nicht definiert wird.“*** *Dann sagt er, die Aufgabe sei, die Zahl X zu bestimmen.*
Dann setzt er sich nach Lehrer-Art hinter sein Pult und lässt die Schüler in Ruhe arbeiten. Nach sechzig Minuten – pünktlich beim Ertönen der Pausenklingel – zieht er die Klausur-Blätter der Schüler ein, nicht ohne vorher daran zu erinnern, dass jeder seinen Namen auf sein Blatt schreiben soll. Da sieht man Blätter die ganz leer geblieben sind. Andere sind dicht beschrieben und übersät von Zahlen, die immer wieder durchgestrichen wurden. Keiner konnte offenbar die gesuchte Zahl X bestimmen...
Nun schlüpfen wir in die Rolle eines Schülers und überlegen und die gestellte Aufgabe, unter Beachtung des vom Lehrer ebenfalls gegeben Hinweises, dass mit „Zahl“ hier eine ***positive ganze Zahl*** (oder ***natürliche Zahl***) gemeint ist, also eine der Zahlen 1,2,3,...
Nehmen wir an, es ***gäbe eine Zahl***, die durch den Satz an der Tafel ***nicht definiert ist***. Das könnte vielleicht die Zahl sieben sein. Unter all den nicht durch unseren Satz definierten Zahlen gibt es dann eine kleinste. Diese muss aber kleiner sein als die (durch unsere Aussage nicht definierte) Zahl sieben. Denn sonst wäre die Zahl sieben eben ***doch*** durch den Satz an der Tafel ***definiert –*** und zwar eben als die kleinste Zahl die durch diesen Satz nicht definiert wird! Also ist sieben nicht die kleinste unter den gesuchten Zahlen. Es gibt also eine kleinere Zahl als sieben, die durch unseren

Satz nicht definiert ist – vielleicht die Zahl fünf. Jetzt kann man aber über die Zahl fünf wieder das Gleiche sagen wie vorhin über die Zahl sieben: Es gibt eine Zahl, die kleiner ist als fünf und die ebenfalls durch unseren Satz nicht definiert wird. So können wir beliebig weiterfahren und sehen: ***Zu jeder Zahl, die durch den Satz an der Tafel nicht definiert wird, gibt es eine kleiner Zahl, die ebenfalls nicht durch diesen Satz definiert wird***. So könnte man von der Zahl sieben aus immer weiter nach unten gehen, und fände immer noch kleinere Zahlen, die durch unseren Satz nicht definiert sind. Das ist aber Unsinn: wenn man von der Zahl sieben ausgehend immer kleinere Zahlen wählt, kommt man ja nach spätestens sieben Schritten zur Zahl eins und muss aufhören. Das gilt aber nicht nur, wenn man mit der Zahl sieben beginnt. Bei jeder Startzahl ergibt sich der gleiche ***Widerspruch***. Also: ***Unsere Annahme, dass es eine Zahl gibt, die durch den Satz an der Tafel nicht definiert wird, ist also falsch.***
Wir können also folgern: ***Es gibt gar keine Zahl, die durch unseren Satz nicht definiert wird***. Dann wird aber ***jede Zahl X durch den Satz an der Tafel definiert***, also durch den Satz "X ist die kleinste Zahl, die durch diesen Satz nicht definiert wird." Also wird diese Zahl X doch wieder nicht durch unseren Satz definiert.
Wir sehen also folgendes: Unabhängig davon, ob die gesuchte Zahl X existiert oder nicht, erhalten wir immer einen ***Widerspruch***. Tatsächlich spricht unser Satz eine Selbstverneinung aus, und ist deshalb wieder eine ***Antinomie***.

Mit dieser letzten ***Antinomie*** sind wir bereits in den Bereich der ***Arithmetik*** geraten, also in den Bereich der ***Mathematik***. Wir werden später nochmals auf eine bedeutsame Antinomie im Bereich der Arithmetik zurückkommen. Doch vorher wollen wir uns einer mathematischen Antinomie im Bereich der ***Mengenlehre*** zuwenden, die kurz nach 1900 die Mathematiker in ***„Angst und Schrecken"*** versetzte.

Als erstes Fazit können wir aber jetzt schon sagen, dass der Mensch Sätze formulieren kann, über deren Wahrheit man grundsätzlich nicht entscheiden kann, da sie das, was sie aussagen, zugleich verneinen. Solche Sätze nennt man Antinomien, also ***Gegenworte***. Manchmal werden solche Sätze auch als ***Paradoxien*** oder ***Paradoxa*** bezeichnet, doch trifft diese Bezeichnung nicht den Kern der Sache. Das Wort Paradoxon (wie es in der Einzahl heisst) enthält ja die Teile „Para" – also „jenseits" oder „ausser" – und „Doxos" – also „Glaube". Ein Paradoxon ist also etwas, was jenseits oder ausserhalb dessen liegt, was man glauben kann, also etwas Unglaubliches oder Unglaubwürdiges. Dieses ***Unglaubliche*** muss an sich aber nicht logisch ***undenkba***r sein, wie das bei einer Antinomie der Fall ist. Wenn zum Beispiel ein Wissenschaftler behauptet, er hätte nachgewiesen, das Steine auf der Erde manchmal ohne fremdes Zutun nach oben fliegen würden, so scheint uns dies zwar unglaublich oder eben paradox. Undenkbar im logischen Sinne ist es aber nicht. Einen nach oben fallenden Stein können wir uns in Gedanken ja vorstellen, auch wenn es unseren Erfahrungen widerspricht.

Die Russell'sche Antinomie: *Bricht die Mathematik zusammen?*

Liebe Hörerinnen und Hörer! Im letzten Vortrag wir haben eben den Begriff ***Antinomie*** kennengelernt, mit dem man Aussagen bezeichnet, die ihre eigenen Verneinung mit einschliessen, Aussagen also, die man auch als ***Selbstverneinungen*** bezeichnen könnte. Wir haben drei Beispiele von Antinomien behandelt welche zweifellos eher skurril als tiefsinnig wirkten. Wie wir im letzten Vortrag ebenfalls schon gesagt haben, war es aber auch eine Antinomie, welche kurz nach 1900 die Mathematiker in „Angst und Schrecken versetzte" und ***Fundamente*** der ***Mathematik*** und der ***mathematischen Logik*** zu erschüttern drohte: die sogenannte ***Russell'sche Antinomie***, welche in Jahre 1903 vom Englischen Philosophen ***Bertrand Russell*** entdeckt wurde – und unabhängig davon kurz zuvor auch vom Deutschen Mathematiker ***Ernst Zermelo*** (1871-1953), der sie aber nicht veröffentlichte.

Um diese Antinomie zu formulieren., müssen wir allerdings ein paar einfache Grundbegriffe der ***Mengenlehre*** einführen. Bereits in der Vortrags-Reihe „Der Griff nach dem Unendlichen“ haben wir über diese Mathematische Theorie gesprochen. Trotzdem schadet es wohl nichts, einiges zu wiederholen, was damals gesagt wurde.

Die Mengenlehre geht auf den deutschen Mathematiker ***Georg Cantor*** (1845-1918) zurück. Sie war zunächst der Gegenstand zahlreicher ***Kontroversen***, und wurde zur Zeit ihrer Entstehung von den meisten Ton-angebenden Mathematikern abgelehnt, aber auch von der Mehrheit der ***Philosophen*** und sogar von vielen ***Theologen***. Es war primär Cantors Umgang mit dem ***Unendlichen***, welcher diese Auseinandersetzungen anheizte, die sogar vor dem ***Heiligen Stuhl*** nicht halt machten. Wir haben in der schon erwähnten Vortrags-Serie über das Unendliche bereits darüber gehört.
Um 1900 änderte sich die Situation aber grundlegend, und die Mathematiker erkannten zusehends die fundamentale ***Bedeutung*** von Cantors Ideen. Sie erkannten, dass alle Mathematischen Theorien im Rahmen der Mengenlehre formuliert und betrieben werden konnten. So wurde die kurz zuvor noch verpönte Theorie Cantors in einem gewissen Sinne zum Fundament der ganzen Mathematik. Dies führte kurz nach 1900 zu einer neuen Sichtweise der Mathematik und erlaubte in vielen Gebieten neuartige Argumente durchzuführen – sogenannte ***nicht-konstruktive Argumente***. Dies alles führte schliesslich dazu, dass die allereinfachsten Grundbegriffe der Mengenlehre sogar Eingang fanden in den Mathematik-Unterricht an Sekundarschulen.

Im Gebiet der Algebra bedeutete die neue Sichtweise, dass man nun auch sogenannte ***nicht-konstruktive Existenzbeweise*** führen konnte, was vorher in diesem Gebiet nicht üblich war. Um etwa zu zeigen, dass ein ***mathematisches Problem*** (zum Beispiel ein Gleichungs-System) eine ***Lösung*** hat, musste man gemäss der alten konstruktivistischen Vorgehensweise eine Lösung angeben oder ein Verfahren vorschlagen um eine Lösung zu gewinnen. In der neuen Sichtweise war es legitim, nach dem schon mehrfach genannten Prinzip der ***Reductio ad Absurdum*** vorzugehen. Man durfte nun also nun annehmen, dass das gegebene Problem keine Lösung hätte und versuchen aus dieser Annahme einen Widerspruch herzuleiten. Wenn dies gelang, war dann in der Tat die Existenz einer Lösung nachgewiesen. Eine konkrete Lösung oder ein Lösungsverfahren war damit allerdings noch nicht gewonnen.
Der schon mehrfach erwähnte grosse Deutsche Mathematiker ***David Hilbert*** (1862-1943) war wohl einer der Ersten, der diesen nicht-konstruktiven und auf der Mengelehre beruhenden Weg konsequent ging. Bereits in seiner Habilitationsschrift bewies er so ganz grundlegende Existenzaussagen aus dem Gebiet der sogenannten ***Invarianten-Theorie***. Von Seiten seines älteren Kollegen ***Paul Albert Gordan*** (1837 – 1912) – einem Konstruktivisten alter Schule und heute wohl am ehesten bekannt durch die nach ihm mit-benannten ***Clebsch-Gordan-Koeffizienten*** aus der ***Quanten-Mechanik –*** trug dies Hilbert die Bemerkung ein: ***„Herr Hilbert, was Sie da gemacht haben, ist doch keine Mathematik! Das ist ja Theologie!“*** Hilbert hingegen verlieh seinen Standpunkt andernorts Ausdruck durch die Aussage: ***„Wir lassen uns nicht aus dem Paradies vertreiben, das uns Cantor eröffnet hat!“***

Nach diesen historischen Vorbetrachtungen müssen wir nun auch ein paar Worte über die Mengelehre selbst sagen. Unter einer ***Menge*** versteht man eine ***Gesamtheit von Objekten***. So bilden etwa die ***Äpfel*** in einem ***Korb*** eine Menge, genauso wie die ***Schüler*** einer ***Klasse***. Aber auch die ***natürlichen Zahlen***, das heisst die Zahlen 1,2,3,... bilden eine Menge, eben die ***Menge der natürlichen Zahlen***. In unseren Vorträgen über den Griff nach dem Unendlichen sind wir aber auch der ***Menge der positiven reellen Zahlen*** begegnet, das heisst der Menge aller Zahlen, die man mit einer Dezimaldarstellung schreiben kann. Auch die ***Menge der positiven Brüche*** *kam damals ins* ins Spiel.
Die ***Objekte***, die zu einer Menge gehören, nennt man die ***Elemente*** dieser Menge. Im Fall des Apfelkorbes sind die einzelnen Äpfel die Elemente, im Fall der Schulklasse sind es die einzelnen

Schüler. Im Fall der Menge der natürlichen Zahlen sind die Elemente die Zahlen 1,2,3,... .
Eine ***Teilmenge*** einer Menge *M* ist eine Menge, die nur einen Teil der Elemente der Menge *M* enthält. Man kann so die Teilmenge aller Elemente aus *M* bilden, die eine gewisse Eigenschaft haben. So kann man etwa die Menge der Schüler in unserer Klasse bilden, welche schon einmal eine Klasse repetieren mussten, das heisst die Teilmenge der Repetenten.
Man kann aber auch die Menge der geraden Zahlen bilden, das heisst die Teilmenge der natürlichen Zahlen, die durch 2 teilbar sind.

Nun schlug Bertrand Russel vor, man solle folgende Menge bilden ***Die Menge aller Mengen** , **die nicht Element von sich selbst sind***. Nennen wir diese Menge *M*!
Nehmen wir zuerst an, *M* sei ein Element von *M,* also ***ein Element von sich selbst.*** Dann kann aber die Menge *M doch* kein Element von *M* sein: die Elemente von *M* sind ja Mengen, die sich nicht Element von sich selbst sind. Aus der Annahme, dass *M* ein Element ist von *M* folgt also, dass *M* kein Element ist von *M*. Dies ist ein Widerspruch! Also kann *M* kein Element von *M* sein.
Das heisst aber, dass die Menge *M* nicht Element von sich selbst ist. Damit ist *M* aber doch ein Element von *M* und damit ein Element von sich selbst. Wieder gelangen wir so zu einem Widerspruch. Die von Russell vorgeschlagene Menge kann es also gar nicht geben, denn ihre Existenz führt zwingend zu einem logischen Widerspruch.
Die von Russell vorgeschlagene Menge führt also zu einem Selbstwiderspruch, und ist deshalb eine Antinomie. Sie ist als ***Russell'sche Antinomie*** in die Mathematik und die Philosophie eingegangen.

Nach der Cantor'schen Mengelehre dürfte man aber die ***Menge aller Mengen*** bilden und von dieser die Teilmenge der Mengen, die eine gewisse Eigenschaft haben – zum Beispiel die Eigenschaft, nicht Element von sich selbst zu sein. Die von Russell vorgeschlagene Menge müsste also gemäss der Cantor'schen Mengelehre existieren. Doch eben haben wir uns überlegt, dass es diese Menge nicht geben kann.
Die Russel'sche Antinomie zeigt deshalb, dass die Mengenlehre, so wie sie durch Cantor formuliert worden war, selbst-widersprüchlich ist – oder ***inkonsistent***, wie man in der Mathematik sagt. Bei den damals immer noch vorhandenen ***Gegnern der Mengenlehre*** löste die Russell'sche Antinomie natürlich einen Triumph aus, denn diese verhasste Theorie brach ja, wie man nun deutlich sehen konnte, an ihrer eigenen Selbstwidersprüchlichkeit in sich zusammen. Bei manchen Mathematikern, welche die Mengenlehre schätzen gelernt hatten und sie gar wie Hilbert emphatisch als ***Paradies*** anpriesen, löste die Russell'sche Antinomie einen ***Schock*** aus: Die von Cantor entwickelte Theorie – die ***naive Mengenlehre***, wie sie von nun an hiess – stand auf zerbrechlichen Füssen. Sie war deshalb nicht die ***Fundamental-Theorie*** der Mathematik, für die man sie hätte halten können.

