Das Rätsel der Unendlichkeit: Mathematik und die Frage nach Gott

Markus Brodmann
Institut für Mathematik
Universität Zürich

brodmann@math.uzh.ch

Rona (heute 13) zählt bis elf

Rona zählt: **(im Alter von 2.5)**

1, 2, 3, ? , 6, 5, ? , 8, 10, 9, 11 !!

Kinder und Zählen:

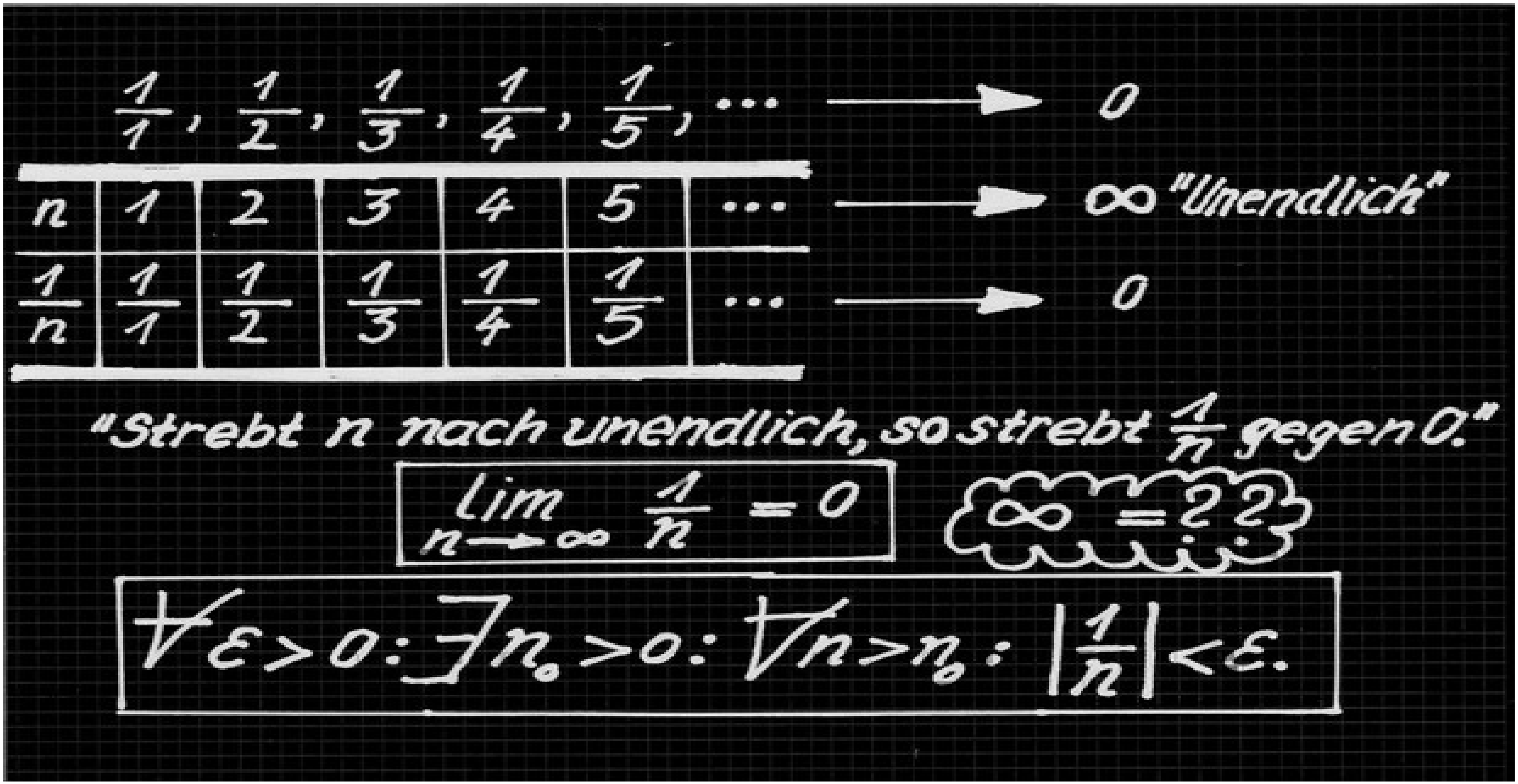
Kinder sind fasziniert von diesem rätselhaften „Gedicht der Zahlen“, das nie aufhört und somit einen ersten Eindruck von der Unendlichkeit gibt.

Kinderfragen dazu:

Welche Zahl ist am grössten?
Kann man immer weiter zählen?
Hat jede Zahl einen Namen?
Kann man alle Zahlen aufschreiben?
Gibt es eine Gotteszahl?

Zahlengeschichten in Festtag und Alltag

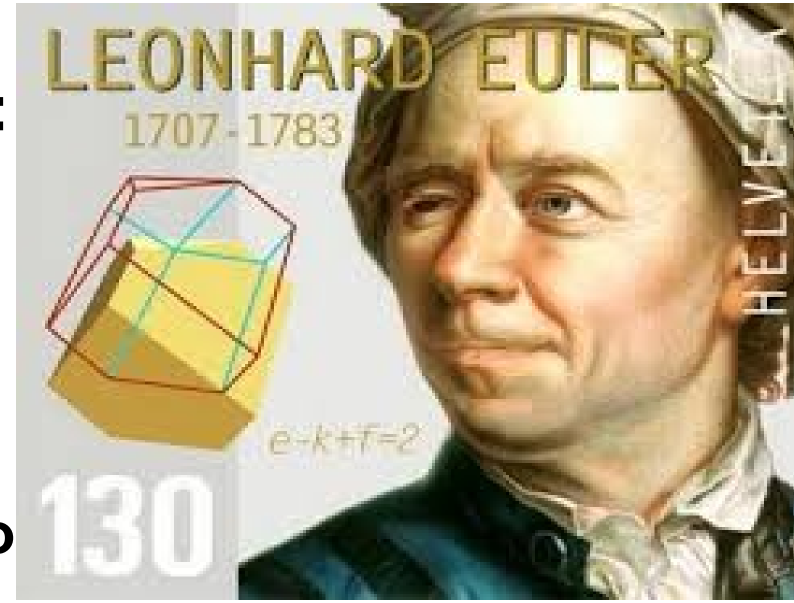
„Potentielle Unendlichkeit“ in der Mathematik: Die Infinitesimalrechnung



Wir reden von der Unendlichkeit, ohne sie zu erwähnen!

