

LES SIX OPÉRATIONS DE  
GROTHENDIECK ET LE FORMALISME  
DES CYCLES ÉVANESCENTS DANS LE  
MONDE MOTIVIQUE

par Joseph AYOUB



## Remerciements

Ce texte, en deux volumes, est essentiellement ma thèse de doctorat augmentée d'un quatrième chapitre traitant la construction et la fonctorialité des catégories motiviques introduites par Morel et Voevodsky.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers Fabien Morel qui a dirigé cette thèse et qui m'a beaucoup appris sur les motifs, depuis leurs aspects les plus techniques jusqu'aux conjectures les plus inaccessibles.

Je remercie également Luc Illusie auprès duquel j'ai appris la cohomologie étale et le formalisme des cycles évanescents.

Pendant la préparation de ma thèse j'ai eu l'occasion d'échanger des idées avec beaucoup de mathématiciens : Yves André, Luca Barbieri Viale, Spencer Bloch, Frédéric Déglise, Denis-Charles Cisinski, Dennis Eriksson, Vladimir Guletski, Bruno Kahn, Bernhard Keller, Shun-Ichi Kimura, Bruno Klingler, Marc Levine, Carlo Mazza, Ania Otwinowska, Gereon Quick, Joël Riou, Markus Spitzweck, Alexandr Usnich, Claire Voisin. Je les remercie tous, ainsi que ceux que j'ai oublié de citer, pour ces échanges stimulants.

Je remercie également Jörg Wildeshaus et Jose Ignacio Burgos pour avoir organisé un groupe de travail au CRM sur une partie de ce travail. Leurs remarques ont contribué à la version actuelle du texte.

Je dédie ce travail à Andreea et mes parents Georges et Bouchra.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les quatre opérations de Grothendieck dans un cadre motivique</b>	<b>3</b>
1.1	Préliminaires 2-catégoriques I : Adjonctions dans une 2-catégorie . . . . .	5
1.1.1	Adjonctions dans une 2-catégorie . . . . .	6
1.1.2	Adjonctions et les faces carrées . . . . .	9
1.1.3	Applications aux 2-foncteurs . . . . .	13
1.1.4	Une règle de calcul . . . . .	15
1.1.5	Équivalences dans une 2-catégorie . . . . .	16
1.1.6	Autoéquivalences d'un 2-foncteur . . . . .	17
1.2	Préliminaires 2-catégoriques II : Échanges entre 2-foncteurs . . . . .	20
1.2.1	Structures d'échange . . . . .	20
1.2.2	Recollement des structures d'échange . . . . .	24
1.2.3	Autoéquivalences compatibles avec un échange . . . . .	33
1.2.4	Foncteurs croisés . . . . .	35
1.3	Préliminaires 2-catégoriques III : Prolongement des 2-foncteurs . . . . .	36
1.3.1	Les catégories $\Delta_k$ . . . . .	37
1.3.2	Foncteur associé à un chemin . . . . .	40
1.3.3	Récapitulation. Fin des préliminaires . . . . .	45
1.3.4	La construction du 2-foncteur $H$ . . . . .	50
1.3.5	Les données $A$ du critère 1.3.1 dans le cas géométrique . . . . .	53
1.4	Énoncé du résultat principal. Quelques préparations . . . . .	54
1.4.1	Énoncé du résultat principal . . . . .	54
1.4.2	Les 2-morphismes de connexions. Unités et counités des adjonctions . . . . .	56
1.4.3	"Localement pour la topologie de Nisnevich" . . . . .	57
1.4.4	Le foncteur prolongement par le vide. Le foncteur sections à support . . . . .	57
1.4.5	Une structure de foncteurs croisés sur $(H^*, H_*, {}^{\text{Liss}}H_{\#}, {}^{\text{Liss}}H^*)$ . . . . .	60
1.4.6	Une structure de foncteurs croisés sur $(H^*, H_*, {}^{\text{Imm}}H_!, {}^{\text{Imm}}H^!)$ . . . . .	61
1.4.7	Sur le 2-morphisme $\theta$ . . . . .	63
1.5	Les équivalences de Thom. Les 2-foncteurs ${}^{\text{Liss}}H^!$ et ${}^{\text{Liss}}H_!$ . . . . .	66
1.5.1	Définition . . . . .	66
1.5.2	Propriétés des équivalences de Thom . . . . .	71
1.5.3	Cas particulier des fibrés vectoriels. Les 2-foncteurs ${}^{\text{Liss}}H^!$ et ${}^{\text{Liss}}H_!$ . . . . .	77
1.5.4	Une structure de foncteurs croisés sur $(H^*, H_*, {}^{\text{Liss}}H_!, {}^{\text{Liss}}H^!)$ . . . . .	79
1.5.5	L'action des automorphismes sur les équivalences de Thom . . . . .	83
1.6	Pureté. Construction du foncteur croisé $(H^*, H_*, H_!, H^!)$ . . . . .	85
1.6.1	Les 2-morphismes $\pi$ . . . . .	87
1.6.2	Le cas particulier d'un fibré vectoriel sur $Y$ . . . . .	96
1.6.3	Le 2-isomorphisme de pureté . . . . .	99
1.6.4	Compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la composition des immersions fermées . . . . .	111
1.6.5	Le foncteur croisé $(H^*, H_*, H_!, H^!)$ . . . . .	132
1.7	Le morphisme de 2-foncteurs $H_! \mapsto H_*$ . Fin de la démonstration . . . . .	156
1.7.1	Définition et propriétés des 2-morphismes $f_! \rightarrow f_*$ . . . . .	157
1.7.2	Pour $f$ projectif, $f_! \rightarrow f_*$ est un 2-isomorphisme . . . . .	167

<b>2</b>	<b>Compléments sur les 2-foncteurs homotopiques stables</b>	<b>179</b>
2.1	Préliminaires généraux . . . . .	181
2.1.1	Sous-catégories triangulées et engendremments . . . . .	181
2.1.2	Dérivateurs triangulés. Application aux 2-triangles distingués . . . . .	189
2.1.3	Quelques compléments sur les $t$ -structures . . . . .	206
2.1.4	Catégories monoïdales, foncteurs pseudo-monoïdaux, modules et projecteurs . . . . .	210
2.1.5	Catégories monoïdales fermés . . . . .	230
2.1.6	Catégories monoïdales triangulées . . . . .	239
2.1.7	Des hypothèses sur un 2-foncteur homotopique stable . . . . .	241
2.1.8	Résolution des singularités . . . . .	245
2.2	Engendrement dans un 2-foncteur homotopique stable . . . . .	245
2.2.1	Définitions des sous-catégories engendrées et propriétés élémentaires de stabilité . . . . .	246
2.2.2	La constructibilité des quatre opérations . . . . .	250
2.2.3	Définition des $t$ -structures engendrées et propriétés élémentaires de $t$ -exactitude . . . . .	256
2.2.4	Définition des $t$ -structures engendrées perverses et les propriétés de $t$ -exactitude . . . . .	261
2.2.5	Retour aux $t$ -structures engendrées non perverses. Résumé des résultats . . . . .	270
2.3	Les 2-foncteurs monoïdaux homotopiques stables . . . . .	274
2.3.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	274
2.3.2	Le module $[i^*, i^!]$ pour une immersion fermée $i$ . . . . .	277
2.3.3	Structure monoïdale et équivalences de Thom . . . . .	281
2.3.4	Le module $[f^*, f^!]$ lorsque $f$ est lisse . . . . .	285
2.3.5	Le module $[f^*, f^!]$ pour $f$ quelconque . . . . .	286
2.3.6	Des diagrammes commutatifs supplémentaires . . . . .	293
2.3.7	Le module $[f_*, f_!]$ . . . . .	295
2.3.8	Les homomorphismes internes . . . . .	297
2.3.9	Compatibilité avec les 2-morphismes d'échange . . . . .	300
2.3.10	Constructibilité, objets dualisants et dualité . . . . .	302
2.4	Dérivateurs algébriques homotopiques et stables . . . . .	310
2.4.1	Les 2-catégories de diagrammes de $S$ -schémas . . . . .	310
2.4.2	Pré-dérivateurs et dérivateurs algébriques . . . . .	312
2.4.3	Quelques conséquences faciles de la définition . . . . .	314
2.4.4	Extension des résultats du premier chapitre . . . . .	318
2.4.5	Dérivateurs algébriques monoïdaux homotopiques et stables . . . . .	324
<b>3</b>	<b>La théorie des foncteurs cycles proches dans un cadre motivique</b>	<b>327</b>
3.1	Les systèmes de spécialisation : définition et propriétés de cohérence . . . . .	328
3.1.1	Définition et premiers exemples . . . . .	328
3.1.2	Propriétés de cohérence . . . . .	330
3.1.3	Systèmes de spécialisation monoïdaux . . . . .	333
3.2	Une technique de construction de structures de spécialisation . . . . .	336
3.2.1	La construction. Vérification des axiomes . . . . .	337
3.2.2	Fonctorialité par rapport aux diagrammes des schémas . . . . .	340
3.2.3	Structures pseudo-monoïdales . . . . .	341
3.2.4	Autour de l'hypothèse 3.2.15 . . . . .	342
3.3	Le calcul des systèmes de spécialisation pour les schémas standards . . . . .	345
3.3.1	Les $B$ -schémas standards. Notations et énoncés des théorèmes . . . . .	345
3.3.2	Quelques préparations . . . . .	349
3.3.3	La preuve du théorème 3.3.10 : le cas $I$ réduit à un élément . . . . .	350
3.3.4	La preuve du théorème 3.3.10 : le cas général . . . . .	356
3.3.5	Complément au théorème 3.3.10 : cas où $H_1$ est $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé . . . . .	359
3.3.6	La preuve des théorèmes 3.3.4 et 3.3.6 . . . . .	359
3.3.7	Réduction semi-stable . . . . .	364
3.3.8	Applications aux systèmes de spécialisation sur une base de dimension 1 . . . . .	368
3.4	Le système de spécialisation $\Upsilon$ . . . . .	372
3.4.1	Le schéma cosimplicial $(\mathcal{A}, \Delta)$ . . . . .	372
3.4.2	Définition de $\Upsilon$ . Normalisation . . . . .	374
3.4.3	Étude de $\Upsilon$ au dessus d'un corps de caractéristique nulle . . . . .	380
3.5	Le système de spécialisation $\Psi$ . . . . .	382
3.5.1	Le diagramme de schémas $(\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times)$ . . . . .	382

3.5.2	Définition de $\Psi$ . Normalisation . . . . .	383
3.5.3	Étude de $\Psi$ au dessus d'un corps de caractéristique nulle . . . . .	385
3.6	Le système de spécialisation logarithmique et le triangle de monodromie . . . . .	387
3.6.1	Préliminaires . . . . .	387
3.6.2	Le logarithme de $H(\mathbb{G}_m)$ . . . . .	403
3.6.3	Le système de spécialisation logarithmique . . . . .	410
3.6.4	Retour au système de spécialisation cycles proches unipotents . . . . .	416
<b>4</b>	<b>La construction de 2-foncteurs homotopiques stables</b> . . . . .	<b>419</b>
4.1	Catégories de modèles I : la théorie générale . . . . .	420
4.1.1	Quelques points d'algèbre homotopique . . . . .	422
4.1.2	Adjonctions de Quillen et adjonctions de Morel-Voevodsky . . . . .	426
4.1.3	La notion du $\pi_1$ dans une catégorie de modèles . . . . .	428
4.1.4	Triangulation de la catégorie homotopique . . . . .	433
4.2	Catégories de modèles II : accessibilité et localisation . . . . .	441
4.2.1	Accessibilité . . . . .	442
4.2.2	L'argument du petit objet et complexes cellulaires . . . . .	448
4.2.3	Catégories de modèles présentables par cofibrations . . . . .	456
4.2.4	Localisation des catégories de modèles . . . . .	461
4.2.5	Quelques compléments . . . . .	472
4.3	Catégories de modèles III : les spectres symétriques . . . . .	474
4.3.1	Les $(F, \Phi)$ -spectres dans une catégorie abstraite . . . . .	475
4.3.2	Les $(F, \Phi)$ -spectres dans une catégorie de modèles . . . . .	481
4.3.3	Comparaison des spectres . . . . .	489
4.3.4	Hypothèse de finitude et $\Omega$ -spectres . . . . .	497
4.3.5	Spectres dans les catégories de modèles monoïdales . . . . .	499
4.4	Des catégories de modèles de nature faisceautique . . . . .	510
4.4.1	Préfaisceaux et faisceaux à valeurs dans une catégorie abstraite . . . . .	510
4.4.2	Préfaisceaux et faisceaux à valeurs dans une catégorie de modèles . . . . .	515
4.4.3	Fonctorialité élémentaire . . . . .	524
4.4.4	Cas où $\mathfrak{M}$ est monoïdale . . . . .	531
4.5	Le dérivateur algébrique homotopique et stable $\mathbb{S}\mathbb{H}$ . . . . .	531
4.5.1	Le 2-foncteur $\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(-, -), \mathfrak{M})$ . . . . .	532
4.5.2	Le 2-foncteur $\mathbb{S}\mathbb{H}_{\mathfrak{M}}^T(-)$ . Début de la vérification des axiomes . . . . .	538
4.5.3	L'axiome de localité . . . . .	542
4.5.4	Fin de la vérification des axiomes . . . . .	553
4.5.5	Quelques compléments . . . . .	554





# Introduction générale

Dans ce travail, on étend au cadre motivique une grande partie du formalisme introduit par Grothendieck dans le cadre de la cohomologie étale. On trouvera par exemple la construction des quatre opérations associées à un morphisme quasi-projectif de schémas, les théorèmes de changement de base par un morphisme lisse et pour un morphisme propre, la dualité de Verdier et le formalisme des cycles évanescents. Le texte est divisé en deux volumes et chaque volume en deux chapitres. Chaque chapitre est précédé par une introduction détaillée qui, je l'espère, permettra aux lecteurs de localiser plus efficacement l'endroit des différents résultats.

Dans cette introduction générale, j'essaierai d'expliquer l'utilité de l'arsenal des résultats développés dans ce travail. J'ai à l'esprit au moins deux sortes d'applications :

**A-** *Étude des motifs généraux par dévissage au cas de motifs plus simples.* Soit  $(P)$  une propriété des motifs que l'on cherche à établir. Une stratégie consiste à étudier les propriétés de permanence de  $(P)$  par rapport aux opérations de Grothendieck. Supposons par exemple que  $(P)$  est connue pour les motifs de Tate, qu'elle est préservée par les opérations  $f_*$  et qu'elle vérifie la propriété "2 de 3" dans les triangles distingués. On peut alors utiliser le théorème d'engendrement pour conclure (voir le deuxième chapitre). En effet, ce théorème affirme que les motifs sur un schéma  $X$  de type fini sur un corps  $k$  s'obtiennent par des colimites homotopiques à partir de certaines images directes de motifs de Tate.

Un autre exemple plus frappant concerne la conjecture de Schur-finitude des motifs qui prédit que tout motif constructible est annulé par un foncteur de Schur convenable (variante triangulée de la conjecture de Kimura-O'Sullivan). Les résultats du troisième chapitre montrent que la propriété de Schur-finitude d'un motif est préservée par le foncteur "motifs proches". D'autre part, Mazza et Guletski ont montré que la Schur-finitude possède la propriété "2 de 3" dans les triangles distingués. Ceci a permis de ramener la Schur-finitude pour les motifs généraux à la Schur-finitude des motifs des hypersurfaces lisses des espaces projectifs. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [Ayo07].

**B-** *Construction de motifs et de classes de cohomologie motivique. Questions de rationalité.* Un des problèmes importants en géométrie algébrique est la construction d'extensions non-triviales de motifs, voire d'éléments intéressants dans la cohomologie motivique d'une variété. L'exemple le plus connu est celui des polylogarithmes. L'approche classique consiste à construire une extension de structures de Hodge et un système compatible d'extensions de représentations galoisiennes ayant des "origines géométriques" communes. Parfois, il est possible de donner une construction uniforme de ces extensions en utilisant les opérations de Grothendieck pour les motifs. Le résultat est alors plus élégant, plus précis et plus satisfaisant. C'est effectivement le cas pour les polylogarithmes (voir [Ayo04] ainsi que la fin du troisième chapitre). Pour un autre exemple, le lecteur pourra consulter [Vol07], où l'auteur utilise le foncteur "motif proche" pour montrer qu'une certaine classe d'extensions de structures de Hodge  $\alpha \in H_{Hdg}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1)) = \mathbb{C}^*$  provient d'une extension de motifs définie sur les corps des rationnels, déduisant ainsi que  $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ .

D'une manière générale, le présent travail ramène en grande partie l'étude des motifs sur une base générale à l'étude des motifs sur un corps. Mais, contrairement à la situation en cohomologie étale ou en théorie de Hodge, les propriétés formelles de la catégorie des motifs sur un corps sont loin d'être comprises. Je pense notamment à l'existence d'un support abélien, i.e., d'une  $t$ -structure motivique. Ceci restreint bien-entendu le champs des applications.



# Chapitre 1

## Les quatre opérations de Grothendieck dans un cadre motivique

**Introduction.** En cohomologie étale, on sait associer à tout morphisme de schémas  $f : X \longrightarrow Y$  (séparé et de type fini) quatre foncteurs :

$$Rf^*, Rf_*, Rf_!, Rf^!$$

reliant les deux catégories dérivées des faisceaux étales de  $\Lambda$ -modules  $D(X, \Lambda)$  et  $D(Y, \Lambda)$  ( $\Lambda$  étant un anneau commutatif fini). Ces quatre foncteurs forment ce qu'on appellera les 4 opérations de Grothendieck. Durant son *Motivic Homotopy Theory Program*, Vladimir Voevodsky a construit l'analogie des 4 opérations dans le cadre des catégories homotopiques stables des schémas. Malheureusement aucun texte décrivant cette construction n'est actuellement disponible, mis à part les notes de Pierre Deligne [Del01] où on trouve seulement quelques sorites généraux sur les adjonctions dans les 2-catégories ainsi que la définition d'un foncteur croisé et l'énoncé précis du théorème de Voevodsky. On propose dans ce premier chapitre une démonstration de ce théorème. Nous ignorons si la démarche que nous suivons est la même que celle suivie par Voevodsky. Notons quand même que nous construisons d'abord les foncteurs  $f^!$  puis nous déduisons les foncteurs  $f_!$  par adjonction alors que Voevodsky fait l'inverse (d'après une communication personnelle avec V. Voevodsky le 23 Avril 2003 à Paris). Mais il s'agit bien entendu d'une différence inessentielle ! Faisons maintenant un petit survol :

- 1- On commence le chapitre par une série de trois "préliminaires 2-catégoriques". Le but de ces préliminaires est :
  - d'une part, donner un langage souple pour énoncer les résultats intermédiaires aboutissant aux théorèmes principaux. Ce langage repose sur les notions de : 2-catégories, 2-foncteurs, adjonctions dans une 2-catégorie, adjonctions globales entre deux 2-foncteurs, structures d'échange sur un couple de 2-foncteurs et foncteurs croisés,
  - d'autre part, démontrer tout ce qui est formellement démontrable afin d'alléger la démonstration proprement dite de notre théorème.

La première section et donc la première partie des préliminaires 2-catégoriques regroupe quelques sorites généraux sur les 2-catégories. La notion la plus importante est bien sûr celle de l'adjonction dans une 2-catégorie. Tous les résultats de cette section se trouvent dans [Del01].

- 2- Dans la deuxième section, on introduit la notion d'*échange* entre deux 2-foncteurs. Il s'agit là d'une notion qui sera utilisée constamment tout au long du texte. Supposons donnés deux 2-foncteurs (covariants pour simplifier)  $F$  et  $G$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  dans une 2-catégorie  $\mathfrak{D}$ , coïncidant sur les objets de  $\mathcal{C}$ . Fixons une classe  $\mathcal{E}$  de carrés de  $\mathcal{C}$  stable par compositions horizontales et verticales (exemple la classe des carrés commutatifs). Nous appellerons une structure d'échange sur le couple  $(F, G)$  la donnée pour tout carré de  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array}$$

d'un 2-morphisme :  $F(f) \circ G(g') \longrightarrow G(g) \circ F(f')$  (par exemple). Ces 2-morphismes doivent vérifier deux conditions de compatibilités avec les compositions des carrés. En modifiant les variances des 2-foncteurs ainsi que le sens des 2-morphismes associés aux carrés de  $\mathcal{E}$ , on obtient 8 types de structures d'échange. L'exemple le plus connu de structure d'échange est peut-être celui donné par les morphismes de changement de base en cohomologie étale. On donne également deux méthodes de constructions de structures d'échange.

- Étant donné un échange sur  $(F, G)$  et, pour toute flèche  $g$  dans  $\mathcal{C}$ , un adjoint à  $G(g)$  on peut une fois sur deux (selon le type des adjonctions et le type de l'échange) construire un échange sur  $(F, {}^aG)$  (où  ${}^aG$  est un 2-foncteur tel que pour tout  $g$ ,  ${}^aG(g)$  est un adjoint à  $G(g)$ ).
- Étant donnés deux 2-foncteurs  $F$  et  $G$  et deux "échanges partiels" sur  $(F, G)$ , on donne des conditions suffisantes pour que ces échanges partiels proviennent d'un échange sur  $(F, G)$ . C'est le théorème de recollement des structures d'échange.

On définit ensuite ce qu'on entendra par foncteurs croisés. Notre définition est un peu plus générale que celle de Voevodsky. En gros, un foncteur croisé de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  est la donnée de :

- quatre 2-foncteurs :  $H^*$ ,  $H_*$ ,  $H_!$ ,  $H^!$ ,
- quatre structures d'échange, un sur chaque couple :  $(H^*, H^!)$ ,  $(H_*, H_!)$ ,  $(H^*, H_!)$ ,  $(H_*, H^!)$ . Les deux derniers échanges sont des isoéchanges.

Ces données vérifient un certain nombre de conditions assurant une forte stabilité de l'ensemble des quatre échanges par les constructions habituelles.

**3-** On termine les généralités avec un critère de prolongement de 2-foncteurs : On suppose donnés une catégorie  $\mathcal{C}$ , une 2-catégorie  $\mathcal{D}$  et deux 2-foncteurs  $H_1$  et  $H_2$  définis sur deux sous-catégories  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  de  $\mathcal{C}$ . On donne des conditions suffisantes pour que les deux 2-foncteurs  $H_1$  et  $H_2$  proviennent d'un 2-foncteur  $H$  défini sur  $\mathcal{C}$  toute entière. La condition la plus importante est sans doute l'existence d'une structure d'échange sur  $(H_2, H_1)$  pour la classe des carrés commutatifs.

Ce théorème sera appliqué dans la sixième section pour construire le 2-foncteur  $H^!$  : La catégorie des  $S$ -schémas quasi-projectifs  $(\text{Sch}/S)$  jouera le rôle de  $\mathcal{C}$ . On prendra  $\mathcal{C}_1 = (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}}$  (la catégorie des  $S$ -schémas quasi-projectifs avec seulement les immersions fermées comme morphismes), et  $\mathcal{C}_2 = (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$  (la catégorie des  $S$ -schémas quasi-projectifs avec seulement les  $S$ -morphisms lisses comme morphismes). Dans la quatrième section on verra la définition de  $H_1$  qu'on notera  ${}^{\text{Imm}}H^!$ . A la fin de la cinquième section on verra la construction de  $H_2$  qu'on notera  ${}^{\text{Liss}}H^!$ . Enfin une bonne partie de la section six sera consacrée à la vérification des conditions d'application du théorème 1.3.1 plus précisément à la construction d'une structure d'échange sur le couple  $({}^{\text{Liss}}H^!, {}^{\text{Imm}}H^!)$  pour la classe des carrés commutatifs.

**4-** Dans la section quatre, on commence par fixer les ingrédients élémentaires à partir desquels le 2-foncteur  $H^!$  sera construit et on donne également les six axiomes que doit vérifier un 2-foncteur homotopique stable. Les ingrédients élémentaires sont peu nombreux, il s'agit de :

- Trois 2-foncteurs :  $H^*$ ,  $H_*$  et  ${}^{\text{Liss}}H_{\#}$  de but la 2-catégorie des catégories triangulées. Les deux premiers étant définis sur  $(\text{Sch}/S)$ , alors que le dernier est défini seulement sur  $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$ .
- Pour tout  $S$ -morphisme  $f$ , d'une structure d'adjonction entre  $f^* = H^*(f)$  et  $f_* = H_*(f)$ , et lorsque  $f$  est lisse d'une structure d'adjonction entre  $f_{\#} = H_{\#}(f)$  et  $f^*$ .

Les axiomes qui doivent être vérifiés sont assez naturels et sont vrais dans le cas étale ainsi que dans le cas des théories homotopiques stables des schémas. Notons que parmi ces axiomes on trouve :

- L'axiome de la localité qui affirme que pour un couple d'immersions complémentaires  $(i, j)$  (avec  $i$  fermée et  $j$  ouverte) le couple de 1-morphisme  $(i^*, j_{\#})$  est conservatif.
- L'axiome de stabilité qui affirme que le 1-morphisme  $p_{\#}s_*$  est une équivalence lorsque  $p$  est la projection de la droite affine sur un  $S$ -schéma  $X$  et  $s$  la section nulle.
- L'axiome d'homotopie qui affirme que le 2-morphisme (d'unité de l'adjonction)  $\text{id} \longrightarrow p_*p^*$  est un 2-isomorphisme lorsque  $p$  est la projection de la droite affine.

On trouvera sous forme de scholie l'énoncé précis du théorème qu'on veut démontrer. Tout de suite après on établit plusieurs résultats faciles conséquences directes des axiomes. On mettra en évidence quelques structures d'échange et on construit les foncteurs  $i^!$  pour  $i$  une immersion fermée. Ces derniers s'organisent en un 2-foncteur  ${}^{\text{Imm}}H^!$ . On montrera également que le 1-morphisme  $i^!$  est adjoint à droite de  $i_*$ . Dans cette section, on n'utilisera jamais les axiomes de stabilités ni d'homotopie. Par contre, l'axiome de localité sera utilisé (notamment pour définir les  $i^!$ ).

**5-** Dans la section cinq, on étudie les conséquences de l'axiome de stabilité. On construit ce qu'on appellera l'équivalence de Thom  $\text{Th}(E)$  associée à un fibré  $E$ . Dans le cas de la catégorie homotopique stable  $\mathbf{SH}(X)$ , l'équivalence de Thom  $\text{Th}(E)$  est simplement le foncteur "smash-produit" par l'espace de Thom associé à  $E$ . On établit ensuite quelques propriétés de cohérence pour les équivalences de Thom, notamment l'associativité. On définit ensuite pour tout  $S$ -morphisme lisse  $f$ , un 1-morphisme  $f^!$  en posant :

$$f^! = \text{Th}(\Omega_f) \circ f^*$$

avec  $\Omega_f$  le module (localement libre) des différentielles relatives (à  $f$ ). On vérifie ensuite (en utilisant les propriétés de cohérence des équivalences de Thom) que les 1-morphisms  $f^!$  s'organisent naturellement en un 2-foncteur :

$${}^{\text{Liss}}H^! : (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{TA}$$

On termine la section par la construction de quelques structures d'échange.

**6-** La section six est sans aucun doute la section la plus pénible et la plus technique. On commence par la construction du 2-isomorphisme de pureté associé à ce qu'on appelle classiquement un couple lisse. Étant donné un diagramme commutatif de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

(avec  $s$  une immersion fermée et  $f$  et  $g$  des morphismes lisses), on construit un 2-isomorphisme :

$$s^! f^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) g^*$$

avec  $\mathcal{N}$  le  $\mathcal{O}_Y$ -module (localement libre) normal à l'immersion  $s$ . L'outil géométrique qui permet cette construction est l'espace de déformation au cône normal associé à l'immersion  $s$ . L'axiome d'homotopie intervient dans la construction du 2-isomorphisme de pureté d'une façon cruciale mais un peu cachée.

On passe ensuite à l'étude du 2-isomorphisme de pureté. On démontre assez facilement tous les résultats de compatibilité que l'on peut espérer pour ce 2-isomorphisme sauf sa compatibilité avec la composition des immersions fermées. Cette dernière propriété demandera beaucoup plus de travail et sera traitée dans une sous-section à part.

Une fois toutes les compatibilités établies, on passe à la définition de l'isoéchange sur  $(\mathrm{Liss}\mathbf{H}^!, \mathrm{Imm}\mathbf{H}^!)$ . La définition du 2-morphisme structural de cet échange repose essentiellement sur le 2-isomorphisme de pureté. Pour vérifier que l'on a bien défini une structure d'échange on utilisera toutes les compatibilités établies pour les 2-isomorphismes de pureté.

A la fin de la section six, on appliquera le théorème 1.3.1 qui nous donne le 2-foncteur  $\mathbf{H}^!$ , puis la proposition 1.2.7 qui nous permettra de construire un échange sur  $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}^!)$ . Ce dernier (par un argument général) produit un foncteur croisé sur  $(\mathrm{Sch}/S)$  :

$$(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_*, \mathbf{H}_!, \mathbf{H}^!)$$

C'est le foncteur croisé recherché!

**7-** La septième section est sans doute la plus intéressante. On n'utilisera de ce qui précède que l'existence du foncteur croisé. Cette partie peut être lue indépendamment du reste. On utilisera à plusieurs reprises l'axiome d'homotopie.

On commence par définir pour tout  $S$ -morphisme quasi-projectif  $f$  un 2-morphisme :

$$\alpha_f : f_! \longrightarrow f_*$$

On établit ensuite quelques propriétés de cohérence pour ces 2-morphismes. On montrera en particulier que ces 2-morphismes définissent un morphisme de 2-foncteurs (dans le sens évident du terme).

On démontre ensuite que lorsque le  $S$ -morphisme  $f$  est projectif, le 2-morphisme  $\alpha_f$  est un 2-isomorphisme. Ce résultat donne en particulier le théorème de changement de base pour un morphisme projectif. Nous ignorons si ce théorème peut être démontré directement dans le cas des catégories homotopiques stables des schémas.

**Prérequis.** Ce chapitre est à quelques exceptions près "self-contained". Pour ce qui est des trois premières sections, on supposera que le lecteur est familier avec les notions élémentaires de catégories. On conseille vivement les lecteurs qui connaissent peu les 2-catégories et les 2-foncteurs de lire les notes de Delignes [Del01]. Pour ce qui est des quatre dernières sections, on supposera que le lecteur est familier avec le langage des schémas comme dans [EGA I] ou dans [Har77], et qu'il connaît la construction de l'espace de déformation au cône normal associé à une immersion fermée (voir le chapitre 5 de [Ful84]). Aucune propriété non élémentaire des schémas ne sera utilisée.

Enfin, bien que non nécessaire, une familiarité avec le formalisme des six opérations de Grothendieck dans le cas de la cohomologie  $\ell$ -adique sera d'un grand secours pour la compréhension de ce texte. Notons également que le cas  $\ell$ -adique fournit une motivation pour ce travail : la spécialisation des résultats prouvés ici au cas des catégories dérivées  $D(X, \Lambda)$  des catégories abéliennes des faisceaux de  $\Lambda$ -modules (avec  $\Lambda$  un anneau fini) sur  $X_{\mathrm{ét}}$ , pourra fournir des simplifications notables dans l'établissement des théorèmes fondamentaux de [SGA 4].

## 1.1 Préliminaires 2-catégoriques I : Adjonctions et équivalences dans une 2-catégorie

Dans ce travail, on ne considère que des 2-catégories au sens strict. Par contre on utilisera la notion de 2-foncteurs au sens faible. Pour plus de détails, le lecteur est prié de se référer à [Del01].

### 1.1.1 Adjonctions dans une 2-catégorie

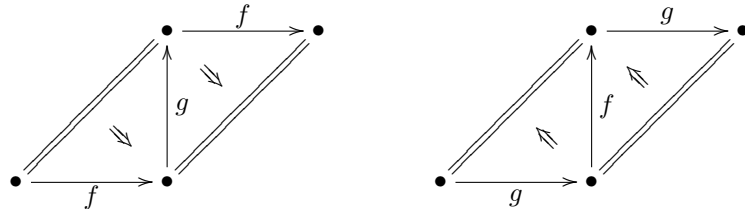
Soit  $\mathfrak{D}$  une 2-catégorie. On peut définir dans  $\mathfrak{D}$  une notion d'adjonction pour les 1-morphismes généralisant la notion d'adjonction habituelle pour les foncteurs dans la 2-catégorie des petites catégories  $\mathfrak{Cat}$  (voir [Mac71]).

**DEFINITION 1.1.1** — Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un 1-morphisme de  $\mathfrak{D}$ . Un adjoint à droite de  $f$  est la donnée de :

1. un 1-morphisme  $g : Y \longrightarrow X$ ,
2. deux 2-morphismes :

$$1 \xrightarrow{\eta} g \circ f \quad \text{et} \quad f \circ g \xrightarrow{\delta} 1$$

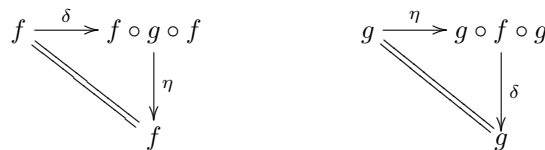
tels que la composée de chacun des deux diagrammes planaires :



soit l'identité.

Les deux 2-morphismes  $\eta$  et  $\delta$  sont appelés respectivement l'unité et la counité de l'adjonction. Parfois, on ne mentionnera pas les 2-morphismes  $\eta$  et  $\delta$  : nous dirons simplement “ $g$  est un adjoint à droite de  $f$ ” ou “ $f$  est un adjoint à gauche de  $g$ ”.

**Remarque 1.1.2** — La condition imposée sur  $\eta$  et  $\delta$  dans la définition ci-dessus n'est autre que la commutation des triangles (habituels) :



**Remarque 1.1.3** — La dualité des 2-catégories échange la notion d'adjonction à droite et d'adjonction à gauche. Plus précisément les assertions ci-dessous sont équivalentes :

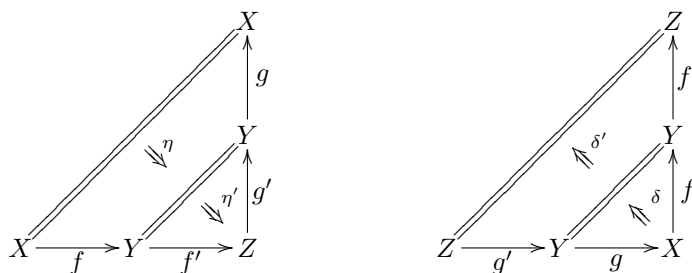
- $f$  est un adjoint à gauche de  $g$  dans  $\mathfrak{D}$ ,
- $f$  est un adjoint à droite de  $g$  dans  $\mathfrak{D}^{1\text{-op}}$ ,
- $f$  est un adjoint à droite de  $g$  dans  $\mathfrak{D}^{2\text{-opp}}$ ,
- $f$  est un adjoint à gauche de  $g$  dans  $\mathfrak{D}^{1,2\text{-op}}$ ,
- $g$  est un adjoint à droite de  $f$  dans  $\mathfrak{D}$ , etc.

Le lemme qui suit est un exercice facile laissé aux lecteurs :

**LEMME 1.1.4** — Soit une suite de 1-morphismes :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

Dans une 2-catégorie  $\mathfrak{D}$ . On suppose donné un adjoint à droite  $(g, \eta, \delta)$  (resp.  $(g', \eta', \delta')$ ) de  $f$  (resp.  $f'$ ). Alors le 1-morphisme  $g \circ g'$  est un adjoint à droite de  $f' \circ f$ . De plus, l'unité et la counité sont données respectivement par les composées des diagrammes planaires :



**PROPOSITION 1.1.5** — Soient  $\mathfrak{D}$  une 2-catégorie et  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathfrak{D}$ . Soient  $f$  et  $f'$  deux 1-morphismes et  $\alpha$  un 2-morphisme de  $\mathfrak{D}$  :

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{f'} \end{array} Y$$

On suppose donnés des adjoints à droite  $(g, \eta, \delta)$  et  $(g', \eta', \delta')$  de  $f$  et  $f'$  respectivement. Il existe alors un unique 2-morphisme :

$$Y \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \beta \Uparrow \\ \xrightarrow{g'} \end{array} X$$

rendant commutatif le diagramme de 2-morphismes :

(1.1)

$$\begin{array}{ccc} & g \circ f & \\ \eta \nearrow & & \searrow \alpha \\ 1 & & g \circ f' \\ \eta' \searrow & & \nearrow \beta \\ & g' \circ f' & \end{array}$$

De plus, le 2-morphisme  $\beta$  est donné par la composée :

$$g' \xrightarrow{\eta'} g \circ f \circ g' \xrightarrow{\alpha} g \circ f' \circ g' \xrightarrow{\delta'} g$$

et rend le diagramme de 2-morphismes :

(1.2)

$$\begin{array}{ccc} & f \circ g & \\ \beta \nearrow & & \searrow \delta \\ f \circ g' & & 1 \\ \alpha \searrow & & \nearrow \delta' \\ & f' \circ g' & \end{array}$$

également commutatif.

**DEMONSTRATION** La proposition en question est un cas particulier de la proposition 1.1.9. On a préféré l'inclure ici pour pouvoir prouver l'unicité de l'adjoint dès le début. Le lecteur pourra donc ignorer la preuve de ce lemme.

On commence par prouver l'unicité. Soit  $\beta$  comme dans l'énoncé. Le diagramme commutatif de 2-morphisme donne par composition à gauche par  $g'$  le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & g \circ f \circ g' & \\ \eta \nearrow & & \searrow \alpha \\ g' & & g \circ f' \circ g' \\ \eta' \searrow & & \nearrow \beta \\ & g' \circ f' \circ g' & \end{array}$$

Ce carré s'insère dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & g \circ f \circ g' & & \\ & & \eta \nearrow & & \searrow \alpha \\ & g' & & & g \circ f' \circ g' \xrightarrow{\delta'} g \\ & \eta' \searrow & & \nearrow \beta & \\ & & g' \circ f' \circ g' & \xrightarrow{\delta'} g' & \nearrow \beta \end{array}$$

Mais la composée des flèches situées sur la partie inférieure du bord de ce diagramme vaut  $\beta$ . On voit donc que  $\beta$  est égal à la composée :

$$g' \xrightarrow{\eta} g \circ f \circ g' \xrightarrow{\alpha} g \circ f' \circ g' \xrightarrow{\delta'} g$$

Ceci prouve l'unicité de  $\beta$  et fournit un candidat. Il reste alors à prouver que ce candidat est le bon. Pour cela il faut calculer la composée :

$$1 \xrightarrow{\eta'} g' \circ f' \xrightarrow{\beta} g \circ f'$$

Par définition cette composée est égale à la composée suivante :

$$1 \xrightarrow{\eta'} g' \circ f' \xrightarrow{\eta} g \circ f \circ g' \circ f' \xrightarrow{\alpha} g \circ f' \circ g' \circ f' \xrightarrow{\delta'} g \circ f'$$

Mais on dispose d'un carré commutatif évident :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\eta} & g \circ f \\ \eta' \downarrow & & \downarrow \eta' \\ g' \circ f' & \xrightarrow{\eta} & g \circ f \circ g' \circ f' \end{array}$$

Notre composée est donc égale à la composée suivante :

$$1 \xrightarrow{\eta} g \circ f \xrightarrow{\eta'} g \circ f \circ g' \circ f' \xrightarrow{\alpha} g \circ f' \circ g' \circ f' \xrightarrow{\delta'} g \circ f'$$

Mais on a encore un carré commutatif évident :

$$\begin{array}{ccc} g \circ f & \xrightarrow{\eta'} & g \circ f \circ g' \circ f' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ g \circ f' & \xrightarrow{\eta'} & g \circ f' \circ g' \circ f' \end{array}$$

Notre composée est donc égale à la composée suivante :

$$1 \xrightarrow{\eta} g \circ f \xrightarrow{\alpha} g \circ f' \xrightarrow{\eta'} g \circ f' \circ g' \circ f' \xrightarrow{\delta'} g \circ f'$$

Finalement on remarque que la composée des deux dernières flèches de la suite précédente est l'identité par la définition des adjonctions. On obtient en fin de compte la composée :

$$1 \xrightarrow{\eta} g \circ f \xrightarrow{\alpha} g \circ f'$$

On a ainsi prouvé que notre candidat rend le diagramme (1.1) commutatif. Pour la dernière assertion on utilise un argument de dualité. En effet, la formule donnant  $\beta$  est inchangée par la 2-dualité des 2-catégories. C.Q.F.D

Le morphisme  $\beta$  sera noté  ${}^a\alpha$ . On a le lemme :

**LEMME 1.1.6** — Soient  $f, f'$  et  $f''$  dans  $\text{Mor}_{\mathfrak{D}}(X, Y)$  (la catégorie des 1-morphismes de  $X$  vers  $Y$ ) et  $g, g'$  et  $g''$  des adjoints à droite respectifs. Soient aussi  $\alpha : f \longrightarrow f'$  et  $\alpha' : f' \longrightarrow f''$  des 2-morphismes. On a la formule :

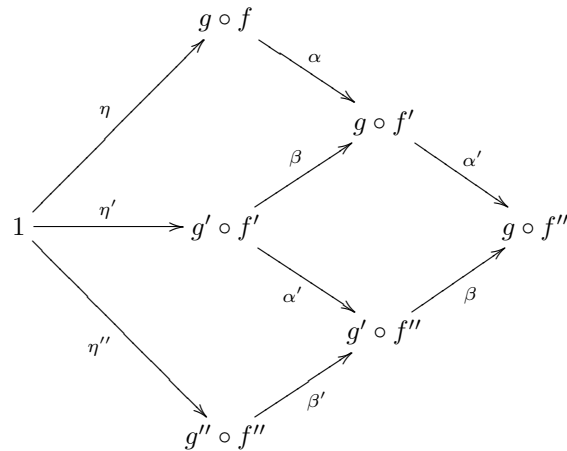
$${}^a(\alpha' \circ \alpha) = ({}^a\alpha) \circ ({}^a\alpha')$$

**DEMONSTRATION** On note  $\beta = {}^a\alpha$  et  $\beta' = {}^a\alpha'$ . Il suffit de montrer la commutativité du carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} & g \circ f & \\ \eta \nearrow & & \searrow \alpha' \circ \alpha \\ 1 & & g \circ f'' \\ \eta'' \searrow & & \nearrow \beta \circ \beta' \\ & g'' \circ f'' & \end{array}$$



où  $\eta''$  est l'unité de l'adjonction entre  $f''$  et  $g''$ . Pour cela on factorise ce carré de la manière suivante :



Tous les sous-carrés de ce diagrammes sont commutatifs. Ceci prouve le lemme.

C.Q.F.D

Voici deux corollaires de ce qui précède :

**COROLLAIRE 1.1.7** — (*Unicité de l'adjoint*) Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un 1-morphisme dans une 2-catégorie  $\mathcal{D}$ . Soient  $(g, \eta, \delta)$  et  $(g', \eta', \delta')$  deux adjoints à droite de  $f$ . Il existe alors un unique 2-isomorphisme  $u : g \longrightarrow g'$  échangeant  $\eta$  et  $\eta'$ . Ce même 2-isomorphisme est l'unique 2-isomorphisme échangeant  $\delta$  et  $\delta'$ .

DEMONSTRATION On applique la proposition 1.1.5 à  $\alpha = \text{Id} : f \longleftarrow f$ . On utilise le lemme 1.1.6 pour prouver que  $u$  est un isomorphisme.

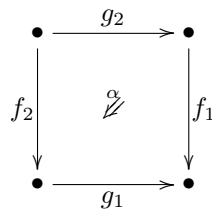
C.Q.F.D

**COROLLAIRE 1.1.8** — Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un 1-morphisme dans une 2-catégorie  $\mathcal{D}$ . On suppose que  $f$  admet des adjoints à droites. Alors un adjoint à droite  $(g, \eta, \delta)$  de  $f$  est complètement déterminé par  $g$  et  $\eta$ .

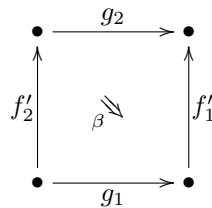
### 1.1.2 Adjonctions et les faces carrées

On a la proposition suivante qui généralise la proposition 1.1.5 :

**PROPOSITION 1.1.9** — Supposons donnés un 2-morphisme dans une 2-catégorie  $\mathcal{D}$  :

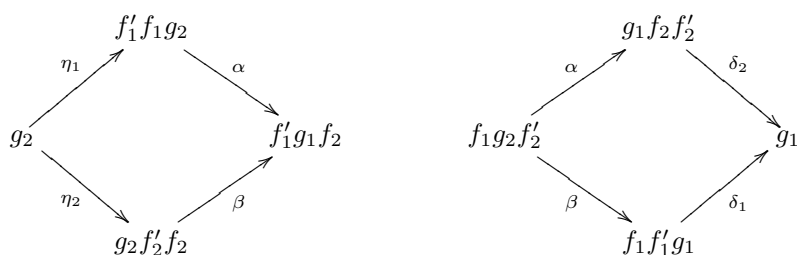


et des adjoints à droite  $(f'_1, \eta_1, \delta_1)$  et  $(f'_2, \eta_2, \delta_2)$  à  $f_1$  et  $f_2$  respectivement. Il existe alors un unique 2-morphisme :

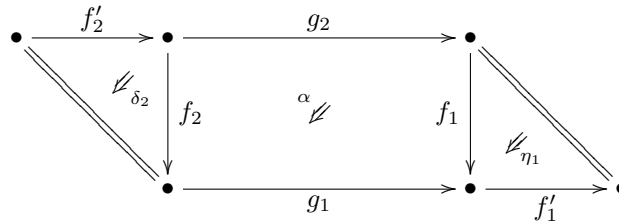


rendant commutatif l'un des deux diagrammes suivants :

(1.3)

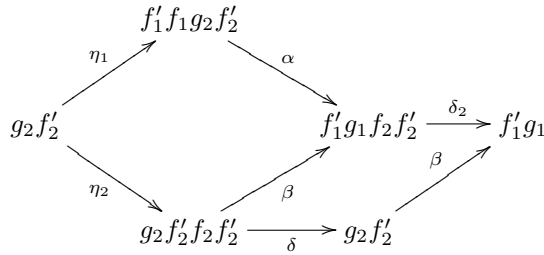


De plus ce 2-morphisme  $\beta$  est donné par la composée du diagramme planaire :



et rend les deux diagrammes (1.3) commutatifs.

**DEMONSTRATION** On commence par prouver l'unicité de  $\beta$ . Il suffit par 2-dualité de le faire dans le cas où le premier carré de 2-morphismes est commutatif. Pour cela on procède comme dans 1.1.5 et on forme le diagramme commutatif de 2-morphismes :



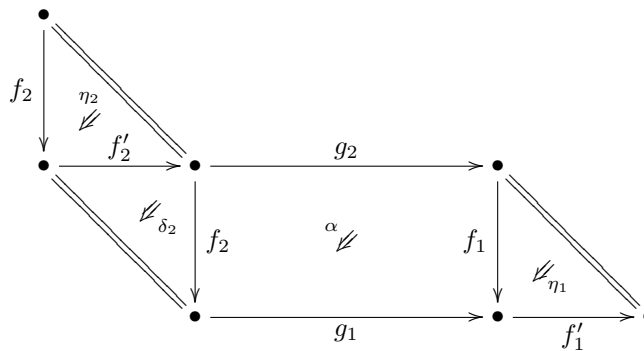
Étant donné que la composée  $\delta_2 \circ \eta_2$  est l'identité on voit que  $\beta$  est forcément égale à la composée :

$$g_2 f'_2 \xrightarrow{\eta_1} f'_1 f_1 g_2 f'_2 \xrightarrow{\alpha} f'_1 g_1 f_2 f'_2 \xrightarrow{\delta_2} f'_1 g_1$$

Il reste donc à prouver que ce candidat (qu'on appellera  $\beta_0$ ) convient. Explicitons la composée :

$$g_2 \longrightarrow g_2 f'_2 f_2 \xrightarrow{\beta_0} f'_1 g_1 f_2$$

en langage de diagramme planaire. On obtient :

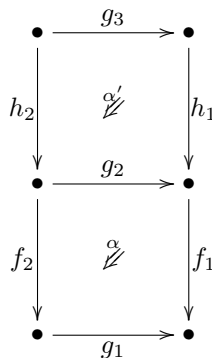


En utilisant alors la relation  $\delta_2 \circ \alpha_2 = \text{id}_{f_2}$  on obtient ce qu'on cherche.

C.Q.F.D

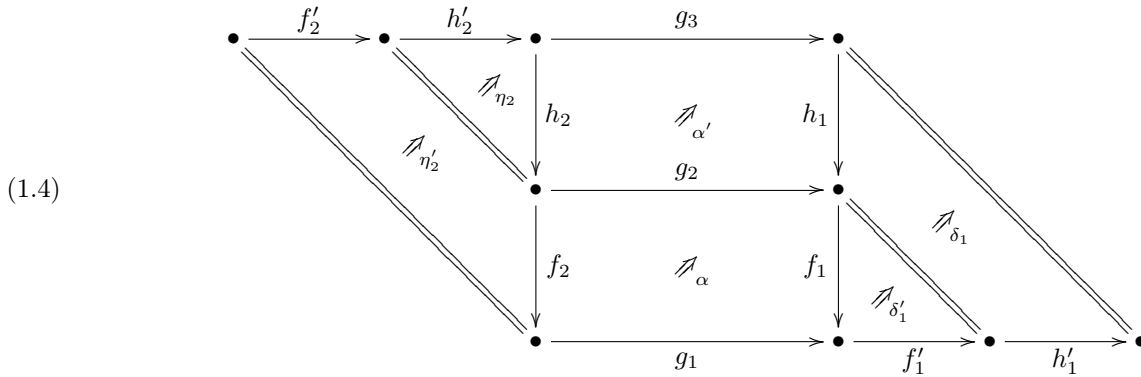
**DEFINITION 1.1.10** — Faute d'une meilleure terminologie, nous dirons que  $\beta$  est obtenu de  $\alpha$  par adjonction suivant  $(f_1, f'_1)$  et  $(f_2, f'_2)$ .

**PROPOSITION 1.1.11** — (Compatibilité avec les compositions verticales) Supposons donnés dans une 2-catégorie  $\mathcal{D}$  un diagramme planaire :

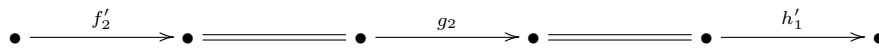


et des adjoints à **droite**  $(f'_1, \eta_1, \delta_1)$ ,  $(f'_2, \eta_2, \delta_2)$ ,  $(h'_1, \eta'_1, \delta'_1)$  et  $(h'_2, \eta'_2, \delta'_2)$  de  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $h_1$  et  $h_2$  respectivement. On note  $\beta$  et  $\beta'$  les 2-morphismes obtenus à partir de  $\alpha$  et  $\alpha'$  à l'aide des adjonctions précédentes. On munit  $f'_1 \circ h'_1$  et  $f'_2 \circ h'_2$  des structures d'adjoints à droite de  $f_1 \circ h_1$  et  $f_2 \circ h_2$ . Alors le 2-morphisme  $\beta' \circ \beta$  est le 2-morphisme obtenu par adjonction de  $\alpha \circ \alpha'$ .

DEMONSTRATION Le 2-morphisme obtenu de  $\alpha \circ \alpha'$  par adjonction est par définition la composée du diagramme planaire :



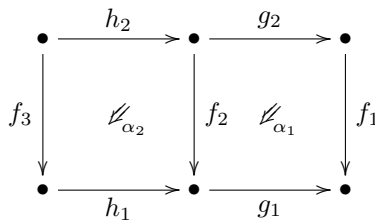
En découpant suivant la ligne brisée :



on voit que la composée du diagramme planaire (1.4) n'est autre que  $\beta' \circ \beta$ .

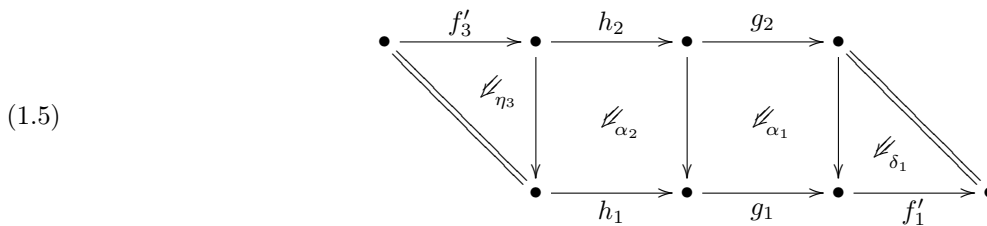
C.Q.F.D

**PROPOSITION 1.1.12** — (Compatibilité avec les compositions horizontales) Supposons donnés dans une 2-catégorie  $\mathcal{D}$  un diagramme planaire :



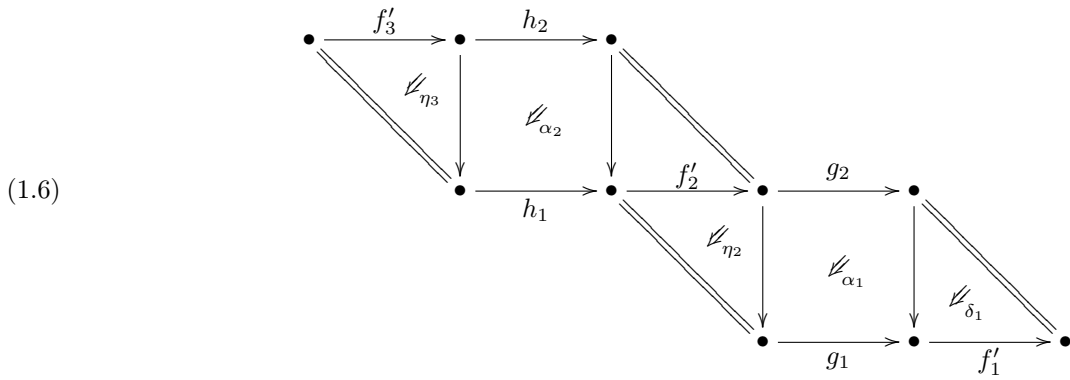
et des adjoints à **droite**  $(f'_1, \eta_1, \delta_1)$ ,  $(f'_2, \eta_2, \delta_2)$  et  $(f'_3, \eta_3, \delta_3)$  à  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . On note  $\beta_1$  et  $\beta_2$  les 2-morphismes obtenus de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  par adjonction. Alors  $\beta_1 \circ \beta_2$  est le 2-morphisme obtenu de  $\alpha_2 \circ \alpha_1$  par les adjonctions  $(f_1, f'_1)$  et  $(f_3, f'_3)$ .

DEMONSTRATION Le 2-morphisme obtenu de  $\alpha_2 \circ \alpha_1$  par adjonction est par définition la composée du diagramme planaire :



Les 1-morphismes verticaux étant de gauche à droite :  $f_3$ ,  $f_2$  et  $f_1$ . En insérant dans (1.5) au niveau de  $f_2$  le diagramme planaire exprimant que  $f'_2$  est adjoint à gauche de  $f_2$  (et dont la composée vaut  $\text{id}_{f_2}$ ) on voit que notre 2-morphisme

est égal à la composée du diagramme planaire :



En découpant suivant la ligne du milieu on voit que la composée du diagramme planaire (1.6) n'est autre que  $\beta_1 \circ \beta_2$ . La proposition est prouvée. C.Q.F.D

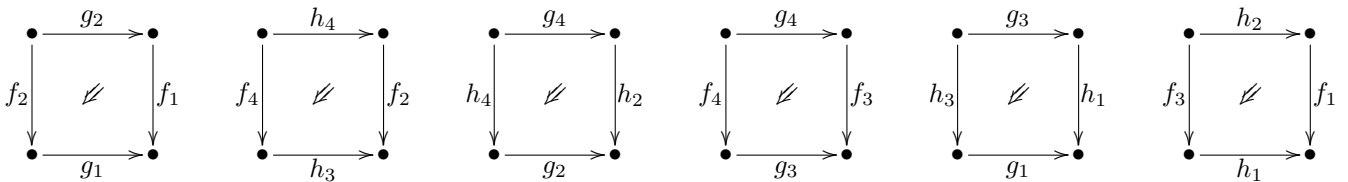
**Remarque 1.1.13** — Par dualité il est possible d'obtenir plusieurs variantes des propositions 1.1.9, 1.1.11 et 1.1.12.

On a le corollaire intéressant de la proposition 1.1.12 :

**COROLLAIRE 1.1.14** — *Supposons donné dans une 2-catégorie  $\mathfrak{D}$  un cube solide commutatif :*



formé des six faces carrées :



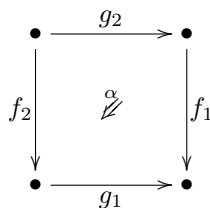
On suppose donnés des adjoints à droites  $(f'_i, \eta_i, \delta_i)$  à  $f_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Le cube solide :



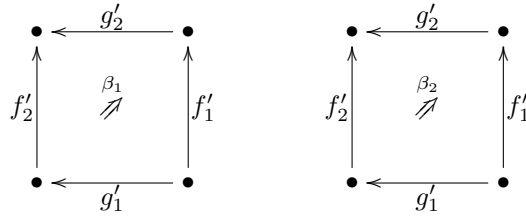
obtenu en appliquant la proposition 1.1.9 est commutatif.

Notons également les deux lemmes simples ci-dessous dont la preuve est laissée en exercice :

**LEMME 1.1.15** — *Supposons donnés dans une 2-catégorie  $\mathfrak{D}$  un 2-morphisme :*

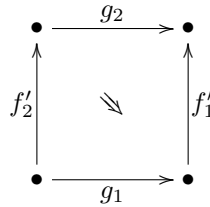


et des adjoints à droites  $(f'_1, \eta_1, \delta_1)$ ,  $(f'_2, \eta_2, \delta_2)$ ,  $(g'_1, \eta'_1, \delta'_1)$  et  $(g'_2, \eta'_2, \delta'_2)$  de  $f_1, f_2, g_1$  et  $g_2$ . On muni  $g'_2 \circ f'_1$  et  $f'_2 \circ g'_1$  des structures d'adjoint à droites de  $f_1 \circ g_2$  et  $g_1 \circ f_2$  comme dans 1.1.9. On peut alors construire deux 2-morphismes :

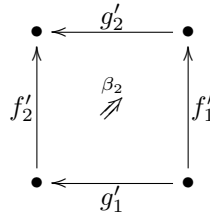


de la manière suivante.

- En prenant  $\beta_1 = {}^a\alpha$ .
- En formant le 2-morphisme :



et en appliquant à nouveau la proposition 1.1.9 à ce 2-morphisme avec les adjonction  $(g_1, g'_1)$  et  $(g_2, g'_2)$  pour obtenir :



Les deux 2-morphismes  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont alors égaux.

**LEMME 1.1.16** — Supposons donnés dans une 2-catégorie  $\mathcal{D}$  un 2-morphisme :



et des adjoints à droites  $(f'_1, \eta_1, \delta_1)$  et  $(f'_2, \eta_2, \delta_2)$  de  $f_1$  et  $f_2$ . Notons  $\beta$  le 2-morphisme obtenu de  $\alpha$  par les adjonctions  $(f'_1, f_1)$  et  $(f'_2, f_2)$ . Notons de même  $\alpha'$  le 2-morphisme obtenu de  $\beta$  par les même adjonctions. Alors  $\alpha = \alpha'$ .

### 1.1.3 Applications aux 2-foncteurs

Cette sous-section est consacrée aux applications de ce qui précède aux 2-foncteurs. L'essentiel est résumé dans la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.1.17** — Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $\mathcal{D}$  une 2-catégorie. Soit  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  un 2-foncteur covariant. On suppose que pour toute flèche  $f : X \longrightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , le 1-morphisme :

$$F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$$

admet un adjoint à droite. Il existe alors :

1. un 2-foncteur contravariant  $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ,
2. un couple de 2-morphismes  $(\eta_f, \delta_f)$  pour chaque flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$ ,

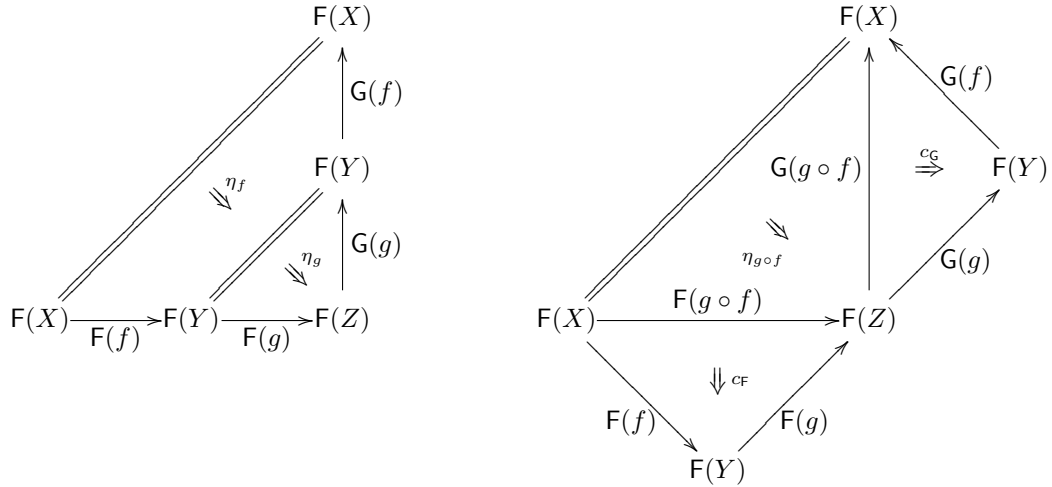
tels que :

- pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $F(X) = G(X)$ ,
- pour toute flèche  $f : X \longrightarrow Y$ , le triplet  $(G(f), \eta_f, \delta_f)$  définit un adjoint à droite à  $F(f)$ ,

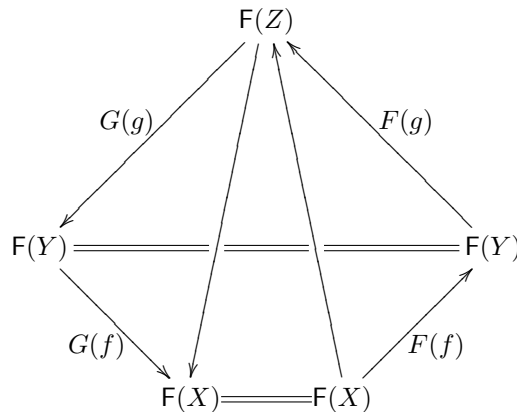
– Pour toute suite de flèches composables de  $\mathcal{C}$  :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

la composition des deux diagrammes planaires ci-dessous donne le même 2-morphisme :



où  $c_F$  et  $c_G$  sont les 2-isomorphismes de connexion pour  $F$  et  $G$  respectivement. Cette condition s'exprime également par la commutation de diagramme solide :



De plus, ces données sont uniques à un isomorphisme unique près. On a également les conditions analogues pour les 2-morphismes de counités ( $\delta_\bullet$ ).

DEMONSTRATION On commence par construire le triplet  $(G, \eta_\bullet, \delta_\bullet)$ . On demandera bien sûr que  $G(X) = F(X)$  pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ . Pour chaque flèche  $f : X \longrightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , on fixe un adjoint à droite :

$$G(f) : F(Y) \longrightarrow F(X)$$

On notera  $\eta_f$  et  $\delta_f$  l'unité et la counité de l'adjonction. On va définir une structure de 2-foncteur sur  $G$ . C'est à dire qu'on va construire les 2-isomorphismes de connexion  $c_G$ .

Soit une suite de flèches dans  $\mathcal{C}$  :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

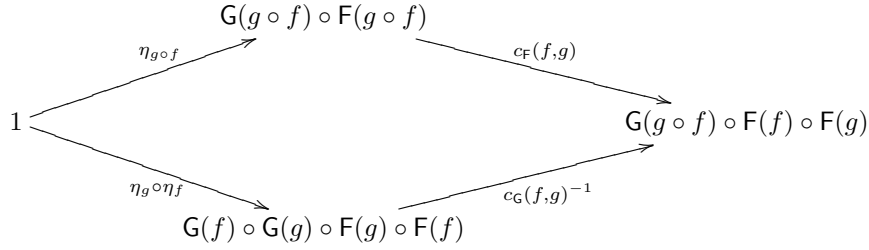
Le 1-morphisme  $G(g \circ f)$  est adjoint à droite de  $F(g \circ f)$ . D'autre part part, le lemme 1.1.4 nous dit que  $G(f) \circ G(g)$  est adjoint à droite de  $F(g) \circ F(f)$ . On applique alors la proposition 1.1.5 au 2-isomorphisme de connexion :

$$c_F(f, g) : F(g \circ f) \xrightarrow{\sim} F(g) \circ F(f)$$

on obtient alors un 2-morphisme :

$${}^a c_F(f, g) : G(f) \circ G(g) \longrightarrow G(g \circ f)$$

Ce 2-morphisme est inversible par 1.1.6. On pose  $c_G(f, g) = ({}^a c_F(f, g))^{-1}$ . Muni de ces 2-isomorphismes,  $G$  devient un 2-foncteur contravariant. En effet la relation de cocycle pour les  $c_G$  découle de 1.1.6 et de la relation de cocycle pour  $c_F$ . Finalement la commutation du diagramme solide n'est autre que la commutation du carré de 2-morphismes :



qui est donné toujours par la proposition 1.1.5. On laisse l'unicité comme exercice pour les lecteurs. C.Q.F.D

**DEFINITION 1.1.18** — *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on dira que le 2-foncteur  $G$  muni des 2-morphismes  $\eta_\bullet$  et  $\delta_\bullet$  est un adjoint à droite global du 2-foncteur  $F$ .*

### 1.1.4 Une règle de calcul

Cette sous-section est basée sur le résultat simple suivant :

**LEMME 1.1.19** — *Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un 1-morphisme dans une 2-catégorie  $\mathfrak{D}$ . On suppose donné  $(g, \eta, \delta)$  un adjoint à droite de  $f$ . Soit  $Z$  un objet de  $\mathfrak{D}$ .*

1. Les deux foncteurs :

$$f \circ : \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, X) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, Y) \qquad g \circ : \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, Y) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, X)$$

forment un couple de foncteurs adjoints :  $g \circ$  est adjoint à droite de  $f \circ$ .

2. Les deux foncteurs :

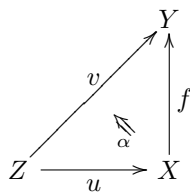
$$\circ g : \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(X, Z) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Y, Z) \qquad \circ f : \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(X, Z)$$

forment un couple de foncteurs adjoints :  $\circ f$  est adjoint à droite de  $\circ g$ .

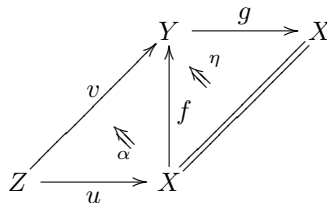
La description classique d'une adjonction nous dit alors qu'il existe une bijection :

$$\text{hom}_{\text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, X)}(f \circ v, u) \longrightarrow \text{hom}_{\text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, Y)}(v, g \circ u)$$

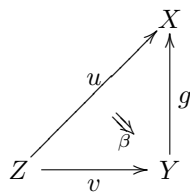
fonctorielle en  $u \in \text{Ob}(\text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, X))$  et  $v \in \text{Ob}(\text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, Y))$  qui envoie un 2-morphisme  $\alpha : f \circ v \longrightarrow u$  :



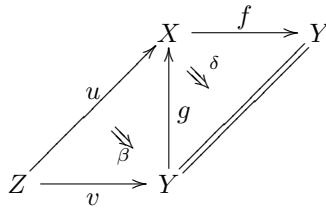
sur la composée du diagramme planaire :



La bijection inverse envoie un 2-morphisme  $\beta : u \longrightarrow g \circ v$  :



sur la composée du diagramme planaire :



Ceci nous permet d'énoncer la règle suivante :

**Règle :** Soient  $\mathcal{D}$  une 2-catégorie et supposons données deux suites de 1-morphismes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f_1} & \bullet & \xrightarrow{f_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{f_k} & Y \\
 X & \xrightarrow{g_1} & \bullet & \xrightarrow{g_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{g_l} & Y
 \end{array}$$

Supposons que les  $f_i$  et le  $g_i$  admettent des adjoints à droites  ${}^d f_i$  et  ${}^d g_i$  respectivement. Se donner un 2-morphisme :

$$f_k \circ \dots \circ f_1 \longrightarrow g_l \circ \dots \circ g_1$$

équivaut à se donner un 2-morphisme :

$$f_i \circ \dots \circ f_1 \circ {}^d g_1 \circ \dots \circ {}^d g_{j-1} \longrightarrow {}^d f_{i+1} \circ \dots \circ {}^d f_k \circ g_l \circ \dots \circ g_j$$

pour n'importe quel  $i$  et  $j$ .

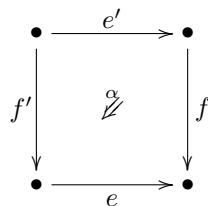
Comme illustration de ce principe on peut remarquer que le 2-morphisme  $\beta$  de la proposition 1.1.5 provient de cette construction. En effet, se donner  $\beta : g' \longrightarrow g$  équivaut à se donner un 2-morphisme  $f \circ g' \longrightarrow 1$  et donc aussi à se donner un 2-morphisme  $f \longrightarrow f'$ .

### 1.1.5 Équivalences dans une 2-catégorie

**DEFINITION 1.1.20** — Soient  $\mathcal{D}$  une 2-catégorie et  $f : X \longrightarrow Y$  un 1-morphisme de  $\mathcal{D}$ . On dit que  $f$  est une équivalence s'il existe un adjoint à droite  $(g, \eta, \delta)$  de  $f$  avec  $\eta$  et  $\delta$  des 2-isomorphismes. Dans ce cas,  $(g, \delta^{-1}, \eta^{-1})$  est un adjoint à gauche de  $f$  et on dira que  $g$  est un quasi-inverse à  $f$ .

Les deux résultats simples suivant seront donnés sans démonstration :

**LEMME 1.1.21** — Soit un diagramme planaire :



dans une 2-catégorie  $\mathcal{D}$ . On suppose que  $e$  et  $e'$  sont des équivalences et on fixe  $e^{-1}$  et  $e'^{-1}$  des quasi-inverses à  $e$  et  $e'$  respectivement. On suppose également donnés des adjoints à droite  $g$  et  $g'$  pour  $f$  et  $f'$  respectivement. On considère les deux constructions suivantes.

1. De  $\alpha : f \circ e' \longrightarrow e \circ f'$  on déduit par la règle de la sous-section 1.1.4 le 2-morphisme :  $e' \circ g' \longrightarrow g \circ e$ .
2. On prend :  ${}^a \alpha : g' \circ e^{-1} \longrightarrow e'^{-1} \circ g$  puis on déduit par la règle de la sous-section 1.1.4 le 2-morphisme :  $e' \circ g' \longrightarrow g \circ e$ .



Ces deux constructions donnent le même 2-morphisme.

Supposons maintenant que le 2-morphisme :

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{e'} & \bullet \\
 f' \downarrow & \alpha & \downarrow f \\
 \bullet & \xrightarrow{e} & \bullet
 \end{array}$$

est un 2-isomorphisme. On suppose comme ci-dessus que  $e$  et  $e'$  sont des équivalences et qu'il existe une suite d'adjonctions :

$$f = f_0, f_1, \dots, f_k$$

(i.e.  $f_{i+1}$  est un adjoint à droite de  $f_i$ ). Il existe alors une suite d'adjonctions :

$$f' = f'_0, f'_1, \dots, f'_k$$

On a de plus la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.1.22** — *On peut construire à partir de  $\alpha$  des 2-isomorphismes :*

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{e'} & \bullet \\
 f'_k \downarrow & \alpha_k & \downarrow f_k \\
 \bullet & \xrightarrow{e} & \bullet
 \end{array}$$

(le sens des 1-morphismes verticaux est descendant ou montant suivant que  $k$  est pair ou impair) par une suite de "mouvements élémentaires" variants parmi :

- on peut changer le sens du 2-morphisme en le remplaçant par son inverse,
- on peut remplacer un 2-morphisme  $\alpha$  par  $\alpha^{-1}$  puis appliquer la règle de la sous-section 1.1.4 à  $e$  et  $e'$ .

La suite de mouvements élémentaires n'est pas unique mais le 2-morphisme  $\alpha_k$  est indépendant du choix de la suite choisie.

### 1.1.6 Autoéquivalences d'un 2-foncteur

**DEFINITION 1.1.23** — *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $\mathcal{D}$  une 2-catégorie et  $F$  un 2-foncteur :*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

Une autoéquivalence de  $F$  est la donnée :

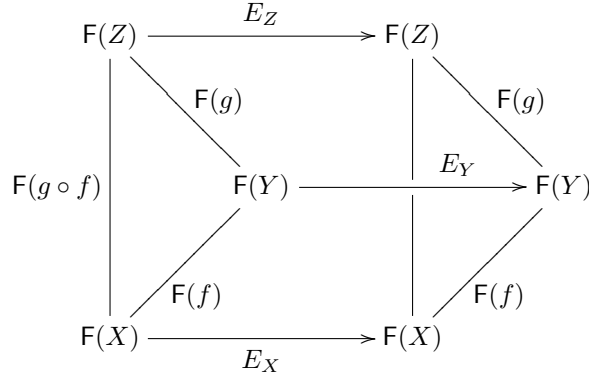
- pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , d'une équivalence  $E_X : F(X) \longrightarrow F(X)$ ,
- pour toute flèche  $f : X \longrightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , d'un 2-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc}
 F(Y) & \xrightarrow{E_Y} & F(Y) \\
 F(f) \downarrow & \alpha_f & \downarrow F(f) \\
 F(X) & \xrightarrow{E_X} & F(X)
 \end{array}$$

Ces données doivent vérifier la condition suivante. Pour toute suite de flèches dans  $\mathcal{C}$  :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

le diagramme solide :



est commutatif.

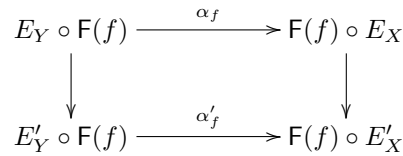
**DEFINITION 1.1.24** — Soit un 2-foncteur  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ . On suppose données deux autoéquivalences :

$$((E_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}, (\alpha_f)_{f \in \text{Fleches}(\mathcal{C})}) \quad \text{et} \quad ((E'_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}, (\alpha'_f)_{f \in \text{Fleches}(\mathcal{C})})$$

Un morphisme d'autoéquivalences de  $(E_X)$  vers  $(E'_X)$  est la donnée pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  d'un 2-morphisme :

$$E_X \longrightarrow E'_X$$

tel que (si  $F$  est covariant par exemple) pour tout  $f : X \longrightarrow Y$  le diagramme de 2-morphismes suivant :



est commutatif.