Doch war damit in der Tat nicht das letzte Wort gesprochen. Offenbar war Cantors naiver Ansatz zu grosszügig im Bereich der Mengenbildung. Einfach eine Aussage herzunehmen, und dann die Menge der Objekte zu bilden, welche dieser Aussage genügen, kann zu Selbstwidersprüchen führen, wie zum Beispiel zur Russell'schen Antinomie. Die Regeln für die Mengenbildung mussten also eingeschränkt werden. Russell selbst schlug deshalb eine neue Theorie vor, die sogenannte ***Typentheorie,*** in deren Rahmen eine Neuformulierung der Mengenlehre möglich war, in der seine Antinomie vermieden werden konnte. Doch Russell's Ansatz konnte in der Mathematik nicht Fuss fassen, da er zu schwerfällig und zu einschränkend war.
Wie wir in den Vorträgen über den „Griff nach dem Unendlichen" schon berichtet haben, war zur selben Zeit auch eine heftige Kontroverse um die sogenannte ***Kontinuums-Hypothese*** im Gang, eine Hypothese, die auf Cantor zurückging. Diese Kontroverse liess ebenfalls zusehends den Gedanken aufkommen, die naïve Cantor'sche Mengenlehre müsse auf ein solides Fundament gestellt werden: auf ein System von ***Axiomen*** welches genaue Regeln für die Mengenbildung festlegte. Wie wir in den genannten Vorträgen schon gehört haben, wurden dann auch verschiedene solcher Axiomensysteme vorgeschlagen.
Das heute am Meisten verwendete ***Axiomensystem für die Mengenlehre*** geht zurück auf den

schon genannten Deutschen Mathematiker Ernst Zermelo und den Deutsch-Israelischen Mathematiker ***Abraham-Halevi Fraenkel*** (1891-1965) – das ***Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel***, meist abgekürzt mit ***ZF***. Dieses System entstand in mehreren Etappen. Im Jahre 1907 schlug Zermelo eine erstes Axiomensystem vor, das im Jahre 1921 von Fraenkel ergänzt wurde und dann schliesslich im Jahre 1930 durch Zermelo in seine endgültige Form gebracht wurde. Im Jahre 1929 formulierte der Norwegische Mathematiker ***Thoralf Skolem*** (1887-1963) das Axiomensystem ZF im sogenannten ***Prädikatenkalkül***, einer ***formalen Sprache***, die man mit einer ***Computer-Programmier-Sprache*** vergleichen kann. Die von Zermelo vorgeschlagene letzte Version wurde unverzúglich auch in diesem Kalkül wiedergegeben. Durch die Fassung der Axiome im Prädikatenkalkül wurden noch bestehende Unklarheiten über den ***Begriff der Aussage*** aus der Welt geschafft und die Mengenlehre den Methoden der ***formalen Logik*** zugänglich gemacht.

Über die dramatischen Geschehnisse um Zermelo und Fraenkel zur Zeit des National-Sozialismus wurde in den Vorträgen über den „Griff nach dem Unendlichen“ schon berichtet. Hier wollen wir dazu nur nochmals folgendes in Erinnerung rufen: Zermelo, der ursprünglich Dozent an der Universität Göttingen war, dann an der Universität Zürich und schliesslich nach längerer Krankheit Professor an der Universität im Deutschen Freiburg lehrte, wurde dort von seinem Dienst suspendiert weil er sich weigerte, seine Vorlesungen mit dem Hitler-Gruss zu eröffnen. Auch sein sehr hohes internationales Ansehen als Wissenschafler schützte ihn nicht vor dieser Willkür-Massnahme. Fraenkel, zu jener Professor an der Universität Kiel, konnte sich der Deportation in ein Konzentrationslager nur entziehen, indem er mit seiner jungen Familie auf einer überstürzten nächtlichen Flucht ohne Geld und ohne jede Habe Deutschland verliess. Dass er später seinen ursprünglichen ersten Vornamen Adolf aus dem Namensregister streichen liess, überrascht deshalb nicht.

Nun kann man sich fragen, auf welche Weise im Axiomensystem ZF die ***Russell’sche Antinomie verhindert*** wird. Dies geschieht durch das sogenannte ***Irreflexivitäts-Prinzip*** das besagt, dass keine Menge Element von sich selbst sein kann. Dieses Prinzip verhindert in der Tat das Bilden der Russell’schen Menge M, das heisst der Menge aller Mengen, die nicht Element von sich selbst sind. Dies wollen wir uns im folgenden klar machen. Nehmen wir dazu nochmals an, dass M als Menge existiert.
Dies führt dann zu einem Widerspruch zum Irreflexivitäts-Prinzip, wie wir gleich sehen werden. Nach diesem Prinzip wäre M zunächst einmal die Menge aller Mengen, denn keine Menge ist ja Element von sich selbst. Wäre nun M eine Menge, so müsste M Element von sich selbst sein, was in der Tat dem Irreflexivitäts-Prinzip widerspricht.
Damit ist M keine Menge mehr, sondern ein neuartiges Objekt, das man ***Klasse*** nennt. Die Russell’sche Antinomie hat sich damit in Schall und Rauch aufgelöst.

In den Vorträgen zum Thema „der Griff nach dem Unendlichen“ haben wir bereits eingehend die fundamentale ***Änderung*** im ***Selbstverständnis*** der ***Mathematik*** beschrieben, welche mit der Axiomatisierung der Mengenlehre einherging. Ergänzend können wir jetzt feststellen, dass die Russell’sche Antinomie ebenfalls einen ganz wesentlichen Anstoss zu dieser Axiomatisierung gab, und damit indirekt zu einem ganz neuen Verständnis der ***Grundlagen der Mathematik*** und der ***Logik***. Die ursprüngliche ***Schockwirkung*** dieser Antinomie wurde also schliesslich zu einem ***fruchtbaren Impuls*** für die Weiterentwicklung der ***Mathematik*** und der ***Philosophie.***

Schliesslich möchte ich doch nochmals auf die im letzten Vortrag behandelte ***Antinomie*** des ***Barbiers im Irischen Dorf*** zurückkommen, die ja ebenfalls auf Russell zurückgeht. Er hat diese Antinomie als Illustration für seine Antinomie in der Mengenlehre verstanden. Wir wollen diesen Gedanken kurz wiedergeben der auf einer Umbennenung beruht. Anstatt ***Männer*** (im Irischen Dorf) sagen wir ***Mengen***. Wenn der Herr A den Herrn B ***rasiert*** (Entschuldigung: die Menge A die Menge B), so sagen wir B ***sei Element von*** A. Der Barbier heisse M. Gemäss Vertrag sind seine

Elemente die Mengen, die nicht Element von sich selbst sind. Doch diese Menge kann es ja gar nicht geben. Deshalb ist der in Pub abgeschlossene Vertag ja auch Unsinn.
Bringen wir noch das Irreflexivitäts-Prinzip ins Spiel! Dieses besagt, dass keine Menge Element von sich selbst sein kann. Es verbietet also unseren Dorfbewohnern, sich selbst zu rasieren. Die Elemente von M sind jetzt alle Mengen, ausser M selbst, denn nach dem Irreflexivitäts-Prinzip darf er nicht Element von M sein. Damit gehört M aber gar nicht mehr zu den Mengen. Nicht so schlimm: Der Mann ist eine ***Klasse*** für sich und lässt seinen Bart ungehindert wachsen....

Die Richard'sche Antinomie: *Ein Selbstwiderspruch in der Arithmetik?*

Nun wollen wir uns einer weiteren Antinomie zuwenden, welche die Mathematiker in den ersten Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts herausforderte: Die sogenannte ***Richard'sche Antinomie***, die im Jahre 1905 vom Französischen Mathematiker ***Jules Richard*** (1862-1956) gefunden wurde. Diese Antinomie spielt in einem Bereich, der den meisten von Ihnen vertrauter sein wird als die Mengenlehre – nämlich in der ***elementaren Arithmetik***. Es geht also bei dieser Antinomie um die ***positiven ganzen Zahlen***, die man auch ***natürliche Zahlen*** nennt, als um die Zahlen 1,2,3,4,5,... mit denen wir ***zählen*** und mit denen wir – mit Spass oder Schrecken – schon in der Primarchule zu ***rechnen*** lernen.

Wir wollen uns nun dieser Richard'schen Antinomie näher zuwenden. Wir wählen dazu allerdings nicht die Originalform dieser Antinomie, wie sie von Richard selbst formuliert wurde, sondern eine später formulierte Variante. Wir gehen dabei aus von ***Aussagen***, die man über eine beliebige natürliche Zahl machen kann. Wir nennen diese beliebige Zahl immer **x**. Solche Aussagen schreiben wir dann symbolisch in der Form A(**x**). Beispiele solcher Aussagen A(**x**) sind etwa: "**x** = 2", "**x** ist eine gerade Zahl", "**x** ist eine Primzahl", "**x** = 3 - 11**x**", "**x** lässt bei der Division durch 7 den Rest 3“, „**x** ist die Quersumme der Zahl 146'075“,...

Halten wir nochmals fest: Wir betrachten immer Aussagen A(**x**), in welchen "**x**" vorkommt. Für "**x**" setzt man dann eine natürliche Zahl ein, also eine der Zahlen 1,2,3,4,.... Je nach der eingesetzten Zahl, kann dann die Aussage ***wahr*** oder ***falsch*** sein. Ist die Aussage A(**x**) wahr, wenn wir in sie anstelle von **x** die Zahl 1 einsetzen, so sagen wir kurz einfach, A(1) sei wahr. Ist die Aussage A(**x**) falsch, wenn wir in sie anstelle von **x** die Zahl 1 einsetzten, so sagen wir A(1) sei falsch. Ist die Aussage A(**x**) wahr, wenn wir in sie anstelle von **x** die Zahl 2 einsetzen, so sagen wir, A(2) sei wahr. Ist die Aussage A(**x**) falsch, wenn wir in sie anstelle von **x** die Zahl 2 einsetzten, so sagen wir A(2) sei falsch. Ganz allgemein sagen wir für eine beliebige natürliche Zahl n, dass A(n) ***wahr*** ist, wenn wir beim Einsetzen von n in die Aussage A(**x**) etwas Wahres erhalten und – entsprechend – dass A(n) ***falsch*** ist wenn wir beim Einsetzen von n in die Aussage A(**x**) etwas Falsches erhalten.

Betrachten wir etwa unsere erste oben angegebene Aussage, also die Aussage "**x**=2"! Setzen wir für "**x**" den Wert "2" ein, so erhalten wir „2=2“, also eine wahre Aussage. Setzen für "**x**" aber den Wert "1" ein, so erhalten wir „1=2“, also etwas Falsches. Setzt man anstelle von “**x**” etwa "3" oder irgendeine anderen von 2 verschiedene Zahl ein, so erhält man immer eine falsche Aussage.

Wichtig ist, dass alle unsere Aussagen ***entscheidbar*** sind. Das heisst: Für jede Zahl, die wir anstelle von **x** in eine unserer Aussage einsetzen, soll eindeutig feststehen, ob die Aussage wahr oder falsch wird. Anders gesagt: ***Für jede unserer Aussagen A(x) und jede natürliche Zahl n soll eindeutig feststehen, ob A(n) wahr oder falsch ist.***

Bei allen Beispielen, die oben genannt wurden ist dies in der Tat der Fall: Zum Beispiel ist die Aussage "**x** ist eine Primzahl" wahr, wenn wir anstelle von "**x**" etwa "2", "3", "5", "7", "11", "13" einsetzen. Sie wird aber falsch, wenn wir anstelle von "**x**" etwa "4", "6" oder "30128" einsetzen...

Ich überlasse es Ihnen, liebe Hörerinnen und Hörer, zu den weiteren angeführten Beispielen entsprechende Überlegungen anzustellen.

Nun wollen wir in Gedanken versuchen, ***alle überhaupt möglichen Aussagen*** der genannten Art hin zu schreiben – ***also alle entscheidbaren Aussagen*** A(**x**) ***die wir über eine beliebige natürliche Zahl* x *machen können***. Zuerst überlegen wir uns, mit welchen Zeichen wir diese Aussagen überhaupt hinschreiben können. Wir benötigen die ***25 Grossbuchstaben*** und die ***25 Kleinbuchstaben*** des Alphabets, um die ***mathematischen Operationssymbole*** „ + “, „ - “ , „ x “ und „ : “. Zudem braucht man zum Hinschreiben von Formeln auch ***Klammern***. Nehmen wir also noch die nach rechts offene Klammer „ (“ und die nach links offene Klammer „) “ dazu. Selbstverständlich müssen wir auch alle ***natürlichen Zahlen*** „ 1,2,3,4,... “ dazu nehmen.

Jetzt stellen wir uns die Aufgabe, alle unsere ***Aussagen*** durch zu ***nummerieren***! Dazu ***nummerieren*** wir zuerst alle ***Zeichen***, die wir zur Niederschrift unserer Aussagen verwenden. Die 25 Grossbuchstaben des Alphabets nummerieren von 1 bis 25. Dann fahren wir fort mit den 25 Kleinbuchstaben, die wir mit den Nummern 26 bis 50 versehen. Dann fahren wir weiter mit den vier mathematischen Operationssymbolen. Dem Plus-Zeichen „ + “ geben wir die Nummer 51, dem Minus-Zeichen „ – " die Nummer 52, dem Mal-Zeichen „ x “ die Nummer 53 und dem Durch-Zeichen „ : “ die Nummer 54. Dann kommen die Klammern dran: Der nach rechts offenen Klammer „ (" geben wir die Nummer 55 und der nach links offenen Klammer „) “ die Nummer 56. Das Symbol „ **x** “, das in jeder Aussage vorkommt, wollen wir fett schreiben, und geben ihm die Nummer 57.
Schliesslich müssen wir nun noch die Zahlen „ 1,2,3,4,... “ mit Nummern versehen. Dabei dürfen wir natürlich die schon vergeben Nummern 1 – 57 nicht mehr verwenden. Um dies zu erreichen addieren wir zu jeder natürlichen Zahl den Wert 57 und wählen die erhaltene Summe als Nummer. Die Zahl 1 erhält so die Nummer 1 + 57 = 58, die Zahl 2 erhält die Nummer 2 + 57 = 59, die Zahl 3 erhält die Nummer 3 + 57 = 60, … .