Beispiel: Eulers „Lieblingsgrenzwert“

Im Jahre 1735 bewies der Schweizerisch-Russische Mathematiker *Leonhard Euler* (1707-1783) die Formel:



Summe der reziproken Quadrate:

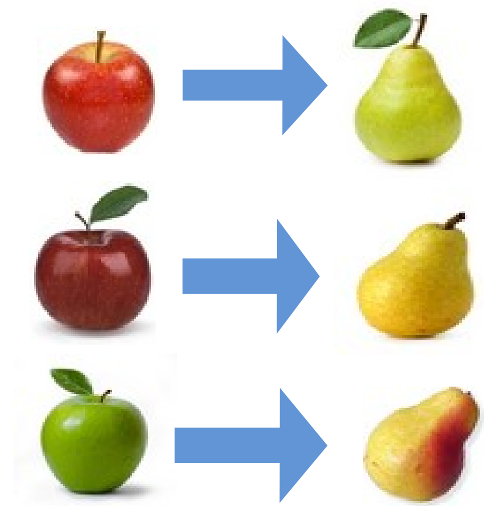
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Die linke Seite ist die Summe der Kehrwerte der Quadrate aller positiven ganzen Zahlen n = 1,2,3,… , also die Summe unendlich vieler Zahlen. Auf der rechten Seite tritt u.a. die „Kreiszahl“ pi = 3.14... (ins Quadrat gesetzt) auf.

Leonhard Euler war der erste Mathematiker, der das heute übliche „Unendlich“-Symbol systematisch benutzte.

Zählen heisst vergleichen:

Mehr Birnen oder mehr Äpfel ?

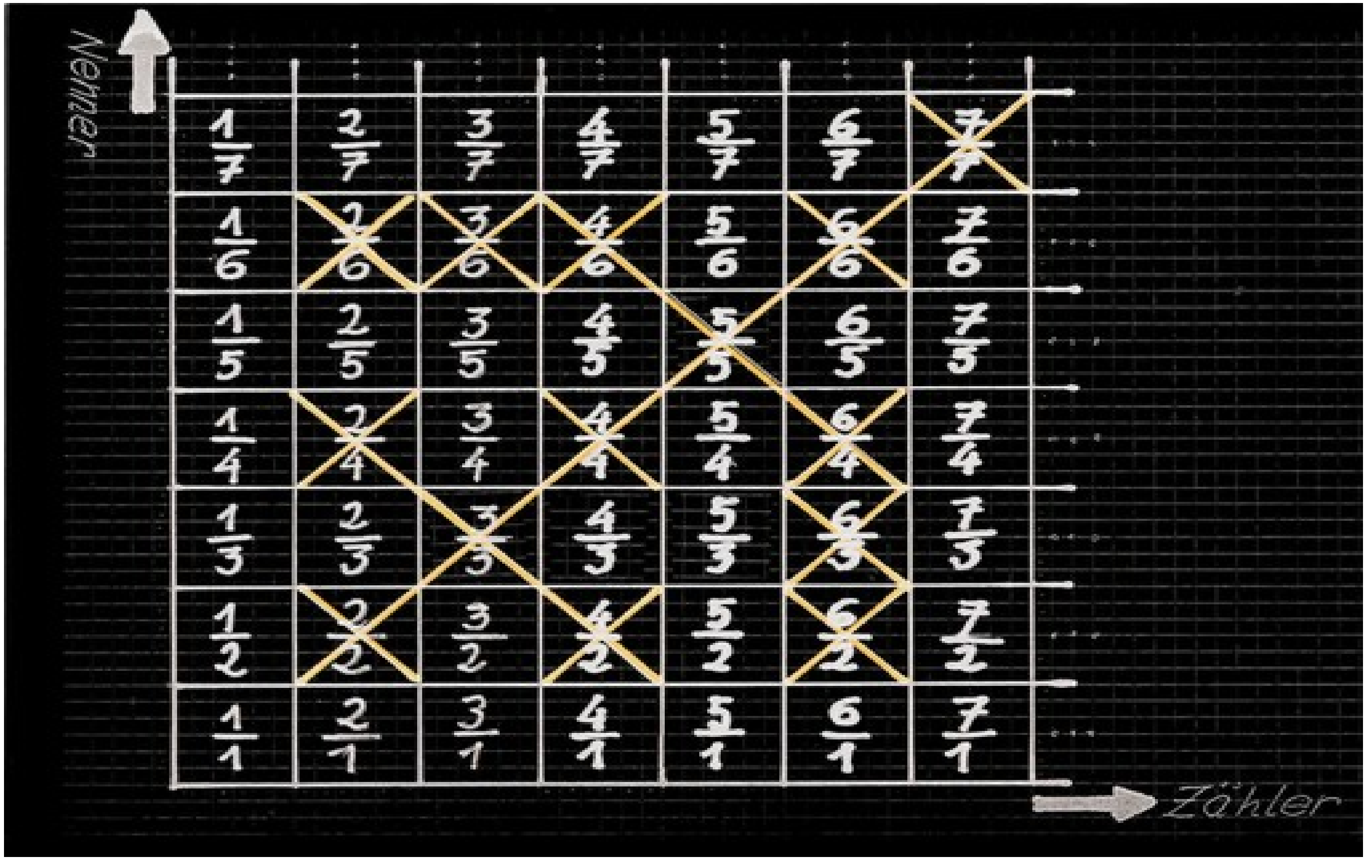


Hilfe!! In jedem Korb sind mehr Früchte als wir zählen können. Aber wir können „durch Zuordnung vergleichen“. Wir nehmen einen Apfel aus dem ersten Korb und eine Birne aus dem zweiten Korb und legen die beiden Früchte miteinader weg, usw, usw. … Welcher Korb ist zuerst leer?