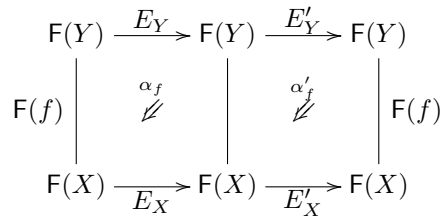
On a la proposition évidente :

**PROPOSITION 1.1.25** — Soit un 2-foncteur  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ . On suppose données deux autoéquivalences :

$$((E_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}, (\alpha_f)_{f \in \text{Fleches}(\mathcal{C})}) \quad \text{et} \quad ((E'_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}, (\alpha'_f)_{f \in \text{Fleches}(\mathcal{C})})$$

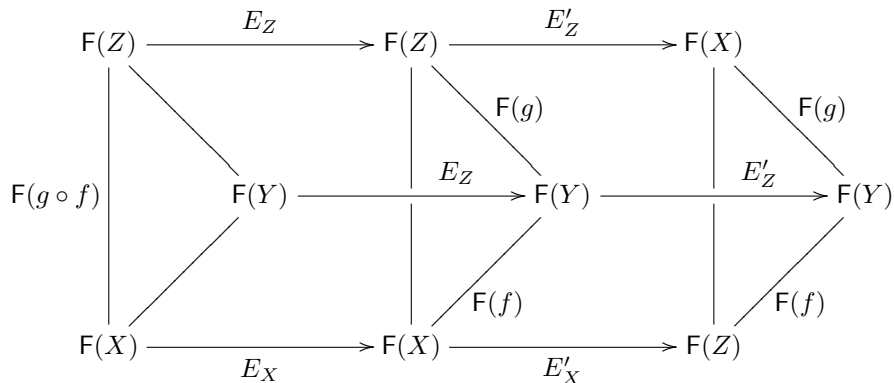
On définit :

- pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , un 1-isomorphisme  $E''_X$  comme étant la composée  $E'_X \circ E_X$ ,
- pour toute flèche  $f : X \longrightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , un 2-morphisme  $\alpha''_f$  comme étant la composée du diagramme planaire :



Ceci définit alors une autoéquivalence de  $F$  appelée la composée de  $(E_X)$  et  $(E'_X)$ .

**DEMONSTRATION** En effet le diagramme solide :

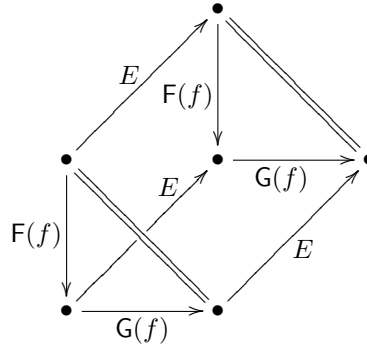


est commutatif car il est formé de deux sous-diagrammes solides commutatifs (ceux qui expriment que  $(E_X)$  et  $(E'_X)$  sont des autoéquivalences). C.Q.F.D

**PROPOSITION 1.1.26** — 1- Soient un 2-foncteur covariant :

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

et  $(E_X, \alpha_f)$  une autoéquivalence de  $F$ . On suppose que  $F$  admet un adjoint global à droite  $G$ . Il existe alors une unique autoéquivalence  $(E_X, \beta_f)$  de  $G$  telle que pour toute flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$  le diagramme solide :

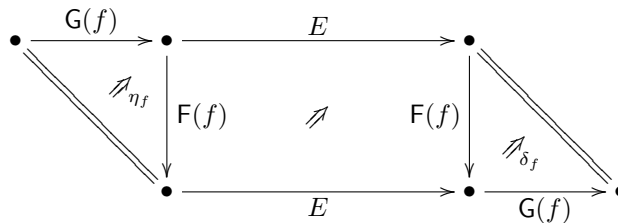


est commutatif. Les faces triangulaires de ce diagramme sont le 2-morphisme d'unité de l'adjonction. Les deux petites faces carrées sont les 2-isomorphismes  $\alpha$ . La grande face carrée est l'identité du 1-morphisme  $E$ . De plus on a un diagramme solide commutatif analogue à celui ci-dessus pour la counité de l'adjonction.

2- La construction précédente est fonctorielle et covariante (pour les morphismes d'autoéquivalence).

3- La construction précédente est compatible avec la composition des autoéquivalences (d'une façon covariante).

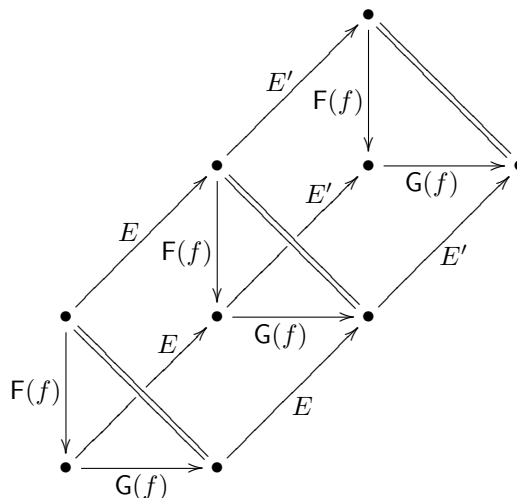
DEMONSTRATION 1- La formule qui donne l'inverse du 2-isomorphisme  $\beta_f$  à partir de  $\alpha_f$  est la suivante :



Il faut vérifier que ça définit bien une autoéquivalence i.e que le diagramme solide de la définition est commutatif. Pour prouver ceci on utilise 1.1.17 et on procède exactement comme dans la preuve de la proposition 1.1.11.

2- La fonctorialité est claire.

3- Pour la composition il suffit de voir que le diagramme solide :



est commutatif.

C.Q.F.D

## 1.2 Préliminaires 2-catégoriques II : Échanges entre 2-foncteurs. Foncteurs croisés

### 1.2.1 Structures d'échange

Dans toute cette section, on suppose fixées deux catégories  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  telles que  $\text{Ob}(\mathcal{C}_1) = \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$ . On appelle *carré mixte* un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

tel que :

- $X, X', Y$  et  $Y'$  soient des objets de  $\mathcal{C}_1$  donc aussi de  $\mathcal{C}_2$ ,
- $g$  et  $g'$  des flèches de  $\mathcal{C}_1$ ,
- $f$  et  $f'$  des flèches de  $\mathcal{C}_2$ .

On a les notions évidentes de compositions horizontales et verticales des carrés mixtes. On fixe une classe  $\mathcal{E}$  de carrés mixtes qui soit stable par compositions horizontales et verticales. Étant donnée une 2-catégorie  $\mathfrak{D}$ , on fait la définition suivante :

**DEFINITION 1.2.1** — *Supposons donnés un 2-foncteur  $F_1 : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathfrak{D}$  et un 2-foncteur  $F_2 : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathfrak{D}$  tels que  $F_1(X) = F_2(X) = F(X)$  pour tout  $X$  dans  $\text{Ob}(\mathcal{C}_1) = \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$ . Une structure d'échange par rapport à  $\mathcal{E}$  sur le couple  $(F_1, F_2)$  est la donnée pour tout carré mixte  $(C)$  dans  $\mathcal{E}$  :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

d'un 2-morphisme  $e(C)$  de  $\mathfrak{D}$  (appelé 2-morphisme d'échange associé au carré mixte  $(C)$ ) :

$$\begin{array}{ccc} F(Y') & \xleftarrow{F_1(g')} & F(X') \\ \uparrow F_2(f') & \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \nearrow \nwarrow \end{array} & \uparrow F_2(f) \\ F(Y) & \xleftarrow{F_1(g)} & F(X) \end{array}$$

Le sens des 2-morphismes  $e(\cdot)$  est constant (i.e. indépendant du carré mixte). La famille de ces 2-morphismes doit vérifier les deux conditions de compatibilité suivantes.

- (Compatibilité avec la composition horizontale des carrés mixtes) Pour tout carrés mixtes  $C_1$  et  $C_2$  horizontalement composables :

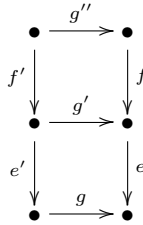
$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet & \xrightarrow{h'} & \bullet \\ f'' \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet & \xrightarrow{h} & \bullet \end{array}$$

Le diagramme solide :

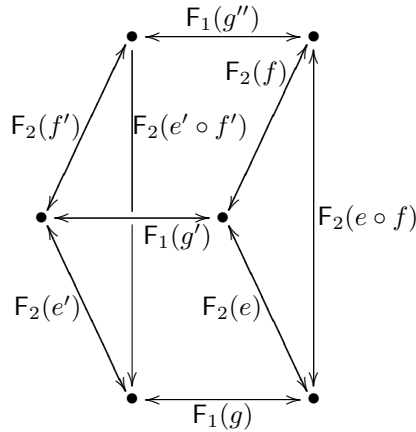
$$\begin{array}{ccccc} & & F_1(h' \circ g') & & \\ & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\ & F_1(g') & & F_1(h') & \\ F_2(f'') \uparrow & & & & \uparrow F_2(f) \\ & \swarrow & F_2(f') & \searrow & \\ & F_1(h \circ g) & & F_1(h) & \\ & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\ & F_1(g) & & F_1(h) & \end{array}$$

est commutatif.

- (Compatibilité avec la composition verticale des carrés mixtes) Pour tout carrés mixtes  $C'$  et  $C$  verticalement composables :



le diagramme solide :



est commutatif.

On notera parfois l'échange sur  $(F_1, F_2)$  par la famille de ses 2-morphismes d'échange :  $(e(C))_{C \in \mathcal{E}}$ .

**Remarque 1.2.2** — Dans la définition ci-dessus on a fait exprès de ne pas préciser les directions des foncteurs  $F_i$ . En effet nous tolérons toutes les combinaisons cohérentes pour les sens des 1-morphismes et des 2-morphismes. Il est facile de voir qu'il y a huit combinaisons possibles :

1.  $F_1$  et  $F_2$  de même variance (le cas codirectionnel) :
  - (a)  $F_1$  et  $F_2$  sont tous les deux covariants :
    - i. Le sens du 2-morphisme d'échange est  $\swarrow$ .
    - ii. Le sens du 2-morphisme d'échange est  $\nearrow$ .
  - (b)  $F_1$  et  $F_2$  sont tous les deux contravariants :
    - i. Le sens du 2-morphisme d'échange est  $\swarrow$ .
    - ii. Le sens du 2-morphisme d'échange est  $\nearrow$ .
2.  $F_1$  et  $F_2$  ont des variances différentes (le cas contradirectionnel) :
  - (a)  $F_1$  est covariant et  $F_2$  est contravariant :
    - i. Le sens du 2-morphisme d'échange est  $\searrow$ .
    - ii. Le sens du 2-morphisme d'échange est  $\nwarrow$ .
  - (b)  $F_1$  est contravariant et  $F_2$  est covariant :
    - i. Le sens du 2-morphisme d'échange est  $\searrow$ .
    - ii. Le sens du 2-morphisme d'échange est  $\nwarrow$ .

Ainsi dans la suite on dira par exemple : Un échange codirectionnel contravariant du type  $\swarrow$ .

**Remarque 1.2.3** — La dualité permet d'échanger d'une façon transitive les différents types d'échanges entre 2-foncteurs : en remplaçant si nécessaire  $\mathcal{C}_1$  par  $\mathcal{C}_1^{\text{op}}$  et  $\mathcal{C}_2$  par  $\mathcal{C}_2^{\text{op}}$  on peut rendre notre foncteur codirectionnel et covariant. En remplaçant si nécessaire  $\mathfrak{D}$  par  $\mathfrak{D}^{2\text{-op}}$  on peut supposer que  $F$  est de type  $\swarrow$ .

**Remarque 1.2.4** — Soit  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  un 2-foncteur covariant. On obtient une structure d'échange de type  $\swarrow$  sur le couple  $(F, F)$  par rapport à la classe des carrés commutatifs en prenant pour tout carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

le 2-isomorphisme :  $c_F(f', g) \circ c_F(g', f)^{-1}$  où les  $c_F(., .)$  désignent les 2-isomorphismes de connexion du 2-foncteur  $F$ . Le fait que ces 2-morphismes définissent bien un échange est conséquence de l'axiome de cocycle. On qualifiera cet échange codirectionnel de *trivial*. En utilisant la proposition 1.2.5 on pourra construire à partir de cet échange trivial des échanges moins trivials.

On va décrire maintenant une construction fondamentale qui permet de construire des structures d'échange à partir d'autres structures d'échange.

**PROPOSITION 1.2.5** — Soit  $F_1$  et  $F_2$  deux 2-foncteurs covariants comme dans la définition 1.2.1. On suppose donné un échange  $(e(C))_{C \in \mathcal{E}}$  du type  $\swarrow$  sur  $(F_1, F_2)$ . On suppose que  $F_1$  admet un adjoint global à **gauche**. On en choisit un :

$$G^1 : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{D}$$

(avec les 2-morphismes  $\eta_f$  et  $\delta_f$  pour une flèche  $f$  dans  $\mathcal{C}_1$ ). Le couple  $(G^1, F_2)$  peut être muni d'un échange *contra-directionnel* du type  $\nwarrow$ . Le 2-morphisme d'échange :

$$G^1(g)F_2(f) \longrightarrow F_2(f')G^1(g')$$

associé à un carré mixte dans  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array}$$

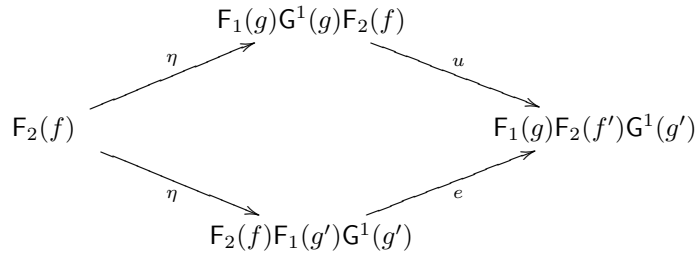
est défini par la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{G^1(g')} & \bullet & \xrightarrow{F_2(f')} & \bullet \\ & \nearrow \eta_{g'} & \downarrow F_1(g') & \nearrow e & \downarrow F_1(g) \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & & \xrightarrow{F_2(f)} & & \xrightarrow{G^1(g)} \\ & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

le 2-morphisme  $e$  étant le 2-morphisme d'échange de la structure d'échange sur  $(F_1, F_2)$  associé au même carré mixte. On peut caractériser les 2-morphismes d'échange de la nouvelle structure ainsi obtenue par la condition suivante. Le 2-morphisme d'échange :  $G^1(g) \circ F_2(f) \longrightarrow F_2(f') \circ G^1(g)$  est l'unique 2-morphisme  $u$  rendant commutatif l'un des deux losanges suivants :

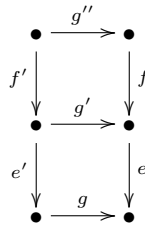
$$\begin{array}{ccc} & F_2(f')G^1(g')F_1(g') & \\ u \nearrow & & \searrow \delta \\ G^1(g)F_2(f)F_1(g') & & F_2(f') \\ e \searrow & & \nearrow \delta \\ & G^1(g)F_1(g)F_2(f') & \end{array}$$

ou

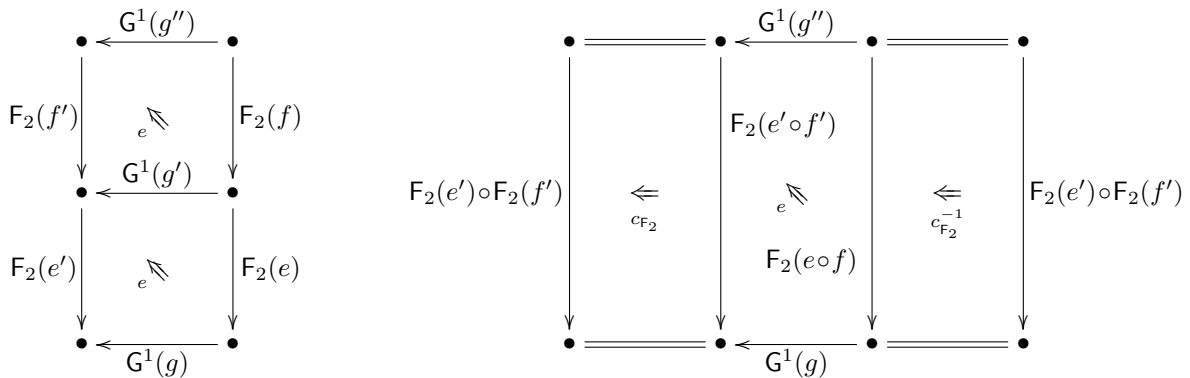


DEMONSTRATION On utilisera les propositions 1.1.11 et 1.1.12 de la section précédente. Pour montrer que les 2-morphismes définis dans l'énoncé munissent  $(G^1, F_2)$  d'une structure d'échange il faut vérifier la compatibilité avec les compositions des carrés mixtes dans  $\mathcal{E}$ .

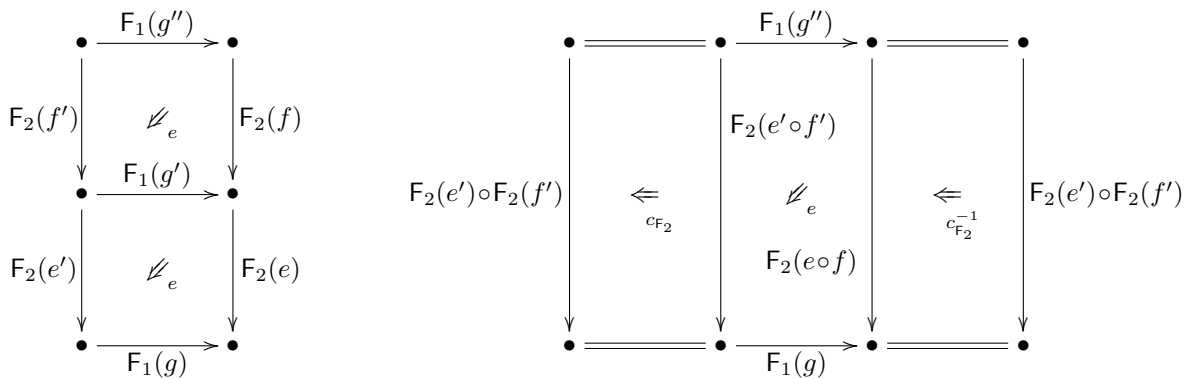
**Compatibilité avec la composition verticale des carrés mixtes.** Soit le diagramme :



formé de deux carrés mixtes superposés verticalement. Il faut prouver que les composées des deux diagrammes planaires coïncident :

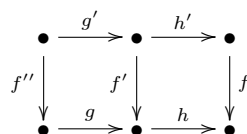


Les carrés précédents sont obtenus à l'aide des adjonctions  $(G^1(g''), F_1(g''))$  et  $(G^1(g), F_1(g))$  des carrés :

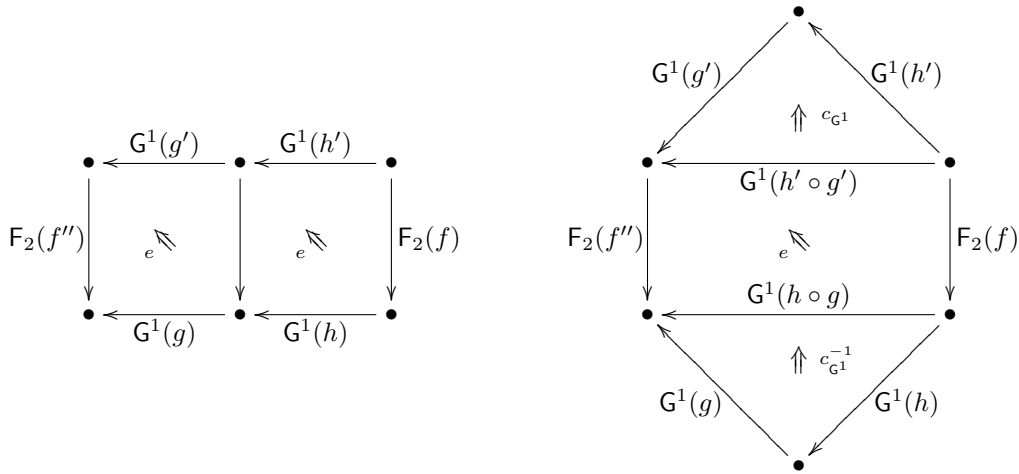


Mais la composée de ces deux diagrammes planaires est la même. D'où le résultat.

**Compatibilité avec la composition horizontale des carrés mixtes.** Soit le diagramme :



formé de deux carrés mixtes. Il faut prouver que la composée des deux diagrammes planaires :



donne le même 2-morphisme. On fait exactement pareil que dans le cas précédent en utilisant en plus le fait que les 2-isomorphismes de connexions  $c_{G^1}$  sont obtenus de  $c_{F_1}$  par adjonction. C.Q.F.D

**Remarque 1.2.6** — En utilisant la remarque 1.2.2 on peut déduire plein de variantes de la proposition précédente. Par exemple si l'on suppose que l'échange sur  $(F_1, F_2)$  est codirectionnel covariant de type  $\nearrow$  et que  $F_1$  admet un adjoint global à droite  $G^1$ , alors on peut munir  $(G^1, F_2)$  d'un échange contradirectionnel de type  $\searrow$ . Ceci s'obtient en utilisant la 2-dualité.

On termine cette sous-section par quelques règles qui permettent de déterminer rapidement le type de la structure d'échange qu'on obtient par la construction précédente.

— **Règle 1 :** Supposons donnée une structure d'échange sur  $(F_1, F_2)$ . Il existe un seul type d'adjoint global (i.e. à droite ou à gauche) à  $F_1$  (resp.  $F_2$ ) qui permet la construction d'un échange sur  $(G^1, F_2)$  (resp.  $(F_1, G^2)$ ) comme dans 1.2.5 ( $G^1$  est l'adjoint de  $F_1$  et  $G^2$  celui de  $F_2$ ). La nature de l'adjonction entre  $F_1$  et  $G^1$  (resp.  $F_2$  et  $G^2$ ) est déterminée par la variance de  $F_1$  (resp.  $F_2$ ) et le type d'échange sur  $(F_1, F_2)$ . On dira "bon adjoint global" pour un adjoint qui permet la construction 1.2.5.

— **Règle 2 :** (*Valable pour le cas codirectionnel*) Supposons donné un échange sur  $(F_1, F_2)$  avec  $F_1$  et  $F_2$  de même variance :

- Soit  $G^1$  un bon adjoint global à  $F_1$ . Pour obtenir le sens des 2-morphismes d'échange sur  $(G^1, F_2)$  à partir de celui des 2-morphismes d'échange sur  $(F_1, F_2)$  il suffit de tourner d'un angle droit suivant le sens des aiguilles d'une montre.
- Soit  $G^2$  un bon adjoint global à  $F_2$ . Pour obtenir le sens des 2-morphismes d'échange sur  $(F_1, G_1)$  à partir de celui des 2-morphismes d'échange sur  $(F_1, F_2)$  il suffit de tourner d'un angle droit suivant le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

— **Règle 3 :** (*Valable pour le cas contradirectionnel*) Supposons donné un échange sur  $(F_1, F_2)$  avec  $F_1$  et  $F_2$  de variances opposées :

- Soit  $G^1$  un bon adjoint global à  $F_1$ . Pour obtenir le sens des 2-morphismes d'échange sur  $(G^1, F_2)$  à partir de celui des 2-morphismes d'échange sur  $(F_1, F_2)$  il suffit de tourner d'un angle droit suivant le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.
- Soit  $G^2$  un bon adjoint global à  $F_2$ . Pour obtenir le sens des 2-morphismes d'échange sur  $(F_1, G_1)$  à partir de celui des 2-morphismes d'échange sur  $(F_1, F_2)$  il suffit de tourner d'un angle droit suivant le sens des aiguilles d'une montre.

### 1.2.2 Recollement des structures d'échange

Dans cette sous-section on va établir deux résultats qui permettront de recoller des structures d'échange. Pour établir ces résultats il faudra se restreindre à l'un des quatre cas suivants :

1.  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$ ,
2.  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}^{op}$ ,
3.  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}^{op}$  et  $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$ ,
4.  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}^{op}$ ,



avec  $\mathcal{C}$  une catégorie stable par produits fibrés et  $\mathcal{E}$  la classe des carrés commutatifs et cartésiens dans  $\mathcal{C}$ . On suppose donnée deux sous-catégories  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathcal{C}$  contenant tous les isomorphismes et stables par changement de base. On suppose également que  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  engendrent la catégorie  $\mathcal{C}$ . On notera  $\mathcal{C}_i^j$  la catégorie  $\mathcal{C}^j$  vue comme une sous-catégorie de  $\mathcal{C}_i$  ( avec  $i, j = 1, 2$ ). On suppose donné une 2-catégorie  $\mathcal{D}$  et un 2-foncteur covariant :

$$F_i : \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{D}$$

pour chaque  $j \in \{1, 2\}$ . On notera  ${}^jF_i$  la restriction du 2-foncteur  $F_i$  à  $\mathcal{C}_i^j$ .

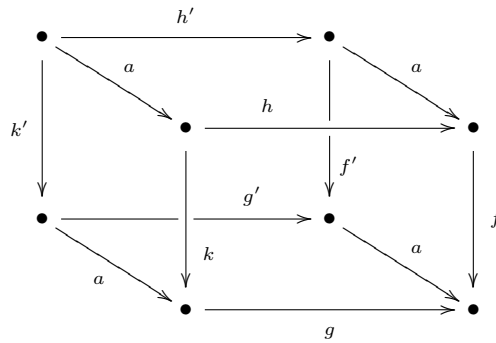
**PROPOSITION 1.2.7** — *En plus de hypothèses précédentes on suppose satisfaite la condition<sup>1</sup> que toute flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$  se factorise :*

$$f = p \circ s$$

avec  $p$  dans  $\mathcal{C}_2$  et  $s$  dans  $\mathcal{C}_1$ . On suppose donné un échange codirectionnel de type  $\swarrow$  sur chacun des couples :

- $({}^1F_1, F_2)$ ,
- $({}^2F_1, F_2)$ ,

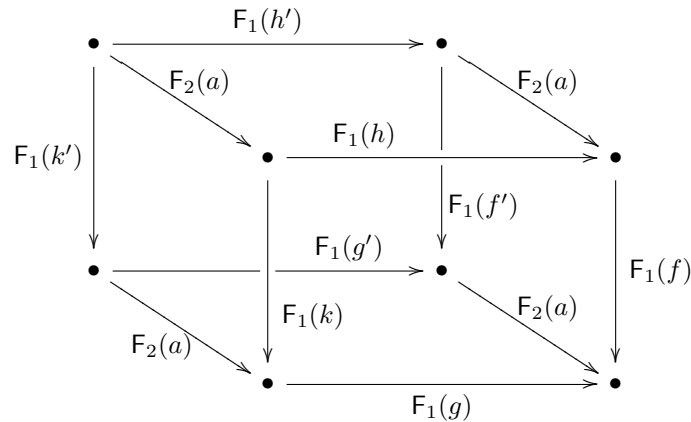
tel que pour tout cube :



ayant

- les deux faces parallèles au plan de la feuille : des carrés commutatifs de  $\mathcal{C}_1$  avec  $g$  et  $h$  dans  $\mathcal{C}_1^1$  et  $f$  et  $k$  dans  $\mathcal{C}_1^2$ ,
- les quatre faces perpendiculaires au plan de la feuille : des carrés mixtes qui sont cartésiens dans  $\mathcal{C}$  et avec  $a$  dans  $\mathcal{C}_2$ ,

le cube dans  $\mathcal{D}$  :



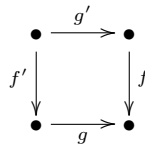
formé en prenant pour 2-morphismes :

- sur les faces parallèles au plan de la feuille : les 2-isomorphismes d'échange relatifs à l'échange trivial sur le couple  $(F_1, F_1)$ ,
- sur les faces perpendiculaires au plan de la feuille et horizontales : les 2-morphismes d'échange relatifs à l'échange sur  $({}^1F_1, F_2)$ ,
- sur les faces perpendiculaires au plan de la feuille et verticales : les 2-morphismes d'échange relatifs à l'échange sur  $({}^2F_1, F_2)$ ,

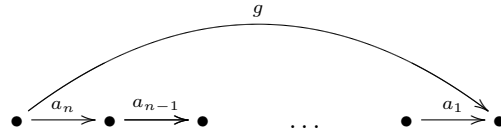
est commutatif. Il existe alors un unique échange sur  $(F_1, F_2)$  prolongeant les deux échanges donnés.

<sup>1</sup>Cette condition est plus forte que la simple génération de  $\mathcal{C}$  par les  $\mathcal{C}_i$ .

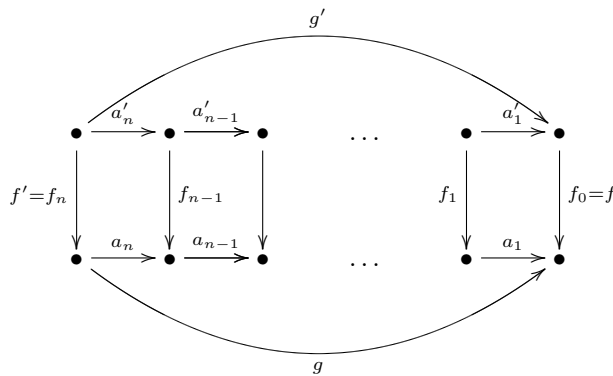
DEMONSTRATION Soit  $(C)$  un carré mixte dans  $\mathcal{E}$  (i.e. cartésien un fois regardé dans  $\mathcal{C}$ ) :



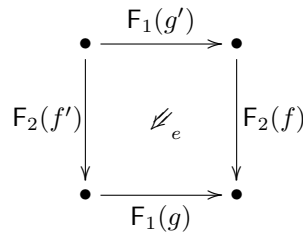
Fixons une factorisation de  $g$  :



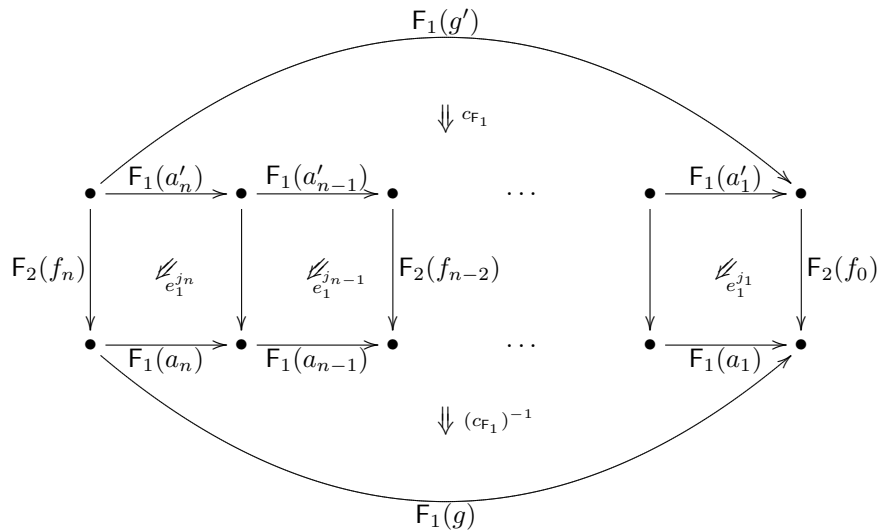
avec  $a_i$  dans  $\mathcal{C}_1^1$  ou dans  $\mathcal{C}_1^2$ . On peut toujours en trouver puisque  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{C}^2$  engendrent  $\mathcal{C}$ . On fixe une suite  $j_k \in \{1, 2\}$  telle que  $a_k$  soit dans  $\mathcal{C}_1^{j_k}$ . Notons bien que cette suite n'est pas forcément unique. Les conditions sur  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{E}$  impliquent qu'une telle factorisation induit une factorisation fonctorielle du carré  $(C)$  :



et que  $a'_k$  est dans  $\mathcal{C}_1^{j_k}$ . On définit pour une factorisation fixée de  $g$  et un choix des  $j_k$  un 2-morphisme  $e = e(f)$  :



En prenant la composée du diagramme planaire :



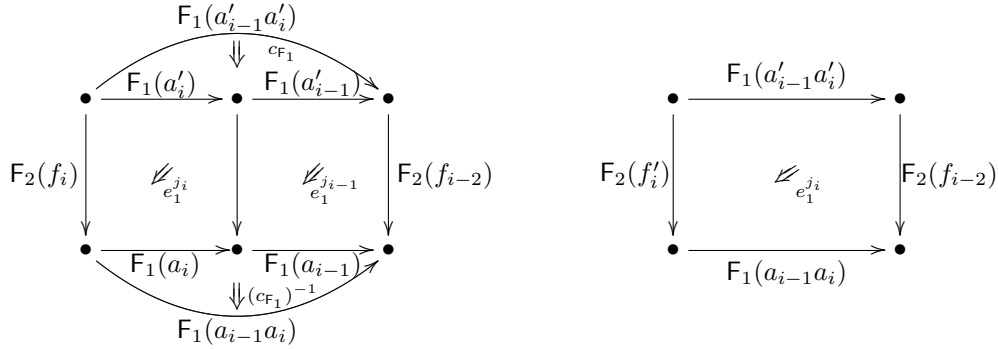
On prouvera d'abord que le 2-morphisme  $e(f)$  est indépendant du choix de la factorisation de  $g$  ainsi que du choix des  $j_k$ . On commence pour cela par décrire deux manipulations élémentaires qu'on peut appliquer sur la factorisation de  $g$  sans changer la valeur du 2-morphisme  $e(f)$ .

**Manipulation 1 :** Supposons que pour un  $i$  on a :  $j_i = j_{i-1}$ . Alors on peut remplacer dans la factorisation de  $g$  les deux flèches  $a_i$  et  $a_{i-1}$  par leur composée :  $a_{i-1} \circ a_i$  qu'on regardera alors comme une flèche de  $\mathcal{C}_1^{j_i} = \mathcal{C}_1^{j_{i-1}}$ .

Pour prouver ceci on remarque d'abord que par la relation de cocycle les 2-isomorphismes de connexions qui se trouvent dans la définitions de  $e(f)$  se factorisent par les 2-isomorphismes de connexions :

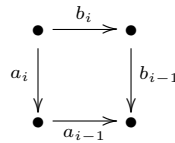
$$F_1(a'_{i-1}a'_i) \longrightarrow F_1(a'_{i-1})F_1(a'_i) \quad \text{et} \quad F_1(a_{i-1})F_1(a_i) \longrightarrow F_1(a_{i-1}a_i)$$

On voit donc qu'il suffit de prouver que les composées des deux diagrammes planaires :



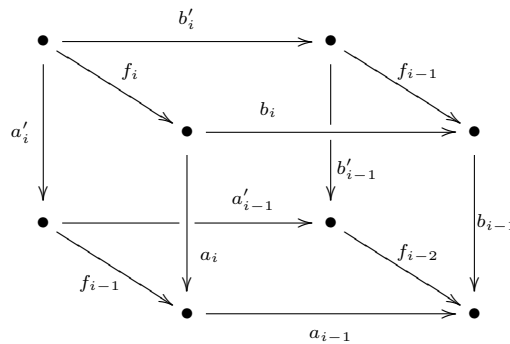
sont égales. Mais ceci est clair par la compatibilité des 2-morphismes définissant l'échange sur  $({}^j F_1, F_2)$  avec la composition horizontale des carrés.

**Manipulation 2 :** Supposons qu'on est dans le cas  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$  (on peut toujours se ramener à ce cas par 1-dualité. Désormais on supposera dans la suite  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ ) et que  $j_i = 2$  et  $j_{i-1} = 1$ . On sait par hypothèse que la flèche  $a_i \circ a_{i-1}$  admet une factorisation par une flèche de  $\mathcal{C}_1^1$  suivie par une flèche de  $\mathcal{C}_1^2$ . On obtient donc un carré commutatif :



avec  $b_i$  et  $a_{i-1}$  dans  $\mathcal{C}_1^1$  et  $a_i$  et  $b_{i-1}$  dans  $\mathcal{C}_1^2$ . L'opération qui consiste à remplacer  $a_i$  et  $a_{i-1}$  par  $b_i$  et  $b_{i-1}$  et de permuter les valeurs de  $j_i$  et  $j_{i-1}$  ne change pas la valeur de  $e(f)$ .

Pour montrer cela on commence par prendre les pull-back suivant  $f_{i-2}$  pour former un cube :



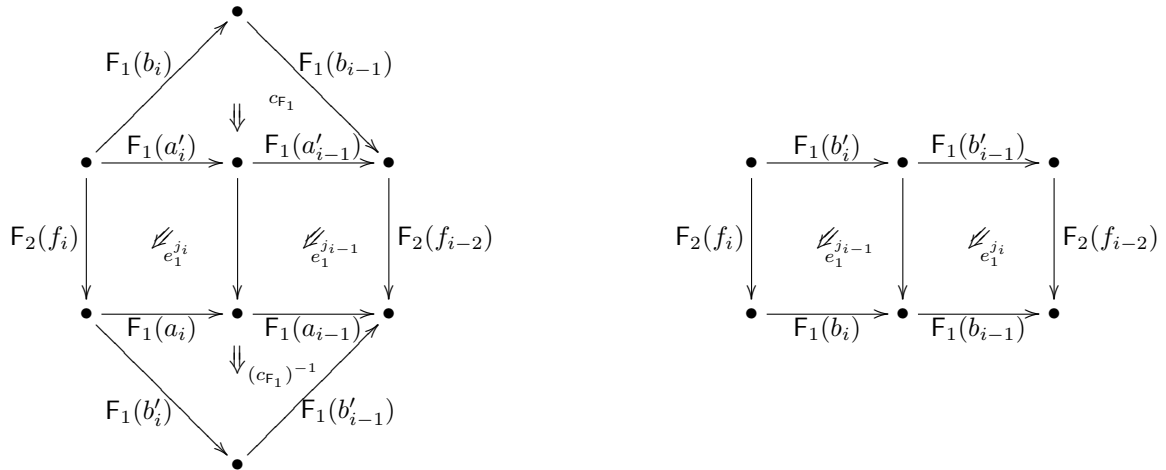
On en déduit alors un cube commutatif dans  $\mathcal{D}$  :

(1.10)

Comme dans le paragraphe précédent, la relation de cocycle appliquée aux 2-isomorphismes de connexions qui se trouvent dans la définition de  $e(f)$  montre que ces derniers se factorisent par les 2-isomorphismes de connexions :

$$F_1(b'_{i-1})F_1(b'_i) \longrightarrow F_1(a'_{i-1})F_1(a'_i) \quad \text{et} \quad F_1(a_{i-1})F_1(a_i) \longrightarrow F_1(b_{i-1})F_1(b_i)$$

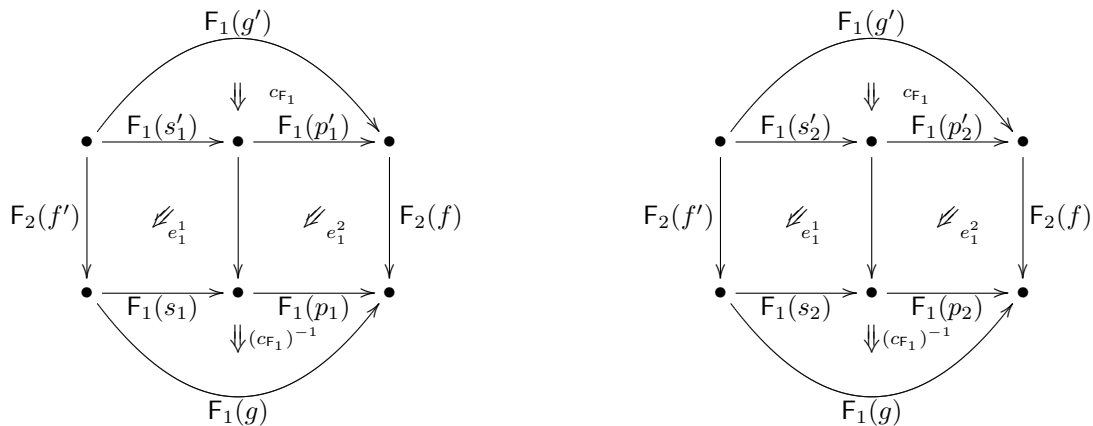
On voit donc qu'il suffit de prouver que les composées des deux diagrammes planaires suivants :



sont les mêmes. (À noter bien qu'on a permuté les places de  $j_i$  et  $j_{i-1}$  dans les deux rectangles et que  $f_{i-1}$  ne désigne pas la même flèche dans les deux diagrammes planaire). Le fait que les composées sont les mêmes découle directement de la commutativité du cube (1.10).

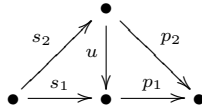
**Preuve de l'indépendance** En utilisant le nombre de fois nécessaire les deux manipulations précédentes on se ramène au cas où  $n = 2$ . Plus précisément il suffira de prouver le cas particulier suivant :

Étant données deux factorisations  $g = p_1 \circ s_1 = p_2 \circ s_2$ , les composées des deux diagrammes planaires :

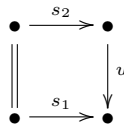


sont les mêmes.

Pour prouver cela on se ramène facilement (en utilisant la stabilité de  $\mathcal{C}_2$  par changement de base ainsi que l'existence de factorisation à deux facteurs le premier étant dans  $\mathcal{C}_1$  et le suivant dans  $\mathcal{C}_2$ ) au cas où il existe une flèche  $u$  dans  $\mathcal{C}_2$  rendant le diagramme commutatif dans  $\mathcal{C}$  :



En utilisant le cube obtenu à partir de :



par pull-back suivant  $f$  ainsi que le cube commutatif dans  $\mathfrak{D}$  (comme dans l'énoncé) il est facile de terminer la preuve de l'indépendance. On laisse les détails en exercice.

**Fin de la preuve** Il nous reste à vérifier la compatibilité avec les compositions des carrés. Pour la composition horizontale c'est très facile en utilisant le résultat d'indépendance qu'on vient de prouver. Pour la composition verticale c'est également facile. Le lecteur pourra consulter la preuve de la proposition suivante pour plus de détails. C.Q.F.D

Dans le même esprit on a la proposition suivante qui ne sera (malheureusement) pas utilisée dans la suite. On a quand même choisi de l'inclure ici.

**PROPOSITION 1.2.8** — On suppose données quatre structures d'échange codirectionnels de type  $\swarrow$  :

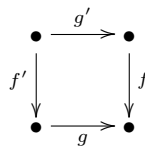
- un échange sur le couple  $(F_1, {}^1F_2)$ . On notera  $e_2^1$  les 2-morphismes d'échange pour cette structure,
- un échange sur le couple  $(F_1, {}^2F_2)$ . On notera  $e_2^2$  les 2-morphismes d'échange pour cette structure,
- un échange sur le couple  $({}^1F_1, F_2)$ . On notera  $e_1^1$  les 2-morphismes d'échange pour cette structure,
- un échange sur le couple  $({}^2F_1, F_2)$ . On notera  $e_1^2$  les 2-morphismes d'échange pour cette structure,

tels que pour  $i$  et  $j$  dans  $\{1, 2\}$  les deux échanges sur  $({}^iF_1, {}^jF_2)$  obtenus par restriction de l'échange sur :

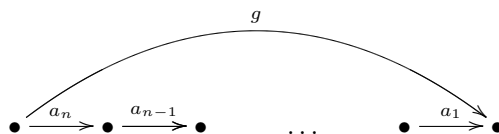
- $(F_1, {}^jF_2)$ ,
- $({}^iF_1, F_2)$ ,

coïncident. Sous ces hypothèses il existe un unique échange sur le couple  $(F_1, F_2)$  qui redonne les quatre structures d'échanges ci-dessus par restriction aux catégories  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{C}^2$ .

DEMONSTRATION Supposons donné un carré mixte  $(C)$  :

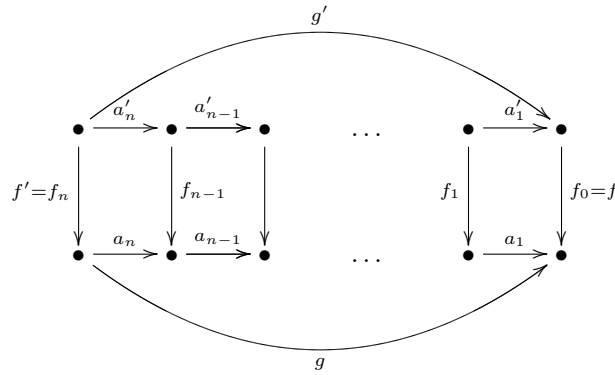


qui soit dans  $\mathcal{E}$ . Fixons une factorisation de  $g$  :

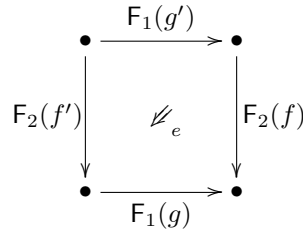


avec  $a_i$  dans  $\mathcal{C}_1^1$  ou dans  $\mathcal{C}_1^2$ . On peut toujours en trouver puisque  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{C}^2$  engendrent  $\mathcal{C}$ . On fixe une suite  $j_k \in \{1, 2\}$  telle que  $a_k$  soit dans  $\mathcal{C}_1^{j_k}$ . Notons bien que cette suite n'est pas forcément unique. Les conditions sur  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{E}$  impliquent

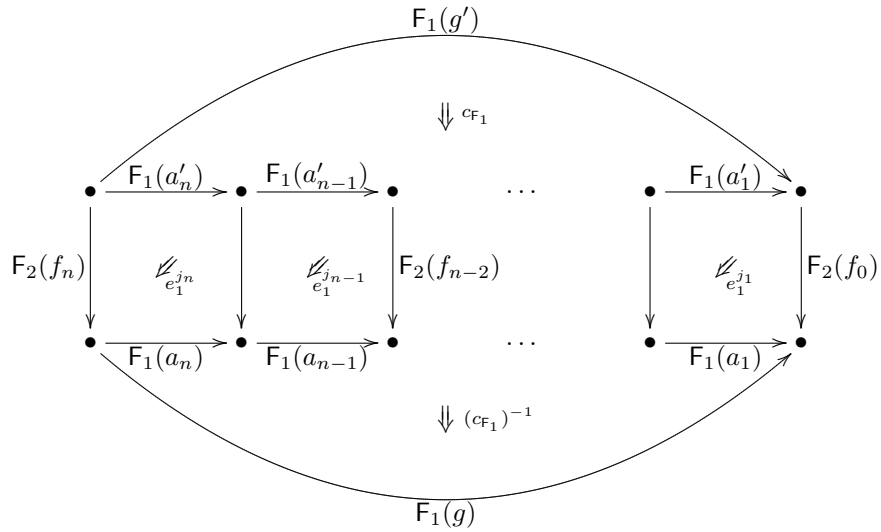
qu'une telle factorisation induit une factorisation fonctorielle du carré  $(C)$  :



et que  $a'_k$  est dans  $\mathcal{C}_1^{j_k}$ . On définit pour une factorisation fixée de  $g$  et un choix des  $j_k$  un 2-morphisme  $e = e(f)$  :

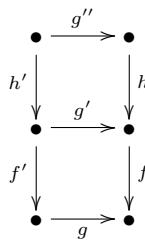


En prenant la composée du diagramme planaire :

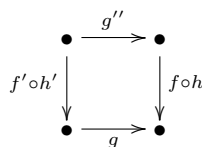


On va prouver que le 2-morphisme  $e(f)$  est indépendant du choix de la factorisation de  $g$  ainsi que du choix des  $j_k$ .

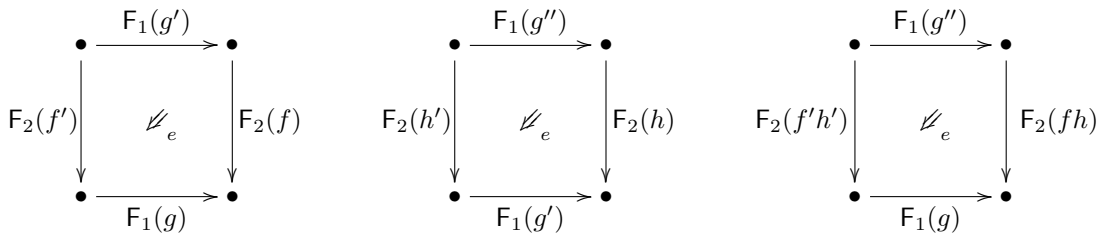
**Étape 1 :** *Compatibilité de  $e$  avec la composition verticale des carrés.* Supposons donné un diagramme :



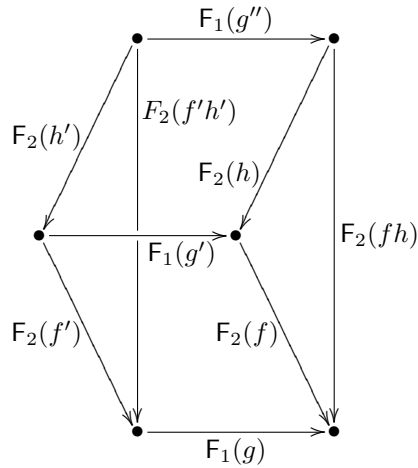
tel que les carrés soient dans  $\mathcal{E}$ . On forme la composée :



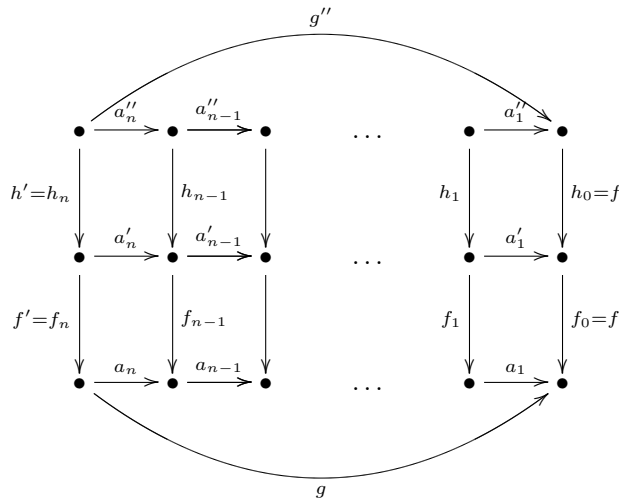
La factorisation de  $g$  induit par pull-back une factorisation de  $g'$ . On peut alors définir trois 2-morphismes :



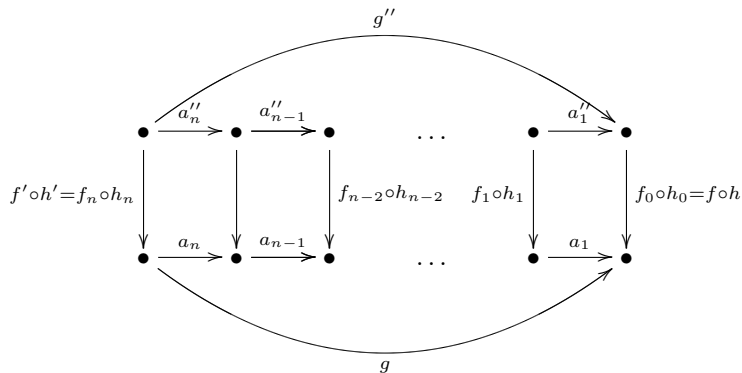
Le premier et le troisième étant le 2-morphisme associé à la factorisation de  $g$  et le choix des  $j_k$  de tout à l'heure. Le second 2-morphisme est celui associé à la factorisation de  $g'$  déduite par pull-back et au même choix des  $j_k$ . Nous affirmons que le solide suivant :



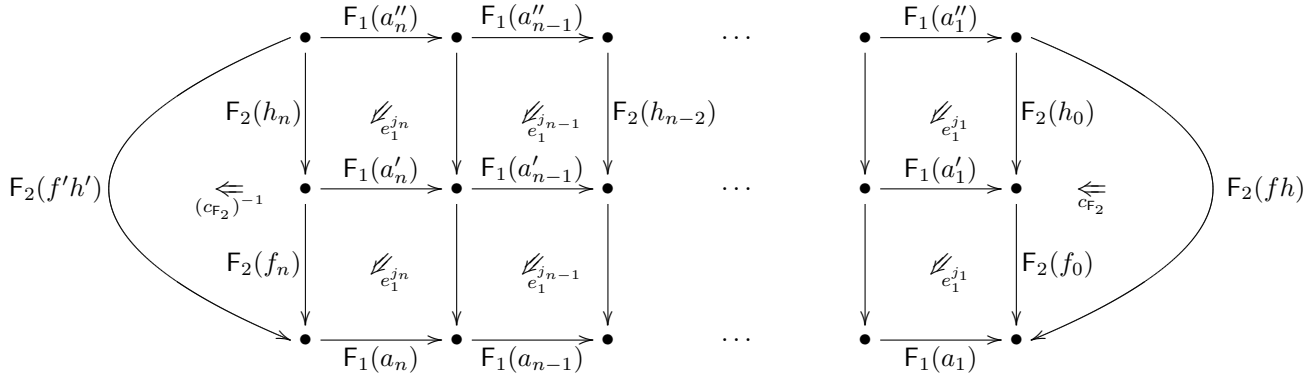
est commutatif. Pour voir cela on remarque que la factorisation de  $g$  induit des factorisations des carrés cartésiens précédents :



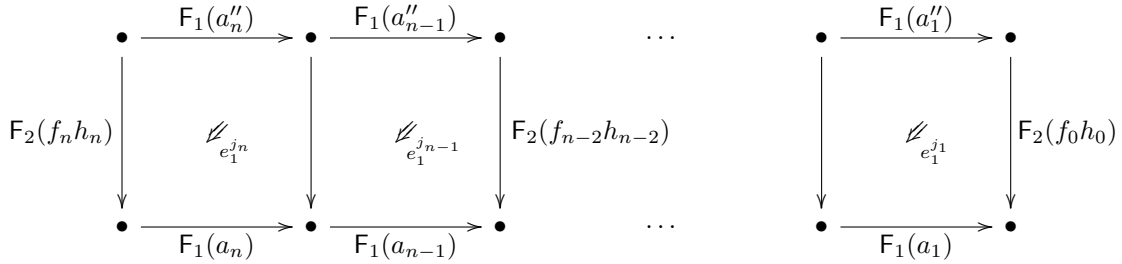
et



On voit alors facilement en simplifiant les 2-isomorphismes de connexion du 2-foncteur  $F_1$  qu'il suffit de prouver que les composées des deux diagrammes planaires ci-dessous sont les mêmes :



et

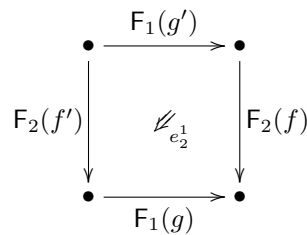


Mais ceci découle trivialement de la compatibilité des 2-morphismes d'échanges  $e_1^1$  et  $e_1^2$  avec la composition verticale des carrés de  $\mathcal{E}$ . On voit donc que pour prouver que les 2-morphismes  $e(f \circ h)$  sont indépendants du choix de la factorisation de  $g$  et des  $j_k$  il suffira de prouver ceci pour  $e(f)$  et pour  $e(h)$ . En utilisant alors le fait que tout morphisme de  $\mathcal{C}_2$  est une composée de morphismes dans  $\mathcal{C}_2^1$  ou  $\mathcal{C}_2^2$  on voit qu'il suffit de traiter les deux cas particuliers suivants :

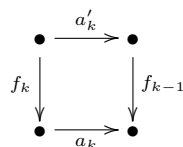
- $e(f)$  est indépendant des choix si  $f$  est dans  $\mathcal{C}_2^1$ ,
- $e(f)$  est indépendant des choix si  $f$  est dans  $\mathcal{C}_2^2$ .

Par symétrie il suffit de traiter juste le premier cas.

**Étape 2 :** Preuve de l'indépendance dans le cas où  $f$  est dans  $\mathcal{C}_2^1$ . En effet il suffira de prouver que  $e(f)$  est égal à :

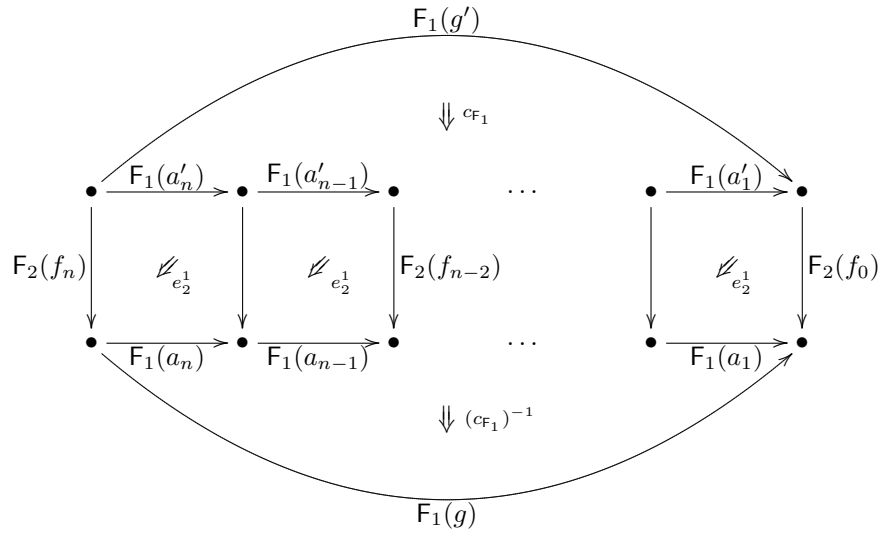


i.e., le 2-morphisme d'échange relatif à la structure d'échange sur  $(F_1, {}^1F_2)$ . Pour voir cela on utilise l'hypothèse que le 2-morphisme d'échange  $e_1^2$  associé au carré mixte :



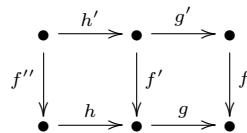


coïncide avec le 2-morphisme d'échange  $e_2^{jk}$  associé au même carré mixte. Il vient que  $e(f)$  est aussi égal à la composée du diagramme planaire :



En utilisant la compatibilité du 2-morphisme d'échange avec la composition horizontale on obtient ce qu'on veut.

**Étape 3 :** *Fin de la démonstration.* On a construit pour tout carré de  $\mathcal{E}$  un 2-morphisme. Il reste à voir que ces 2-morphismes définissent une structure d'échange sur le couple  $(F_1, F_2)$ . (Le fait que les restrictions redonnent les structures d'échange de départ est évident). La compatibilité avec les compositions verticales des carrés découle de la première étape. Il nous reste donc à établir la compatibilité avec les compositions horizontales. On se donne un diagramme :



En prenant une factorisation de  $g$  et  $h$  en des morphismes de  $\mathcal{C}_1^1$  et de  $\mathcal{C}_1^2$  on en déduit une factorisation de  $g \circ h$ . En revenant à la définition et en utilisant l'indépendance par rapport au choix de la factorisation on prouve facilement ce que l'on veut. Les détails sont laissés en exercice. C.Q.F.D

### 1.2.3 Autoéquivalences compatibles avec un échange

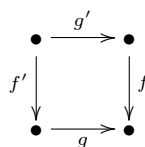
**DEFINITION 1.2.9** — Soient deux 2-foncteurs :

$$F_1 : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathfrak{D} \quad \text{et} \quad F_2 : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathfrak{D}$$

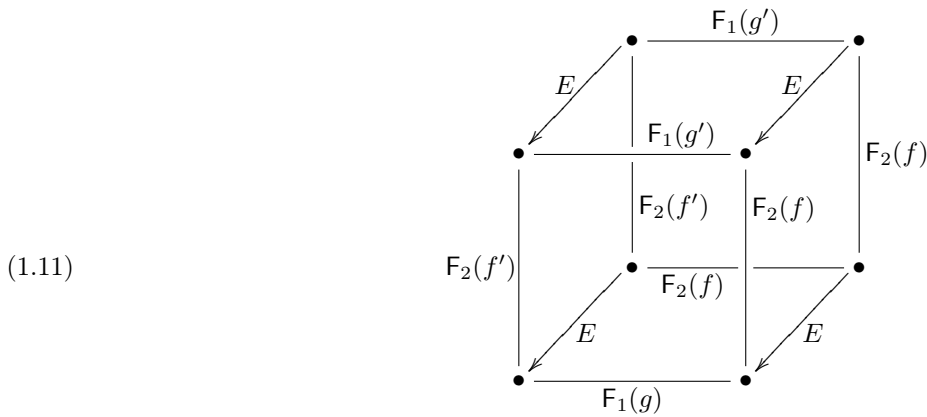
On suppose donnés :

- un échange sur  $(F_1, F_2)$ ,
- une autoéquivalence  $((E_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1)}, (\alpha_g^1)_{g \in \text{Fleches}(\mathcal{C}_1)})$  de  $F_1$ ,
- une autoéquivalence  $((E_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2)}, (\alpha_f^2)_{f \in \text{Fleches}(\mathcal{C}_1)})$  de  $F_2$ .

(Remarquons que pour  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1) = \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$  les équivalences associées à  $F_1(X) = F_2(X)$  sont les mêmes). On dira que les deux autoéquivalences ci-dessus sont compatibles avec l'échange si pour tout carré mixte dans  $\mathcal{E}$  :



le cube suivant :



est commutatif.

On a le lemme facile suivant :

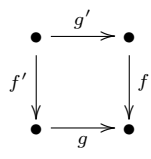
**LEMME 1.2.10** — *En plus des hypothèses de la définition précédente, supposons donnée en plus une deuxième autoéquivalence de  $F_1$  et  $F_2$  compatible avec l'échange. Alors l'autoéquivalence composée  $E' \circ E$  est aussi compatible avec l'échange.*

**PROPOSITION 1.2.11** — *Supposons donnés deux 2-foncteurs covariants :*

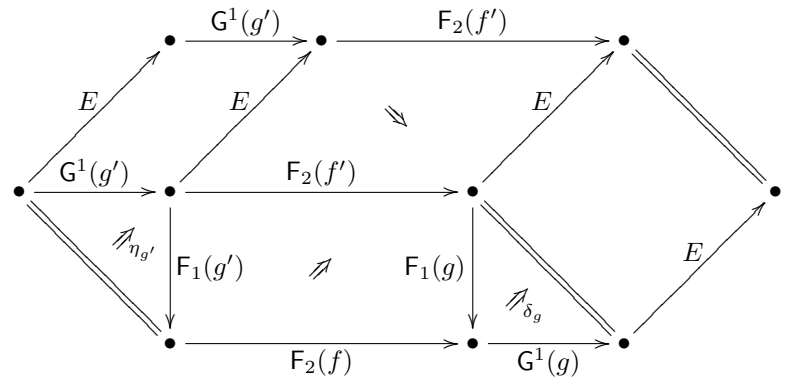
$$F_1 : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathfrak{D} \quad \text{et} \quad F_2 : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathfrak{D}$$

et une structure d'échange sur  $(F_1, F_2)$  de type  $\swarrow$ . On suppose également donnée une autoéquivalence sur chacun des deux 2-foncteurs  $F_1$  et  $F_2$  compatibles avec l'échange. On notera  $(E_\gamma, \alpha_\gamma^1)$  et  $(E_\gamma, \alpha_\gamma^2)$  ces deux autoéquivalences. Supposons maintenant que le 2-foncteur  $F_1$  admet un adjoint global à gauche  $G^1$ . On notera  $(E_\gamma, \beta_\gamma^1)$  l'autoéquivalence de  $G^1$  déduite par le procédé 1.1.26. Alors, le couple d'autoéquivalences  $(E_\gamma, \beta_\gamma^1)$  et  $(E_\gamma, \alpha_\gamma^1)$  est compatible avec la structure d'échange sur  $(G^1, F_2)$  définie dans 1.2.5.

DEMONSTRATION Supposons donné un carré mixte dans  $\mathcal{E}$  :



Pour se convaincre de la validité de l'énoncé on considère le diagramme solide représenté ci-dessous par ces faces visibles :



Le cube du milieu est commutatif puisque les autoéquivalences  $E$  sont compatibles avec l'échange sur  $(F_1, F_2)$ . Les deux parties solides restantes du diagramme sont également commutatives. C'est en fait les diagrammes solides exprimant la compatibilité de l'unité et la counité avec les endoéquivalences. Ceci prouve donc que notre diagramme solide est commutatif. En l'écrivant autrement on obtient le cube de la définition 1.11.

C.Q.F.D

### 1.2.4 Foncteurs croisés

On garde les hypothèses de la section précédente :

- $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux catégories tel que  $\text{Ob}(\mathcal{C}_1) = \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$ ,
- $\mathfrak{D}$  une 2-catégorie.
- $\mathcal{E}$  une classe de carrés mixtes stable par composition horizontale et verticale.

On suppose donné en plus :

- deux 2-foncteurs covariants  $F_i : \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathfrak{D}$ ,
- $G^1$  un adjoint global à gauche de  $F_1$ ,
- $G^2$  un adjoint global à droite de  $F_2$ ,
- un échange sur  $(F_1, F_2)$  de type  $\swarrow$ ,
- un échange sur  $(G^1, G^2)$  de type  $\swarrow$ .

On notera par  $e_{1,2}$  (resp.  $e^{1,2}$ ) les 2-morphismes d'échange relatifs à la structure d'échange sur  $(F_1, F_2)$  (resp.  $(G^1, G^2)$ ).

A partir de ces données on peut construire 4 structures d'échange.

1. Deux structures d'échange sur  $(G^1, F_2)$  :

- (a) une structure d'échange de type  $\swarrow$  obtenue à partir de l'échange sur  $(F_1, F_2)$  et l'adjonction entre  $F_1$  et  $G^1$ . On notera  $a_2^1$  les morphismes d'échanges relatifs à cet échange.
- (b) une structure d'échange de type  $\searrow$  obtenue à partir de l'échange sur  $(G^1, G^2)$  et l'adjonction entre  $G^2$  et  $F_2$ . On notera  $b_2^1$  les morphismes d'échanges relatifs à cet échange.

2. Deux structures d'échange sur  $(F_1, G^2)$  :

- (a) une structure d'échange de type  $\swarrow$  obtenue à partir de l'échange sur  $(G^1, G^2)$  et l'adjonction entre  $G^1$  et  $F_1$ . On notera  $a_1^2$  les morphismes d'échanges relatifs à cet échange.
- (b) une structure d'échange de type  $\searrow$  obtenue à partir de l'échange sur  $(F_1, F_2)$  et l'adjonction entre  $F_2$  et  $G^2$ . On notera  $b_1^2$  les morphismes d'échanges relatifs à cet échange.

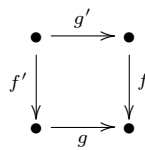
**DEFINITION 1.2.12** — Un foncteur croisé noté :

$$(G^1, F_1, F_2, G^2) : (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \longrightarrow \mathfrak{D}$$

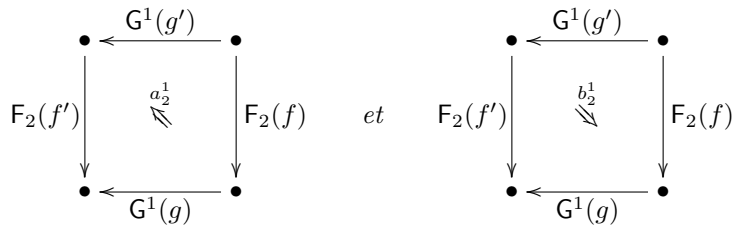
est la donnée de :

1. deux 2-foncteurs covariants  $F_i : \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathfrak{D}$ ,
2. un adjoint global à gauche  $G^1$  de  $F_1$ ,
3. un adjoint global à droite  $G^2$  de  $F_2$ ,
4. un échange sur  $(F_1, F_2)$  de type  $\swarrow$ ,
5. un échange sur  $(G^1, G^2)$  de type  $\swarrow$ .

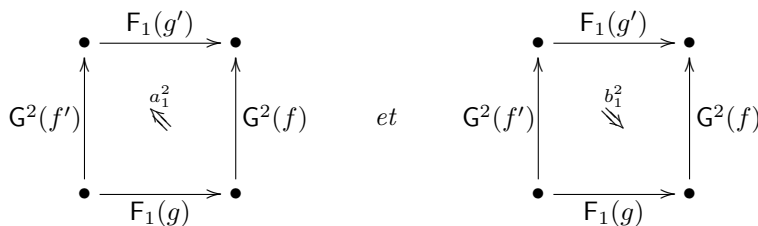
tel que pour tout carré mixte de  $\mathcal{E}$  :



les deux 2-morphismes :



sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. D'une façon équivalente (en remarquant que  ${}^a(a_2^1) = b_1^2$  et  ${}^a(b_2^1) = a_1^2$ ), les deux 2-morphismes :



sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

**Remarque 1.2.13** — La définition des foncteurs croisés adoptée est légèrement plus générale que celle de Voevodsky (voir [Del01]). En effet, un foncteur croisé selon Voevodsky est un foncteur croisé  $(G^1, F_1, F_2, G^2)$  comme dans 1.2.12 avec en plus  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ . L'intérêt de la définition 1.2.12 est de pouvoir parler des foncteurs croisés (partiaux)  $(H^*, H_*, \text{Liss}H_{\#}, \text{Liss}H^*)$ ,  $(H^*, H_*, \text{Imm}H_!, \text{Imm}H^!)$  et  $(H^*, H_*, \text{Liss}H_!, \text{Liss}H^!)$ . Voir pour cela les sous-sections 1.4.5 et 1.4.6 et la proposition 1.5.19.

On parlera d'isoéchange lorsque les 2-morphismes d'échange sont des 2-isomorphismes. On a alors la notion naturelle d'isoéchange inverse. La proposition suivante est très simple. Elle donne la méthode pratique de construction de foncteurs croisés.

**PROPOSITION 1.2.14** — Soient  $G^1 : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{D}$  un 2-foncteur contravariant et  $F_2 : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{D}$  un 2-foncteur covariant. On suppose donné un échange sur  $(G^1, F_2)$  de type  $\swarrow$  qui soit un isoéchange. On suppose également que  $G^1$  et  $F_2$  admettent chacun un adjoint global à droite qu'on notera  $F_1$  et  $G^2$  respectivement. Il existe alors :

- un échange sur  $(F_1, F_2)$  obtenu à partir de l'isoéchange (de type  $\swarrow$ ) sur  $(G^1, F_2)$  et l'adjonction entre  $F_1$  et  $G^1$ .
- un échange sur  $(G^1, G^2)$  obtenu à partir de l'isoéchange inverse (de type  $\searrow$ ) sur  $(G^1, F_2)$  et l'adjonction entre  $G^2$  et  $F_2$ .

La donnée de  $(G^1, F_1, F_2, G^2)$  ainsi que les adjonctions et les échanges ci-dessus définit un foncteur croisé. De plus, l'isoéchange sur  $(F_1, G^2)$  est obtenu par adjonction de celui de  $(G^1, F_2)$ .

### 1.3 Préliminaires 2-catégoriques III : Un critère de prolongement pour les 2-foncteurs

Cette section est consacrée à la preuve du théorème suivant :

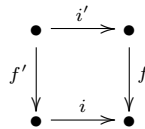
**THEOREME 1.3.1** — **Données A** : Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie admettant des produits fibrés. Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux sous-catégories (non nécessairement pleines) de  $\mathcal{C}$  vérifiant les conditions suivantes.

1. Les isomorphismes sont dans  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Les flèches de  $\mathcal{C}_1$  (resp. de  $\mathcal{C}_2$ ) sont stables par pull-back suivant toute flèche de  $\mathcal{C}$ .
2. Toute flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$  se factorise :  $f = f_2 \circ f_1$  avec  $f_i$  dans  $\mathcal{C}_i$  pour  $i = 1, 2$ .
3. Pour toute flèche  $B \longrightarrow A$  de  $\mathcal{C}$  la diagonale  $B \longrightarrow B \times_A B$  est dans  $\mathcal{C}_1$ .

**Données B** : Supposons données une 2-catégorie  $\mathcal{D}$  et deux 2-foncteurs covariants :

$$H_i : \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{D}$$

tels que pour tout  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $H_1(X) = H_2(X) = H(X)$ . On suppose également donné un isoéchange codirectionnel de type  $\swarrow$  sur le couple  $(H_1, H_2)$  pour la classe des carrés commutatifs ayant les flèches verticales dans  $\mathcal{C}_2$  et les flèches horizontales dans  $\mathcal{C}_1$ . Plus explicitement que pour tout carré commutatif  $(C)$  :



avec  $i, i'$  dans  $\mathcal{C}_1$  et  $f, f'$  dans  $\mathcal{C}_2$ , on a un 2-isomorphisme :

$$a(C) : H_2(f) \circ H_1(i') \xrightarrow{\sim} H_1(i) \circ H_2(f') \quad : \quad
 \begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{H_1(i')} & \bullet \\
 H_2(f') \downarrow & \not\cong & \downarrow H_2(f) \\
 \bullet & \xrightarrow{H_1(i)} & \bullet
 \end{array}$$

compatible aux 2-isomorphismes de connexions  $c_i$  des 2-foncteurs  $H_i$  de la manière habituelle (voir la définition 1.2.1). On supposera de plus que pour  $i = \text{id}$  et  $i' = \text{id}$  (resp.  $f = \text{id}$  et  $f' = \text{id}$ ) le 2-morphisme  $a(C)$  est l'identité.

**Conclusion :** Il existe alors un 2-foncteur :

$$H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

tel que  $H(X) = H_1(X) = H_2(X)$  pour tout  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , ainsi que des isomorphismes de 2-foncteurs :

$$u_i : H \circ [\mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}] \longrightarrow H_i$$

pour  $i = 1, 2$  qui soient l'identité sur les objets et tels que l'échange sur  $(H_1, H_2)$  soit la restriction de l'échange trivial sur  $(H, H)$  par les isomorphismes  $u_1$  et  $u_2$ . De plus le triplet  $(H, u_1, u_2)$  est unique à un isomorphisme unique près.