Nun wählen wir eine unserer Aussagen A(**x**) und schreiben sie in Gedanken vor uns hin. Unter jedes Zeichen in unserer Aussage schreiben wir seine Nummer. Dann addieren wir all diese Nummern. So erhalten wir eine neue Zahl, die wir den ***Grad*** unserer Aussage A(**x**) nennen wollen. Wählen wir nun eine beliebige natürliche Zahl – nennen wir sie n – so gibt es höchstens endlich viele Aussagen, deren Grad den Wert n annimmt. Dabei kann es durchaus vorkommen, dass für ein bestimmtes n gar keine Aussage mit dem Grad n existiert.

Für jede natürlich Zahl n tun wir nun folgendes: Wir sammeln alle (die endlich vielen) Aussagen mit dem Grad n und schreiben sie in Gedanken auf ein grosses Blatt, dem wir oben die Seiten-Nummer n geben. Schliesslich fassen wir in Gedanken alle diese Blätter zu einem ***Buch mit unendlich vielen Seiten*** zusammen. Nun gehen wir in Gedanken dieses unendlich grosse Buch Seite für Seite durch und ordnen auf jeder Seite die Aussagen die wir dort finden ***alpha-nummerisch***. Das heisst wir ordnen die Aussagen wie man Wörter alphabetisch ordnet, verwenden aber anstelle von Buchstaben die Nummern, die wir den einzelnen Zeichen gegeben haben. Zum Schluss nummerieren wir alle Aussagen im ganzen unendlichen Buch laufend durch – beginnend auf der ersten nicht-leeren Seite mit den von oben nach unten alpha-nummerisch geordneten Aussagen, dann weiterfahrend auf der zweiten nicht-leeren Seite mit den von oben nach unten alpha-numerisch geordneten Aussagen,...

Auf diese Weise haben wir dann alle Aussagen durchnummeriert. Jede unserer Aussagen A(**x**) erhält so eine ***Nummer***. Die erste Aussage – also die Aussage mit der Nummer 1 – wollen wir nun mit A_1(**x**) bezeichnen. Die zweite Aussage – also die Aussage mit der Nummer 2 – wollen wir mit A_2(**x**) bezeichnen. Die dritte Aussage – also die Aussage mit der Nummer 3 – wollen wir mit A_3(**x**) bezeichnen. So fahren wir immer weiter. Ist n eine beliebige natürliche Zahl, so schreiben wir also A_n(**x**) für die Aussage mit der Nummer n.

Nun wollen wir eine ganz besondere Aussage formulieren. Dazu bilden wir als erstes die Aussage A_**x**(**x**), welche wir die ***Diagonal-Aussage*** nennen wollen und die wir mit D(**x**) abkürzen**.** Setzen wir in diese Diagonal-Aussage anstelle von **x** die Zahl 1 ein, so erhalten wir etwas Wahres, wenn das Einsetzen von 1 in die Aussage mit der Nummer 1 etwas Wahres liefert, also wenn A_1(1) wahr ist. Andrerseits erhalten wir etwas Falsches, wenn das Einsetzen von 1 in die Aussage mit der Nummer 1 etwas Falsches liefert, also wenn A_1(1) falsch ist. Setzen wir in unsere Diagonal-Aussage anstelle von **x** die Zahl 2 ein, so erhalten wir etwas Wahres, wenn das Einsetzen von 2 in die Aussage mit der Nummer zwei etwas Wahres liefert, also wenn A_2(2) wahr ist – und etwas Falsches, wenn das Einsetzen von 2 in die Aussage mit der Nummer 2 etwas Falsches liefert, also wenn A_2(2) falsch ist... Wir können also allgemeiner sagen:
Setzen wir in die Diagonal-Aussage D(**x**) ***anstelle von x die Zahl n ein, so erhalten wir etwas Wahres, wenn das Einsetzen der Zahl n in die Aussage mit der Nummer n etwas Wahres ergibt, also wenn*** A_n(n) ***wahr ist – und etwas Falsches, wenn das Einsetzen der Zahl n in die Aussage mit der Nummer n etwas Falsches ergibt, also wenn*** A_n(n) ***falsch ist.*** Oder kurz gesagt:

(#) D(n) ***ist wahr, wenn*** A_n(n) ***wahr ist.*** D(n) ***ist falsch, wenn*** A_n(n) ***falsch ist***.

Nun betrachten wir die ***Anti-Diagonal-Aussage***, das heisst die ***Verneinung*** oder ***Negation*** der Diagonal-Aussage, die wir mit ¬D(**x**) abkürzen wollen. Nun können wir folgendes sagen:
Setzen wir in die Anti-Diagonal-Aussage ¬D(**x**) ***anstelle von x die Zahl n ein, so erhalten wir etwas Falsches, wenn*** D(n) ***wahr ist, d. h. wenn*** A_n(n) ***wahr ist. Umgekehrt erhalten wir bei diesem Einsetzen etwas Wahres, wenn wenn*** D(n) ***falsch ist, d.h. wenn*** A_n(n) ***falsch ist .*** Oder, kurz gesagt:

(##) ¬D(n) ***ist wahr, wenn*** A_n(n) ***falsch ist.*** ¬D(n) ***ist falsch, wenn*** A_n(n) ***wahr ist.***

Verglichen mit der Diagonal-Aussage D(**x**) ***vertauscht*** die Anti-Diagonal-Aussage ¬D(**x**) also ***wahr*** und ***falsch***.

Nun hat aber auch unsere Anti-Diagonal-Aussage ¬D(**x**) eine ***Nummer,*** die wir k nennen wollen, was an das Wort ***kritisch*** erinnern soll. Wir dürfen also schreiben ¬D(**x**) = A_k(**x**). Setzen wir nun die Zahl k in die Anti-Diagonal-Aussage ein und überlegen wir uns, ob dabei etwas Wahres oder etwas falsches herauskommt ! Anders gesagt, wollen wir uns überlegen, ob ¬D(k) wahr oder falsch ist. .
Nehmen wir zuerst an ¬D(k) sei ***wahr***. Nach (##) ist dann A_k(k) falsch. Wegen ¬D(**x**) = A_k(**x**) ist dann aber ¬D(k) ***falsch***. Das ist natürlich nicht möglich! Also kann ¬D(k) nicht wahr sein. Wegen der Entscheidbarkeit von ¬D(**x**) ist ¬D(k) dann aber ***falsch.*** Nach (##) ist dann aber A_k(k) wahr. Wegen ¬D(**x**) = A_k(**x**) ist dann aber ¬D(k) ***wahr***. Das ist natürlich auch nicht möglich! Anders gesagt haben wir folgendes festgestellt: ***Ist*** ¬D(k) ***wahr, so ist*** ¬D(k) ***falsch. Ist*** ¬D(k) ***falsch, so ist*** ¬D(k) ***wahr***. Also stellen wir schliesslich fest:

<u>Wenn wir in unsere Anti-Diagonal-Aussage</u> <u>¬D(**x**)</u> ***<u>den Wert k einsetzen, so erhalten wir einen Selbstwiderspruch !!</u>***

Dies ist die angekündigte ***Richard'sche Antinomie***.

Da sich die Richard'sche Antinomie im Rahmen der Elementaren Arithmetik abspielt, stellt sich jetzt natürlich die folgende brennende Frage: ***<u>Ist die Arithmetik inkonsistent, also selbstwidersprüchlich?</u>*** Wenn das so wäre, würde das ganze Gedanken-Gebäude der Arithmetik in sich zusammenbrechen, und damit praktisch die gesamte Mathematik. Oder könnte es sein, dass sich in unsere Konstruktion der Richard'schen Antinomie ein ***Denkfehler*** eingeschlichen hat?

Die neue Kern-Frage: *Was ist eine Aussage?*

Gehen wir nun der eben gestellten Frage nach dem Denkfehler etwas auf den Grund!

Ist n irgendeine natürliche Zahl, so wissen wir nach der oben bemerkten Feststellung (##), dass ¬D(n) wahr ist, wenn A_n(n) falsch ist, und dass ¬D(n) falsch ist, wenn A_n(n) wahr ist. Dass bedeutet insbesondere auch, dass die Aussage ¬D(**x**) von der Aussage A_n(**x**) verschieden ist. Anders gesagt:
Die Anti-Diagonal-Aussage ist verschieden von allen Aussagen A_1(**x**), A_2(**x**), A_3(**x**), … , A_n(**x**), ... ***Die Anti-Diagonal-Aussage ist also verschieden von allen Aussagen*** A(**x**)***, die wir ursprünglich gebildet haben. Sie kommt also unter unseren Aussagen gar nicht vor !!***

Das steht natürlich im Widerspruch zu dem, was wir anstrebten. Man könnte sich fragen, ob dies daher kommt, dass wir für unsere Aussagen eine ***ungeeignete Nummerierungs-Methode*** gewählt haben Doch das kann ***nicht die Ursache*** des entdeckten Widerspruchs sein. Die obigen Überlegungen lassen sich nämlich unabhängig von der gewählten Nummerierung durchführen. Sie zeigen allgemein folgendes: Wählt man irgendeine unendliche Folge A_1(**x**), A_2(**x**), A_3(**x**), … , A_n(**x**), ...von entscheidbaren Aussagen, so findet man immer noch eine Aussage, die in dieser Folge nicht vorkommt. Unser Widerspruch muss also eine andere Ursache haben

Was sich hinter dem entdeckten Widerspruch versteckt, ist die ***Problematik des Begriffs der Aussage***, genauer ***der entscheidbaren Aussage***. Machen wir uns dazu einige Gedanken!

Schreiben wir zuerst etwa die Aussage hin „**x** ist eine grüne Zahl“. Rein grammatikalisch gesehen, ist das zwar ein korrekter Satz, also eine Aussage. Ob diese Aussage aber wahr oder falsch wird, wenn wir in sie anstelle von **x** zum Beispiel den Wert 5 einsetzen, ist nicht klar. Die Frage, ob 5 grün sei oder nicht, kann man vielleicht schon diskutieren, aber im Sinne der Arithmetik ist sie sicher ***nicht entscheidbar***.
Es lohnt sich vielleicht schon hier, nachzudenken, warum Sie, liebe Hörerinnen und Hörer, mit mir einig wurden, dass die Aussage „**x** ist eine grüne Zahl“ nicht entscheidbar ist, also nicht in unsere Liste gehört. Sie haben nämlich die Aussage inhaltlich ***verstanden*** und sofort eingesehen, dass man in der Mathematik nicht über die ***Farbe von Zahlen*** spricht.

Doch schauen wir uns nun eine mathematische Aussage an, die wir mit V(**x**) abkürzen wollen. Es handelt sich um die Aussage:

„Es gibt eine natürliche Zahl k > **x** so, dass man 2n sich nicht als Summe von zwei Primzahlen schreiben kann.“

(Zur Erinnerung: Eine natürliche Zahl p ist eine ***Primzahl***, wenn nicht als Produkt von zwei natürlichen Zahlen geschrieben werden kann, die beide kleiner als p sind. Seit der Antike ist bekannt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Die Folge der Primzahlen beginnt mit: 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,...)

Machen wir einige Versuche mit der Aussage V(**x**): Beachten wir, dass **x** für eine natürliche Zahl steht. Die Bedingung k > **x** zieht also insbesondere nach sich, dass k > 1. Es geht also zuerst einmal darum , ob es natürliche Zahlen k > 1 so gibt, dass 2k nicht die Summe von zwei Primzahlen ist. Mit k = 2 gilt 2k = 2 x 2 = 4 = 2+2. Mit k=3 gilt 2k = 2 x 3 = 6 = 3+3. Mit k = 4 gilt 2k = 2 x 4 = 8 = 3+5. Mit k=5 gilt 2n = 2 x 5 = 10 = 3+7 = 5+5. Mit k= 6 gilt 2n = 2 x 6 = 12 = 5+7. ...

Es sieht also danach aus, dass 2k für jede natürliche Zahl k > 1 n also Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden kann, d.h. dass jede Gerade Zahl > 2 die Summe von zwei Primzahlen ist. Selbst unter Einsatz von Hochleistungs-Computern hat man bis heute keine gerade Zahl >2 gefunden, die nicht Summe von zwei Primzahlen ist. Ob das allerdings für alle geraden Zahlen > 2 so sein muss, ist noch nicht bekannt. Der Deutsche Jurist und Mathematiker ***Christian Goldbach*** (1690-1764) hat in der Tat die Vermutung formuliert, dass jede gerade Zahl > 2 die Summe von zwei Primzahlen ist. Doch, diese sogenannte ***Goldbach'sche Vermutung*** ist auch heute noch nicht bewiesen.
Wenn die Goldbach'sche Vermutung richtig ist, dann gibt es zu keiner natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl k > n so, dass 2k ***nicht*** als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden kann. Das würde aber heissen: ***Ist die Goldbach'sche Vermutung richtig, so ist*** V(n) ***für alle Werte*** n ***falsch***.
Wenn die Goldbachsche Vermutung aber falsch ist, dann gibt es eine (nach den heutigen Erkenntnissen sehr grosse) natürliche Zahl k derart, dass 2k ***nicht*** die Summe von zwei Primzahlen ist. ***Für alle natürlichen Zahlen*** n < k ***ist dann*** V(n) ***wahr***. Das heisst aber: <u>***Beim heutigen Wissensstand der Mathematik, ist die Aussage***</u> V(**x**) <u>***nicht entscheidbar.***</u>

Halten wir zusammenfassend fest, was wir oben gesehen haben: Wenn wir in der ***Umgangssprache Aussagen*** formulieren, wie wir es bei der Herleitung der Richard'schen Antinomie getan haben, müssen wir sie inhaltlich ***verstehen***, bevor wir sagen können ob sie entscheidbar sind oder nicht. Haben wir eine solche Aussage A(**x**) verstanden, so müssen wir für jede natürliche Zahl n entscheiden, ob A(n) wahr oder falsch ist. Dieses Verstehen- und Entscheiden-Können hängt aber vom ***Kenntnisenstand der Wissenschaften*** ab. Die von uns geforderte ***Entscheidbarkeit von Aussagen*** ist also problematisch. Ob eine Aussage in unserem Sinne entscheidbar ist, steht nicht unverrückbar und ein für alle Mal fest – selbst wenn sie sich auf ein Gebiet wie die Mathematik bezieht, in dem ja alles Gesagte entscheidbar sein sollte. Genau das haben uns doch die obigen Überlegungen vor Augen geführt.