Können wir die Brüche abzählen?

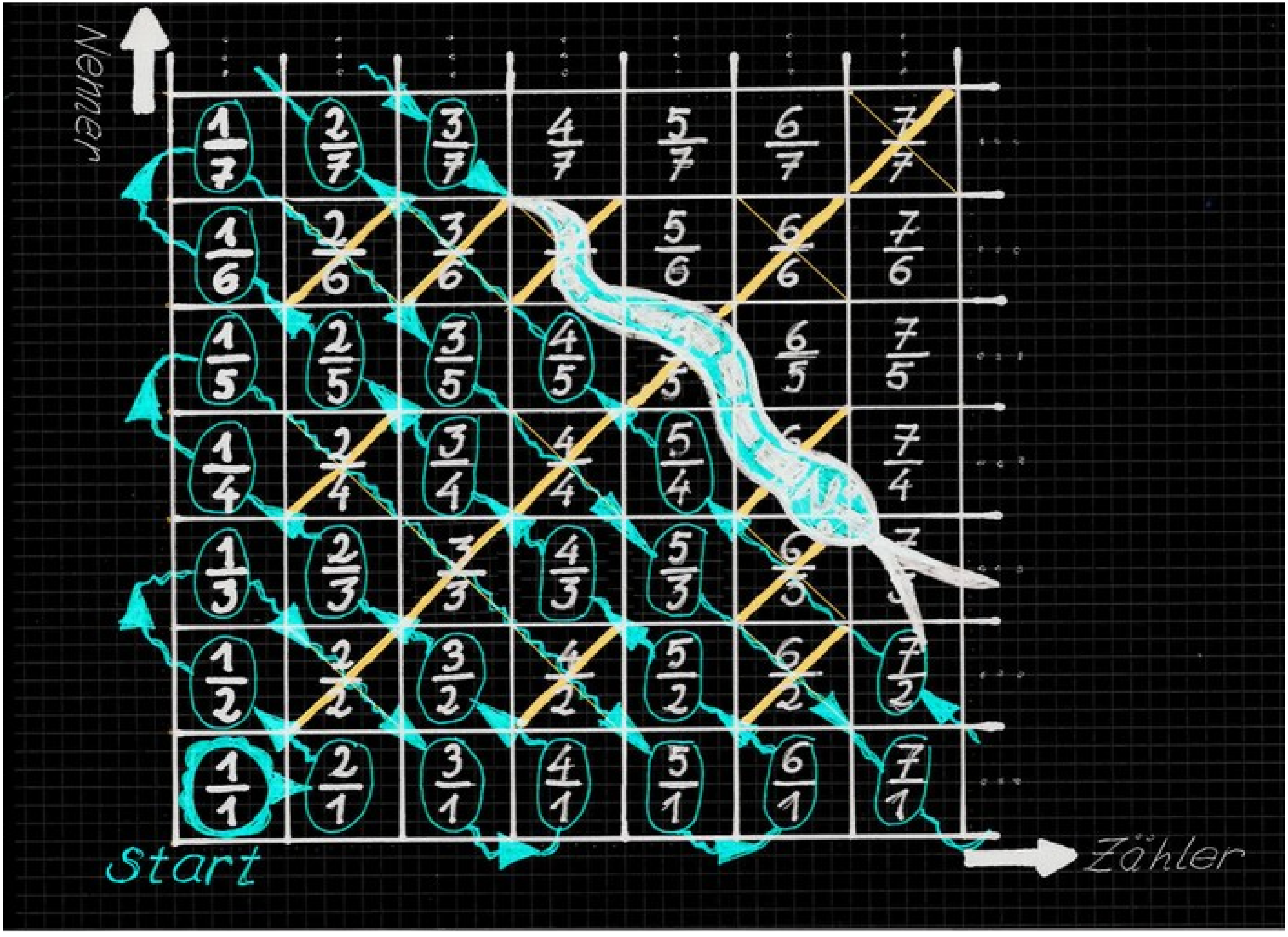
Frage: ***<u>Gibt es mehr (positive) Brüche als (positive) ganze Zahlen?</u>***

Wir tabellieren die positiven Brüche wie unten angezeigt. Brüche, die gekürzt werden können, streichen wir weg, denn wir wollen Mehrfachzählungen vermeiden.