**DEMONSTRATION DE L'UNICITÉ** On donne d'abord la preuve de l'unicité. Soit  $H' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  un autre 2-foncteur prolongeant les  $H_i$  et  $u'_i$  un isomorphisme de 2-foncteurs entre la restriction de  $H$  à  $\mathcal{C}_i$  et  $H_i$ . On supposera également que  $u'_i$  est l'identité sur les objets. On a ainsi pour tout  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}) : H'(X) = H(X)$ . Si  $f$  est une flèche de  $\mathcal{C}$  on choisit une factorisation  $f = f_2 \circ f_1$  avec  $f_i$  des flèches de  $\mathcal{C}_i$ . On définit ensuite un 2-isomorphisme :  $H'(f) \longrightarrow H(f)$  en prenant la composition :

$$H'(f) \longrightarrow H'(f_2) \circ H'(f_1) \longrightarrow H_2(f_2) \circ H_1(f_1) \longrightarrow H(f_2) \circ H(f_1) \longrightarrow H(f)$$

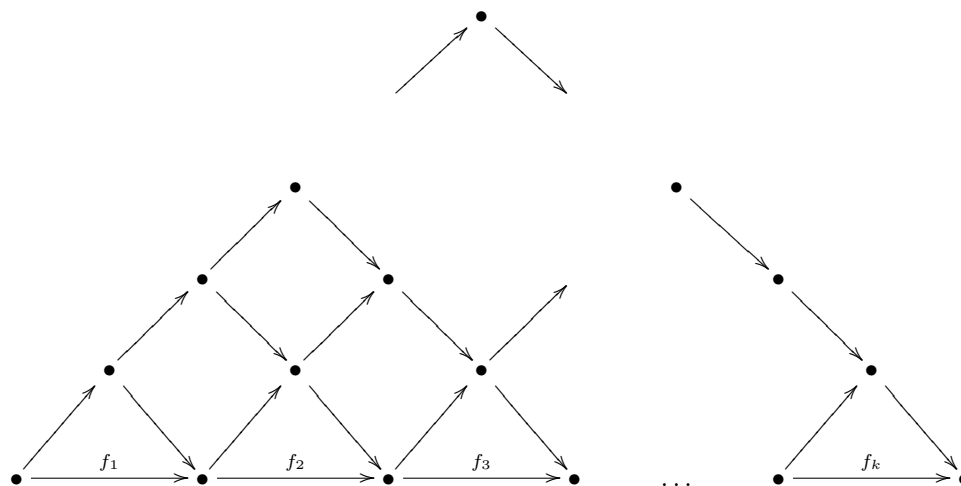
Ce 2-isomorphisme ne dépend que de  $f$  et pas du choix de la factorisation. De plus la famille de ces 2-isomorphismes (un pour chaque  $f$ ) est compatible aux 2-isomorphismes de connexions. Elle fournit donc un isomorphisme entre  $H'$  et  $H$ . C'est en plus le seul isomorphisme commutant avec les  $u_i$  et  $u'_i$ . On laisse les détails aux lecteurs. C.Q.F.D

Le reste de la section sera consacré à la construction d'un 2-foncteur  $H$ . On sait déjà que  $H(X) = H_1(X) = H_2(X)$  pour tout  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Le problème est donc de construire les 1-morphismes  $H(f)$  pour  $f \in \text{Fl}(\mathcal{C})$  ainsi que les 2-isomorphismes de connexion et de vérifier la compatibilité. On commence par introduire quelques catégories :

### 1.3.1 Les catégories $\Delta_k$

Soit  $\bullet \xrightarrow{f_1} \bullet \xrightarrow{f_2} \bullet \dots \bullet \xrightarrow{f_k} \bullet$  une suite de  $k$  morphismes composables de  $\mathcal{C}$ . On introduit la catégorie :  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$  définie de la manière suivante.

- Les objets de  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$  sont les diagrammes commutatifs qui ont la forme suivante :

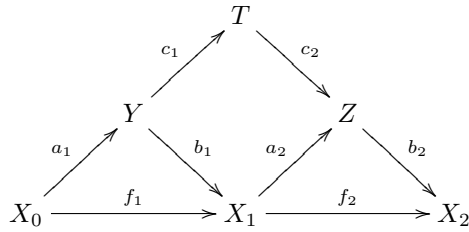


tels que toutes les flèches  $\nearrow$  sont dans  $\mathcal{C}_1$  et toutes les flèches  $\searrow$  sont dans  $\mathcal{C}_2$ .

- Une flèche de  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$  entre deux tels diagrammes est la donnée de  $\frac{1}{2}k(k+1)$  flèches dans  $\mathcal{C}_2$  reliant les objets qui ne sont pas sur la base et se trouvant au même niveau et telles que le diagramme résultant (en identifiant les bases des deux triangles entre eux) commute.

Pour clarifier cette définition nous traitons avec plus de détails le cas  $k = 2$ . Un objet de  $\Delta_2(f_1, f_2)$  est un diagramme commutatif de la forme :

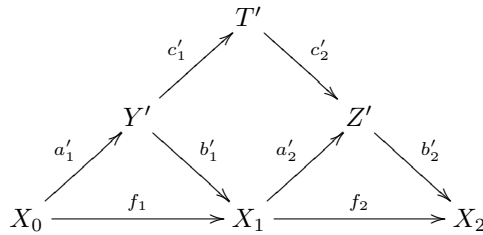
(1.12)



avec  $a_1, a_2$  et  $c_1$  des flèches dans  $\mathcal{C}_1$  et  $b_1, b_2$  et  $c_2$  des flèches dans  $\mathcal{C}_2$ .

Prenons un autre objet de  $\Delta_2(f_1, f_2)$  :

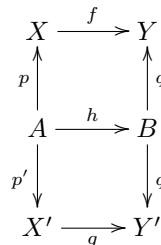
(1.13)



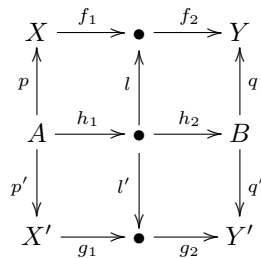
Une flèche dans  $\Delta_2(f_1, f_2)$  de ce dernier objet vers le premier est la donnée de 3 flèches  $p_T : T' \longrightarrow T$ ,  $p_Y : Y' \longrightarrow Y$  et  $p_Z : Z' \longrightarrow Z$  rendant l'union des deux diagrammes commutative et telles que  $p_T, p_Y$  et  $p_Z$  soient dans  $\mathcal{C}_2$ .

La remarque suivante sera utile pour prouver la connexité des catégories  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$  :

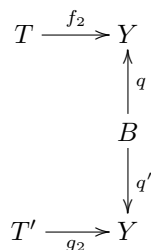
**Remarque 1.3.2** — Supposons donné un diagramme commutatif :



avec  $p, q, p'$  et  $q'$  dans  $\mathcal{C}_2$  et  $f, g$  et  $h$  quelconques dans  $\mathcal{C}$ . Soient  $f = f_2 \circ f_1$  et  $g = g_2 \circ g_1$  des factorisations de  $f$  et  $g$  avec  $f_i, g_i \in \mathcal{C}_i$ . Il existe alors une factorisation  $h = h_2 \circ h_1$  comme ci-dessus et des flèches  $l$  et  $l'$  dans  $\mathcal{C}_2$  telles que le diagramme suivant soit commutatif :



En effet, soit  $C_0$  la limite inverse du diagramme :



On obtient alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f_1} & T & \xrightarrow{f_2} & Y \\
 p \uparrow & & l_0 \uparrow & & q \uparrow \\
 A & \xrightarrow{a} & C_0 & \xrightarrow{b} & B \\
 p' \downarrow & & l'_0 \downarrow & & q' \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{g_1} & T' & \xrightarrow{g_2} & Y
 \end{array}$$

Les morphismes  $l_0, l'_0$  et  $b$  sont dans  $\mathcal{C}_2$ . Choisissons maintenant une factorisation de  $a$  :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{h_1} & C \\
 & \searrow a & \downarrow m \\
 & & C_0
 \end{array}$$

avec  $h_1$  dans  $\mathcal{C}_1$  et  $m$  dans  $\mathcal{C}_2$ . Ceci donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f_1} & T & \xrightarrow{f_2} & Y & & \\
 p \uparrow & & l \nearrow & & l_0 \uparrow & & q \uparrow \\
 A & \xrightarrow{h_1} & C & \xrightarrow{m} & C_0 & \xrightarrow{b} & B \\
 p' \downarrow & & l' \searrow & & l'_0 \downarrow & & q' \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{g_1} & T' & \xrightarrow{g_2} & Y & & 
 \end{array}$$

Il est clair qu'on prenant  $h_2 = b \circ m$  on obtient le résultat recherché.

**LEMME 1.3.3** — *Les catégories  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$  sont connexes.*

DEMONSTRATION On fera la démonstration pour  $k = 2$ . Le cas général est strictement pareil. Il s'agit d'appliquer le nombre de fois nécessaire la remarque précédente qui assure l'existence de bonnes factorisations. Prenons les deux objets 1.12 et 1.13 de  $\Delta_2(f_1, f_2)$  considérés ci-dessus. Supposons construits un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & B \\
 & \nearrow & & \searrow u & \nearrow v \\
 X_0 & \xrightarrow{f_1} & X_1 & \xrightarrow{f_2} & X_2
 \end{array}$$

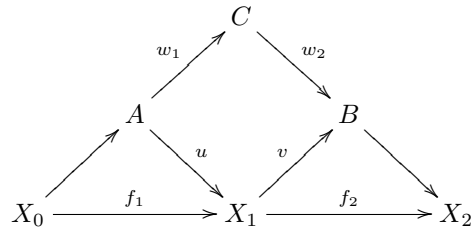
et des flèches  $p : A \longrightarrow Y, q : B \longrightarrow Z, p' : A \longrightarrow Y'$  et  $q' : B \longrightarrow Z'$  rendant commutative la réunion des trois diagrammes. On a ainsi le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{c_1} & T & \xrightarrow{c_2} & Z \\
 p \uparrow & & & & q \uparrow \\
 A & \xrightarrow{v \circ u} & B & & \\
 p' \downarrow & & q' \downarrow & & \\
 Y' & \xrightarrow{c'_1} & T' & \xrightarrow{c'_2} & Z'
 \end{array}$$

D'après la remarque 1.3.2, on peut compléter ce diagramme pour obtenir un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{c_1} & T & \xrightarrow{c_2} & Z \\
 p \uparrow & & l \uparrow & & q \uparrow \\
 A & \xrightarrow{w_1} & C & \xrightarrow{w_2} & B \\
 p' \downarrow & & l' \downarrow & & q' \downarrow \\
 Y' & \xrightarrow{c'_1} & T' & \xrightarrow{c'_2} & Y'
 \end{array}$$

avec  $w_2, l$  et  $l'$  dans  $\mathcal{C}_2, w_1$  dans  $\mathcal{C}_1$  et  $w_1 \circ w_2 = v \circ u$ . Ceci donne alors des flèches vers chacun des deux objets de départ qui partent de l'objet :



Ceci prouve la connexité de la catégorie  $\Delta_2(f_1, f_2)$ .

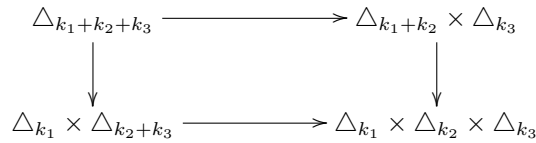
C.Q.F.D

On peut définir deux foncteurs évidents reliant les catégories  $\Delta_k$  :

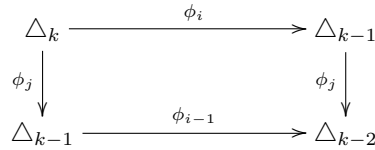
1.  $\Delta_{k_1+k_2}(f_1, \dots, f_{k_1+k_2}) \longrightarrow \Delta_{k_1}(f_1, \dots, f_{k_1}) \times \Delta_{k_2}(f_{k_1+1}, \dots, f_{k_1+k_2})$  qui consiste à effacer une partie du triangle de base  $f_1 \dots f_{k_1+k_2}$  pour ne garder que les deux sous-triangles de base  $f_1, \dots, f_{k_1}$  et  $f_{k_1+1}, \dots, f_{k_1+k_2}$ .
2.  $\phi_i : \Delta_k(f_1, \dots, f_i, f_{i+1}, \dots, f_k) \longrightarrow \Delta_{k-1}(f_1, \dots, f_{i-1}, f_i \circ f_{i+1}, f_{i+2}, \dots, f_k)$  qui consiste à composer les flèches situées dans chacune des deux bandes de base les deux cotés du sous-triangle de base  $(f_i, f_{i+1})$ .

La proposition qui suit est triviale :

**PROPOSITION 1.3.4** — *On a des diagrammes commutatifs :*



et pour  $j < i < k$  :



### 1.3.2 Foncteur associé à un chemin

On appellera  $k$ -chemin une façon de parcourir un diagramme quelconque dans  $\text{Ob}(\Delta_k)$  en respectant le sens des flèches. En d'autres termes, un chemin c'est le choix d'une suite  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2k})$  telle que :

- $\epsilon_i = -1$  ou  $= +1$ ,
- $\sum_{i=1}^{2k} \epsilon_i = 0$ ,
- $\sum_{i=1}^l \epsilon_i \geq 0$  pour tout  $1 \leq l \leq 2k$ .

A une telle suite correspond le chemin qui consiste à prendre (lorsque on est sur le  $i$ -ème  $\bullet$ ) la direction  $\nearrow$  si  $\epsilon_i = +1$  et  $\searrow$  si  $\epsilon_i = -1$ . Les deux dernières conditions sur les  $\epsilon_i$  assurent que :

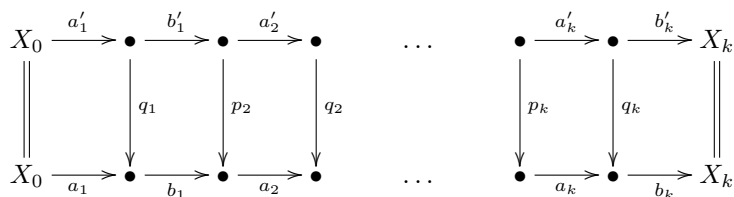
- on part de  $X_0 = \text{source}(f_1)$  pour arriver à  $X_k = \text{but}(f_k)$ ,
- on ne descend jamais au dessus de la base, i.e., on reste dans le triangle.

Pour tout  $k$ -chemin  $c = (\epsilon_i)_i$  on peut associer à un objet de  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$  une suite de flèches composables de  $\mathcal{C}$  :

$$X_0 \xrightarrow{a_1} \bullet \xrightarrow{b_1} \bullet \xrightarrow{a_2} \bullet \quad \dots \quad \bullet \xrightarrow{a_k} \bullet \xrightarrow{b_k} X_k$$

qu'on appellera la section de l'objet suivant  $c$ . Elle est obtenue en oubliant toutes les flèches qui ne se trouvent pas sur le chemin. Les flèches  $a_i$  sont donc dans  $\mathcal{C}_{(3+\epsilon_{2i-1})/2}$  et les  $b_i$  dans  $\mathcal{C}_{(3+\epsilon_{2i})/2}$ . De plus :  $f_k \circ \dots \circ f_1 = b_{2k} \circ a_{2k} \circ \dots \circ b_1 \circ a_1$ .

Cette association est fonctorielle au sens suivant. À une flèche de  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$  on peut associer un diagramme commutatif :





obtenu en oubliant tout, sauf les flèches reliant les objets par lesquels on passe quand on suit notre chemin  $c$ .

Reprenons à présent les données de l'énoncé du théorème 1.3.1. Fixons un chemin  $c = (\epsilon_i)_i$ . On va construire à partir de  $c$  un foncteur :

$$\psi(c) : \Delta_k(f_1, \dots, f_k) \longrightarrow \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_k))$$

Soit  $\mathcal{X}$  un objet de  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ , on notera  $\psi(c)(\mathcal{X})$  le 1-morphisme de  $\mathfrak{D}$  donné par la composée :

$$\mathbf{H}_{\sigma_{2k}}(b_k) \circ \mathbf{H}_{\sigma_{2k-1}}(a_k) \circ \mathbf{H}_{\sigma_{2k-2}}(b_{k-1}) \circ \dots \circ \mathbf{H}_{\sigma_2}(b_1) \circ \mathbf{H}_{\sigma_1}(a_1)$$

où  $\sigma_i = (3 + \epsilon_i)/2$  et :

$$X_0 \xrightarrow{a_1} \bullet \xrightarrow{b_1} \bullet \xrightarrow{a_2} \bullet \quad \dots \quad \bullet \xrightarrow{a_k} \bullet \xrightarrow{b_k} X_k$$

est la section de  $\mathcal{X}$  suivant le chemin  $c$ .

Soit une flèche  $m : \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X}$  entre deux objets de  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ . A cette flèche on peut associer un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \xrightarrow{a'_1} & \bullet & \xrightarrow{b'_1} & \bullet & \xrightarrow{a'_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{a'_k} & \bullet & \xrightarrow{b'_k} & X_k \\ \parallel & & \downarrow q_1 & & \downarrow p_2 & & \downarrow q_2 & & \downarrow p_k & & \downarrow q_k & & \parallel \\ X_0 & \xrightarrow{a_1} & \bullet & \xrightarrow{b_1} & \bullet & \xrightarrow{a_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{a_k} & \bullet & \xrightarrow{b_k} & X_k \end{array}$$

avec les flèches verticales dans  $\mathcal{C}_2$ . On définit un 2-isomorphisme  $\psi(c)(m) : \psi(c)(\mathcal{X}') \xrightarrow{\sim} \psi(c)(\mathcal{X})$  en prenant la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{H}(X_0) & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_1}(a'_1)} & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_2}(b'_1)} & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_3}(a'_2)} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_{2k-1}}(a'_k)} & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_{2k}}(b'_k)} & \mathbf{H}(X_k) \\ \parallel & & \downarrow \mathbf{H}_2(q_1) & & \downarrow \mathbf{H}_2(p_2) & & \downarrow \mathbf{H}_2(q_2) & & \downarrow \mathbf{H}_2(p_k) & & \downarrow \mathbf{H}_2(q_k) & & \parallel \\ \mathbf{H}(X_0) & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_1}(a_1)} & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_2}(b_1)} & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_3}(a_2)} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_{2k-1}}(a_k)} & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_{2k}}(b_k)} & \mathbf{H}(X_k) \end{array}$$

Les 1-morphismes verticaux étant les  $\mathbf{H}_2(p_i)$  et  $\mathbf{H}_2(q_i)$ . Les 2-isomorphismes qui figurent dans le diagramme planaire précédent sont les suivants :

1. Le 2-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_{2t-1}}(a'_t)} & \bullet \\ \mathbf{H}_2(p_t) \downarrow & \Downarrow & \downarrow \mathbf{H}_2(q_t) \\ \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_{2t-1}}(a_t)} & \bullet \end{array}$$

est :

- $a \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{a'_t} & \bullet \\ p_t \downarrow & & \downarrow q_t \\ \bullet & \xrightarrow{a_t} & \bullet \end{array} \right)$  lorsque  $\sigma_{2t-1} = 1$ ,
- $c_2(p_t, a_t) \circ c_2(a'_t, q_t)^{-1}$  lorsque  $\sigma_{2t-1} = 2$ .

2. Le 2-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_{2t}}(b'_t)} & \bullet \\ \mathbf{H}_1(q_t) \downarrow & \Downarrow & \downarrow \mathbf{H}_1(p_{t+1}) \\ \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_{2t}}(b_t)} & \bullet \end{array}$$

est :

- $a \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{b'_t} & \bullet \\ q_t \downarrow & & \downarrow p_{t+1} \\ \bullet & \xrightarrow{b_t} & \bullet \end{array} \right)$  lorsque  $\sigma_{2t} = 1.$ ,
- $c_2(q_t, b_t) \circ c_2(b'_t, p_{t+1})^{-1}$  lorsque  $\sigma_{2t} = 2.$

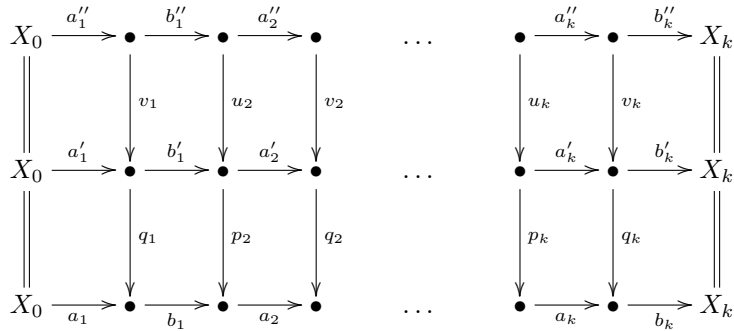
On a le lemme :

**LEMME 1.3.5** — La donnée des  $\psi(c)(\mathcal{X})$  ainsi que des  $\psi(c)(m)$  définit un foncteur covariant :

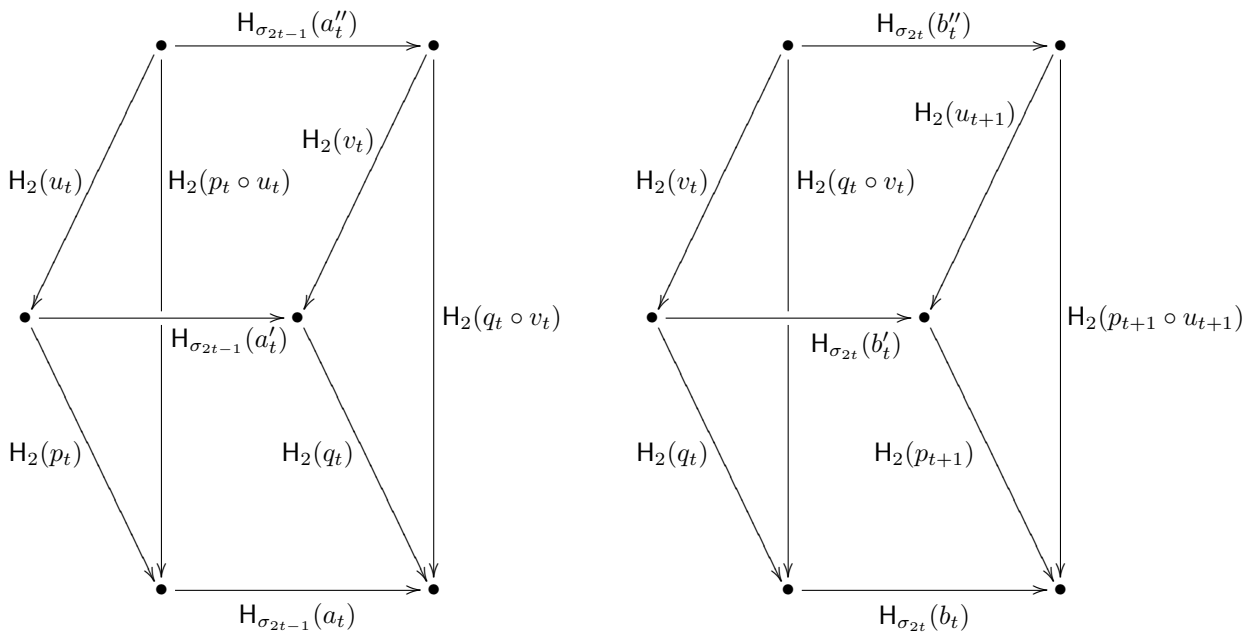
$$\psi(c) : \Delta_k(f_1, \dots, f_k) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_k))$$

De plus, toute flèche de  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$  est envoyée sur un isomorphisme par  $\psi(c)$ .

**DEMONSTRATION** Il s'agit de prouver que les 1-isomorphismes  $\psi(c)(m)$  sont compatibles à la composition. C'est à dire, pour toute suite :  $\mathcal{X}'' \xrightarrow{n} \mathcal{X}' \xrightarrow{m} \mathcal{X}$  on a l'égalité :  $\psi(c)(m) \circ \psi(c)(n) = \psi(c)(m \circ n)$ . En prenant les sections suivant  $c$  on obtient un diagramme commutatif :



Les diagrammes solides :



En effet si  $\sigma_{?} = 2$  ceci découle de la relation de cocycle des morphismes de connexions pour  $H_1$ . Si  $\sigma_{?} = 1$  ceci découle de la compatibilité des 2-isomorphismes  $a(\cdot)$  avec la composition verticale des carrés (voir la définition 1.2.1). Ceci

prouve donc que la composée du diagramme planaire :

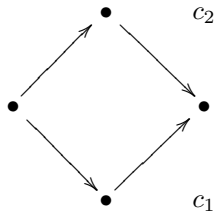
$$(1.14) \quad \begin{array}{ccccccc} H(X_0) & \xrightarrow{H_{\sigma_1}(a''_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_2}(b''_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_3}(a''_2)} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k-1}}(a''_k)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k}}(b''_k)} & H(X_k) \\ \parallel & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \parallel & & \searrow & & \parallel \\ H(X_0) & \xrightarrow{H_{\sigma_1}(a'_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_2}(b'_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_3}(a'_2)} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k-1}}(a'_k)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k}}(b'_k)} & H(X_k) \\ \parallel & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \parallel & & \searrow & & \parallel \\ H(X_0) & \xrightarrow{H_{\sigma_1}(a_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_2}(b_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_3}(a_2)} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k-1}}(a_k)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k}}(b_k)} & H(X_k) \end{array}$$

est égale à la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccccc} H(X_0) & \xrightarrow{H_{\sigma_1}(a''_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_2}(b''_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_3}(a''_2)} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k-1}}(a''_k)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k}}(b''_k)} & H(X_k) \\ \parallel & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \parallel & & \searrow & & \parallel \\ H(X_0) & \xrightarrow{H_{\sigma_1}(a_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_2}(b_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_3}(a_2)} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k-1}}(a_k)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k}}(b_k)} & H(X_k) \end{array}$$

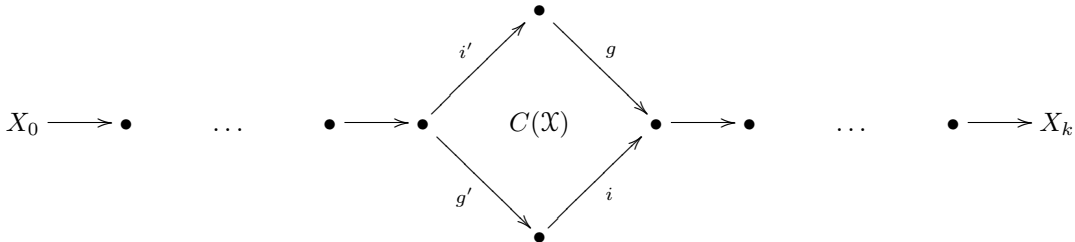
Mais la composée du diagramme planaire 1.14 est égale à  $\psi(c)(m) \circ \psi(n)$ . Ceci se voit en découpant le diagramme selon la ligne horizontale du milieu. Il vient qu'on a l'égalité :  $\psi(c)(m \circ n) = \psi(c)(m) \circ \psi(c)(n)$ . C'est exactement ce que l'on cherche à prouver. C.Q.F.D

Dans le reste de cette sous-section on va construire des transformations naturelles entre les  $\psi(c)$  pour différents chemins  $c$ . Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux  $k$ -chemins qui coïncident partout sauf en un bout de chemin :



C'est-à-dire, si  $c_1 = (\epsilon_i^1)_i$  et  $c_2 = (\epsilon_i^2)_i$  on a  $\epsilon_i^1 = \epsilon_i^2$  pour tout  $1 \leq i \leq k$  sauf pour  $i = i_0, i_0 + 1$  où on a  $\epsilon_{i_0}^1 = -\epsilon_{i_0}^2 = -1$  et  $\epsilon_{i_0+1}^1 = -\epsilon_{i_0+1}^2 = +1$  On va construire une transformation naturelle :  $t_{c_2, c_1} : \psi(c_2) \longrightarrow \psi(c_1)$  qui va être en fait un isomorphisme de foncteurs.

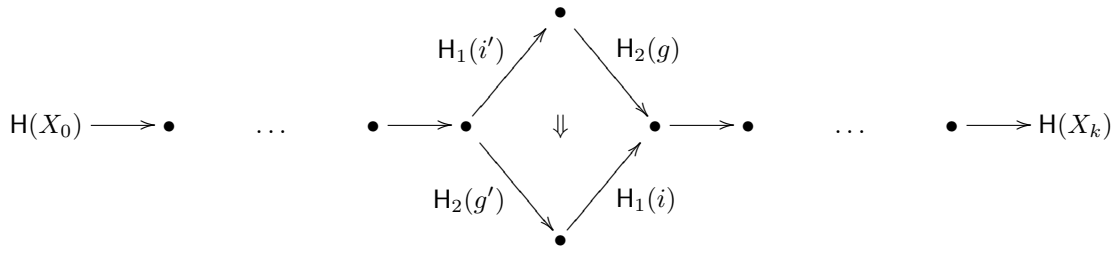
Fixons un objet  $X$  de  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ . On prenant la section suivant  $c_1$  et puis  $c_2$ , on obtient un diagramme commutatif :



On prend alors pour  $t(c_2, c_1)_X$  le 2-isomorphisme :

$$t(c_2, c_1)_X : \dots \circ H_1(i)H_2(g') \circ \dots \xrightarrow{a(C(X))} \dots \circ H_2(g)H_1(i') \circ \dots$$

En d'autres termes le 2-isomorphisme  $t(c_2, c_1)_X$  est le 2-isomorphisme représenté par :



**LEMME 1.3.6** — Les 2-isomorphismes  $t(c_2, c_1)_X$  définissent une transformation naturelle :

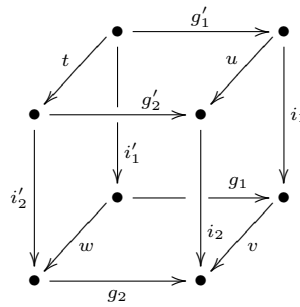
$$t(c_2, c_1) : \psi(c_2) \longrightarrow \psi(c_1)$$

De plus c'est un isomorphisme de foncteurs.

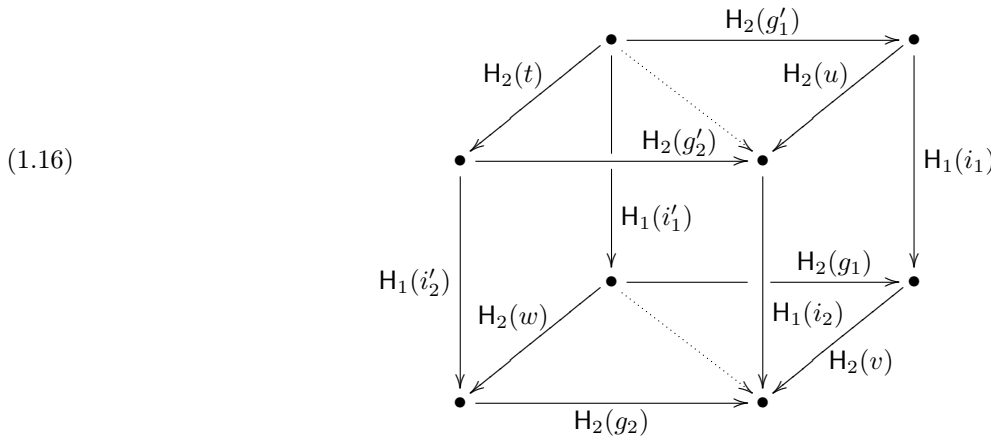
DEMONSTRATION Soit une flèche  $\xi : X_1 \longrightarrow X_2$  de  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ . Il s'agit de vérifier la formule :

$$(1.15) \quad t(c_2, c_1)_{X_2} \psi(c_1)(\xi) = \psi(c_2)(\xi) t(c_2, c_1)_{X_1}$$

La flèche  $\xi$  induit un morphisme de carrés commutatifs dans  $\mathcal{C} : C(X_1) \xrightarrow{\xi} C(X_2)$ . On le représente par le cube :



Il est facile de voir que l'égalité 1.15 découle de la commutativité du diagramme solide :



obtenu en appliquant les 2-foncteurs  $H_1$  et  $H_2$  et en prenant les 2-isomorphismes  $a(\text{Carré})$  pour les carrés mixtes i.e. (où il y a  $H_1$  et  $H_2$ ). Pour voir que le cube 1.16 est bien commutatif<sup>2</sup>, on le divise en deux parties selon les 1-morphismes en pointillés correspondant à  $H_2(g'_2 \circ t) = H_2(u \circ g'_1)$  et  $H_2(g_2 \circ w) = H_2(v \circ g_1)$ . Mais les deux sous-diagrammes solides ainsi obtenus sont commutatifs par la compatibilité avec les compositions verticales ( $u, v, w$  et  $t$  sont dans  $\mathcal{C}_2$ !). Le lemme est prouvé. C.Q.F.D

Les transformations  $t(c_2, c_1)$  commutent entre elles. Plus précisément si  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$  sont trois chemins qui coïncident partout sauf en  $i_0, i_0 + 1$  et  $i_1, i_1 + 1$  de telle sorte qu'on a :

$$c_1 : \searrow \nearrow \searrow \nearrow \quad c_2 : \nearrow \searrow \searrow \nearrow \quad c_3 : \searrow \nearrow \nearrow \searrow \quad c_4 : \nearrow \searrow \nearrow \searrow$$

<sup>2</sup>L'astuce utilisée pour prouver la commutativité du cube 1.16 sera reprise plusieurs fois dans la suite. Le lecteur sera parfois renvoyé à la preuve de la proposition 1.5.11.

On a un diagramme commutatif de transformations naturelles :

$$\begin{array}{ccc} \psi(c_4) & \xrightarrow{t(c_4, c_3)} & \psi(c_3) \\ t(c_4, c_2) \downarrow & & \downarrow t(c_3, c_1) \\ \psi(c_2) & \xrightarrow{t(c_2, c_1)} & \psi(c_1) \end{array}$$

Ceci nous permet alors de définir un isomorphisme de foncteurs :

$$t(c, c') : \psi(c) \xrightarrow{\sim} \psi(c')$$

pour tout couple de  $k$ -chemins  $(c, c')$ . Ces isomorphismes vérifient la relation :

$$(1.17) \quad t(c', c'') \circ t(c, c') = t(c, c'')$$

pour tout triplet  $(c, c', c'')$  de  $k$ -chemins.

### 1.3.3 Récapitulation. Fin des préliminaires

Soit  $c_i$  un  $k_i$ -chemin pour  $i = 1, 2$ . On peut former un  $(k_1 + k_2)$ -chemin en concaténant  $c_1$  puis  $c_2$ . On note  $c_1 * c_2$  le chemin ainsi obtenu. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{k_1+k_2}(f_1, \dots, f_{k_1+k_2}) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \Delta_{k_1}(f_1, \dots, f_{k_1}) \times \Delta_{k_2}(f_{k_1+1}, \dots, f_{k_1+k_2}) \\ \psi(c_1 * c_2) \downarrow & & \downarrow \psi(c_1) \times \psi(c_2) \\ \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_{k_1+k_2})) & \xleftarrow[\text{Composition}]{} & \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_{k_1})) \times \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_{k_1+1}), \mathbf{H}(X_{k_1+k_2})) \end{array}$$

Soit maintenant  $c_{\max}$  le  $k$ -chemin maximal, i.e., celui donné par  $k$  (+1) suivis de  $k$  (-1). On a alors un foncteur évident :

$$\Delta_k(f_1, \dots, f_k) \longrightarrow \Delta_1(f)$$

où  $f = f_k \circ \dots \circ f_1$ . Ce foncteur consiste à composer les flèches sur chacun des deux cotés obliques du triangle. Ce n'est autre que l'une des composées :  $\phi_1^{k-1}$  ou  $\phi_1 \circ \dots \circ \phi_{k-1}$ . On obtient ainsi deux foncteurs :

$$\Delta_k(f_1, \dots, f_k) \xrightarrow{\psi(c_{\max})} \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_k))$$

$$\Delta_k(f_1, \dots, f_k) \longrightarrow \Delta_1(f) \longrightarrow \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_k))$$

Ces deux foncteurs ne sont pas égaux en général. On va construire une transformation naturelle entre eux qui va être un isomorphisme. Soit  $\mathcal{X}$  un objet de  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ . Soit :

$$X_0 \xrightarrow{i_1} \bullet \quad \dots \quad \bullet \xrightarrow{i_k} \bullet \xrightarrow{p_1} \bullet \quad \dots \quad \bullet \xrightarrow{p_k} X_k$$

la section de  $\mathcal{X}$  selon  $c_{\max}$ . Notons que par le choix du chemin maximal tous les  $i_l$  sont dans  $\mathcal{C}_1$  et tous les  $p_l$  sont dans  $\mathcal{C}_2$ . La section de l'image de  $\mathcal{X}$  dans  $\Delta_1(f)$  est simplement le diagramme :

$$X_0 \xrightarrow{i} \bullet \xrightarrow{p} X_k$$

Il s'agit de construire un 2-morphisme  $\sigma_{\mathcal{X}}$  entre les deux 1-morphismes :  $\mathbf{H}_2(p) \circ \mathbf{H}_1(i)$  et  $\mathbf{H}_2(p_k) \circ \dots \circ \mathbf{H}_2(p_1) \circ \mathbf{H}_1(i_k) \circ \mathbf{H}_1(i_1)$ . On prendra bien sûr le morphisme :

$$c_1(i_1, \dots, i_k) c_2(p_1, \dots, p_k) : \mathbf{H}_2(p) \circ \mathbf{H}_1(i) \longrightarrow \mathbf{H}_2(p_k) \circ \dots \circ \mathbf{H}_2(p_1) \circ \mathbf{H}_1(i_k) \circ \mathbf{H}_1(i_1)$$

Montrons qu'il s'agit bien d'une transformation naturelle. Soit  $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$  une flèche de  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ . On en déduit alors les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \xrightarrow{i_1} & \bullet & \xrightarrow{i_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{i_k} & \bullet & \xrightarrow{p_1} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{p_k} & X_k \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ X_0 & \xrightarrow{i'_1} & \bullet & \xrightarrow{i'_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{i'_k} & \bullet & \xrightarrow{p'_1} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{p'_k} & X_k \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 & \xrightarrow{i} & \bullet & \xrightarrow{p} & X_k \\
 \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
 X_0 & \xrightarrow{i'} & \bullet & \xrightarrow{p'} & X_k
 \end{array}$$

Notre assertion est donc une conséquence directe de la compatibilité des 2-isomorphismes  $a(C)$  avec la composition verticale des carrés commutatifs.

Faisons une petite récapitulation pour fixer les notations avant de continuer. On a défini :

1. Des catégories  $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$  pour toute suite de  $k$  morphismes composables.
2. Des foncteurs évidents :
  - $s_{k_1, k_2} : \Delta_{k_1+k_2} \longrightarrow \Delta_{k_1} \times \Delta_{k_2}$
  - $\phi_i : \Delta_k \longrightarrow \Delta_{k-1}$ . On notera aussi  $\phi_{i,l}$  la composée  $\phi_i \circ \phi_{i+1} \circ \dots \circ \phi_{i+l} = \phi_i \circ \dots \circ \phi_i = \phi_i^l$ . On a évidemment la formule :  $\phi_{i, l_1+l_2-1} = \phi_{i,1} \circ \phi_{i, l_1-1} \circ \phi_{i+l_1, l_2-1} = \phi_i \circ \phi_{i, l_1-1} \circ \phi_{i+l_1, l_2-1}$ .
3. Des foncteurs  $\psi(c) = \psi_k(c) : \Delta_k \longrightarrow \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_k))$  attachés à des  $k$ -chemins  $c$ . On notera  $c_{\max}^l$  le  $l$ -chemin maximal.
4. Des isomorphismes de foncteurs (des transformations naturelles) :
  - $t(c, c') : \psi_k(c) \xrightarrow{\sim} \psi_k(c')$ , où  $c$  et  $c'$  sont deux  $k$ -chemins,
  - $\psi_{k_1+k_2}(c_1 * c_2) \equiv \text{Composition}[(\psi_{k_1}(c_1), \psi_{k_2}(c_2)) \circ s_{k_1, k_2}]$ , avec  $c_i$  des  $k_i$ -chemins,
  - $\tau : \psi_{k-l+1}(c_1 * c_{\max}^1 * c_2) \circ \phi_{i, l-1} \xrightarrow{\sim} \psi_k(c_1 * c_{\max}^l * c_2)$  tels que la somme des longueurs de  $c_1$  et  $c_2$  est égale à  $k-l$  et  $c_1$  est de longueur  $i$ .

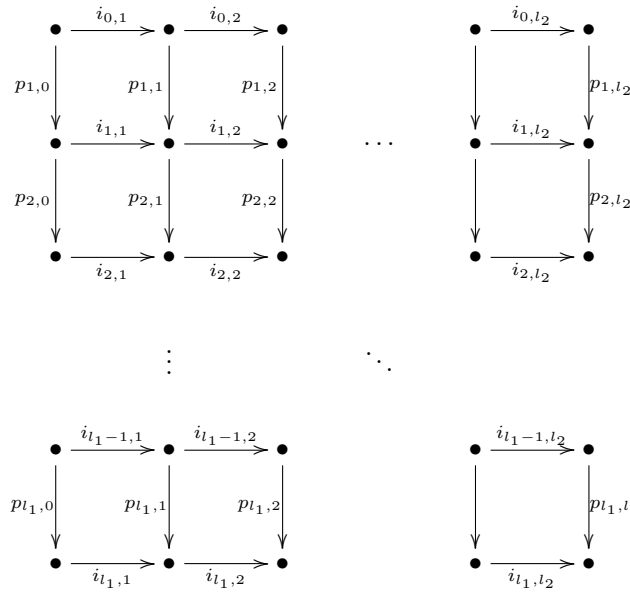
On termine les préliminaires par un dernier lemme de compatibilité :

**LEMME 1.3.7** — Soient  $l_1$  et  $l_2$  deux entiers positifs. On pose  $l = l_1 + l_2$ . On a un diagramme commutatif d'isomorphismes de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc}
 \psi_{k-l+1}(c_1 * c_{\max}^1 * c_2) \circ \phi_{i, l-1} & \xrightarrow{\quad} & \psi_k(c_1 * c_{\max}^{l_1+l_2} * c_2) \\
 \parallel & & \uparrow \sim \\
 & & \psi_k(c_1 * c_{\max}^{l_1} * c_{\max}^{l_2} * c_2) \\
 & & \uparrow \sim \\
 & & \psi_{k-l+2}(c_1 * c_{\max}^1 * c_{\max}^1 * c_2) \circ \phi_{i, l_1-1} \circ \phi_{i+l_1, l_2-1} \\
 & & \uparrow \sim \\
 \psi_{k-l+1}(c_1 * c_{\max}^1 * c_2) \circ \phi_i \circ \phi_{i, l_1-1} \circ \phi_{i+l_1, l_2-1} & \xrightarrow{\quad} & \psi_{k-l+2}(c_1 * c_{\max}^2 * c_2) \circ \phi_{i, l_1-1} \circ \phi_{i+l_1, l_2-1}
 \end{array}$$

**DEMONSTRATION** On peut évidemment supposer que les chemins  $c_1$  et  $c_2$  sont vides. C'est à dire :  $k = l = l_1 + l_2 + 2$ . Soit  $\mathcal{X}$  un objet de  $\Delta_k$ . On reproduit la portion du diagramme  $\mathcal{X}$  qui correspond au rectangle compris entre les deux

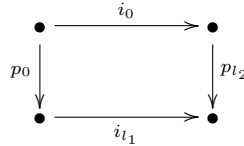
chemins  $c_{\max}^l$  et  $c_{\max}^{l_1} * c_{\max}^{l_2}$  :



avec les  $i_j$  dans  $\mathcal{C}_1$  et les  $p_j$  dans  $\mathcal{C}_2$ . Les autres flèches du diagramme  $\mathcal{X}$  seront notées de la manière évidente par rapport aux notations précédentes. Par exemple les flèches qui précèdent  $i_{0,1}$  sont :

$$i_{0,-l_1+1}, i_{0,-l_1+2}, \dots, i_{0,0}$$

On posera  $i_- = i_{0,0} \circ \dots \circ i_{0,1-l_1}$  et  $p_+ = p_{l_1+l_2,l_2} \circ \dots \circ p_{l_1+1,l_2}$ . On aura également besoin du carré composé :

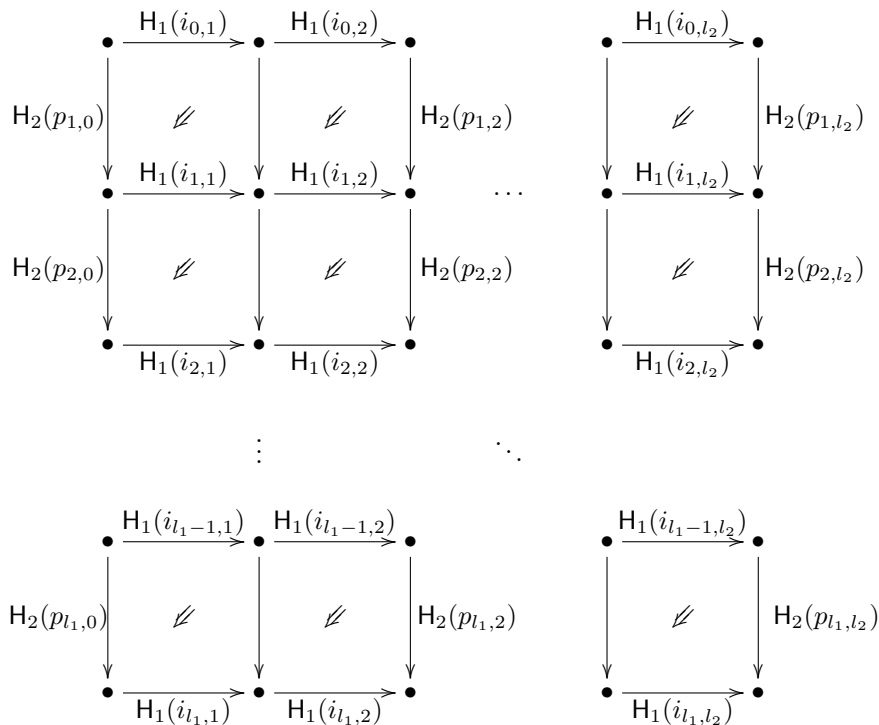


Finalement on pose  $i = i_0 \circ i_-$  et  $p = p_+ \circ p_{l_2}$ .

On définit un 2-isomorphisme :

$$H_2(p_{l_1,l_2}) \dots H_2(p_{1,l_2}) H_1(i_{0,l_2}) \dots H_1(i_{0,1}) \longrightarrow H_1(i_{l_1,l_2}) \dots H_1(i_{l_1,1}) H_2(p_{l_1,0}) \dots H_2(p_{1,0})$$

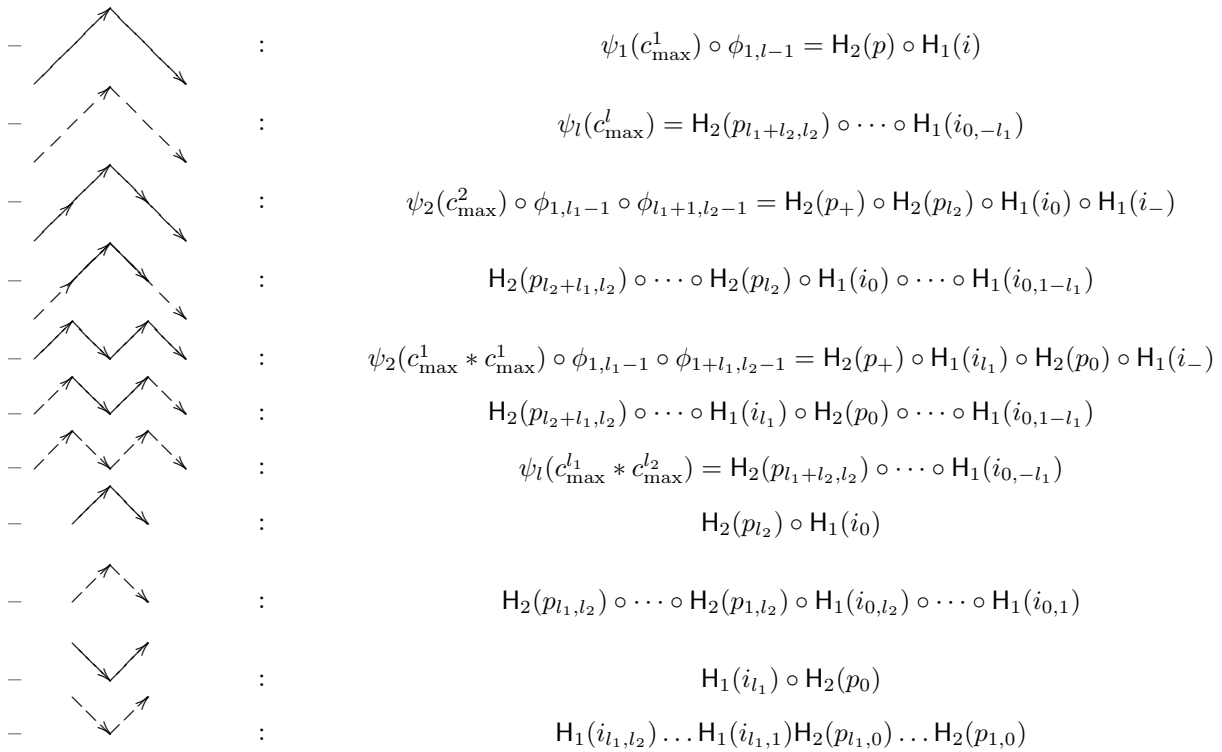
en prenant la composée du diagramme planaire :



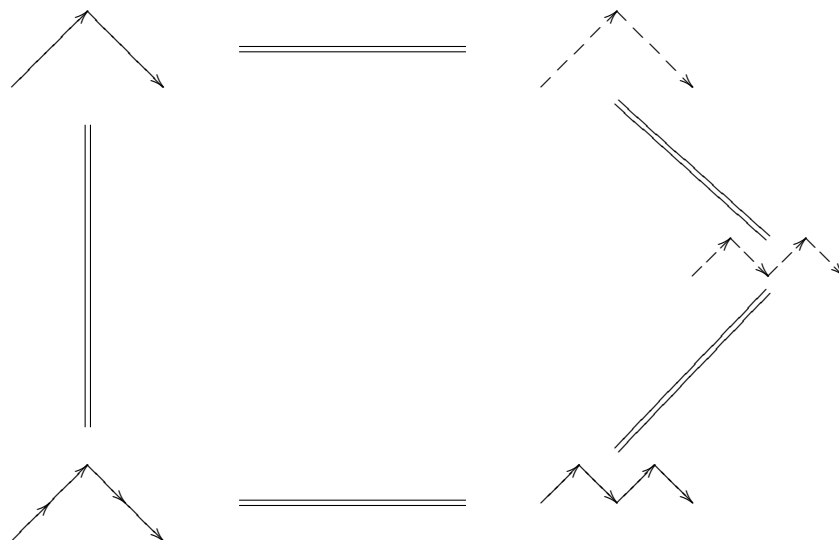
Nous affirmons qu'il suffit de prouver que le carré :

$$(1.18) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{H}_2(p_{l_1, l_2}) \cdots \mathrm{H}_2(p_{1, l_2}) \circ \mathrm{H}_1(i_{0, l_2}) \cdots \mathrm{H}_1(i_{0, 1}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_2(p_{l_2}) \circ \mathrm{H}_1(i_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}_1(i_{l_1, l_2}) \cdots \mathrm{H}_1(i_{l_1, 1}) \circ \mathrm{H}_2(p_{l_1, 0}) \cdots \mathrm{H}_2(p_{1, 0}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_1(i_{l_1}) \circ \mathrm{H}_2(p_0) \end{array}$$

est commutatif. Pour voir cela il est commode d'introduire un petit lexique afin de mieux visualiser l'effet des différentes transformations naturelles :

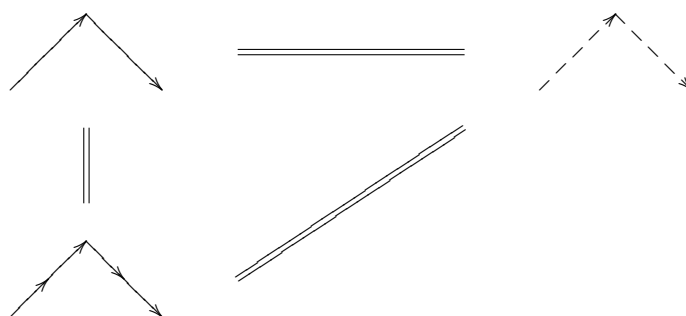


Avec ces notations le diagramme de l'énoncé appliqué à  $\mathcal{X}$  s'écrit sous la forme plus expressive suivante :

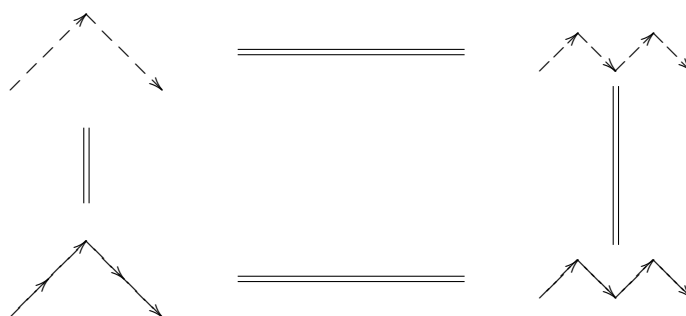




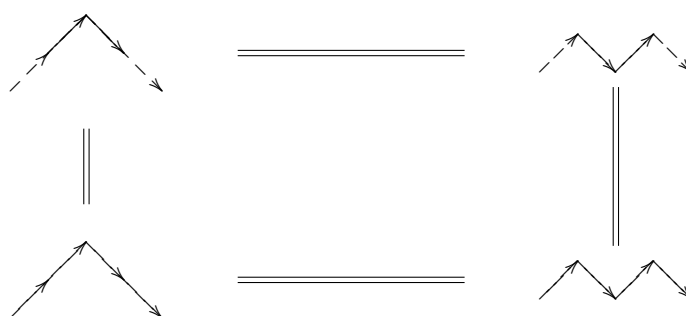
On voit en particulier que ce diagramme se factorise par un triangle commutatif :



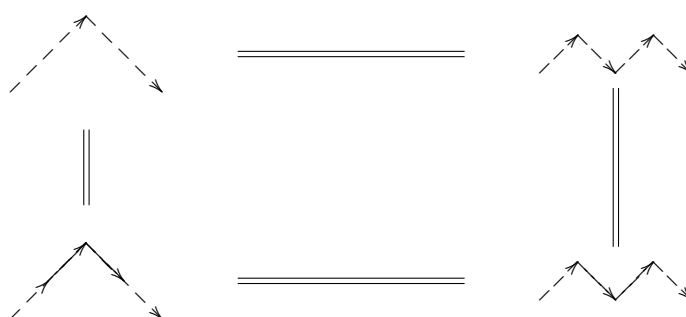
Il suffit donc de prouver que le carré :



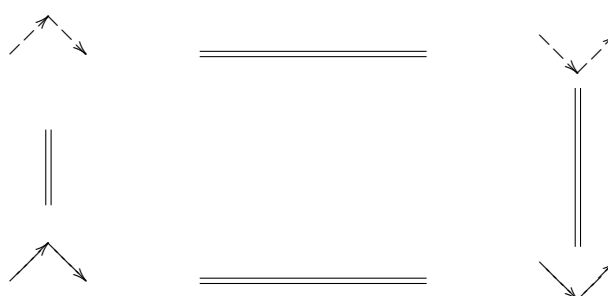
est commutatif. Mais à son tour ce carré se factorise par le carré commutatif :



On est donc ramené à prouver que le carré :



est commutatif. On voit donc qu'il suffit de prouver que le carré :



est commutatif. Mais ce carré n'est autre que le carré (1.18).

Pour terminer, il reste à prouver que le carré (1.18) est commutatif. La preuve de ce fait est laissée en exercice aux lecteurs. Il suffit d'utiliser le nombre de fois nécessaire les diagrammes solides de compatibilité des 2-isomorphismes  $a(\cdot)$  avec la composition des carrés commutatifs. C.Q.F.D

### 1.3.4 La construction du 2-foncteur $H$

Pour prolonger notre foncteur, on spécialise les résultats précédents pour  $k = 1, 2$  et  $3$ . On définit l'image  $\text{Im}(F)$  d'un foncteur  $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  par :

- $\text{Ob}(\text{Im}(F)) = \text{Ob}(\mathcal{A})$ ,
- pour  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , l'ensemble  $\text{hom}_{\text{Im}(F)}(A, B)$  est l'image de  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(B))$ .

Le lecteur vérifie facilement que ces données définissent bien un catégorie et que le foncteur  $F$  se factorise uniquement :

$$\mathcal{A} \longrightarrow \text{Im}(F) \longrightarrow \mathcal{B}$$

Le point clef est le lemme 1.3.8 ci-dessous.

**LEMME 1.3.8** — *Soit  $f : X \longrightarrow Y$  une flèche de  $\mathcal{C}$ . L'image de  $\Delta_1(f)$  par le foncteur  $\psi(c_{\max}^1)$  est une catégorie directe.*

DEMONSTRATION Étant donné deux objets :



et deux flèches  $c, d : W \longrightarrow V$  induisant un morphisme de  $\Delta_1(f)$ , il s'agit de montrer que  $\psi(c_{\max}^1)(c) = \psi(c_{\max}^1)(d)$ .

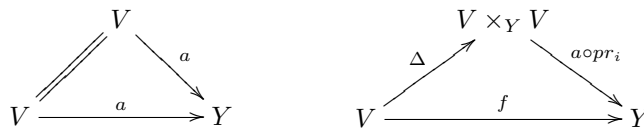
On forme les deux objets suivants :



avec  $\Delta$  le morphisme diagonal et  $pr_i$  la projection sur le  $i$ -ième facteur (pour  $i \in \{1, 2\}$ ). Il est clair que le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} W & \xleftarrow{pr_1} & W \times_Y W & \xrightarrow{pr_2} & W \\ c \downarrow & & \downarrow c \times d & & \downarrow d \\ V & \xleftarrow{pr_1} & V \times_Y V & \xrightarrow{pr_2} & V \end{array}$$

induit un diagramme commutatif dans  $\Delta_1(f)$ . Étant donné que  $\psi(c_{\max}^1)$  envoie les flèches de  $\Delta_1(f)$  sur des isomorphismes, on voit immédiatement qu'il suffit de considérer le cas où  $c$  et  $d$  sont les projections sur les premier et second facteur d'un produit fibré sur  $Y$ . On peut donc supposer que  $W = V \times_Y V$ . On se ramène immédiatement au cas où  $X = V$  et  $a = \text{id}$ . On a donc à comparer les deux morphismes  $\psi(c_{\max}^1)(pr_1)$  et  $\psi(c_{\max}^1)(pr_2)$  entre les  $\psi(c_{\max}^1)$  des deux objets :



Par définition,  $\psi(c_{\max}^1)(pr_i)$  est la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc} H(V) & \xrightarrow{H_1(\Delta)} & H(V \times_Y V) & \xrightarrow{H_2(a \circ pr_i)} & H(Y) \\ \parallel & & \downarrow H_2(pr_i) & \not\cong & \parallel \\ H(V) & \xrightarrow{=} & H(V) & \xrightarrow{H_2(a)} & H(Y) \end{array}$$

C'est aussi la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{H}(V) & \xrightarrow{\mathbf{H}_1(\Delta)} & \mathbf{H}(V \times_Y V) \\
 \parallel & \swarrow & \downarrow \mathbf{H}_2(pr_i) \\
 \mathbf{H}(V) & \xlongequal{\quad} & \mathbf{H}(V) \leftarrow \mathbf{H}_2(a \circ pr_i) \\
 \downarrow \mathbf{H}_2(a) & \searrow & \downarrow \mathbf{H}_2(a) \\
 \mathbf{H}(Y) & \xlongequal{\quad} & \mathbf{H}(Y)
 \end{array}$$

Étant donné que la face carrée identité coïncide avec la face déduite de l'échange  $a$  (voir à la fin des données  $B$  dans l'énoncé du théorème 1.3.1) on déduit que notre 2-morphisme est simplement la face carré :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{H}(V) & \xrightarrow{\mathbf{H}_1(\Delta)} & \mathbf{H}(V \times_Y V) \\
 \downarrow \mathbf{H}_2(a) & \swarrow & \downarrow \mathbf{H}_2(a \circ pr_i) \\
 \mathbf{H}(Y) & \xlongequal{\quad} & \mathbf{H}(Y)
 \end{array}$$

Cette face est bien indépendante de  $i \in \{1, 2\}$ .

C.Q.F.D

On va définir le 2-foncteur  $\mathbf{H}$ . Si  $f : X \longrightarrow Y$  est une flèche de  $\mathcal{C}$ , nous poserons :

$$\mathbf{H}(f) = \underline{\text{Lim}}_{\Delta_1(f)}(\Delta_1(f) \rightarrow \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X), \mathbf{H}(Y)))$$

Cette limite inductive existe en vue du lemme précédent et du fait que :

- le foncteur  $\psi(c_{\max}^1)$  envoie toute flèche de  $\Delta_1(f)$  sur un 2-isomorphisme de  $\mathfrak{D}$ ,
- la catégorie  $\Delta_1(f)$  est connexe.

En fait dans la suite on utilisera constamment les deux propriétés précédentes pour  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$ . Plus précisément :

- les foncteurs  $\psi(c)$ ,  $\psi(c) \circ \phi_i$ , ... etc envoient toute flèche de  $\Delta_k$  sur un 2-isomorphisme de  $\mathfrak{D}$ ,
- les catégories  $\Delta_k$  sont connexes et leur image par ces foncteurs sont des sous-catégories directes.

Notons que la propriété de l'image d'être directe se déduit immédiatement du lemme 1.3.8 et du fait que les foncteurs en question sont naturellement isomorphes à  $\psi(c_{\max}^1) \circ (\Delta_k \rightarrow \Delta_1)$ .

Pour une suite de morphismes composables dans  $\mathcal{C}$  :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

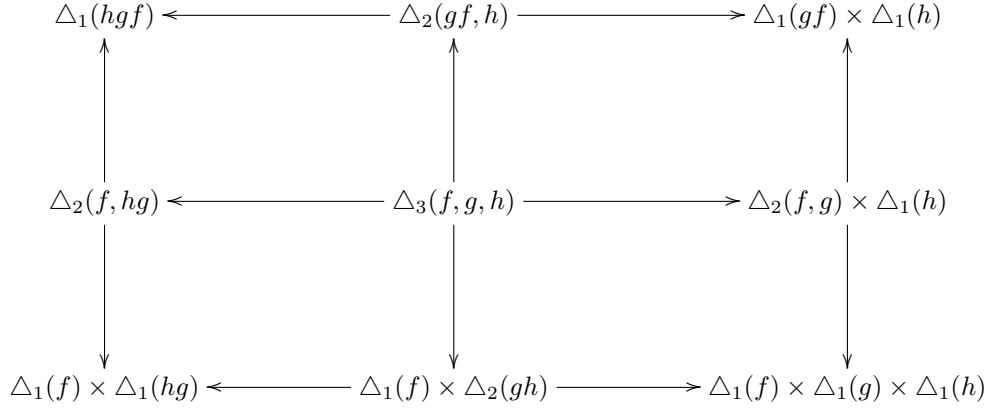
on prendra comme 2-isomorphisme de connexion la composée  $c(f, g)$  des 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{H}(g \circ f) = \underline{\text{Lim}}_{\Delta_1(g \circ f)}(\Delta_1(g \circ f) \rightarrow \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X), \mathbf{H}(Z))) \\
 \parallel \\
 \underline{\text{Lim}}_{\Delta_2(f, g)}(\Delta_2(f, g) \rightarrow \Delta_1(g \circ f) \rightarrow \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X), \mathbf{H}(Z))) \\
 \downarrow \sim \\
 \underline{\text{Lim}}_{\Delta_2(f, g)}(\psi_2(c_{\max}^2) : \Delta_2(f, g) \rightarrow \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X), \mathbf{H}(Z))) \\
 \sim \downarrow u(c_{\max}^2, c^1 * c^1) \\
 \underline{\text{Lim}}_{\Delta_2(f, g)}(\psi(c^1 * c^1) : \Delta_2(f, g) \rightarrow \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X), \mathbf{H}(Z))) \\
 \parallel \\
 \underline{\text{Lim}}_{\Delta_1(f) \times \Delta_1(g)}(\text{Composition} \circ (\psi(c_1) \times \psi(c_1))) \\
 \parallel \\
 \mathbf{H}(g) \circ \mathbf{H}(f)
 \end{array}$$

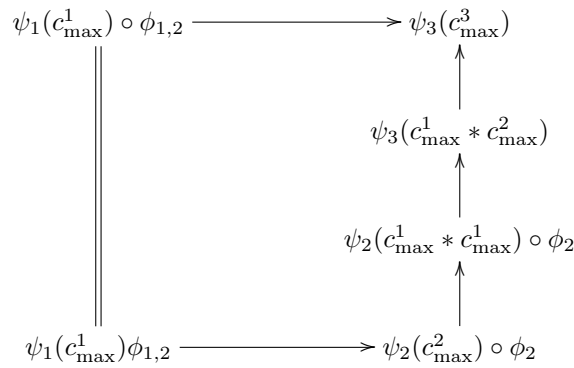
Pour montrer que ceci définit bien un 2-foncteur, il reste à vérifier la relation de cocycle entre les  $c(\cdot, \cdot)$ . Plus précisément pour une suite :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$$

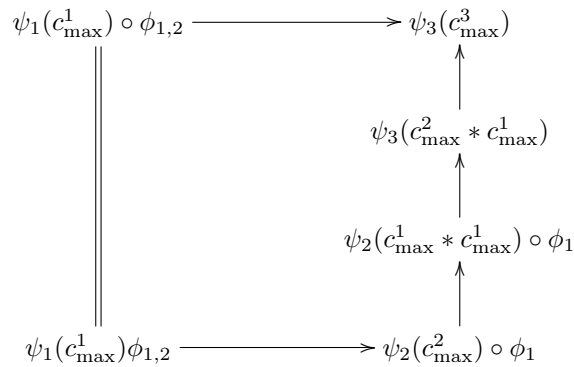
il faut prouver l'égalité :  $c(f, hg) \circ c(g, h) = c(f, g) \circ c(gf, h)$ . Pour cette fin, on considère le diagramme commutatif de catégories :



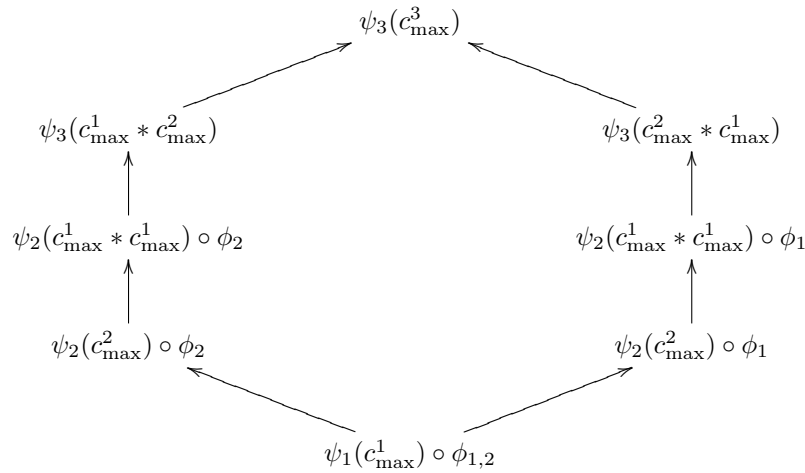
Spécialisons le diagramme du lemme 1.3.7 aux cas  $k = 3$  et  $(k_1, k_2) = (1, 2)$  ou  $(2, 1)$ . On obtient ainsi deux diagrammes commutatifs :



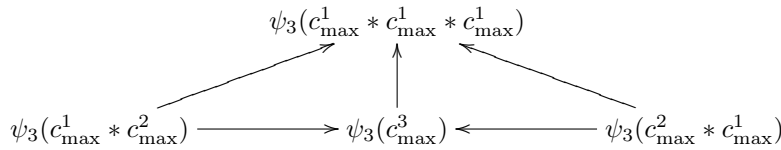
et



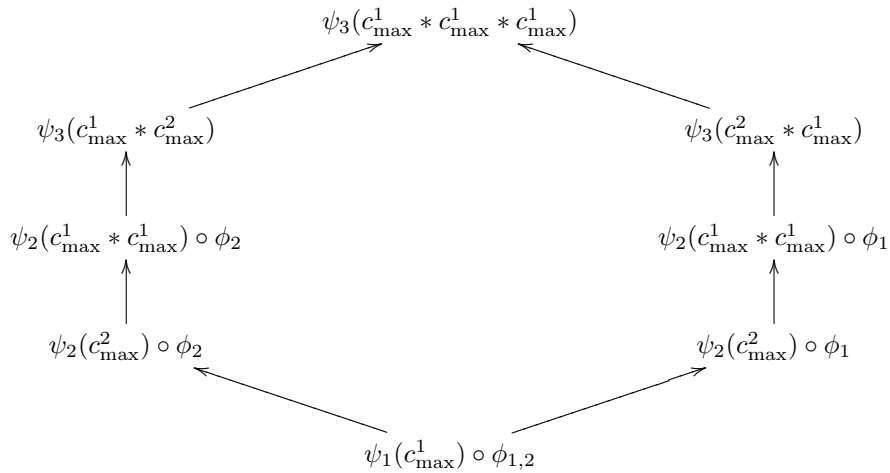
En identifiant les flèches horizontales supérieures des deux diagrammes ci-dessus, on obtient le diagramme commutatif suivant :



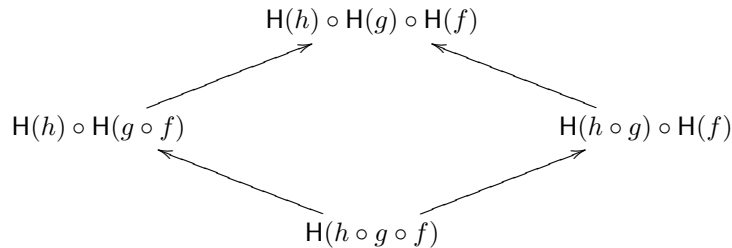
En utilisant le diagramme commutatif :



On obtient le diagramme commutatif :



En passant à la limite inductive, ceci donne alors le diagramme commutatif :



Le fait que cela coïncide avec le diagramme de cocycle est évident. Le théorème 1.3.1 est prouvé.

### 1.3.5 Les données $A$ du critère 1.3.1 dans le cas géométrique

Soit  $S$  un schéma de base. Dans la littérature on peut trouver plusieurs définitions des  $S$ -schémas "projectifs" et "quasi-projectifs". La meilleure (du point de vue de l'auteur) est celle de Grothendieck [EGA II]. Malheureusement cette définition n'est pas très adaptée a notre construction que si l'on suppose  $S$  raisonnable. Le lecteur doit donc faire un choix : se restreindre à des schémas de bases raisonnables ou prendre une notion moins bonne de  $S$ -schémas projectifs. Ainsi dans la suite la catégorie  $(Sch/S)$  désignera l'une des deux catégories suivantes :

- Lorsque  $S$  est quelconque, on peut prendre pour  $(\text{Sch}/S)$  la catégorie des  $S$ -schémas quasi-projectifs au sens du Hartshorne [Har77], i.e., les  $S$ -schémas de présentation finie qui admettent une immersion dans  $\mathbb{P}_S^n$  pour  $n$  assez grand.
- Si on accepte de supposer que  $S$  est un schéma admettant une famille ample de fibrés en droites, on peut prendre pour  $(\text{Sch}/S)$  la catégorie des  $S$ -schémas quasi-projectifs au sens Grothendieck [EGA II], i.e., les  $S$ -schémas de présentation finie qui admettent une immersion dans  $\mathbb{P}(\mathcal{M})$  avec  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_S$ -module cohérent (pas forcément localement libre).

Quelque soit le choix adopté on a le lemme suivant (voir [SGA 6], exposé : "Existence de résolutions globales" par L. Illusie) :

**LEMME 1.3.9** — *Tout morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  dans  $(\text{Sch}/S)$  se factorise de la manière suivante :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}(\mathcal{L}) \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & Y \end{array}$$

avec  $i$  une immersion,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -module localement libre et  $p$  la projection canonique.

Dans la section 1.6 on appliquera le théorème 1.3.1 dans le cas où  $\mathcal{C} = (\text{Sch}/S)$ ,  $\mathcal{C}_1 = (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}}$  la sous-catégorie où les flèches sont les immersions fermées, et  $\mathcal{C}_2 = (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$  la sous-catégorie où les flèches sont les morphismes lisses. Il est clair que ces catégories vérifient les trois premières conditions qui assurent la validité du théorème 1.3.1.

## 1.4 Énoncé du résultat principal. Quelques préparations

### 1.4.1 Énoncé du résultat principal

Soit  $S$  un schéma de base quasi-compact et séparé (mais non nécessairement noethérien). Tous les  $S$ -schémas considérés dans la suite seront quasi-compacts et de présentation finie. On notera  $(\text{Sch}/S)$  la catégorie des  $S$ -schémas quasi-projectifs (voir la sous-section 1.3.5 pour plus de détails). On notera également  $\mathfrak{TR}$  la 2-catégorie des catégories triangulées. Dans toute la suite du chapitre on fixera un 2-foncteur contravariant :

$$H^* : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

Pour  $X$  un  $S$ -schéma de  $(\text{Sch}/S)$ , on notera simplement  $H(X)$  la catégorie triangulée  $H^*(X)$ . On notera également  $f^*$  le 1-morphisme  $H^*(f)$  pour  $f$  un morphisme dans  $(\text{Sch}/S)$  et  $c^*$  les 2-isomorphismes de connexions  $c^*(f, g) : (g \circ f)^* \xrightarrow{\sim} f^* \circ g^*$  pour  $f$  et  $g$  deux morphismes composables dans  $\text{Sch}/S$ . Le 1-morphisme  $f^*$  est un foncteur triangulé par la définition de la 2-catégorie  $\mathfrak{TR}$ . Comme c'est expliqué dans les notes de Deligne [Del01], on peut sans restreindre la généralité, demander à  $H^*$  d'être *strictement unital*, i.e.,  $c^*(\text{Id}, f)$  et  $c^*(f, \text{Id})$  sont l'identité. Dans la suite tous nos 2-foncteurs seront implicitement supposés unitaux. On considère les six propriétés suivantes :

1.  $H(\emptyset) = 0$  (la catégorie triangulée triviale).
2. (Adjoint à droite) Pour tout morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  dans  $(\text{Sch}/S)$ , le 1-morphisme  $f^* : H(Y) \longrightarrow H(X)$  admet un adjoint à droite  $f_*$  (i.e.,  $f_*$  est un foncteur triangulé qui est adjoint à droite du foncteur  $f^*$ ). De plus, pour  $i$  une immersion (pas forcément fermée) le 2-morphisme de counité :  $i^*i_* \longrightarrow \text{Id}$  est un 2-isomorphisme.
3. (Adjoint à gauche) Si  $f : X \longrightarrow Y$  est un  $S$ -morphisme lisse dans  $(\text{Sch}/S)$ , le 1-morphisme  $f^*$  admet un adjoint à gauche  $f_{\#}$ . De plus pour tout carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec  $f$  lisse, le 2-morphisme d'échange (qui sera défini dans la sous-section 1.4.5) :  $f'_{\#}g'^* \longrightarrow g^*f_{\#}$  est un 2-isomorphisme.

4. (Localité) Soient  $j : U \longrightarrow X$  une immersion ouverte dans  $\text{Sch}/S$  et  $i : Z \longrightarrow X$  une immersion fermée complémentaire dans  $\text{Sch}/S$ . La paire  $(j^*, i^*)$  est conservative.

5. (Invariance par homotopie) Si  $p : \mathbb{A}_X^1 \longrightarrow X$  est la projection canonique, le 2-morphisme d'unité :

$$\text{Id} \longrightarrow p_*p^*$$

est un 2-isomorphisme.

6. (Stabilité) Si  $s$  est la section nulle de la projection canonique  $p : \mathbb{A}_X^1 \longrightarrow X$ , l'endofoncteur  $p_{\#}s_*$  de  $\mathbf{H}(X)$  est une équivalence de catégories.