Wir wollen diese Problematik nun auch an der ***Anti-Diagonal-Aussage*** ¬D(***x***) darlegen. Keine speziellen mathematischen Kenntnisse sind erforderlich um diese Aussage zu verstehen, wenn sie auch gedanklich etwas verdreht daher kommt. Rufen wir uns Erinnerung, wie wir entscheiden müssten ob diese Aussage falsch oder richtig wird, wenn wir in sie anstelle von **x** eine bestimmte natürliche Zahl n einsetzen! Wir müssten in unserm Buch, das alle Aussagen enthält, folgendes tun: ***Zuerst die Aussage mit der Nummer n suchen. Dann in diese Aussage den Wert n einsetzen und schauen, ob dabei etwas Richtiges oder etwas Falsches herauskommt. Damit können wir dann nach*** (##) ***entscheiden ob*** ¬D(n) ***wahr oder falsch ist.***
Doch was geschieht, wenn jemand unser Buch findet, ohne zu wissen worum es hier geht? Er müsste zum Beispiel verstehen, was es heisst, die Aussage mit der Nummer n zu finden. Als Autoren unseres Buches wissen wir das natürlich, denn wir haben die Nummerierung ja vorgeschlagen. Doch im Buch selbst haben wir das Nummerierungs-Verfahren nicht aufgeschrieben. Es wurde ja erst nach dem Niederschreiben aller Aussagen festgelegt. Die Diagonal- und die Anti-Diagonal-Aussage basieren aber auf unserem Nummerierungs-Verfahren. Tatsächlich gilt folgendes: die ***Anti-Diagonal-Aussage*** ist ***nicht mehr entscheidbar*** allein mit Hilfe der Aussagen A_1(**x**), A_2(**x**), A_3(**x**),... – also nur unter Verwendung von Aussagen, die in unserem Buch enthalten sind. ***Wir haben somit in der Umgangssprache arithmetische Aussagen formuliert, die wir in unserem Buch – das ja eigentlich alle Arithmetischen Aussagen enthalten sollte – gar nicht niedergeschrieben haben und das auch grundsätzlich gar nicht können.*** Das entspricht aber nochmals dem, was wir oben schon festgestellt haben: Die Anti-Diagonalaussage ist von allen unseren Aussagen A(**x**) verschieden.

Die Richard'sche Antinomie zeigt also auf, dass ***Entscheidbarkeits-Fragen*** der Arithmetik – und damit der Mathematik insgesamt – nicht behandelt werden können im Rahmen der

Umgangssprache und eines auf ***„wahr“*** und ***„falsch“*** beruhenden ***Entscheidbarkeitsbegriffes***. Angebracht wäre vielmehr die Behandlung in einer ***formalen Sprache***, einer Art ***Computer-Programmier-Sprache***. Über die Entscheidbarkeit einer Aussage müsste man nur auf Grund der Zeichenabfolge in dieser Aussage befinden können, ohne inhaltlich zu verstehen, was die Aussage bedeutet. Über die Richtigkeit oder Falschheit einer Aussage beim Einsetzen konkreter Zahlen müsste dann mit Hilfe eines Algorithmus entschieden werden können, der ebenfalls kein inhaltliches Verständnis voraussetzt, sondern nur von der Zeichenabfolge in der Aussage abhängt. Eine solche formale Sprache steht der Mathematik tatsächlich mit den schon genannten ***Prädikatenkalkül*** zur Verfügung.

Wir haben jetzt eine Problematik berührt, welche in der heutigen Zeit besonders bedenkenswert erscheint: Das Verhältnis zwischen dem ***Wort als Ausdruck des menschlichen Geistes*** – und der ***„Algorithmisierung“*** dieses Wortes und damit seine ***„Ent-Inhaltlichung“*** und ***„Ent-Geistung“***. Übertragen unser heutiges Umfeld geht es also etwa um die Frage: ***Was können Computer im Umgang mit der Sprache und ihren Inhalten leisten und was nicht?***

Bevor wir uns dieser Problematik zuwenden, wollen wir in nächsten Vortag allerdings zunächst das Thema der ***Entscheidbarkeit in der Mathematik*** weiter verfolgen. Wir werden dabei sehen, dass selbst innerhalb der Mathematik, genauer innerhalb der Arithmetik, eine ***Diskrepanz*** zwischen ***Wahrheit*** und ***Beweisbarkeit*** besteht. Im Rahmen der Mathematik finden wir damit ein Abbild dessen, was wir im ersten Vortrag für die Wahrheit des Glaubens gesehen haben: ***Wahre Aussagen müssen nicht beweisbar sein!*** Der Weg zu dieser Einsicht wird uns die ***Grösse*** und gleichzeitig die ***Begrenztheit*** des ***menschlichen Denkens*** vor Augen führen.

Damit werden wir in vertiefter Form nochmals konfrontiert mit Gedanken, die uns in den Vorträgen zum Thema ***„Grenzen des Erkennens“*** schon begegnet sind. Zum Abschluss des heutigen Vortrags möchte ich deshalb wieder zwei Verse aus dem Buch Kohelet anführen, welche zum Ausdruck bringen, dass das ***Tun Gottes –*** insbesondere also auch Seine ***Schöpfung*** und die ihr von Ihm auferlegten ***Gesetze –*** in seiner ganzen Fülle dem menschlichen Denken unzugänglich bleibt (vgl. ***Koh 8, 16-17***):

16 ***Als ich mir vorgenommen hatte zu erkennen, was Wissen wirklich ist, und zu beobachten, welches Geschäft eigentlich auf der Erde getätigt wird, da sah ich ein, dass der Mensch, selbst wenn er seinen Augen bei Tag und bei Nacht keinen Schlaf gönnt, das Tun Gottes in seiner Ganzheit nicht wiederfinden kann, das Tun, das unter der Sonne getan wurde..***

17 ***Deshalb strengt der Mensch, danach suchend, sich an und findet es doch nicht wieder. Selbst wenn der Gebildete behauptet, er erkenne – er kann es doch nicht wiederfinden.***

Die Principia Arithmetica: *Die Arithmetik wird formalisiert.*

Liebe Hörerinnen und Hörer! Blicken wir zunächst zurück auf das, was wir im letzten Vortrag kennen gelernt haben! Wir haben uns der Problematik des ***Wahrheitsbegriffes*** der ***Logik*** und der ***Mathematik*** mit Hilfe der sogenannten ***Antinomien*** genähert, also mit Hilfe von selbst-widersprüchlichen Aussagen. Insbesondere haben wir uns dabei mit der sogenannten ***Richard'schen Antinomie*** befasst, einer Antinomie, die um 1905 vom französischen Mathematiker Jules Richard entdeckt wurde. Erinnern wir uns nochmals daran, wie diese Antinomie zustande kam.

Wir haben als erstes Aussagen betrachtet, die man über natürliche Zahlen machen kann, also über die Zahlen 1, 2, 3, 4,… mit denen wir üblicherweise zählen. Es handelte sich um Aussagen der Form A(**x**), wobei man anstelle von **x** irgendeine natürliche Zahl einsetzen durfte. Aussagen dieser Art sind etwa „ **x** ist eine gerade Zahl “, „ **x** lässt bei der Division durch 7 den Rest 3 “, „**x** ist eine Primzahl “… . Dabei haben wir nur ***entscheidbare Aussagen*** in Betracht gezogen, also Aussagen

für welche bei jeder Wahl von **x** eindeutig feststeht, ob das, was in der Aussage behauptete wird wahr oder falsch ist. Eine Aussage wie etwa „ **x** ist eine grüne Zahl " darf nicht vorkommen, denn ob nun zum Beispiel 5 oder 87 eine grüne Zahl sein soll, ist nicht entscheidbar.
Es gibt unendlich viele Aussagen der gewünschten Art, doch wir haben uns überlegt, dass man diese Aussagen trotzdem durchnummerieren kann. Jede unserer Aussagen A(**x**) erhält so eine Nummer. Schreiben wir A_n(**x**) für die Aussage mit der Nummer n, so können wir alle unsere Aussagen aufzählen. Die Folge A_1(**x**), A_2(**x**), A_3(**x**), A_4(**x**), … ist also eine vollständige Liste unserer Aussagen – eine Liste allerdings, die unendlich ist. Nachdem wir eine solche Nummerierung gewählt hatten, bildeten wir eine spezielle Aussage, die sogenannte ***Anti-Diagonal-Aussage***, die Negation der sogenannten ***Diagonal-Aussage*** A_**x**(**x**). Mit Erstaunen mussten wir dann feststellen, dass diese Anti-Diagonal-Aussage nicht in unserer Liste aller Aussagen erscheint. Dieser Selbstwiderspruch ist genau die Richard'sche Antinomie.
Im ersten Moment waren wir versucht, den Schluss zu ziehen, dass diese Antinomie die sogenannte ***Inkonsistenz*** – das heisst Selbstwidersprüchlichkeit – der ***Elementaren Arithmetik*** belegt, und damit der Mathematik überhaupt. Doch dann haben wir uns klar gemacht, dass die zu Tage getretene Selbstwidersprüchlichkeit nicht in der Mathematik ihre Wurzeln hat, sondern in der ***Sprache***. Wir haben nämlich Aussagen zugelassen, die in der ***Umgangssprache*** formuliert waren, also in einer sogenannten ***natürlichen Sprache***. Deshalb lässt sich aber nicht immer feststellen, ob eine vorgegebene Aussage wirklich in dem strengen Sinne entscheidbar ist, wie wir das forderten.

Um die Richard'sche Antinomie zu vermeiden, müsste man also alle Aussagen in einer sogenannten ***formalen Sprache*** niederschreiben, zum Beispiel im schon genannten ***Prädikatenkalkül***.
Wir skizzieren in stark vereinfachter Form, wie wir dabei vorgehen müssten: Auch jetzt sollten wir von einem ***Alphabet*** ausgehen, das verschiedene ***Typen*** von ***Zeichen*** enthält, etwa die Folgenden (aus typographischen Gründen verwenden wir teilweise andere Symbole als üblich) :

Variablensymbole wie „ **x**, **y**, **z**, …"
Hilfssymbole wie Klammern „ (" , „) "
Logische Symbole wie:
(a) „ & " (entsprechend der ***Konjunktion***: „ … und … "),
(b) „ ➔ " (entsprechend der ***Implikation***: „ Aus … folgt … ") ,
(c) „ ¬ " (entsprechend der ***Negation***: „ Es gilt nicht … "),
(d) „ \ex. " (entsprechend dem ***Existenz-Quantor***: „ Es gibt … so, dass gilt … "),
(e) „ \all. " (entsprechend dem ***All-Quantor***: „ Für alle … gilt … "),
4) ***Arithmetisches Symbole*** wie
(a) „ * " (entsprechend der ***arithmetischen Nachfolgerbildung***, d.h. der Addition von 1: „ … +1"),
(b) „ + " (entsprechend der ***Summenbildung***, also der Addition „ … + … "),
(c) „ # " (entsprechend der ***Produktbildung***, also der Multilikation „ ... # … "),
(d) „ = " (entsprechend der ***arithmetischen Gleichheit***: „ … ist gleich … ") und
(e) „ 0 " (entsprechend dem ***Nullsymbol***, das für die Zahl Null steht.

Mit dem Nullsymbol und dem Nachfolger-Symbol kann man jetzt alle ***natürlichen Zahlen*** wie folgt im Prädikatenkalkül ***symbolisch*** niederschreiben: 1 = 0*, 2= (0*)*, 3 = ((0*)*)*, 4= (((0*)*)*)*, 5 = ((((0 *)*)*)*)*, … . Der Kürze halber nennen wir die Zahl 0 und die natürlichen Zahlen ab jetzt einfach nur ***Zahlen***. In der Regel verwendet man für die symbolisch geschriebenen natürlichen zahlen eine spezielle Notationsweise, wie etwa 1' statt 0*, 2' statt 2= (0*)* … . Wir wollen hier der Einfachheit halber darauf verzichten.

Nach genau festgelegten ***Syntax-Regeln*** darf man nun gewisse endliche Folgen bilden, die aus den obigen Zeichen zusammengesetzt sind, und die man ***formale Aussagen*** nennt. Natürlich würde es viel zu weit führen, diese Syntax-Regeln hier zu erklären. Übertragen in ein Umfeld, das manchen von Ihnen vertraut sein mag, könnte man unsere formalen Aussagen vergleichen mit den ***Befehlen*** in einer ***Computer-Programmier-Sprache***. Man kann diese formalen Aussagen zwar ***inhaltlich*** oder ***semantisch interpretieren***, man bildet sie nach rein formalen Regeln, ohne dass man sie dazu inhaltlich verstehen muss. So kann ein ***Computer*** – ein ***blitzschneller Idiot***, wie er auch schon genannt wurde – solche Aussagen hinschreiben und das in unabsehbar grosser Anzahl, wenn es sein muss. Ebenso kann er nachrüfen, ob eine bestimmte Zeichenfolge wirklich eine formale Aussage ist.

Beispiele von formalen Aussagen sind etwa: „ **x*** = 4 “ , „ 2#**x** = **y** “, „ (\all.**x**)(¬(**x*** = **x**)) “ oder „ (\ex.**x**)(**x*** = 2) “. Formalen Aussagen lassen sich immer interpretieren. Im Fall unserer vier Beispiele ergeben sich respektive die Interpretationen „ x + 1 = 4. “, „ 2 # x = y. “, „Für alle x ist x +1 nicht gleich x. “, „ Es gibt ein x so, dass x + 1 = 2 gilt. “

Kommt die Variable **x** in der formalen Aussage A vor, so schreiben wir diese formale Aussage in der Form A(**x**). Eine formale ***Teil-Aussage*** einer formalen Aussage A ist eine Abfolge von direkt aufeinander folgenden Zeichen, die selbst wieder eine formale Aussage ist.
Man sagt, dass die Variable **x** in der Aussage A(**x**) ***nicht frei vorkommt***, wenn sie überall, wo sie erscheint in einer formalen Teilaussage der Form (\all.**x**)B(**x**) oder der Form (\ex.**x**)C(**x**) vorkommt. Andernfalls sagen wir, dass die Variable **x** in A(**x**) ***frei vorkommt***. Betrachten wir die obigen vier Beispiele, so sehen wir, dass **x** in den formalen Aussagen „ **x*** = 4 “ und „ 2#**x** = **y** “ frei vorkommt, in den Aussagen „ (\all.**x**)(¬(**x*** = **x**)) “ und „ (\ex.**x**)(**x*** = 2) “ aber nicht.
Kommt die Variable **x** in der formalen Aussage A(**x**) frei vor, so können wir eine bestimmte Zahl x wählen und diese überall anstelle von **x** einsetzen. So erhalten wir eine neue formale Aussage, die wir als A(x) schreiben. In dieser neuen formalen Aussage A(x) kommt die Variable **x** nicht mehr frei vor.