Wir schlängeln uns durch die Welt der Brüche

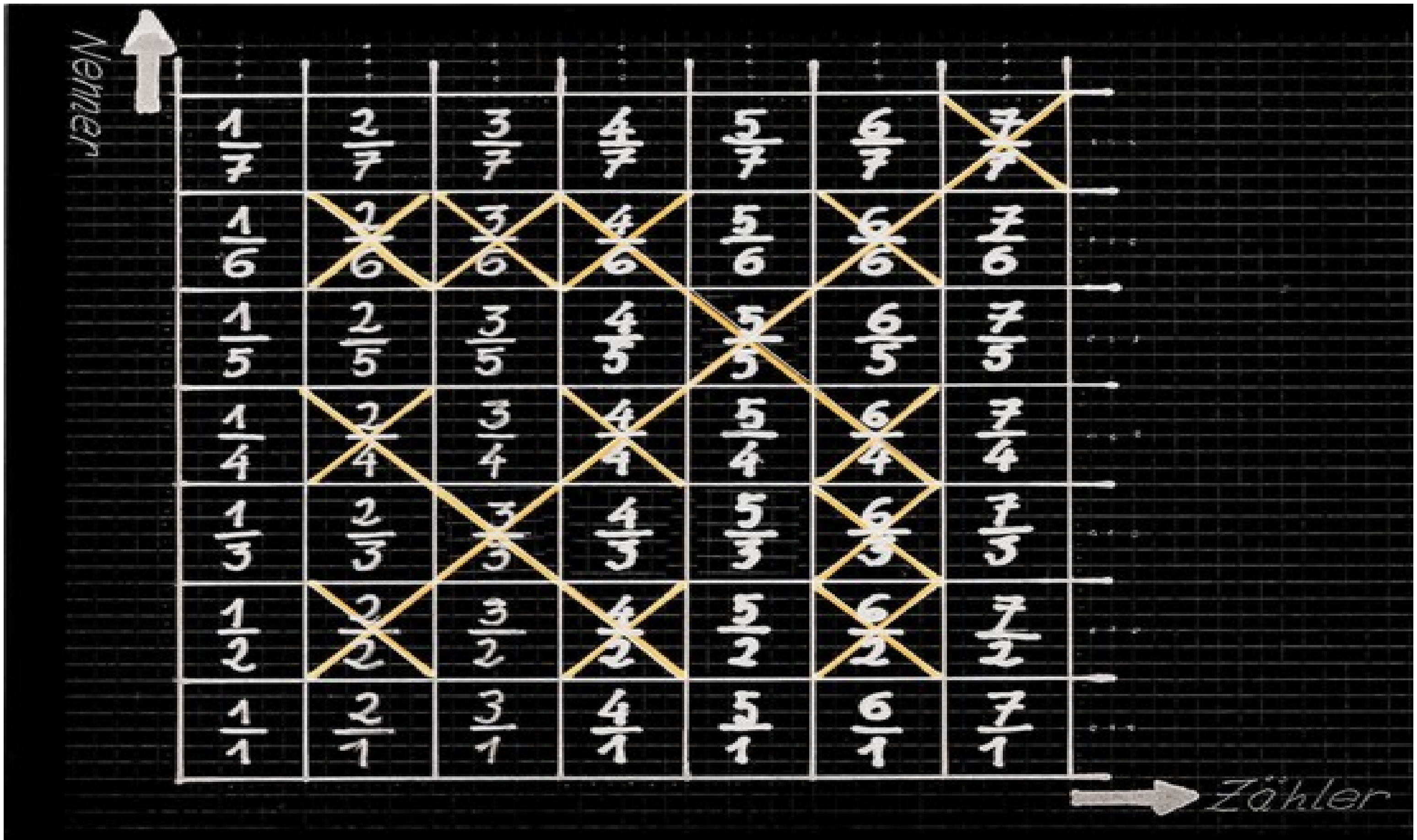
Hilfe bringt: ***<u>Die „Zählnatter“ Natrix Natrix Cantoris.</u>***



Fazit: Die Menge der Brüche ist abzählbar

Anders gesagt: ***<u>Es gibt gleich viele Brüche wie ganze Zahlen!</u>***

Paradoxon der Unendlichkeit: Obwohl es gleichviele Brüche wie ganze Zahlen gibt, gibt es unendlich viele Brüche, die keine ganzen Zahlen sind.



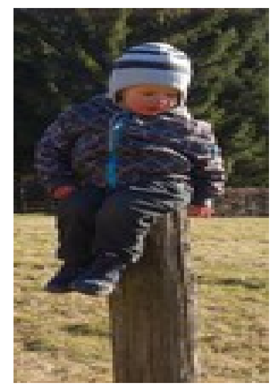
Können wir die Punkte einer Geraden zählen?

Frage: ***<u>„Gibt es weniger positive ganze Zahlen 1,2,3,4,… als Punkte auf einer Geraden?</u>*** **Zur Beantwortung imitieren wir den „Äpfel-Birnen"-Vergleich: Alle Zahlen 1,2,3,4,... sind in einer Schachtel enthalten.**

Jeder dieser Zahlen n ordnen wir eine … !! …. Dezimalzahl x(n) zwischen 0 und 1 zu