**DEFINITION 1.4.1** — *Nous dirons que le 2-foncteur  $\mathbf{H}$  est un 2-foncteur homotopique stable s'il vérifie les axiomes 1 à 6 ci-dessus.*

Dans la suite du chapitre, le 2-foncteur  $\mathbf{H}$  sera supposé un 2-foncteur homotopique stable. On montrera alors, que  $\mathbf{H}^*$  s'étend d'une façon "unique" en un foncteur croisé au sens de 1.2.12. De plus on aura  $f_* = f_!$  pour  $f$  projectif et  $f^! = f^*$  à une équivalence près pour  $f$  lisse. Ce résultat a été annoncé par Voevodsky (non publié). Voici l'énoncé précis de ce qu'on prouvera :

**SCHOLIE 1.4.2** — *Supposons donné un 2-foncteur homotopique stable :*

$$\mathbf{H}^* : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{R}$$

1- Il existe<sup>3</sup> :

- un 2-foncteur contravariant  $\mathbf{H}^! : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{R}$ ,
- un 2-foncteur covariant  $\mathbf{H}_* : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{R}$  qui est un adjoint global à droite de  $\mathbf{H}^*$ ,
- un 2-foncteur covariant  $\mathbf{H}_! : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{R}$  qui est un adjoint global à gauche de  $\mathbf{H}^!$ ,
- une structure de foncteur croisé sur le quadruplet  $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_*, \mathbf{H}_!, \mathbf{H}^!)$  relativement à la classe des carrés cartésiens de  $(\text{Sch}/S)$ .

2- Pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$  et tout  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent localement libre  $\mathcal{M}$ , il existe une autoéquivalence  $\text{Th}(\mathcal{M})$  de la restriction du foncteur croisé précédent à la catégorie  $(\text{Sch}/X)$ . Si le  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{M}$  s'insère dans une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

on dispose d'un isomorphisme d'autoéquivalences de foncteurs croisés :

$$\text{Th}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \text{Th}(\mathcal{L}) \circ \text{Th}(\mathcal{N})$$

3- Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un  $S$ -morphisme lisse. Notons  $\Omega_f$  le  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre des différentielles relatives. Il existe alors des 2-isomorphismes :

- $f_! \xrightarrow{\sim} f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_f)$
- $f^! \xrightarrow{\sim} \text{Th}(\Omega_f)f^*$

avec  $\text{Th}^{-1}(\Omega_f)$  l'équivalence inverse à  $\text{Th}(\Omega_f)$ .

4- Pour tout morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  dans  $(\text{Sch}/S)$  il existe un 2-morphisme :  $f_! \longrightarrow f_*$ . Lorsque  $f$  est projectif ce 2-morphisme est inversible.

5- On a le théorème de changement de base pour un morphisme projectif, i.e., pour tout carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

dans  $(\text{Sch}/S)$  avec  $f$  un  $S$ -morphisme projectif, les 2-morphismes d'échange :

- $g^*f_* \xrightarrow{\sim} f'_*g'^*$ ,
- $f'_!g'^! \xrightarrow{\sim} g^!f_!$ .

sont inversibles.

Dans le reste de cette section nous dériverons quelques conséquences plus ou moins directes des axiomes.

<sup>3</sup>Nous ignorons si ces données sont déterminés par le 2-foncteur  $\mathbf{H}^*$  à un unique isomorphisme près.

### 1.4.2 Les 2-morphismes de connexions. Unités et counités des adjonctions

Cette sous-section sert à fixer les notations. Avant de commencer la liste des ingrédients de base qui serviront à construire le foncteur croisé annoncé dans la sous-section précédente, on introduit deux sous-catégories de  $(\text{Sch}/S)$  qui joueront un rôle important d'ici la fin de la preuve.

- La sous-catégorie  $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$ , dont les objets sont les objets de  $(\text{Sch}/S)$  et les flèches sont les  $S$ -morphisms lisses.
- La sous-catégorie  $(\text{Sch}/S)^{\text{Imm}}$ , dont les objets sont les objets de  $(\text{Sch}/S)$  et les flèches sont les  $S$ -immersions fermées.

Si  $F$  est un 2-foncteur de source  $(\text{Sch}/S)$  on désignera par  ${}^{\text{Liss}}F$  et  ${}^{\text{Imm}}F$  les restrictions de  $F$  à  $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$  et  $(\text{Sch}/S)^{\text{Imm}}$  respectivement. Parfois, on notera un 2-foncteur  $F$  qui n'est défini que sur  $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$  ou sur  $(\text{Sch}/S)^{\text{Imm}}$  par  ${}^{\text{Liss}}F$  ou  ${}^{\text{Imm}}F$  pour mettre en évidence le fait qu'il est défini seulement sur une sous-catégorie de  $(\text{Sch}/S)$ .

Soit maintenant une suite :  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  de morphismes dans  $(\text{Sch}/S)$ . Rappelons qu'on a noté :

$$c^* = c^*(f, g) : (g \circ f)^* \xrightarrow{\sim} f^* \circ g^*$$

le 2-isomorphisme de connexion du 2-foncteur  $H^*$  associé à la suite des  $S$ -morphisms composables  $(f, g)$ .

D'après 1.1.17 et l'axiome 2 de la sous-section précédente il existe (à un isomorphisme unique près) un adjoint à droite global au 2-foncteur  $H^*$ . On en fixe un qu'on notera :

$$H_* : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{A}$$

Pour une suite  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  de morphismes dans  $(\text{Sch}/S)$  on notera :

$$c_* = c_*(f, g) : (g \circ f)_* \xrightarrow{\sim} g_* \circ f_*$$

le 2-isomorphisme de connexion de ce 2-foncteur associé à la suite de  $S$ -morphisms composables  $(f, g)$ .

De même, par l'axiome 3, il existe (à un isomorphisme unique près) un adjoint à gauche global au 2-foncteur  ${}^{\text{Liss}}H^*$ . On en fixe un qu'on notera :

$${}^{\text{Liss}}H_{\#} : (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

Pour une suite  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  de  $S$ -morphisms lisses dans  $(\text{Sch}/S)$  on notera :

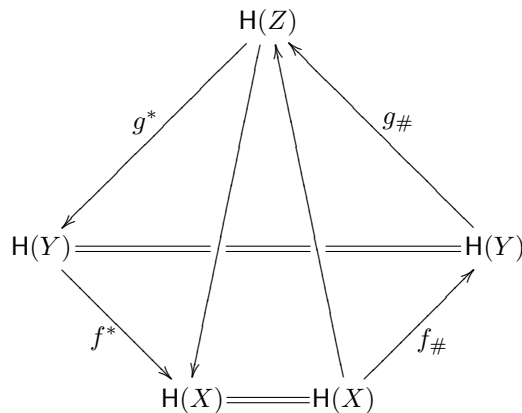
$$c_{\#} = c_{\#}(f, g) : (g \circ f)_{\#} \xrightarrow{\sim} g_{\#} \circ f_{\#}$$

le 2-isomorphisme de connexion de ce 2-foncteur associé à la suite de  $S$ -morphisms lisses composables  $(f, g)$ .

Soit maintenant  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme dans  $(\text{Sch}/S)$ . On notera  $\eta_*(f) : \text{id}_{H(Y)} \longrightarrow f_* f^*$  et  $\delta_*(f) : f^* f_* \longrightarrow \text{id}_{H(X)}$  les 2-morphismes d'unité et de counité de l'adjonction entre  $f^*$  et  $f_*$ .

De même, lorsque  $f$  est lisse, on notera  $\eta_{\#}(f) : \text{id} \longrightarrow f^* f_{\#}$  et  $\delta_{\#}(f) : f_{\#} f^* \longrightarrow \text{id}$  les 2-morphismes d'unité et de counité de l'adjonction entre  $f_{\#}$  et  $f^*$ .

On a les diagrammes solides commutatifs standards exprimant les compatibilités des 2-morphismes d'unité et de counité avec les 2-isomorphismes de connexions des différents 2-foncteurs. Voici un exemple (type) de ces diagrammes (pour les unités de l'adjonction globale entre  ${}^{\text{Liss}}H_{\#}$  et  ${}^{\text{Liss}}H^*$  et une suite de  $S$ -morphisms lisses  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ) :





### 1.4.3 "Localement pour la topologie de Nisnevich"

La proposition suivante est un corollaire simple de l'axiome de localité :

**PROPOSITION 1.4.3** — Soient  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $(u_i : U_i \longrightarrow X)_i$  un recouvrement Nisnevich fini de  $X$ . Soit  $A$  un objet de  $\mathbf{H}(X)$ . On suppose que  $u_i^*A$  est nul pour tous les indices  $i$ . Alors  $A$  est nul.

DEMONSTRATION Le recouvrement Nisnevich  $(u_i : U_i \longrightarrow X)_i$  étant fini et nos schémas étant de présentation finie sur  $S$ , on peut trouver une suite finie et croissante d'ouverts Zariski quasi-compacts :

$$\emptyset = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{N-1} \subset V_N = X, \quad \text{pour un certain entier naturel } N,$$

telle que pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ , le recouvrement  $(u_i)_i$  est sindé au dessus d'un sous-schéma fermé de présentation finie  $Z_n \subset V_n$  complémentaire de l'ouvert  $V_{n-1} \subset V_n$ . Plus précisément, il existe un triangle commutatif :

$$(1.19) \quad \begin{array}{ccc} & \coprod_i U_i & \\ & \nearrow & \downarrow \\ Z_n & \longrightarrow & X \end{array}$$

Pour prouver celà, on se ramène immédiatement au cas où  $X$  est noethérien et réduit. L'existence des  $V_n$  s'obtient alors par récurrence noethérienne.

Notons  $z_n$  l'immersion localement fermée de  $Z_n$  dans  $X$ . Par hypothèse, les objets  $u_i^*A$  sont nuls. On déduit alors, en utilisant la factorisation (1.19), que  $z_n^*A = 0$  pour  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Si  $v_n$  désigne l'immersion ouverte de  $V_n$  dans  $X$ , l'axiome 4 (de localité) appliqué à la paire  $(V_{n-1}, Z_n)$  montre l'implication :

$$(v_{n-1}^*A = 0) \implies (v_n^*A = 0) \quad \text{pour } n \in \{1, \dots, N\}$$

Mais  $v_0^*A = 0$ , étant donné que  $v_0$  est l'immersion du schéma  $\emptyset$  (utiliser l'axiome 1). Par une récurrence immédiate, on déduit que  $v_N^*A = 0$ , ce qui termine la preuve. C.Q.F.D

On a le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 1.4.4** — Soient  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $(u_i : U_i \longrightarrow X)_i$  un recouvrement Nisnevich fini de  $X$ . Soit  $a : A \longrightarrow B$  une flèche dans  $\mathbf{H}(X)$ . On suppose que  $u_i^*(a) : u_i^*A \longrightarrow u_i^*B$  est un isomorphisme pour tous les indices  $i$ . Alors  $a$  est un isomorphisme.

DEMONSTRATION On choisit un triangle distingué basé sur  $a$  :

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow$$

Il suffit alors de prouver que  $C$  est nul. Mais comme les  $u_i^*$  sont des foncteurs triangulés on a des triangles distingués :

$$u_i^*A \longrightarrow u_i^*B \longrightarrow u_i^*C \longrightarrow$$

La première flèche du triangle est un isomorphisme par hypothèse. On en déduit que les  $u_i^*C$  sont tous nuls. Donc par la proposition 1.4.3 l'objet  $C$  est nul. Ceci prouve que  $a$  est un isomorphisme. C.Q.F.D

### 1.4.4 Le foncteur prolongement par le vide. Le foncteur sections à support

On commence par une définition générale qui sera pratique dans la suite :

**DEFINITION 1.4.5** — Supposons donnés trois 1-morphismes :

$$a, b, c : T_1 \longrightarrow T_2$$

dans  $\mathfrak{T}\mathfrak{R}$ . En d'autres termes,  $T_1$  et  $T_2$  sont deux catégories triangulées et  $a, b$  et  $c$  sont trois foncteurs triangulés de  $T_1$  dans  $T_2$ . Une suite de 2-morphismes composables :

$$a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\gamma} a[+1]$$

est appelée un 2-triangle distingué lorsque pour tout objet  $P$  de  $T_1$  la suite :

$$a(P) \xrightarrow{\alpha} b(P) \xrightarrow{\beta} c(P) \xrightarrow{\gamma} a(P)[+1]$$

est un triangle distingué de  $T_2$ .

Le lemme qui suit est une conséquence de l'axiome de localité (se référer aux notes de Deligne [Del01] pour plus de détails). Le principe de démonstration est le même que celui de la démonstration de la proposition 1.4.9.

**LEMME 1.4.6** — Soient  $j : U \longrightarrow X$  une immersion ouverte (entre  $S$ -schémas quasi-projectifs) et  $i : Z \longrightarrow X$  une immersion fermée complémentaire. Il existe un unique 2-morphisme  $\varphi$  tel que la suite :

$$j_{\#}j^* \xrightarrow{\delta_{\#}^*(j)} \mathrm{Id}_{\mathrm{H}(X)} \xrightarrow{\eta_*^*(i)} i_*i^* \xrightarrow{\varphi} j_{\#}j^*[+1]$$

soit un 2-triangle distingué.

Le lemme suggère alors de poser pour  $j : U \longrightarrow X$  une immersion ouverte,  $j_! = j_{\#} : \mathrm{H}(U) \longrightarrow \mathrm{H}(X)$  et  $j^! = j^* : \mathrm{H}(X) \longrightarrow \mathrm{H}(U)$ . On a ainsi la chaîne d'adjonctions habituelle :

$$j_! \quad , \quad j^! = j^* \quad , \quad j_*$$

et le triangle distingué habituel :

$$j_!j^!A \longrightarrow A \longrightarrow i_*i^*A \xrightarrow{[+1]} j_!j^!A[+1]$$

Le 1-morphisme  $j_!$  est appelé classiquement *prolongement par le vide*.

On garde les notations de 1.4.6. On va construire un foncteur  $i^! : \mathrm{H}(X) \longrightarrow \mathrm{H}(Z)$  adjoint à droite du foncteur  $i_* : \mathrm{H}(Z) \longrightarrow \mathrm{H}(X)$ . C'est le foncteur 'sections à support dans  $Z$ '. Si  $A \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X))$  on voudrait avoir un triangle distingué dans  $\mathrm{H}(X)$  :

$$i_*i^!A \longrightarrow A \longrightarrow j_*j^*A \xrightarrow{[+1]} i_*i^!A[+1]$$

L'idée est donc de définir  $i^!A$  comme étant  $i^* \mathrm{Cône}(A \rightarrow j_*j^*A)[-1]$ . La difficulté est de rendre cette construction fonctorielle. Pour cela on a les deux lemmes qui suivent :

**LEMME 1.4.7** — Si  $i$  et  $j$  sont comme dans le lemme 1.4.6, alors le 1-morphisme  $j^*i_*$  est nul.

DEMONSTRATION Ce 1-morphisme est un adjoint à droite de  $i^*j_{\#}$ . Il suffit donc de prouver que ce dernier est nul. Mais le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X \end{array}$$

est cartésien. Donc par l'axiome 3, on a :  $i^*j_{\#} \simeq \emptyset_{\#}\emptyset^* = 0$  car la catégorie  $\mathrm{H}(\emptyset)$  est nulle par l'axiome 1. C.Q.F.D

**LEMME 1.4.8** — Supposons choisi pour tout objet  $A$  de  $\mathrm{H}(X)$  un triangle distingué dans  $\mathrm{H}(X)$  :

$$A \longrightarrow j_*j^*A \xrightarrow{\theta} C(A) \longrightarrow A[+1]$$

Alors, pour tout morphisme  $\alpha : A \longrightarrow B$  dans  $\mathrm{H}(X)$  il existe un unique morphisme  $C(\alpha) : C(A) \longrightarrow C(B)$  rendant commutatif le carré :

$$\begin{array}{ccc} C(A) & \longrightarrow & A[+1] \\ C(\alpha) \downarrow & & \downarrow \alpha[+1] \\ C(B) & \longrightarrow & B[+1] \end{array}$$

Ce même morphisme rend également le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & j_*j^*A & \xrightarrow{\theta} & C(A) & \longrightarrow & A[+1] \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & C(\alpha) \downarrow & & \downarrow \alpha[+1] \\ B & \longrightarrow & j_*j^*B & \xrightarrow{\theta} & C(B) & \longrightarrow & B[+1] \end{array}$$

commutatif. Les associations :  $A \rightarrow C(A)$  et  $\alpha \rightarrow C(\alpha)$  définissent alors un endofoncteur triangulé de  $\mathbf{H}(X)$ .

DEMONSTRATION L'existence de  $C(\alpha)$  rendant le deuxième diagramme commutatif, est assurée par les axiomes des catégories triangulées. Il s'agit de prouver l'unicité de  $C(\alpha)$  rendant le premier carré commutatif. Pour cela on prend une autre flèche  $C'(\alpha)$  rendant ce carré commutatif. Le morphisme  $\beta = C'(\alpha) - C(\alpha)$  se trouve alors dans le noyau du morphisme :  $\text{hom}(C(A), C(B)) \longrightarrow \text{hom}(C(A), B[+1])$ . Mais on a une suite exacte de groupes abéliens :

$$\text{hom}(C(A), j_* j^* B) \longrightarrow \text{hom}(C(A), C(B)) \longrightarrow \text{hom}(C(A), B[+1])$$

Donc pour prouver que  $\beta$  est nul, il suffira de prouver que  $\text{hom}(C(A), j_* j^* B) = 0$ . Par adjonction, il suffit de prouver que  $\text{hom}(j^* C(A), j^* B) = 0$ . Mais en appliquant  $j^*$  au triangle de l'énoncé on obtient :

$$j^* A \longrightarrow j^* j_* j^* A \longrightarrow j^* C(A) \longrightarrow j^* A[+1]$$

Comme  $j$  est une immersion, le morphisme d'adjonction :  $j^* j_* j^* A \longrightarrow j^* A$  est un isomorphisme. Comme c'est une rétraction à  $j^* A \longrightarrow j^* j_* j^* A$  ce dernier est un isomorphisme et  $j^* C(A) = 0$ .

L'unicité de  $C(\alpha)$  entraîne facilement que  $A \rightarrow C(A)$  définit un foncteur de  $\mathbf{H}(X)$  dans lui même. Pour voir que c'est un foncteur triangulé, on utilise bien sûr l'axiome de l'octaèdre. Les détails sont laissés aux lecteurs. C.Q.F.D

**PROPOSITION 1.4.9** — 1- Pour  $i : Z \longrightarrow X$  il existe un 1-morphisme  $i^! : \mathbf{H}(X) \longrightarrow \mathbf{H}(Z)$  et un 2-triangle distingué :

$$i_* i^! \xrightarrow{\delta_*^!} \text{Id}_{\mathbf{H}(X)} \xrightarrow{\eta_*^*} j_* j^* \xrightarrow{\theta} i_* i^! A[+1]$$

De plus le couple formé du foncteur  $i^!$  ainsi que le 2-triangle ci-dessus est unique à un isomorphisme unique près.

2- Si  $\alpha : A \longrightarrow B$  est une flèche de  $\mathbf{H}(X)$  le morphisme  $i_* i^! (\alpha) : i_* i^! A \longrightarrow i_* i^! B$  est l'unique morphisme de  $\mathbf{H}(Y)$  rendant le carré :

$$\begin{array}{ccc} i_* i^! A & \longrightarrow & A \\ i_* i^! \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ i_* i^! B & \longrightarrow & B \end{array}$$

commutatif. De plus il fournit un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} i_* i^! A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & j_* j^* A & \longrightarrow & i_* i^! A[+1] \\ i_* i^! \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & j_* j^* \alpha \downarrow & & \downarrow i_* i^! \alpha \\ i_* i^! B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & j_* j^* A & \longrightarrow & i_* i^! B[+1] \end{array}$$

3- Enfin, le 1-morphisme  $i^!$  est adjoint à droite du 1-morphisme  $i_*$ . Le 2-morphisme de counité :  $i_* i^! \longrightarrow \text{id}$  est celui qui figure dans le 2-triangle distingué. Le 2-morphisme d'unité est un 2-isomorphisme.

DEMONSTRATION Il reste à prouver le dernier point. Montrons que  $i^!$  est adjoint à droite du foncteur  $i_*$ . Calculons pour cela le groupe abélien :  $\text{hom}(U, i^! A)$  pour  $U \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Z))$  et  $A \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$ . Par la dernière partie de l'axiome 2 on a :  $\text{hom}(U, i^! A) = \text{hom}(i_* U, i_* i^! A)$ . Ainsi notre groupe s'insère dans une suite exacte longue :

$$\text{hom}^{-1}(i_* U, j_* j^* A) \longrightarrow \text{hom}(U, i^! A) \longrightarrow \text{hom}(i_* U, A) \longrightarrow \text{hom}(i_* U, j_* j^* A)$$

On voit donc qu'il suffit de montrer que  $\text{hom}^k(i_* U, j_* j^* A) = 0$  pour  $k = 0, -1$ . Comme  $U$  est un objet général de  $\mathbf{H}(Z)$ , il suffit alors de prouver que  $\text{hom}(i_* U, j_* j^* A) = 0$ . Mais  $j_*$  admet  $j^*$  pour adjoint à gauche. On en déduit que  $\text{hom}(i_* U, j_* j^* A) = \text{hom}(j^* i_* U, j^* A) = 0$  car  $j^* i_* = 0$  par le lemme 1.4.7. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 1.4.10** — Il existe à un unique isomorphisme près un 2-foncteur :

$$\text{ImmH}^! : (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{I}\mathfrak{R}$$

qui soit un adjoint global à droite du 2-foncteur  $\text{ImmH}_*$ . On notera  $c^!(f, g)$  les 2-isomorphismes de connexion de ce 2-foncteur.

### 1.4.5 Une structure de foncteurs croisés sur $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_*, \text{Liss } \mathbf{H}_\#, \text{Liss } \mathbf{H}^*)$

Notre point de départ est la structure d'échange triviale relativement à la classe des carrés commutatifs de  $(\text{Sch}/S)$  sur le couple  $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}^*)$ . Cette structure d'échange est induite par les 2-isomorphismes de connexion. En effet il s'agit de deux isoéchanges inverses l'un de l'autre de type  $\swarrow$  et  $\searrow$  qui à un carré commutatif de  $S$ -schéma :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

associe respectivement les deux 2-isomorphismes inverses l'un de l'autre :

$$\begin{aligned} g'^* \circ f^* &\xrightarrow{c^*(g',f)^{-1}} (f \circ g')^* \equiv (g \circ f')^* \xrightarrow{c^*(f',g)} f'^* \circ g^* \\ f'^* \circ g^* &\xrightarrow{c^*(f',g)^{-1}} (g \circ f')^* \equiv (f \circ g')^* \xrightarrow{c^*(g',f)} g'^* \circ f^* \end{aligned}$$

On définit à l'aide de la proposition 1.2.5 une structure d'échange de type  $\swarrow$  sur le couple  $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_*)$  à partir de la structure d'échange de type  $\searrow$  sur  $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}^*)$  et l'adjonction globale entre  $\mathbf{H}_*$  et  $\mathbf{H}^*$ . Si  $(C)$  est un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

on appellera  $Ex_*^*(C)$  le 2-morphisme d'échange :

$$Ex_*^*(C) : g^* f_* \longrightarrow f'_* g'^*$$

Par définition  $Ex_*^*(C)$  est la composée :

$$g^* f_* \xrightarrow{\eta_*^*(f')} f'_* f'^* g^* f_* \xrightarrow{c^*(f',g)^{-1}} f'_*(g \circ f')^* f_* \equiv f'_*(f \circ g')^* f_* \xrightarrow{c^*(g',f)} f'_* g'^* f^* f_* \xrightarrow{\delta_*^*(f)} f'_* g'^*$$

**Remarque 1.4.11** — Il existe *à priori* une autre structure d'échange sur le couple  $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_*)$ . Elle est obtenue à partir de la structure d'échange triviale sur  $(\mathbf{H}_*, \mathbf{H}_*)$  de type  $\swarrow$  et l'adjonction globale entre  $\mathbf{H}_*$  et  $\mathbf{H}^*$ . Le 2-morphisme d'échange de cette structure associé au carré commutatif de tout à l'heure est égal à la composée :

$$g^* f_* \xrightarrow{\eta_*^*(g')} g^* f_* g'_* g'^* \xrightarrow{c_*(g',f)^{-1}} g^*(f \circ g')^* g'^* \equiv g^*(g \circ f')^* g'^* \xrightarrow{c_*(f',g)} g^* g'_* f'^* g'^* \xrightarrow{\delta_*^*(g)} f'_* g'^*$$

Le fait que ces deux structures d'échange coïncident, est une conséquence du lemme 1.1.15.

Par restriction on a une structure d'échange de type  $\searrow$  sur  $(\mathbf{H}^*, \text{Liss } \mathbf{H}^*)$ . En utilisant l'adjonction globale entre  $\text{Liss } \mathbf{H}^*$  et  $\text{Liss } \mathbf{H}_\#$  on obtient une structure d'échange (pour la classe des carrés commutatifs avec morphismes verticaux lisses) de type  $\swarrow$  sur le couple de 2-foncteurs  $(\mathbf{H}^*, \text{Liss } \mathbf{H}_\#)$ . On notera  $Ex_\#^*(\cdot)$  les 2-morphismes d'échange de cette structure. Pour un carré commutatif  $(C)$  de  $S$ -morphisms :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec  $f$  et  $f'$  lisses, le 2-morphisme d'échange :

$$Ex_\#^*(C) : f'_\# g'^* \longrightarrow g^* f_\#$$

est la composée :

$$f'_\# g'^* \xrightarrow{\eta_\#^*(g)} g^* g_\# f'_\# g'^* \xrightarrow{c^*(f',g)^{-1}} g^*(g \circ f')_\# g'^* \equiv g^*(f \circ g')_\# g'^* \xrightarrow{c^*(g',f)} g^* f_\# g'_\# g'^* \xrightarrow{\delta_\#^*(g')} g^* f_\#$$

On a également la formule  ${}^a(Ex_*^*(C)) = Ex_{\#}^*(C)$  (voir la proposition 1.1.5 pour la définition de l'opération  ${}^a(\cdot)$ ). Lorsque le carré  $(C)$  est cartésien l'axiome 3 nous dit que le 2-morphisme d'échange  $Ex_{\#}^*(C)$  est un 2-isomorphisme. En d'autres termes, la restriction de cet échange à la sous-classe formée des carrés cartésiens est un isoéchange. D'après la proposition 1.2.14 on a alors :

**PROPOSITION 1.4.12** — *On a un foncteur croisé de  $(\text{Sch}/S)$  et  $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$  vers  $\mathfrak{A}$  par rapport à la classe des carrés cartésiens à flèches verticales lisses. Ce foncteur croisé est défini par les données :*

- le 2-foncteur  $H^*$  et son adjoint global à droite  $H_*$ ,
- le 2-foncteur  ${}^{\text{Liss}}H^*$  et son adjoint global à gauche  ${}^{\text{Liss}}H_{\#}$ ,
- la structure d'échange triviale sur  $(H^*, {}^{\text{Liss}}H^*)$ ,
- la structure d'échange sur  $(H_*, {}^{\text{Liss}}H_{\#})$  déduite de l'isoéchange de type  $\swarrow$  inverse de l'isoéchange sur  $(H^*, {}^{\text{Liss}}H_{\#})$  (par rapport aux carrés cartésiens) et de l'adjonction globale entre  $H_*$  et  $H^*$ .

Pour un carré cartésien  $(C)$  :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array}$$

avec  $f$  lisse, le 2-morphisme d'échange de la structure d'échange sur  $(H_*, {}^{\text{Liss}}H^*)$  est donné par  $Ex_*^*$  appliqué au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f'} & \bullet \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet \end{array}$$

Le 2-isomorphisme d'échange de la structure d'échange sur  $(H^*, {}^{\text{Liss}}H_{\#})$  est donné par le 2-morphisme  $Ex_{\#}^*(C)$ . Finalement le 2-morphisme d'échange  $Ex_{*,\#}^*(C)$  relatif à la structure d'échange sur  $(H_*, {}^{\text{Liss}}H_{\#})$  est donné par la composée :

$$f_{\#}g'_* \longrightarrow g_*g^*f_{\#}g'_* \xrightarrow{(Ex_{\#}^*)^{-1}} g_*f'_{\#}g'^*g'_* \longrightarrow g_*f'_{\#}$$

En particulier, on a le résultat suivant, dont l'analogue dans [SGA 4] est connu sous le nom du “théorème de changement de base par un morphisme lisse” :

**PROPOSITION 1.4.13** — *Soit un carré cartésien dans  $\text{Sch}/S$  :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec  $g$  lisse. Le 2-morphisme d'échange  $Ex_*^* : g^*f_* \xrightarrow{\sim} f'_*g'^*$  est inversible. En d'autre termes l'échange sur  $({}^{\text{Liss}}H^*, H_*)$  est un isoéchange (par rapport aux carrés cartésiens).

### 1.4.6 Une structure de foncteurs croisés sur $(H^*, H_*, \text{Imm}H!, \text{Imm}H!)$

Dans la même veine, on continue avec le “cas trivial” du “théorème de changement de base pour un morphisme propre”.

**LEMME 1.4.14** — *Soit un carré cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g'} & Z \\ i' \downarrow & & \downarrow i \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

avec  $i$  une immersion fermée. Le 2-morphisme d'échange  $Ex_*^* : g^*i_* \xrightarrow{\sim} i'_*g'^*$  est inversible.

DEMONSTRATION Fixons  $A$  un objet de  $H(Z)$ . Soit  $j : U \longrightarrow X$  l'immersion de l'ouvert complémentaire de  $i(Z)$ . Notons aussi  $j$  l'immersion ouverte de  $Y \times_X U$  dans  $Y$ . L'objet  $g^*i_*A$  est à support dans  $T$  car  $j^*g^*i_*A \simeq g^*j^*i_*A \simeq 0$ . Donc le 2-morphisme d'unité :  $g^*i_*A \longrightarrow i'_*i'^*g^*i_*A$  est un 2-isomorphisme. Mais notre 2-morphisme d'échange est égal à la composée :

$$g^*i_*A \xrightarrow{\sim} i'_*i'^*g^*i_*A \longrightarrow i'_*g'^*i'_*A \longrightarrow i'_*g'^*A$$

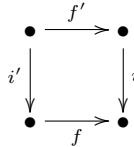
Le deuxième 2-morphisme est un 2-isomorphisme puisque c'est une composée de deux 2-morphismes de connexions  $c^*$ . Le troisième 2-morphisme est aussi un 2-isomorphisme par l'axiome 2. Le lemme est prouvé. C.Q.F.D

L'échange sur  $(H^*, \text{Imm}H_*)$  par rapport à la classe des carrés cartésiens défini par les 2-morphismes  $Ex_*^*$  est donc un isoéchange de type  $\searrow$ . En utilisant la proposition 1.2.14 :

**PROPOSITION 1.4.15** — *On a un foncteur croisé de  $(\text{Sch}/S)$  et  $(\text{Sch}/S)^{\text{Imm}}$  vers  $\mathfrak{A}$  par rapport à la classe des carrés cartésiens à flèches verticales des immersions fermées. Ce foncteur croisé est défini par les données :*

- le 2-foncteur  $H^*$  et son adjoint global à droite  $H_*$ ,
- le 2-foncteur  $\text{Imm}H^!$  et son adjoint global à gauche  $\text{Imm}H_*$ ,
- la structure d'échange triviale sur  $(H_*, \text{Imm}H_*)$ ,
- la structure d'échange sur  $(H^*, \text{Imm}H^!)$  déduite de l'isoéchange de type  $\searrow$  inverse de l'échange sur  $(H^*, \text{Imm}H_*)$  (par rapport aux carrés cartésiens) et de l'adjonction globale entre  $\text{Imm}H_*$  et  $\text{Imm}H^!$ ,

Pour un carré cartésien  $(C)$  :



avec  $i$  une immersion fermée, le 2-morphisme d'échange de la structure d'échange sur  $(H_*, \text{Imm}H^!)$  est donné par  $Ex_*^!(C) = {}^a(Ex_*^*(C))$ . C'est donc la composée :

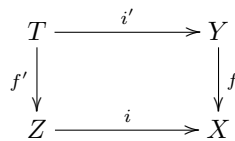
$$f'_*i'! \xrightarrow{\eta_*^!(i)} i'!i_*f'_*i'! \xrightarrow{c_*(f'i)^{-1}} i'(i \circ f')_*i'! = i'(f \circ i')_*i'! \xrightarrow{c_*(i'f)} i'f'_*i'! \xrightarrow{\delta_*^!(i')} i'!f'_*$$

L'échange sur  $(H^*, \text{Imm}H^!)$  est donné par les 2-morphismes d'échange  $Ex^{!,*}(C) : f'^*i'! \longrightarrow i'!f^*$  égaux à la composée :

$$f'^*i'! \xrightarrow{\eta_*^!(i)} i'!i'_*f'^*i'! \xrightarrow{Ex_*^*(C)^{-1}} i'!f^*i'_*i'! \xrightarrow{\delta_*^!(i)} i'!f^*$$

Voici une caractérisation des 2-morphismes d'échange  $Ex^{!,*}$  :

**PROPOSITION 1.4.16** — *1- Soit un carré cartésien  $(C)$  :*



On suppose que  $i$  est une immersion fermée. Le 2-morphisme  $e = Ex^{!,*}$  est l'unique 2-morphisme  $e : f'^*i'! \longrightarrow i'!f^*$  rendant le diagramme suivant commutatif :

(1.20)

$$\begin{array}{ccc} f^*i_*i'! & \longrightarrow & f^* \\ Ex_*^* \downarrow & & \parallel \\ i'_*f'^*i'! & & \\ e \downarrow & & \\ i'_*i'!f^* & \longrightarrow & f^* \end{array}$$

2- Formons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{i'} & Y & \xleftarrow{j'} & V \\ f' \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ Z & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & U \end{array}$$

avec  $j$  les inclusions des ouverts complémentaires à  $i$ . Le carré de droite est également cartésien. Le morphisme  $e = Ex^{!,*}$  fournit pour tout  $A \in H(X)$  un morphisme de triangles distingués :

$$(1.21) \quad \begin{array}{ccccccc} f^*A & \longrightarrow & f^*j_*j^*A & \longrightarrow & f^*i_*i^!A[+1] & \longrightarrow & f^*A[+1] \\ \parallel & & \downarrow & & Ex_*^* \circ Ex^{!,*} \downarrow & & \parallel \\ f^*A & \longrightarrow & j_*j^*f^*A & \longrightarrow & i_*i^!f^*A[+1] & \longrightarrow & f^*A[+1] \end{array}$$

DEMONSTRATION La preuve de cet énoncé est facile. La preuve de l'existence et l'unicité du morphisme  $e$  est totalement analogue à celle du fait que  $A \rightarrow C(A)$  est un foncteur (voir lemme 1.4.8)<sup>4</sup>. On prouvera donc seulement que  $Ex^{!,*} = e$ . Mais pour cela il suffit de prouver que le diagramme obtenu en remplaçant  $e$  par  $Ex^{!,*}$  dans le diagramme 1.20 de l'énoncé est commutatif. Mais ceci découle de la proposition (1.2.5). C.Q.F.D

**COROLLAIRE 1.4.17** — *Supposons que  $f$  est lisse. Le 2-morphisme d'échange  $Ex^{!,*}$  est inversible.*

DEMONSTRATION Il suffit d'appliquer la proposition 1.4.13 et le lemme 1.4.14 et d'utiliser le morphisme de triangles distingués 1.21 de la proposition 1.4.16. C.Q.F.D

Par adjonction on a également :

**COROLLAIRE 1.4.18** — *Sous les hypothèses du corollaire 1.4.17, le 2-morphisme d'échange :*

$$Ex_{*,\#} : f_{\#}i^!_* \longrightarrow i_*f_{\#}^!$$

relativement à l'échange sur  $(H_*, \text{Liss}H_{\#})$  est inversible.

### 1.4.7 Sur le 2-morphisme $\theta$

Supposons donné un diagramme de  $S$ -schémas :

$$Y \xrightarrow{i} X \xleftarrow{j} U$$

avec  $i$  une immersion fermée et  $j$  une immersion ouverte complémentaire. On a défini dans la proposition 1.4.9 un 2-morphisme  $\theta$  :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{j^*} & \bullet \\ i^! \downarrow & \theta & \downarrow j_* \\ \bullet & \xrightarrow{i_*[-1]} & \bullet \end{array}$$

caractérisé par la propriété d'être l'unique 2-morphisme tel que pour tout  $A$  dans  $\text{Ob}(H(\bullet))$  le triangle :

$$i_*i^!A \xrightarrow{\delta} A \xrightarrow{\eta} j_*j^*A \xrightarrow{\theta} i_*i^!A[+1]$$

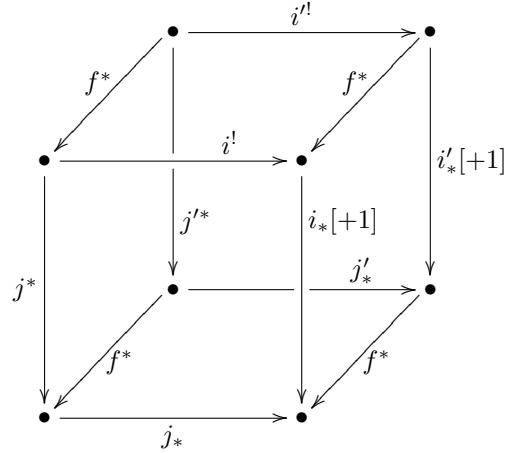
est un triangle distingué. Dans cette sous section on construira deux diagrammes solides commutatifs décrivant des compatibilités du 2-morphisme  $\theta$  avec différents 2-morphismes d'échange.

**PROPOSITION 1.4.19** — *Soit  $f : X' \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas dans  $(\text{Sch}/S)$ . On forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens :*

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' & \xleftarrow{j'} & U' \\ f \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & U \end{array}$$

<sup>4</sup>Il faut utiliser en plus le fait que  $Ex_*^*$  est un 2-isomorphisme, ce qui découle du lemme 1.4.14.

On a un cube commutatif :



dont les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-morphismes  $\theta$  et ceux perpendiculaires au plan de la feuille sont des 2-morphismes d'échanges. En d'autres termes le diagramme de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 f^* j_* j^* & \xrightarrow{\theta} & f^* i_* i' [+1] \\
 \text{Ex}_*^* \downarrow & & \downarrow \text{Ex}_*^* \\
 j'_* f^* j^* & & i'_* f^* i' [+1] \\
 \downarrow & & \downarrow \text{Ex}^{!,*} \\
 j'_* j'^* f^* & \xrightarrow{\theta} & i'_* i' f^* [+1]
 \end{array}$$

est commutatif. De plus, ce dernier s'insère dans un morphisme de 2-triangles distingués (de 1-morphismes) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f^* i_* i' & \xrightarrow{\delta} & f^* & \xrightarrow{\eta} & f^* j_* j^* & \xrightarrow{\theta} & f^* i_* i' [+1] \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 i'_* i' f^* & \xrightarrow{\delta} & f^* & \xrightarrow{\eta} & j'_* j'^* f^* & \xrightarrow{\theta} & i'_* i' f^* [+1]
 \end{array}$$

Lorsque  $f$  est lisse tous les 2-morphismes verticaux sont des 2-isomorphismes.

DEMONSTRATION Puisque le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 f^* & \xrightarrow{\quad} & f^* j_* j^* \\
 \parallel & & \downarrow \text{Ex}_*^* \\
 & & j'_* f^* j^* \\
 & & \downarrow \\
 f^* & \xrightarrow{\quad} & j'_* j'^* f^*
 \end{array}$$

et d'après les axiomes d'une catégorie triangulée il existe pour tout objet  $A$  de  $H(X)$  une flèche  $a_A$  rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f^* i_* i' A & \xrightarrow{\delta} & f^* A & \xrightarrow{\eta} & f^* j_* j^* A & \xrightarrow{\theta} & f^* i_* i' A [+1] \\
 \vdots \downarrow a & & \parallel & & \downarrow & & \vdots \downarrow a[1] \\
 & & & & j'_* f^* j^* A & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 i'_* i' f^* A & \xrightarrow{\delta} & f^* A & \xrightarrow{\eta} & j'_* j'^* f^* A & \xrightarrow{\theta} & i'_* i' f^* A [+1]
 \end{array}$$

Il suffit alors de prouver que  $a_A$  est égale à l'évaluation en  $A$  de la composée :

$$f^* i_* i' \xrightarrow{\text{Ex}_*^*} i'_* f^* i' \xrightarrow{\text{Ex}^{!,*}} i'_* i' f^*$$



Compte tenu de 1.4.8 il suffit de prouver que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 f^* i_* i^! & \longrightarrow & f^* \\
 \downarrow & & \parallel \\
 i'_* f^* i^! & & \\
 \downarrow & & \\
 i'_* i^! f^* & \longrightarrow & f^*
 \end{array}$$

est commutatif<sup>5</sup>. Mais ceci découle de la proposition 1.2.5.

C.Q.F.D

On a également le même énoncé pour les 1-morphismes "sections à support" :

**PROPOSITION 1.4.20** — *Soit  $s : T \longrightarrow X$  une immersion fermée de  $S$ -schémas. On forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens :*

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{i'} & T & \xleftarrow{j'} & V \\
 \downarrow s & & \downarrow s & & \downarrow s \\
 Y & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & U
 \end{array}$$

On a un cube commutatif :

dont les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-morphismes  $\theta$  et ceux perpendiculaires au plan de la feuille sont des 2-morphismes d'échanges. En d'autres termes, le diagramme de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 j'_* j'^* s^! & \xrightarrow{\theta} & i'_* i^! s^! [+1] \\
 \downarrow Ex^{!,*} & & \downarrow \\
 j'_* s^! j^* & & i'_* s^! i^! [+1] \\
 \downarrow Ex^!_* & & \downarrow Ex^!_* \\
 s^! j_* j^* & \xrightarrow{\theta} & s^! i_* i^! [+1]
 \end{array}$$

est commutatif. De plus, ce dernier s'insère dans un morphisme de triangles distingués (de 1-morphismes) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 i'_* i^! s^! & \xrightarrow{\delta} & s^! & \xrightarrow{\eta} & j'_* j'^* s^! & \xrightarrow{\theta} & i'_* i^! s^! [+1] \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 s^! i_* i^! & \xrightarrow{\delta} & s^! & \xrightarrow{\eta} & s^! j_* j^* & \xrightarrow{\theta} & s^! i_* i^! [+1]
 \end{array}$$

De plus, tous les 2-morphismes verticaux sont des 2-isomorphismes.

<sup>5</sup>Strictement parlant, le lemme 1.4.8 ne suffit pas pour compléter l'argument. Il faudrait prouver un résultat un petit peu plus général qui se démontre exactement de la même façon que le lemme en question. On espère que le lecteur pourra palier lui-même cette difficulté.

DEMONSTRATION Puisque le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 s^! & \longrightarrow & j'_* j'^! s^! \\
 \parallel & & \downarrow Ex_*^* \\
 & & j'_* s^! j^* \\
 & & \downarrow Ex_*^! \\
 s^! & \longrightarrow & s^! j_* j^*
 \end{array}$$

par les axiomes d'une catégorie triangulée il existe pour tout objet  $A$  de  $H(X)$  une flèche  $a_A$  rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc}
 i'_* i'^! s^! A & \xrightarrow{\delta} & s^! A & \xrightarrow{\eta} & j'_* j'^! s^! A & \xrightarrow{\theta} & i'_* i'^! s^! A[+1] \\
 \vdots \downarrow a & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow a[1] \\
 & & & & j'_* s^! j^* A & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 s^! i_* i^! A & \xrightarrow{\delta} & s^! A & \xrightarrow{\eta} & s^! j_* j^* A & \xrightarrow{\theta} & s^! i_* i^! A[+1]
 \end{array}$$

Il suffit alors de prouver que  $a_A$  est égale à l'évaluation en  $A$  de la composée :

$$i'_* i'^! s^! \xrightarrow{Ex_*^*} i'_* s^! i^! \xrightarrow{Ex_*^!} s^! i_* i^!$$

Compte tenu du lemme 1.4.8, il suffit de prouver que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 i'_* i'^! s^! & \longrightarrow & s^! \\
 \downarrow & & \parallel \\
 i'_* s^! i^! & & \\
 \downarrow & & \\
 s^! i_* i^! & \longrightarrow & s^!
 \end{array}$$

est commutatif. Mais ceci découle de 1.2.5. La dernière assertion découle du fait que  $Ex_*^!$  est un 2-isomorphisme dans notre situation puisque  $j$  et  $j'$  sont des immersions ouvertes (voir le corollaire 1.4.17). C.Q.F.D

## 1.5 Les équivalences de Thom. Les 2-foncteurs $Liss H^!$ et $Liss H_!$

### 1.5.1 Définition

Soit une suite de  $S$ -morphisms  $X \xrightarrow{s} V \xrightarrow{p} X$  telle que  $p \circ s = Id_X$  et  $p$  lisse. On définit un 1-morphisme  $Th(s, p) : H(X) \longrightarrow H(X)$  par la formule :  $Th(s, p) = p_{\#} \circ s_*$ .

**DEFINITION 1.5.1** — *Le 1-morphisme  $Th(s, p)$  est appelé le 1-morphisme de Thom associé à la section  $s$  du morphisme lisse  $p$ . Il admet un adjoint à droite  $Th^{-1}(s, p)$  défini par  $Th^{-1}(s, p) = s^! \circ p^*$  et appelé le 1-morphisme de Thom inverse associé à la section  $s$  du morphisme lisse  $p$ .*

**PROPOSITION 1.5.2** — *Soit  $f : X' \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme. On choisit un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & \xrightarrow{s'} & V' & \xrightarrow{p'} & X' \\
 f \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X
 \end{array}$$

à carrés cartésiens. Il existe un 2-isomorphisme :

$$\phi(f) : Th(s', p') f^* \xrightarrow{\sim} f^* Th(s, p)$$

défini par la composition du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{H}(X') & \xrightarrow{s'_*} & \mathrm{H}(V') & \xrightarrow{p'_\#} & \mathrm{H}(X') \\
 \uparrow f^* & & \uparrow f'^* & & \uparrow f^* \\
 & \searrow (Ex_*^*)^{-1} & & \searrow Ex_\#^* & \\
 \mathrm{H}(X) & \xrightarrow{s_*} & \mathrm{H}(V) & \xrightarrow{p_\#} & \mathrm{H}(X)
 \end{array}$$

DEMONSTRATION Le fait que c'est un 2-isomorphisme est clair par le théorème de changement de base pour une immersion fermée (voir le lemme 1.4.14)<sup>6</sup> ainsi que l'axiome 3. C.Q.F.D

En utilisant les adjonctions entre  $\text{Th}(\cdot, \cdot)$  et  $\text{Th}^{-1}(\cdot, \cdot)$  on déduit par la proposition 1.1.9 un 2-morphisme :

$$\phi_{-1}(f) : f^* \text{Th}^{-1}(s, p) \longrightarrow \text{Th}^{-1}(s', p') f^*$$

Toujours par 1.1.9, on a le lemme :

**LEMME 1.5.3** — *Le losange (de compatibilité avec l'unité) suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
 & f^* \text{Th}^{-1}(s, p) \text{Th}(s, p) & \\
 \eta \nearrow & & \searrow \phi_{-1}(f) \\
 f^* & & \text{Th}^{-1}(s', p') f^* \text{Th}(s, p) \\
 \eta \searrow & & \nearrow \sim \\
 & \text{Th}^{-1}(s', p') \text{Th}(s', p') f^* & \\
 & \phi(f) &
 \end{array}$$

est commutatif. Il existe également un losange commutatif analogue pour la counité.

Par définition le 2-morphisme  $\phi_{-1}(f)$  est la composée du diagramme planaire :

(1.22)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathrm{H}(X') \\
 & & & & \uparrow s' \\
 & & & & \mathrm{H}(V') \\
 & & & & \uparrow p^* \\
 \mathrm{H}(X') & \xrightarrow{s'_*} & \mathrm{H}(V') & \xrightarrow{p'_\#} & \mathrm{H}(X') \\
 \uparrow f^* & & \uparrow f'^* & & \uparrow f^* \\
 & \searrow (Ex_*^*)^{-1} & & \searrow Ex_\#^* & \\
 \mathrm{H}(X) & \xrightarrow{s_*} & \mathrm{H}(V) & \xrightarrow{p_\#} & \mathrm{H}(X) \\
 \uparrow s' & & \uparrow p^* & & \\
 \mathrm{H}(V) & & & & \\
 \uparrow p^* & & & & \\
 \mathrm{H}(X) & & & &
 \end{array}$$

<sup>6</sup>En fait, la définition même de ce 2-morphisme repose sur le lemme 1.4.14.

En découpant (1.22) suivant la ligne :

$$\bullet \xrightarrow{p^*} \bullet \xrightarrow{=} \bullet \xrightarrow{f'^*} \bullet \xrightarrow{=} \bullet \xrightarrow{s'^!} \bullet$$

on voit que  $\phi_{-1}(f)$  est la composée du diagramme planaire :

$$(1.23) \quad \begin{array}{ccccc} H(X') & \xleftarrow{s'^!} & H(V') & \xleftarrow{p'^*} & H(X') \\ \uparrow f^* & \nearrow Ex'^{!,*} & \uparrow f'^* & \nearrow c^*(\ )c^*(\ )^{-1} & \uparrow f^* \\ H(X) & \xleftarrow{s^!} & H(V) & \xleftarrow{p^*} & H(X) \end{array}$$

On a en particulier le lemme suivant :

**LEMME 1.5.4** — *Si  $f$  est lisse le 2-morphisme :*

$$\phi_{-1}(f) : f^* \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(s', p') f^*$$

*est inversible.*

**DEMONSTRATION** En effet, en utilisant la représentation planaire de  $\phi_{-1}(f)$  par (1.23) on voit qu'il suffit de montrer que le 2-morphisme d'échange  $Ex'^{!,*}$  qui figure dans le diagramme est un 2-isomorphisme. Mais ceci découle du corollaire 1.4.17 et de l'hypothèse que  $f$  est lisse. C.Q.F.D

Dans le même esprit on a :

**PROPOSITION 1.5.5** — *Soit  $i : Z \longrightarrow X$  une  $S$ -immersion fermée. On choisit un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{s'} & W & \xrightarrow{p'} & Z \\ \downarrow i & & \downarrow i' & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

*à carrés cartésiens. Il existe un 2-isomorphisme :*

$$\phi(f) : \mathrm{Th}(s, p) i_* \longrightarrow i_* \mathrm{Th}(s', p')$$

*défini par la composition du diagramme planaire :*

$$\begin{array}{ccccc} H(Z) & \xrightarrow{s'_*} & H(W) & \xrightarrow{p'_{\#}} & H(Z) \\ \downarrow i_* & \nearrow Ex_{*,*} & \downarrow i'_* & \nearrow Ex_{*,\#} & \downarrow i_* \\ H(X) & \xrightarrow{s_*} & H(V) & \xrightarrow{p_{\#}} & H(X) \end{array}$$

**DEMONSTRATION** Le fait que  $Ex_{\#,*}$  est inversible découle du corollaire 1.4.18. C.Q.F.D

Notons également le lemme utile suivant :

**LEMME 1.5.6** — *Supposons donné un voisinage Nisnevich de  $X$  dans  $V$  :*

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ & \nearrow t & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{s} & V \end{array}$$

*avec  $u$  étale. Il existe alors un 2-isomorphisme  $\mathrm{Th}(t, p \circ u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s, p)$ . De plus, si le carré suivant :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{t} & U \\ \parallel & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{s} & V \end{array}$$

est cartésien, cet isomorphisme est défini par la composition du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{H}(X) & \xrightarrow{t_*} & \text{H}(U) & \xrightarrow{(pu)_\#} & \text{H}(X) \\
 \parallel & & \downarrow u_\# & \swarrow \text{Ex}_{\#, \#} & \parallel \\
 \text{H}(X) & \xrightarrow{s_*} & \text{H}(V) & \xrightarrow{p_\#} & \text{H}(X) \\
 & & \swarrow \text{Ex}_{*, \#} & & 
 \end{array}$$

DEMONSTRATION Lorsque  $X \simeq X \times_V U$  le résultat découle immédiatement du corollaire 1.4.18. Dans le cas contraire, on remarque que qu'il existe un voisinage ouvert  $j : U_0 = U - (X \times_V U - X) \subset U$  de  $X$  dans  $U$  tel que les carrés suivants sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{t_0} & U_0 \\
 \parallel & & \downarrow u \circ j \\
 X & \xrightarrow{s} & V
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{t_0} & U_0 \\
 \parallel & & \downarrow j \\
 X & \xrightarrow{t} & U
 \end{array}$$

Il vient de ce qui précède que  $\text{Th}(s, p) \simeq \text{Th}(t_0, p \circ u \circ j) \simeq \text{Th}(t, p \circ u)$ .

C.Q.F.D

On a le théorème :

**THEOREME 1.5.7** — Les 1-morphismes  $\text{Th}(s, p)$  et  $\text{Th}^{-1}(s, p)$  sont deux équivalences inverses l'une de l'autre. Le 1-morphisme  $\text{Th}(s, p)$  (resp.  $\text{Th}^{-1}(s, p)$ ) sera dorénavant appelé l'équivalence de Thom (resp. inverse) associée à la section  $s$  du morphisme lisse  $p$ .

DEMONSTRATION Il s'agit de prouver que les 2-morphismes d'unité et de counité :

$$\text{id} \longrightarrow \text{Th}^{-1}(s, p) \circ \text{Th}(s, p) \quad \text{et} \quad \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}^{-1}(s, p) \longrightarrow \text{id}$$

sont inversibles.

Soit  $(f_i : U_i \longrightarrow X)_i$  un recouvrement de  $X$  pour la topologie de Nisnevich (en particulier les  $f_i$  sont des  $S$ -morphisms lisses). Par 1.4.4, il suffit de prouver que les 2-morphismes :

$$f_i^* \longrightarrow f_i^* \text{Th}^{-1}(s, p) \circ \text{Th}(s, p) \quad \text{et} \quad f_i^* \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}^{-1}(s, p) \longrightarrow f_i^*$$

sont inversibles pour tous les indices  $i$ . On considère pour tout  $i$  la suite :

$$U_i \xrightarrow{s_i} U_i \times_X V \xrightarrow{p_i} U_i$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 U_i & \xrightarrow{s_i} & U_i \times_X V & \xrightarrow{p_i} & U_i \\
 f_i \downarrow & & \downarrow f'_i & & \downarrow f_i \\
 X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X
 \end{array}$$

On sait que les deux 2-morphismes :

$$f_i^* \text{Th}(s, p) \longrightarrow \text{Th}(s_i, p_i) f_i^* \quad \text{et} \quad f_i^* \text{Th}^{-1}(s, p) \longrightarrow \text{Th}^{-1}(s_i, p_i) f_i^*$$

sont des 2-isomorphismes par 1.5.2 et 1.5.4. En utilisant donc les deux losanges commutatifs du lemme 1.5.3 :

$$\begin{array}{ccc}
 & f_i^* \text{Th}^{-1}(s, p) \text{Th}(s, p) & \\
 \eta \nearrow & & \searrow \phi_{-1}(f_i) \\
 f_i^* & & \text{Th}^{-1}(s_i, p_i) f_i^* \text{Th}(s, p) \\
 \eta \searrow & & \nearrow \sim \phi(f_i) \\
 & \text{Th}^{-1}(s_i, p_i) \text{Th}(s_i, p_i) f_i^* & 
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 & f_i^* \text{Th}(s, p) \text{Th}^{-1}(s, p) & \\
 \phi(f_i) \nearrow & & \searrow \delta \\
 \text{Th}(s_i, p_i) f_i^* \text{Th}^{-1}(s, p) & & f_i^* \\
 \phi_{-1}(f_i) \searrow & & \nearrow \delta \\
 & \text{Th}(s_i, p_i) \text{Th}^{-1}(s_i, p_i) f_i^* & 
 \end{array}$$

On voit qu'il suffit de prouver que les 2-morphismes :

$$\text{id} \longrightarrow \text{Th}^{-1}(s_i, p_i) \circ \text{Th}(s_i, p_i) \quad \text{et} \quad \text{Th}(s_i, p_i) \circ \text{Th}^{-1}(s_i, p_i) \longrightarrow \text{id}$$

sont des 2-isomorphismes. En d'autres termes, il suffit de prouver que  $\text{Th}(s_i, p_i)$  est une équivalence pour tous les indices  $i$ . En choisissant donc un recouvrement Nisnevich assez fin de  $X$  et en remplaçant  $V$  par un voisinage Nisnevich de  $X$  (ce qui est légitime en vue du lemme 1.5.6) on voit qu'il suffit de traiter le cas où il existe un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{s} & V \\
 \parallel & & \downarrow q \\
 X & \xrightarrow{o} & \mathbb{A}_X^n
 \end{array}$$

avec  $o$  l'inclusion de la section nulle. En appliquant encore une fois le lemme 1.5.6 on se ramène au cas  $V = \mathbb{A}_X^n$ . Lorsque  $n = 1$ , c'est bien une équivalence par l'axiome de stabilité.

Notons  $p_n$  la projection de  $\mathbb{A}_X^n$  sur  $X$  et  $o_n$  la section nulle. On a un diagramme à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{o_1} & \mathbb{A}_X^1 & \xrightarrow{p_1} & X \\
 o_{n-1} \downarrow & & o'_{n-1} \downarrow & & \downarrow o_{n-1} \\
 \mathbb{A}_X^{n-1} & \xrightarrow{o'_1} & \mathbb{A}_X^n & \xrightarrow{p'_1} & \mathbb{A}_X^{n-1} \\
 p_{n-1} \downarrow & & p'_{n-1} \downarrow & & \downarrow p_{n-1} \\
 X & \xrightarrow{o_1} & \mathbb{A}_X^1 & \xrightarrow{p_1} & X
 \end{array}$$

Il vient que  $\text{Th}(o_n, p_n) = p_n \# o_n \simeq p_1 \# p'_{n-1} \# o'_{n-1} \# o_1 \simeq p_1 \# \text{Th}(o'_{n-1}, p'_{n-1}) \# o_1$ . Par la proposition 1.5.5, on a un isomorphisme  $\text{Th}(o'_{n-1}, p'_{n-1}) \# o_1 \simeq o_1 \# \text{Th}(o_{n-1}, p_{n-1})$ . On en déduit en fin de compte un isomorphisme  $\text{Th}(o_n, p_n) \simeq \text{Th}(o_1, p_1) \circ \text{Th}(o_{n-1}, p_{n-1})$  et par récurrence un isomorphisme  $\text{Th}(o_n, p_n) \simeq \text{Th}(o_1, p_1)^{\circ n}$ . Le résultat est maintenant clair. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 1.5.8** — Soient  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $X \xrightarrow{s} V \xrightarrow{p} X$  une suite de  $S$ -morphisms tels que  $p \circ s = \text{id}_X$  et  $p$  lisse. Pour tout objet  $X' \longrightarrow X$  de  $(\text{Sch}/X)$  on forme le diagramme à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & \xrightarrow{s'} & V' & \xrightarrow{p'} & X' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X
 \end{array}$$

avec  $V' = V \times_X X'$ . Le couple de familles  $((\text{Th}(s', p'))_{X' \rightarrow X}, (\phi(f))_{f: X'' \rightarrow X'})$  définit une autoéquivalence du 2-foncteur  $H^*_{|(\text{Sch}/X)}$  restriction du 2-foncteur  $H^*$  à  $(\text{Sch}/X)$ .

DEMONSTRATION Il s'agit de prouver que la composée des 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc}
 H(X'') & \xrightarrow{s''_*} & H(V'') & \xrightarrow{p''_{\#}} & H(X'') \\
 \uparrow f^* & & \uparrow f'^* & & \uparrow f^* \\
 & \Downarrow (Ex^*)^{-1} & & \Downarrow Ex_{\#} & \\
 H(X') & \xrightarrow{s'_*} & H(V') & \xrightarrow{p'_{\#}} & H(X')
 \end{array}$$

commute aux 2-isomorphismes de connexions du 2-foncteur  $\text{H}^*$ . Pour une suite de  $X$ -morphisms composables :

$$X''' \xrightarrow{f'} X'' \xrightarrow{f} X'$$

on forme le diagramme à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} X''' & \xrightarrow{s'''} & V''' & \xrightarrow{p'''} & X''' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X'' & \xrightarrow{s''} & V'' & \xrightarrow{p''} & X'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{s'} & V' & \xrightarrow{p'} & X' \end{array}$$

avec  $V'' = V \times_X X''$  et  $V''' = V \times_X X'''$ . On voit qu'il suffit de prouver que les deux 2-morphismes  $Ex_{\#}^*$  et  $Ex_*^*$  commutent à la composition horizontale des carrés cartésiens. Mais ceci est clair puisque c'est les 2-morphismes d'échange de deux structures d'échange. C.Q.F.D

## 1.5.2 Propriétés des équivalences de Thom

On résume quelques propriétés des équivalences de Thom dans l'énoncé suivant :

**THEOREME 1.5.9** — Soit une suite de  $S$ -morphisms  $X \xrightarrow{s} V \xrightarrow{p} X$  telle que  $p \circ s = \text{id}_X$  et  $p$  lisse. Pour tout  $X$ -schéma  $X' \longrightarrow X$  on considère un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{s'} & V' & \xrightarrow{p'} & X' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

à carrés cartésiens. Pour tout  $X$ -morphisme  $f : X' \longrightarrow X$ , on a des 2-isomorphismes :

- $\phi(f) : \text{Th}(s'', p'')f^* \xrightarrow{\sim} f^*\text{Th}(s', p')$ ,
- $\psi(f) : f_*\text{Th}(s'', p'') \xrightarrow{\sim} \text{Th}(s', p')f_*$ ,
- $\chi(f) : f_{\#}\text{Th}(s'', p'') \xrightarrow{\sim} \text{Th}(s', p')f_{\#}$  si  $f$  est lisse,
- $\zeta(i) : \text{Th}(s'', p'')i^! \xrightarrow{\sim} i^!\text{Th}(s', p')$  si  $i = f$  est une immersion.

La famille des équivalences  $(\text{Th}(s', p'))_{X' \rightarrow X}$  munie des 2-isomorphismes  $\phi(\cdot)$  (resp.  $\psi(\cdot)$ ,  $\chi(\cdot)$  et  $\zeta(\cdot)$ ) définit une autoéquivalence sur le 2-foncteur  $\text{H}^*$  (resp.  $\text{H}_*$ ,  $\text{LissH}_{\#}$  et  $\text{ImmH}^!$ ) restreint aux  $X$ -schémas. De plus, ces autoéquivalences sont compatibles avec toutes les structures d'échange construites jusqu'à présent.

**DEMONSTRATION** Pour construire les autoéquivalences on se sert de la proposition 1.1.26 et du corollaire 1.5.8. Pour se convaincre de la compatibilité avec les échanges construits dans la section 1.4, il suffit de remarquer que tous les échanges ont été obtenus à partir de l'échange trivial sur  $(\text{H}^*, \text{H}^*)$  en :

- utilisant le procédé de la proposition 1.2.5,
- en prenant l'isoéchange inverse dans le cas d'un isoéchange,
- en faisant une restriction (soit au niveau de la classe des carrés, soit aux niveaux des catégories sources).

D'après la proposition 1.2.11 il suffit alors de prouver que nos autoéquivalences sont compatibles avec l'échange de  $(\text{H}^*, \text{H}^*)$ . En d'autres termes on est ramené à prouver que l'autoéquivalence de Thom est compatible avec les 2-isomorphismes de connexion de  $\text{H}^*$ . Ceci est la définition même d'une autoéquivalence. C.Q.F.D

**Remarque 1.5.10** — On déduit du théorème précédent un énoncé analogue concernant les équivalences de Thom inverses. On obtient ainsi les 2-isomorphismes :

- $\phi_{-1}(f) : \text{Th}^{-1}(s'', p'')f^* \xrightarrow{\sim} f^*\text{Th}^{-1}(s', p')$ ,
- $\psi_{-1}(f) : f_*\text{Th}^{-1}(s'', p'') \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(s', p')f_*$ ,
- $\chi_{-1}(f) : f_{\#}\text{Th}^{-1}(s'', p'') \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(s', p')f_{\#}$  si  $f$  est lisse,
- $\zeta_{-1}(i) : \text{Th}^{-1}(s'', p'')i^! \xrightarrow{\sim} i^!\text{Th}^{-1}(s', p')$  si  $i = f$  est une immersion.

La dernière assertion reste également vraie pour les équivalences de Thom inverses.

Supposons donné maintenant un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & W & & \\
 & t \nearrow & \downarrow q & \searrow p \circ q & \\
 X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X
 \end{array}$$

avec  $s$  une immersion fermée,  $p$  et  $q$  lisses et  $p \circ s = \text{id}_X$ . Il vient alors que :

$$p \circ q \circ t = p \circ s = \text{id}_X$$

et que  $t$  est une immersion fermée. On peut former le diagramme :

$$X \xrightarrow{u=t \times \text{id}} W \times_V X \xrightarrow{r=pr_2} X$$

On a alors que  $u$  est une immersion fermée,  $r$  est lisse et  $r \circ u = \text{id}_X$ . On va construire un 2-isomorphisme (de composition) :

$$C : \text{Th}(t, p \circ q) \xrightarrow{\sim} \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(u, r)$$

Pour cela on forme le diagramme commutatif de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & & & \\
 \downarrow u & \searrow t & & & \\
 W \times_V X & \xrightarrow{pr_1} & W & & \\
 \downarrow r & & \downarrow q & \searrow p \circ q & \\
 X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X
 \end{array}$$

et on prend la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc}
 \bullet & & & & \\
 \downarrow u_* & \searrow c_* & \searrow t_* & & \\
 \bullet & \xrightarrow{pr_{1*}} & \bullet & & \\
 \downarrow r_\# & \searrow Ex_{*,\#} & \downarrow q_\# & \searrow (p \circ q)_\# & \\
 \bullet & \xrightarrow{s_*} & \bullet & \xrightarrow{p_\#} & \bullet
 \end{array}$$

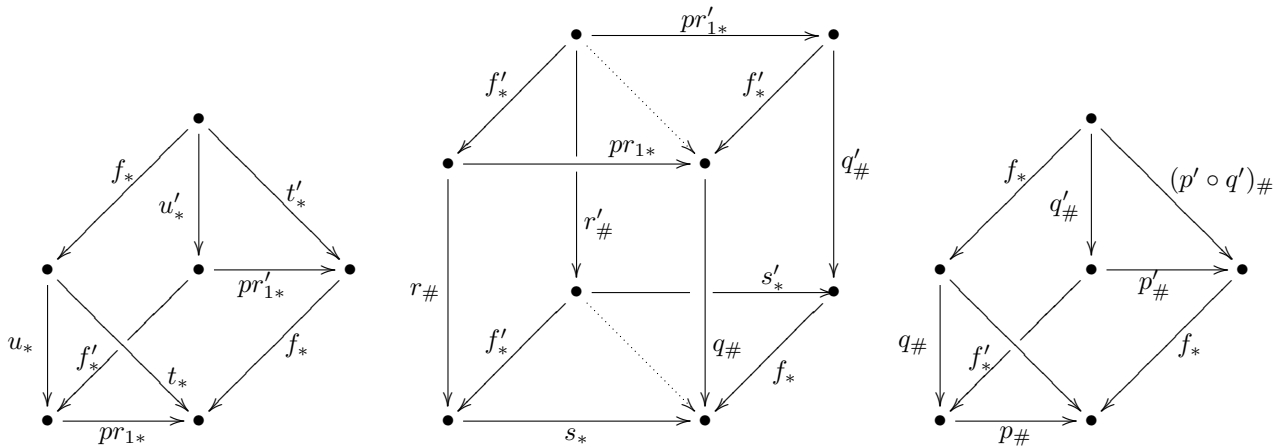
Le 2-morphisme ainsi obtenu est inversible car  $Ex_{*,\#}$  est un isomorphisme puisque  $q$  est lisse et  $s$  une immersion fermée (voir le corollaire 1.4.18). On a la proposition suivante qui complète le théorème 1.5.9 :

**PROPOSITION 1.5.11** — *Sous les hypothèses du théorème 1.5.9, les 2-isomorphismes qu'on vient de construire, définissent un isomorphisme d'autoéquivalences entre l'autoéquivalence  $(\text{Th}(t', p' \circ q'))_{X' \rightarrow X}$  et l'autoéquivalence composée  $(\text{Th}(s', p') \circ \text{Th}(u', r'))_{X' \rightarrow X}$ , ceci pour les restrictions des 2-foncteurs :  $H^*$ ,  $H_*$ ,  ${}^{\text{Liss}}H_\#$  et  ${}^{\text{Imm}}H^!$  à la catégorie  $(\text{Sch}/X)$ .*

**DEMONSTRATION** En utilisant les deux dernières assertions de la proposition 1.1.26, on voit qu'il suffit de prouver la proposition pour l'autoéquivalence sur la restriction de  $H_*$  à  $(\text{Sch}/X)$ . En revenant à la définition on voit qu'il suffit



de prouver la commutativité des trois diagrammes solides :

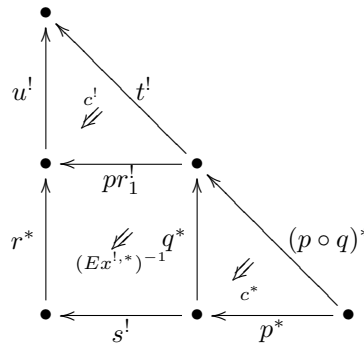


La commutation du premier diagramme solide découle facilement de l'axiome de cocycle pour le 2-foncteur  $H_*$ . La commutation du troisième diagramme est la compatibilité de l'échange sur  $(H_*, H_{\#})$  avec la composition verticale des carrés. Finalement, pour montrer la commutation du cube on le divise selon les plan des deux lignes en pointillé. Ces lignes correspondent aux 1-morphismes  $(pr_1 \circ f')_* = (f \circ pr'_1)_*$  et  $(s \circ f')_* = (s' \circ f)_*$ . La commutation des deux diagrammes ainsi obtenus découle cette fois de la compatibilité de l'échange avec la composition horizontale des carrés. C.Q.F.D

**Remarque 1.5.12** — En prenant l'inverse de l'adjoint du 2-isomorphisme de composition  $C$ , on obtient un 2-isomorphisme de composition pour les équivalences de Thom inverses :

$$C_{-1} : \text{Th}^{-1}(t, p \circ q) \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(u, r) \circ \text{Th}^{-1}(s, p)$$

On vérifie immédiatement que ce 2-morphisme est donné par la composée du diagramme planaire :



On a également l'analogue de la proposition 1.5.11.

Dans la suite de ce paragraphe on se bornera à énoncer les propriétés des 2-isomorphismes de composition (ainsi que les 2-isomorphismes dérivés) pour les équivalences de Thom  $\text{Th}(-)$ . Les énoncés analogues pour les équivalences de Thom inverses s'obtiennent alors facilement par adjonction.

En utilisant le 2-isomorphisme de composition on peut déduire un 2-isomorphisme de commutation :

**COROLLAIRE 1.5.13** — Les équivalences de Thom commutent entre elles. Plus précisément si  $X \xrightarrow{s_1} V_1 \xrightarrow{p_1} X$  et  $X \xrightarrow{s_2} V_2 \xrightarrow{p_2} X$  sont deux suites comme avant, il existe un 2-isomorphisme :

$$C_m : \text{Th}(s_1, p_1) \circ \text{Th}(s_2, p_2) \longrightarrow \text{Th}(s_2, p_2) \circ \text{Th}(s_1, p_1)$$

De plus, les  $C_m$  définissent un isomorphisme d'autoéquivalences entre  $(\text{Th}(s'_1, p'_1) \circ \text{Th}(s'_2, p'_2))_{X' \rightarrow X}$  et  $(\text{Th}(s'_2, p'_2) \circ \text{Th}(s'_1, p'_1))_{X' \rightarrow X}$ , ceci pour les restrictions des 2-foncteurs :  $H^*$ ,  $H_*$ ,  $\text{LissH}_{\#}$  et  $\text{ImmH}^!$  à la catégorie  $(\text{Sch}/X)$ .

**DEMONSTRATION** On pose  $V = V_1 \times_X V_2$ . On a une suite :  $X \xrightarrow{s=s_1 \times s_2} V \longrightarrow X$ . Remarquons que cette suite est obtenue par composition de  $X \xrightarrow{s_1} V_1 \xrightarrow{p_1} X$  avec  $V_1 \xrightarrow{1 \times s_2} V \xrightarrow{pr_1} V_1$ . De plus, quand on restreint à  $X$  on obtient la deuxième suite de l'énoncé. On a ainsi un 2-isomorphisme  $C : \text{Th}(s, p) \longrightarrow \text{Th}(s_1, p_1) \text{Th}(s_2, p_2)$ . Par

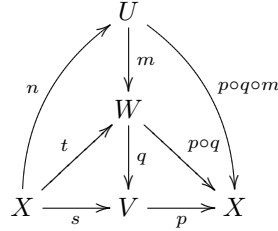
symétrie on a également un 2-isomorphisme  $C : \text{Th}(s, p) \longrightarrow \text{Th}(s_2, p_2)\text{Th}(s_1, p_1)$ . On obtient le 2-isomorphisme recherché comme composée :

$$\text{Th}(s_1, p_1) \circ \text{Th}(s_2, p_2) \xrightarrow{C^{-1}} \text{Th}(s, p) \xrightarrow{C} \text{Th}(s_2, p_2) \circ \text{Th}(s_1, p_1)$$

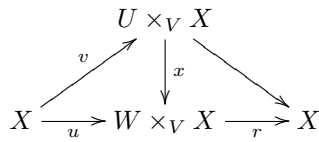
La dernière assertion découle immédiatement de la proposition 1.5.11.

C.Q.F.D

Soit maintenant un diagramme commutatif de  $S$ -schémas :



On peut former le diagramme commutatif :



et puis la suite :

$$X \xrightarrow{w} (U \times_V X) \times_{W \times_V X} X = U \times_W X \xrightarrow{y} X$$

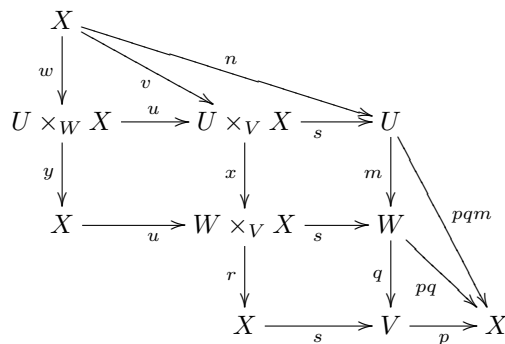
On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.5.14** — *Le carré de 2-isomorphismes :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Th}(n, p \circ q \circ m) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(t, p \circ q) \circ \text{Th}(w, y) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(v, r \circ x) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(u, r) \circ \text{Th}(w, y) \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION On forme le diagramme commutatif de  $S$ -schémas :



On en déduit un diagramme planaire dans  $\mathfrak{TR}$  :

$$(1.24) \quad \begin{array}{ccccc} H(X) & & & & \\ \downarrow w_* & \searrow v_* & \searrow n_* & & \\ H(U \times_W X) & \xrightarrow{u_*} & H(U \times_V X) & \xrightarrow{s_*} & H(U) \\ \downarrow y_\# & \swarrow Ex_{*,\#} & \downarrow x_\# & \swarrow Ex_{*,\#} & \downarrow m_\# \\ H(X) & \xrightarrow{u_*} & H(W \times_V X) & \xrightarrow{s_*} & H(W) \\ & & \downarrow r_\# & \swarrow Ex_{*,\#} & \downarrow q_\# \\ & & H(X) & \xrightarrow{s_*} & H(V) \xrightarrow{p_\#} H(X) \end{array}$$

$(p \circ q \circ m)_\#$   
 $(p \circ q)_\#$

Nous allons prouver que la composée du diagramme planaire (1.24) est égale aux deux composées suivantes:

$$(1.25) \quad Th(n, p \circ q \circ m) \longrightarrow Th(s, p) \circ Th(v, r \circ x) \longrightarrow Th(s, p) \circ Th(u, r) \circ Th(w, y)$$

et

$$(1.26) \quad Th(n, p \circ q \circ m) \longrightarrow Th(t, p \circ q) \circ Th(w, y) \longrightarrow Th(s, p) \circ Th(u, r) \circ Th(w, y)$$

Ceci prouvera notre proposition.