Da wir Arithmetik betreiben wollen – also ***Mathematik*** – wissen wir bereits aus unseren früheren Vorträgen, was nun als nächstes zu tun ist: Es gilt, ***Axiome*** festzulegen. Diese müssen natürlich als formale Aussagen niedergeschrieben werden. Wenn man sie interpretiert, sollten sie mit Vorteil unmittelbar einleuchten.

Ein erstes Axioms ist die Zeichenfolge „ (\all.**x**)(¬(**x*** = 0)) “. Interpretiert man diese formale Aussage so besagt sie: „Für alle Zahlen x gilt folgendes: Der Nachfolger x* = x+1 von x ist nie Null. “.

Ein weiteres Beispiel eines Axioms ist die Zeichenfolge „ (\all.**x**)(\all.**y**) ((**x*** = **y***) ➔(**x** = **y**)) “. Interpretiert besagt diese formale Aussage: „ Für alle Zahlen x und für alle Zahlen y gilt folgendes: Stimmen x+1 und y+1 überein, so stimmen auch x und y überein.“ Auch das scheint uns absolut glaubwürdig.

Ebenso einleuchtend ist das Axiom “ (\all.**x**)(**x**+0 = **x**) ”, das interpretiert folgendes besagt: “Für alle Zahlen x gilt folgendes: Addiert man 0 zu x, so ergibt wieder die Zahl x.“ Auch das sind wir sicher gerne zu glauben bereit.

Ein weiteres Axiom ist die formale Aussage “ (\all.**x**)(\all.**y**)(**x** + (**y**)* = (**x** + **y**)*) ”. Interpretiert wird diese Aussage wie folgt: “ Für alle Zahlen x und für alle Zahlen y gilt folgendes: Addiert man zu x den Nachfolger y* = y+1 von y, so erhält man das Selbe, wie wenn man erst x und y addiert und dann den Nachfolger (x + y)+1 der Summe x + y bildet. ” Es gilt also die Formel „ x+(y+1) = (x+y)+1 “ - ein Spezialfall des sogenannten ***Assoziativ-Gesetzes der Addition***. Auch dise Aussage glauben wir sicher.

Das nächste Axiom betrifft die Multiplikation mit der Zahl 0. Es handelt sich um die formale

Aussage (\all.**x**)(**x** # 0 = 0) ” mit der Interpretation: “ Für all Zahlen x gilt: Multipliziert man x mit 0, so erhält man die Zahl 0. ” Auch das ist uns wohl vertraut.

Ein weiteres Axiom betrifft die Beziehung zwischen der Produkt-Bildung und der Bildung des Nachfolgers. Es handelt sich um die formale Aussage: “ (\all.**x**)(\all.**y**)(**x** # (**y**)* = (**x** # **y**) + **x**) ”. Die Interpretation dieser formalen Aussage lautet: „Für alle Zahlen x und für alle Zahlen y gilt folgendes: Multipliziert x mit den Nachfolger y+1 von y, so erhält man das Gleiche, wie wenn man zum Produkt von x mit y die Zahl x addiert. “ Diese Tatsache wird durch die Formel “ x # (y + 1) = (x # y) + x “ ausgedrückt, welche einem Spezialfall der ***Distributiv-Gesetzes der Multiplikation*** entspricht. Nach dem Nachrechnen einiger Beispiele wird man auch dieses Axiom als einleuchtend betrachten können.

Schliesslich müssen wir noch ein anspruchsvolleres aber sehr wichtiges Axiom anführen, das sogenannte ***Induktions-Axiom***. Wir gehen dazu aus von einer formalen Aussage B = B(**x**) in welcher die Variable **x** frei vorkommt. Dann bilden wir aus B(**x**) eine neue formale Aussage, nämlich:

(*B) „ (B(0) & ((\all.**x**)(B(**x**) ➔ B(**x***))) ➔ (\all.**x**)(B(**x**)) “.

Diese formale Aussage hat die folgende Interpretation: „ Gilt B(0) und folgt für alle Zahlen x aus B(x) auch immer B(x+1), so gilt B(x) für alle x. “ Diese neue formale Aussage belehrt uns also, wie sich nachweisen lässt, dass die formale Aussage B(x) für alle Zahlen x = 0, 1, 2, 3, 4,... richtig ist:
Man zeigt zuerst, dass B(0) richtig ist. Diesen Nachweis nennt man die ***Induktions-Verankerung.*** Dann zeigt man, dass aus der Richtigkeit von B(x) immer auch die Richtigkeit von B(x+1) folgt. Diesen Nachweis nennt man den ***Induktions-Schritt***. Wenn beides gezeigt ist – also die Induktions-Verankerung und der Induktionsschritt durchgeführt sind – folgt in der Tat, dass B(x) für alle Zahlen x = 0, 1, 2, 3, … gilt.
Das eben erörterte ***Beweis-Prinzip*** nennt man das ***Prinzip der vollständigen Induktion***. Wir nehmen es in unsere Axiome auf, indem wir für jede formale Aussage B(**x**) mit der freien Variablen **x** die oben gebildete formale Aussage (*B) hinzunehmen. Wir reden dann auch von „dem“ ***formalen Induktions-Axiom*** obwohl es sich genau genommen um eine ***unendliche Menge von Axiomen*** handelt, die aber alle nach dem gleichen Prinzip gebildet sind.

Die oben genannten formalen Axiome nennt man ***formale Peano-Axiome der Elementaren Arithmetik***, denn sie wurden vom Italienischen Mathematiker ***Giuseppe Peano*** (1858-1932) vorgeschlagen – allerdings nicht in einer formalen Sprache. Die Gesamtheit dieser Axiome nennt man auch das ***formale Axiomen-System von Peano***.

Da wir ***Mathematik*** betreiben, müssen wir über die Richtigkeit einer formalen Aussage mit Hilfe eines ***Beweises*** entscheiden. ***Ein Beweis ist dabei eine Abfolge von Aussagen, die sich nur mit Hilfe der logischen Denkgesetze aus den Axiomen ergeben***. Auch dieses Konzept lässt sich ins Formale übertragen:

Ein ***formaler Beweis*** einer formalen Aussage B ist eine geeignete ***endliche Abfolge von formalen Aussagen***, die mit der Aussage B endet. Diese Abfolge von formalen Aussagen muss ihrerseits wieder strengen Regeln genügen, den sogenannten ***formalen Schlussregeln***. Diese formalen Schlussregeln entsprechen den ***Schlussregeln der Logik***, wenn man sie interpretiert.

Natürlich können wir hier nicht dieses formal-logische Beweis-Regelwerk wiedergeben. Wir begnügen uns mit der Angabe von drei ganz einfachen Beispielen.
Ein erstes Beispiel sind die ***Axiome*** selbst. Schreibt man ein solches hin, so gilt es als sein eigener

Beweis.
Ein zweites Beispiel ist das in der Philosophie als ***Modus Ponens*** bezeichnete Schlussprinzip. Dieses besagt folgendes: „ Wenn die Aussage U gilt und wenn aus der Aussage U die Aussage V folgt, so gilt auch die Aussage V “. Ins Formale umgesetzt: Sind U und V zwei formale Aussagen und sind die Aussagen U und U➔ V bewiesen, so ist auch die Aussage V bewiesen.
Schliesslich wollen wir noch die ***Variablen-Substitution*** erwähnen: Ersetzt man in einer bewiesenen formalen Aussage A eine bestimmte Variable (zum Beispiel **y**) überall, wo sie vorkommt, durch eine andere Variable, die in A nicht vorkommt (zum durch Beispiel **x**), so gilt die formale Aussage, die man so erhält , als bewiesen. Kurz gesagt: „ Ist die Aussage A(**y**) bewiesen und kommt die Variable **x** in A(**y**) nicht vor, so ist auch die Aussage A(**x**) bewiesen.“

Mit Hilfe der formalen Schlussregeln kann man nun ***entscheiden***, ob irgend eine Abfolge von formalen Aussagen ein formaler Beweis einer formalen Aussage B ist. Diese Arbeit kann im Prinzip wieder von einem ***Computer*** geleistet werden, der zwar nicht versteht, was er tut, aber dafür in Blitzes-Schnelle tausende von Malen hoch-komplizierte formale Regeln nachprüfen kann, mindestens wenn er dafür programmiert worden ist.

Man nennt eine formale Aussage ***formal beweisbar***, wenn sie einen ***formalen Beweis besitzt***, wenn sie also am Ende einer endlichen Abfolge von formalen Aussagen steht, welche den formalen Beweisregeln genügt. ***Eine formal beweisbare Aussage ist immer wahr*** – mindestens wenn wir davon ausgehen, dass unsere formale Theorie ***konsistent*** ist, wenn man also nicht alle formalen Aussagen formal beweisen kann.

Insgesamt haben wir jetzt ein ***formales System*** zur Verfügung, in dem sich elementare ***Arithmetik*** betreiben lässt – ein System, das weitgehend der ***Principia Arithmetica*** entspricht, wie sie vom schon mehrfach erwähnten grossen Deutschen Mathematiker David Hilbert eingeführt worden war.

Der Gödel'sche Unvollständigkeits-Satz: *Wahres muss nicht immer beweisbar sein.*

Der Mährisch-Österreichisch-Amerikanische Mathematiker ***Kurt Gödel*** (1906-1978) – von dem in unseren Vorträgen über den „Griff nach dem Unendlichen“ schon die Rede war – bewies im Jahre 1931 ein ***epochales Resultat***, nämlich die sogenannte ***Unvollständigkeit der Principia Arithmetica***. Als Gödel diese Arbeit schrieb, war er noch keine 25 Jahre alt. Unter dem Titel ***„Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I”*** erschien sie im 1931 in den ***Monatsheften für Mathematik***, wo sie durch den Autor am 17. November 1930 eingereicht worden war. Im Titel spricht Gödel von der ***Principia Mathematica*** und nimmt damit Bezug auf ein von ***Bertrand Russell*** vorgeschlagene Formalisierung der Mathematik. Wir wollen auf Gödels Arbeit im Folgenden etwas näher eingehen, ohne natürlich ihren Inhalt detailliert darzustellen.

Es gelang Gödel in seiner Arbeit, ein sehr sinnreiches ***Nummerierungs-Prinzip*** für alle Variablen, alle ***formalen Aussagen*** und für alle ***formalen Beweise*** der Principia Arithmetica zu geben – die sogenannte ***Gödel-Nummerierung*** oder ***Gödelisierung der Principia Arithmetica***. Wie von Gödel vorgeschlagen, wollen wir uns der Einfachheit halber erlauben, in jeder Aussage die Variable mit der kleinsten Nummer mit **x** zu bezeichnen. Nach dem Prinzip der Variablen-Substitution ist diese Vereinbarung gerechtfertigt. Wir schreiben dann eine beliebige formale Aussage in der Form A(**x**), auch wenn in dieser Aussage noch andere Variablen (als **x**) vorkommen – oder gar keine. Ist k die Nummer einer formalen Aussage A(**x**), so schreiben wir auch A_k(**x**) anstelle von A(**x**). Insbesondere können wir jetzt für jede Zahl x die formale Aussage A_x(x) bilden. Zurecht erinnert uns dies an die Diagonal-Aussage, die wir im Rahmen der Richard'schen Antinomie gebildet haben.

Das von Gödel vorgeschlagene Nummerierungs-Prinzip erlaubt nun, eine bestimmte ***formale Aussage*** G(**x** , **y**) mit den zwei freien Variablen **x** und **y** zu bilden, die wir die ***Gödel'sche Aussage*** nennen wollen. Setzt man anstelle der Variablen **x** eine Zahl x ein und anstelle der Variablen **y** eine Zahl y, so erhält man die formale Aussage G(x, y), die interpretiert folgendes besagt:

„ y ***ist die Nummer eines Beweises der Aussage*** A_x(x)***. “***

Auch diese Aussage mag uns wieder an die Richard'sche Antinomie erinnern. Doch muss man auch auf den ***wesentlichen Unterschied*** zwischen dem Vorgehen von Richard und jenem von Gödel hinzuweisen. Im Rahmen der Richard'schen Antinomie wurden zwar (vermeintlich (!)) auch alle entscheidbaren arithmetischen Aussagen nummeriert, aber man kann das dort verwendete Nummerierungs-Prinzip grundsätzlich nicht mehr mit Hilfe jener Aussagen selbst beschreiben. Insbesondere kann man deshalb die Richard'sche Diagonal-Aussage nicht mehr mit dem Richar'dschen Nummerierungs-Prinzip erfassen. Der Grund dafür ist, dass in der Richard'schen Antinomie Aussagen in der ***natürlichen Sprache*** verwendet werden und nicht formale Aussagen. Ganz anders sieht es im formalen System der Principia Arithmetica aus: dort kann man ***innerhalb des Systems formale Aussagen über die Nummerierung machen***. Dies ist der eigentliche ***Kernpunkt*** von Gödels Ideen.