0 x(n) 1

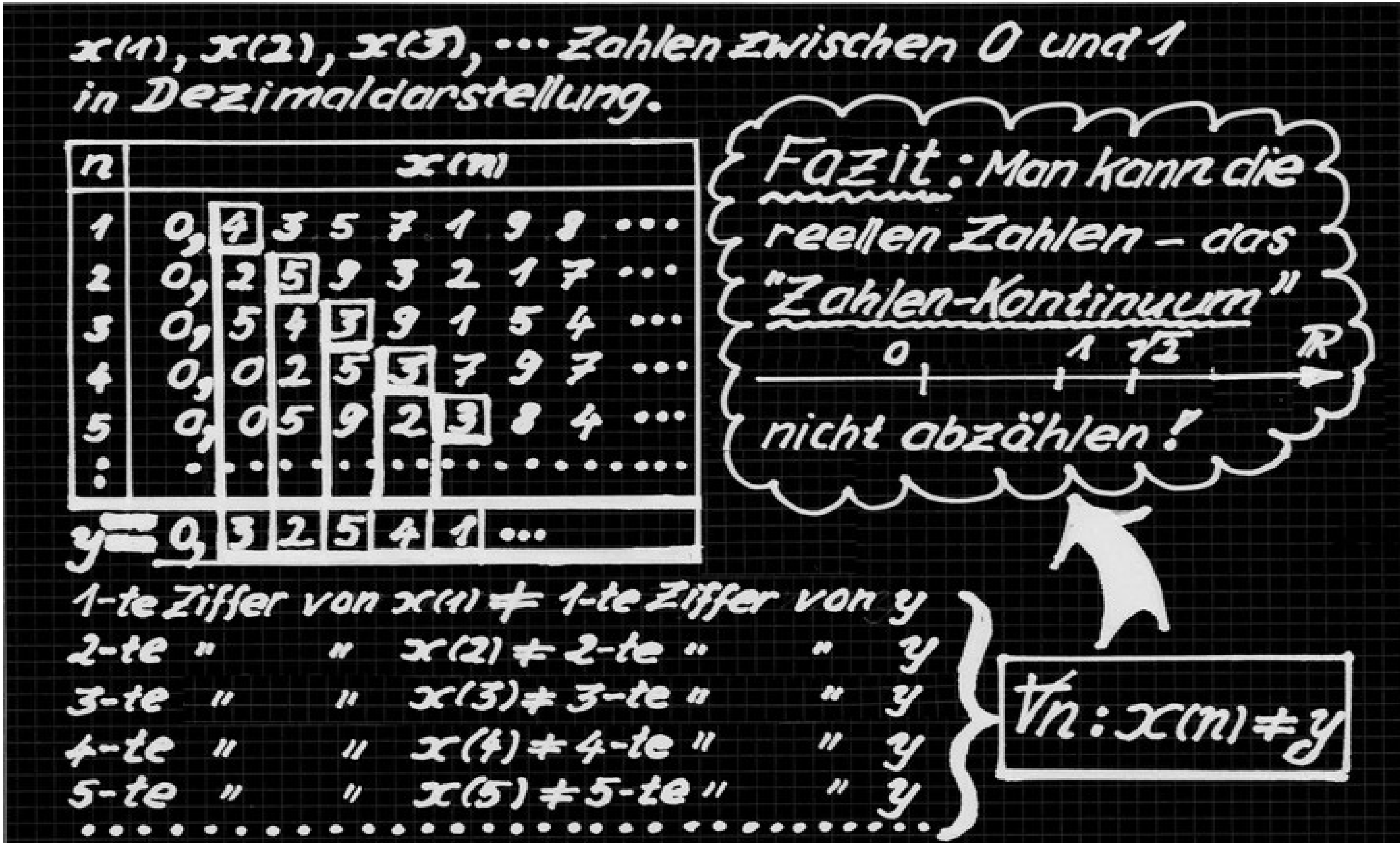


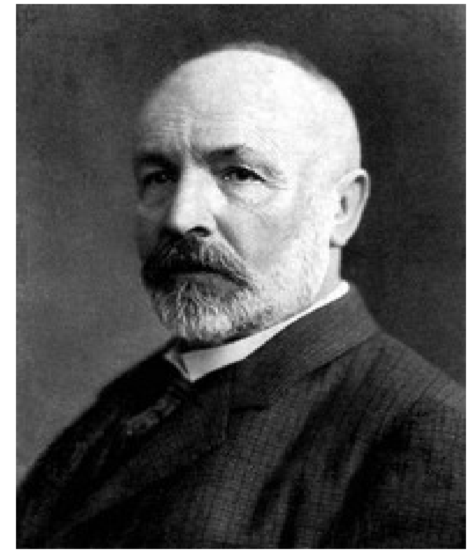

Nach anfänglichen Missverständnissen über den Umgang mit Zahlen in Schachteln nehmen wir die Zahl 1 aus der Schachtel und ordnen ihr eine Zahl x(1) zwischen 0 und 1 zu. Dann nehmen wir die Zahl 2 aus der Schachtel und ordnen ihr eine Zahl x(2) zwischen 0 and 1 zu … .

Wir gewinnen eine nicht erwischte Zahl

Anders gesagt: ***Es gibt eine Zahl y zwischen 0 und 1, die wir nicht erwischen mit unserem Zuordnungsprozess!***



„Aktual-Unendlichkeit“ in der Mathematik: Transfinite Arithmetik



Unsere beiden vorangehenden Beispiele zeigen: Die Brüche kann man zwar abzählen, die „reellen Zahlen“ (= alle „Dezimalzahlen“) aber nicht mehr. Beide Beispiele gehen zurück auf den deutschen Mathematiker und Philosophen* Georg Cantor *(1845 – 1914). Die beiden Beispiele zeigen: „Es gibt verschieden grosse Unendlichkeiten.“

Georg Cantor begründete die* Mengenlehre *und die* transfinite Arithmetik: *„das Rechnen mit unendlichen Grössen“. Die Unendlichkeit bestand nun nicht mehr nur „potentiell“ in „unendlicher Ferne“ liegend, wie bislang in der Infinitesimalrechnung. Sie wurde nun „dingfest gemacht“ und man konnte mit ihr rechnen. Sie war nun eine „Aktualität geworden“.

Die Ideen Cantors waren anfänglich stark umstritten, und waren wichtigster Anlass zur sogenannten „Grundlagenkrise in der Mathematik“ (ca. 1900 – 1930) und einem „Paradigmenwechsel“.

Kardinalzahlen und Cantorsche Ungleichung

Cantor führte zwei Arten von transfiniten Zahlen ein: die *Kardinalzahlen* und die Ordinalzahlen. Wir behandeln nur die Kardinalzahlen. Diese geben die „Kardinalität" einer Menge an, das heisst die Anzahl der Objekte („Elemente") die zur Menge gehören.

Beispiele: $\mathrm{card}(\{1,2,3,4\}) = 4$; $\mathrm{card}(\{\,\}) = 0$;
$\mathrm{card}(\{\{\,\},\{1\},\{2\},\{1,2\}\}) = 4 = 2^{\mathrm{card}(\{1,2\})}$; ...

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ = Menge aller "natürlichen Zahlen".

$\mathbb{Q}_+ = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ = Menge aller "positiven Brüche".

$\mathbb{R}$ = Menge aller "reellen Zahlen" $\hat{=}$ Zahlengerade.