Prouvons d'abord que la composée de (1.24) est égale au 2-morphisme (1.25). Pour cela on divise notre diagramme planaire (1.24) suivant la ligne:

$$\bullet \xrightarrow{w_*} \bullet \xrightarrow{y_\#} \bullet \xrightarrow{u_*} \bullet \xrightarrow{s_*} \bullet \xrightarrow{(p \circ q)_\#} \bullet$$

Si on attache un 2-morphisme de connexion:

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \xrightarrow{w_*} & \bullet & \xrightarrow{y_\#} & \bullet & \xrightarrow{u_*} & \bullet \xrightarrow{s_*} \bullet \xrightarrow{(p \circ q)_\#} \bullet \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & & \Downarrow & \\ & & & & & (s \circ u)_* & \end{array}$$

à la partie du diagramme planaire (1.24) située au dessus de la ligne choisie il est facile de voir (en utilisant la compatibilité des 2-morphismes  $Ex_{*,\#}$  avec la composition des carrés) qu'on obtient le 2-isomorphisme:

$$Th(n, p \circ q \circ m) \xrightarrow{\sim} Th(s, p) \circ Th(v, r \circ x)$$

Puis en attachant le 2-morphisme de connexion (égal à l'inverse du précédent):

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & & \Downarrow & \\ & & & & & (s \circ u)_* & \\ \bullet & \xrightarrow{w_*} & \bullet & \xrightarrow{y_\#} & \bullet & \xrightarrow{u_*} & \bullet \xrightarrow{s_*} \bullet \xrightarrow{(p \circ q)_\#} \bullet \end{array}$$

à la partie du diagramme planaire (1.24) située au dessous de la ligne choisie, on obtient par définition:

$$Th(s, p) \circ Th(v, r \circ x) \xrightarrow{\sim} Th(s, p) \circ Th(u, r) \circ Th(w, y)$$

Ceci achève la première moitié de la démonstration.

Il reste donc à prouver que la composée du diagramme planaire (1.24) est égale au 2-morphisme (1.26). Pour cela on divise (1.24) suivant la ligne:

$$\bullet \xrightarrow{v_*} \bullet \xrightarrow{x\#} \bullet \xrightarrow{r\#} \bullet \xrightarrow{s_*} \bullet \xrightarrow{p\#} \bullet$$

et on fait exactement comme avant mais en introduisant un 2-isomorphisme de connexion ainsi que son inverse au niveau de la composée:  $\bullet \xrightarrow{x\#} \bullet \xrightarrow{r\#} \bullet \dots$  C.Q.F.D

On déduit de la proposition précédente la compatibilité suivante entre les 2-isomorphismes de composition et les 2-isomorphismes de commutation :

**COROLLAIRE 1.5.15** — *On suppose donné un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ t \nearrow & \downarrow q & \searrow p \circ q \\ X & \xrightarrow{s} V \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

comme avant et on garde les notations précédentes. Soit  $X \xrightarrow{z} R \xrightarrow{k} X$  une troisième suite. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Th}(t, p \circ q) \circ \text{Th}(z, k) & \xrightarrow{C_m} & \text{Th}(z, k) \circ \text{Th}(t, p \circ q) \\ \downarrow C & & \downarrow C \\ \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(u, r) \circ \text{Th}(z, k) & \xrightarrow{C_m} \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(z, k) \circ \text{Th}(u, r) \xrightarrow{C_m} & \text{Th}(z, k) \circ \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(u, r) \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION On va appliquer la proposition précédente aux trois diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} W \times_X R & & \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow p \circ q \circ pr_1 \\ W & & \\ t \nearrow & \downarrow q & \searrow p \circ q \\ X & \xrightarrow{s} V \xrightarrow{p} & X \end{array} & \begin{array}{ccc} W \times_X R & & \\ \downarrow q \times \text{id} & & \downarrow p \circ q \circ pr_2 \\ V \times R & & \\ s \times z \nearrow & \downarrow pr_2 & \searrow p' \circ pr_2 \\ X & \xrightarrow{z} R \xrightarrow{k} & X \end{array} & \begin{array}{ccc} W \times_X R & & \\ \downarrow q \times \text{id} & & \downarrow p \circ q \circ pr_2 \\ V \times R & & \\ s \times z \nearrow & \downarrow pr_2 & \searrow p' \circ pr_1 \\ X & \xrightarrow{s} V \xrightarrow{p} & X \end{array} \end{array}$$

On en déduit les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} (W \times_V X) \times_X R & & (W \times_V X) \times_X R \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow pr_1 \\ X & \xrightarrow{u} W \times_V X \xrightarrow{r} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (W \times_V X) \times_X R & & (W \times_V X) \times_X R \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow pr_1 \\ X & \xrightarrow{z} R \xrightarrow{k} & X \end{array}$$

Dans la suite de la preuve, on se permet de noter simplement  $\text{Th}(\text{immersion fermée}, -)$  lorsque le nom de la projection lisse est long à écrire. Les trois carrés commutatifs qu'on obtient par application de la proposition 1.5.14 s'organisent alors de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Th}(z, k)\text{Th}(t, pq) \longrightarrow & \text{Th}(z, k)\text{Th}(s, p)\text{Th}(u, r) \\ & \nearrow & \nearrow \\ \text{Th}(t \times z, -) & \longrightarrow & \text{Th}(s \times z, -)\text{Th}(u, r) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Th}(t, pq)\text{Th}(z, k) & \longrightarrow & \text{Th}(s, p)\text{Th}(u \times z, -) \longrightarrow \text{Th}(s, p)\text{Th}(z, k)\text{Th}(u, r) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \text{Th}(s, p)\text{Th}(u, r)\text{Th}(z, k) & & \end{array}$$

Ceci prouve le corollaire.

C.Q.F.D

Dans la définition des 2-isomorphismes de connexions du 2-foncteur  $\text{H}^!$ , on rencontre naturellement une version modifiée du 2-isomorphisme de composition :

**DEFINITION 1.5.16** — *Supposons donné un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & t \nearrow & & \searrow p \circ q & \\ X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

avec  $s$  une immersion fermée,  $p$  et  $q$  lisses et  $p \circ s = \text{id}_X$ . Avec les notations précédentes, on pose  $C'$  le 2-isomorphisme composé :

$$C' : \text{Th}(t, p \circ q) \xrightarrow{C} \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(u, r) \xrightarrow{C_m} \text{Th}(u, r) \circ \text{Th}(s, p)$$

Le 2-isomorphisme  $C'$  est appelé le 2-isomorphisme de composition modifié. L'inverse de l'adjoint de  $C'$  sera noté  $C'_{-1}$ .  $C'$  est la composée :

$$C'_{-1} : \text{Th}^{-1}(t, p \circ q) \xrightarrow{C_{-1}} \text{Th}^{-1}(u, r) \circ \text{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{C_{m-1}} \text{Th}^{-1}(s, p) \circ \text{Th}^{-1}(u, r)$$

On a de même pour ce 2-isomorphisme :

**THEOREME 1.5.17** — *Sous les hypothèses du théorème 1.5.9, les 2-isomorphismes  $C'$  définissent un isomorphisme d'autoéquivalences entre l'autoéquivalence  $(\text{Th}(t', p' \circ q'))_{X' \rightarrow X}$  et l'autoéquivalence composée  $(\text{Th}(u', r') \circ \text{Th}(s', p'))_{X' \rightarrow X}$ , ceci pour les restrictions des 2-foncteurs :  $\text{H}^*$ ,  $\text{H}_*$ ,  $\text{LissH}_\#$  et  $\text{ImmH}^!$  à la catégorie  $(\text{Sch}/X)$ .*

*De plus, sous les hypothèses de la proposition 1.5.14, le carré de 2-isomorphismes :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Th}(n, p \circ q \circ m) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(w, y) \circ \text{Th}(t, p \circ q) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \text{Th}(v, r \circ x) \circ \text{Th}(s, p) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(w, y) \circ \text{Th}(u, r) \circ \text{Th}(s, p) \end{array}$$

est commutatif.

**DEMONSTRATION** Le résultat est une conséquence facile de la proposition 1.5.14 et du corollaire 1.5.15.

C.Q.F.D

### 1.5.3 Cas particulier des fibrés vectoriels. Les 2-foncteurs $\text{LissH}^!$ et $\text{LissH}_!$

Soit  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de dimension finie. On note

$$p : \mathbb{V}(\mathcal{L}) \longrightarrow X$$

le fibré vectoriel associé. C'est le spectre de la  $\mathcal{O}_X$ -algèbre symétrique  $\bigoplus_{i \geq 0} \text{Sym}^i \mathcal{L}$  associé à  $\mathcal{L}$ . Si  $s : X \longrightarrow \mathbb{V}(\mathcal{L})$  est la section nulle, on notera  $\text{Th}(\mathcal{L})$  l'équivalence  $\text{Th}(s, p)$ . Lorsque  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$  on posera aussi  $\text{Th}(\mathcal{O}_X)A[-2] = A(+1)$ . Le 1-morphisme  $\text{Th}(\mathcal{O}_X)[-2] : A \longrightarrow A(+1)$  est connu sous le nom de *twist* à la Tate.

La proposition 1.5.14 et le théorème 1.5.17 donnent facilement le théorème :

**THEOREME 1.5.18** — *Soit une suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

Il existe alors un 2-isomorphisme de composition :

$$C : \text{Th}(\mathcal{M}) \longrightarrow \text{Th}(\mathcal{N}) \circ \text{Th}(\mathcal{L})$$

et un 2-isomorphisme de composition modifié :

$$C' : \text{Th}(\mathcal{M}) \longrightarrow \text{Th}(\mathcal{L}) \circ \text{Th}(\mathcal{N})$$

De plus si  $0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}$  est une filtration du  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre  $\mathcal{M}$  en trois crans telle que le gradué soit aussi localement libre, on a deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Th}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{C} & \mathrm{Th}(\mathcal{M}_2) \circ \mathrm{Th}(\mathcal{M}_3/\mathcal{M}_2) \\ \downarrow C & & \downarrow C \\ \mathrm{Th}(\mathcal{M}_1) \circ \mathrm{Th}(\mathcal{M}_3/\mathcal{M}_1) & \xrightarrow{C} & \mathrm{Th}(\mathcal{M}_1) \circ \mathrm{Th}(\mathcal{M}_2/\mathcal{M}_1) \circ \mathrm{Th}(\mathcal{M}_3/\mathcal{M}_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Th}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{C'} & \mathrm{Th}(\mathcal{M}_3/\mathcal{M}_2) \circ \mathrm{Th}(\mathcal{M}_2) \\ \downarrow C' & & \downarrow C' \\ \mathrm{Th}(\mathcal{M}_3/\mathcal{M}_1) \circ \mathrm{Th}(\mathcal{M}_1) & \xrightarrow{C'} & \mathrm{Th}(\mathcal{M}_3/\mathcal{M}_2) \circ \mathrm{Th}(\mathcal{M}_2/\mathcal{M}_1) \circ \mathrm{Th}(\mathcal{M}_1) \end{array}$$

### Le 2-foncteur ${}^{\mathrm{Liss}}\mathbf{H}^1$

Le théorème 1.5.18 nous permettra de définir sur  $(\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{Liss}}$  un 2-foncteur  ${}^{\mathrm{Liss}}\mathbf{H}^1$ . Bien sûr on veut que  $\mathbf{H}^1(X) = \mathbf{H}(X)$  pour tout  $S$ -schéma  $X$ . On posera pour un morphisme lisse  $f$  :

$$f^! = \mathrm{Th}(\Omega_f) \circ f^*$$

où  $\Omega_f$  est le faisceau des différentielles relatives.

Définissons les 2-isomorphismes de connexions. Pour une suite de  $S$ -morphisms lisses  $\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$ , on prendra  $c^!(f, g)$  la composée :

$$\begin{array}{ccccc} (g \circ f)^! & & & & f^!g^! \\ \parallel & & & & \parallel \\ \mathrm{Th}(\Omega_{g \circ f})(g \circ f)^* & \xrightarrow{c^!(f, g)} & \mathrm{Th}(\Omega_{g \circ f})f^*g^* & \xrightarrow{C'} & \mathrm{Th}(\Omega_f)\mathrm{Th}(f^*\Omega_g)f^*g^* & \xrightarrow{\phi(f)^{-1}} & \mathrm{Th}(\Omega_f)f^*\mathrm{Th}(\Omega_g)g^* \end{array}$$

avec  $C'$  le 2-isomorphisme de composition modifié associé à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow f^*\Omega_g \longrightarrow \Omega_{g \circ f} \longrightarrow \Omega_f \longrightarrow 0$$

Il nous faut vérifier l'axiome de cocycle. Soient les trois morphismes lisses composables :

$$\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{h} \bullet$$

Il s'agit de vérifier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (hgf)^! & \longrightarrow & (gf)^!h^! \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^!(hg)^! & \longrightarrow & f^!g^!h^! \end{array}$$

Notons pour cela le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathrm{Th}(\Omega_g)g^*\mathrm{Th}(\Omega_h) & \longrightarrow & f^*\mathrm{Th}(\Omega_g)\mathrm{Th}(g^*\Omega_h)g^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(f^*\Omega_g)f^*g^*\mathrm{Th}(\Omega_h) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(f^*\Omega_g)f^*\mathrm{Th}(g^*\Omega_h)g^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(f^*\Omega_g)(g \circ f)^*\mathrm{Th}(\Omega_h) & & \mathrm{Th}(f^*\Omega_g)\mathrm{Th}(f^*g^*\Omega_h)f^*g^* \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathrm{Th}(f^*\Omega_g)\mathrm{Th}(f^*g^*\Omega_h)(g \circ f)^* & \end{array}$$

La commutation du sous-diagramme inférieur étant la compatibilité des 2-isomorphismes  $\phi$  avec la composition. On en déduit donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Th}(\Omega_f)f^*\text{Th}(\Omega_g)g^*\text{Th}(\Omega_h)h^* & \longrightarrow & \text{Th}(\Omega_f)f^*\text{Th}(\Omega_g)\text{Th}(g^*\Omega_h)(hg)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Th}(\Omega_f)\text{Th}(f^*\Omega_g)(g \circ f)^*\text{Th}(\Omega_h)h^* & \longrightarrow & \text{Th}(\Omega_f)\text{Th}(f^*\Omega_g)\text{Th}(f^*g^*\Omega_h)(hgf)^* \end{array}$$

Et en fin de compte le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} f^!g^!h^! & \longrightarrow & f^!\text{Th}(\Omega_g)\text{Th}(g^*\Omega_h)(hg)^* & \longrightarrow & f^!\text{Th}(\Omega_{hg})(gh)^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Th}(\Omega_f)\text{Th}(f^*\Omega_g)(gf)^*h^! & \longrightarrow & \text{Th}(\Omega_f)\text{Th}(f^*\Omega_g)\text{Th}(f^*g^*\Omega_{hg})(hgf)^* & \longrightarrow & \text{Th}(\Omega_f)\text{Th}(f^*\Omega_{gh})(hgf)^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Th}(\Omega_{gf})(gf)^*h^! & \longrightarrow & \text{Th}(\Omega_{gf})\text{Th}((gf)^*\Omega_h)(hgf)^* & \longrightarrow & (hgf)^! \end{array}$$

où le carré inférieur à droite est simplement le deuxième carré commutatif du théorème 1.5.18 associé à la filtration :  $(gf)^*\Omega_h \subset f^*\Omega_{hg} \subset \Omega_{hg}$ . Ceci prouve ce que l'on veut.

### Le 2-foncteur $\text{LissH}_!$

On définit également sur  $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$  un 2-foncteur  $\text{LissH}_!$  tel que  $\text{H}_!(X) = \text{H}(X)$  pour tout  $S$ -schéma  $X$ . Pour un  $S$ -morphisme lisse  $f$  on définit le 1-morphisme  $\text{H}_!(f) = f_!$  par la formule :

$$f_! = f_{\#} \circ \text{Th}^{-1}(\Omega_f)$$

Le 1-morphisme  $f_!$  est donc adjoint à gauche à  $f^!$ . Les 2-morphismes d'unité et de counité sont respectivement :

$$\begin{array}{ccc} \text{id} \longrightarrow \text{Th}(\Omega_f)\text{Th}^{-1}(\Omega_f) & \text{et} & f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_f)\text{Th}(\Omega_f)f^* \longrightarrow f_{\#}f^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Th}(\Omega_f)f^*f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_f) & & \text{id} \end{array}$$

D'après 1.1.17 il existe un unique adjoint global à gauche  $\text{LissH}_!$  de  $\text{LissH}^!$  tel que :

- $\text{H}_!(f) = f_! = f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_f)$  pour tout  $S$ -morphisme lisse  $f$ ,
- les 2-morphismes d'unité et de counité sont ceux donnés ci-dessus.

Les 2-isomorphismes de connexions relativement à la suite  $\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$  sont donnés par la composée des 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} (g \circ f)_! & & g_!f_! \\ \parallel & & \parallel \\ (g \circ f)_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_{g \circ f}) \xrightarrow{c_{\#}(f,g)} g_{\#}f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_{g \circ f}) \xrightarrow{C'_{-1}} g_{\#}f_{\#}\text{Th}^{-1}(f^*\Omega_g)\text{Th}^{-1}(\Omega_f) & \longrightarrow & g_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_g)f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_f) \end{array}$$

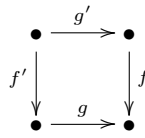
### 1.5.4 Une structure de foncteurs croisés sur $(\text{H}^*, \text{H}_*, \text{LissH}_!, \text{LissH}^!)$

Pour l'énoncé qui suivra, on utilisera la structure de foncteurs croisés sur le quadruplet  $(\text{H}^*, \text{H}_*, \text{LissH}_{\#}, \text{LissH}^*)$  relativement à la classe des carrés cartésiens à flèches verticaux lisses.

**PROPOSITION 1.5.19** — *Il existe une structure de foncteurs croisés sur le quadruplet :*

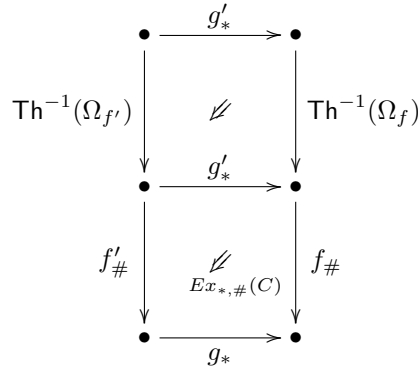
$$(\text{H}^*, \text{H}_*, \text{LissH}_!, \text{LissH}^!)$$

telle pour tout carré cartésien de  $S$ -schémas  $(C)$  :

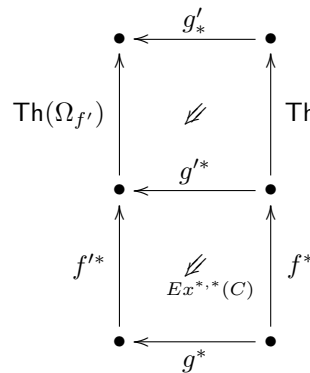


avec  $f$  lisse, on a :

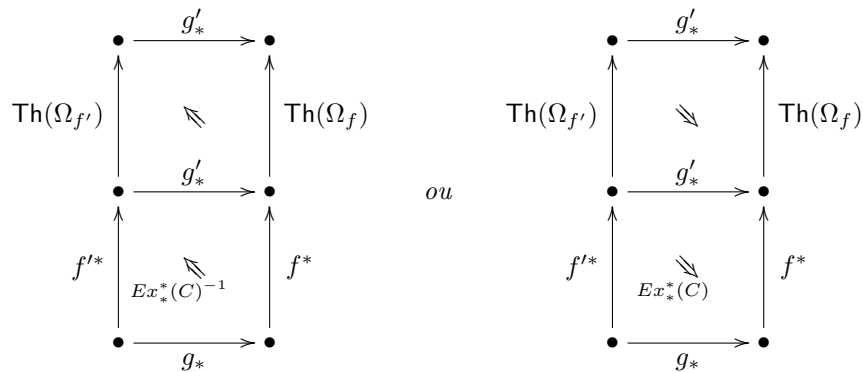
1. Le 2-morphisme d'échange  $Ex_{*,!}(C) : f_!g_* \longrightarrow g_*f'_!$  relatif à l'échange sur  $(\mathbf{H}_*, \text{Liss}\mathbf{H}^!)$  et associé au carré  $(C)$  est donné par la composée du diagramme planaire :



2. Le 2-morphisme d'échange  $Ex_{*,!}(C) : g'^*f^! \longrightarrow f^!g^*$  relatif à l'échange sur  $(\mathbf{H}^*, \text{Liss}\mathbf{H}^!)$  et associé au carré  $(C)$  est donné par la composée du diagramme planaire :



3. Le 2-isomorphisme d'échange  $Ex_{*,!}(C) : f^!g_* \xleftarrow{\sim} g'_*f^!$  relatif à l'isoéchange sur  $(\mathbf{H}_*, \text{Liss}\mathbf{H}^!)$  et associé au carré  $(C)$  est donné par la composée du diagramme planaire :

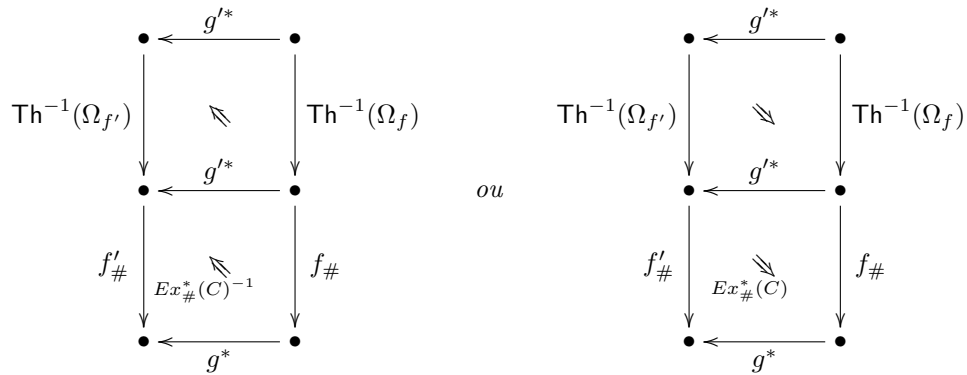


selon le sens de l'isoéchange ( $\nearrow$  ou  $\searrow$ ).

4. Le 2-morphisme d'échange  $Ex_{*,!}(C) : f_!g'_* \longrightarrow g_*f'_!$  relatif à l'échange sur  $(\mathbf{H}_*, \text{Liss}\mathbf{H}^!)$  et associé au carré  $(C)$



est donné par la composée du diagramme planaire :



selon le sens de l'isoéchange ( $\curvearrowright$  ou  $\curvearrowleft$ ).

DEMONSTRATION Il s'agit de vérifier les deux points suivants :

1. Les 2-morphismes définis par les diagrammes planaires de l'énoncé définissent bien des structures d'échange.
2. Les échanges s'organisent en un foncteur croisé.

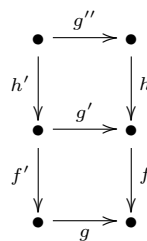
Pour cela, il suffira de prouver (compte tenu que les quatre derniers diagrammes planaires de l'énoncé définissent des 2-isomorphismes) les deux points suivants :

1. La famille des 2-morphismes  $Ex_{*,!}^1(C)$  pour  $(C)$  variant dans la classe des carrés cartésiens à morphismes verticaux lisses définit une structure d'échange sur le couple  $(\mathbf{H}^*, \text{LissH}^!)$ .
2. Les autres 2-morphismes :  $Ex_{*,!}(C)$ ,  $Ex_!^1(C)$  et  $Ex_!^*(C)$  sont obtenus par applications itérées de 1.2.5 à partir de  $Ex_{*,!}^1(C)$  (on se permet de prendre l'inverse lorsqu'il existe pour tous les carrés cartésiens).

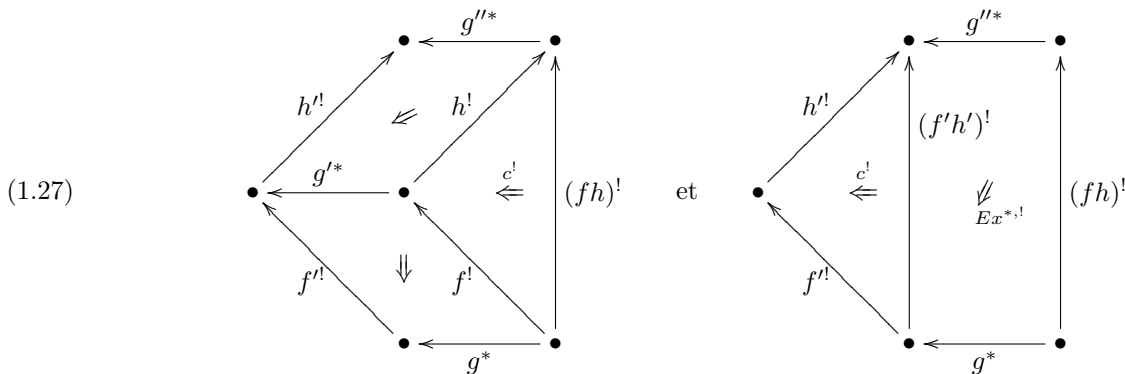
Le second point est clair par les propositions 1.1.9 , 1.1.11 et 1.1.12 et la définition même des 2-isomorphismes de commutation avec les équivalences de Thom. Il nous reste donc à établir le premier point, i.e., à vérifier la compatibilité des 2-morphismes  $Ex_{*,!}^1(C)$  avec la composition des carrés cartésiens. Là encore on distingue deux cas suivant la nature de la composition :

1. La compatibilité avec la composition horizontale des carrés.
2. La compatibilité avec la composition verticale des carrés.

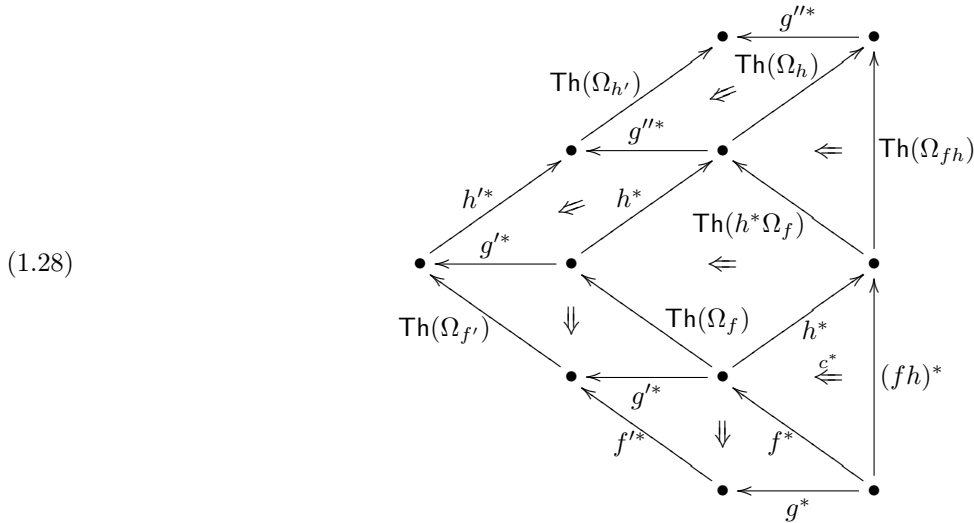
Le premier point est très facile, on le laisse en exercice. On s'intéresse donc à établir la compatibilité avec la composition verticale des carrés. On se donne donc un diagramme commutatif à carrés cartésiens :



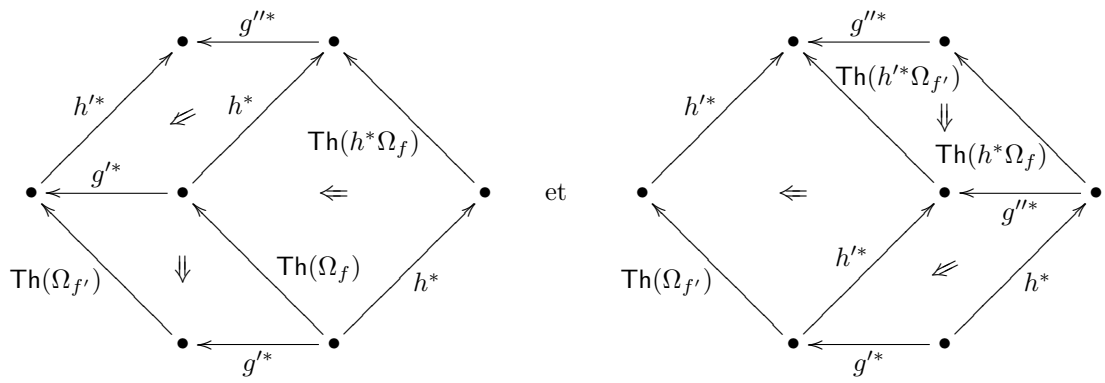
Il s'agit de prouver que les deux diagrammes planaires :



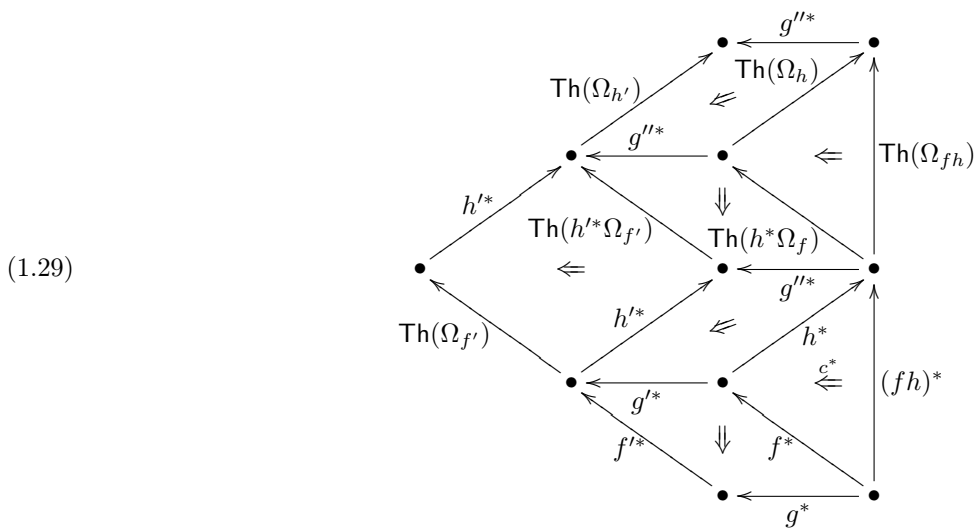
définissent le même 2-morphisme. Pour prouver cela on va expliciter les 2-morphismes qui figurent dans le premier diagramme planaire. On obtient alors le diagramme planaire suivant :



Le fait que les équivalences de Thom munies des 2-isomorphismes de commutations avec les  $H^*(\cdot)$  forment une auto-équivalence de 2-foncteurs (compatible avec la structure d'échange triviale donnée par les  $Ex^{*,*}$ ) implique que les composées des deux diagrammes planaires :



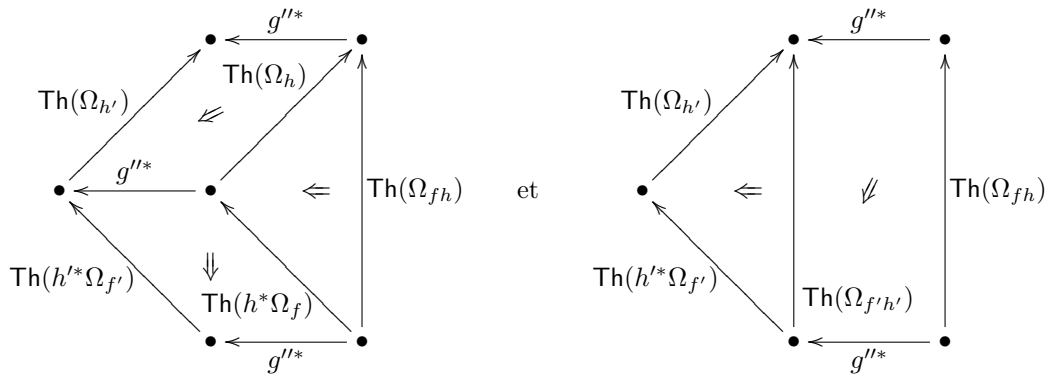
sont les mêmes. En remplaçant dans (1.28) le premier des deux diagrammes planaires ci-dessus par le deuxième, nous obtenons le diagramme planaire suivant :



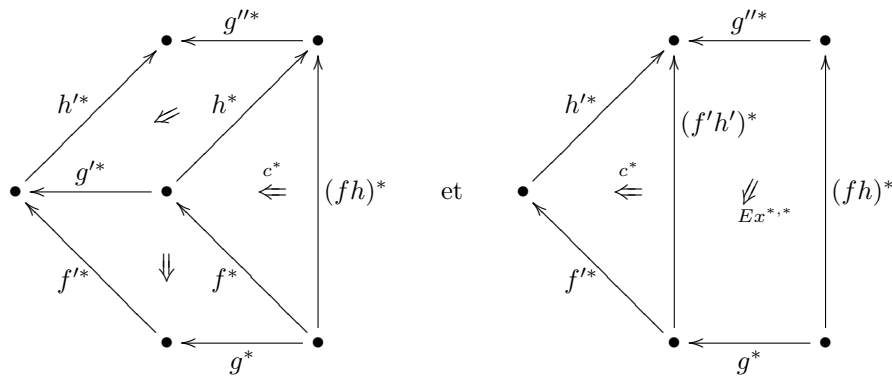
En utilisant maintenant le fait que les 2-isomorphismes :

$$\text{Th}(\Omega_{fh}) \xrightarrow{C'} \text{Th}(\Omega_h)\text{Th}(h^*\Omega_f)$$

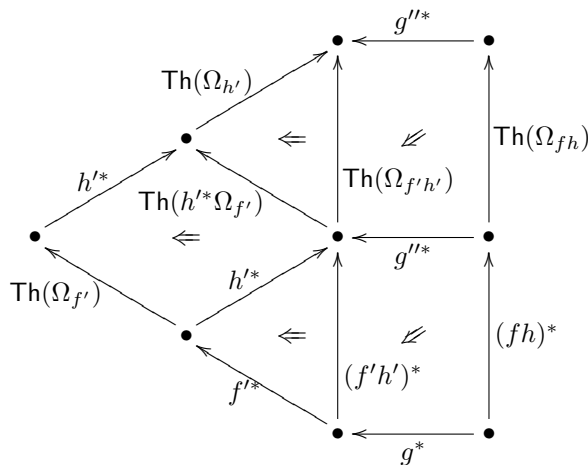
s'organisent en un isomorphisme d'autoéquivalences de 2-foncteurs (voir le théorème 1.5.17), on voit que les deux diagrammes planaires :



définissent le même 2-morphisme. De même l'axiome de cocycle pour les 2-isomorphismes de connexion du 2-foncteur  $H^*$  nous dit que les deux diagrammes planaires :



définissent le même 2-morphisme. En remplaçant dans (1.29) on obtient en fin de compte le diagramme planaire suivant :



dont la composée est exactement celle du second diagramme planaire de (1.27). La proposition est prouvée. C.Q.F.D

### 1.5.5 L'action des automorphismes sur les équivalences de Thom

On termine cette section par l'étude de la functorialité des équivalences  $\text{Th}(s,p)$  et  $\text{Th}^{-1}(s,p)$  par rapport à la paire  $(s,p)$ . Le problème est le suivant. Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. On se donne deux suites :

$$X \xrightarrow{s} V \xrightarrow{p} X \quad \text{et} \quad X \xrightarrow{s'} V' \xrightarrow{p'} X$$

avec  $s, s'$  des immersions fermées,  $p, p'$  lisses et  $p \circ s = p' \circ s' = \text{id}_X$ . Supposons donné un isomorphisme  $a : V' \xrightarrow{\sim} V$  rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{s'} & V' & \xrightarrow{p'} & X \\ \parallel & & \downarrow \sim & \downarrow a & \parallel \\ X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

Comme  $a$  est inversible, le diagramme ci-dessus est à carrés cartésiens. En utilisant la proposition 1.5.2 et le lemme 1.5.3, on déduit deux 2-isomorphismes :

$$\omega(a) : \text{Th}(s', p') \xrightarrow{\sim} \text{Th}(s, p) \quad \text{et} \quad \omega_{-1}(a) : \text{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(s', p')$$

ainsi que deux carrés commutatifs :

$$(1.30) \quad \begin{array}{ccc} \text{id} & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(s, p)\text{Th}(s, p) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \omega_{-1}(a) \\ \text{Th}^{-1}(s', p')\text{Th}(s', p') & \xrightarrow{\omega(a)} & \text{Th}^{-1}(s', p')\text{Th}(s, p) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{id} & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s, p) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \omega_{-1}(a) \\ \text{Th}(s', p')\text{Th}^{-1}(s', p') & \xrightarrow{\omega(a)} & \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s', p') \end{array}$$

On vérifie immédiatement que le couple  $(\text{Th}(-), \omega(-))$  (resp.  $(\text{Th}^{-1}(-), \omega_{-1}(-))$ ) définit un foncteur covariant (resp. contravariant) de la catégorie des suites  $X \longrightarrow \bullet \longrightarrow X$  (et les isomorphismes  $\bullet \simeq \bullet$ ) vers celle des équivalences de  $\mathcal{H}(X)$ . Le résultat suivant est facile ; il est laissé en exercice :

**PROPOSITION 1.5.20** — *Indiquons par  $1$  pour désigner le pull-back suivant un  $X$ -schéma  $X_1 \longrightarrow X$ . Les 2-isomorphismes  $\omega(a_1)$  définissent un isomorphisme d'autoéquivalences entre l'autoéquivalence  $(\text{Th}(s'_1, p'_1))_{X_1 \rightarrow X}$  et l'autoéquivalence  $(\text{Th}(s_1, p_1))_{X_1 \rightarrow X}$ , ceci pour les restrictions des 2-foncteurs  $\mathcal{H}^*, \mathcal{H}_*, \text{Liss}\mathcal{H}_\#$  et  $\text{Imm}\mathcal{H}^!$  à la catégorie  $(\text{Sch}/X)$ .*

Supposons maintenant que  $(s, p) = (s', p')$ . En d'autres termes,  $a$  est un automorphisme du couple  $(s, p)$ . On a alors deux automorphismes  $\omega(a)$  et  $\omega_{-1}(a)$  de  $\text{Th}(s, p)$  et  $\text{Th}^{-1}(s, p)$  respectivement. On a le lemme suivant :

**LEMME 1.5.21** — *1- Les deux composées suivantes :*

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathcal{H}(X)} &\xrightarrow{\sim} \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{\omega(a)} \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{H}(X)} \\ \text{id}_{\mathcal{H}(X)} &\xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(s, p)\text{Th}(s, p) \xrightarrow{\omega(a)} \text{Th}^{-1}(s, p)\text{Th}(s, p) \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{H}(X)} \end{aligned}$$

sont égales.

*2- Les deux composées suivantes :*

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathcal{H}(X)} &\xrightarrow{\sim} \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{\omega_{-1}(a)} \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{H}(X)} \\ \text{id}_{\mathcal{H}(X)} &\xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(s, p)\text{Th}(s, p) \xrightarrow{\omega_{-1}(a)} \text{Th}^{-1}(s, p)\text{Th}(s, p) \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{H}(X)} \end{aligned}$$

sont égales.

**DEMONSTRATION** On démontre uniquement la partie **1**. Appliquons la première composée à  $\text{Th}(s, p)$ . On obtient :

$$(1.31) \quad \text{Th}(s, p) \xrightarrow{\sim} \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s, p)\text{Th}(s, p) \xrightarrow{\omega(a)\text{idoid}} \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s, p)\text{Th}(s, p) \xrightarrow{\sim} \text{Th}(s, p)$$

En utilisant les carrés commutatifs (1.30), il est facile de voir que les deux 2-isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s, p)\text{Th}(s, p) &\xrightarrow{\omega(a)\text{idoid}} \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s, p)\text{Th}(s, p) \\ \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s, p)\text{Th}(s, p) &\xrightarrow{\text{idoid}\omega(a)} \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s, p)\text{Th}(s, p) \end{aligned}$$

coïncident avec  $\mathrm{Th}(s, p)\mathrm{Th}^{-1}(s, p)\mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\mathrm{id}\omega_{-1}(a)\mathrm{oid}} \mathrm{Th}(s, p)\mathrm{Th}^{-1}(s, p)\mathrm{Th}(s, p)$ . En particulier, ils sont égaux. Ceci montre que la composée de (1.31) coïncide avec :

$$(1.32) \quad \mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s, p)\mathrm{Th}^{-1}(s, p)\mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\mathrm{id}\mathrm{oid}\omega(a)} \mathrm{Th}(s, p)\mathrm{Th}^{-1}(s, p)\mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s, p)$$

qui n'est autre que la seconde composée de l'énoncé auquel on a appliqué  $\mathrm{Th}(s, p)$ . Le lemme découle alors du fait que  $\mathrm{Th}(s, p)$  est une équivalence. C.Q.F.D

**DEFINITION 1.5.22** — *Étant donné un automorphisme  $a : V \xrightarrow{\sim} V$  compatible avec  $(s, p)$ , on note  $\omega(V, a)$  (resp.  $\omega_{-1}(V, a)$ ) l'automorphisme de  $\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$  défini via l'une des deux composées de la partie 1 (resp. la partie 2) du lemme 1.5.21.*

**LEMME 1.5.23** — *Sous les hypothèses de la définition précédente, on a  $\omega(V, a) = \omega_{-1}(V, a)$ . De plus, si l'on applique  $\mathrm{Th}(s, p)$  (resp.  $\mathrm{Th}^{-1}(s, p)$ ) à  $\omega(V, a)$  (resp.  $\omega_{-1}(V, a)$ ) on obtient  $\omega(a)$  (resp.  $\omega_{-1}(a)$ ). De même, si l'on applique  $\omega(V, a)$  (resp.  $\omega_{-1}(V, a)$ ) à  $\mathrm{Th}(s, p)$  (resp.  $\mathrm{Th}^{-1}(s, p)$ ) on obtient  $\omega(a)$  (resp.  $\omega_{-1}(a)$ ).*

DEMONSTRATION L'égalité  $\omega(V, a) = \omega_{-1}(V, a)$  découle immédiatement des carrés commutatifs (1.30). Les autres assertions découlent du lemme 1.5.21. C.Q.F.D

**Remarque 1.5.24** — Les deux transformations naturelles  $\omega(V, -)$  et  $\omega_{-1}(V, -)$  sont de variances opposées par rapport à  $a$ . Comme elles sont égales, on déduit que  $\omega(V, a.b) = \omega(V, b.a)$  ou encore que les  $\omega(V, -)$  commutent entre elles. Ceci est en fait tout à fait normal, étant donné que  $\mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)})$  est un groupe abélien. Ainsi, la représentation  $\omega(V, -) : \mathrm{Aut}(s, p) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)})$  se factorise à travers  $\mathrm{Aut}(s, p)/(\mathrm{Aut}(s, p))'$  avec  $(\mathrm{Aut}(s, p))'$  le sous-groupe distingué des commutateurs (appelé aussi le sous-groupe dérivé).

**PROPOSITION 1.5.25** — *Indiquons par 1 pour désigner le pull-back suivant un  $X$ -schéma  $X_1 \longrightarrow X$ . Les 2-isomorphismes  $\omega(V_1, a_1)$  définissent un automorphisme d'autoéquivalences entre les autoéquivalences identités de  $\mathrm{H}(X_1)$ , ceci pour les restrictions des 2-foncteurs  $H^*, H_*, \mathrm{Liss}H_{\#}$  et  $\mathrm{Imm}H^!$  à la catégorie  $(\mathrm{Sch}/X)$ .*

**DEFINITION 1.5.26** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini. Soit  $a$  un automorphisme de  $\mathcal{M}$ . On posera  $\omega(a) = \omega(\mathbb{V}(a))$ ,  $\omega_{-1}(a) = \omega_{-1}(\mathbb{V}(a))$ ,  $\omega(\mathcal{M}, a) = \omega(\mathbb{V}(\mathcal{M}), \mathbb{V}(a))$  et  $\omega_{-1}(\mathcal{M}, a) = \omega_{-1}(\mathbb{V}(\mathcal{M}), \mathbb{V}(a))$ . Pour  $u \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)$ , on posera aussi  $\omega(\mathcal{M}, u) = \omega(\mathbb{V}(\mathcal{M}), \mathbb{V}(u \times -))$  et  $\omega_{-1}(\mathcal{M}, u) = \omega_{-1}(\mathbb{V}(\mathcal{M}), \mathbb{V}(u \times -))$ .*

**Remarque 1.5.27** — Supposons que  $X$  est le spectre d'un corps  $k$  et soit  $\mathcal{M}$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension fini. D'après la remarque 1.5.24, la représentation  $\omega(\mathcal{M}, -) : \mathrm{Gl}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathrm{H}(k)})$  se factorise par le déterminant  $\det : \mathrm{Gl}(\mathcal{M}) \longrightarrow k^\times$ .

## 1.6 Pureté. Construction du foncteur croisé $(H^*, H_*, H_l, H^!)$

On commence la section par un lemme simple qui sera utilisé (ainsi que son corollaire) plusieurs fois dans la suite. Ce résultat utilise d'une manière essentielle l'axiome d'homotopie. Soit  $X$  un  $S$ -schéma. On considère le diagramme commutatif dans  $(\mathrm{Sch}/S)$  :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_X^1 & \xleftarrow{j} & \mathbb{E}_X^1 \\ & \searrow & \downarrow p & \swarrow q & \\ & & X & & \end{array}$$

avec  $j$  l'inclusion de la droite affine époutée  $\mathbb{E}_X^1$  complémentaire dans  $\mathbb{A}_X^1$  de la section nulle  $i$ . Voici notre lemme :

**LEMME 1.6.1** — *Le 2-morphisme :*

$$i^!p^* \longrightarrow i^*p^*$$

déduit de la composée :

$$(1.33) \quad i_*i^!p^* \xrightarrow{\delta} p^* \xrightarrow{\eta} i_*i^*p^*$$

et du fait que la counité  $i^*i_* \rightarrow \mathrm{id}$  est un 2-isomorphisme, est nul. En particulier la composée (1.33) est elle aussi nulle.

DEMONSTRATION En remarquant que  $p_*i_* \simeq \text{id}$ , on voit qu'il suffit de prouver que la composée :

$$p_*i_*i^!p^* \xrightarrow{\delta} p_*p^* \xrightarrow{\eta} p_*i_*i^*p^*$$

est nulle. Soit  $i_1 : X \longrightarrow \mathbb{A}_X^1$  la section unité de  $p$ . Montrons que le carré de 2-morphismes ci-dessous :

$$(1.34) \quad \begin{array}{ccc} p_*p^* & \xrightarrow{\eta} & p_*i_*i^*p^* \\ \eta \downarrow & & \downarrow \sim \\ p_*i_{1*}i_1^*p^* & \xrightarrow{\sim} & \text{id}_{X*}\text{id}_X^* \end{array}$$

est commutatif (les 2-morphismes désignés par un  $\sim$  étant des composées de 2-isomorphismes de connexions). L'axiome d'homotopie nous dit que le 2-morphisme :

$$\text{id}_{\mathbf{H}(X)} \xrightarrow{\eta} p_*p^*$$

est inversible. Il suffit donc de prouver que le bord du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & & \eta & \\ & & & \curvearrowright & \\ \text{id}_{\mathbf{H}(X)} & & & & \\ & \eta & & & \\ & \searrow & & & \\ & & p_*p^* & \xrightarrow{\eta} & p_*i_*i^*p^* \\ & & \eta \downarrow & & \downarrow \sim \\ & & p_*i_{1*}i_1^*p^* & \xrightarrow{\sim} & \text{id}_{X*}\text{id}_X^* \\ & \eta & & & \end{array}$$

est commutatif. Il faut donc prouver que les deux composées :

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathbf{H}(X)} &\xrightarrow{\eta} p_*p^* \xrightarrow{\eta} p_*i_*i^*p^* \longrightarrow \text{id}_{X*}\text{id}_X^* \\ \text{id}_{\mathbf{H}(X)} &\xrightarrow{\eta} p_*p^* \xrightarrow{\eta} p_*i_{1*}i_1^*p^* \longrightarrow \text{id}_{X*}\text{id}_X^* \end{aligned}$$

sont égales. Mais par le lemme 1.1.4, les deux composées ci-dessus sont égales au 2-morphisme d'unité de l'adjonction entre  $\text{id}_{X*}$  et  $\text{id}_X^*$ . Ceci prouve la commutation du carré (1.34). Donc pour prouver le lemme, il suffira de prouver que la composée :

$$p_*i_*i^!p^* \xrightarrow{\delta} p_*p^* \xrightarrow{\eta} p_*i_{1*}i_1^*p^*$$

est nulle. Mais cette composée provient de la composée :

$$(1.35) \quad i_*i^!p^* \xrightarrow{\delta} p^* \xrightarrow{\eta} i_{1*}i_1^*p^*$$

par application de  $p^*$ . Il suffira donc de prouver que la composée de (1.35) est nulle. Par adjonction, on est ramené à montrer que la composée :

$$i_1^*i_*i^!p^* \xrightarrow{\delta} i_1^*p^* \xlongequal{\quad} i_1^*p^*$$

est nulle. Ceci est évident<sup>7</sup> puisque  $i_1^*i_* \simeq 0$ .

C.Q.F.D

Voici un corollaire du lemme précédent.

**COROLLAIRE 1.6.2** — Soit  $A$  un objet de  $\mathbf{H}(X)$ . Lorsqu'on applique  $i^*$  au triangle distingué :

$$i_*i^!p^*A \xrightarrow{\delta} p^*A \xrightarrow{\eta} j_*q^*A \xrightarrow{\theta} i_*i^!p^*A[+1]$$

<sup>7</sup>On peut voir cela en utilisant par exemple le théorème de changement de base pour une immersion fermée (voir le lemme 1.4.14) appliqué au carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{A}_X^1 \end{array}$$

on obtient un triangle distingué scindé. En particulier, le morphisme :

$$i^* j_* q^* A \xrightarrow{\theta} i^! p^* A[+1]$$

admet une section<sup>8</sup>

### 1.6.1 Les 2-morphismes $\pi$

On fixe un triangle commutatif de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec  $s$  une immersion fermée et  $f$  et  $g$  des morphismes lisses. On comparera les deux 1-morphismes  $g^*$  et  $s^! f^*$  de  $\text{Mor}_{\mathfrak{T}\mathfrak{R}}(\mathbf{H}(Z), \mathbf{H}(Y))$ . Plus précisément on construira un 2-isomorphisme (appelé *2-isomorphisme de pureté*) :

$$(1.36) \quad \Pi : s^! f^* \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*$$

avec  $\mathcal{N}_s$  le fibré normal de l'immersion régulière  $s$ . Notre outil géométrique est l'espace de déformation au cône normal qui sera noté  $C$  (voir le chapitre 5 de [Ful84]). Rappelons que  $C$  est un ouvert de l'éclaté du sous-schéma fermé  $Y \times 0$  dans  $X \times_S \mathbb{A}_S^1$ . Le choix d'un générateur  $t \in \Gamma(\mathbb{A}_S^1, \mathcal{O})$  de l'idéal de la section nulle permet d'identifier  $C \times_{\mathbb{A}^1} 0$  et  $\mathbb{V}(\mathcal{N}_s.t^{-1})$ . Ce dernier est isomorphe à  $\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)$  via l'isomorphisme  $- \times t^{-1} : \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_s.t^{-1}$ . Dans la suite, ce générateur sera fixé une fois pour toute. La construction du 2-isomorphisme de pureté ne dépendra pas de ce choix (voir la remarque 1.6.4).

On résume la déformation dans la figure :

$$(1.37) \quad \begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & & \mathbb{A}_Y^1 & \xrightarrow{\hat{s}} & C & & \mathbb{E}_Y^1 & \xrightarrow{\tilde{s}} & \mathbb{E}_X^1 \\ & \searrow g_0 & \downarrow f_0 & \xrightarrow{i} & \downarrow \hat{g} & & \downarrow \hat{f} & \xleftarrow{j} & \downarrow \tilde{g} & & \downarrow \tilde{f} \\ & & Z & & \mathbb{A}_Z^1 & & \mathbb{E}_Z^1 & & & & \\ & & & & \downarrow p & & \downarrow q & & & & \\ & & & & Z & & & & & & \end{array}$$

où l'on note  $i$  les immersions fermées déduites par pull-back de l'immersion de la section nulle de  $\mathbb{A}^1$  et  $j$  les immersions ouvertes déduites de l'immersion du complémentaire  $\mathbb{E}^1$  de la section nulle de  $\mathbb{A}^1$ . Le fait que  $g$  est un morphisme lisse implique la lissité des  $S$ -morphisms  $\hat{f}$  et  $f_0$ . Le 2-isomorphisme de pureté sera déduit d'un certain 2-morphisme  $\pi : j_* q^* [s^! f^*] \longrightarrow i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1]$ . Cette sous-section est consacrée à la construction et à l'étude de ce 2-morphisme.

Voici la construction du 2-morphisme  $\pi$ . Rappelons qu'on dispose d'un 2-morphisme  $\theta$  :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{j^*} & \bullet \\ i^! \downarrow & \theta & \downarrow j_* \\ \bullet & \xrightarrow{i_*[+1]} & \bullet \end{array}$$

défini comme étant l'unique 2-morphisme tel que pour tout  $A$  dans  $\text{Ob}(\mathbf{H}(\bullet))$  le triangle :

$$i_* i^! A \xrightarrow{\delta} A \xrightarrow{\eta} j_* j^* A \xrightarrow{\theta} i_* i^! A[+1]$$

<sup>8</sup>Nous ignorons s'il existe une section fonctorielle en  $A \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$ , i.e., s'il existe un 2-morphisme inverse à droite de  $\theta$ . Toutefois, lorsque  $\mathbf{H}$  provient d'un dérivateur algébrique homotopique stable (voir le second chapitre pour la définition de cette notion) une telle section peut être construite à l'aide du formalisme des foncteurs cycles proches du troisième chapitre.

est distingué (voir la proposition 1.4.9). En appliquant  $\theta$  au 1-morphisme  $\hat{s}^! f^* p^*$  on obtient un 2-morphisme :

$$\theta : j_* j^* [s^! \hat{f}^* p^*] \longrightarrow i_* i^! [s^! \hat{f}^* p^*][+1]$$

D'autre part, on a un premier 2-isomorphisme "évident" :

$$j_* j^* \hat{s}^! \hat{f}^* p^* \xrightarrow{\sim} j_* \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* \xrightarrow{\sim} j_* q^* s^! f^*$$

et un deuxième 2-isomorphisme "évident" :

$$i^! \hat{s}^! \hat{f}^* p^* \xrightarrow{\sim} s_0^! i^! \hat{f}^* p^* \xrightarrow{\sim} s_0^! f_0^* i^! p^* \xrightarrow{\sim} s_0^! f_0^* (-1)[-2]$$

On définit ainsi un 2-morphisme :

$$(1.38) \quad \pi_0 : j_* q^* [s^! f^*] \longrightarrow i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1]$$

par la condition que le carré ci-dessous soit commutatif :

$$(1.39) \quad \begin{array}{ccc} j_* j^* [s^! \hat{f}^* p^*] & \xrightarrow{\theta} & i_* i^! [s^! \hat{f}^* p^*][+1] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi_0} & i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1] \end{array}$$

On fait la définition suivante :

**DEFINITION 1.6.3** — On appelle  $\pi : j_* q^* [s^! f^*] \longrightarrow i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1]$  le 2-morphisme composé :

$$(1.40) \quad j_* q^* [s^! f^*] = j_* \text{id}_{\mathbb{H}(\mathbb{E}_Y^1)} q^* [s^! f^*] \xrightarrow{\omega(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1})} j_* \text{id}_{\mathbb{H}(\mathbb{E}_Y^1)} q^* [s^! f^*] = j_* q^* [s^! f^*] \xrightarrow{\pi_0} i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1]$$

avec  $t \in \Gamma(\mathbb{A}_S^1, \mathcal{O})$  le générateur de l'idéal de la section nulle qu'on s'est fixé (voir la sous-section 1.5.5 et plus précisément la remarque 1.5.26 pour la définition de  $\omega(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1})$ ). Dans le langage des diagrammes planaires, le 2-morphisme  $\pi$  est la composée :

$$(1.41) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{H}(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & \mathbb{H}(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & \mathbb{H}(Y) \\ & \nearrow i^! & & \nearrow \uparrow (Ex^{!,*})^{-1} & & \nearrow i^! & \\ & & \mathbb{H}(Z) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & \mathbb{H}(C) & \xrightarrow{\hat{s}^!} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_Y^1) \\ & \nearrow j^* & & \nearrow \uparrow & & \nearrow j^* & \\ & & \mathbb{H}(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_X^1) & \xrightarrow{\tilde{s}^!} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_Y^1) \\ & \nearrow q^* & & \nearrow \uparrow Ex^{!,*} & & \nearrow q^* & \\ & & \mathbb{H}(Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathbb{H}(X) & \xrightarrow{s^!} & \mathbb{H}(Y) \end{array}$$

$\uparrow \theta$   
 $\omega(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1})$

modulo l'égalité  $i^! p^* = (-1)[-2]$  et le 2-isomorphisme  $[+1]s_0^! f_0^* \simeq s_0^! f_0^* [+1]$ . A part  $\theta$ , tous les 2-morphisme de ce diagramme planaire sont des 2-isomorphismes.

**Remarque 1.6.4** — Le 2-morphisme  $\pi$  ne dépend pas du choix du générateur  $t$  de la section nulle de  $\mathbb{A}_S^1$ . En effet, si l'on fait un autre choix  $t'$  il existe une section  $u \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^\times)$  et des sections  $\epsilon_i \in \Gamma(S, \mathcal{O})$  nilpotentes avec  $t' = u.t + \sum_{i=2}^n \epsilon_i t^i$ .

Par l'axiome de localité, une immersion fermée  $\iota : T_1 \subset T_2$  d'idéal nilpotent induit une équivalence de catégories  $\iota^* : \mathbb{H}(T_2) \simeq \mathbb{H}(T_1)$ . On peut donc supposer que les  $\epsilon_i$  sont tous nuls. On se ramène ainsi au cas où  $t' = u.t$ .



Dans ce cas, les deux isomorphismes  $\mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \simeq C \times_{\mathbb{A}^1} 0$  diffèrent par la multiplication par  $u$ . On a ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} j_*q^*[s^!f^*] & \xrightarrow{\omega(q^*\mathcal{N}_s, t'^{-1})} & j_*q^*[s^!f^*] & \xrightarrow{\pi_0} & i_*s_0^!f_0^*(-1)[-1] \\ \omega(q^*\mathcal{N}_s, u^{-1}) \downarrow & & \parallel & & \downarrow \omega_{-1}(\mathcal{N}_s, u^{-1}) \\ j_*q^*[s^!f^*] & \xrightarrow{\omega(q^*\mathcal{N}_s, t^{-1})} & j_*q^*[s^!f^*] & \xrightarrow{\pi'_0} & i_*s_0^!f_0^*(-1)[-1] \end{array}$$

En utilisant que  $\omega_{-1}(\mathcal{N}_s, u^{-1}) = \omega(\mathcal{N}_s, u^{-1})$ , il est facile de déduire que la composée des deux lignes horizontales du diagramme ci-dessus sont égales.

On peut également déduire de  $\pi$  un autre 2-morphisme par adjonction :

$$(1.42) \quad i^*j_*q^*[s^!f^*] \longrightarrow s_0^!f_0^*(-1)[-1]$$

On notera également  $\pi$  ce 2-morphisme.

On prouvera d'ici la fin de la sous-section trois compatibilités pour les 2-morphismes  $\pi$  sous leur formes (1.40) et (1.42). Notons que ces compatibilités sont également vraies pour le 2-morphisme  $\pi_0$ .

**Compatibilité avec les restrictions suivant des morphismes lisses**

Supposons donné un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t} & R \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ Y & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

avec  $v$  lisse. Les déformations aux cônes normaux sont compatibles, i.e., on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{t_0} & \mathbb{V}(u^*\mathcal{N}_s) & & \mathbb{A}_T^1 & \xrightarrow{\hat{t}} & D & & \mathbb{E}_T^1 & \xrightarrow{\hat{t}} & \mathbb{E}_R^1 \\ u_0 \downarrow & & \downarrow v_0 & & \hat{u} \downarrow & & \downarrow \hat{v} & & \hat{u} \downarrow & & \downarrow \hat{v} \\ Y & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & & \mathbb{A}_Y^1 & \xrightarrow{\hat{s}} & C & & \mathbb{E}_Y^1 & \xrightarrow{\hat{s}} & \mathbb{E}_X^1 \\ & & \downarrow f_0 & & \downarrow \hat{f} & & \downarrow \hat{f} & & \downarrow \hat{f} & & \downarrow \hat{f} \\ & & Z & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_Z^1 & & Z & \xleftarrow{j} & \mathbb{E}_Z^1 & & Z \\ & & & & \downarrow p & & & & \downarrow q & & \\ & & & & Z & & & & & & \end{array}$$

à carrés cartésiens. On a la proposition :

**PROPOSITION 1.6.5** — *Le carré ci dessous est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \hat{u}^*j_*q^*[s^!f^*] & \xrightarrow{\pi} & \hat{u}^*i_*[s_0^!f_0^*(-1)[-1]] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ j_*q^*[t^!(f \circ v)^*] & \xrightarrow{\pi} & i_*[t_0^!(f_0 \circ v_0)^*(-1)[-1]] \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées des diagrammes planaires :

$$\begin{array}{ccccccc} H(R) & \xrightarrow{t^!} & H(T) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_T^1) \\ \uparrow (fv)^* & & \uparrow v^* & \swarrow Ex^{1,*} & \uparrow u^* & \swarrow & \uparrow \tilde{u}^* & \swarrow Ex_*^* & \uparrow \hat{u}^* \\ H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) & \xrightarrow{s^!} & H(Y) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_Y^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_Y^1) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{H}(\mathbb{V}(u^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{t_0^!} & \mathbb{H}(T) & \xrightarrow{i_*} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_T^1) \\
 & \nearrow (f_0 v_0)^* & \uparrow v_0^* & \nearrow Ex^{!,*} & \uparrow u_0^* & \nearrow Ex_*^* & \uparrow \hat{u}_0^* \\
 \mathbb{H}(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & \mathbb{H}(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & \mathbb{H}(Y) & \xrightarrow{i_*} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_Y^1) \\
 & \nwarrow (c^*)^{-1} & & & & & 
 \end{array}$$

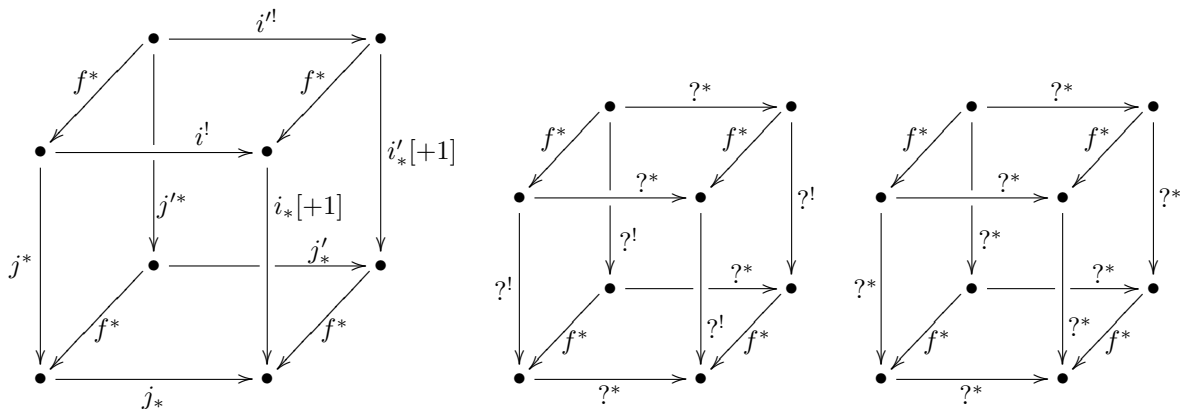
Noter bien qu'il y a des redondances dans les notations :  $u_0 = u$ ,  $\hat{u} = \hat{u}_0$ , etc.