Mit Hilfe der obigen Gödel-Aussage kann man eine neue formale Aussage bilden, nämlich die Aussage „ (\ex.**y**)G(**y**, **x**) “. Diese neue formale Aussage, in der **x** frei vorkommt, kürzen wir ab mit „ P(**x**) “. Setzt man in die Aussage P(**x**) anstelle der Variablen **x** irgendeine Zahl x ein, so erhält man die formale Aussage P(x), die interpretiert folgendes besagt: „ Es gibt eine natürliche Zahl y so, dass y die Nummer eines formalen Beweises der formalen Aussage A_x(x) ist.“ Insbesondere besagt die formale Aussage P(x) folgendes: „ Die formale Aussage A_x(x) besitzt einen formalen Beweis, “ oder kürzer:

„ Die formale Aussage A_x(x) ***ist formal beweisbar. “***

Wir nennen die Aussage P(**x**) deshalb die ***Beweisbarkeits-Aussage***.
Nun bilden wir die ***Negation*** oder Verneinung unserer ***Beweisbarkeis-Aussage***, also die formale Aussage „ ¬P(**x**) “. Setzt man in diese Aussage anstelle der Variablen **x** eine natürliche Zahl x ein, so erhält man die formale Aussage „ ¬P(x) “, welche interpretiert besagt:

„ Die formale Aussage A_x(x) ***ist nicht formal beweisbar. “***

Wir kürzen diese neue formale Aussage ¬P(**x**) mit „ Q(**x**) “ ab und nennen sie die ***Nicht-Beweisbarkeits-Aussage***.
Die Nicht-Beweisbarkeits-Aussage hat natürlich auch eine Nummer – nennen wir sie n. Wir können also schreiben Q(**x**) = A_n(**x**). Jetzt setzen wir in unserer Nicht-Beweisbarkeits-Aussage anstelle der Variablen **x** die Zahl n ein. So entsteht die formale Aussage Q(n) = A_n(n) . Die Aussage Q(n) besagt, dass die Aussage A_n(n) nicht formal beweisbar ist. Weil aber Q(n) mit A_n(n) übereinstimmt, besagt die Aussage Q(n) interpretiert folgendes:

„ Die formale Aussage Q(n) ***ist nicht formal beweisbar. “***

Nehmen wir nun an, die formale Aussage Q(n) sei ***falsch***. Dann ist die formale Aussage Q(n) formal beweisbar. Formal beweisbare Aussagen sind aber wahr. Damit ist die Aussage Q(n) aber ***wahr***. Die Annahme, dass Q(n) falsch sei führt also auf den Widerspruch, dass Q(n) wahr ist. Deshalb kann Q(n) nicht falsch sein. Also können wir schliesslich sagen: ***„ Die formale Aussage*** Q(n) ***ist wahr.“*** Gemäss der Interpretation der Aussage Q(n) heisst das aber: ***„ Die formale Aussage*** Q(n) ***ist nicht formal beweisbar. “*** Mit andern Worten:

Q(n) ***ist eine wahre formale Aussage, die nicht formal beweisbar ist!***

Damit sind wir beim Gödel'schen ***Unvollständigkeis-Satz für die Principia Arithmetica*** angelangt, der folgendes besagt:

<u>Es gibt in der Principia Arithmetica wahre formale Aussagen, die nicht formal beweisbar sind.</u>

Man kann sich natürlich fragen, ob diese Unvollständigkeit nur daher kommt, dass das formale System der Principia Arithmetica nicht genügend viele Axiome enthält. Gödel hat aber gezeigt, dass dies nicht so ist:
Fügt man zur Principia Arithmetica in konsistenter Weise (also so, dass keine Widersprüche entstehen) ***endlich viele Axiome hinzu, so bleibt die Unvollständigkeit bestehen.***

Bevor wir uns den Konsequenzen dieses Unvollständigkeits-Resultates zuwenden, wollen wir doch auch über Gödel selbst etwas sagen. Im Rahmen unserer Vorträge über den „Griff nach dem Unendlichen“ haben wir bereits eingehend über die dramatischen Lebensumstände Kurt Gödels gesprochen. Wir rufen deshalb hier nur das Folgende kurz in Erinnerung.
Im Jahre 1933 wurde Gödel im Alter von 26 Jahren Dozent an der Universität Wien. Als sein Jüdischer Kollege Moritz Schlick im Jahre 1936 von einen fanatisierten Nazi-Studenten erschossen worden war, fiel Gödel in eine tiefe Depression und musste mehrere Wochen in einer Klinik verbringen. Nach dem Anschluss Österreichs an das Gross-Deutsche Reich verlor Gödel seine Stelle in Wien. Er floh 1940 mit seiner Frau in die USA und erhielt an der Princeton University eine Professur. Dort befasste er sich unter dem Einfluss von Albert Einstein mit der ***Relativitätstheorie***. Er untersuchte aber auch den formal-logischen Aspekt der ***Gottes-Beweise*** und führte eine sehr ausgedehnte Korrespondenz über Fragen der ***Philosophie*** und der ***Theologie***.
Immer wieder litt Gödel unter ***Verfolgungsideen*** und glaubte, dass ihn jemand vergiften wolle. Dies führte dazu, dass er völlig vereinsamte und schliesslich nur noch ass, was ihm seine Frau zubereitet hatte. Als diese wegen einer schweren Krankheit für längere Zeit ins Spital musste, weigerte er sich hartnäckig, etwas zu essen und hungerte sich schliesslich auf diese Weise zu Tode.

Resultierende Erkenntnis: *„Grösse und Begrenztheit des menschlichen Denkens“*

Das Gödel'sche Unvollständigkeits-Resultat ist von ***grundlegender Bedeutung***, sowohl innerhalb der ***Mathematik***, als auch vom ***Philosophischen Standpunkt*** aus. Wenden wir uns zuerst dem philosophischen Aspekt zu! Dort bringt Gödel's Resultat folgendes zum Ausdruck: ***Selbst im Bereich der elementaren Arithmetik gibt es wahre Aussagen, die man mechanistisch oder algorithmisch nicht beweisen kann, auch mit Hilfe der grössten zur Verfügung stehenden Computer.***
Der wissenschaftliche Anspruch, mit ***absoluter Sicherheit*** zu ***entscheiden***, ob eine Aussage wahr ist oder nicht, kann also nicht einmal in der Elementaren Arithmetik erfüllt werden. Die auf vollständige Sicherheit abzielende Tätigkeit des Beweisens bleibt also – selbst innerhalb der Mathematik – hinter ihrem ursprünglichen Ziel zurück ***„in allem mit absoluter Sicherheit über wahr und falsch entscheiden zu können“.***

Die ***Diskrepanz zwischen Wahrheit und Beweisbarkeit***, die wir im Bereich des ***Glaubens*** bei unserem ersten Vortrag anhand der ***Heiligen Schrift*** festgestellt haben, findet also durch das Resultat von Gödel ein ***Abbild*** innerhalb der ***Mathematik***, ja sogar innerhalb des begrenzt erscheinenden Bereiches der Elementaren Arithmetik. Damit sind wir bei der schon erwähnten Aussage eines Deutschen Fachkollegen angelangt, dass Gödel's Resultat zugleich die ***Grösse*** und die ***Begrenztheit*** des ***menschlichen Denkens*** aufzeige.
Die ***Begrenztheit*** zeigt sich darin, dass menschliches Denken allein nie ***uneingeschränkt und***

absolut ***sicher*** über wahr oder falsch ***entscheiden*** kann. Die ***Grösse*** zeigt sich darin, dass es dem Menschen gegeben ist, die Begrenztheit seines Denkens ***selbst zu erkennen***, wie das etwa beim Gödel'schen Unvollständigkeits-Satz der Fall ist.

Diese Gedanken sind uns ja nicht vollständig neu. Wir haben sie bereits im Zusammenhang mit unseren Vorträgen zu den Themen *"Grenzen des menschlichen Erkennens"* und *"Der Griff nach dem Unendlichen"* kennen gelernt. Aber beim Gödel'schen Unvollständigkeis-Satz treten sie besonders deutlich zutage. Man kann also den Gödel'schen Satz in besonderer Weise als Beispiel dafür sehen, dass das ***menschliches Denken*** auch in den Wissenschaften letztlich immer wieder dazu führt, das ***Wirken Gottes*** zu erkennen. Er ist es ja, der uns die Fähigkeit zum Denken und zum Begreifen geschenkt hat, uns aber auch zugleich erkennen lässt, dass ***Sein Denken*** hoch über den Wegen ***unserer Gedanken*** liegt. Wir können deshalb in Gödels Unvollständigkeits-Satz durchaus einen Hinweis (nicht einen Beweis(!)) auf das sehen, was die Heilige Schrift mit den folgenden Worten zum Ausdruck bringt (vgl. ***Jes 55, 9***): ***„ So hoch der Himmel über der Erde ist, so hoch erhaben sind Meine Wege über eure Wege und Meine Gedanken über eure Gedanken."***

Es ist Gottes Plan, dass wir durch unser Denken dazu geführt werden, unseren Geist zu Ihm zu erheben und erkennen, dass Ihm allein die Ehre gebührt. Wir sollen erkennen, dass Er über allen Geschöpfen steht und dass alles ***Geschaffene*** und alle unsere ***Geistesgaben*** und Fähigkeiten ***Ihm allein entspringen***. Nicht zu unserer Demütigung soll dies geschehen, sondern zu unserem ***Heil*** – damit wir durch den Blick auf Ihn empor gehoben werden über alles, was unser irdisches Denken und Erkennen begrenzt und ans Vergängliche bindet. Wir sollen die ***endgültige Antwort*** auf unsere Fragen von Ihm allein erwarten. Erinnern wir uns daran, wie der ***Apostel Paulus*** dieser Hoffnung auf das ***vollendete Erkennen im Angesicht Gottes*** Ausdruck gibt (vgl **1 *Kor 13, 12-13***):

12 ***Jetzt schauen wir in einen Spiegel und sehen nur rätselhafte Umrisse, dann aber schauen wir von Angesicht zu Angesicht. Jetzt erkenne ich unvollkommen, dann aber werde ich durch und durch erkennen, so wie ich auch durch und durch erkannt worden bin.***
13 ***Für jetzt bleiben Glaube, Hoffnung, Liebe, diese drei; doch am größten unter ihnen ist die Liebe.***

Manche von Ihnen, liebe Hörerinnen, und Hörer, die vielleicht dem Materiellen einen grösseren Wirklichkeitswert zusprechen als dem Geistigen, werden sich nun wohl auch fragen, ob denn das Resultat von Gödel auch zu etwas anderem von Nutzen sei, als zu rein philosophischen Erwägungen.
Diese Frage möchte ich mit den Worten eines jungen Fach-Kollegen beantworten, der vor vielen Jahren einmal in meinen Vorlesungen sass, jetzt aber an einer Deutschen Universität Professor für ***Informatik*** ist – also für ***Computer-Wissenschaft***. In seiner Antritts-Vorlesung als Privatdozent in Zürich sagte er begeistert: ***"Die Ideen Gödels sind für die Informatik so wichtig wie die Kreiszahl pi für die Geometrie."*** Damit spielte er auf die grosse Bedeutung der Ideen Gödels für eine wichtige Teildisziplin der Informatik an – für die sogenannte ***Komplexitäts-Theorie.***
In dieser Theorie geht es um die Frage, ob gewisse Probleme gar nicht, oder nur mit sehr grossem Aufwand oder mit relativ wenig Aufwand algorithmisch, d.h. mit Hilfe eines Computers, gelöst werden können – also um die Frage, wie ***komplex*** die ***Entscheidungs-Algorithmen*** für gewisse Probleme sind. Besonders wichtig ist in diesem Zusammenhang die Theorie der ***selbst-referenziellen formalen Systeme***, also von formalen Systemen, die ***"über sich selbst Aussagen machen können."*** Und genau das ist ja für das System der Prinzipia Arithmetica der Fall, wie Gödel gezeigt hat. Mittlerweile sind Gödels Gedanken in zahlreichen Varianten auf viele andere formale Systeme übertragen worden und finden dadurch ganz verschiedene ***Anwendungen*** in der Komplexitätstheorie.

Innerhalb der Mathematik, besonders im Bereich der ***Mathematischen Logik***, löste Gödels Resultat

einen eigentlichen Umdenk-Prozess aus. Viele Mathematiker glaubten nämlich, dass die elementare Arithmetik ***formal Beweis-vollständig*** sei. Prominentester Vertreter dieser schliesslich durch Gödel widerlegten Meinung war ***David Hilbert***. Erstaunlicherweise ist aber keine offizielle Reaktion Hilberts auf Gödels Resultat bekannt. Dieses ***„Schweigen Hilberts“*** zu einer Frage, die im sehr wichtig war und zu der er sich zuvor mehrmals sehr vehement geäussert hatte, war immer wieder Anlass zu Spekulationen.
Nachdem wir nun doch schon so oft über David Hilbert gesprochen haben, ist es wohl angebracht über das Leben und Werk dieses wohl grössten Mathematikers des frühen 20. Jahrhunderts ein paar Worte zu sagen. Hilbert wird von vielen als das ***"letzte mathematische Universalgenie"*** betrachtet, was in der Tat nicht von der Hand weisen ist, wenn man den Umfang, die Tiefe und die Breite seines Gesamtwerkes betrachtet. Hilbert hat in praktisch allen damals existierenden Gebieten der Mathematik fundamentale und richtungweisende Beiträge geliefert. Wir wollen von diesen nur einige beispielhaft erwähnen.
Hilberts Arbeiten im Bereich der ***logischen*** und ***axiomatischen Grundlagen*** der Mathematik haben wir bereits mehrfach erwähnt – so etwa die ***Axiomatisierung*** der ***Euklidischen Geometrie***, der ***Mengenlehre*** und der ***Arithmetik***.
Sehr bedeutsam sind auch Hilberts Beiträge zur ***Algebraischen Zahlentheorie***, einer Erweiterung der Elementaren Arithmetik, die man getrost zu den anspruchsvollsten Theorien der Mathematik überhaupt zählen kann.
Hilberts Arbeit im Gebiet der sogenannten ***Invarianten-Theorie*** haben wir bereits genannt. In diesem Bereich löste Hilbert in seiner Habilitationsschrift das sogenannte ***Gordan'sche Problem***, eines der Grundprobleme der ganzen Theorie. Wie wir schon erwähnt haben, tat er das mit einem damals ganz neuen nicht-konstruktivistischen Ansatz, den Gordan selbst als ***Theologie*** bezeichnete, schliesslich aber doch einlenkte, dass auch die Theolgie von Nutzen sei.
Ganz fundamentale und auch heute noch prägende Beiträge hat Hilbert auch im Bereich der sogenannten ***Algebraischen Geometrie*** geleistet. So sind die vor gut hundert Jahren von ihm entwickelte ***Syzygien-Theorie*** und die Theorie der später nach ihm benannten ***Hilbert-Funktionen*** und -***Polynome*** auch heute noch hoch-aktuelle Untersuchungsobjekte. Diese Theorien sind im Bereich der ***Hochleistungs-Computer-Algebra-Systeme*** von besonderer Bedeutung.
Ein ganz anderes Thema sind die sogenannten ***Integralgleichungen***, zu denen Hilbert ebenfalls fundamentale Beiträge beigesteuert hat. Das Konzept der später nach ihm benannten ***Hilbert-Räume*** geht etwa auf sein Wirken in diesem Gebiet zurück – ein Konzept aus dem schliesslich die sogenannte ***Funktional-Analysis*** hervorging, eines der grössten und Anwendungs-reichsten Teil-Gebiete der Mathematik. Einer der frühen Gross-Erfolge seiner Theorie war die Beilegung der Kontroverse um die beiden damals konkurrierenden Theorien der ***Quanten-Mechanik***: die ***Heisenberg'sche Matrizen-Mechanik*** und die ***Schrödinger'sche Wellen-Mechanik***. Mit Hilberts Theorie liess sich nämlich beweisen, dass diese beiden Physikalischen Theorien ***mathematisch äquivalent*** sind und lediglich zwei verschiedene Betrachtungsweisen des zu Grunde liegenden Mathematischen Modells zum Ausdruck bringen.