$\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{Q}_+) = \aleph_0$ = kleinste transfinite Zahl.

$$\aleph_0 < \mathrm{card}(\mathbb{R}) \overset{!}{=} 2^{\aleph_0}.$$

Die Cantorsche Ungleichung:

$$\aleph < 2^{\aleph} \quad (\forall \text{ Kardinalzahlen } \aleph)$$

Der Buchstabe Aleph: א

Psalm 119, א (1-8) Lobpreis auf das ewige Wort Gottes:

*1 **Wohl denen, deren Weg ohne Tadel ist, die leben nach der Wei-
sung des Herrn.***
*2 **Wohl denen, die Seine Vorschriften befolgen und Ihn suchen
von ganzem Herzen,***
*3 **die kein Unrecht tun und auf Seinen Wegen gehen.***
*4 **Du hast Deine Befehle gegeben, damit man sie genau beachtet.***
*5 **Wären doch meine Schritte fest darauf gerichtet, Deinen
Gesetzen zu folgen.***
*6 **Dann werde ich niemals scheitern, wenn ich auf all Deine
Gebote schaue.***
*7 **Mit lauterem Herzen will ich Dir danken, wenn ich Deine gerech-
ten Urteile lerne.***
*8 **Deinen Gesetzen will ich immer folgen. Lass mich doch niemals
im Stich.***

Psalm 119 **– der längste aller Psalmen – besteht aus 22** ***Strophen*** **zu jeweils 8** ***Versen*****, was ein Total von 22 x 8 = 176 Versen ergibt. Jede der 22 Strophen ist bezeichnet mit einem der 22 Buchstaben des hebräischen „Alphabets“. Die erste Strophe trägt das Aleph.**

Die Kontroverse um die Unendlichkeit

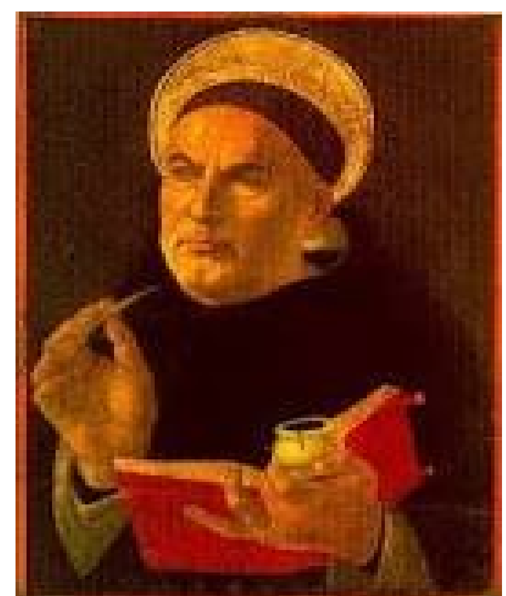
Cantor wurde angegriffen von:

– den *Mathematikern,* wegen seines Gebrauchs des damals noch umstrittenen sogenannten *Wohlordnungsprinzips.*

– den *Philosophen,* wegen seiner Auffassung der *Aktual-Unendlichkeit.*

– den *Theologen* (haupsächlich den *Neo-Scholastikern*, welche sich auf *Thomas von Aquin* (1225-1274) beriefen), weil Cantors Ungleichung besagt, dass es *„keine grösste Unendlichkeit gibt“,* was der *„Einen und Einzigen Unendlichkeit Gottes über allen anderen Unendlichkeiten“* widerspreche.

Hl. Thomas von Aquin



Eingreifen des Vatikans: Die Kontroverse zwischen Cantor und den Theologen gab Anlass zu einen ausgedehnten Briefwechsel, der schliesslich auch den Vatikan erreichte.

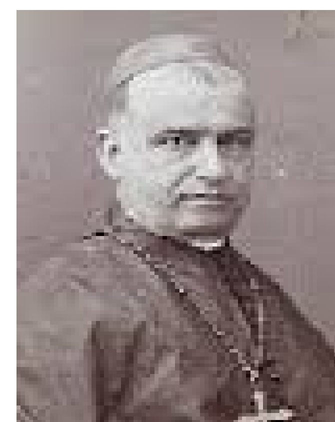
Der Papst spricht

Ein päpstlicher Auftrag: *Papst Leo XIII* **(1810-1903, Pontifikat 1878-1903) gab dem Jesuiten und Theologen Kardinal** ***Johann Baptist Franzelin*** **(1816-1886) den Auftrag zu prüfen, ob die Ideen Cantors in Koflikt stehen zum Glauben.**

Pope Leo XIII

Der Kardinal kam zur Schlussfolgerung, dass das nicht der Fall sei: ***Cantors Ideen über die Unendlichkeit beruhen auf menschlichem Intellekt. Sie können höchstens ein gewisses Bild der Unendlichkeit geben, die Gott inne wohnt. Sie können aber die Unendlichkeit Gottes weder beschreiben noch erreichen, weil diese das menschliche Verstehen übersteigt.***

Später schrieb Papst Leo: ***„Die Kirche sollte sich nicht neuen wissenschaftlichen Erkenntnissen entgegenstellen. Sie sollte diese vielmehr prüfen und fragen wo und in welcher Weise neue wissenschaftliche Ideen und Resultate zur Wohlfahrt der Menschheit und zu einem tieferen Verständnis des Glaubens beitragen können".***



Jesaja 55,9: „So hoch der Himmel über der Erde ist, so hoch erhaben sind Meine Wege über eure Wege und Meine Gedanken über eure Gedanken."

J.B.Franzelin

Die Kontinuums-Hypothese

Wiederholung: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$

$\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\{1,2,3,4,\dots\}) < \mathrm{card}(\mathbb{R} = $ "Kontinuum" $)$

! "Kontinuierlich"

Was liegt dazwischen??

Kontinuums-Hypothese (Cantor, 1878):

Nichts!! Anders gesagt:

- Es gibt keine Kardinalzahl $\aleph$ so, dass

$$\aleph_0 < \aleph < 2^{\aleph_0}.$$

Oder – gleichbedeutend: $2^{\aleph_0}$ ist die nächstgrös=sere Kardinalzahl nach $\aleph_0$!