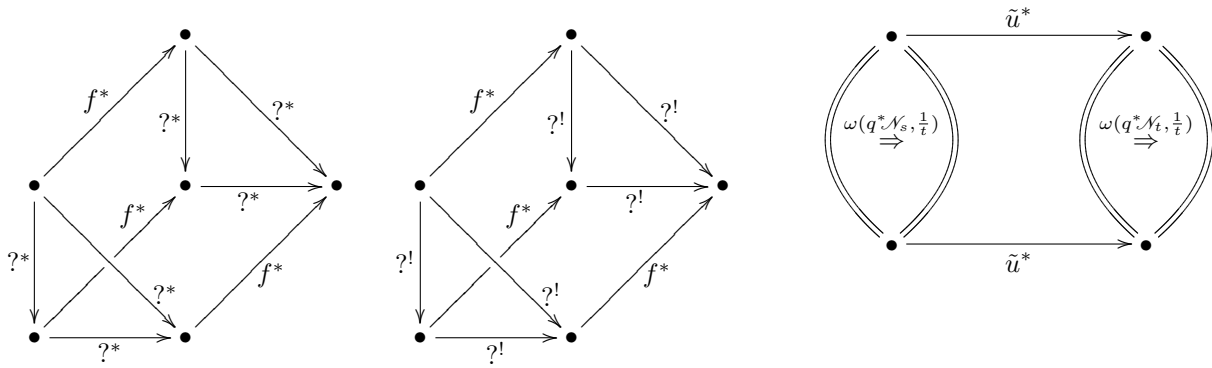
DEMONSTRATION On construit un diagramme solide à partir du diagramme planaire (1.41) et :

(1.43)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbb{H}(Z) & \xrightarrow{(f_0 v_0)^*} & \mathbb{H}(\mathbb{V}(u^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{t_0^!} & \mathbb{H}(T) \\
 & \nearrow t^! & \nearrow \nearrow (Ex^{!,*})^{-1} & \nearrow t^! & \nearrow \nearrow & \nearrow t^! & \nearrow \\
 \mathbb{H}(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{(\hat{f}\hat{v})^*} & \mathbb{H}(D) & \xrightarrow{\hat{t}^!} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_T^1) & & \mathbb{H}(\mathbb{A}_T^1) \\
 \uparrow p^* & \nearrow j^* & \nearrow \nearrow & \nearrow j^* & \nearrow \nearrow (Ex^{!,*})^{-1} & \nearrow j^* & \nearrow \\
 & \nwarrow c^* & \mathbb{H}(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{(\tilde{f}\tilde{v})^*} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_R^1) & \xrightarrow{\tilde{t}^!} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_T^1) \\
 & \nearrow q^* & \nearrow \nearrow & \nearrow q^* & \nearrow \nearrow Ex^{!,*} & \nearrow q^* & \nearrow \\
 \mathbb{H}(Z) & \xrightarrow{(fv)^*} & \mathbb{H}(R) & \xrightarrow{t^!} & \mathbb{H}(T) & & \mathbb{H}(\mathbb{E}_T^1) \\
 & & & & & & \omega(q^* \mathcal{N}_t, t^{-1})
 \end{array}$$

en identifiant les 1-morphismes hachurés ainsi que la face qu'ils délimitent et en reliant les sommets ne se trouvant pas sur la partie commune par des 1-morphismes  $f^*$ ,  $\hat{f}^*$ ,  $\tilde{f}^*$  et  $f_0^*$  (qu'on notera  $f^*$  dans cette preuve pour simplifier) et en mettant sur les nouvelles faces créées des 2-morphismes de connexions  $c^*$  si cette face est un triangle ou un 2-morphisme d'échange ( $Ex_*^*$  ou  $Ex^{!,*}$  ou  $Ex^{!,*}$ ) si cette face est un carré. On invite le lecteur à se convaincre qu'il existe une unique façon de construire un tel diagramme solide et que la proposition équivaut à dire que ce diagramme solide est commutatif. Pour prouver la commutation de ce diagramme on utilise sa subdivision naturelle en diagrammes solides du type :





La commutation du premier cube est le contenu de la proposition 1.4.19. Pour prouver la commutation des cubes du deuxième type on fait comme dans la preuve de la proposition 1.5.11<sup>9</sup>. La commutation des cubes du troisième type et des solides du quatrième type découle de l'axiome de cocycle. La commutation des solides du cinquième type découle de la compatibilité des morphismes d'échange  $Ex_*^!$  avec la composition horizontale des carrés. Enfin la commutation du dernier solide découle de la proposition 1.5.25. C.Q.F.D

On a également l'énoncé analogue pour la forme (1.42) du 2-morphisme  $\pi$  :

**PROPOSITION 1.6.6** — *Le carré ci dessous est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} u^* i^* j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi} & u_0^* [s_0^! f_0^*] (-1) [-1] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ i^* j_* [q^* t^! (f \circ v)^*] & \xrightarrow{\pi} & [t_0^! (f_0 \circ v_0)^*] (-1) [-1] \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées des diagrammes planaires :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & H(R) & \xrightarrow{t^!} & H(T) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^*} & H(T) \\ & & \uparrow v^* & \swarrow Ex^{!,*} & \uparrow u^* & \swarrow & \uparrow \tilde{u}^* & \swarrow Ex_*^* & \uparrow \hat{u}^* & \swarrow & \uparrow u^* \\ (fv)^* & \nearrow & & & & & & & & & \\ H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) & \xrightarrow{s^!} & H(Y) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_Y^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_Y^1) & \xrightarrow{i^*} & H(Y) \\ & & \nwarrow (c^*)^{-1} & & & & & & & & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} & & H(\mathbb{V}(u^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{t_0^!} & H(T) \\ & & \uparrow v_0^* & \swarrow Ex^{!,*} & \uparrow u_0^* \\ (f_0 v_0)^* & \nearrow & & & \\ H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y) \\ & & \nwarrow (c^*)^{-1} & & \end{array}$$

**Compatibilité avec les restrictions quelconques au niveau de la base**

On considère un triangle commutatif de  $S$ -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

<sup>9</sup>Plus précisément on utilise "la technique" d'insertion d'une face diagonale découpant le cube en deux solides commutatifs

avec  $f$  et  $g$  lisses et  $s$  une immersion fermée. On suppose donné un  $S$ -morphisme :  $Z' \xrightarrow{a} Z$ . On forme le morphisme de triangles commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 Y \xrightarrow{s} X & & Y' = Y \times_Z Z' \xrightarrow{s'} X' = X \times_Z Z' \\
 \downarrow g & \swarrow a & \downarrow f' \\
 & & Z' \\
 \downarrow f & & \\
 & & Z
 \end{array}$$

Les déformations aux cônes normaux associées aux deux immersions fermées  $s$  et  $s'$  sont compatibles dans le sens qu'on a des morphismes de triangles commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 Y \xrightarrow{s_0} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & & Y' \xrightarrow{s'_0} \mathbb{V}(a^*\mathcal{N}_s) & & \mathbb{E}_Y^1 \xrightarrow{\tilde{s}} \mathbb{E}_X^1 & & \mathbb{E}_{Y'}^1 \xrightarrow{\tilde{s}'} \mathbb{E}_{X'}^1 \\
 \downarrow f_0 & \swarrow a_0 & \downarrow f'_0 & & \downarrow \tilde{f} & \swarrow \tilde{a} & \downarrow \tilde{f}' \\
 g_0 \searrow & & g'_0 \searrow & & \tilde{g} \searrow & & \tilde{g}' \searrow \\
 & & Z & & \mathbb{E}_Z^1 & & \mathbb{E}_{Z'}^1
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{A}_Y^1 \xrightarrow{\hat{s}} C & & \mathbb{A}_{Y'}^1 \xrightarrow{\hat{s}'} C' \\
 \downarrow \hat{f} & \swarrow \hat{a} & \downarrow \hat{f}' \\
 \hat{g} \searrow & & \hat{g}' \searrow \\
 & & \mathbb{A}_Z^1 & & \mathbb{A}_{Z'}^1
 \end{array}$$

On a la proposition :

**PROPOSITION 1.6.7** — On a un diagramme commutatif de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{a}^* j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi} & \hat{a}^* i_* [s'_0! f'_0^*](-1)[-1] \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 j_* q^* [s^! f^*] a^* & \xrightarrow{\pi} & i_* [s'_0! f'_0^*] a^* (-1)[-1]
 \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées des diagrammes planaires :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H(Z') & \xrightarrow{f'^*} & H(X') & \xrightarrow{s'^!} & H(Y') & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_{Y'}^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{A}_{Y'}^1) \\
 \uparrow a^* & \nearrow Ex^{*,*} & \uparrow a^* & \nearrow Ex^{!,*} & \uparrow a^* & \nearrow Ex^{*,*} & \uparrow \tilde{a}^* & \nearrow Ex_*^* & \uparrow \hat{a}^* \\
 H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) & \xrightarrow{s^!} & H(Y) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_Y^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{A}_Y^1)
 \end{array}$$

et

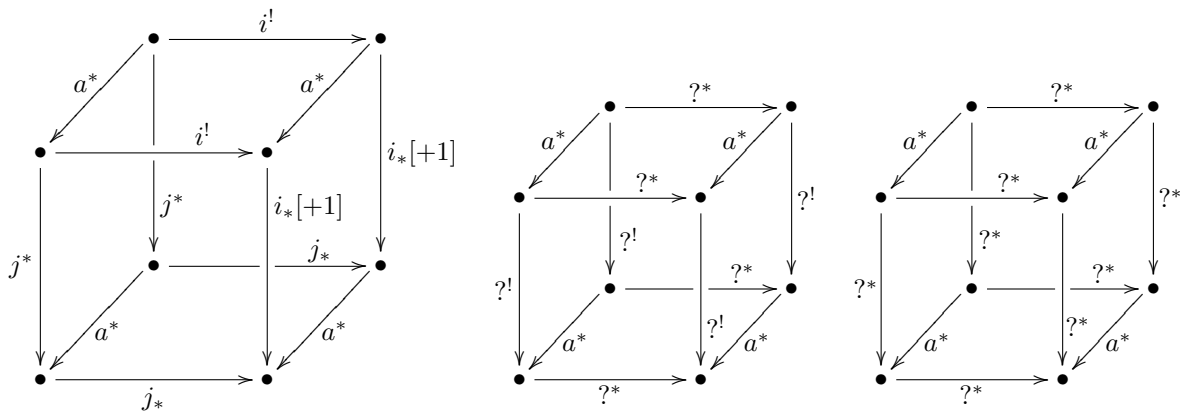
$$\begin{array}{ccccccccc}
 H(Z') & \xrightarrow{f'_0^*} & H(\mathbb{V}(a^*\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s'_0!} & H(Y') & \xrightarrow{i_*} & H(\mathbb{A}_{Y'}^1) \\
 \uparrow a_0^* & \nearrow Ex^{*,*} & \uparrow a_0^* & \nearrow Ex^{!,*} & \uparrow a_0^* & \nearrow Ex_*^* & \uparrow \hat{a}_0^* \\
 H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y) & \xrightarrow{i_*} & H(\mathbb{A}_Y^1)
 \end{array}$$

DEMONSTRATION On construit un diagramme solide à partir de (1.41) et :

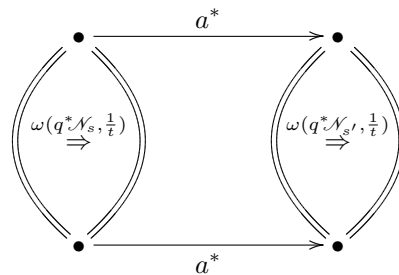
$$(1.44) \quad \begin{array}{ccccc} & & H(Z') & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(a^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y') & & \\ & & \nearrow^{i^!} & \nearrow^{\hat{f}^*} & \nearrow^{i^!} & \nearrow^{i^!} & \nearrow^{i^!} & & \\ & & H(\mathbb{A}_{Z'}^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C') & \xrightarrow{\hat{s}^!} & H(\mathbb{A}_{Y'}^1) & & \\ & & \nearrow^{j^*} & \nearrow^{j^*} & \nearrow^{j^*} & \nearrow^{j^*} & \nearrow^{j^*} & & \\ & & H(\mathbb{E}_{Z'}^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_{X'}^1) & \xrightarrow{\tilde{s}^!} & H(\mathbb{E}_{Y'}^1) & & \\ & & \nearrow^{q^*} & \nearrow^{q^*} & \nearrow^{q^*} & \nearrow^{q^*} & \nearrow^{q^*} & & \\ & & H(Z') & \xrightarrow{f'^*} & H(X') & \xrightarrow{s'^!} & H(Y') & & \\ & & & & & & & & \end{array}$$

$\omega(q^* \mathcal{N}_{s'}, t^{-1})$

en reliant les sommets par des 1-morphismes  $a^*$ ,  $\hat{a}^*$ ,  $\tilde{a}^*$  et  $a_0^*$  (qu'on notera  $a^*$  dans cette preuve pour simplifier) et en mettant sur les nouvelles faces (carrées) créées des 2-morphismes d'échange ( $Ex_*^*$  ou  $Ex^{*,!}$  ou  $Ex^{*,*}$ ). On invite le lecteur à se convaincre qu'il existe une unique façon de construire un tel diagramme solide et que la proposition équivaut à dire que ce diagramme solide est commutatif. Pour prouver la commutation de ce diagramme on utilise sa subdivision naturelle en cubes solides du type :



ainsi que le solide :



La commutation du premier cube est le contenu de la proposition 1.4.19. Pour prouver la commutation des cubes du deuxième type on fait comme dans la preuve de la proposition 1.5.11. Les cubes du troisième type sont commutatifs par l'axiome de cocycle. Enfin le dernier solide est commutatif par la proposition 1.5.25. C.Q.F.D

On a également l'énoncé analogue pour la forme (1.42) du 2-morphisme  $\pi$  :

**PROPOSITION 1.6.8** — *Le carré ci-dessous est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} a^* i_*^* j_*^* q^* s^! f'^* & \xrightarrow{\pi} & a_0^* s_0^! f_0^* (-1)[-1] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ i^* j_*^* q^* s^! f'^* a^* & \xrightarrow{\pi} & s_0^! f_0^* a_0^* (-1)[-1] \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées des diagrammes planaires :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \mathrm{H}(Z') & \xrightarrow{f'^*} & \mathrm{H}(R) & \xrightarrow{i'^!} & \mathrm{H}(T) & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{H}(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j_*} & \mathrm{H}(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^*} & \mathrm{H}(T) \\
 \uparrow a^* & & \uparrow a^* & \swarrow \mathrm{Ex}^{**} & \uparrow a^* & \swarrow \mathrm{Ex}^{**} & \uparrow \tilde{a}^* & \swarrow \mathrm{Ex}^* & \uparrow \hat{a}^* & \swarrow \mathrm{Ex}^* & \uparrow a^* \\
 \mathrm{H}(Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{H}(X) & \xrightarrow{s^!} & \mathrm{H}(Y) & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{H}(\mathbb{E}_Y^1) & \xrightarrow{j_*} & \mathrm{H}(\mathbb{A}_Y^1) & \xrightarrow{i^*} & \mathrm{H}(Y)
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{H}(Z) & \xrightarrow{f_0'^*} & \mathrm{H}(\mathbb{V}(u^*\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0'^!} & \mathrm{H}(T) \\
 \uparrow a_0^* & & \uparrow a_0^* & \swarrow \mathrm{Ex}^{**} & \uparrow a_0^* \\
 \mathrm{H}(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & \mathrm{H}(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & \mathrm{H}(Y)
 \end{array}$$

**Compatibilité avec les sections à support**

On garde les notations du paragraphe 1.6.1. On supposera en plus que le  $S$ -morphisme  $a$  est une *immersion fermée*. On a alors le résultat suivant :

**PROPOSITION 1.6.9** — On a un diagramme commutatif de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 j_*q^*s'^!f'^*a^! & \xrightarrow{\pi} & i_*s_0'^!f_0'^*a^!(-1)[-1] \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 \hat{a}^!j_*q^*s^!f^* & \xrightarrow{\pi} & \hat{a}^!i_*s_0^!f_0^*(-1)[-1]
 \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées des diagrammes planaires :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \mathrm{H}(Z') & \xrightarrow{f'^*} & \mathrm{H}(X') & \xrightarrow{s'^!} & \mathrm{H}(Y') & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{H}(\mathbb{E}_{Y'}^1) & \xrightarrow{j_*} & \mathrm{H}(\mathbb{A}_{Y'}^1) & & \\
 \uparrow a^! & & \uparrow a^! & \swarrow \mathrm{Ex}^{!,*} & \uparrow a^! & \swarrow \mathrm{Ex}^{!,*} & \uparrow \tilde{a}^! & \swarrow \mathrm{Ex}_*^! & \uparrow \hat{a}^! & & \\
 \mathrm{H}(Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{H}(X) & \xrightarrow{s^!} & \mathrm{H}(Y) & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{H}(\mathbb{E}_Y^1) & \xrightarrow{j_*} & \mathrm{H}(\mathbb{A}_Y^1) & & 
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathrm{H}(Z') & \xrightarrow{f_0'^*} & \mathrm{H}(\mathbb{V}(a^*\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0'^!} & \mathrm{H}(Y') & \xrightarrow{i_*} & \mathrm{H}(\mathbb{A}_{Y'}^1) \\
 \uparrow a_0^* & & \uparrow a_0^* & \swarrow \mathrm{Ex}^{!,*} & \uparrow a_0^* & \swarrow \mathrm{Ex}_*^! & \uparrow \hat{a}_0^* \\
 \mathrm{H}(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & \mathrm{H}(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & \mathrm{H}(Y) & \xrightarrow{i_*} & \mathrm{H}(\mathbb{A}_Y^1)
 \end{array}$$

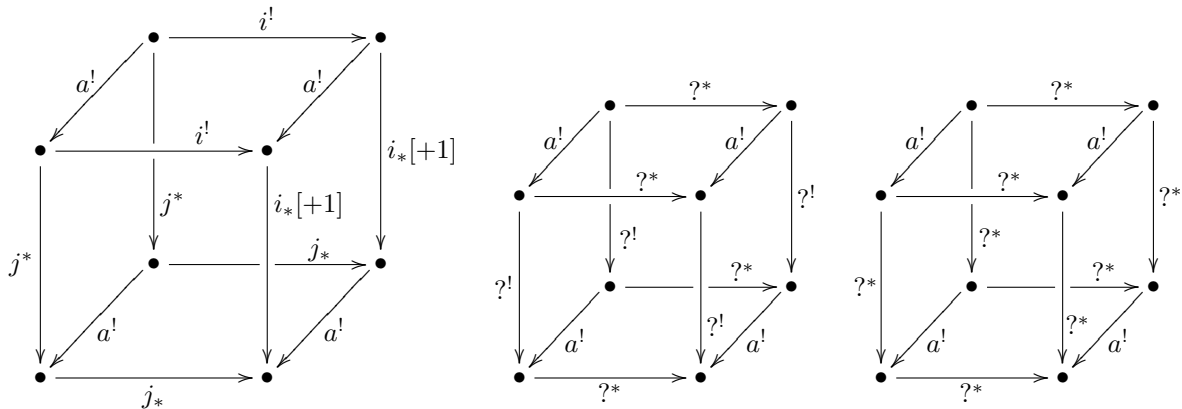
DEMONSTRATION On construit un diagramme solide à partir de (1.41) et :

(1.45)

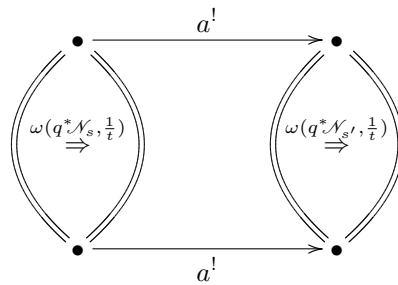
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H(Z') & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(a^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y') & & \\
 & & & & \nearrow^{i^!} & & \nearrow^{i^!} & & \nearrow^{i^!} & & \\
 & & & & H(\mathbb{A}_{Z'}^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C') & \xrightarrow{\hat{s}^!} & H(\mathbb{A}_{Y'}^1) & & \\
 & & & & \nearrow^{j^*} & & \nearrow^{j^*} & & \nearrow^{j^*} & & \\
 & & & & H(\mathbb{E}_{Z'}^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_{X'}^1) & \xrightarrow{\tilde{s}^!} & H(\mathbb{E}_{Y'}^1) & & \\
 & & & & \nearrow^{q^*} & & \nearrow^{q^*} & & \nearrow^{q^*} & & \\
 & & & & H(Z') & \xrightarrow{f'^*} & H(X') & \xrightarrow{s^!} & H(Y') & & \\
 & & & & \nearrow^{p^*} & & \nearrow^{q^*} & & \nearrow^{q^*} & & \\
 & & & & H(\mathbb{A}_{Z'}^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C') & \xrightarrow{\hat{s}^!} & H(\mathbb{A}_{Y'}^1) & \xrightarrow{i_*[+1]} & H(\mathbb{A}_{Y'}^1)
 \end{array}$$

$\omega(q^* \mathcal{N}_{s'}, t^{-1})$

en reliant les sommets par des 1-morphismes  $a^!, \hat{a}^!, \tilde{a}^!$  et  $a_0^!$  (qu'on notera  $a^!$  dans cette preuve pour simplifier) et en mettant sur les nouvelles faces (carrées) créées des 2-morphismes d'échange  $(Ex_*^! \text{ ou } Ex^{!,*} \text{ ou } Ex^{!,*})$ . On invite le lecteur à se convaincre qu'il existe une unique façon de construire un tel diagramme solide et que la proposition équivaut à dire que ce diagramme solide est commutatif. Pour prouver la commutation de ce diagramme on utilise sa subdivision naturelle en cubes solides du type :



ainsi que le solide :



La commutation du premier cube est le contenu de la proposition 1.4.20. Pour prouver la commutation des cubes du deuxième et troisième type on fait comme dans la preuve de la proposition 1.5.11. Enfin, la commutation du dernier solide vient de la proposition 1.5.25. C.Q.F.D

Notons que l'analogie de la proposition précédente pour le 2-morphisme :

$$\pi : i^* j_* q^* s^! f^* \longrightarrow s_0^! f_0^* (-1)[-1]$$

fait intervenir le 2-morphisme d'échange  $Ex^{!,*} : i^* a^! \longrightarrow a^! i^*$ . Comme  $i$  est une immersion fermée on ne sait pas que que  $Ex^{!,*}$  est un 2-isomorphisme<sup>10</sup>. Pour cela on n'établira pas cet analogue de la proposition 1.6.9.

<sup>10</sup>On peut montrer que le 2-morphisme  $Ex^{!,*}$  en question devient inversible lorsqu'on l'applique à  $j_* q^*$ .

**Compatibilité avec l’oubli de structure**

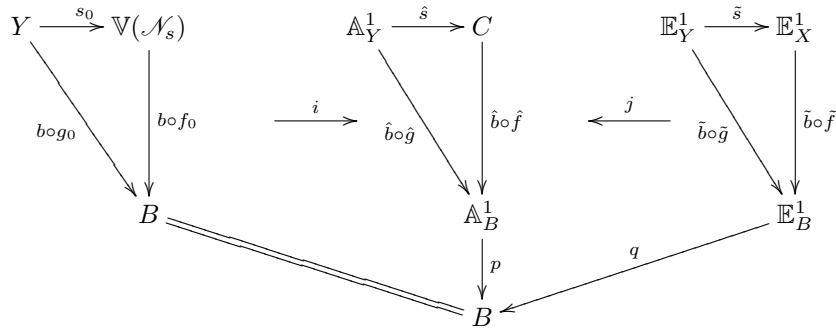
Le résultat de compatibilité ci-dessous est encore plus simple que les deux derniers. En fait, il est complètement trivial mais on a préféré le mentionner. On suppose donné en plus des données de base de cette sous-section un  $S$ -morphisme lisse :

$$b : Z \longrightarrow B$$

On s’intéresse à comparer les deux 2-morphismes  $\pi$  associés aux deux triangles commutatifs :



La déformation au cône normal du second diagramme se résume dans la figure :



On a la proposition :

**PROPOSITION 1.6.10** — *Le diagramme de 2-morphismes suivant :*

$$\begin{CD}
 j_*q^*[s^!(b \circ f)^*] @>\pi>> i_*[s_0^!(b \circ f_0)^*](-1)[-1] \\
 @Vc^* \downarrow \sim VV @VV \sim c^* V \\
 j_*q^*[s^!f^*]b^* @>\pi>> i_*[s_0^!f_0^*]b^*(-1)[-1]
 \end{CD}$$

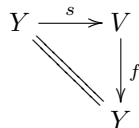
est commutatif. (À faire attention que les deux 2-morphismes  $\pi$  sont associés à deux triangles de  $S$ -schémas différents).

**1.6.2 Le cas particulier d’un fibré vectoriel sur  $Y$**

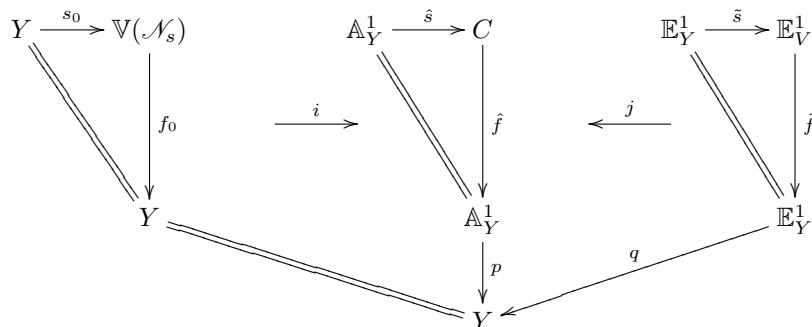
On se place dans le cas particulier suivant. On suppose donné un fibré vectoriel :

$$f : V = \mathbb{V}(\mathcal{M}) \longrightarrow Y$$

où  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -module localement libre de présentation finie. On notera  $s : Y \longrightarrow V$  la section nulle de  $f$ . On a un triangle commutatif de  $S$ -schémas :



Le faisceau normal à  $s$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{M}$ . On le notera comme dans la sous-section précédente  $\mathcal{N}_s$ . La déformation au cône normal est résumée dans la figure ci-dessous :





Ce qui est spécial à la situation est le lemme suivant :

**LEMME 1.6.11** — Soit  $t$  l'indéterminée telle que  $\mathbb{A}_S^1 = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t])$ . On a alors une égalité de  $\mathbb{A}_Y^1$ -schémas :

$$C = \mathbb{V}(p^* \mathcal{M} \cdot t^{-1})$$

(avec  $p$  la projection :  $\mathbb{A}_Y^1 \longrightarrow Y$ )

DEMONSTRATION Il s'agit d'un calcul élémentaire. Par définition même  $C$  est un ouvert de l'éclaté de  $0 \times Y$  dans  $\mathbb{A}_Y^1$  qui est affine sur  $\mathbb{A}_Y^1$  est qui est donné par le spectre de la  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y^1}$ -algèbre quasi-cohérente :

$$\text{Spec} \left( \sum_{i \geq 0} (\mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \cdot t + \mathcal{M} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1})^i / t^i \right) = \text{Spec} \left( \sum_{i \geq 0} (\mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} + \mathcal{M} \cdot t^{-i} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1})^i \right) = \text{Spec} \left( \sum_{i, j \geq 0} \mathcal{M}^{i+j} t^{-i} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \right)$$

En utilisant le fait que  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \cdot t^{-1}$  on voit que  $\mathcal{M}^{i+j} \cdot t^{-i} \subset \mathcal{M}^{i+j} \cdot t^{-i-j}$ . On obtient en fin de compte que  $C$  est égal au spectre de la  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1}$ -algèbre :

$$\sum_{i \geq 0} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \cdot \mathcal{M}^i t^{-i} = \sum_{i, k \geq 0} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \cdot \mathcal{M}^{i+k} t^{-i} = \sum_{i \geq 0} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \cdot \mathcal{M}^i t^{-i}$$

Mais  $C$  est aussi le spectre de cette algèbre vue comme  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1}$ -algèbre. Le résultat est maintenant clair. C.Q.F.D

Remarquons que via l'identification du lemme précédent l'isomorphisme de  $\mathbb{E}_Y^1$ -fibrés vectoriels  $\mathbb{E}_Y^1 \longrightarrow C \times_{\mathbb{A}_Y^1} \mathbb{E}_Y^1$  induit par  $j$  correspond à l'inverse de  $\mathbb{V}(q^* \mathcal{M} \subset q^* \mathcal{M} t^{-1})$ . Notons  $b : C \longrightarrow \mathbb{A}_Y^1$  l'isomorphisme :

$$C = \mathbb{V}(p^* \mathcal{M} t^{-1}) \xrightarrow{\mathbb{V}(- \times t^{-1})} \mathbb{V}(p^* \mathcal{M}) = \mathbb{A}_Y^1$$

On a alors un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_Y^1 & \xrightarrow{c} & \mathbb{E}_Y^1 \\ j \downarrow & & \downarrow u \\ C & \xrightarrow{b} & \mathbb{A}_Y^1 \end{array}$$

avec  $u$  l'inclusion évidente et  $c$  l'isomorphisme de fibrés vectoriels :

$$\mathbb{E}_Y^1 = \mathbb{V}(q^* \mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbb{V}(- \times t^{-1})} \mathbb{V}(q^* \mathcal{M}) = \mathbb{E}_Y^1$$

De plus, l'isomorphisme canonique  $\mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{M}$  induit l'isomorphisme  $\mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \simeq \mathbb{V}(\mathcal{M}) = V$  qui n'est autre que le pull-back de  $b$  suivant l'immersion de la section nulle de  $\mathbb{A}^1$ . On a en fin de compte un diagramme commutatif   carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & \xrightarrow{i} & C & \xleftarrow{j} & \mathbb{E}_Y^1 \\ a \downarrow & & \downarrow b & & \downarrow c \\ V & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{A}_Y^1 & \xleftarrow{u} & \mathbb{E}_Y^1 \end{array}$$

Dorénavant on notera  $u$  par  $j$  et  $\iota$  par  $i$ . La déformation au cône normal est alors isomorphe à :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{s} & V & & \mathbb{A}_Y^1 & \xrightarrow{\tilde{s}} & \mathbb{A}_Y^1 & & \mathbb{E}_Y^1 & \xrightarrow{\tilde{s}} & \mathbb{E}_Y^1 \\ & \searrow & \downarrow f & \xrightarrow{i} & \downarrow \tilde{f} & \xleftarrow{j} & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow \tilde{f} \\ & & Y & & \mathbb{A}_Y^1 & & \mathbb{E}_Y^1 & & \mathbb{E}_Y^1 & & \mathbb{E}_Y^1 \\ & & & & \downarrow p & & \downarrow q & & & & \downarrow q \\ & & & & Y & & Y & & & & Y \end{array}$$

L'isomorphisme étant induit par l'identité sur  $Y$ ,  $\mathbb{A}_Y^1$  et  $\mathbb{E}_Y^1$  ainsi que les isomorphismes  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

On déduit de là un diagramme commutatif<sup>11</sup> :

$$\begin{array}{ccccccc}
 j_* \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* & \longrightarrow & j_* j^* \tilde{s}^! \tilde{f}^* p^* & \xrightarrow{\theta} & i_* i^! \tilde{s}^! \tilde{f}^* p^* [+1] & \longrightarrow & i_* s^! f^* i^! p^* [+1] \\
 \downarrow Ex^{!,*} & & \downarrow Ex^{!,*} & & \downarrow Ex^{!,*} & & \downarrow Ex^{!,*} \\
 j_* \tilde{s}^! c^* \tilde{f}^* q^* & \longrightarrow & j_* j^* \tilde{s}^! b^* \tilde{f}^* p^* & \xrightarrow{\theta} & i_* i^! \tilde{s}^! b^* \tilde{f}^* p^* [+1] & \longrightarrow & i_* s_0^! a^* f^* i^! p^* [+1] \\
 \downarrow c^* & & \downarrow c^* & & \downarrow c^* & & \downarrow c^* \\
 j_* \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* & \longrightarrow & j_* j^* \tilde{s}^! \hat{f}^* p^* & \xrightarrow{\theta} & i_* i^! \tilde{s}^! \hat{f}^* p^* [+1] & \longrightarrow & i_* s_0^! f_0^* i^! p^* [+1]
 \end{array}$$

Remarquons d'autre part que la composée :

$$\tilde{s}^! \tilde{f}^* \xrightarrow{Ex^{!,*}} \tilde{s}^! c^* \tilde{f}^* \xrightarrow{c^*} \tilde{s}^! \tilde{f}^*$$

est par définition le 2-isomorphisme  $\omega_{-1}(c)$  sur les équivalences de Thom inverses qui est égale à l'automorphisme  $\omega_{-1}(q^* \mathcal{M}, t^{-1}) = \omega(q^* \mathcal{M}, t^{-1})$  du foncteur identité de  $H(\mathbb{E}_Y^1)$  appliqué à  $\text{Th}^{-1}(q^* \mathcal{M})$  (voir le lemme 1.5.23). On en déduit donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 j_* \text{id}_{H(\mathbb{E}_Y^1)} q^* s^! f^* & \longrightarrow & j_* \text{id}_{H(\mathbb{E}_Y^1)} \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* & \xlongequal{\quad} & j_* \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* \\
 \downarrow \omega(q^* \mathcal{M}, \frac{1}{t}) & & \downarrow \omega(q^* \mathcal{M}, \frac{1}{t}) & & \downarrow Ex^{!,*} \\
 j_* \text{id}_{H(\mathbb{E}_Y^1)} q^* s^! f^* & \longrightarrow & j_* \text{id}_{H(\mathbb{E}_Y^1)} \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* & \xlongequal{\quad} & j_* \tilde{s}^! c^* \tilde{f}^* q^* \\
 & & & & \downarrow c^* \\
 j_* \text{id}_{H(\mathbb{E}_Y^1)} q^* s^! f^* & \longrightarrow & j_* \text{id}_{H(\mathbb{E}_Y^1)} \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* & \xlongequal{\quad} & j_* \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^*
 \end{array}$$

En mettant ces deux diagrammes ensemble, on a ainsi démontré la commutativité du carré suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\theta} & i_* [s^! f^*](-1)[-1] \\
 \omega(q^* \mathcal{M}, \frac{1}{t}) \downarrow & & \downarrow \\
 j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi_0} & i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1]
 \end{array}$$

En remarquant que  $\omega(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) = \omega(q^* \mathcal{M}, t^{-1})$  on obtient la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.6.12** — Notons  $a : \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \xrightarrow{\sim} V$  l'isomorphisme canonique induisant un isomorphisme  $s^! f^* \simeq s_0^! f_0^*$ . Le triangle suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi} & i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1] \\
 \theta \downarrow & \nearrow \sim & \\
 i_* [s^! f^*](-1)[-1] & & 
 \end{array}$$

est commutatif.

Voici un corollaire de la proposition 1.6.12 :

**COROLLAIRE 1.6.13** — La composée des 2-morphismes suivants :

$$s^! f^* \longrightarrow i^* j_* q^* s^! f^* \xrightarrow{\pi} s_0^! f_0^* (-1)[-1]$$

est nulle. De plus ces deux 2-morphismes constituent deux cotés d'un 2-triangle distingué.

<sup>11</sup>On fera attention que le symbole  $c^*$  est utilisé dans ce diagramme pour désigner deux objets distincts : le 1-morphisme  $H^*(c)$  et le 2-isomorphisme de connexion du 2-foncteur  $H^*$ .

### 1.6.3 Le 2-isomorphisme de pureté

On reprend les notations de la sous-section 1.6.1 surtout le diagramme (1.37) décrivant la déformation au cône normal. On va construire à partir de  $\pi$  un 2-isomorphisme :

$$(1.46) \quad \Pi : s^! f^* \xrightarrow{\sim} s_0^! f_0^*$$

ou avec le langage des diagrammes planaires, une face carrée inversible :

$$(1.47) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{H}(Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{H}(X) \\ f_0^* \downarrow & \swarrow \Pi & \downarrow s^! \\ \mathrm{H}(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & \mathrm{H}(Y) \end{array}$$

C'est presque le 2-isomorphisme de pureté recherché. En effet, pour obtenir le 2-isomorphisme de pureté (1.36) (qu'on notera également  $\Pi$ ) :

$$\Pi : s^! f^* \longrightarrow \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*$$

on remarque que  $f_0$  est égal à la composée :  $f_0 = pr \circ g$  avec  $pr$  la projection du fibré normal sur  $Y$  :

$$pr : \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \longrightarrow Y$$

et on compose (1.46)   droite avec le 2-isomorphisme :

$$s_0^! f_0^* \xrightarrow{c^*} s_0^! pr^* g^* = \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*$$

Dans la suite on étudiera essentiellement le 2-isomorphisme de pureté sous sa forme (1.46). Pour le construire, on procède en deux étapes. On construit d'abord pour tout objet  $A$  de  $\mathrm{H}(Z)$  un isomorphisme dans  $\mathrm{H}(Y)$  entre  $s^! f^*(A)$  et  $s_0^! f_0^*(A)$  sans se préoccuper de la functorialité de la construction par rapport à  $A$ . En utilisant l'existence de tels isomorphismes pour un diagramme bien choisi on prouve que la composée des 2-morphismes :

$$p^*[s^! f^*] \longrightarrow j_* q^*[s^! f^*] \xrightarrow{\pi} i_*[s_0^! f_0^*](-1)[-1]$$

est nulle. On utilise ceci ainsi que le corollaire 1.6.2 pour déduire une unique factorisation de  $\pi$  :

$$j_* q^*[s^! f^*] \longrightarrow i_*[s^! f^*](-1)[-1] \longrightarrow i_*[s_0^! f_0^*](-1)[-1]$$

et de là notre 2-isomorphisme  $\Pi$ .

Soit  $A$  un objet de  $\mathrm{H}(Z)$ . On part donc du morphisme :

$$i^* j_* q^*[s^! f^* A] \xrightarrow{\pi} s_0^! f_0^* A(-1)[-1]$$

D'après le corollaire 1.6.2, on sait que le morphisme :

$$i^* j_* q^*[s^! f^* A] \xrightarrow{\theta} s^! f^* A(-1)[-1]$$

admet des sections. On choisit une section  $\sigma_A : s^! f^* A(-1)[-1] \longrightarrow i^* j_* q^*[s^! f^* A]$  et on définit  $\tau_A$  par la composée :

$$s^! f^* A(-1)[-1] \xrightarrow{\sigma_A} i^* j_* q^*[s^! f^* A] \xrightarrow{\theta} s_0^! f_0^* A(-1)[-1]$$

Ce morphisme<sup>12</sup> dépend donc à priori du choix de la section  $\sigma_A$ . On a le lemme :

**LEMME 1.6.14** — *Pour tout objet  $A$  de  $\mathrm{H}(Z)$  et toute section  $\sigma_A$  (comme ci-dessus) le morphisme :*

$$\tau_A : s^! f^* A \longrightarrow s_0^! f_0^* A$$

<sup>12</sup>Bien sûr, le morphisme  $\tau_A$  n'est autre que le 2-isomorphisme  $\Pi$  évalué en  $A$ . Sauf qu'on n'a pas encore construit le 2-isomorphisme de pureté  $\Pi$ .

est inversible. De plus, si on se donne un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t} & R \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ Y & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

avec  $v$  lisse, on peut choisir la section :

$$\sigma'_A : s^!(f \circ v)^* A(-1)[-1] \longrightarrow i^* j_* q^* s^!(f \circ v)^* A$$

de telle sorte que le carré suivant (voir les notations de la sous-section 1.6.1) :

$$\begin{array}{ccc} u^* s^! f^* A & \xrightarrow{\tau_A} & u_0^* s_0^! f_0^* A \\ \text{Ex}^{!,*} \downarrow & & \downarrow \text{Ex}^{!,*} \\ t^! v^* f^* A & & t_0^! v_0^* f_0^* A \\ (c^*)^{-1} \downarrow & & \downarrow (c^*)^{-1} \\ t^!(f \circ v)^* A & \xrightarrow{\tau'_A} & t_0^!(f_0 \circ v_0)^* A \end{array}$$

soit commutatif.

DEMONSTRATION On divise la preuve en deux étapes :

**Étape 1 :** On commence par prouver la dernière assertion du lemme. Par la proposition 1.6.6, on a un diagramme commutatif :

$$(1.48) \quad \begin{array}{ccc} u^* i^* j_* q^* s^! f^* A & \xrightarrow{u^* \pi} & u_0^* s_0^! f_0^* A(-1)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ i^* j_* q^* t^! v^* f^* A & & t_0^! v_0^* f_0^* A(-1)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ i^* j_* q^* t^!(f \circ v)^* A & \xrightarrow{\pi} & t_0^!(f_0 \circ v_0)^* A(-1)[-1] \end{array}$$

Il suffit donc de choisir la section  $\sigma'_A : t^!(f \circ v)^* A(-1)[-1] \longrightarrow i^* j_* q^* t^!(f \circ v)^* A$  de telle sorte que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} u^* s^! f^* A(-1)[-1] & \xrightarrow{u^* \sigma_A} & u^* i^* j_* q^* s^! f^* A \\ \downarrow & & \downarrow \\ t^! v^* f^* A(-1)[-1] & & i^* j_* q^* t^! v^* f^* A \\ \downarrow & & \downarrow \\ t^!(f \circ v)^* A(-1)[-1] & \xrightarrow{\sigma'_A} & i^* j_* q^* t^!(f \circ v)^* A \end{array}$$

soit commutatif. Mais comme les flèches verticales sont des isomorphismes on voit que le choix d'une section  $\sigma_A : s^! f^* A(-1)[-1] \longrightarrow i^* j_* q^* s^! f^* A$  détermine une section<sup>13</sup>  $\sigma'_A : t^!(f \circ v)^* A(-1)[-1] \longrightarrow i^* j_* q^* t^!(f \circ v)^* A$  et celle là convient.

**Étape 2 :** Prouvons que  $\tau_A$  est un isomorphisme. Par le corollaire 1.4.4, il suffit de prouver ceci localement pour la topologie de Nisnevich sur  $X$ . Soit

$$v : R = U_1 \coprod \dots \coprod U_n \longrightarrow X$$

<sup>13</sup>Il n'est pas complètement évident que le morphisme  $\sigma'_A$  est une section à  $\theta$ . Pour démontrer ça, il faut utiliser un diagramme commutatif analogue au diagramme (1.48) avec des 2-morphismes  $\theta$  à la place des 2-morphismes  $\pi$ .

un recouvrement Nisnevich de  $X$ . La première étape de la démonstration montre qu'on peut choisir une section  $\sigma'_A$  de sorte que le morphisme  $\tau'_A = \theta \circ \sigma'_A$  rend commutatif le carré :

$$\begin{array}{ccc} u^* s^! f^* A & \longrightarrow & u_0^* s_0^! f_0^* A \\ \downarrow & & \downarrow \\ t^!(f \circ v)^* A & \xrightarrow{\tau'_A} & t_0^!(f_0 \circ v_0)^* A \end{array}$$

On voit donc que pour prouver que  $\tau_A$  est un isomorphisme il suffit de prouver que  $\tau'_A$  en est un. Il suffit de prouver ce que l'on veut pour chaque  $U_i$ . Quitte à remplacer  $X$  par chacun des  $U_i$ , il vient qu'on peut supposer qu'il existe un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ Z & \xrightarrow{z} & \mathbb{A}_Z^n \end{array}$$

avec  $h$  lisse et  $z$  la section nulle. Considérons le diagramme de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccccc} g_0^* z^! r^* & \longrightarrow & g_0^* i^* j_* q^* z^! r^* & \xrightarrow{\pi} & g_0^* z_0^! r_0^*[-1](-1) \\ \downarrow & & \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ s^! f^* & \longrightarrow & i^* j_* q^* s^! f^* & \xrightarrow{\pi} & s_0^! f_0^*[-1](-1) \end{array}$$

avec  $r : \mathbb{A}_Z^n \longrightarrow Z$  la projection canonique (les 2-morphismes verticaux étant les 2-isomorphismes habituels). On voit facilement que le carré de gauche est commutatif. En invoquant encore une fois la proposition 1.6.6, on voit que le carré de droite est aussi commutatif. Donc le diagramme total est commutatif et par le corollaire 1.6.13 appliqué au triangle :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{z} & \mathbb{A}_Z^n \\ & \searrow & \downarrow r \\ & & Z \end{array}$$

la composée :

$$z^! r^* \longrightarrow i^* j_* q^* z^! r^* \xrightarrow{\pi} z_0^! r_0^*[-1](-1)$$

est nulle. On en déduit donc que la composée :

$$s^! f^* \longrightarrow i^* j_* q^* s^! f^* \xrightarrow{\pi} s_0^! f_0^*[-1](-1)$$

est aussi nulle. Ceci montre en particulier que  $\tau_A$  est indépendant du choix du scindage  $\sigma_A$ . Finalement puisque  $g_0^*$  est un foncteur triangulé on voit par la deuxième partie de 1.6.13 que pour tout  $A$ , la suite :

$$s^! f^* A \longrightarrow i^* j_* q^* s^! f^* A \xrightarrow{\pi} s_0^! f_0^* A(-1)[-1]$$

constitue deux cotés d'un triangle distingué. Ceci prouve que le morphisme  $\tau_A$  est inversible. C.Q.F.D

L'énoncé suivant est une conséquence directe du corollaire 1.6.13 :

**PROPOSITION 1.6.15** — *Supposons que l'immersion  $s : Y \longrightarrow X$  est l'inclusion de la section nulle d'un fibré vectoriel sur  $Y$ . On note  $a : \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \longrightarrow X$  l'isomorphisme canonique de  $Y$ -schémas entre  $X$  et le fibré normal à l'immersion  $s$ . Pour chaque  $A$  de  $H(Z)$  et tout scindage  $\sigma_A$ , l'isomorphisme  $\tau_A : s^! f^* A \longrightarrow s_0^! f_0^* A$  est égal à la composée :*

$$s^! f^* A \xrightarrow{Ex^{!,*}} s_0^! a^* f^* A \longrightarrow s_0^! f_0^* A$$

En particulier, il ne dépend pas du choix du scindage.

La proposition suivante contient l'argument clef permettant la construction du 2-isomorphisme de pureté :

**PROPOSITION 1.6.16** — *La composée<sup>14</sup> des 2-morphismes :*

$$p^*s^!f^* \longrightarrow j_*q^*s^!f^* \xrightarrow{\pi} i_*s_0^!f_0^*(-1)[-1]$$

est le 2-morphisme nul.

DEMONSTRATION La démonstration se fera en plusieurs étapes :

**Étape 1 :** *Réduction du problème.* Il suffit bien sûr de prouver que la composée des morphismes :

$$p^*s^!f^*A \longrightarrow j_*q^*s^!f^*A \xrightarrow{\pi} i_*s_0^!f_0^*A(-1)[-1]$$

est nulle pour tout objet  $A$  de  $\mathbf{H}(Z)$ . Par la construction même du 2-morphisme  $\pi_0$  (voir le diagramme (1.39)), on a un carré commutatif à flèches verticales des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} j_*q^*s^!f^*A & \xrightarrow{\pi_0} & i_*s_0^!f_0^*A(-1)[-1] \\ \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\ j_*j^*\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A & \xrightarrow{\theta} & i_*i^!\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A[+1] \end{array}$$

On forme le diagramme :

$$(1.49) \quad \begin{array}{ccccc} & & \pi & & \\ & & \curvearrowright & & \\ p^*s^!f^*A & \longrightarrow & j_*q^*s^!f^*A & \xrightarrow{\omega(q^*\mathcal{N}_s, \frac{1}{i})} & j_*q^*s^!f^*A & \xrightarrow{\pi_0} & i_*s_0^!f_0^*A(-1)[-1] \\ & & \sim \uparrow & & \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ & \swarrow \text{dotted} & \hat{s}^!\hat{f}^*p^*A & \longrightarrow & j_*j^*\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A & \xrightarrow{\theta} & i_*i^!\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A[+1] \end{array}$$

La composée des flèches horizontales inférieures est nulle étant donné qu'ils constituent deux côtés d'un 2-triangle distingué (voir la proposition 1.4.9). On veut prouver que la composée des flèches horizontales supérieures est nulle et on sait que les flèches verticales pleines sont des isomorphismes. Il suffit donc de construire un isomorphisme :

$$(1.50) \quad \alpha : \hat{s}^!\hat{f}^*p^*A \xrightarrow{\sim} p^*s^!f^*A$$

rendant commutatif la partie gauche du diagramme (1.49), ou encore le diagramme obtenu par adjonction :

$$\begin{array}{ccc} j^*p^*s^!f^*A & \longrightarrow & q^*s^!f^*A \xrightarrow{\omega(q^*\mathcal{N}_s, \frac{1}{i})} q^*s^!f^*A \\ j^*(\alpha) \uparrow & & \uparrow \\ j^*\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & j^*\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A \end{array}$$

En utilisant la définition de la première flèche verticale pleine de (1.49) (voir le début de la sous-section 1.6.1) on voit que l'isomorphisme  $j^*(\alpha)$  doit coïncider avec la composée :

$$(1.51) \quad j^*\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A \xrightarrow{Ex^{1,*}} \hat{s}^!j^*\hat{f}^*p^*A \xrightarrow{c^*} \tilde{s}^!\tilde{f}^*q^*A \xrightarrow{Ex^{*,*}} \tilde{s}^!q^*f^*A \xrightarrow{(Ex^{1,*})^{-1}} q^*s^!f^*A \xleftarrow{\omega(q^*\mathcal{N}_s, \frac{1}{i})} q^*s^!f^*A \xrightarrow{c^*} j^*p^*s^!f^*A$$

Le reste de la preuve est consacré à la construction d'un isomorphisme  $\alpha$  comme dans (1.50) tel que l'isomorphisme  $j^*(\alpha)$  soit égal à la composée de (1.51).

<sup>14</sup>Le premier 2-morphisme n'est autre que le 2-morphisme évident qui provient de :  $p^* \xrightarrow{\eta} j_*j^*p^* \xrightarrow{c^*} j_*q^*$ .

**Étape 2 :** *Application du lemme 1.6.14.* Dans cette étape on applique le lemme 1.6.14 au triangle suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_Y^1 & \xrightarrow{\hat{s}'} & C' \\ & \searrow \hat{g}' & \downarrow \hat{f}' \\ & & \mathbb{P}_Z^1 \end{array}$$

avec  $C'$  l'espace de déformation au cône normal associé à l'immersion  $s$  mais paramétré par la droite projective (au lieu de la droite affine!). On supposera que le cône normal de  $s$  se trouve au dessus de la section  $o = [1 : 0]$  de  $\mathbb{P}_Z^1$ . On notera  $\mathcal{N}_{\hat{s}'}$  (resp.  $\mathcal{N}_{\hat{s}}$ , etc) le faisceau normal de l'immersion  $\hat{s}'$  (resp.  $\hat{s}$ , etc) de telle sorte qu'on a un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_Y^1 & \xrightarrow{\hat{s}'_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}'}) \\ & \searrow \hat{g}'_0 & \downarrow \hat{f}'_0 \\ & & \mathbb{P}_Z^1 \end{array}$$

On appellera  $l$  la projection de la droite projective :  $\mathbb{P}_Z^1 \longrightarrow ?$ . Soit  $A$  l'objet de  $H(Z)$  fixé dans la première étape. Le lemme 1.6.14 (appliqué à  $l^*A$ ) nous dit que modulo le choix d'une section, on peut trouver un isomorphisme :

$$(1.52) \quad \hat{\tau}' : \hat{s}'^! \hat{f}'^! l^* A \xrightarrow{\sim} \hat{s}'_0^! \hat{f}'_0^! l^* A$$

On a une immersion fermée de losanges commutatifs d'immersions ouvertes :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{A}_Y^1 & \\ j \nearrow & & \searrow u' \\ \mathbb{E}_Y^1 & & \mathbb{P}_Y^1 \\ u \searrow & & \nearrow j' \\ & \mathbb{A}_Y^1 & \end{array} \xrightarrow{s} \begin{array}{ccc} & C & \\ j \nearrow & & \searrow u' \\ \mathbb{E}_X^1 & & C' \\ u \searrow & & \nearrow j' \\ & \mathbb{A}_X^1 & \end{array}$$

L'immersion ouverte  $j'$  est complémentaire à la section nulle. L'immersion ouverte  $u'$  est complémentaire à la section à l'infinie. L'immersion ouverte  $j$  est celle qui figure dans le diagramme (1.37). Les immersions  $s$  seront notées  $\hat{s}'$ ,  $\tilde{s}'$ ,  $\hat{s}$  et  $\tilde{s}$ , etc. En passant au cône normal, on a une immersion de losanges d'immersions ouvertes :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{A}_Y^1 & \\ j \nearrow & & \searrow u' \\ \mathbb{E}_Y^1 & & \mathbb{P}_Y^1 \\ u \searrow & & \nearrow j' \\ & \mathbb{A}_Y^1 & \end{array} \xrightarrow{s_0} \begin{array}{ccc} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}}) & \\ j \nearrow & & \searrow u' \\ \mathbb{V}(q^* \mathcal{N}_s) & & \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}'}) \\ u \searrow & & \nearrow j' \\ & \mathbb{V}(p^* \mathcal{N}_s) & \end{array}$$

Les immersions  $s_0$  seront aussi notées  $\hat{s}'_0$ ,  $\tilde{s}'_0$ ,  $\hat{s}_0$  et  $\tilde{s}_0$ , etc. En utilisant la seconde partie du lemme 1.6.14, on déduit de (1.52) trois autres isomorphismes :

- $\hat{s}'^! \hat{f}'^! p^* A \xrightarrow{\hat{\tau}} \hat{s}'_0^! \hat{f}'_0^! p^* A$ ,
- $\tilde{s}'^! \tilde{f}'^! p^* A \xrightarrow{\tilde{\tau}'} \tilde{s}'_0^! \tilde{f}'_0^! p^* A$ ,
- $\hat{s}'^! \tilde{f}'^! q^* A \xrightarrow{\tilde{\tau}} \hat{s}'_0^! \tilde{f}'_0^! q^* A$ ,

ainsi que des carrés commutatifs. Bien entendu, le morphisme  $\tilde{f}'$  n'est autre que la projection de  $\mathbb{A}_X^1$  sur  $\mathbb{A}_Z^1$ . Les autres morphismes ont tous été définis soit durant la preuve soit dans le diagramme (1.37).

**Étape 3 :** *L'isomorphisme*  $\tau$ . On va déduire de  $\tilde{\tau}'$  un isomorphisme<sup>15</sup>  $\tau : s^! f^* A \longrightarrow s_0^! f_0^* A$ . On commence par définir un isomorphisme qu'on appellera (par abus de notations) " $p^* \tau$ " :  $p^* s^! f^* A \longrightarrow p^* s_0^! f_0^* A$  en imposant la commutativité du carré :

$$\begin{array}{ccc} p^* s^! f^* A & \longrightarrow & p^* s_0^! f_0^* A \\ \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\ \tilde{s}^! \tilde{f}^* p^* A & \xrightarrow{\sim} & \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* p^* A \end{array}$$

Le morphisme  $p$  n'est autre que la projection de la droite affine. Les isomorphismes verticaux sont des composées de 2-isomorphismes de connexions et de  $Ex^{!*$ . En utilisant l'axiome d'homotopie<sup>16</sup>, on a pour  $U$  et  $V$  dans  $H(Z)$  des isomorphismes :

$$\mathrm{hom}(p^* U, p^* V) \simeq \mathrm{hom}(U, p_* p^* V) \simeq \mathrm{hom}(U, V)$$

Il existe alors un unique isomorphisme :

$$(1.53) \quad \tau : s^! f^* A \longrightarrow s_0^! f_0^* A$$

tel que  $p^*(\tau) = "p^* \tau"$ .

Ainsi, on dispose en plus des quatre isomorphismes  $\hat{\tau}'$ ,  $\tilde{\tau}'$ ,  $\hat{\tau}$  et  $\tilde{\tau}$  d'un isomorphisme  $\tau$ . Dans la suite, le lecteur pourra bien oublier les isomorphismes  $\hat{\tau}'$  et  $\tilde{\tau}'$  : on se servira uniquement des trois isomorphismes :

$$\hat{\tau}, \tilde{\tau} \text{ et } \tau$$

ainsi que les deux carrés commutatifs :

$$(1.54) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* A & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A \\ \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\ q^* s^! f^* A & \xrightarrow{q^* \tau} & q^* s_0^! f_0^* A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* A & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A \\ \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\ j^* \hat{s}^! \hat{f}^* p^* A & \xrightarrow{j^* \hat{\tau}} & j^* \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^* A \end{array}$$

Précisons ici que nous avons considéré l'espace de déformation  $C'$  paramétré par  $\mathbb{P}^1$  uniquement dans le but d'obtenir simultanément ces deux carrés commutatifs (ceci n'étant pas possible en appliquant directement le lemme 1.6.14).

**Étape 4 :** *Construction de l'isomorphisme*  $\alpha$ . On dispose d'un isomorphisme évident  $e : \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(q^* \mathcal{N}_s)$  induit par le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_Y^1 & \xrightarrow{\tilde{s}} & \mathbb{E}_X^1 \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ Y & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

Par le lemme 1.6.17 ci-dessous, il existe un isomorphisme  $b : \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \longrightarrow \mathbb{V}(p^* \mathcal{N}_s)$ . Les isomorphismes  $e$  et  $b$  s'insèrent dans un carré cartésien d'isomorphismes de fibrés vectoriels :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) & \xrightarrow{e} & \mathbb{V}(q^* \mathcal{N}_s) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \mathbb{V}(- \times t^{-1}) \\ \mathbb{V}(j^* \mathcal{N}_{\tilde{s}}) & \xrightarrow{b \times_{\mathbb{A}^1} \mathbb{E}^1} & \mathbb{V}(q^* \mathcal{N}_s) \end{array}$$

On a donc un carré commutatif d'équivalences de Thom inverses :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Th}^{-1}(q^* \mathcal{N}_s) & \xrightarrow{\omega_{-1}(e)} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \\ \omega_{-1}(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) \uparrow & & \uparrow \sim \\ \mathrm{Th}^{-1}(q^* \mathcal{N}_s) & \xrightarrow{\omega_{-1}(b \times_{\mathbb{A}^1} \mathbb{E}^1)} & \mathrm{Th}^{-1}(j^* \mathcal{N}_{\tilde{s}}) \end{array}$$

<sup>15</sup>Bien sûr le lemme 1.6.14 nous donne de tels isomorphismes, mais l'isomorphisme  $\tau$  qu'on va construire, jouira d'une propriété spéciale qu'on ne saurait attraper en appliquant tout simplement 1.6.14.

<sup>16</sup>Par le choix de l'espace de déformation au cône normal paramétrisé par la droite projective.



Ceci permet de considérer le diagramme commutatif de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc}
 q^* \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* & \longrightarrow & \text{Th}^{-1}(q^* \mathcal{N}_s) \tilde{g}^* q^* & \xrightarrow{\omega_{-1}(e)} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \tilde{g}^* q^* \\
 \omega_{-1}(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) \uparrow & & \uparrow \omega_{-1}(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) & & \uparrow \\
 q^* \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* & \longrightarrow & \text{Th}^{-1}(q^* \mathcal{N}_s) \tilde{g}^* q^* & \longrightarrow & \text{Th}^{-1}(j^* \mathcal{N}_{\tilde{s}}) \tilde{g}^* q^* \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 j^* p^* \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* & \longrightarrow & j^* \text{Th}^{-1}(p^* \mathcal{N}_s) \hat{g}^* p^* & \xrightarrow{j^* \omega_{-1}(b)} & j^* \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \hat{g}^* p^*
 \end{array}$$

Ainsi en définissant les 2-isomorphismes :  $p^* s_0^! f_0^* \xrightarrow{\sim} \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^*$  et  $q^* s_0^! f_0^* \xrightarrow{\sim} \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^*$  par les composées :

$$\begin{aligned}
 p^* s_0^! f_0^* &\simeq p^* \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(p^* \mathcal{N}_s) \hat{g}^* p^* \xrightarrow{\omega_{-1}(b)} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \hat{g}^* p^* \simeq \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^* \\
 q^* s_0^! f_0^* &\simeq q^* \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(q^* \mathcal{N}_s) \tilde{g}^* q^* \xrightarrow{\omega_{-1}(e)} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \tilde{g}^* q^* \simeq \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^*
 \end{aligned}$$

on obtient un diagramme commutatif :

$$(1.55) \quad \begin{array}{ccc}
 j^* \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^* & \xleftarrow{\sim} & j^* p^* s_0^! f_0^* \xleftarrow{\sim} q^* s_0^! f_0^* \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \omega_{-1}(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) = \omega(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) \\
 \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* & \xleftarrow{\sim} & q^* s_0^! f_0^*
 \end{array}$$

On prend pour  $\alpha$  la composée des isomorphismes suivants :

$$\alpha : \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^* A \xrightarrow{\tilde{\tau}} \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^* A \xleftarrow{\sim} p^* s_0^! f_0^* A \xleftarrow{\tilde{\tau}} p^* s_0^! f_0^* A$$

Prouvons que ce  $\alpha$  convient, c'est à dire que si l'on applique  $j^*$  on obtient bien l'isomorphisme composé (1.51). Pour cela, on remarque (en utilisant le second carré de (1.54) ainsi que (1.55)) que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 j^* \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^* A & \xrightarrow{j^* \tilde{\tau}_A} & j^* \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^* A & \xleftarrow{\sim} & q^* s_0^! f_0^* A \xleftarrow{q^* \tau_A} q^* s_0^! f_0^* A \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim & & \downarrow \omega(q^* \mathcal{N}_s, \frac{1}{\tau}) \quad \downarrow \omega(q^* \mathcal{N}_s, \frac{1}{\tau}) \\
 \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A & \xrightarrow{\tilde{\tau}_A} & \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A & \xleftarrow{\sim} & q^* s_0^! f_0^* A \xleftarrow{q^* \tau_A} q^* s_0^! f_0^* A
 \end{array}$$

Il suffit alors de prouver que la composée :

$$\tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A \xrightarrow{\tilde{\tau}_A} \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A \xleftarrow{\sim} q^* s_0^! f_0^* A \xleftarrow{\tau_A} q^* s_0^! f_0^* A$$

est égale au morphisme évident :

$$\tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A \xrightarrow{\sim} \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A \xrightarrow{(Ex^{1,*})^{-1}} q^* s_0^! f_0^* A$$

En d'autre termes il faut que le carré :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A & \xrightarrow{\tilde{\tau}_A} & \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A \\
 \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\
 q^* s_0^! f_0^* A & \xrightarrow{\tau_A} & q^* s_0^! f_0^* A
 \end{array}$$

soit commutatif. Mais ceci est exactement le premier carré commutatif dans (1.54) de l'étape précédente. C.Q.F.D

Pour terminer la preuve de la proposition 1.6.16 il nous reste à établir le lemme suivant :

**LEMME 1.6.17** — *Le faisceau normal de l'immersion  $\hat{s}$  est canoniquement isomorphe à  $(p^*\mathcal{N}_s)t^{-1}$  avec  $t$  l'indéterminé telle que  $\mathbb{A}_S^1 = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t])$ . De plus, l'isomorphisme de fibrés vectoriels  $\mathbb{V}(j^*\mathcal{N}_{\hat{s}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}}) \simeq \mathbb{V}(q^*\mathcal{N}_s)$  correspond via cette identification à  $-\times t^{-1} : q^*\mathcal{N}_s \longrightarrow (q^*\mathcal{N}_s).t^{-1}$ . On a ainsi le carré cartésien :*

$$\begin{CD} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}}) \simeq \mathbb{V}(q^*\mathcal{N}_s) @>{\mathbb{V}(-\times t^{-1})}>> \mathbb{V}(q^*\mathcal{N}_s) \\ @V{j}VV @VV{j}V \\ \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}}) @>{b}>> \mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_s) \end{CD}$$

avec  $j$  les inclusions évidentes et  $b$  l'isomorphisme induit par  $-\times t : p^*\mathcal{N}_s \longrightarrow (p^*\mathcal{N}_s)t^{-1} = \mathcal{N}_{\hat{t}}$ .

**DEMONSTRATION** Notons  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$  le faisceau d'idéaux définissant l'immersion fermée  $s : Y \longrightarrow X$ . Le schéma  $C$  correspond à l'ouvert affine (relativement à  $X$ ) associé à  $t$  dans l'éclaté de l'idéal  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_X^1}\mathcal{I} + \mathcal{O}_{\mathbb{A}_X^1}.t \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}_X^1}$ . Ainsi, le  $\mathbb{A}_X^1$ -schéma  $C$  est le spectre de la  $\mathcal{O}_X[t]$ -algèbre quasi-cohérente :

$$\mathcal{O}_C = \sum_{i \geq 0} \frac{(\mathcal{O}_X[t].\mathcal{I} + \mathcal{O}_X[t].t)^i}{t^i} = \sum_{i \geq 0} \frac{\sum_{u+v=i} \mathcal{O}_X[t].\mathcal{I}^u.t^v}{t^i} = \sum_{i \geq 0} \sum_{u+v=i} \mathcal{O}_X[t].\mathcal{I}^u.t^{-u} = \sum_{i \geq 0} \mathcal{O}_X[t].\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right)^i$$

De plus, l'idéal de l'immersion fermée  $\hat{s} : \mathbb{A}_Y^1 \longrightarrow C$  est égal à :

$$\mathcal{O}_C.\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right) = \sum_{i \geq 1} \mathcal{O}_X[t].\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right)^i$$

On a un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_X^1}$ -modules :

$$\mathcal{N}_{\hat{s}} = \frac{\mathcal{O}_C.\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right)}{\mathcal{O}_C.\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right)^2} = \frac{\sum_{i \geq 1} \mathcal{O}_X[t].\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right)^i}{\sum_{i \geq 2} \mathcal{O}_X[t].\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right)^i} \xleftarrow{\sim} \frac{\mathcal{O}_X[t].\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right)}{\mathcal{O}_X[t].\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right) \cap \sum_{i \geq 2} \mathcal{O}_X[t].\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right)^i}$$

On vérifie facilement que  $\mathcal{O}_X[t].\frac{\mathcal{I}}{t} \cap \sum_{i \geq 2} \mathcal{O}_X[t].\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right)^i = \mathcal{O}_X[t].\frac{\mathcal{I}^2}{t}$ . On a ainsi construit un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_X^1}$ -modules :

$$(\mathcal{N}_{\hat{s}}[t]).t^{-1} = \mathcal{O}_X[t].(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2).t^{-1} \longrightarrow \mathcal{N}_{\hat{s}}$$

cet isomorphisme provient d'un unique isomorphisme de  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1}$ -modules. Les autres assertions du lemmes découlent immédiatement de la construction. C.Q.F.D

**Remarque 1.6.18** — Faisons une remarque sur la démonstration de la proposition 1.6.16. Le fait d'avoir utilisé l'espace de déformation paramétré par la droite projectif semble indiquer qu'on aurait mieux fait d'utiliser cet espace depuis le début! Ceci n'est pas forcément vrai. En fait on est obligé de passer par les deux espaces de déformation puisque :

- La réduction de l'étape 1 n'est pas utile si on travaillait avec l'espace de déformation paramétré par la droite projective car un isomorphisme  $a$  entre  $\hat{s}^!f^*p^*$  et  $p^*s^!f^*$  n'aurait pas existé<sup>17</sup>.
- Si on travaillait exclusivement sur l'espace de déformation paramétré par la droite affine on n'aurait pas pu utiliser l'axiome de l'homotopie dans l'étape 3 pour descendre l'isomorphisme  $\tilde{\tau}$ .

On est en mesure maintenant de prouver le théorème :

**THEOREME 1.6.19** — *On garde les notations ambiantes (spécialement ceux du lemme 1.6.14). Il existe un unique 2-morphisme :*

$$\Pi : s^!f^* \longrightarrow s_0^!f_0^*$$

<sup>17</sup>En effet le faisceau normal à  $\hat{s}$  (dans le cas de l'espace de déformation paramétré par la droite projectif) n'est pas isomorphe à  $p^*\mathcal{N}$  mais plutôt à  $p^*\mathcal{N} \otimes \mathcal{O}(1)$ .

rendant le triangle :

$$\begin{array}{ccc} j_*q^*s^!f^* & \xrightarrow{\pi} & i_*s_0^!f_0^*(-1)[-1] \\ \downarrow & \nearrow \Pi & \\ i_*s^!f^*(-1)[-1] & & \end{array}$$

commutatif. De plus ce 2-morphisme est inversible.

DEMONSTRATION En effet, soit  $A$  dans  $\text{Ob}(H(Z))$ . En utilisant le triangle distingué :

$$q^*s^!f^*A \longrightarrow j_*q^*s^!f^*A \longrightarrow i_*s^!f^*A(-1)[-1] \longrightarrow$$

et la proposition 1.6.16, on déduit (par les axiomes d'une catégorie triangulée) pour tout  $A$  une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} j_*q^*s^!f^*A & \xrightarrow{\pi} & i_*s_0^!f_0^*A(-1)[-1] \\ \downarrow & \nearrow \Pi & \\ i_*s^!f^*A(-1)[-1] & & \end{array}$$

Le morphisme  $\Pi$  provient d'un unique morphisme :

$$\Pi : s^!f^*A \longrightarrow s_0^!f_0^*A$$

L'unicité de ce morphisme découle de l'unicité de la factorisation qui s'obtient en appliquant  $i^*$  au triangle de l'énoncé :

$$i^*j_*q^*s^!f^*A \longrightarrow s^!f^*A(-1)[-1] \longrightarrow s_0^!f_0^*A(-1)[-1]$$

et en utilisant le fait que  $i^*j_*q^*s^!f^*A \simeq s^!f^*A \oplus s^!f^*A(-1)[-1]$ . Il reste à prouver que ces morphismes définissent un 2-morphisme (i.e., une transformation naturelle). Soit  $A \longrightarrow B$  une flèche dans  $H(Z)$ . On a un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} i^*j_*q^*s^!f^*A & \longrightarrow & s^!f^*A(-1)[-1] & \longrightarrow & s_0^!f_0^!A(-1)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ i^*j_*q^*s^!f^*B & \longrightarrow & s^!f^*B(-1)[-1] & \longrightarrow & s_0^!f_0^!B(-1)[-1] \end{array}$$

Le carré total et le petit carré de gauche sont commutatifs car les flèches horizontales proviennent d'un 2-morphisme dans les deux cas. Mais comme  $i^*j_*q^*s^!f^*C \simeq s^!f^*C \oplus s^!f^*C(-1)[-1]$  pour  $C$  égal à  $A$  ou  $B$ , on a également la commutation du petit carré de droite. Ceci montre que  $\Pi$  est une transformation naturelle. Enfin, pour voir que  $\Pi$  est un isomorphisme pour tout  $A$  il suffit de remarquer que  $\Pi$  appliqué à  $A$  co cide avec les  $\tau_A$  du lemme 1.6.14. C.Q.F.D

On termine cette sous-section par des résultats de compatibilité pour les 2-isomorphismes :

- $\Pi : s^!f^* \xrightarrow{\sim} s_0^!f_0^*$
- $\Pi : s^!f^* \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*$

Rappelons que le deuxième 2-isomorphisme est obtenu à partir du premier en prenant la composée :

$$(1.56) \quad s^!f^* \longrightarrow s_0^!f_0^* \xrightarrow{c^*} s_0^!pr^*g^*$$

avec  $pr : \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \longrightarrow Y$  la projection du fibré normal de l'immersion  $s$ . Ces résultats de compatibilité se dérivent des trois résultats de compatibilité pour le 2-morphisme  $\pi$  de la sous-section précédente.

**PROPOSITION 1.6.20** — (Compatibilité avec les restrictions suivant des morphismes lisses) Sous les hypothèses de 1.6.1, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} u^*s^!f^* & \xrightarrow{\Pi} & u_0^*s_0^!f_0^* \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ t^!(f \circ v)^* & \xrightarrow{\Pi} & t_0^!(f_0 \circ v_0)^* \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées :

$$u^* s^! f^* \xrightarrow{Ex^{!,*}} t^! v^* f^* \xrightarrow{(c^*)^{-1}} t^! (f \circ v)^*$$

$$u_0^* s_0^! f_0^* \xrightarrow{Ex^{!,*}} t_0^! v_0^* f_0^* \xrightarrow{(c^*)^{-1}} t_0^! (f_0 \circ v_0)^*$$

En d'autres termes, le cube ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) \\
 & & \parallel & & \downarrow v^* \\
 & & H(Z) & \xrightarrow{(fv)^*} & H(R) \\
 & & \downarrow & \downarrow f_0^* & \downarrow t^! \\
 & & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y) \\
 & & \downarrow (f_0 v_0)^* & \downarrow v_0^* & \downarrow u^* = u_0^* \\
 & & H(\mathbb{V}(u^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{t_0^!} & H(T)
 \end{array}$$

Les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-isomorphismes de pureté. Les autres sont des 2-isomorphismes de connexions ou des 2-isomorphismes d'échange de type  $Ex^{!,*}$ .

DEMONSTRATION On considère le diagramme de 2-morphismes suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 u^* i^* j_* q^* s^! f^* & \xrightarrow{\theta} & u^* s^! f^* (-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & u_0^* s_0^! f_0^* (-1)[-1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 i^* j_* q^* t^! (f \circ v)^* & \xrightarrow{\theta} & t^! (f \circ v)^* (-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & t_0^! (f_0 \circ v_0)^* (-1)[-1]
 \end{array}$$

La proposition 1.6.6 nous dit que le carré total est commutatif. Il suffit alors, compte tenu de 1.6.2, de voir que le petit carré de droite est commutatif. Ceci est un exercice facile. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 1.6.21** — *Sous les hypothèses de 1.6.1, on a un carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
 u^* s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & u^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 t^! (f \circ v)^* & \xrightarrow{\Pi} & \mathrm{Th}^{-1}(u^* \mathcal{N}_s)(g \circ u)^*
 \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées :

$$u^* s^! f^* \xrightarrow{Ex^{!,*}} t^! v^* f^* \xrightarrow{(c^*)^{-1}} t^! (f \circ v)^*$$

$$u^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \longrightarrow \mathrm{Th}^{-1}(u^* \mathcal{N}_s) u^* g^* \xrightarrow{(c^*)^{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(u^* \mathcal{N}_s)(g \circ u)^*$$

DEMONSTRATION En effet le carré de l'énoncé se factorise de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
 u^* s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & u_0^* s_0^! f_0^* & \longrightarrow & u^* s_0^! p r^* g^* \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 t^! (f \circ v)^* & \xrightarrow{\Pi} & t_0^! (f_0 \circ v_0)^* & \longrightarrow & t_0^! p r'^* (g \circ u)^*
 \end{array}$$

Le premier carré est commutatif par la proposition précédente. La commutation du second carré est laissée en exercice. C.Q.F.D

On a également la proposition suivante ainsi que son corollaire qui se démontrent exactement de la même manière que la proposition précédente et son corollaire :

**PROPOSITION 1.6.22** — (Compatibilité avec les restrictions quelconques au niveau de la base) Sous les hypothèses de 1.6.1, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} a^* s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & a_0^* s_0^! f_0^* \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ s^! f'^* a^* & \xrightarrow{\Pi} & s_0^! f_0'^* a_0^* \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées :

$$a^* s^! f^* \longrightarrow s^! a^* f^* \longrightarrow s^! f'^* a^*$$

$$a_0^! s_0^! f_0^* \longrightarrow s_0^! a_0^! f_0^* \longrightarrow s_0^! f_0'^* a_0^!$$

En d'autres termes, le cube ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) \\ & \swarrow a_0^* = a^* & \downarrow & & \swarrow a^* \\ H(Z') & \xrightarrow{f'^*} & H(X') & & \downarrow s^! \\ \downarrow f_0'^* & & \downarrow f_0^* & & \downarrow s_0^! \\ & & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y) \\ \downarrow a_0^* & & \downarrow a_0^* & & \downarrow a^* = a_0^* \\ H(\mathbb{V}(a^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y') & & \end{array}$$

Les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-isomorphismes de pureté. Les autres sont des 2-isomorphismes d'échange de type  $Ex^{*,*}$  ou  $Ex^{*,!}$ .

**COROLLAIRE 1.6.23** — Sous les hypothèses de 1.6.1, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} a^* s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & a^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ s^! f'^* a^* & \xrightarrow{\Pi} & \mathrm{Th}^{-1}(a^* \mathcal{N}_s) g'^* a^* \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées :

$$a^* s^! f^* \longrightarrow s^! a^* f^* \longrightarrow s^! f'^* a^*$$

$$a^! \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \longrightarrow \mathrm{Th}^{-1}(a^* \mathcal{N}_s) a^! g^* \longrightarrow \mathrm{Th}^{-1}(a^* \mathcal{N}_s) g'^* a^!$$

**PROPOSITION 1.6.24** — (Compatibilité avec les sections à support) Sous les hypothèses de 1.6.1, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} s^! f'^* a^! & \xrightarrow{\Pi} & s_0^! f_0'^* a_0^! \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ a^! s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & a_0^! s_0^! f_0^* \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées :

$$s^! f'^* a^! \xrightarrow{Ex^{!,*}} s^! a^! f^* \longrightarrow a^! s^! f^*$$

$$s_0^! f_0^* a_0^! \xrightarrow{Ex^{!,*}} s_0^! a_0^! f_0^* \longrightarrow a_0^! s_0^! f_0^*$$

En d'autres termes le cube ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & f^* \\
 & & & & \longrightarrow \\
 & & H(Z) & \longrightarrow & H(X) \\
 & \swarrow a_0^! = a^! & \downarrow & & \swarrow a^! \\
 & H(Z') & \xrightarrow{f'^*} & H(X') & \downarrow s^! \\
 & \downarrow f_0'^* & \downarrow f_0^* & \downarrow s^! & \downarrow s^! \\
 & & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y) \\
 & \swarrow a_0^! & \downarrow & \swarrow a^! = a_0^! & \\
 & H(\mathbb{V}(a^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y') & 
 \end{array}$$

Les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-isomorphismes de pureté. Les autres sont des 2-isomorphismes d'échange de type  $Ex^{!,*}$  ou  $Ex^{!,!}$ .

DEMONSTRATION Considérons le diagramme ci-dessus :

$$\begin{array}{ccccc}
 j_* q^* s^! f'^* a^! & \longrightarrow & i_* s^! f'^* a^!(-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & i_* s_0^! f_0^* a^!(-1)[-1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & i_* a^! s^! f^*(-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & i_* a^! s_0^! f_0^*(-1)[-1] \\
 & & \downarrow Ex_*^! & & \downarrow Ex_*^! \\
 a^! j_* q^* s^! f^* & \longrightarrow & a^! i_* s^! f^* & \longrightarrow & a^! i_* s_0^! f_0^*
 \end{array}$$

Le carré total est commutatif par 1.6.9. Le petit carré de gauche est lui aussi commutatif. Finalement le petit carré à droite en bas est commutatif et ses flèches verticales sont des 2-isomorphismes. On construit ainsi en prenant les inverses de  $Ex_*^!$  un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 j_* q^* s^! f'^* a^! & \longrightarrow & i_* s^! f'^* a^!(-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & i_* s_0^! f_0^* a^!(-1)[-1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 a^! j_* q^* s^! f^* & \longrightarrow & i_* a^! s^! f^*(-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & i_* a^! s_0^! f_0^*(-1)[-1]
 \end{array}$$

Par construction, le carré total est commutatif et le petit carré de gauche aussi. Par adjonction entre  $i_*$  et  $i^*$  on déduit alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 i^* j_* q^* s^! f'^* a^! & \longrightarrow & s^! f'^* a^!(-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & s_0^! f_0^* a^!(-1)[-1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 i^* a^! j_* q^* s^! f^* & \longrightarrow & a^! s^! f^*(-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & a^! s_0^! f_0^*(-1)[-1]
 \end{array}$$

On a toujours la commutativité du carré total et du petit carré de gauche. Les flèches verticales sont bien entendu des 2-isomorphismes. Étant donné que pour tout  $A$  le morphisme :

$$i^* j_* q^* (s^! f'^* a^! A) \longrightarrow s^! f'^* a^! A(-1)[-1]$$

est scindé, on déduit que le petit carré de droite du dernier diagramme est lui aussi commutatif. C'est exactement ce que l'on cherche à prouver. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 1.6.25** — *Sous les hypothèses de 1.6.1, on a un carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
 s^! f'^* a^! & \xrightarrow{\Pi} & \mathrm{Th}^{-1}(a^* \mathcal{N}_s) g'^* a^! \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 a^! s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & a^! \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*
 \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées :

$$s^! f'^* a^! \xrightarrow{Ex^{!,*}} s^! a^! f^* \longrightarrow a^! s^! f^*$$

$$\mathrm{Th}^{-1}(a^* \mathcal{N}_s) g'^* a^! \xrightarrow{Ex^{!,*}} \mathrm{Th}^{-1}(a^* \mathcal{N}_s) a^! g^* \longrightarrow a^! \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*$$

**PROPOSITION 1.6.26** — (Compatibilité avec l'oubli de structure) Sous les hypothèses de 1.6.1, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} s^!(b \circ f)^* & \xrightarrow{\Pi} & s_0^!(b \circ f)^* \\ c^* \downarrow \sim & & \sim \downarrow c^* \\ s^! f^* b^* & \xrightarrow{\Pi} & s_0^! f_0^* b^* \end{array}$$

**COROLLAIRE 1.6.27** — (Compatibilité avec l'oubli de structure) Sous les hypothèses de 1.6.1, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} s^!(b \circ f)^* & \xrightarrow{\Pi} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(b \circ g)^* f^* \\ c^* \downarrow \sim & & \sim \downarrow c^* \\ s^! f^* b^* & \xrightarrow{\Pi} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) g^* b^* \end{array}$$

**PROPOSITION 1.6.28** — Soient  $f : V = \mathbb{V}(\mathcal{M}) \longrightarrow Y$  un fibré vectoriel sur  $Y$  (avec  $\mathcal{M}$  localement libre) et  $s$  l'immersion de la section nulle. Le fibré normal  $\mathcal{N}_s$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{M}$  et le 2-isomorphisme de pureté :

$$s^! f^* \xrightarrow{\sim} s_0^! f_0^*$$

est égal au 2-isomorphisme induit par  $\mathcal{N}_s \simeq \mathcal{M}$ .

DEMONSTRATION Ceci découle directement du théorème 1.6.19 et de la proposition 1.6.12.

C.Q.F.D

### 1.6.4 Compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la composition des immersions fermées

On suppose donné un diagramme commutatif de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{t} & Y & \xrightarrow{s} & X \\ & & \searrow & \searrow & \downarrow \\ & & & & Z \end{array}$$

*(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram in the image, showing maps t, s, f, g, h connecting T, Y, X, and Z.)*

avec  $f, g$  et  $h$  lisses et  $s$  et  $t$  des immersions fermées. En prenant les cônes normaux relativement aux immersions  $s, s \circ t$  et  $s_0 \circ t$  on obtient respectivement les trois diagrammes commutatifs<sup>18</sup> :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{t} & Y & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \\ & & \searrow & \searrow & \downarrow \\ & & & & Z \end{array} & \begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{t_1} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) & \xrightarrow{s_1} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0 t}) \\ & & \searrow & \searrow & \downarrow \\ & & & & Z \end{array} & \begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{t_1} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) & \xrightarrow{s'_1} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0' t}) \\ & & \searrow & \searrow & \downarrow \\ & & & & Z \end{array} \end{array}$$

<sup>18</sup>Nous nous excusons pour les mauvaises notations. Avec les notations de la sous-section précédente (i.e., indiquer par 0 pour marquer le passage au cône normal d'une immersion) on a :  $(s_1 \circ t_1) = (s \circ t)_0$  et  $(s'_1 \circ t_1) = (s_0 \circ t)_0$ .

et donc trois 2-isomorphismes de pureté. Le but de cette sous-section est de comprendre la relation entre ces trois 2-isomorphismes : ce que l'on appellera la compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la composition des immersions fermées.

On aura besoin de l'espace de déformation au cône normal de l'immersion  $s$ . Il sera encore noté  $C$ . On gardera alors les notations du diagramme (1.37). Le fait qu'on puisse prouver la compatibilité de l'isomorphisme de pureté en utilisant seulement l'espace de déformation  $C$  est assez surprenant étant donné qu'il existe au moins trois autres espaces de déformations qu'on peut associer à la situation, à savoir : le double espace de déformation pour le couple  $(t, s)$ , l'espace de déformation du cône normal de l'immersion  $t$  et celui de l'immersion  $s \circ t$ .