Ganz besonders bedeutsam waren auch die ***23 Hilbert'schen Probleme***. Hilbert stellte diese Probleme am 8. August 1900 im Rahmen des ***Internationalen Mathematiker-Kongresses*** in ***Paris*** vor. Er wollte damit den Mathematikern eine Liste von ***Leitproblemen*** für das ***zwanzigste Jahrhundert*** vorlegen. Von diesen 23 Problemen, die aus praktisch allen damals bestehenden Spezialgebieten der Mathematik stammen, sind heute 15 vollständig gelöst, 5 teilweise gelöst und 3 noch weitgehend ungelöst. Was Hilbert mit seinen Problemen beabsichtigt hatte, traf in der Tat auch ein: Es gibt kaum einen Mathematiker, der in seiner Forschungsarbeit nicht schon auf Fragen oder Methoden gestossen ist, die mit dem einem oder anderen dieser Probleme zusammenhängen. So war ich selbst als Doktorand nicht wenig erstaunt, als ich feststellen musste, das die neuen Methoden, die ich damals verwendete, sich zurückverfolgen liessen bis auf das ***14. Hilbert'sche Problem***.

Philosophisch gesehen war Hilbert's Denkweise ***neo-positivistisch***. Er war überzeugt, dass sich jedes Problem lösen lassen würde – mindestens innerhalb der Mathematik. Er selbst drückte dies so aus: ***„Diese Überzeugung von der Löslichkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!"*** In komprimierter und geradezu überspitzter Form findet man diese Maxime auf Hilbert's Grabstein wieder: ***"Wir müssen wissen. Wir werden wissen."***

Hilbert scheint diese Maxime ***wörtlich*** auf formale Theorien übertragen zu haben. So gelangte er vermutlich auch zur Auffassung, dass sich in diesen Theorien immer mit Hilfe von formalen Beweisen über die Richtigkeit oder Falschheit von Aussagen entscheiden liesse. Deshalb schlug er auch vor, jede mathematische Theorie zu formalisieren und derart auf endliche Weise zu ***axiomatisieren***, dass die ***formale Entscheidbarkeit*** gewährleistet sei. Um es frei mit den Worten der Hilbert-Biographin ***Constance Reid*** zu sagen: ***Hilbert wollte die ganze Last der Entscheidung über wahr und falsch dem Formalismus aufbürden***. Doch Gödels Resultat zeigt, dass sich dieses Programm in der von Hilbert angestrebten Form grundsätzlich nicht realisieren liess. Das mag in der Tat auch der Grund für Hilberts Schweigen zu Gödels Arbeit gewesen sein.

Hilberts persönliches Leben verlief äusserlich eher unauffällig. Er wurde 1862 als Sohn eines Preussischen Beamten in Königsberg geboren. Er studierte auch an der dortigen Universität wo er unter der Leitung von ***Ferdinand von Lindemann*** promovierte. Lindemann haben wir in unseren Vorträgen über die Grenzen des menschlichen Erkennens schon erwähnt. Er war es, der bewiesen hat, dass die Kreiszahl pi die Eigenschadt hat, ***transzendent*** zu sein. Zwischen Hilbert und seinem Studienkollegen ***Hermann Minkowski*** (1864-1909), der später unter anderem auch an der ETH Zürich Dozent war und der durch seine Beiträge zur ***Relativitätstheorie*** internationales Ansehen erwarb, bestand eine enge Freundschaft – Hilberts einzige wirkliche Freundschaft, wie er selbst sagte. Der frühe Tod Minkowskis war deshalb für Hilbert ein einschneidendes Erlebnis.
Nach einem Aufenthalt in Paris war Hilbert von 1886-1895 ***Dozent in Königsberg*** und ab 1895 ***Professor in Göttingen***. Aus Hilberts Ehe mit ***Käthe Jerosch*** ging ein einziges Kind hervor: Sohn ***Franz***, der an einer Geisteskrankheit litt. Diese Krankheit seines einzigen Sohnes war für Hilbert ein grosses persönliches Problem.
Nach der ***Machtübernahme*** durch die ***Nationalsozialisten*** im Bildungswesen in den Jahren 1933/1934 und der darauf folgenden ***„Entjudung"*** der Deutschen Universitäten zog sich Hilbert vom gesellschaftlichen und universitären Leben zurück und betrat das Mathematische Institut in Göttingen nicht mehr. 1943 starb er völlig vereinsamt, und an seinem Begräbnis "nahmen weniger als zehn Personen teil". Erst fünf Monate später wurde sein Tod in der Fachwelt bekannt.

Rationale Linguistik: *Die Algorithmisierung der Sprache*

Liebe Hörerinnen und Hörer, fassen wir nochmals zusammen: Letztlich war es der Übergang von der Umgangssprache zur formalen Sprache, welcher es erlaubte, dem Dilemma zu entrinnen, das durch die Richard'sche Antinomie geschaffen worden war. Ja mehr noch: dieser Übergang erlaubte sogar, den ***verfehlten Ansatz*** jener Antinomie in eine neue und ausserordentlich ***fruchtbare Methode*** zu verwandeln, welche schliesslich mit dem Gödel'schen Unvollständigkeitssatz Fundamentales zu Tage förderte.

Dies führt natürlich unweigerlich auch zur Frage, ob der Übergang von der Umgangssprache – also von einer sogenannten ***natürlichen Sprache –*** zu einer ***formalen Sprache*** auch ausserhalb der Mathematik zu grundlegend neuen Erkenntnissen führen würde. Könnte man zum Beispiel auch eine natürliche Sprache mit rein algorithmischen Methoden untersuchen und dabei neues finden? Voraussetzung zu einem solchen Vorhaben ist eine absolut strenge Fassung aller ***grammatischen***

Regeln einer natürlichen Sprache. Es sollte ja schliesslich erreicht werden, dass auch Sätze einer natürlichen Sprache nur noch als Zeichenfolgen aufgefasst werden können, die nach streng definierten Regeln aufgebaut sind. Aus schon bestehenden Sätzen neue zu bilden, sollte dann auf rein ***syntaktische*** Weise möglich sein, ohne auf die ***Semantik –*** die inhaltliche Bedeutung – zurück zu greifen. Korrekte Sätze aufzubauen und zu analysieren sollte dann ohne das Verständnis der inhaltlichen Bedeutung möglich sein. Sprachlich korrekte Sätze sollten rein algorithmisch erzeugt oder grammatisch analysiert werden können, etwa durch einen Computer. Zudem sollte dahinter eine ***Grammatik*** stehen, deren Regeln so allgemein sind, dass sie nicht von der gerade gewählten natürlichen Sprache abhängen, sondern zum Beispiel im Deutschen und im Englischen anwendbar wären. Wenn dies möglich wäre, könnte ein ***Computer*** schliesslich einen korrekten Deutschen Satz in einen korrekten Englischen Satz ***übersetzen***. Heute besteht in der Tat eine eigene wissenschaftliche Theorie, welche die natürlichen Sprachen mit Computern untersucht und bearbeitet, die sogenannte ***Computer-Linguistik***. Diese benutzt zum Teil Methoden welche auf den eben angedeuteten Ideen beruhen.

Eine Sprach-Theorie oder ***Linguistik***, welche die natürlichen Sprachen mit rein syntaktischen und algorithmischen Methoden untersucht, wurde erstmals vom Amerikanische Philosophen und Sprachwissenschaftler ***Avram Noam Chomsky*** (* 1928) um 1965 entwickelt: die sogenannte ***Universelle Grammatik*** oder ***Transformations-Grammatik***. Die entsprechende Sprachtheorie nennt man auch ***Rationale Linguistik***. Natürlich stellt sich die Frage, ob eine solche Theorie überhaupt je erlaubt, beliebige korrekte Sätze einer natürlichen Sprache grammatisch zu analysieren und aufzubauen. Schaut man konkrete Beispiele an, so sieht man sehr schnell, dass dabei viele verschiedenartige Schwierigkeiten zu erwarten sind.
Wir wollen dazu nur ein Beispiel betrachten, nämlich den Satz: ***„ Hans und Fritz fuhren zusammen von Zürich nach Basel.“*** Wir wollen den Satz in seine kleinsten Teilsätze zerlegen. Es könnte sich etwa um die drei Sätze handeln: ***„Hans fuhr von Zürich nach Basel.“ „Fritz fuhr von Zürich nach Basel.“ „Hans und Fritz fuhren zusammen.“*** Aus diesen drei Sätzen können wir natürlich sofort den ursprünglichen Satz wieder bilden. Wenn wir aber den ursprünglichen Satz nicht kennen, könnten wir aus den drei Sätzen auch den Satz bilden: ***„Hans und Fritz fuhren von Zürich nach Basel und sie fuhren zusammen.“*** Irgendwo wäre dann in unserem Computer vielleicht noch abgespeichert: ***„fuhren zusammen = erschraken “.*** So hätten wir dann schliesslich ***„Hans und Fritz fuhren von Zürich nach Basel und erschraken.“*** Das ist zwar ein sprachlich korrekter Satz. Aber er besagt etwas anderes als der Satz, von dem wir ursprünglich ausgegangen waren.
Mit diesem Beispiel ist nur gerade ***eines*** der zahlreichen Probleme angedeutet, die im Rahmen der universellen Grammatik bestehen: Das Problem der ***Synonyme***, also der Ausdrücke, die mehrere Bedeutungen haben, wie bei uns der Ausdruck „fuhren zusammen.“ In der Mathematik lassen sich Synonyme und andere sprachliche Zweideutigkeiten vermeiden. Doch könnte man auch Goethe oder Shakespeare befehlen, dass Selbe zu tun? Das würde wahrscheinlich zu dichterisch armseligen Werken führen. Natürlich gibt es noch Dutzende von Phänomenen, die nahelegen, dass eine natürliche Sprache stark zu recht gestutzt werden muss, wenn sie dem algorithmischen Zugriff Genüge tun soll.

In der Tat ist es so, dass Chomskys Universelle Grammatik nur dann das Gewünschte leisten kann, wenn sie auf begrenzte Teilbereiche einer Sprache angewendet wird, auf sogenannte ***fragmentarische Teilsprachen***. Im ***vollen Bereich*** einer natürlichen Sprache gilt dies nicht. Anders gesagt Die uneingeschränkte ***Universelle Grammatik ist unvollständig***. Dass dies so ist, folgt interessanterweise wieder aus einem mathematischen Satz: Dem sogenannten ***„Unentscheidbarkeits-Satz für das Wortproblem in Halbgruppen“*** .

Ich erinnere mich an ein gemeinsames Seminar – ungefähr im Jahr 1970 – mit Studenten und Doktoranden der ***Mathematik*** und der ***Germanistik***. Wir Mathematiker versuchten in einer Serie von Vorträgen den Sprachwissenschaftlern die Unvollständigkeit der Universellen Grammatik aus dem Unentscheidbarkeits-Satz für das Wortproblem in Halbgruppen zu beweisen. Doch die anhaltende ***babylonische Begriffs***- und ***Sprach-Verwirrung*** zwischen Germanisten einerseits und Mathematikern andererseits schuf eine Mauer des gegenseitigen Unverständnisses, die sich trotz wortreicher und gut gemeinter Versuche nicht überwinden liess.

Mittlerweile sind ***Übersetzungs-Computer-Programm***e entwickelt worden, die auf ***fragmentarischen Teilsprachen*** Erstaunliches leisten – aber auch Absurdes hervorbringen können. Zu letzterem möchte ich folgendes Beispiel anführen: Im Jahre 2007 wollte ich eine Arbeit beim ***Journal für die reine und angewandte Mathematik*** zur Publikation einreichen. Nicht schlecht staunte ich, als ich beim Suchen im Internet auf den Eintrag „***Journal für Würfel reine und angewandte Mathematik“*** stiess.
Unverzüglich schrieb ich an den De Gruyter-Verlag eine E-Mail mit der Bemerkung, dass es schon erstaunlich sei, dass eine derart renommierte Fachzeitschrift einen so absurden Internet-Auftritt habe. Sofort kam die Antwort zurück, dass nicht der Verlag diesen Eintrag angebracht habe, dass aber dahinter aber wohl ein Problem mit einem Übersetzungs-Computer stehe. Der ursprünglich Deutsche Eintrag sei vermutlich zuerst ins ***Englische*** und dann wieder fehlerhaft zurück ins ***Deutsche*** übersetzt worden, vielleicht von Google.
Was dabei passiert sein könnte, ist folgendes: Die richtige Übersetzung ins Englische würde lauten: ***„Journal of pure and applied Mathematics“.*** Dabei wird ***„die Mathematik“*** richtigerweise einfach zu ***„Mathematics“*** , denn die wörtliche Übersetzung ***„the Mathematic“*** ist kein korrektes Englisch. Der Computer hatte aber vielleicht doch etwas Mühe mit dem verlorenen Artikel ***„die“*** und setzte diesen möglicherweise als unübersetzbare Zeichenfolge nach seinen englischen Satz, und kreuzte vielleicht sogar noch schön ordentlich an, wo dieses komische ***„die“*** eigentlich stehen müsste: vor ***„reine“ –*** nach der Übersetzung also vor ***„pure“***.
Vielleicht kam da aber noch ein anderer Computer daher und glaubte, er müsse diesen Englischen Satz nun schleunigst ins Deutsche übersetzen. Hinter dem Englischen Satz fand er das ***„die“*** und den Vermerk, wo es hingehörte: vor das eben richtig ins Deutsche rück-übersetzte ***„pure“*** also vor ***„reine“*** . Ein Klax für mich, dachte er – wenn er hätte denken können – das Englische ***„die“*** heisst ja im Deutschen Spielwürfel, oder eben kurz ***„Würfel“*** . Also muss es vor ***„reine“*** so einfügt werden. Gesagt, getan – und schon stand es da: ***„Journal für Würfel reine und angewandte Mathematik“***.
Dieses kleine Beispiel soll uns zeigen, welche Tücken hinter der Algorithmisierung der Sprache lauern können, selbst bei so etwas harmlosem wie der Titel einer Zeitschrift. Wie es herauskommen könnte, wenn da etwa Goethes Faust übersetzt werden müsste, lässt sich nur noch erahnen.