- $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Die Kontroverse um die Mengenlehre

Historische Tatsache: Ab ca. 1880 entbrannte in der Mathematik eine Kontroverse um das Cantorsche *Wohlordnungsprinzip* und die Cantorsche *Kontinuumshypothese.*

David Hilberts Position: Der grosse deutsche Mathematiker *David Hilbert* (1862-1943) war ein begeisterter Befürworter von Cantors Ideen, erkannte aber auch, dass Cantors Ansätze noch einer soliden Untermauerung bedurften. Seine Meinung zu Cantors Ideen drückte er wie folgt aus: *„Wir werden uns nicht aus dem Paradies vertreiben lassen, das uns Cantor eröffnet hat.“*

Eine neue Sicht bahnt sich an: Die Kontroverse um die Mengenlehre stürzte die Mathematik in die sogenannte Grundlagenkrise, die schliesslich zu einem fundamentalen Paradigmen-Wechsel im Selbstverständnis der Mathematik führte.

Erste Teil-Beilegung: das Auswahlprinzip

Im Jahre 1905 bewies der deutsche Mathematiker *Ernst Zermelo* (1871-1953), ein vormaliger Student von David Hilbert, dass sich das umstrittene Wohlordnungsprinzip Cantors aus dem sogenannten *Auswahlprinzip* ergibt. Dieses besagt: Hat man eine beliebige Kollektion von Mengen vor sich, so kann man aus jeder dieser Mengen ein Objekt, d.h. ein „Element“, auswählen und diese ausgewählten Elemente wieder zu einer Menge zusammenfassen. Dieses Auswahlprinzip war bei den Mathematikern unbestritten. Damit war Cantor in einem wichtigen Punkt „rehabilitiert“.

Offen blieb die Frage nach der Kontinuums-hypothese, obwohl sehr viele Mathemaiker versuchten, diese zu beweisen oder zu widerlegen. Zunehmend setzte sich die Meinung durch, dass sich diese Frage nur durch eine „Axiomatisierung“ von Cantors „naiver Mengelehre“ klären lasse. Auch dabei leistete Zermelo Pionierarbeit.

Die Axiome von Zermelo und Fraenkel

Das Axiomensystem von Zermelo and Fraenkel (ZF): Im Jahr 1907 schug Zermelo ein Axiomensystem für die Megenlehre vor. Eines seiner Axiome war das Auswahlprinzip. Im Jahre 1921 fügte der deutsch-israelitische Mathematiker *[Adolf] Abraham Halevi Fraenkel* (1891-1965) einige weitere Axiome hinzu. Im Jahre 1930 nahm Zermelo eine letzte Erweiterung vor. Im Jahre 1929 formulierte der norwegische Mathematiker *Thoralf Albert Skolem* (1887-1963) die ZF-Axiome im formalen „*Prädikaten-Kalkül*“.

A.H. Fraenkel

T.A. Skolem

Zermelo-Fraenkel axioms

(1) *Axiom of extension.* If A and B are sets and if, for all x, $x \in A$ if and only if $x \in B$, then $A = B$.

(2) *Axiom of the empty set.* There exists a set A such that, for all x, it is false that $x \in A$.

(3) *Axiom schema of separation.* If A is a set, there exists a set B such that, for all x, $x \in B$ if and only if $x \in A$ and $S(x)$. Here, $S(x)$ is any condition on x in which B is not free (it must be bound by a quantifier such as "all" or "some").

(4) *Axiom of pairing.* If A and B are sets, there exists a set (symbolized $\{A, B\}$ and called the unordered pair of A and B) having A and B as its sole members.

(5) *Axiom of union.* If C is a set, there exists a set A such that $x \in A$ if and only if $x \in B$ for some member B of C.

(6) *Axiom of power set.* If A is a set, there exists a set B, called its power set, such that $x \in B$ if and only if $x \subseteq A$.

(7) *Axiom of infinity.* There exists a set A such that $\varnothing \in A$ and, if $x \in A$, then $(x \cup \{x\}) \in A$, in which $x \cup \{x\}$ is the set x with x adjoined as a further member.

(8) *Axiom of choice.* If A is a set the elements of which are nonempty sets, then there exists a function f with domain A such that, for member B of A, $f(B) \in B$.

(9) *Axiom schema of replacement.* If A is a set and $f(x, y)$ a formula (in which x and y are free) such that for $x \in A$ there is exactly one y such that $f(x, y)$, then there exists a set B the members of which are the y's determined by $f(x, y)$ as x ranges over A.

(10) *Axiom of restriction (foundation axiom).* Every nonempty set A contains an element B such that $A \cap B = \varnothing$; i.e., A and B have no elements in common.

Zweite-Teilbeilegung: Konsistenz

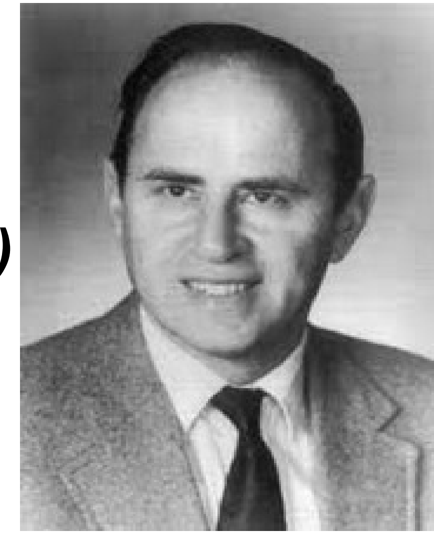
Im Jahre 1940 bewies der tschechisch-österreichisch-amerikanische Mathematiker *Kurt Gödel* (1906-1978):

Gödelsches Konsistenz-Theorem: ***Wenn das ZF-Axiomensystem der Mengelehre konsistent (d.h. in sich widerspruchsfrei) ist, so erhält man auch keinen Widerspruch, wenn man die Kontinuumshypothese dazunimmt.***

Damit ist gezeigt, dass man die Kontinuumshypothese auf Grund der ZF-Axiome nicht widerlegen kann. Insbesondere nahm das all denen „den Wind aus den Segeln“, die versuchten die Kontinuumshypothese zu widerlegen. Ein Beweis für diese Hypothese war damit aber nicht erbracht. „Wer aber wollte konnte die Kontinuumshypothese zu den ZF-Axiomen hinzunehmen, ohne in logische Widersprüche zu geraten“.