On va définir deux 2-isomorphismes :  $(s \circ t)!f^* \xrightarrow{\sim} (s_0 \circ t)!f_0^*$ . Le premier, qu'on notera  $\Pi_1$ , est la composée :

$$(1.57) \quad \Pi_1 : (s \circ t)!f^* \xrightarrow{c'} t!s!f^* \xrightarrow{\Pi} t!s_0!f_0^* \xrightarrow{(c')^{-1}} (s_0 \circ t)!f_0^*$$

En langage de diagrammes planaires,  $\Pi_1$  est la composée :

$$(1.58) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbf{H}(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & & \\ & \nearrow^{f_0^*} & & \searrow^{s_0!} & \\ & & \mathbf{H}(Z) & & \mathbf{H}(T) \\ & & \Pi \Uparrow & & \nearrow^{(c')^{-1}} \\ & & & & \mathbf{H}(Y) \\ & \searrow^{f^*} & & \nearrow^{s!} & \xrightarrow{t!} \\ & & \mathbf{H}(X) & & \mathbf{H}(T) \\ & & & & \nearrow^{(st)!} \end{array}$$

Pour définir le second 2-isomorphisme (qui sera noté  $\Pi_2$ ), on remarque que le faisceau normal de l'immersion  $s_0 \circ t$  est canoniquement isomorphe à  $t^*\mathcal{N}_s \oplus \mathcal{N}_t$ . En effet, l'extension associée à la composée  $s_0 \circ t$  :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & t^*\mathcal{N}_{s_0} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{s_0 \circ t} & \longrightarrow & \mathcal{N}_t \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \\ & & t^*\mathcal{N}_s & & & & \end{array}$$

est canoniquement scindée via le morphisme  $\mathcal{N}_t \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 \circ t}$  associé au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{s_0 \circ t} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \\ \parallel & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{t} & Y \end{array}$$

On en déduit de là un 2-isomorphisme  $\gamma : (s_1 \circ t_1)!f_1^* \xrightarrow{\sim} (s'_1 \circ t_1)!f_1'^*$  par la composée :

$$\begin{array}{c} (s_1 \circ t_1)!f_1^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 t})h^* \xrightarrow{C_{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)\mathrm{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)h^* \\ \downarrow \sim \\ \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)\mathrm{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_{s_0})h^* \xrightarrow{(C_{-1})^{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 \circ t})h^* \xrightarrow{\sim} (s'_1 \circ t_1)!f_1'^* \end{array}$$

où les deux  $C_{-1}$  désignent les 2-isomorphismes de composition pour les équivalences de Thom inverses associés respectivement aux deux suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow t^*\mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 t} \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow t^*\mathcal{N}_{s_0} \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 \circ t} \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow 0$$

On définit notre 2-isomorphisme  $\Pi_2$  par la composée :

$$(1.59) \quad \Pi_2 : (s \circ t)!f^* \xrightarrow{\Pi} (s_1 \circ t_1)!f_1^* \xrightarrow{\gamma} (s'_1 \circ t_1)!f_1'^* \xrightarrow{\Pi^{-1}} (s_0 \circ t)!f_0^*$$



Bien sûr, le premier 2-isomorphisme de pureté est celui associé à l'immersion  $s \circ t$  alors que le second est celui associé à  $s_0 \circ t$ . En termes de diagrammes planaires  $\Pi_2$  est la composée :

$$(1.60) \quad \begin{array}{ccccc} & H(Z) & \xlongequal{\quad} & H(Z) & \\ & \swarrow f^* & & \searrow f_1^* & \\ H(X) & \xRightarrow{\Pi} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{st})) & \xRightarrow{\gamma} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0t})) & \xRightarrow{\Pi^{-1}} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\ & \searrow (st)^! & \swarrow (s_1t_1)^! & \searrow (s'_1t_1)^! & \swarrow (s_0t)^! & \\ & H(T) & \xlongequal{\quad} & H(T) & \end{array}$$

Le résultat principal de cette sous-section s'énonce alors :

**THEOREME 1.6.29** — *Les deux 2-isomorphismes  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont égaux.*

Avant de se lancer dans la preuve, rappelons que l'on avait noté  $C$  l'espace de déformation au cône normal associée à l'immersion fermée  $s : Y \longrightarrow X$ . On a les inclusions des diagrammes :

$$(1.61) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_T^1 & \xrightarrow{\hat{i}} & \mathbb{A}_Y^1 \xrightarrow{\hat{s}} C \\ & \nearrow i & \downarrow \hat{f} \\ & & \mathbb{A}_Z^1 \\ \\ T & \xrightarrow{t} Y \xrightarrow{s_0} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & \\ & \downarrow f_0 & \\ & Z & \\ & & \nwarrow j \\ & & \mathbb{E}_T^1 \xrightarrow{\hat{i}} \mathbb{E}_Y^1 \xrightarrow{\hat{s}} \mathbb{E}_X^1 \\ & & \downarrow \hat{f} \\ & & \mathbb{E}_Z^1 \end{array}$$

**Le 2-morphisme  $\pi'$ . Réduction du problème**

On aura besoin d'un analogue du 2-morphisme  $\pi$  de la sous-section 1.6.1. On définit à partir du 2-morphisme  $\pi$  un 2-morphisme  $\pi'$  :

$$\pi' : j_*q^*(s \circ t)^!f^* \longrightarrow i_*(s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-1]$$

par la condition que le diagramme suivant soit commutatif :

$$(1.62) \quad \begin{array}{ccc} \hat{t}^!j_*q^*s^!f^* & \xrightarrow{\pi} & \hat{t}^!i_*s_0^!f_0^*(-1)[-1] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ j_*q^*(s \circ t)^!f^* & \xrightarrow{\pi'} & i_*(s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-1] \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux étant de gauche à droite les composées :

$$\hat{t}^!j_*q^*s^! \xrightarrow{Ex_*^!} j_*\hat{t}^!q^*s^! \xrightarrow{(Ex^{!,*})^{-1}} j_*q^*t^!s^! \xrightarrow{(c^!)^{-1}} j_*q^*(s \circ t)^!$$

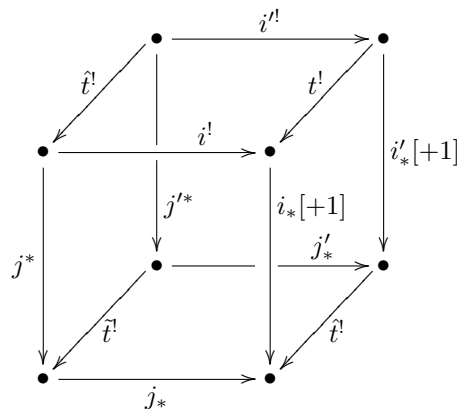
et

$$\hat{t}^!i_*s_0^! \xrightarrow{Ex_*^!} i_*\hat{t}^!s_0^! \xrightarrow{(c^!)^{-1}} i_*(s_0 \circ t)^!$$

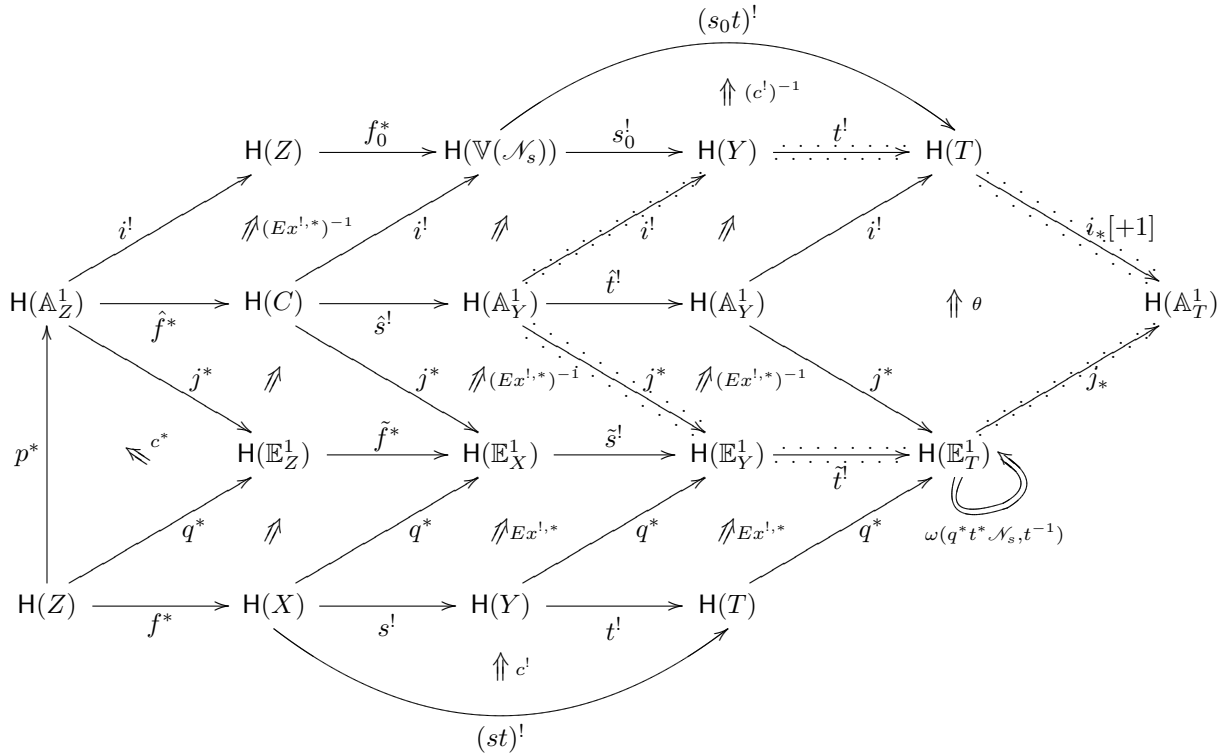
En utilisant la commutation de  $\omega(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1})$  avec le 1-morphisme  $\hat{t}^!$  (voir la proposition 1.5.25), on voit que le 2-morphisme  $\pi'$  est la composée du diagramme planaire :

(1.63)

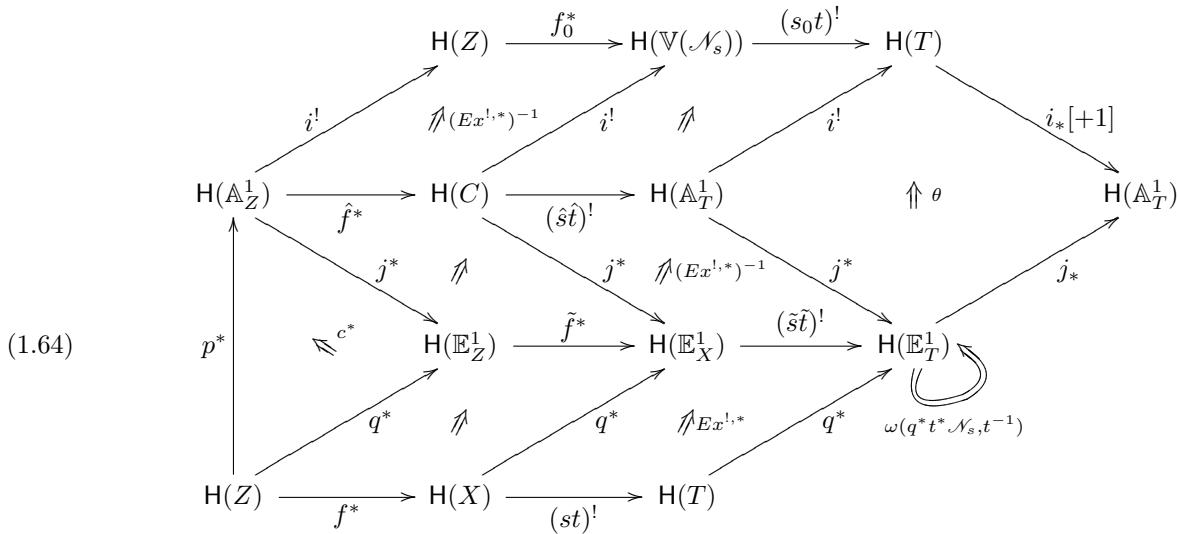
En utilisant la commutativité du cube :



on peut remplacer la partie en pointillé dans le diagramme planaire (1.63) par celle en pointillé dans le diagramme planaire ci-dessous sans changer la composition :



En fin, en utilisant la compatibilité des morphismes d'échanges  $Ex^{!,*}$  avec la composition des carrés on voit que  $\pi'$  est aussi la composée du diagramme planaire :



Revenons maintenant à la preuve du théorème 1.6.29. On forme les deux triangles (un pour chaque  $i \in \{1, 2\}$ ) :

$$(\star_i) \quad \begin{array}{ccc} j_* q^* (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{\pi'} & i_* (s_0 \circ t)^! f_0^* (-1)[-1] \\ \theta \downarrow & \nearrow \Pi_i & \\ i_* (s \circ t)^! f^* (-1)[-1] & & \end{array}$$

On a le lemme :

**LEMME 1.6.30** — *Pour prouver le théorème 1.6.29, il suffira de prouver que les deux triangles  $(\star_1)$  et  $(\star_2)$  sont commutatifs.*

DEMONSTRATION En effet, puisque  $i^*j_*q^*A \simeq A \oplus A(-1)[-1]$  (voir le corollaire 1.6.2) il existe au plus un seul 2-morphisme (?) tel que le triangle :

$$\begin{array}{ccc} j_*q^*(s \circ t)!f^* & \xrightarrow{\pi'} & i_*(s_0 \circ t)!f_0^*(-1)[-1] \\ \theta \downarrow & \nearrow & \\ i_*(s \circ t)!f^*(-1)[-1] & & \end{array} \quad (?)$$

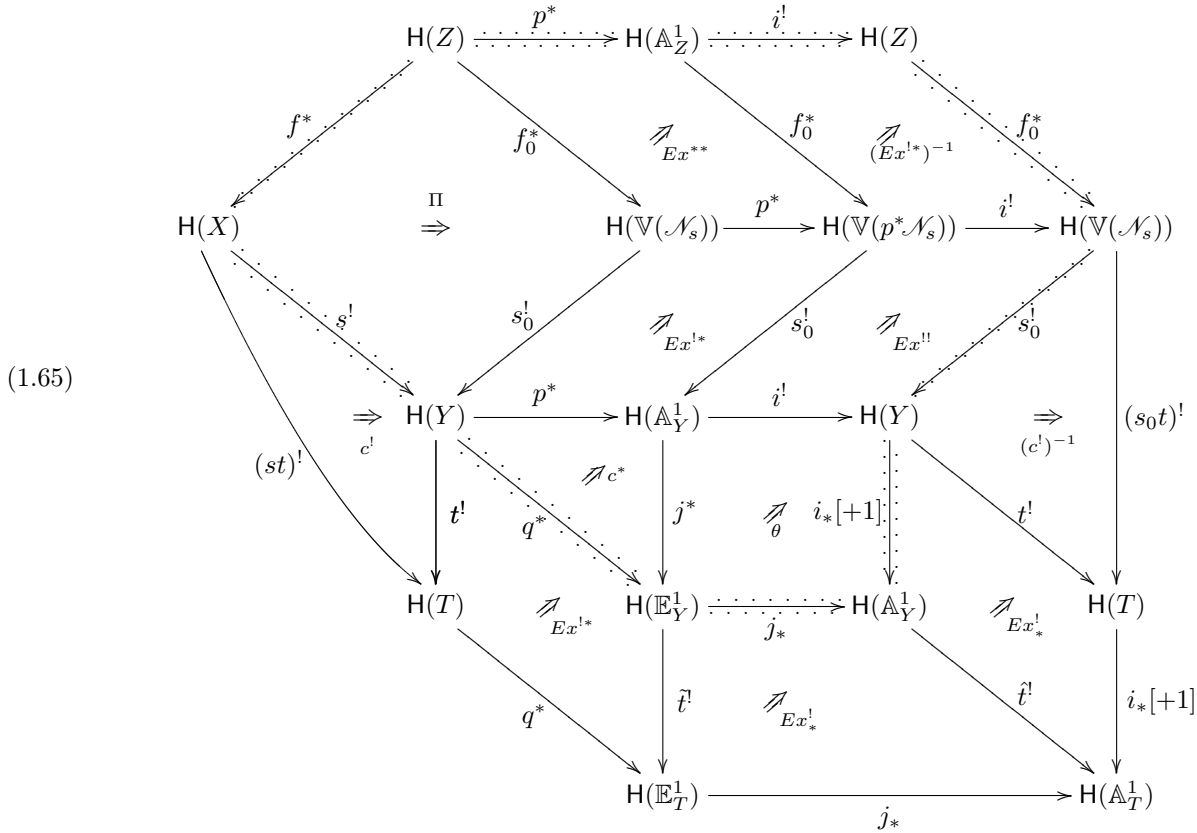
soit commutatif. Donc si les deux triangles  $(\star_1)$  et  $(\star_2)$  sont commutatifs, on a forcément l'égalité  $\Pi_1 = \Pi_2$ . C.Q.F.D

**La commutation du premier triangle**

On va prouver que le triangle :

$$(\star_1) \quad \begin{array}{ccc} j_*q^*(s \circ t)!f^* & \xrightarrow{\pi'} & i_*(s_0 \circ t)!f_0^*(-1)[-1] \\ \theta \downarrow & \nearrow & \\ i_*(s \circ t)!f^*(-1)[-1] & & \end{array} \quad \Pi_1$$

est commutatif. Pour cela considérons le diagramme planaire suivant :



La composée de la partie du diagramme planaire (1.65) située entre les deux 1-morphismes :

$$(1.66) \quad H(Z) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_Z^1) \xrightarrow{i^!} H(Z) \xrightarrow{f_0^*} H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \xrightarrow{s_0^!} H(Y) \xrightarrow{i_*[+1]} H(\mathbb{A}_Y^1)$$

et

$$(1.67) \quad H(Z) \xrightarrow{f^*} H(X) \xrightarrow{s^!} H(Y) \xrightarrow{q^*} H(\mathbb{E}_Y^1) \xrightarrow{j_*} H(\mathbb{A}_Y^1)$$

(i.e. la partie en pointillés) est égale (par définition) à la composée des 2-morphismes :

$$j_*q^*s^!f^* \xrightarrow{\theta} i_*s^!f^*(-1)[-1] \xrightarrow{\Pi} i_*s_0^!f_0^*(-1)[-1]$$

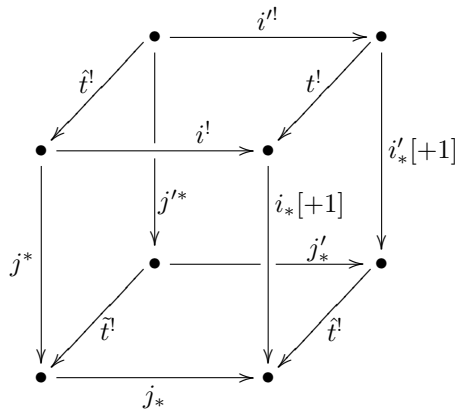
Mais d'après le théorème 1.6.19, le triangle suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} j_* q^* s^! f^* & \xrightarrow{\pi} & i_* s_0^! f_0^* (-1)[-1] \\ \theta \downarrow & \nearrow \Pi & \\ i_* s^! f^* (-1)[-1] & & \end{array}$$

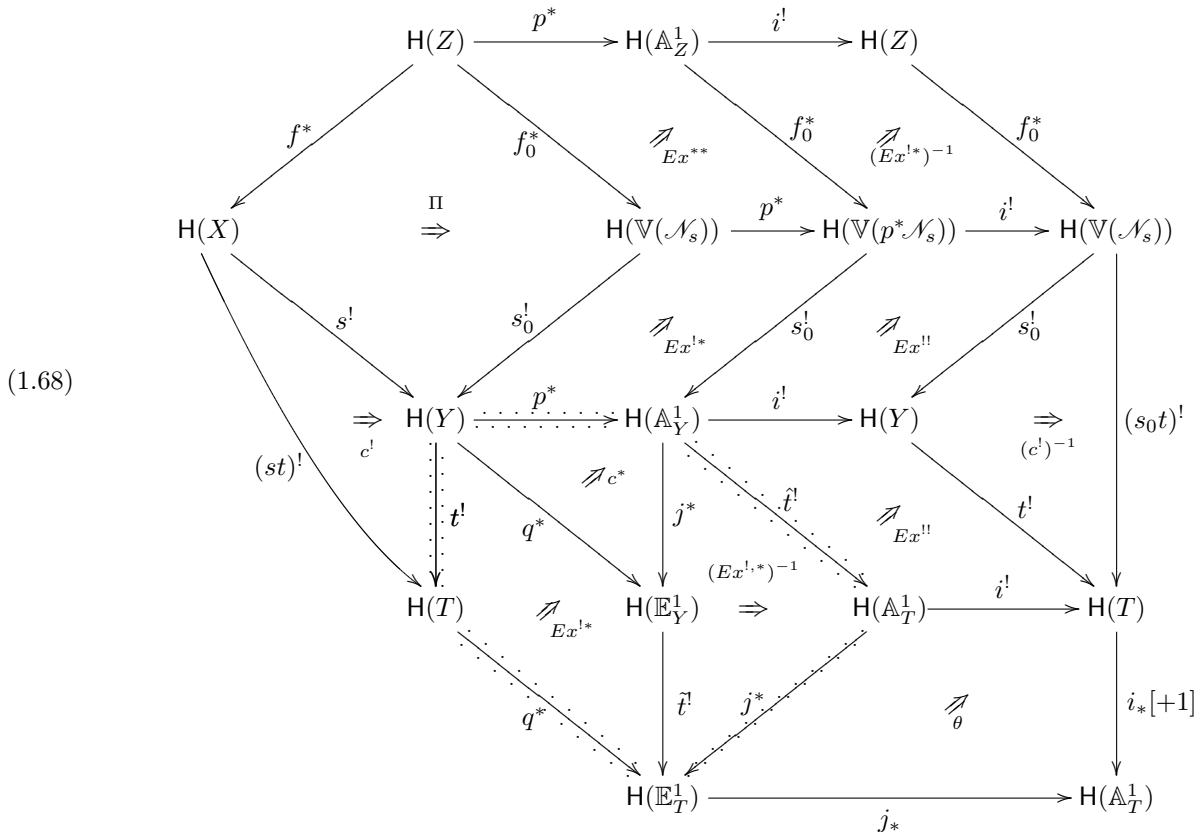
Il vient que la composée de la partie en pointillé du diagramme représente le 2-morphisme  $\pi$ . On en déduit alors en revenant aux définitions que la composée du diagramme planaire (1.65) est exactement notre 2-morphisme  $\pi'$ . Il suffira ainsi de prouver que la composée du diagramme planaire (1.65) est aussi égale à :

$$j_* q^* (s \circ t)^! f^* \xrightarrow{\theta} (s \circ t)^! f^* (-1)[-1] \xrightarrow{\Pi_1} (s_0 \circ t)^! f_0^* (-1)[-1]$$

En utilisant le cube commutatif de la proposition<sup>19</sup> 1.4.20 :



on peut voir que la composée du diagramme (1.65) est aussi égale à la composée du diagramme ci-dessous :



<sup>19</sup>Attention aux notations : les morphismes  $s$  sont dans notre contexte les morphismes  $t, \hat{t}$ , etc.

En utilisant la compatibilité des 2-morphismes d'échanges  $Ex^{1,*}$  avec la composition des carrés (induite par la composée  $q = j \circ p$ ) sur la partie en pointillés du diagramme planaire ci-dessus, on voit qu'on ne change pas la composée en remplaçant (1.68) par :

(1.69)

$$\begin{array}{ccccc}
 H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) \\
 \searrow f^* & & \searrow f_0^* & \searrow f_0^* & \searrow f_0^* \\
 H(X) & & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{i^!} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\
 \searrow s^! & & \searrow s_0^! & \searrow s_0^! & \searrow s_0^! & & \searrow s_0^! \\
 \Rightarrow H(Y) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Y^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Y) & \xrightarrow{(c^!)^{-1}} & (s_0 t)^! \\
 \searrow (st)^! & & \searrow t^! & \searrow t^! & \searrow t^! & & \searrow t^! \\
 H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^!} & H(T) & \xrightarrow{i_*[+1]} & H(\mathbb{A}_T^1) \\
 \searrow q^* & & \searrow j^* & \searrow \theta & & & \searrow i_*[+1] \\
 H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_T^1) & & & & H(\mathbb{A}_T^1)
 \end{array}$$

En utilisant la compatibilité des 2-morphismes d'échanges  $Ex^{!,!}$  puis  $Ex^{1,*}$  avec la composition des carrés (induites par la composée  $s_0 \circ t$ ), on voit que la partie en pointillé du diagramme (1.69) peut être remplacée par la partie en pointillés du diagramme planaire suivant sans que le 2-morphisme composée change :

$$\begin{array}{ccccc}
 H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) \\
 \searrow f^* & & \searrow f_0^* & \searrow f_0^* & \searrow f_0^* \\
 H(X) & & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{i^!} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\
 \searrow s^! & & \searrow s_0^! & \searrow s_0^! & \searrow s_0^! & & \searrow s_0^! \\
 \Rightarrow H(Y) & \xrightarrow{(c^!)^{-1}} & (s_0 t)^! & \searrow Ex^{!,!} & (s_0 t)^! & \searrow Ex^{!,!} & (s_0 t)^! \\
 \searrow (st)^! & & \searrow t^! & \searrow t^! & \searrow t^! & & \searrow t^! \\
 H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^!} & H(T) & \xrightarrow{i_*[+1]} & H(\mathbb{A}_T^1) \\
 \searrow q^* & & \searrow j^* & \searrow \theta & & & \searrow i_*[+1] \\
 H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_T^1) & & & & H(\mathbb{A}_T^1)
 \end{array}$$

En découpant le diagramme planaire précédent suivant la ligne :

$$H(Z) \xrightarrow{f_0^*} H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \xrightarrow{(s_0 t)^!} H(T) \xrightarrow{q^*} H(\mathbb{E}_T^1) \xrightarrow{j^*} H(\mathbb{A}_T^1)$$

on obtient la factorisation recherchée :

$$j_* q^* (s \circ t)^! f^* \xrightarrow{\theta} i_* (s \circ t)^! f^* (-1)[-1] \xrightarrow{\Pi_1} i_* (s_0 \circ t)^! f_0^* (-1)[-1]$$

On a ainsi prouvé la commutation du premier triangle.

### La commutation du second triangle

On aura besoin d'un nouveau 2-isomorphisme "de pureté"  $w$ . Pour le définir on rappelle les notations suivantes :

$$(1.70) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_T^1 & \xrightarrow{\hat{t}} & \mathbb{A}_Y^1 \xrightarrow{\hat{s}} C \\ & & \downarrow \hat{f} \\ & & \mathbb{A}_Z^1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_T^1 & \xrightarrow{\check{t}} & \mathbb{A}_Y^1 \xrightarrow{\check{s}} \mathbb{A}_X^1 \\ & & \downarrow \check{f} \\ & & \mathbb{A}_Z^1 \end{array}$$

Le premier des deux diagrammes ci-dessus n'est autre que la déformation au cône normal (voir le diagramme (1.61)). On dispose ainsi de deux suites exactes canoniques :

$$0 \longrightarrow \hat{t}^* \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_{\hat{s}\hat{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\hat{t}} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow \check{t}^* \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_{\check{s}\check{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\check{t}} \longrightarrow 0$$

Comme  $\hat{t} = \check{t}$  on a clairement  $\mathcal{N}_{\hat{t}} = \mathcal{N}_{\check{t}}$ . Par le lemme 1.6.17, le faisceau  $\mathcal{N}_{\hat{s}}$  s'identifie canoniquement à  $(p^* \mathcal{N}_s) t^{-1}$ . On déduit alors un isomorphisme  $\mathcal{N}_{\hat{s}} \simeq p^* \mathcal{N}_s \xrightarrow{-\times t^{-1}} (p^* \mathcal{N}_s) t^{-1} \simeq \mathcal{N}_{\hat{s}}$  induisant un isomorphisme  $b : \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}})$ .

On indicera par  $co$  chaque fois qu'on passe au cône normal<sup>20</sup>. Ainsi  $\hat{f}_{co}$  (resp.  $\check{f}_{co}$ ) est la projection de  $\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}\hat{t}})$  (resp.  $\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\check{s}\check{t}})$ ) sur  $\mathbb{A}_Z^1$ . On notera  $\Gamma : (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* \xrightarrow{\sim} (\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^*$  le 2-isomorphisme composé :

$$\begin{array}{ccc} (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\hat{s}\hat{t}}) \hat{h}^* \xrightarrow{C_{-1}} \text{Th}^{-1}(\check{t}^* \mathcal{N}_s) \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\hat{t}}) \hat{h}^* \\ & & \downarrow \omega_{-1}(b) \circ \omega_{-1}(\text{id}) \\ & & \text{Th}^{-1}(\hat{t}^* \mathcal{N}_s) \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\check{t}}) \hat{h}^* \xrightarrow{(C_{-1})^{-1}} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\hat{s}\hat{t}}) \hat{h}^* \xrightarrow{\sim} (\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^* \end{array}$$

Remarquons que les pull-back suivant  $i$  de  $\check{s}_{co}$ ,  $\check{t}_{co}$ ,  $\hat{s}_{co}$  et  $\hat{t}_{co}$  sont respectivement  $s_1$ ,  $t_1$ ,  $s_1'$  et  $t_1$ . De même les pull-back suivant  $j$  des même morphismes sont respectivement  $\check{s}_{co}$ ,  $\check{t}_{co}$ ,  $\check{s}_{co}$  et  $\check{t}_{co}$ .

Notons immédiatement le lemme suivant :

**LEMME 1.6.31** — *Les deux diagrammes :*

$$\begin{array}{ccc} i^! (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* p^* & \longrightarrow & s_1^! t_1^! f_1^! i^! p^* & \quad & j^* (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* p^* & \longrightarrow & (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* q^* & \longrightarrow & q^* (s_1 \circ t_1)^! f_1^* \\ i^! \Gamma \downarrow & & \downarrow \gamma & & j^* \Gamma \downarrow & & \downarrow \omega(q^* t^* \mathcal{N}_s, \frac{1}{t}) & & \downarrow \omega(q^* t^* \mathcal{N}_s, \frac{1}{t}) \\ i^! (\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^* p^* & \longrightarrow & (s_1' t_1)^! f_1^! i^! p^* & \quad & j^* (\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^* p^* & \longrightarrow & (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* q^* & \longrightarrow & q^* (s_1 \circ t_1)^! f_1^* \end{array}$$

sont commutatifs.

**DEMONSTRATION** La commutation du premier carré découle immédiatement du fait que les fibres au dessus de la section nulle de  $\mathbb{A}^1$  des extensions :

$$0 \longrightarrow \hat{t}^* \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_{\hat{s}\hat{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\hat{t}} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow \check{t}^* \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_{\check{s}\check{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\check{t}} \longrightarrow 0$$

sont canoniquement isomorphes aux extensions :

$$0 \longrightarrow t^* \mathcal{N}_{s_0} \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 t} \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow t^* \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 t} \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow 0$$

<sup>20</sup>On aurait pu également indiquer par 0 comme on l'a fait jusqu'à présent. On espère que ce choix facilitera un peu la lecture.

et que la fibre de l'isomorphisme  $b$  est l'isomorphisme évident  $\mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0}) \simeq \mathbb{V}(\mathcal{N}_s)$  utilisé dans la définition de  $\gamma$ .

Démontrons la commutation du second diagramme. Les fibres au dessus de  $\mathbb{E}^1 \subset \mathbb{A}^1$  des extensions :

$$0 \longrightarrow \hat{t}^* \mathcal{N}_{\hat{s}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\hat{s} \circ \hat{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\hat{t}} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow \check{t}^* \mathcal{N}_{\check{s}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\check{s} \circ \check{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\check{t}} \longrightarrow 0$$

sont canoniquement isomorphes à l'extension :

$$0 \longrightarrow \tilde{t}^* \mathcal{N}_{\tilde{s}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{s} \circ \tilde{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{t}} \longrightarrow 0$$

De plus, modulo les identifications canoniques  $j^* \mathcal{N}_{\hat{s}} \simeq \mathcal{N}_{\hat{s}}$  et  $j^* \mathcal{N}_{\check{s}} \simeq \mathcal{N}_{\check{s}}$  l'isomorphisme  $b$  correspond à  $\mathbb{V}(- \times t^{-1})$  par le lemme 1.6.17.

Il vient que modulo les isomorphismes canoniques  $j_*(\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* p^* \simeq (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* q^*$  et  $j_*(\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^* p^* \simeq (\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^* q^*$ , l'isomorphisme  $j^* \Gamma$  est la composée :

$$(1.71) \quad (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\check{st}}) \hat{h}^* \xrightarrow{C_{-1}} \text{Th}^{-1}(\tilde{t}^* \mathcal{N}_{\tilde{s}}) \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{t}}) \tilde{h}^* \xrightarrow{\omega_{-1}(q^* t^* \mathcal{N}_s, t^{-1})} \text{Th}^{-1}(\tilde{t}^* \mathcal{N}_{\tilde{s}}) \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{t}}) \tilde{h}^* \xrightarrow{(C_{-1})^{-1}} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\hat{st}}) \tilde{h}^* \xrightarrow{\sim} (\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^*$$

En considérant  $\omega_{-1}(q^* t^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) = \omega(q^* t^* \mathcal{N}_s, t^{-1})$  comme un 2-automorphisme du 1-morphisme identité de  $\mathbf{H}(\mathbb{E}_T^1)$ , on peut simplifier dans la composée précédente  $C_{-1}$  et  $(C_{-1})^{-1}$ . Ceci montre que la composée de (1.71) est simplement le 2-automorphisme  $\omega(q^* t^* \mathcal{N}_s, t^{-1})$  de  $(\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^*$ . Le lemme est prouvé. C.Q.F.D

On prend pour le 2-isomorphisme  $w$  la composée suivante :

$$w : p^*(s \circ t)^! f^* \xrightarrow{\sim} (\check{s} \circ \check{t})^! \check{f}^* p^* \xrightarrow{\Pi} (\check{s}_{co} \circ \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* p^* \xrightarrow{\Gamma} (\hat{s}_{co} \circ \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^* p^* \xrightarrow{\Pi^{-1}} (\hat{s} \circ \hat{t})^! \hat{f}^* p^*$$

En d'autres termes  $w$  est la composée du diagramme planaire :

$$(1.72) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbf{H}(Z) \xrightarrow{p^*} \mathbf{H}(\mathbb{A}_{\check{Z}}^1) & \xlongequal{\quad} & \mathbf{H}(\mathbb{A}_{\hat{Z}}^1) \\ & \swarrow f^* & \nearrow \check{f}^* & \searrow \check{f}_{co}^* & \swarrow \hat{f}_{co}^* \\ & \mathbf{H}(X) \xrightarrow{p^*} \mathbf{H}(\mathbb{A}_{\check{X}}^1) & \xRightarrow{\Pi} & \mathbf{H}(\mathbb{V}(p^* \mathcal{N}_{st})) \xRightarrow{\Gamma} & \mathbf{H}(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{st}})) \xRightarrow{\Pi^{-1}} & \mathbf{H}(C) \\ & \searrow (st)^! & \nearrow Ex^! & \searrow (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! & \swarrow (\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! & \searrow (\hat{s} \hat{t})^! \\ & & \mathbf{H}(T) \xrightarrow{p^*} \mathbf{H}(\mathbb{A}_{\check{T}}^1) & \xlongequal{\quad} & \mathbf{H}(\mathbb{A}_{\hat{T}}^1) & & \end{array}$$

On commence par le résultat ci-dessous qui affirme que "w prolonge le 2-isomorphisme  $\Pi_2$ " :

**LEMME 1.6.32** — *Le carré de 2-isomorphismes suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} i^! p^*(s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{\sim} & (s \circ t)^! f^*(-1)[-2] \\ i^!(w) \downarrow & & \downarrow \Pi_2 \\ i^!(\hat{s} \circ \hat{t})^! \hat{f}^* p^* & \xrightarrow{\sim} & (s_0 \circ t)^! f_0^*(-1)[-2] \end{array}$$

(Rappelons que par définition :  $(-1)[-2] = i^! p^*$ ).



DEMONSTRATION La composée du diagramme planaire :

$$(1.73) \quad \begin{array}{ccccccc} & & H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xlongequal{\quad} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) & & \\ & \swarrow f^* & & \nearrow \check{f}^* & \searrow \check{f}_{co}^* & & \swarrow \hat{f}_{co}^* & \searrow \hat{f}^* & \nearrow (Ex^{!*})^{-1} & \searrow f_0^* & \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xRightarrow{\quad} & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xRightarrow{\Gamma} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{st}})) & \xRightarrow{\Pi^{-1}} & H(C) & \xrightarrow{i^!} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\ & \searrow (st)^! & \nearrow Ex^{!*} & \searrow (\check{st})^! & \nearrow (\check{s}_{co}\check{t}_{co})^! & \nearrow \Gamma & \searrow (\hat{s}_{co}\hat{t}_{co})^! & \nearrow \Pi^{-1} & \searrow (\hat{st})^! & \nearrow & \searrow (s_0t)^! \\ & & H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xlongequal{\quad} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^!} & H(T) & & \end{array}$$

est égale à la composée :

$$i^!p^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{w} i^!(\hat{s} \circ \hat{t})^!\hat{f}^*p^* \longrightarrow (s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-2]$$

Il s'agit donc de prouver que la composée du diagramme planaire (1.73) est égale à la composée :

$$i^!p^*(s \circ t)^!f^* \longrightarrow (s \circ t)^!f^*(-1)[-2] \xrightarrow{\Pi_2} (s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-2]$$

On remarque d'abord qu'on a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & \xrightarrow{i} & C \\ f_0 \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\ Z & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_Z^1 \end{array}$$

La proposition 1.6.24 appliquée à l'immersion fermée  $i$  nous donne alors un cube commutatif :

$$(1.74) \quad \begin{array}{ccccc} & & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C) \\ & \swarrow i^! & \downarrow & \searrow i^! & \downarrow (\hat{st})^! \\ H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(X) & & \\ \downarrow f_1^* & & \downarrow \hat{f}_{co}^* & \downarrow (s_0t)^! & \downarrow (\hat{s}_{co}\hat{t}_{co})^! \\ & & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{st}})) & \xrightarrow{(\hat{s}_{co}\hat{t}_{co})^!} & H(\mathbb{A}_T^1) \\ & \swarrow i^* & \downarrow & \searrow i^! & \downarrow \\ H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0t})) & \xrightarrow{(s'_1t_1)^!} & H(T) & & \end{array}$$

Les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-isomorphismes de pureté. Les autres sont des 2-isomorphismes d'échange de type  $Ex^{!*}$  ou  $Ex^{!}$ . On peut donc remplacer le diagramme planaire (1.73) par le diagramme planaire

ci-dessous sans changer la composée :

$$(1.75) \quad \begin{array}{ccccccc} & & H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) \\ & \swarrow f^* & \nearrow \check{f}^* & & \searrow \check{f}_{co}^* & & \swarrow f_0^* \\ & H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xRightarrow{\Pi} & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xRightarrow{\Gamma} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{st}})) & \xrightarrow{i^!} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0t})) & \xRightarrow{\Pi^{-1}} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\ & \searrow (st)^! & \nearrow Ex^{1*} & \searrow (\check{st})^! & \nearrow (\check{s}_{co}\check{t}_{co})^! & \searrow (\hat{s}_{co}\hat{t}_{co})^! & \nearrow (\hat{s}_1\hat{t}_1)^! & \searrow (s_1t_1)^! & \nearrow (s_0t)^! \\ & & H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^!} & H(T) \end{array}$$

En utilisant le premier diagramme commutatif du lemme 1.6.31, on voit qu'on peut remplacer (1.75) par le diagramme planaire suivant sans changer la composée :

$$(1.76) \quad \begin{array}{ccccccc} & & H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) & \xrightarrow{\quad} & H(Z) \\ & \swarrow f^* & \nearrow \check{f}^* & & \searrow \check{f}_{co}^* & \nearrow (Ex^{1*})^{-1} & \searrow f_1^* & & \swarrow f_0^* \\ & H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xRightarrow{\Pi} & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{i^!} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{st})) & \xRightarrow{\gamma} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0t})) & \xRightarrow{\Pi^{-1}} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\ & \searrow (st)^! & \nearrow Ex^{1*} & \searrow (\check{st})^! & \nearrow (\check{s}_{co}\check{t}_{co})^! & \searrow (s_1t_1)^! & \nearrow (s_1t_1)^! & \searrow (s_0t)^! \\ & & H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^!} & H(T) & \xrightarrow{\quad} & H(T) \end{array}$$

En appliquant encore une fois la proposition 1.6.24 à l'immersion  $i$  dans le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_X^1 \\ f \downarrow & & \downarrow \check{f} \\ Z & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_Z^1 \end{array}$$

on obtient le cube commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\check{f}^*} & H(\mathbb{A}_X^1) \\ & \swarrow i^! & \downarrow & \searrow i^! & \downarrow (\check{st})^! \\ & H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(X) & \\ & \downarrow f_1^* & \downarrow \check{f}_{co}^* & \downarrow (st)^! & \downarrow (\check{s}_{co}\check{t}_{co})^! \\ & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{i^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{st}})) & \xrightarrow{i^!} & H(\mathbb{A}_T^1) \\ & \downarrow (s_1t_1)^! & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{\quad} & H(T) & \end{array}$$

On voit que la composée de (1.76) est égale à la composée du diagramme planaire suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) & \xrightarrow{\cong} & H(Z) \\
 & \swarrow f^* & & \nearrow \tilde{f}^* & & \nearrow f^* & & \nearrow f_1^* & & \nearrow f_0^* \\
 & & \nearrow p^* & & \nearrow i^! & & \nearrow f^* & & \nearrow f_1^* & & \nearrow f_0^* \\
 H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xrightarrow{i^!} & H(X) & \xRightarrow{\Pi} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{st})) & \xRightarrow{\gamma} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0t})) & \xRightarrow{\Pi^{-1}} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\
 & \searrow (st)^! & \nearrow Ex^{!*} & \searrow (\tilde{st})^! & \searrow (st)^! & \searrow (s_1t_1)^! & \searrow (s_1t_1)^! & \searrow (s_1t_1)^! & \searrow (s_1t_1)^! & \searrow (s_0t)^! \\
 & & H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^!} & H(T) & \xrightarrow{\cong} & H(T)
 \end{array}$$

On reconnaît dans la partie en pointillé le 2-morphisme  $\Pi_2$  (voir (1.60)). Ceci nous donne la factorisation recherchée :

$$i^!p^*(s \circ t)^!f^* \longrightarrow (s \circ t)^!f^*(-1)[-2] \xrightarrow{\Pi_2} (s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-2]$$

Le lemme est prouvé.

C.Q.F.D

Rappelons que notre but est de prouver que le triangle  $(\star_2)$  est commutatif ce qui veut dire que la composée :

$$j_*q^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{\theta} i_*(s \circ t)^!f^*(-1)[-1] \xrightarrow{\Pi_2} i_*(s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-1]$$

est égale au 2-morphisme  $\pi'$ . Le 2-morphisme  $\theta$  en question est la composée :

$$j_*q^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{c^*} j_*j^*p^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{\theta} i_*i^!p^*(s \circ t)^!f^*[+1] \longrightarrow i_*(s \circ t)^!f^*(-1)[-1]$$

où  $\theta$  est le 2-morphisme donné par la proposition 1.4.9. On veut donc montrer que  $\pi'$  est égal à la composée :

$$j_*q^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{c^*} j_*j^*p^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{\theta} i_*i^!p^*(s \circ t)^!f^*[+1] \longrightarrow i_*(s \circ t)^!f^*(-1)[-1] \xrightarrow{\Pi_2} i_*(s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-1]$$

D'après le lemme précédent, la composée des deux dernières flèches est égale à :

$$i^!p^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{w} i^!(\hat{s} \circ \hat{t})^!\hat{f}^*p^* \longrightarrow (s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-2]$$

modulo l'application du 1-morphisme  $i_*$ . Ainsi, il faut montrer que  $\pi'$  est égal à la composée :

(1.77)

$$j_*q^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{c^*} j_*j^*p^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{\theta} i_*i^!p^*(s \circ t)^!f^*[+1] \xrightarrow{w} i_*i^!(\hat{s} \circ \hat{t})^!\hat{f}^*p^*[+1] \longrightarrow i_*(s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-1]$$

La composée (1.77) est égale à la composée du diagramme planaire suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{(s_0t)^!} & H(T) \\
 & \nearrow i^! & & \nearrow (Ex^{!*})^{-1} & \nearrow i^! & \nearrow Ex^{!*} & \nearrow i^! \\
 & & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C) & \xrightarrow{(\hat{st})^!} & H(\mathbb{A}_T^1) \\
 & \nearrow p^* & & \nearrow w & \nearrow p^* & \nearrow c^* & \nearrow j^* \\
 H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) & \xrightarrow{(st)^!} & H(T) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_T^1) \\
 & & & & & & \nearrow j_* \\
 & & & & & & H(\mathbb{A}_T^1)
 \end{array}$$

En inspectant le diagramme planaire (1.64), dont la composée vaut le 2-morphisme  $\pi'$ , on voit facilement qu'il suffit de prouver l'égalité des composées des deux diagrammes planaires ci-dessus :

$$(1.79) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbb{H}(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & \mathbb{H}(C) & \xrightarrow{(\hat{st})^!} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_T^1) & & \\ & \nearrow p^* & & & \nwarrow w & & \nearrow p^* & & \nwarrow j^* \\ \mathbb{H}(Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathbb{H}(X) & \xrightarrow{(st)^!} & \mathbb{H}(T) & \xrightarrow{q^*} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_T^1) & & \\ & & & & & & \uparrow c^* & & \end{array}$$

$$(1.80) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{H}(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & \mathbb{H}(C) & \xrightarrow{(\tilde{st})^!} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_T^1) & & \\ \uparrow p^* & \nearrow j^* & \uparrow & \nearrow j^* & \uparrow (Ex^{1,*})^{-1} & \nearrow j^* & \\ \mathbb{H}(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_X^1) & \xrightarrow{(\tilde{st})^!} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{\omega(q^*t^*\mathcal{N}_s,t^{-1})} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_T^1) \\ \uparrow c^* & \nearrow q^* & \uparrow & \nearrow q^* & \uparrow Ex^{1,*} & \nearrow q^* & \\ \mathbb{H}(Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathbb{H}(X) & \xrightarrow{(st)^!} & \mathbb{H}(T) & & \end{array}$$

En supprimant la partie en pointillé du diagramme planaire (1.79) (resp. (1.80)) et en attachant son inverse au diagramme planaire (1.80) (resp. (1.79)) on voit qu'il est équivalent de montrer l'égalité des composées des deux diagrammes planaires suivants :

$$(1.81) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{H}(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_X^1) & \xrightarrow{(\tilde{st})^!} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{\omega(q^*t^*\mathcal{N}_s,t^{-1})} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_T^1) \\ \uparrow j^* & \nearrow j^* & \uparrow Ex^{1,*} & \nearrow j^* & \uparrow j^* & \nearrow j^* & \\ \mathbb{H}(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & \mathbb{H}(C) & \xrightarrow{(\hat{st})^!} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{q^{*(c^*)^{-1}}} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_T^1) \\ \uparrow p^* & \nearrow w & \uparrow p^* & & \uparrow p^* & \nearrow p^* & \\ \mathbb{H}(Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathbb{H}(X) & \xrightarrow{(st)^!} & \mathbb{H}(T) & & \end{array}$$

Pour montrer cela, on revient à la définition du 2-isomorphisme  $w$  : le premier de ces deux diagrammes planaires (1.81) s'écrit alors :

$$(1.82) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{H}(Z) & \xrightarrow{p^*} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{j^*} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{j^*} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_Z^1) \\ \swarrow f^* & \nearrow \tilde{f}^* & \searrow \tilde{f}_{co}^* & & \swarrow \hat{f}_{co}^* & \searrow \tilde{f}^* & \searrow \tilde{f}^* \\ \mathbb{H}(X) & \xrightarrow{p^*} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_X^1) & \xrightarrow{\tilde{f}_{co}^*} & \mathbb{H}(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & \mathbb{H}(C) & \xrightarrow{j^*} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_X^1) \\ \swarrow (st)^! & \nearrow Ex^{1,*} & \searrow (\tilde{st})^! & \searrow (\tilde{st}_{co})^! & \searrow (\hat{st}_{co})^! & \searrow (\hat{st})^! & \searrow (Ex^{1,*})^{-1} & \searrow (\tilde{st})^! \\ \mathbb{H}(T) & \xrightarrow{p^*} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & \mathbb{H}(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & \mathbb{H}(\mathbb{E}_T^1) & & \end{array}$$

On procède alors comme dans la démonstration du lemme 1.6.32. On remarque d'abord qu'on a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_X^1 & \xrightarrow{j} & C \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\ \mathbb{E}_Z^1 & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_Z^1 \end{array}$$

En appliquant la proposition 1.6.22 on obtient un cube commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C) \\ & & \downarrow j^* & & \downarrow j^* \\ H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_X^1) & & H(\mathbb{E}_Z^1) \\ & \downarrow \hat{f}_{co}^* & \downarrow (\tilde{st})^! & & \downarrow (\hat{st})^! \\ & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{st}})) & \xrightarrow{(\hat{st}_{co}\tilde{t}_{co})^!} & H(\mathbb{A}_T^1) & \\ & \downarrow \tilde{f}_{co} & \downarrow j^* & & \downarrow j^* \\ H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{st}})) & \xrightarrow{(\tilde{st}_{co}\tilde{t}_{co})^!} & H(\mathbb{E}_T^1) & & \end{array}$$

Les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-isomorphismes de pureté. Les autres sont des 2-isomorphismes d'échange de type  $Ex^{1,*}$  ou  $Ex^{*,*}$ . On peut donc remplacer le diagramme planaire (1.82) par le suivant sans changer la composée :

$$(1.83) \quad \begin{array}{ccccccc} & & H(Z) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_Z^1) \\ & \swarrow f^* & \nearrow \tilde{f}^* & \searrow \tilde{f}_{co}^* & \nearrow \tilde{f}_{co}^* & \searrow \tilde{f}^* & \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xRightarrow{\Pi} & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xRightarrow{\Gamma} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{st}})) & \xRightarrow{\Pi^{-1}} & H(\mathbb{E}_X^1) \\ & \searrow (st)^! & \nearrow Ex^{1,*} & \searrow (\tilde{st})^! & \nearrow (\tilde{st}_{co}\tilde{t}_{co})^! & \searrow (\tilde{st}_{co}\tilde{t}_{co})^! & \nearrow (Ex^{1,*})^{-1} & \searrow (\tilde{st})^! & \\ & & H(T) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \end{array}$$

En utilisant le deuxième diagramme commutatif du lemme 1.6.31, on voit qu'on peut remplacer (1.83) par le diagramme planaire suivant sans changer la composée :

$$(1.84) \quad \begin{array}{ccccccc} & & H(Z) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_Z^1) \\ & \swarrow f^* & \nearrow \tilde{f}^* & \searrow \tilde{f}_{co}^* & \nearrow \tilde{f}_{co}^* & \searrow \tilde{f}^* & \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xRightarrow{\Pi} & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{V}(q^*\mathcal{N}_{st})) & \xRightarrow{\Pi^{-1}} & H(\mathbb{E}_X^1) \\ & \searrow (st)^! & \nearrow Ex^{1,*} & \searrow (\tilde{st})^! & \nearrow (\tilde{st}_{co}\tilde{t}_{co})^! & \searrow (\tilde{st}_{co}\tilde{t}_{co})^! & \nearrow (\tilde{st}_{co}\tilde{t}_{co})^! & \searrow (\tilde{st})^! & \\ & & H(T) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{\omega(q^*t^*\mathcal{N}_s, t^{-1})} & H(\mathbb{E}_T^1) \end{array}$$

En appliquant encore une fois le lemme 1.6.22 à l'immersion ouverte  $j$  du diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_X^1 & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_X^1 \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ \mathbb{E}_Z^1 & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_Z^1 \end{array}$$

on obtient le cube commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{A}_X^1) \\ & & \downarrow j^* & & \downarrow j^* \\ H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_X^1) & & H(\mathbb{E}_X^1) \\ & & \downarrow \tilde{f}_{co}^* & & \downarrow (\tilde{s}\tilde{t})^! \\ & & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{(\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^!} & H(\mathbb{A}_T^1) \\ & & \downarrow j^* & & \downarrow j^* \\ H(\mathbb{V}(q^*\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{(\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^!} & H(\mathbb{E}_T^1) & & H(\mathbb{E}_T^1) \end{array}$$

On voit alors que la composée du diagramme planaire (1.84) est encore la composée du diagramme planaire ci-dessous :

$$(1.85) \quad \begin{array}{ccccccc} & & H(Z) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_Z^1) \xrightarrow{j^*} H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\cong} & H(\mathbb{E}_Z^1) & & \\ & \swarrow f^* & \nearrow \tilde{f}^* & \nearrow \tilde{f}^* & \searrow \tilde{f}_{co}^* & \searrow \tilde{f}^* & \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) \xrightarrow{j^*} H(\mathbb{E}_X^1) & \xrightarrow{\cong} & H(\mathbb{E}_X^1) & \xrightarrow{\cong} & H(\mathbb{E}_X^1) \\ & \searrow (st)^! & \nearrow Ex^{!*} & \nearrow (\tilde{s}\tilde{t})^! & \searrow (\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! & \searrow (\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! & \searrow (\tilde{s}\tilde{t})^! \\ & & H(T) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_T^1) \xrightarrow{j^*} H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{\cong} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{\cong} & H(\mathbb{E}_T^1) \\ & & & & & & \omega(q^*t^*\mathcal{N}_s, t^{-1}) \end{array}$$

Mais toute la partie en pointillé du diagramme planaire (1.85) se collapse en le 2-morphisme identique du 1-morphisme  $(\tilde{s} \circ \tilde{t})^! \tilde{f}^*$  pour donner en fin de compte le diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccccc} & & H(Z) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_Z^1) \xrightarrow{j^*} H(\mathbb{E}_Z^1) & & & & \\ & \swarrow f^* & \nearrow \tilde{f}^* & \nearrow \tilde{f}^* & \searrow \tilde{f}^* & & \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) \xrightarrow{j^*} H(\mathbb{E}_X^1) & & H(\mathbb{E}_X^1) & & \\ & \searrow (st)^! & \nearrow Ex^{!*} & \nearrow (\tilde{s}\tilde{t})^! & \searrow (\tilde{s}\tilde{t})^! & & \\ & & H(T) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_T^1) \xrightarrow{j^*} H(\mathbb{E}_T^1) & & H(\mathbb{E}_T^1) & & \\ & & & & & & \omega(q^*t^*\mathcal{N}_s, t^{-1}) \end{array}$$

En utilisant la compatibilité des 2-morphismes d'échange avec les compositions des carrés on obtient ce que l'on cherche, i.e., le deuxième diagramme planaire de (1.81). Le théorème 1.6.29 est prouvé.

Avant de passer au paragraphe suivant nous allons formuler le résultat démontré sous forme d'un diagramme commutatif. Nous donnerons un énoncé détaillé :

**THEOREME 1.6.33** — *Supposons donné un diagramme commutatif de  $S$ -schémas :*

$$\begin{array}{ccccc}
 T & \xrightarrow{t} & Y & \xrightarrow{s} & X \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 & & & & Z
 \end{array}$$

(with arrows labeled  $g$  from  $Y$  to  $Z$  and  $h$  from  $T$  to  $Z$ )

avec  $f, g$  et  $h$  lisses et  $s$  et  $t$  des immersions fermées. On forme les cônes normaux suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{t} & Y \xrightarrow{s_0} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \\
 & & \downarrow f_0 \\
 & & Z
 \end{array}$$

puis :

$$\begin{array}{ccc}
 T \xrightarrow{t_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) \xrightarrow{s_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0 t}) & & T \xrightarrow{t_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) \xrightarrow{s'_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0' t}) \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f'_1 \\
 Z & & Z
 \end{array}$$

Les deux derniers sont associés aux immersions fermées :  $s \circ t$  et  $s_0 \circ t$ . On a alors trois 2-isomorphismes de pureté :

- $\Pi : s^! f^* \xrightarrow{\sim} s_0^! f_0^*$ ,
- $\Pi : (s \circ t)^! f^* \xrightarrow{\sim} (s_1 \circ t_1)^! f_1^*$ ,
- $\Pi : (s_0 \circ t)^! f_0^* \xrightarrow{\sim} (s'_1 \circ t_1)^! f_1'^*$

qui s'insèrent dans un diagramme commutatif de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{c^!} & t^! s^! f^* \\
 \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi \\
 & & t^! s_0^! f_0^* \\
 & & \downarrow (c^!)^{-1} \\
 (s_1 \circ t_1)^! f_1^* & \xrightarrow{\gamma} & (s'_1 \circ t_1)^! f_1'^* \xleftarrow{\Pi} (s_0 \circ t)^! f_0^*
 \end{array}$$

avec  $\gamma$  la composée :

$$(s_1 \circ t_1)^! f_1^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 t}) h^* \xrightarrow{C^{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) h^* \xrightarrow{(C^{-1})^{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0' t}) h^* \xrightarrow{\sim} (s'_1 \circ t_1)^! f_1'^*$$

**Variantes**

Le théorème 1.6.33 admet une variante (ou plutôt un corollaire) qui nous sera plus utile dans la suite. On garde les notations du théorème 1.6.33. Pour obtenir cette variante on a besoin de quelques notations en plus. On introduit d'abord une nouvelle suite d'immersions fermées :

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{u} & \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \xrightarrow{v} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \\
 & & \downarrow f_0 \\
 & & Z
 \end{array}$$

Le carré :

$$(1.86) \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{u} & \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \\ \downarrow t & & \downarrow v \\ Y & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \end{array}$$

est commutatif et même cartésien. On déduit par passage aux cônes normaux les suites :

$$(1.87) \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{u} & \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \xrightarrow{v_0} \mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \\ & & \downarrow f_{00} \\ & & Z \end{array}$$

$$T \xrightarrow{u_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_u) \xrightarrow{v_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{v \circ u}) \downarrow f_{01} Z$$

$$T \xrightarrow{u_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_u) \xrightarrow{v'_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{v_0 \circ u}) \downarrow f'_{01} Z$$

Du carré commutatif (1.86) on déduit les égalités évidentes :

$$(1.88) \quad \mathcal{N}_{v \circ u} = \mathcal{N}_{s_0 \circ t} \quad f_{01} = f'_1 \quad v_1 \circ u_1 = s'_1 \circ t_1$$

La suite :  $T \xrightarrow{u} \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \xrightarrow{v_0} \mathbb{V}(\mathcal{N}_v)$  admet une rétraction canonique :  $\mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \longrightarrow \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \longrightarrow T$ . De plus, le  $T$ -schéma  $\mathbb{V}(\mathcal{N}_v)$  s'identifie canoniquement au fibré vectoriel  $\mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s \oplus \mathcal{N}_t)$  via les deux projections évidentes :

$$\mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \longrightarrow \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \longrightarrow \mathbb{V}(\mathcal{N}_t)$$

(la seconde projection étant celle induite du carré cartésien (1.86)). De plus l'immersion  $v_0 \circ u$  s'identifie à la section nulle du fibré  $\mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s \oplus \mathcal{N}_t)$ . Il vient alors facilement que les trois diagrammes (1.87) sont canoniquement isomorphes entre eux et au diagramme :

$$T \xrightarrow{u} \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \longrightarrow \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s \oplus \mathcal{N}_t)$$

On a le corollaire suivant du théorème 1.6.33 :

**COROLLAIRE 1.6.34** — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{c^!} & t^! s^! f^* \\ \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi \\ & & t^! s_0^! f_0^* \\ & & \downarrow Ex^{!,!} \\ (s_1 \circ t_1)^! f_1^* & & u^! v^! f_0^* \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \Pi \\ (s'_1 \circ t_1)^! f_1^* & \xrightarrow{\mu} & (v_0 \circ u)^! f_0^* \xrightarrow{c^!} u^! v_0^! f_0^* \end{array}$$

Le 2-morphisme  $Ex^{!,!}$  est associé au carré commutatif (1.86). Le 2-isomorphisme  $\mu$  est celui induit par l'isomorphisme canonique du cône normal de l'immersion  $v$  avec le cône normal de l'immersion  $s_0 \circ t$ .



DEMONSTRATION On a le diagramme commutatif suivant par 1.6.33 :

$$\begin{array}{ccc}
 (s \circ t)!f^* & \xrightarrow{c'} & t!s!f^* \\
 \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi \\
 & & t!s_0!f_0^* \\
 & & \downarrow (c')^{-1} \\
 (s_1 \circ t_1)!f_1^* & \xrightarrow{\gamma} & (s'_1 \circ t_1)!f_1'^* \xleftarrow{\Pi} (s_0 \circ t)!f_0^*
 \end{array}$$

En appliquant une deuxième fois le théorème 1.6.33, mais cette fois à la composée :

$$T \xrightarrow{u} \mathbb{V}(t^*\mathcal{N}_s) \xrightarrow{v} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s)$$

on obtient un second diagramme commutatif qu'on peut concaténer avec le premier de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
 (s \circ t)!f^* & \xrightarrow{c'} & & & t!s!f^* \\
 \downarrow \Pi & & & & \downarrow \Pi \\
 & & & & t!s_0!f_0^* \\
 & & & & \downarrow (c')^{-1} \\
 (s_1 \circ t_1)!f_1^* & \xrightarrow{\gamma} & (s'_1 \circ t_1)!f_1'^* & \xleftarrow{\Pi} & (s_0 \circ t)!f_0^* \\
 & & \parallel & & \parallel \\
 & & (v_1 \circ u_1)!f_{01}^* & \xleftarrow{\Pi} & (v \circ u)!f_0^* \\
 & & \uparrow \gamma' & & \downarrow c' \\
 & & & & u!v!f_0^* \\
 & & & & \downarrow \Pi \\
 & & & & u!v_0!f_{00}^* \\
 & & & & \downarrow (c')^{-1} \\
 (v'_1 \circ u_1)!f_{01}^* & \xleftarrow{\Pi} & & & (v_0 \circ u)!f_{00}^*
 \end{array}$$

en utilisant les égalités :  $s_0 \circ t = v \circ u$ ,  $s'_1 \circ t_1 = v_1 \circ u_1$  et  $f'_1 = f_{01}$  (voir le carré commutatif (1.86) et les égalités (1.88)).

Puisque  $v_0 \circ u$  est l'inclusion de la section nulle d'un fibré vectoriel sur  $T$ , on a d'après la proposition 1.6.28 que le 2-isomorphisme :

$$\Pi : (v_0 \circ u)!f_{00}^* \xrightarrow{\Pi} (v'_1 \circ u_1)!f_{01}^*$$

n'est autre que le 2-isomorphisme induit par l'isomorphisme de  $T$ -fibrés vectoriels :

$$\mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{v_0 \circ u})$$

De même, on voit facilement que le 2-isomorphisme  $\gamma'$  est simplement celui induit par l'isomorphisme de  $T$ -fibrés vectoriels

$$\mathbb{V}(\mathcal{N}_{v \circ u}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{v_0 \circ u})$$

Le résultat annoncé est maintenant clair.

C.Q.F.D

Voici la variante finale de notre théorème. Cette variante concerne l'isomorphisme de pureté sous sa forme  $\Pi$  :

$$s!f^* \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^* :$$

**COROLLAIRE 1.6.35** — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
 (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{c'} & t^! s^! f^* \\
 \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\
 & & t^! \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \\
 & & \downarrow \zeta_{-1} \\
 & & \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) t^! g^* \\
 & & \downarrow \Pi \\
 \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{sot}) h^* & \xrightarrow{C'_{-1}} & \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) h^*
 \end{array}$$

avec  $C'_{-1}$  le 2-isomorphisme de composition modifié (voir la définition 1.5.16) associé à la suite exacte courte de  $\mathcal{O}_T$ -modules :

$$0 \longrightarrow t^* \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_{sot} \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow 0$$

et  $\zeta_{-1}$  le 2-isomorphisme défini dans 1.5.9.

**DEMONSTRATION** On notera  $pr_0 : \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \longrightarrow Y$  la projection du fibré normal sur  $Y$ . On notera également  $pr_0$  la projection :  $\mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \longrightarrow T$ . On notera par contre  $pr_1 : \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) \longrightarrow T$  la projection du fibré normal de  $t$ ,  $pr_2 : \mathbb{V}(\mathcal{N}_{sot}) \longrightarrow T$  la projection du fibré normal de  $s \circ t$  et  $pr_3 : \mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0 t}) \longrightarrow T$  celle de  $s_0 \circ t$ . Il existe un carré cartésien canonique :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) & \xrightarrow{v} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \\
 pr_0 \downarrow & & \downarrow pr_0 \\
 T & \xrightarrow{t} & Y
 \end{array}$$

et les  $pr_0$  sont bien sûr lisses. Par la proposition 1.6.20, on a un carré commutatif de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 pr_0^* t^! g^* & \xrightarrow{\Pi} & pr_0^* t_1^! g_1^* \\
 Ex^{!*} \downarrow & & \downarrow Ex^{!*} \\
 v^! pr_0^* g^* & & v_0^! pr_{00}^* g_1^* \\
 (c^*)^{-1} \downarrow & & \downarrow (c^*)^{-1} \\
 v^! f_0^* & \xrightarrow{\Pi} & v_0^! f_{00}^*
 \end{array}$$

avec  $pr_{00}$  la projection :  $\mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \longrightarrow \mathbb{V}(\mathcal{N}_t)$ . Ce diagramme commutatif se réécrit :

$$\begin{array}{ccccc}
 v^! f_0^* & \xrightarrow{c^*} & v^! pr_0^* g^* & \xrightarrow{(Ex^{!*})^{-1}} & pr_0^* t^! g^* \\
 \Pi \downarrow & & & & \downarrow \Pi \\
 v_0^! f_{00}^* & \xrightarrow{c^*} & v_0^! pr_{00}^* g_1^* & \xrightarrow{(Ex^{!*})^{-1}} & pr_0^* t_1^! g_1^*
 \end{array}$$

D'autre part on a un carré commutatif évident :

$$\begin{array}{ccc}
 t^! s_0^! f_0^* & \xrightarrow{c^*} & t^! s_0^! pr_0^* g^* \\
 Ex^{!!} \downarrow & & \downarrow Ex^{!!} \\
 u^! v^! f_0^* & \xrightarrow{c^*} & u^! v^! pr_0^* g^*
 \end{array}$$

En concaténant judicieusement les deux derniers diagrammes commutatifs avec le diagramme commutatif du corollaire

1.6.34, on obtient le diagramme commutatif (à flèches solides) suivant :

$$(1.89) \quad \begin{array}{ccccccc} (s \circ t)!f^* & \xrightarrow{c^!} & t!s!f^* & & & & \\ \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi & & & & \\ (s_1 \circ t_1)!f_1^* & & t!s_0!f_0^* & \xrightarrow{c^*} & t!s_0!pr_0^*g^* & & \\ \downarrow \gamma & & \downarrow & & \downarrow Ex^!! & & \\ (s'_1 \circ t_1)!f_1^* & \xrightarrow{\mu} & (v_0 \circ u)!f_{00}^* & \xrightarrow{c^!} & u!v_0!f_{00}^* & \xrightarrow{c^*} & u!v_0!pr_{00}^*g_1^* & \xrightarrow{(Ex^{!*})^{-1}} & u!pr_0^*t_1^!g_1^* \\ \downarrow & & \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi \\ (s'_1 \circ t_1)!pr_3^*h^* & \xrightarrow{\delta} & u!pr_0^*t_1^!pr_1^*h^* & & & & & & \end{array}$$

Calculons le 2-isomorphisme  $\delta$  en pointillé qui rendra le diagramme total commutatif. Pour cela on forme le diagramme :

$$(1.90) \quad \begin{array}{ccccccccccc} (s'_1 \circ t_1)!f_1^* & \xrightarrow{\mu} & (v_0 \circ u)!f_{00}^* & \xrightarrow{c^!} & u!v_0!f_{00}^* & \xrightarrow{c^*} & u!v_0!pr_{00}^*g_1^* & \xrightarrow{(Ex^{!*})^{-1}} & u!pr_0^*t_1^!g_1^* \\ \downarrow c^* & & \downarrow c^* & & \downarrow c^* & & \downarrow c^* & & \downarrow c^* \\ (s'_1 \circ t_1)!pr_3^*h^* & \xrightarrow{\mu} & (v_0 \circ u)!(pr_1 \circ pr_{00})^*h^* & \xrightarrow{c^!} & u!v_0!(pr_1 \circ pr_{00})^*h^* & \xrightarrow{c^*} & u!v_0!pr_{00}^*pr_1^*h^* & \xrightarrow{(Ex^{!*})^{-1}} & u!pr_0^*t_1^!pr_1^*h^* \\ & & & & & & & & \downarrow d \end{array}$$

Les petits carrés de ce diagramme sont tous commutatifs. D'autre part, modulo les égalités :

$$\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 t}) = (s'_1 \circ t_1)! \circ pr_3^* \quad \mathrm{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s) = u! \circ pr_0^* \quad \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) = t_1^! \circ pr_1^*$$

la composée  $d$  des trois derniers 2-isomorphismes de la ligne inférieure de (1.90) est par définition le 2-isomorphisme de composition :

$$C_{-1} : \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)$$

associé au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{V}(\mathcal{N}_v) & & \\ & \nearrow v_0 \circ u & \downarrow pr_{00} & \searrow & \\ T & \xrightarrow{u} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) & \longrightarrow & T \end{array}$$

ainsi que le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & \xrightarrow{v_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \\ \downarrow & & \downarrow pr_{00} \\ T & \xrightarrow{s_1} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) \end{array}$$

ou encore le 2-isomorphisme de composition associé à la suite exacte courte de  $\mathcal{O}_T$ -modules localement libres :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow \mathcal{N}_v \longrightarrow t^*\mathcal{N}_s \longrightarrow 0$$

Il vient donc que le 2-isomorphisme  $\delta$  est simplement le 2-isomorphisme de composition associé à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 t} \longrightarrow t^*\mathcal{N}_s \longrightarrow 0$$

En revenant à la définition du 2-isomorphisme  $\gamma$ , on voit que la composée :

$$(s_1 \circ t_1)!f_1^* \xrightarrow{\gamma} (s'_1 \circ t_1)!f_1^* \longrightarrow (s'_1 \circ t_1)!pr_3^*h^* \xrightarrow{\delta} u!pr_0^*t_1^!pr_1^*h^*$$

est égale à :

$$(s_1 \circ t_1)! f_1^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 t}) h^* \xrightarrow{C_{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) h^* \xrightarrow{(C_{-1})^{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 t}) h^* \xrightarrow{C_{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) h^*$$

$\xrightarrow{C_{m-1}}$

et donc à  $(s_1 \circ t_1)! f_1^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 t}) h^* \xrightarrow{C'_{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) h^*$  avec  $C'_{-1}$  le 2-isomorphisme de composition modifié associé à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow t^* \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 t} \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow 0$$

Le corollaire est prouvé.

C.Q.F.D

### 1.6.5 Le foncteur croisé $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_*, \mathbf{H}_!, \mathbf{H}^!)$

#### Quelques préparations

On va définir deux classes de 2-isomorphismes qui formeront les ingrédients principaux pour la construction des 2-isomorphismes de connexions du 2-foncteur :

$$\mathbf{H}^! : (\mathrm{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{R}$$

annoncé dans la scholie 1.4.2. Le 2-isomorphisme de pureté jouera un rôle fondamental dans la suite (spécialement dans la construction de la deuxième classe de 2-isomorphismes).

**Un isoéchange sur le couple  $(\mathrm{Imm} \mathbf{H}^!, \mathrm{Liss} \mathbf{H}^!)$ .** On va définir une structure d'échange sur le couple  $(\mathrm{Imm} \mathbf{H}^!, \mathrm{Liss} \mathbf{H}^!)$  relativement à la classe des carrés cartésiens de  $(\mathrm{Sch}/S)$  ayant les flèches verticales lisses et les flèches horizontales des immersions fermées. On notera  $Ex^{!}(\cdot)$  les 2-morphismes d'échange qui définissent cette structure d'échange. Cette notation est abusive au moins à ce stade de la construction, puisqu'elle peut être confondue avec les 2-isomorphismes d'échange de la structure d'isoéchange triviale sur  $(\mathrm{Imm} \mathbf{H}^!, \mathrm{Imm} \mathbf{H}^!)$  (par exemple).

**PROPOSITION 1.6.36** — *Il existe une structure d'échange sur le couple  $(\mathrm{Imm} \mathbf{H}^!, \mathrm{Liss} \mathbf{H}^!)$  relativement à la classe des carrés cartésiens de  $(\mathrm{Sch}/S)$  ayant les flèches verticales lisses et les flèches horizontales des immersions fermées. Le 2-morphisme d'échange relativement à un carré cartésien  $(C)$  :*

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{i'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{i} & \bullet \end{array}$$

(avec  $i$  une immersion fermée et  $f$  un morphisme lisse) est donné par la composée :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{i^!} & \bullet \\ \mathrm{Th}(\Omega_{f'}) \uparrow & \not\parallel & \uparrow \mathrm{Th}(\Omega_f) \\ \bullet & \xleftarrow{i^!} & \bullet \\ f'^* \uparrow & \not\parallel_{Ex^{!,*}} & \uparrow f^* \\ \bullet & \xleftarrow{i^!} & \bullet \end{array}$$

Il sera noté  $Ex^{!!}(C)$ . De plus cet échange est un isoéchange.

**DEMONSTRATION** Il s'agit de prouver que la formule qui donne les  $Ex^{!}(\cdot)$  définit une famille de 2-morphismes compatibles avec les 2-isomorphismes d'échange de chacun des 2-foncteurs  $\mathrm{Imm} \mathbf{H}^!$  et  $\mathrm{Liss} \mathbf{H}^!$ . On pourra pour cela reprendre la preuve de la proposition 1.5.19. Une façon plus économique est d'utiliser directement la proposition 1.5.19. Voici comment on procède :

D'après la proposition 1.5.19 on dispose d'un foncteur croisé sur le quadruplet  $(H^*, H_*, {}^{\text{Liss}}H!, {}^{\text{Liss}}H^!)$ . On s'intéresse uniquement à l'échange sur le couple :  $(H_*, {}^{\text{Liss}}H^!)$ . Par restriction on obtient un échange de type  $\swarrow$  sur le couple  $({}^{\text{Imm}}H_*, {}^{\text{Liss}}H^!)$  pour la classe des carrés cartésiens. Par le théorème de changement de base pour une immersion fermée il est aisé de voir que cet échange est en fait un isoéchange. En prenant l'inverse on obtient un échange de type  $\searrow$  sur  $({}^{\text{Imm}}H_*, {}^{\text{Liss}}H^!)$ . En utilisant enfin l'adjonction globale entre les deux 2-foncteurs  ${}^{\text{Imm}}H_*$  et  ${}^{\text{Imm}}H^!$  (ce dernier étant l'adjoint à gauche) on déduit un échange de type  $\swarrow$  sur le couple  $({}^{\text{Imm}}H^!, {}^{\text{Liss}}H^!)$ . Il est aisé de voir que les 2-morphismes d'échange de cette structure sont donnés par les formules de l'énoncé. C.Q.F.D

**Une troisième forme du 2-isomorphisme de pureté** On suppose donné un triangle commutatif de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec  $f$  et  $g$  des morphismes lisses et  $s$  une immersion fermée. En prenant le cône normal de l'immersion  $s$  on obtient le triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \\ & \searrow g & \downarrow f_0 \\ & & Z \end{array}$$

On a construit dans la sous-section 1.6.3 deux 2-isomorphismes (essentiellement équivalents) :

- $\Pi : s^!f^* \xrightarrow{\sim} s_0^!f_0^*$
- $\Pi : s^!f^* \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*$

Remarquons que le second des ces deux 2-isomorphismes est "plus intrinsèque" dans le sens qu'il ne fait pas apparaître la section  $s_0$  ni la projection  $f_0$ . Dans ce paragraphe on va définir une troisième forme du 2-isomorphisme de pureté qui cette fois ne fera apparaître que les  $S$ -morphisms  $s$ ,  $f$  et  $g$ . Ensuite on établira les différentes compatibilités pour ces nouveaux 2-isomorphismes de pureté.