Philosophisch betrachtet sagt die Unvollständigkeit der Universellen Grammatik folgendes:
Man kann mit einer natürlichen Sprache als Gesamtheit nur dann wirklich sinnvoll umgehen, wenn man inhaltlich versteht über was geschrieben oder geredet wird. Die Sprache, Ausdruck des menschlichen Geistes, lässt sich genau so wenig in einen Algorithmus pressen wie dieser Geist selbst!

Wort und Glaubens-Wahrheit: *„Amen, Amen, Ich sage euch: Noch ehe Abraham wurde, bin Ich“ (vgl. Joh 8, 58)*

Nun, liebe Hörerinnen und Hörer, sind wir am fast Ende unseres Steifzuges zum Thema „Wahrheit und Beweisbarkeit“ angelangt. Ausgehend von der ***Heiligen Schrift*** führte uns dieser über die ***logischen Antinomien*** in die ***Arithmetik*** und schliesslich in die ***Sprach-Theorie***.
Zum Schluss wollen wir uns nochmals der Heiligen Schrift zuwenden und dabei unseren letzten Themenbereich aufgreifen: Das Spannungsfeld zwischen der ***Sprache*** mit ihrer ***grammatische***

Struktur einerseits und dem durch sie zum Ausdruck gebrachten ***Geist*** andrerseits. Wir haben ja eben gehört, dass ein sinnvoller Umgang mit der Sprache an den Inhalt des durch sie Ausgedrückten gebunden ist. Das kann im konkreten Fall sogar heissen, dass ***formale sprachliche Regeln*** missachtet werden, wenn es dem dargestellten ***Inhalt*** dient. Die obige Schriftstelle aus dem Johannes-Evangelium ist ein sehr eindrückliches Beispiel dafür. Als erstes stellen wir unser Schriftzitat in einen etwas grösseren Zusammenhang (siehe ***Joh 8, 56-58***):

56 ***Euer Vater Abraham jubelte, weil er Meinen Tag sehen sollte. Er sah ihn und freute sich.***
57 ***Die Juden entgegneten: Du bist noch keine fünfzig Jahre alt und willst Abraham gesehen haben?***
58 ***Jesus erwiderte ihnen: Amen, Amen, ich sage euch: Noch ehe Abraham wurde, bin Ich.***

Es geht hier um das ***Streitgespräch*** zwischen Jesus und den Juden, die nicht glauben wollen, dass Er der in den Schriften der ***Thora*** angehkündigte ***Messias*** und ***Sohn Gottes*** ist. Jesus sagt den Juden, ***"dass Abraham jubelte, weil er Seinen Tag sehen sollte"***. Damit belehrt Er sie darüber, dass ***Er – Jesus selbst –*** die Ertfüllung der Verheissung ist die durch Gott an Abraham erging (vgl. ***Gen 12 3***): ***" Durch dich sollen alle Geschlechter der Erde Segen erlangen."*** Die anwesenden Juden verstehen aber die Bedeutung der Aussage Jesu nicht, weil ihr Geist vom rein weltlichen denken befangen ist. Vielmehr weisen sie darauf hin, dass Abraham Jesus in seinem irdischen Leben gar nicht gesehen haben kann. Die Erwiderung Jesu ist von alles übersteigender prophetischen Grösse: ***"Ich sage euch: Noch ehe Abraham wurde, bin Ich."***

Sprachlich gesehen verletzt dieser Satz die Regel des ***Zeitbezuges***: Nach den üblichen Sprachregeln müsste es heissen: ***"Noch ehe Abraham wurde, war Ich."*** Schon das hätte ja zum Ausdruck gebracht, dass Jesus vor Abraham da war, also schon vor Jahrtausenden. Doch Jesus sagt nicht ***"war Ich"***, wie es grammatisch gesehen eigentlich erwartet werden müsste, sondern ***"bin Ich"***. Mit diesem ***Regelbruch*** hebt Er seine Aussage empor über das rein menschlich gesehen noch Beipflichtbare und gibt ihr den Anspruch des ***Absoluten –*** durch dieses eine Wort ***"bin"***. Dieses eine Wort macht die Erwiderung Jesu zu einer sehr tief greifenden ***Katechese***, die wir etwas eingehender betrachten wollen.

Das "bin Ich" steht im Gegensatz zum "Abraham wurde" und bringt zunächst zum Ausdruck, dass Jesus ***"nicht wurde"*** – also nicht ***geschaffen wurde*** – wie Abraham. Jesus sagt damit, dass Er im Gegensatz zu Abraham ***kein Mensch*** ist – obwohl Er unser Fleisch angenommen hat, also dem Fleische nach Mensch geworden ist. Damit bringt Jesus zum Ausdruck, dass Er seinem Wesen nach ***Gott und Mensch*** ist: Jesus, der als Mensch noch ***"keine fünfzig Jahre alt ist"*** (vgl. ***Joh 8, 57***), hat Abraham gesehen, weil Er eben Gott ist und deshalb schon vor Abraham war. Allerdings hätte man das mit etwas Glaubensbereitschaft schon heraushören können aus dem Wortlaut "war Ich". Doch Jesus offenbart sich mit Seinem "bin Ich" in tieferer und absoluter Weise.

Versuchen wir deshalb, den Gegensatz zwischen dem "Wurde" des Abraham und dem "Bin Ich" Jesu noch weiter auszuloten. Ganz sicher ging es den Jüdischen Schriftgelehrten, denen Jesus im Streitgespräch Seine Gottheit offenbaren wollte, genau so wie uns allen hoffentlich auch:
Das ***"Bin Ich"*** muss sie an das **הַסְּנֶה בֹּעֵר** ***(ha-səneh boʕēr)*** erinnert haben, eine der wichtigsten Textstellen der ***Thora***, die im ***Alten Israel*** allergrösste ***Bedeutung*** hatte: Die Offenbarung seines ***Namens JHWH – Jahwe –*** durch ***Gott*** an ***Mose*** im ***Brennenden Dornbusch*** am ***Berg Horeb*** (siehe ***Ex 2,23 – 4,18***).
Der ***Gottesname***, hebräisch **אֶהְיֶה אֲשֶׁר אֶהְיֶה** (***ehyeh ăšer ehyeh***) (vgl. ***Ex 3,14***) ist zu übersetzen mit ***„Ich bin, der Ich sein werde"***. In der ***Septaginta*** – der ***Griechischen Übersetzung*** des ***Alten Testaments*** wird der Gottesname mit **ἐγώ εἰμι ὁ ὤν** ***(egô eimi ho ôn)*** wiedergegeben: ***„Ich bin der Seiende"*** . In der Lateinischen ***Vulgata-Bibel***, die bis zum zweiten Vatikanum die verbindliche Bibel-Textvorlage der Katholischen Kirche war, wird der Gottesname als ***ego sum qui sum***

ausgesprochen, das heisst als: ***“Ich bin der Ich bin.”*** Die ***Einheitsübersetzung*** des ***Katholischen Bibelwerkes*** – die offizielle Bibel-Übersetzung der Deutsch-sprachigen Bistümer – gibt den Gottesnamen mit ***“Ich-bin-da”*** wieder.
Allein die ***verschiedenen Übersetzungen*** des Namen Gottes deuten darauf hin, dass dieser Name eine Selbstoffenbarung Gottes zum Ausdruck bringt, welche das menschliche Ausdrucks- und Vorstellungsvermögen bei weitem übersteigt.

Wir dürfen sicher sein, dass Jesus mit seinem “Bin Ich” den Gottesnamen JHWH auf ***sich bezog –*** der Name, der von den Israeliten nur mit ***grösster Ehrfurcht*** ausgesprochen oder sogar nur durch ***Umschreibungen*** wie ***“der Name”***, ***“der Ewige”***, ***“der Höchste”***, ***“der Herr” …*** ausgedrückt wurde. Ganz sicher merkten die Juden auch, dass Jesus in Seiner Erwiderung den Gottesnamen auf sich bezog – den ***Heiligsten aller Namen***. Damit forderte Er sie aufs Äusserste heraus und liess ihnen keine andere Wahl als sich zu entscheiden, ob Er nun wirklich der ***Sohn Gottes*** sei oder ein ***Gotteslästerer***. Wie bei anderen ***Streitgesprächen***, über die uns das ***Johannes-Evangelium*** berichtet, werden auch durch die Erwiderungs-Worte Jesu einige der Zuhörer zum Glauben gekommen sein, dass ***Er der verheissene Messias*** sei. Die Mehrheit der Zuhörer konnte diese ***Entscheidung zum Glaubens*** aber nicht vollziehen, und sah in Jesus einen Gotteslästerer. Denn im ***Vers 59***, der unmittelbar auf das ***“Bin Ich”*** von Jesus folgt, lesen wir: ***“Da hoben sie Steine auf, um sie auf Ihn zu werfen. Jesus aber verbarg sich und verliess den Tempel.”***

Das ***“Bin Ich”*** ist also eine Selbstoffenbarung Jesu, welche auf das ***Geheimnis des Namens Gottes*** verweist. Es ist eine ***Erneuerung der Selbstoffenbarung Gottes am Berg Horeb***. Es weist darauf hin, dass Er, der im Alten Bund in geheimnisvoller Weise aus dem Dornbusch sprach und dessen Name unser Verstehen übersteigt, jetzt mitten unter uns weilt und einen menschlichen Namen trägt: ***Jesus, Jeshua – “Gott rettet”*** . Zugleich bringt das “Bin Ich” Jesu zum Ausdruck, dass die ***Herrlichkeit des Heiligsten Aller Namen in Ihm wohnt***. Die ***vier Aspekte des Gottesnamens JHWH***, die der Theologe und Exegete ***Erich Zenger*** unterscheidet, sprechen deshalb auch aus dem ***“Bin Ich”*** von Jesus zu uns:

- ***Zuverlässigkeit:*** „Ich bin so bei euch da, dass ihr fest mit mir rechnen könnt. Wenn ihr auch wandelt im Tale des Todes, ihr dürft darauf bauen, dass ich da bin. Wenn ihr auch zweifelnd, schreiend oder stumm geworden von mir weglauft, ihr dürft wissen: Ich bin bei euch da, selbst wenn ihr mich nicht mehr erkennt.“
- ***Unverfügbarkeit:*** „Ich bin so bei euch da, dass ihr mit mir rechnen müsst, wann und wie ich will – vielleicht auch dann und so, wie es euch sogar stört. Es mag durchaus Situationen und Stationen eures Lebensweges geben, wo ihr euch nicht gerade gerne daran erinnern lasst, dass ich bei euch da sein will, oder wo ihr lieber einen anderen Gott hättet.“
- ***Ausschließlichkeit:*** „Ich bin so bei euch da, dass ihr allein mit mir rechnet als dem, der euch rettend nahe sein kann. Mit mir zu rechnen verlangt von euch die klare Entscheidung, damit Ernst zu machen, dass ich für euch der Einzige bin, der euch Halt und Maß geben darf. Nur in mir könnt und dürft ihr der wahren Liebe, der wahren Güte und dem wahren Leben begegnen.“
- ***Unbegrenztheit:*** „Ich bin so bei euch da, dass mein Nahe-Sein keine örtlichen, institutionellen und zeitlichen Grenzen kennt. Wenn ich bei euch da bin, schließt das nicht aus, dass ich sogar bei euren Feinden da sein kann. Ja, mein rettendes Nahe-sein übersteigt die Erde, auf der ihr lebt und die ihr so oft zum Mittelpunkt eures Lebens macht. Sogar der Tod ist für mich keine Grenze, die meiner Lebenskraft Schranken setzen könnte.“

Fassen wir zusammen, liebe Hörerinnen und Hörer: Durch ein ***einziges Wort***, das gegen die üblichen sprachlichen ***Regeln verstossend*** ausgesprochen wird, gibt Jesus einen Hinweis auf eine tiefe ***Glaubenswahrheit***. Kann die Beziehung zwischen dem ***Geist*** und der ***Sprache***, derer sich dieser Geist bedient besser dargestellt werden als durch dieses Beispiel: Die durch den den ***Geist***

Gottes ausgesprochene ***Wahrheit*** wird uns zwar durch die Sprache vermittelt. Doch da es Gottes Wille ist, dass wir schliesslich ganz ***aus dieser Wahrheit sind*** (vgl. ***Joh 18, 37***), übersteigt Gottes Umgang mit der Sprache jedes Regelwerk. Er ist ja, dem das ***Geschöpf der Sprache*** mit seiner ganzen Schönheit und all seinen Regeln entspringt. Deshalb nutzt Er, der Schöpfer, dieses Geschöpf mit vollkommener Souveränität, wie es Ihm am Besten dient. Dadurch soll unser ***Blick*** über das Geschöpf der Sprache hinaus auf ***Ihn***, den Schöpfer selbst gelenkt werden. Dadurch will Er uns zu Seiner Wahrheit führen – zu der einen Wahrheit, die wir mit menschlichen Worten und Denkregeln nie wirklich verstehen oder fassen können, zu der einen ***Wahrheit aus der wir sein müssen, die wir aber mit unserem Denken nicht beweisen oder habhaft machen können.***
So führte uns das ***"Bin Ich"*** Jesu dazu, durch das ***Wort Gottes*** das zu erkennen was wir zuvor mit der ***Unvollständigkeit*** der ***Arithmetik*** und der ***Universellen Grammatik*** im Rahmen des ***formal-algorithmischen Umgangs mit Sprach-Systemen*** schon Modell-haft sehen konnten: ***Die tieste Wahrheit – die Wahrheit aus der wir sein müssen – lässt sich durch unser menschliches Denken nicht wirklich erfassen. Sie übersteigt das, was sich durch Beweise und vollständige sprachliche Ausformulierung eindeutig sichern lässt.***

Markus Brodmann
Grüzenstrasse 24
CH-8400 Winterthur

20. April 2016

Prof. em. Dr. Phil II
Institut für Mathematik der Universität
Winterhurerstrasse 190
8057 Zürich
brodmann@math.uzh.ch