Die endgültige Beilegung: Unabhängigkeit

Im Jahre 1963 bewies der amerikanische Mathematiker *Paul Joseph Cohen* (1934-2007):



Cohens Unabhängigkeitstheorem: ***Wenn das Axionensystem ZF konsistent ist, so kann man die Verneinung der Kontinuumshypthese (!!) hinzunehmen, ohne in Widersprüche zu geraten.***

Endgültige Konsequenz: Man kann aus den ZF-Axiomen die Kontinuumshypothese weder beweisen noch widerlegen! Man kann (nach Entscheidung !!) entweder die Kontinuumshypothese oder ihre Verneinung zu den ZF-Axiomen hinzufügen, ohne in logische Widersprüche zu geraten.

Zum Beweis seines Theorems entwickelte Cohen eine ganz neue Methode der mathematischen Logik, das „Forcing“, das heute zu den Standard-Hilfsmitteln der Logik gehört. Für seine Leistung erhielt Cohen die Fields-Medaille (=Nobelpreis der Mathematik).

Die verlorene Wahrheit

Schlussfolgerung: Die Resultate von Gödel und Cohen zeigen: *Es gibt keine eindeutige und selbsterklärende Mengenlehre, die auf einem Fundament von unumstösslichen Wahrheiten beruht.* In einem gewissen Rahmen kann man die Axiome nach Gutdünken wählen, solange sie untereinander widerspruchsfrei sind. Das heisst: *Es gibt verschiedene Mengenlehren, die auf unterschiedlichen Axiomensystemen beruhen.*

Weil die Mengenlehre das „natürliche Biotop" aller mathematischen Theorien ist, vererbt sich diese *„Zweideutigkeit der Grundlagen"* auf die ganze Mathematik.

Die Mathematik vermittlelt also keine absoluten und unumstösslichen Wahrheiten, sondern führt nur zu Aussagen, welche sich aus gewählten Grundannahmen (den Axiomen) logisch ergeben oder zu diesen mindestens nicht in logischem Widerspruch stehen. Die Axiome selbst müssen aber in keiner Weise den Charakter unumstösslicher Wahrheiten haben. Man kann sich auf sie einigen und muss dabei nur um die Konsistenz der Axiome untereinander besorgt sein.

Der „klassische“ Standpunkt: **Nach Leonhard Euler ist *„Mathematik reine Natur“.* Dies ist der *kassischen Standpunkt:* die Mathematik entdeckt und studiert grundlegende Gesetze und Regeln, welche die Natur beherrschen, und versucht, diese Regeln und Gesetze für Anwendungen zu nutzen. Entsprechend *„beruht die Mathematik auf dem festen Fundament, das durch die Natur und ihre unanfechtbaren Gesetze vorgegeben ist.“***

Der neue Standpunkt:*„Mathematik beruht nicht auf einem Fundament unanfechtbarer Gesetze.“* Sie beruht auf Axiomen, die nach Übereinkunft gewählt werden. Anstatt *„unanfechtbare Wahrheiten auszudrücken“* müssen diese Axiome *konsistent sein* untereinander: *„Mathematik muss nicht wahr sein; sie muss richtig sein.“* (David Hilbert).

Fazit: **Das *„Schöne Geschöpf der Mathematik“* (nach Ines, formalige Doktorandin) kann also den Traum nicht erfüllen, die *absolute Wahrheit* zu finden, ein Traum der Philosophen, Denker und Wissenschafter aller Zeiten beflügelte.**

Aber, wenn die Mathematik diesen Traum nicht erfüllen kann, wer soll es sonst tun?

Menschliches Wissen – Göttliche Weisheit

Blaise Pascal : (Französischer Mathematiker, Physiker und Philsoph, 19. Juni 1623 – 19. August 1662: Erste Rechen-maschine, Kombinatorik-Statistik [Pascalsches Dreieck], Geometrie der Kegelschnitte, hydrostatisches Paradoxon):

@ „Der Mensch ist nur ein Schilfrohr, das schwächste der Natur; aber er ist ein denkendes Schilfrohr.“

@ „Anfang und Ende der Dinge werden dem Menschen immer ein Geheimnis bleiben. Er ist ebenso unfähig, das Nichts zu sehen, aus dem er stammt, wie die Unendlichkeit zu erkennen, die ihn verschlingen wird.“

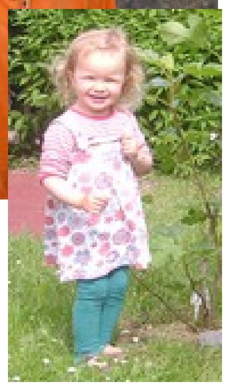
@ „Die grösste Leistung der menschlichen Vernunft besteht darin, ihre eigene Begreztheit erkennen zu können.“

@ „Es ist das Herz, das Gott spürt und nicht die Vernunft. Das Herz hat seine Gründe, die der Verstand nicht kennt.“

Psalm 111, Vers 10: *„Die Furcht des Herrn ist der Anfang der Weisheit. Gute Einsicht ist sie allen, die danach handeln.“*

Halleluja !!







Psalm 131, 2-3:

„Herr, mein Herz ist nicht stolz, nicht hochmütig blicken meine Augen. Ich gehe nicht um mit Dingen, die mir zu wunderbar sind und zu hoch. Ich liess meine Seele ruhig werden und still; wie ein kleines Kind bei der Mutter ist meine Seele still in mir.“

12, 13, 14, … 117, 118, 119, 120, … 7893, 7894, 7895, …

∞

∞

∞

$\vdots$

$2^{2^{2^{2^{\aleph_0}}}}$

$2^{2^{2^{\aleph_0}}}$

$2^{2^{\aleph_0}}$

$2^{\aleph_0}$

$\aleph_0$