**DEFINITION 1.6.37** — Pour chaque triangle commutatif comme ci-dessus, on définit un 2-isomorphisme :

$$\Pi : s^!f^! \xrightarrow{\sim} g^!$$

par la composée :

$$\begin{array}{ccccccc} s^!\text{Th}(\Omega_f)f^* & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(s^*\Omega_f)s^!f^* & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(s^*\Omega_f)\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^* & \xrightarrow{C'} & \text{Th}(\Omega_g)\text{Th}(\mathcal{N}_s)\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^* & \xrightarrow{\delta} & \text{Th}(\Omega_g)g^* \\ \parallel & & & & & & & & \parallel \\ s^!f^! & & & & & & & & g^! \end{array}$$

Le 2-morphisme  $C'$  étant le 2-isomorphisme de composition modifié  $\text{Th}(s^*\Omega_f) \xrightarrow{\sim} \text{Th}(\Omega_g)\text{Th}(\mathcal{N}_s)$  associé à la suite exacte courte de  $\mathcal{O}_Y$ -modules localement libres :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_s \longrightarrow s^*\Omega_f \longrightarrow \Omega_g \longrightarrow 0$$

Le 2-morphisme  $\delta$  est la counité de l'adjonction (qui est un 2-isomorphisme). Dans le langage des diagrammes planaires, ce 2-isomorphisme de pureté est la composée du diagramme planaire :

(1.91)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(Y) & \xleftarrow{s^!} & H(X) \\
 & & \uparrow \text{Th}(s^* \Omega_f) & \searrow & \uparrow \text{Th}(\Omega_f) \\
 & \text{Th}(\Omega_g) & & & \\
 & \swarrow & & & \\
 H(Y) & \xleftarrow{\text{Th}(\mathcal{N}_s)} & H(Y) & \xleftarrow{s^!} & H(X) \\
 & \searrow & \uparrow \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) & \swarrow \Pi & \uparrow f^* \\
 & & H(Y) & \xleftarrow{g^*} & H(Z)
 \end{array}$$

Compatibilité avec les restrictions suivant des morphismes lisses. On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.6.38** — Supposons donné un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{t} & R \\
 u \downarrow & & \downarrow v \\
 Y & \xrightarrow{s} & X \\
 & \searrow & \downarrow f \\
 & & Z
 \end{array}$$

à carré cartésien avec  $s, f$  et  $g$  comme avant, et  $v$  lisse. On a alors un diagramme commutatif de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 t^!(f \circ v)^! & \xrightarrow{\Pi} & (g \circ u)^! \\
 c^! \downarrow & & \downarrow c^! \\
 t^!v^!f^! & \xrightarrow{Ex^{!!}} & u^!s^!f^! \xrightarrow{\Pi} u^!g^!
 \end{array}$$

avec  $Ex^{!!}$  le 2-isomorphisme d'échange de la proposition 1.6.36. En d'autres termes, le solide :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(T) & \xleftarrow{t^!} & H(R) \\
 & & \uparrow u^! & & \uparrow v^! \\
 & & (gu)^! & & (fv)^! \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 H(Y) & \xleftarrow{s^!} & H(X) & & \\
 \uparrow g^! & & \uparrow f^! & & \\
 & & H(Z) & &
 \end{array}$$

(avec sur la face carrée le 2-isomorphisme  $Ex^{!!}$  et sur les faces triangulaires soit le 2-isomorphisme de connexion  $c^!$  soit le 2-isomorphisme de pureté  $\Pi$ ) est commutatif.

DEMONSTRATION Il s'agit de prouver que les composées des deux diagrammes planaires :

(1.92)

sont les mêmes. Pour cela, on explicite le premier des deux diagrammes en revenant aux définitions des 2-morphismes  $\Pi$  et  $Ex^!!$ . On obtient ainsi le diagramme planaire :

(1.93)

En utilisant le fait que les équivalences de Thom sont des autoéquivalences des restrictions à  $(Sch/X)$  des 2-foncteurs  $H^*$ , et  $ImmH^!$  et que ces autoéquivalences sont compatibles à l'échange sur le couple  $(H^*, ImmH^!)$  on obtient un cube commutatif :

avec  $w = v \circ t = s \circ u : T \longrightarrow X$ . Il vient que la composée du diagramme planaire (1.93) est égale à la composée

du diagramme planaire :

(1.94)

En utilisant :

- la compatibilité avec les 2-isomorphismes de connexions des 2-isomorphismes structuraux de l'autoéquivalence de Thom induite par  $\Omega_f$  sur la restriction de  $\text{Imm}H^1$  à  $(\text{Sch}/X)$  (voir le théorème 1.5.9),
- la compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la restriction suivant un morphisme lisse (voir le corollaire 1.6.21),

on voit que l'on peut remplacer les deux parties en pointillé de (1.94) par deux autres diagrammes planaires ayant les mêmes composées pour obtenir le diagramme planaire suivant :

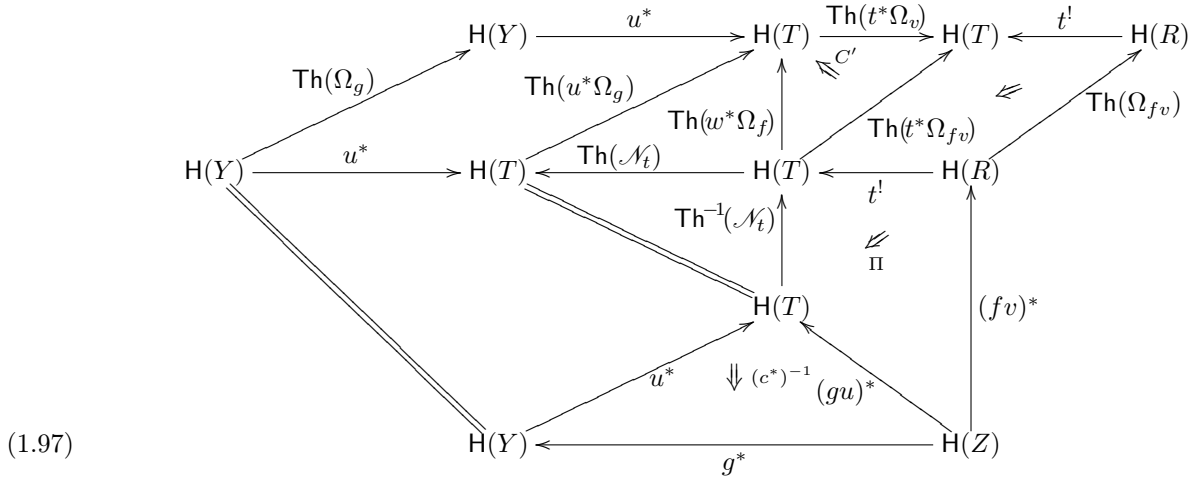
(1.95)

En utilisant le fait que les 2-isomorphismes de composition sont des isomorphismes d'autoéquivalences de la restriction du 2-foncteur  $H^*$  à  $(\text{Sch}/Y)$  (voir proposition 1.5.11), on voit que les deux diagrammes planaires ci-dessous :

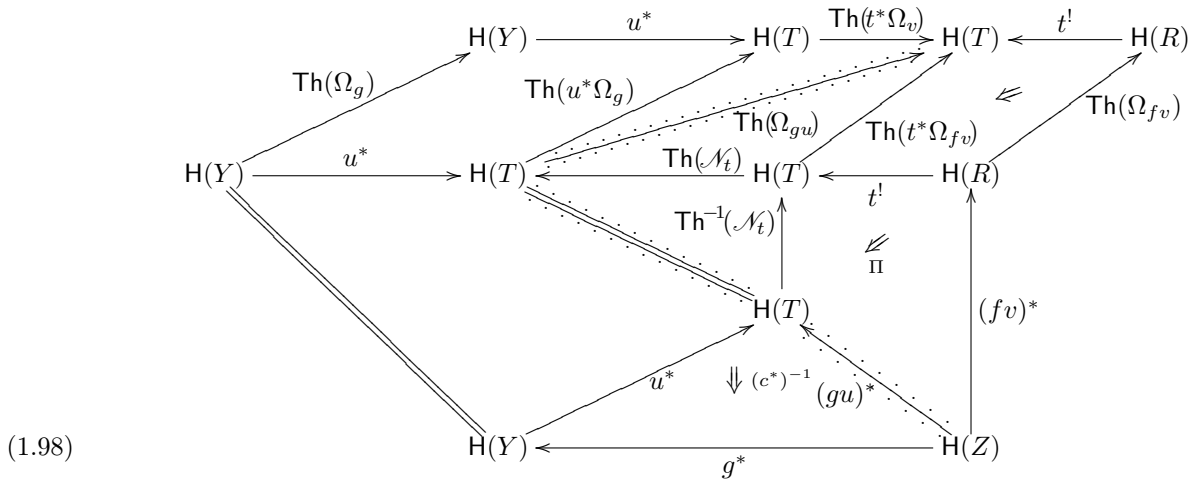
(1.96)



ont la même composée. En remplaçant dans la partie en pointillé de (1.95) le premier diagramme de (1.96) par le second, on obtient le diagramme planaire :



En utilisant l'associativité de la composition pour les équivalences de Thom (voir le théorème 1.5.18), on voit que la composée de (1.97) est égale à celle du diagramme planaire :



On divise le diagramme planaire (1.98) suivant la ligne en pointillé :

$$H(Z) \xrightarrow{(gu)^*} H(T) \xlongequal{\quad} H(T) \xrightarrow{\text{Th}(\Omega_{gu})} H(T)$$

On reconnaît à droite de cette ligne le 2-isomorphisme de pureté :

$$\Pi : t^!(f \circ v)^! \longrightarrow (g \circ u)^!$$

et à gauche de cette ligne, le 2-isomorphisme de connexion :

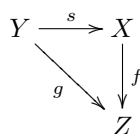
$$c^! : (g \circ u)^! \longrightarrow u^!g^!$$

On retrouve donc le second diagramme planaire de (1.92). La proposition est prouvée.

C.Q.F.D

**Compatibilité avec les restrictions quelconques au niveau de la base** On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.6.39** — *On suppose donné un triangle commutatif de  $S$ -schémas :*



avec  $f$  et  $g$  lisses et  $s$  une immersion fermée. On se donne en plus un  $S$ -morphisme  $a : Z' \longrightarrow Z$  et on forme le triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{s'} & X' \\ & \searrow g' & \downarrow f' \\ & & Z' \end{array}$$

obtenu par pull-back suivant  $a$ . On notera par  $a$  les  $S$ -morphisms :

$$Y' \longrightarrow Y \quad \text{et} \quad X' \longrightarrow X$$

Le diagramme de 2-isomorphismes ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} a^* s^! f^! & \xrightarrow{Ex^{!,*}} & s^! a^* f^! & \xrightarrow{Ex^{!,*}} & s^! f^! a^* \\ \Pi \downarrow & & & & \downarrow \Pi \\ a^* g^! & \xrightarrow{Ex^{*!}} & & & g^! a^* \end{array}$$

est commutatif. En d'autres termes, le diagramme solide suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & H(Y') & \xleftarrow{s^!} & H(X') \\ & \nearrow a^* & & \nearrow g^! & \nearrow a^* \\ & & H(Y) & \xleftarrow{s^!} & H(X) \\ & \searrow g^! & & \searrow f^! & \searrow a^* \\ & & H(Z) & & H(Z') \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION Nous ne donnerons pas la preuve de cette proposition. Elle est tout à fait analogue à celle de la proposition 1.6.40. Il faut juste remplacer dans le paragraphe suivant  $a^!$  par  $a^*$ . C.Q.F.D

**Compatibilité avec les sections à support** On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.6.40** — On suppose donné un triangle commutatif de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec  $f$  et  $g$  lisses et  $s$  une immersion fermée. On se donne en plus une immersion fermée  $a : Z' \longrightarrow Z$  et on forme le triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{s'} & X' \\ & \searrow g' & \downarrow f' \\ & & Z' \end{array}$$

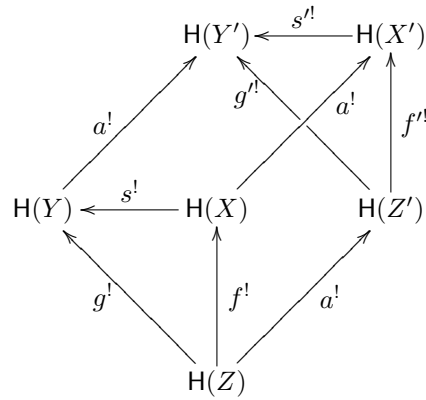
obtenu par pull-back suivant  $a$ . On notera par  $a$  les immersions fermées :

$$Y' \longrightarrow Y \quad \text{et} \quad X' \longrightarrow X$$

Le diagramme de 2-isomorphismes ci-dessous :

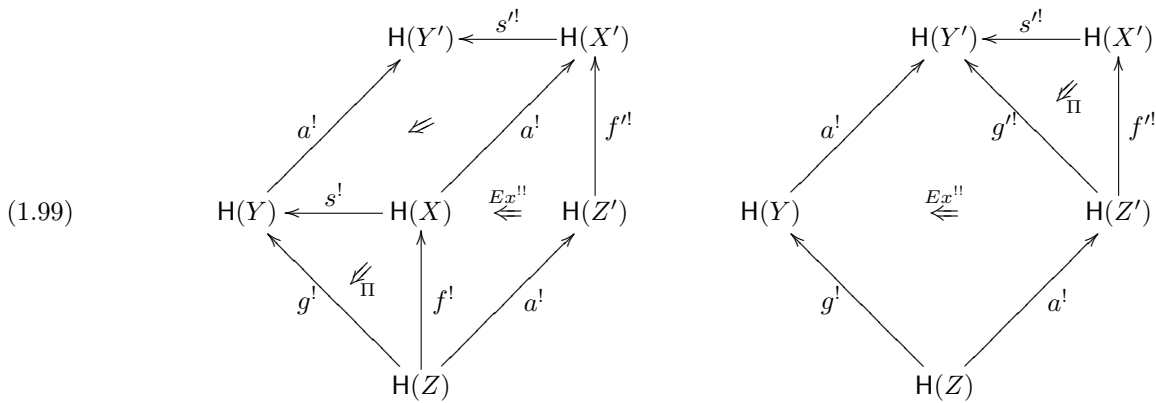
$$\begin{array}{ccccc} a^! s^! f^! & \xrightarrow{Ex^{!!}} & s^! a^! f^! & \xrightarrow{Ex^{!!}} & s^! f^! a^! \\ \Pi \downarrow & & & & \downarrow \Pi \\ a^! g^! & \xrightarrow{Ex^{!!}} & & & g^! a^! \end{array}$$

est commutatif. En d'autres termes, le diagramme solide suivant :

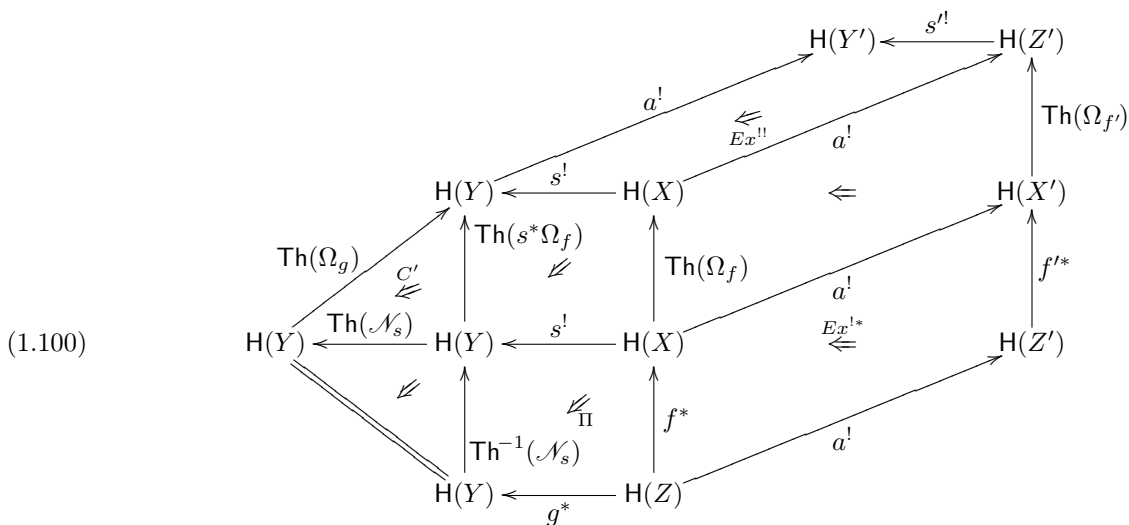


est commutatif.

DEMONSTRATION Il s'agit de prouver que l'égalité des composées des deux diagrammes plans suivants :



Pour cela, on explicite le premier de ces deux diagrammes plans en revenant à la définition du 2-isomorphisme  $\Pi$ . On obtient ainsi le diagramme planaire :



En utilisant le fait que les équivalences de Thom induites par  $\Omega_f$  forment une autoéquivalence du 2-foncteur restriction de  $\text{Imm}H^!$  à  $(\text{Sch}/X)^{\text{Imm}}$  (voir la proposition 1.5.11), on voit que le diagramme planaire (1.100) admet la même composée

que :

(1.101)

Diagram (1.101) is a complex commutative diagram with nodes  $H(Y)$ ,  $H(X)$ ,  $H(Z)$ ,  $H(Y')$ ,  $H(X')$ , and  $H(Z')$ . The diagram consists of several triangles and squares connected by arrows. Key arrows include  $a^!$ ,  $s^!$ ,  $f^*$ ,  $g^*$ ,  $Ex^{!*$ ,  $Ex^{!!}$ ,  $\Pi$ ,  $C'$ , and various  $\text{Th}$  maps like  $\text{Th}(\Omega_g)$ ,  $\text{Th}(\mathcal{N}_s)$ ,  $\text{Th}(s^*\Omega_f)$ ,  $\text{Th}(s'^*\Omega_{f'})$ , and  $\text{Th}(\Omega_{f'})$ . Some arrows are marked with  $\cong$  or  $\simeq$ .

En utilisant la compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec les sections à support (sous la forme donnée dans le corollaire 1.6.25), on voit que la composée de (1.101) est égale à la composée de :

(1.102)

Diagram (1.102) is similar to (1.101) but with some arrows replaced by dotted lines to indicate a different composition path. The nodes and most arrows are the same, but the path from  $H(Y)$  to  $H(Y')$  and  $H(Z')$  is now indicated by dotted lines.

En utilisant le fait que les 2-isomorphismes de composition sont des isomorphismes d'autoéquivalences de la restriction de  $\text{Imm}H^1$  à  $(\text{Sch}/Y)^{\text{Imm}}$  (voir la proposition 1.5.11), on voit que les deux diagrammes plans ci-dessous :

(1.103)

Diagram (1.103) shows two commutative diagrams. The left diagram has nodes  $H(Y)$ ,  $H(T)$ , and  $H(Y')$ . The right diagram has nodes  $H(Y)$ ,  $H(T)$ , and  $H(T)$ . Both diagrams feature arrows  $a^!$ ,  $\text{Th}(\Omega_g)$ ,  $\text{Th}(s^*\Omega_f)$ ,  $\text{Th}(s'^*\Omega_{f'})$ ,  $\text{Th}(\mathcal{N}_t)$ ,  $\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'})$ , and  $\Pi$ .

ont la même composée. En remplaçant dans la partie en pointillé de (1.102) le premier diagramme de (1.103) par le

second, on obtient le diagramme planaire suivant :

$$(1.104) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & H(Y) & \xrightarrow{a^!} & H(Y') & \xleftarrow{s'^!} & H(Z') \\ & & \swarrow \text{Th}(\Omega_g) & & & \swarrow \text{Th}(\Omega_{g'}) & & \swarrow \text{Th}(\Omega_{f'}) \\ H(Y) & \xrightarrow{a^!} & H(Y') & \xleftarrow{\text{Th}(\mathcal{N}_{s'})} & H(Y') & \xleftarrow{s'^!} & H(X') & \xrightarrow{f'^*} & H(Z') \\ & & \swarrow \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'}) & & \swarrow \text{Th}(s'^* \Omega_{f'}) & & & & \\ & & & H(Y) & \xrightarrow{a^!} & H(Y') & \xleftarrow{g'^*} & H(Z') \\ & & \swarrow \text{Ex}^{!*} & & & \swarrow & & & \\ & & & H(Y) & \xrightarrow{g'^*} & H(Z) & & & \end{array}$$

On divise le diagramme planaire (1.104) selon la ligne en pointillé :

$$H(Z) \xrightarrow{g'^*} H(Y') \xrightarrow{\text{Th}(\Omega_{g'})} H(Y')$$

La partie de droite n'est autre que le 2-isomorphisme de pureté :

$$\Pi : s'^! f'^! \xrightarrow{\sim} g'^!$$

La partie de gauche n'est autre que le 2-isomorphisme d'échange  $Ex^{!!}$  relatif à la structure d'échange sur le couple  $(\text{Imm}H^!, \text{Liss}H^!)$  de la proposition 1.6.36 :

$$Ex^{!!} : g'^! a^! \xrightarrow{\sim} a^! g'^!$$

Il vient que la composée de (1.104) est égale à la composée du second diagramme planaire de (1.99). La proposition est alors démontrée. C.Q.F.D

**Compatibilité avec la composition des immersions fermées** On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.6.41** — *On suppose donné un diagramme commutatif de  $S$ -schémas :*

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{t} & Y & \xrightarrow{s} & X \\ & & \searrow g & & \downarrow f \\ & & & & Z \\ & \searrow h & & & \end{array}$$

avec  $s$  et  $t$  des immersions fermées et  $f, g$  et  $h$  des morphismes lisses. Le diagramme de 2-isomorphismes ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} (s \circ t)^! f^! & \xrightarrow{\Pi} & h^! \\ c^! \downarrow & & \nearrow \Pi \\ t^! s^! f^! & \xrightarrow{\Pi} & t^! g^! \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION Il s'agit de prouver que les composées des deux diagrammes planaires ci-dessous :

(1.105)

sont les mêmes. Pour cela on remarque (en revenant aux définitions) que la composée du premier des deux diagrammes est égal à celle de :

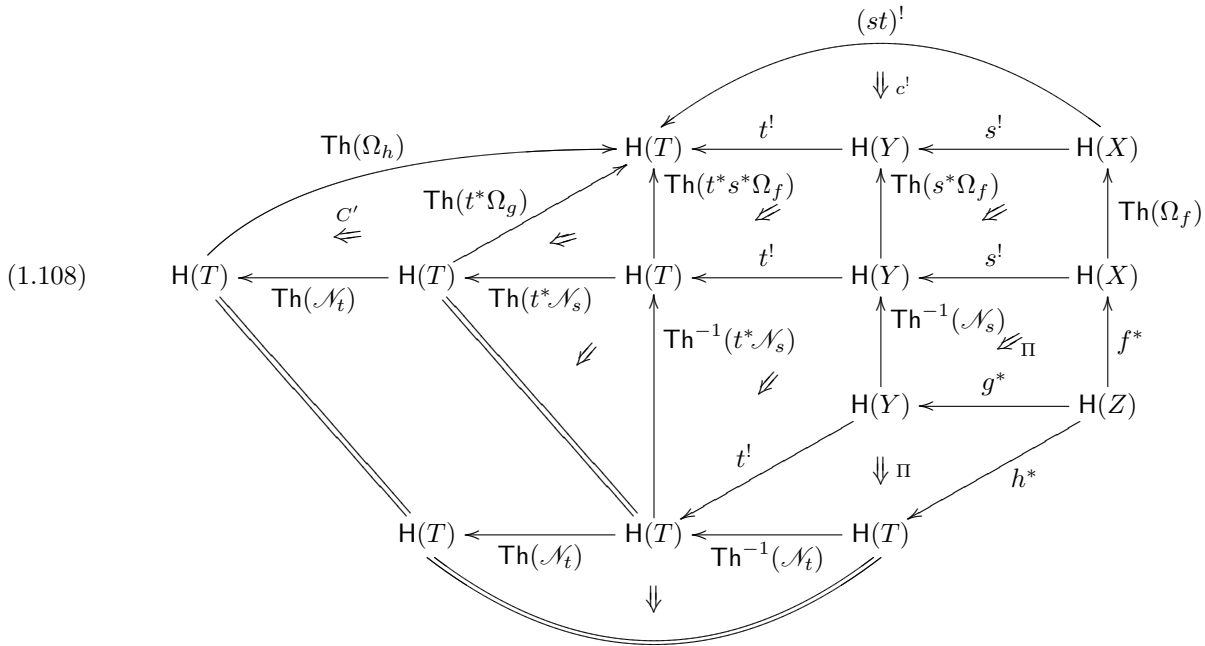
(1.106)

En utilisant le fait que les 2-isomorphismes de composition sont des isomorphismes d'autoéquivalences de la restriction de  $\text{Imm}^1 \mathbf{H}^1$  à  $(\text{Sch}/Y)^{\text{Imm}}$  (voir proposition 1.5.11), on voit que les composées des deux diagrammes planaires ci-dessous sont égales :

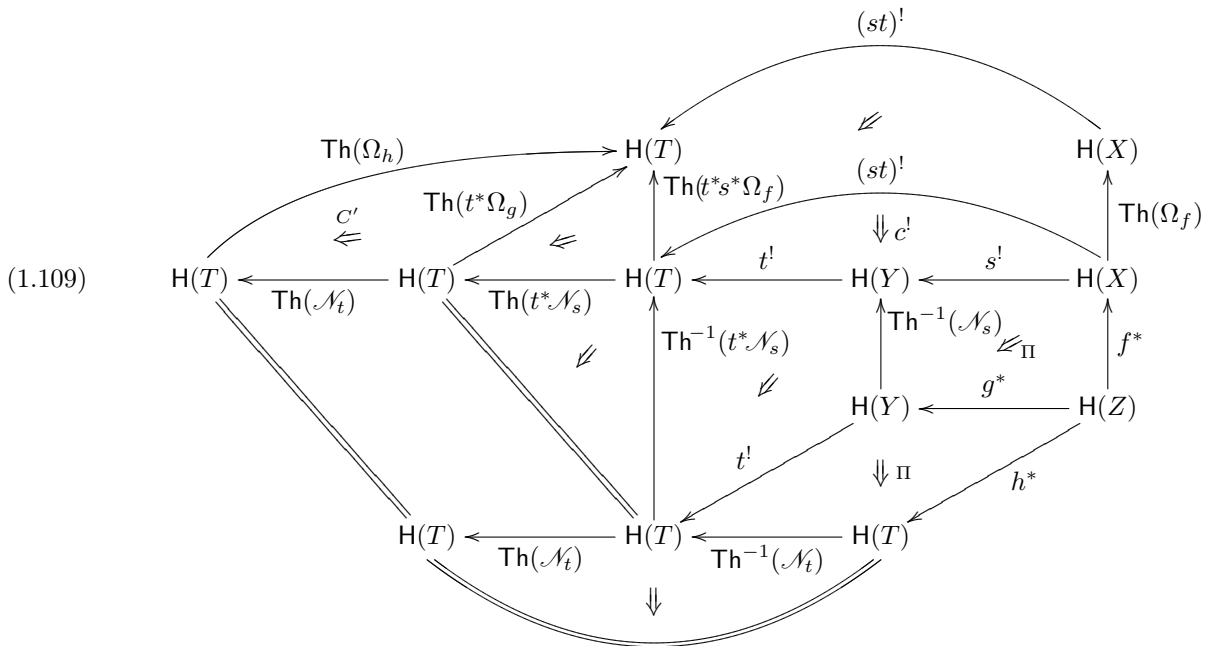
(1.107)

En remplaçant dans la partie en pointillé dans (1.106) le second diagramme planaire de (1.107) par le premier, on

obtient :

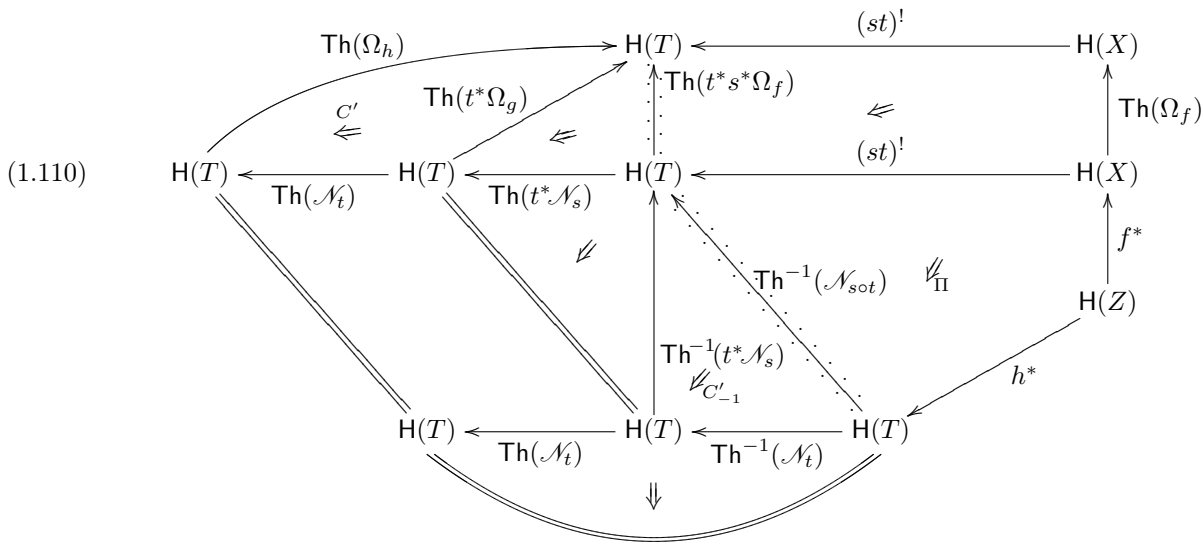


En utilisant la compatibilité des 2-isomorphismes structuraux des autoéquivalences de Thom avec les 2-isomorphismes de connexions de  ${}^{\text{Imm}}\mathbf{H}^!$ , on voit que la composée du diagramme (1.108) est égale celle de :



En utilisant la compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la composition des immersions fermées sous la forme donnée dans le corollaire 1.6.35, on obtient en fin de compte que la composée de (1.108) est égale à la composée du

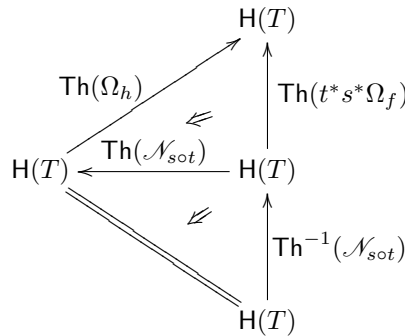
diagramme planaire :



Donc pour terminer la preuve de la proposition, il suffit de montrer que la partie du diagramme planaire (1.110) située à gauche de la ligne en pointillé :

$$H(T) \xrightarrow{\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{sot})} H(T) \xrightarrow{\text{Th}(t^*s^*\Omega_f)} H(T)$$

définit le même 2-isomorphisme que le diagramme planaire :



On laisse ceci en exercice. La preuve de la proposition est terminée.

C.Q.F.D

**Compatibilité avec l’oubli de structure** On termine les préliminaires avec la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.6.42** — *On suppose comme d’habitude, donné un triangle commutatif de S-schémas :*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec  $f$  et  $g$  lisses et  $s$  une immersion fermée. En suppose donné en plus un  $S$ -morphisme lisse :

$$Z \xrightarrow{b} B$$

Le diagramme de 2-isomorphismes suivant :

$$\begin{array}{ccc} s^!(b \circ f)^! & \xrightarrow{\Pi} & (b \circ g)^! \\ c' \downarrow & & \downarrow c' \\ s^!f^!b^! & \xrightarrow{\Pi} & g^!b^! \end{array}$$

est commutatif.

**DEMONSTRATION** Cette proposition se prouve de la même manière que les trois précédentes. Toute fois elle est bien plus simple que les autres. Elle sera donc laissée en exercice.

C.Q.F.D



**La construction du foncteur croisé :**  $(H^*, H_*, H!, H^!)$

On veut appliquer le théorème 1.3.1 aux 2-foncteurs partiels :

$$(\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{R}$$

$$(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{R}$$

Il faut donc définir pour tout carré commutatif  $(C)$  :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{k} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

avec  $f$  et  $g$  lisses et  $i$  et  $k$  des immersions fermées un 2-isomorphisme :

$$a(C) : k^! f^! \xrightarrow{\sim} g^! i^!$$

et vérifier ensuite la compatibilité avec les compositions des carrés.

Pour construire  $a(C)$ , on forme le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{s} & X \times_Y T & \xrightarrow{i'} & X \\ & \searrow g & \downarrow f' & & \downarrow f \\ & & T & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Et on prend  $a(C)$  la composée des 2-isomorphismes :

$$k^! f^! \xrightarrow{c^*} s^! i'^! f^! \xrightarrow{(Ex^{!!})^{-1}} s^! f'^! i^! \xrightarrow{\Pi} g^! i^!$$

En d'autres termes,  $a(C)$  est la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc} & & k^! & & \\ & & \downarrow c^! & & \\ H(Z) & \xleftarrow{s^!} & H(X \times_Y T) & \xleftarrow{i'^!} & H(X) \\ & \swarrow g^! & \uparrow f^! & \swarrow (Ex^{!,!})^{-1} & \uparrow f^! \\ & & H(T) & \xleftarrow{i^!} & H(Y) \end{array}$$

**PROPOSITION 1.6.43** — Les 2-isomorphismes  $a(C)$  sont compatibles avec la composition verticale des carrés.

DEMONSTRATION On se donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{l} & W \\ n \downarrow & & \downarrow m \\ Z & \xrightarrow{k} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

avec  $f, g, n$  et  $m$  des morphismes lisses et  $i, k$  et  $l$  des immersions fermées. On forme le diagramme de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{t} & W \times_X Z & \xrightarrow{s} & W \times_Y T & \xrightarrow{i} & W \\ & \searrow n & \downarrow m & & \downarrow m & & \downarrow m \\ & & Z & \xrightarrow{s} & X \times_Y T & \xrightarrow{i} & X \\ & & \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow f \\ & & T & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Tous les carrés de ce diagrammes sont cartésiens. Il s'agit de prouver que le diagramme de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 (i \circ s \circ t)^!(f \circ m)^! & \xrightarrow{\sim} & (g \circ n)^! i^! \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 (i \circ s \circ t)^! m^! f^! & \xrightarrow{\sim} & n^! (i \circ s)^! f^! \xrightarrow{\sim} n^! g^! i^!
 \end{array}$$

est commutatif. En d'autres termes il s'agit de voir que les composées des deux diagrammes planaires ci-dessous sont égales :

(1.111)

Diagram (1.111) is a commutative diagram with nodes  $H(V)$ ,  $H(W \times_Y T)$ ,  $H(W)$ ,  $H(T)$ , and  $H(Y)$ . The top node is  $H(V)$ . Arrows include  $(st)^!$  from  $H(W \times_Y T)$  to  $H(V)$ ,  $(gn)^!$  from  $H(T)$  to  $H(V)$ ,  $(ist)^!$  from  $H(W)$  to  $H(V)$ ,  $i^!$  from  $H(W)$  to  $H(W \times_Y T)$ ,  $i^!$  from  $H(Y)$  to  $H(T)$ ,  $(fm)^!$  from  $H(T)$  to  $H(W \times_Y T)$ ,  $(fm)^!$  from  $H(Y)$  to  $H(W)$ ,  $(Ex^{!,!})^{-1}$  from  $H(W \times_Y T)$  to  $H(Y)$ , and  $c'$  from  $H(W)$  to  $H(W \times_Y T)$ . There are also 2-isomorphisms  $\Pi$  and  $\cong$  between some arrows.

et

(1.112)

Diagram (1.112) is a commutative diagram with nodes  $H(V)$ ,  $H(W \times_X Z)$ ,  $H(W)$ ,  $H(Z)$ ,  $H(X \times_Y T)$ ,  $H(X)$ ,  $H(T)$ , and  $H(Y)$ . The top node is  $H(V)$ . Arrows include  $t^!$  from  $H(W \times_X Z)$  to  $H(V)$ ,  $n^!$  from  $H(Z)$  to  $H(V)$ ,  $(gn)^!$  from  $H(T)$  to  $H(V)$ ,  $(ist)^!$  from  $H(W)$  to  $H(V)$ ,  $(is)^!$  from  $H(W)$  to  $H(W \times_X Z)$ ,  $(is)^!$  from  $H(X)$  to  $H(W)$ ,  $i^!$  from  $H(X)$  to  $H(X \times_Y T)$ ,  $i^!$  from  $H(Y)$  to  $H(T)$ ,  $m^!$  from  $H(Z)$  to  $H(W \times_X Z)$ ,  $m^!$  from  $H(X)$  to  $H(W)$ ,  $s^!$  from  $H(Z)$  to  $H(X \times_Y T)$ ,  $f^!$  from  $H(T)$  to  $H(X \times_Y T)$ ,  $f^!$  from  $H(Y)$  to  $H(X)$ ,  $(Ex^{!,!})^{-1}$  from  $H(W \times_X Z)$  to  $H(Y)$ ,  $c'$  from  $H(W)$  to  $H(W \times_X Z)$ ,  $c'$  from  $H(X)$  to  $H(X \times_Y T)$ , and  $(fm)^!$  from  $H(X)$  to  $H(W)$ . There are also 2-isomorphisms  $\Pi$  and  $\cong$  between some arrows.

Pour prouver ceci, on travaillera sur le second diagramme planaire en le simplifiant. En utilisant la compatibilité des 2-isomorphismes d'échange  $Ex^{!!}$  de la proposition 1.6.36 avec la composition horizontale des carrés, on voit que la composée du diagramme planaire (1.112) est égale à celle de :

(1.113)

Diagram (1.113) showing relationships between various  $H$ -objects and their images under functors. The diagram includes nodes  $H(V)$ ,  $H(W)$ ,  $H(Z)$ ,  $H(X)$ ,  $H(T)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(W \times_X Z)$ ,  $H(W \times_Y T)$ , and  $H(X \times_Y T)$ . Arrows are labeled with functors like  $t^!$ ,  $s^!$ ,  $i^!$ ,  $m^!$ ,  $n^!$ ,  $g^!$ ,  $f^!$ , and  $c^!$ . 2-isomorphisms are shown with double arrows and labels like  $\Pi$  and  $(Ex^{!,!})^{-1}$ . Curved arrows represent compositions like  $(ist)^!$ ,  $(gn)^!$ , and  $(fm)^!$ .

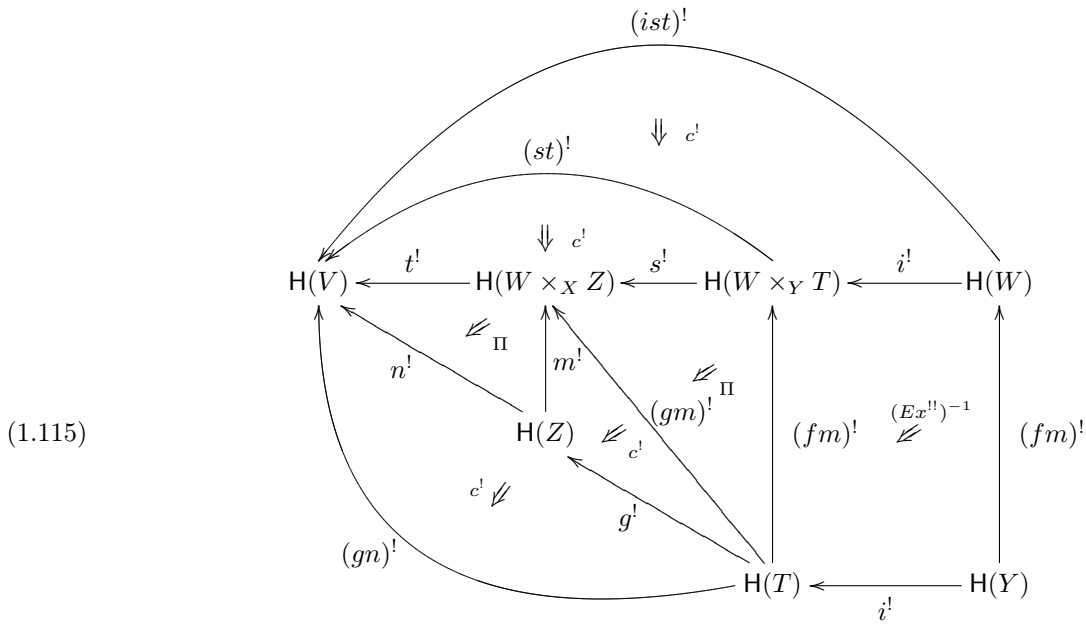
En utilisant la compatibilité des 2-isomorphismes d'échange  $Ex^{!,!}$  de la proposition 1.6.36 avec la composition verticale des carrés, ainsi que l'axiome de cocycle pour le 2-isomorphismes de connexion  $c^!$  du 2-foncteur  $\text{Imm}H^!$ , on obtient le diagramme ci-dessous qui a la même composée que (1.113) :

(1.114)

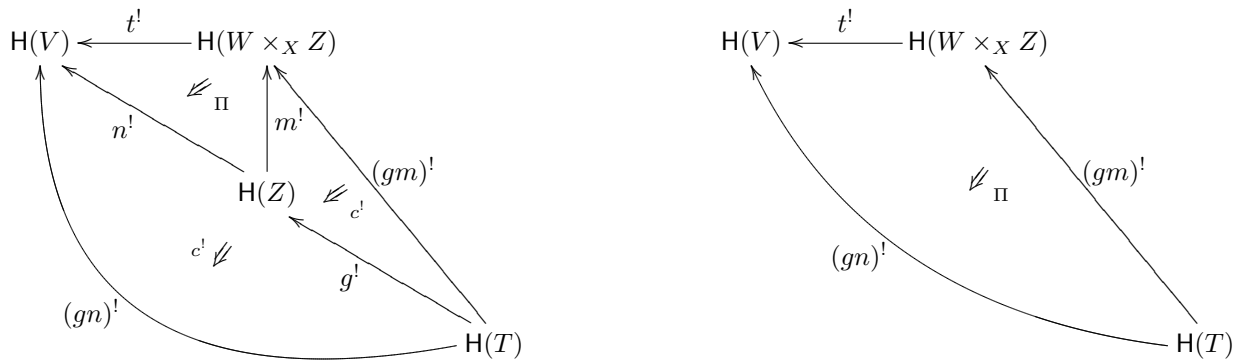
Diagram (1.114) showing relationships between various  $H$ -objects and their images under functors. The diagram includes nodes  $H(V)$ ,  $H(W)$ ,  $H(Z)$ ,  $H(X)$ ,  $H(T)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(W \times_X Z)$ ,  $H(W \times_Y T)$ , and  $H(X \times_Y T)$ . Arrows are labeled with functors like  $t^!$ ,  $s^!$ ,  $i^!$ ,  $m^!$ ,  $n^!$ ,  $g^!$ ,  $f^!$ , and  $c^!$ . 2-isomorphisms are shown with double arrows and labels like  $\Pi$  and  $(Ex^{!,!})^{-1}$ . Curved arrows represent compositions like  $(st)^!$ ,  $(gn)^!$ , and  $(fm)^!$ .

En utilisant la compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la restriction suivant le morphisme lisse  $m$  (voir la

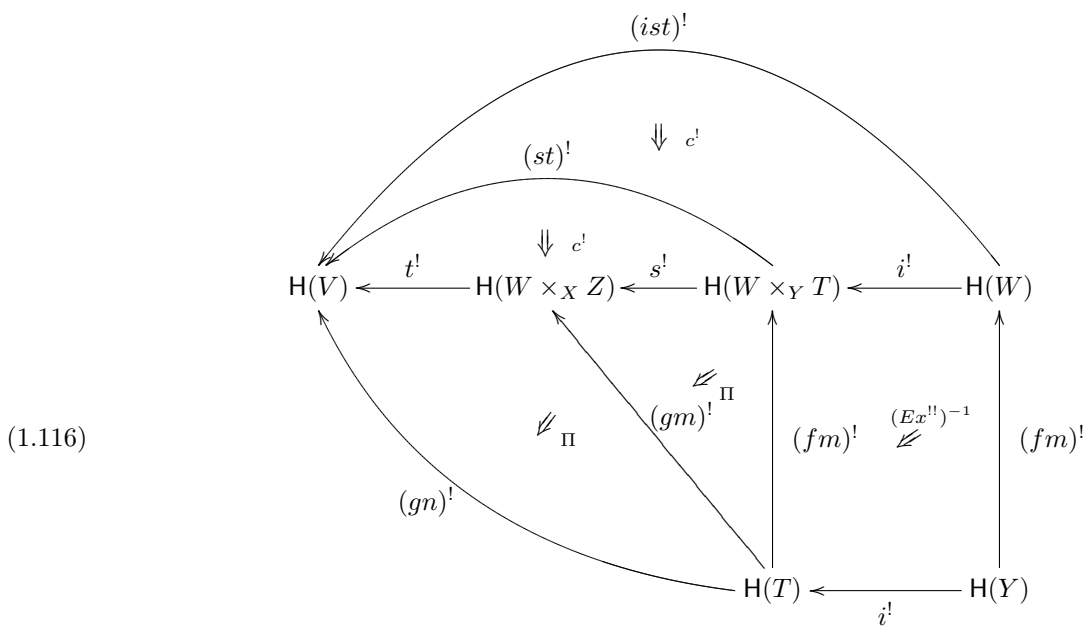
proposition 1.6.38), on voit que la composée de (1.114) est égale à la composée du diagramme planaire :



D'après la proposition 1.6.42, les composées des deux diagrammes planaires suivants sont égales :

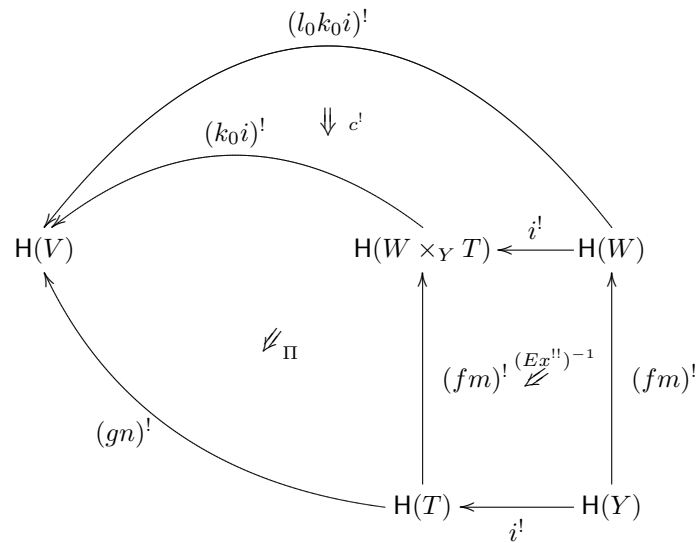


On voit alors que la composée de (1.115) est égale à la composée du diagramme planaire :



En utilisant en fin de compte la compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la composition des immersions fermées sous la forme donnée dans la proposition 1.6.41, on obtient le diagramme planaire suivant qui a la même composée

que (1.116) :



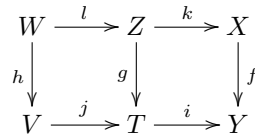
On retrouve donc le diagramme planaire (1.111). La proposition est prouvée.

C.Q.F.D

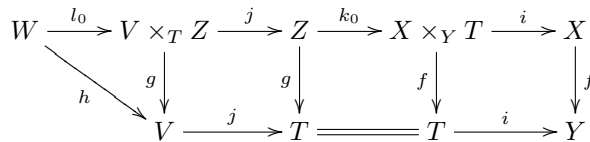
La compatibilité avec la composition horizontale des carrés est un peu plus délicate :

**PROPOSITION 1.6.44** — *Les 2-isomorphismes  $a(C)$  sont compatibles à la composition horizontale des carrés.*

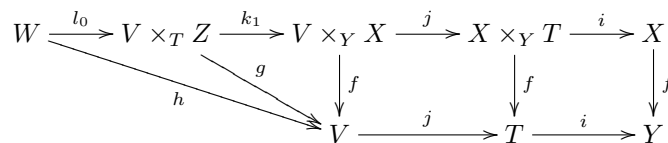
DEMONSTRATION On se donne un diagramme commutatif :



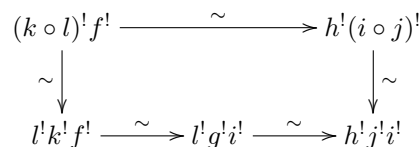
les flèches verticales étant lisses et les flèches horizontales étant des immersions fermées. On forme les deux diagrammes commutatifs :



et :



Notre but est de prouver que le diagramme suivant :



est commutatif. C'est à dire il faut prouver que la composée du diagramme planaire suivant :

(1.117)

Diagram (1.117) is a complex commutative diagram involving Homology groups  $H(W), H(V \times_T Z), H(Z), H(X \times_Y T), H(X), H(V), H(T), H(Y)$ . The diagram is organized into two rows. The top row consists of  $H(W) \xleftarrow{l_0^!} H(V \times_T Z) \xleftarrow{j^!} H(Z) \xleftarrow{k_0^!} H(X \times_Y T) \xleftarrow{i^!} H(X)$ . The bottom row consists of  $H(V) \xleftarrow{j^!} H(T) \xleftarrow{i^!} H(Y)$ . Vertical arrows connect the top row to the bottom row:  $H(V \times_T Z) \xrightarrow{g^!} H(V)$ ,  $H(Z) \xrightarrow{g^!} H(T)$ ,  $H(X \times_Y T) \xrightarrow{f^!} H(T)$ , and  $H(X) \xrightarrow{f^!} H(Y)$ . Diagonal arrows connect  $H(W) \xrightarrow{h^!} H(V)$  and  $H(X) \xrightarrow{f^!} H(Y)$ . Curved arrows at the top and bottom represent compositions:  $(kl)^!$  from  $H(X)$  to  $H(W)$ ,  $(ij)^!$  from  $H(Y)$  to  $H(V)$ ,  $(jl_0)^!$  from  $H(X)$  to  $H(V \times_T Z)$ , and  $(ik_0)^!$  from  $H(X)$  to  $H(T)$ . A central vertical arrow  $\Downarrow c^!$  connects  $H(Z)$  to  $H(T)$ . Other arrows include  $\Downarrow c^!$  from  $H(V \times_T Z)$  to  $H(Z)$  and  $H(X \times_Y T)$  to  $H(T)$ , and  $\Downarrow c^!$  from  $H(X)$  to  $H(Y)$ . There are also arrows  $\Downarrow \Pi$  and  $(Ex^{!!})^{-1} g^!$  connecting the top and bottom rows.

est égal au 2-isomorphisme  $a(-)$  associé au carré commutatif :

(1.118)

Diagram (1.118) is a commutative square with vertices  $W, X, V, Y$ . The top horizontal arrow is  $W \xrightarrow{k \circ l} X$ . The bottom horizontal arrow is  $V \xrightarrow{i \circ j} Y$ . The left vertical arrow is  $W \downarrow h V$ . The right vertical arrow is  $X \downarrow f Y$ .

On travaillera sur le diagramme planaire (1.117). L'axiome de cocycle pour les 2-isomorphismes de connexion  $c^!$  du 2-foncteur  ${}^{\text{Imm}}\mathbf{H}^!$  montre qu'on peut remplacer (1.117) par le diagramme planaire suivant sans changer la composée :

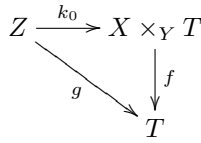
(1.119)

Diagram (1.119) is similar to (1.117) but includes an additional curved arrow  $(k_0 j)^!$  from  $H(X \times_Y T)$  to  $H(V \times_T Z)$ . The other components of the diagram are identical to (1.117).

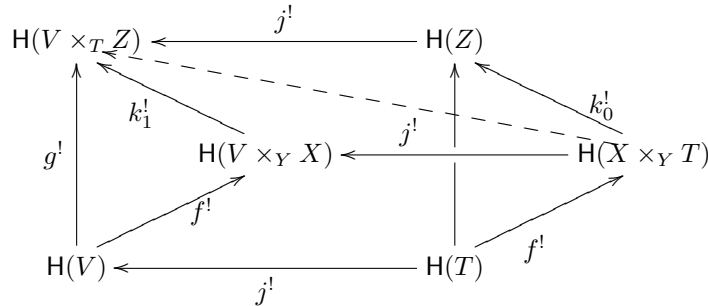
Remarquons que le triangle commutatif de  $S$ -schémas :

Diagram (1.119) is a commutative triangle with vertices  $V \times_T Z, V \times_Y X, V$ . The top horizontal arrow is  $V \times_T Z \xrightarrow{k_1} V \times_Y X$ . The right vertical arrow is  $V \times_Y X \downarrow f V$ . The diagonal arrow is  $V \times_T Z \searrow g V$ .

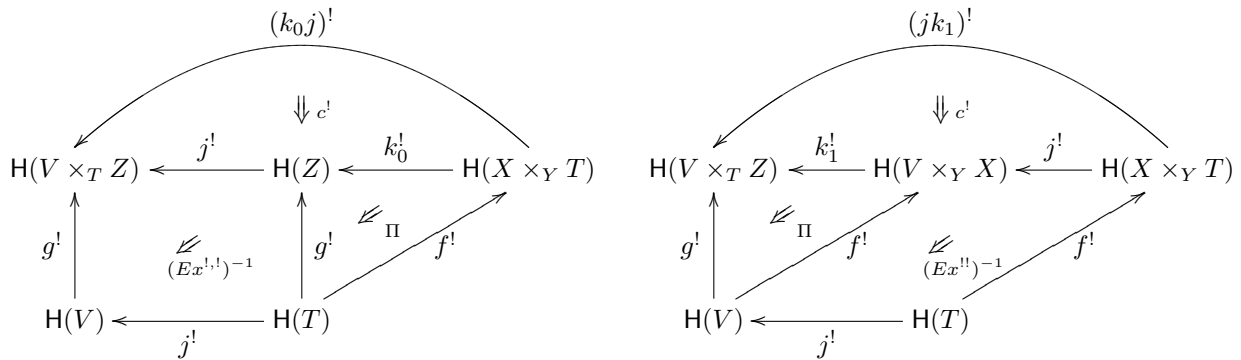
est obtenu à partir du triangle commutatif :



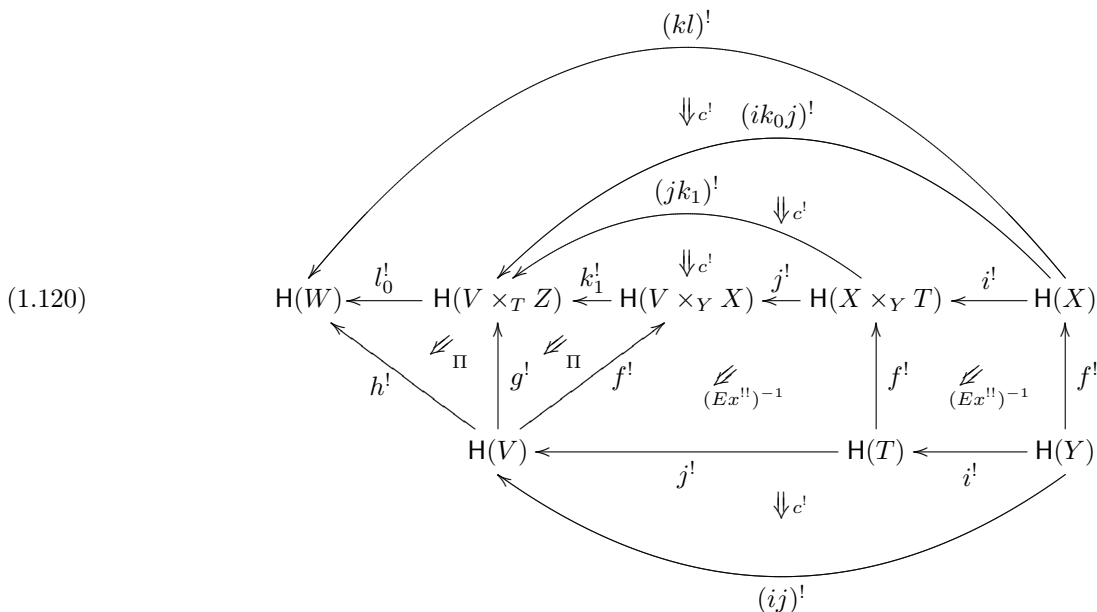
par pull-back suivant l'immersion fermée  $j : V \longrightarrow T$ . On a donc d'après la proposition 1.6.40 un solide commutatif :



La ligne non pleine est le 1-morphisme  $(j \circ k_1)^! = (k_0 \circ j)^!$  et les 2-morphismes adjacents   ce 1-morphisme sont les 2-isomorphismes de connexion  $c^!$  du 2-foncteur  $\mathrm{ImmH}^!$  (les morphismes  $k_0$ ,  $k_1$  et  $j$  sont des immersions fermées). Il vient que les deux diagrammes planaires suivants ont la même composée :

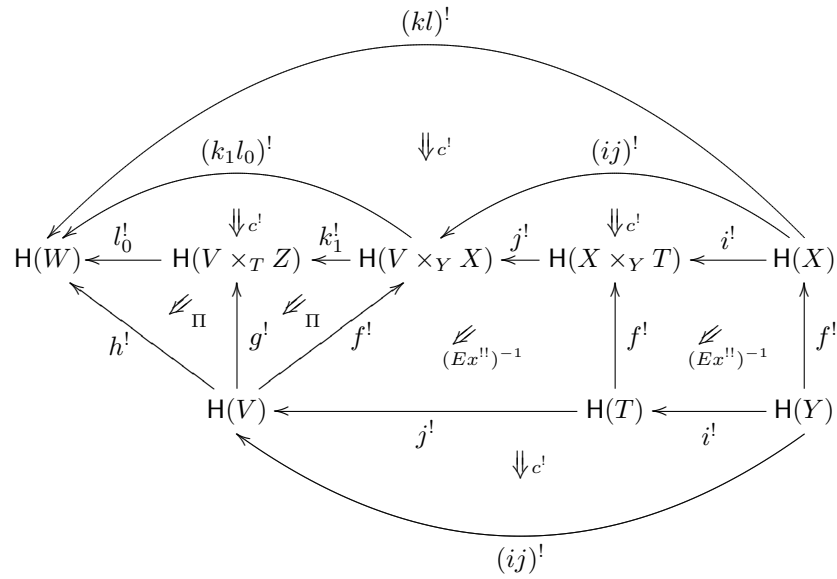


On voit ainsi que la composée du diagramme planaire (1.119) est égale à la composée de:

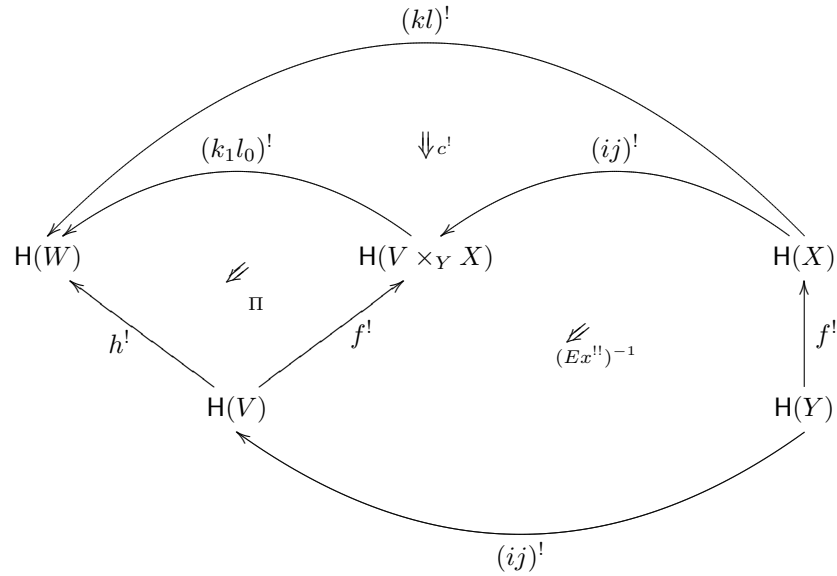


En utilisant encore une fois l'axiome de cocycle pour les 2-isomorphismes de connexion  $c^!$  du 2-foncteur  $\mathrm{ImmH}^!$ , on

obtient le diagramme planaire :



En utilisant, d’une part la compatibilité des 2-isomorphismes de pureté avec la composition des immersions fermées telle qu’elle est donnée dans la proposition 1.6.41 et d’autre part la compatibilité des 2-isomorphismes  $Ex^{!}$  de la proposition 1.6.36 avec la composition horizontale des carrés cartésiens, on obtient que la composée de (1.120) est égale à celle de :



Mais ce diagramme planaire n’est autre que celui qui définit le 2-isomorphisme  $a(-)$  associé au carré (1.118). La proposition est prouvée. C.Q.F.D

Ainsi, on est dans les conditions d’application du théorème 1.3.1. On obtient donc un 2-foncteur contravariant :

$$H^! : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{A}$$

et des isomorphismes de 2-foncteurs :

$$\text{Imm } H^! \xrightarrow{\sim} \text{Imm } H^! \quad \text{et} \quad \text{Liss } H^! \xrightarrow{\sim} \text{Liss } H^!$$

On notera comme d’habitude  $f^!$  à la place de  $H^!(f)$ .

Pour construire le 2-foncteur  $H^!$ , on remarque que pour tout  $S$ -morphisme  $f$ , le 1-morphisme  $f^!$  admet un adjoint à gauche. En effet si  $f = p \circ s$  est une factorisation de  $f$  avec  $s$  une immersion fermée et  $p$  lisse on peut choisir comme adjoint à gauche :  $p_{\#} \text{Th}^{-1}(\Omega_p)_{S*}$ .

**LEMME 1.6.45** — *Quitte à remplacer  $H^!$  et  $H^!$  par des 2-foncteurs isomorphes, on peut supposer qu’on a les égalités :*



- $\text{Liss } H^! = \text{Liss } H^!$ ,
- $\text{Imm } H^! = \text{Imm } H^!$ ,
- $\text{Liss } H_! = \text{Liss } H_!$ ,
- $\text{Imm } H_! = \text{Imm } H_*$ .

Dans la suite on supposera la conclusion du lemme ci-dessus satisfaite. On arrête donc de souligner le point d'exclamation ; on écrit simplement :  $H^!$ ,  $H_!$ ,  $f^!$  et  $f_!$ . On résume ce qui a été démontré dans la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.6.46** — *Il existe à un unique isomorphisme près<sup>21</sup>, un couple de 2-foncteurs :*

$$H^!, H_! : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{A}$$

globalement adjoints l'un de l'autre ( $H^!$  est adjoint global à droite de  $H_!$ ) tel que :

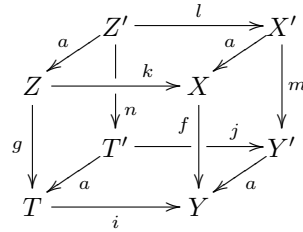
- $H^!$  prolonge (au sens strict) les deux 2-foncteurs :  $\text{Imm } H^!$  et  $\text{Liss } H^!$ ,
- $H_!$  prolonge (au sens strict) les deux 2-foncteurs :  $\text{Imm } H_!$  et  $\text{Liss } H_!$ ,
- l'échange par rapport aux carrés commutatifs sur le couple  $(\text{Imm } H^!, \text{Liss } H^!)$  construit dans la sous-section 1.6.5 devient l'échange trivial induit par les 2-isomorphismes de connexion de  $H^!$ .

Il nous reste à construire la structure de foncteurs croisés sur le quadruplet :  $(H^*, H_*, H_!, H^!)$ . On commence par définir un échange sur le couple  $(H^*, H^!)$ . Plus précisément, on va recoller les deux échanges sur :

- $(H^*, \text{Imm } H^!)$  (voir proposition 1.4.15),
- $(H^*, \text{Liss } H^!)$  (voir proposition 1.5.19).

On se servira de la proposition 1.2.7. Pour pouvoir appliquer 1.2.7 on a besoin de :

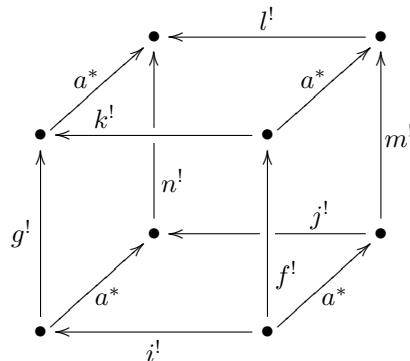
**PROPOSITION 1.6.47** — *Supposons donné un diagramme commutatif de  $S$ -schémas :*



avec  $i, j, k$  et  $l$  des immersions fermées,  $f, g, m$  et  $n$  des morphismes lisses et tels que les quatre carrés ayant deux cotés parallèles libellés  $a$  sont cartésiens. Alors, le diagramme de 2-isomorphismes ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} l^! m^! a^* & \xrightarrow{Ex^{!*}} & l^! a^* f^! & \xrightarrow{Ex^{!*}} & a^* k^! f^! \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ n^! j^! a^* & \xrightarrow{Ex^{!*}} & n^! a^* i^! & \xrightarrow{Ex^{!*}} & a^* g^! i^! \end{array}$$

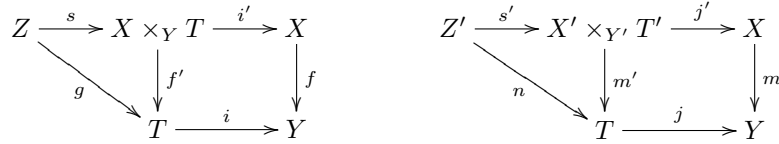
est commutatif. En d'autres termes, le cube :



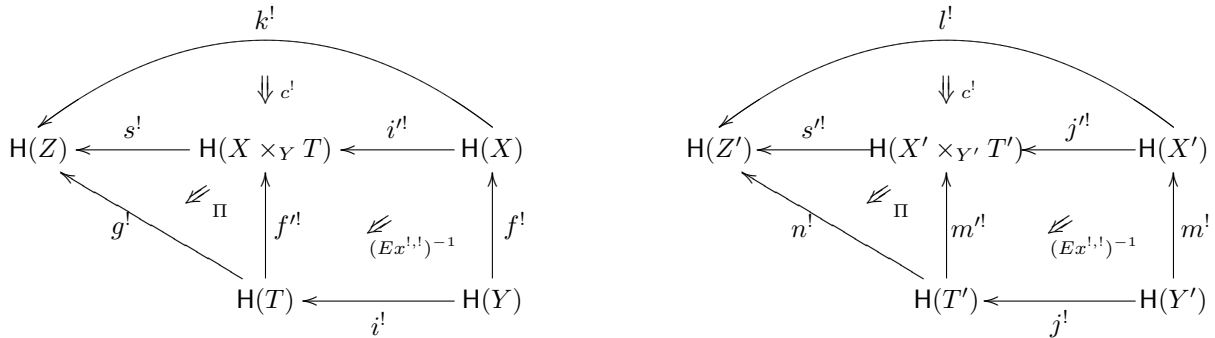
est commutatif.

<sup>21</sup>Nous ne sommes pas complètement convaincu de l'unicité à un unique isomorphisme près du foncteur  $H^!$  prolongeant les 2-foncteurs  $\text{Imm } H^!$  et  $\text{Liss } H^!$  lorsqu'on n'impose pas la condition finale.

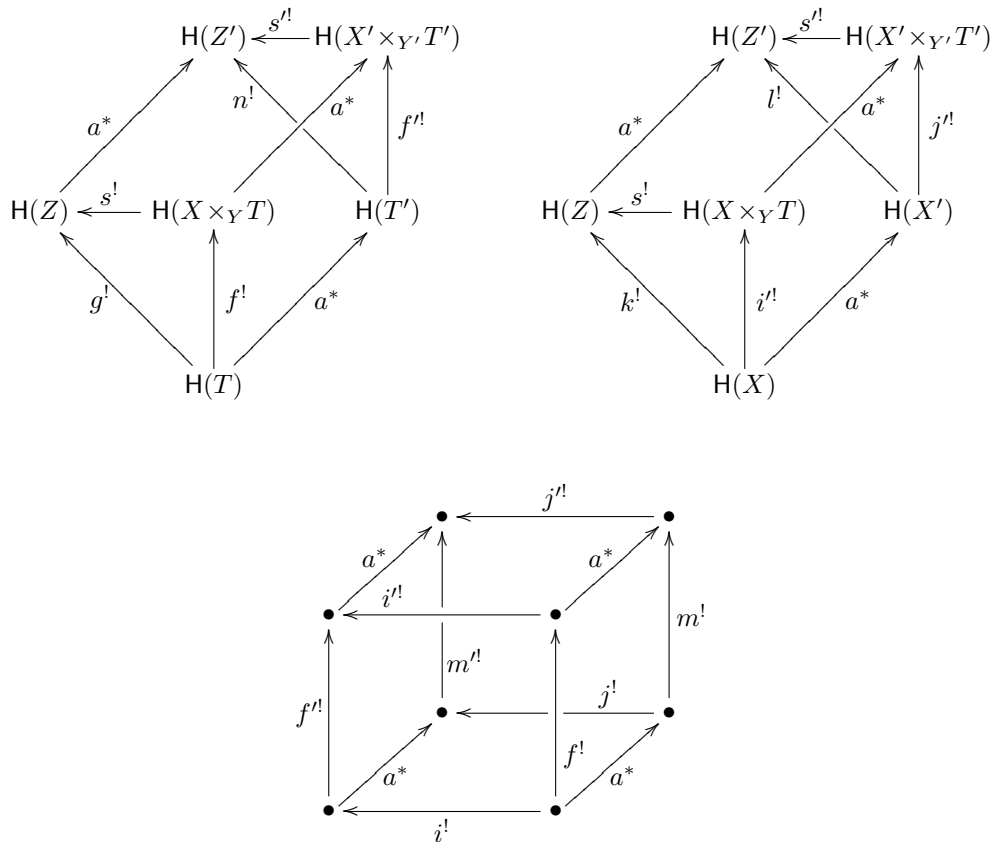
DEMONSTRATION On forme les deux digrammes commutatifs de  $S$ -schémas :



Ces deux diagrammes sont reliés par des  $S$ -morphisms  $a$ , tous déduits de  $Y' \longrightarrow Y$  par pull-back. On forme un diagramme solide à partir des deux diagrammes planaires :

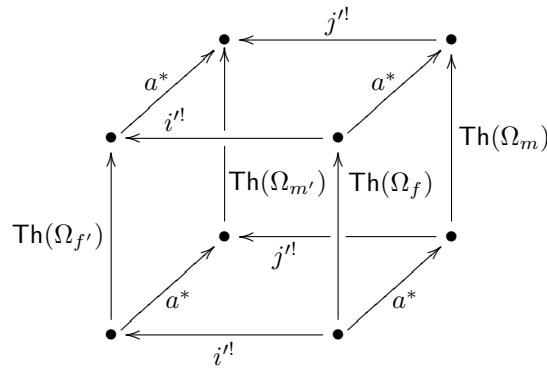


en reliant les sommets se trouvant au même niveau par un 1-morphisme  $a^*$  et en mettant sur les nouvelles faces créées un 2-morphisme  $Ex^{!*}$ . Il s'agit bien entendu de prouver que ce diagramme solide est commutatif. Pour cela on le divise en trois sous-diagrammes solides :

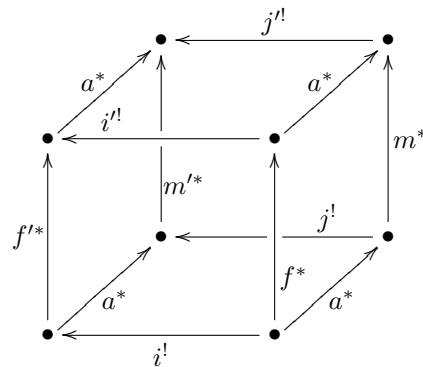


Le premier diagramme solide est commutatif d'après la proposition 1.6.39. Le second est commutatif par la compatibilité des 2-morphisms d'échange avec les 2-isomorphismes de connexion du 2-foncteur  $Imm H^!$ . Il reste donc à prouver que le cube est commutatif. Pour cela on revient à la définition des 1-morphisms  $f^!, f^{!}, m^!$  et  $m^!$  et de l'échange sur

$(H^*, \text{Liss}H^!)$ . On voit donc que ce cube se factorise par le cube commutatif :



Il suffit donc de prouver la commutation du cube :



On utilise alors l'astuce (devenue classique) qui consiste à diviser le cube suivant les deux 1-morphismes (parallèles) :

- $(f \circ a)^* = (a \circ m)^*$ ,
- $(f' \circ a)^* = (a \circ m')^*$ ,

et d'utiliser le fait qu'on a un échange sur le couple  $(\text{Imm}H^!, H^*)$ . La proposition est prouvée.

C.Q.F.D

A ce stade on dispose donc d'un échange contradirectionnel de type  $\swarrow$  sur le couple de 2-foncteurs  $(H^*, H^!)$  pour la classe des carrés cartésiens. On veut prouver que cet échange fait partie d'une structure de foncteur croisé sur le quadruplet  $(H^*, H_*, H_l, H^!)$ . Mais ceci est presque clair! En effet, en utilisant l'adjonction globale entre  $H^!$  et  $H_l$  on obtient un échange sur le couple  $(H^*, H_l)$ . Il suffira par la proposition 1.2.14 de voir que cet échange est un isoéchange. Mais il suffit de vérifier ceci pour les restrictions de cet échange à :

- $(H^*, \text{Imm}H_l)$ ,
- $(H^*, \text{Liss}H_l)$ .

Ces échanges ne sont autres que ceux définis dans les propositions 1.4.15 et 1.5.19. Le fait que le premier échange est un isoéchange découle trivialement du théorème de changement de base pour une immersion fermée et de l'égalité  $i_l = i_*$  valable pour une immersion fermée  $i$ .

Le fait que le second échange est un isoéchange découle de l'axiome 3 et de l'égalité  $f_l = f_{\#} \text{Th}^{-1}(\Omega_f)$  valable pour un  $S$ -morphisme lisse  $f$ .

On a donc prouvé le résultat suivant :

**PROPOSITION 1.6.48** — *Il existe une unique structure de foncteurs croisés sur le quadruplet  $(H^*, H_*, H_l, H^!)$  qui prolonge les deux foncteurs croisés :*

- $(H^*, H_*, \text{Imm}H_l, \text{Imm}H^!)$  de la proposition 1.4.15,
- $(H^*, H_*, \text{Liss}H_l, \text{Liss}H^!)$  de la proposition 1.5.19.

On termine la section par le résultat suivant :

**LEMME 1.6.49** — *La structure d'échange sur le couple  $(\text{Imm}H_*, H_l)$  induite par restriction du foncteur croisé qu'on vient de construire coïncide modulo l'égalité  $\text{Imm}H_* = \text{Imm}H_l$  avec l'échange induit par restriction de l'échange trivial<sup>22</sup> sur le couple  $(H_l, H_l)$ .*

DEMONSTRATION Par construction, l'échange sur  $(\text{Imm}H_*, H_l)$  prolonge les deux échanges sur :

1.  $(\text{Imm}H_*, \text{Imm}H_l)$  de la proposition 1.4.15,

<sup>22</sup>C'est à dire celui obtenu à l'aide des 2-isomorphismes de connexion.

2.  $(\text{Imm}H_*, \text{Liss}H_!)$  de la proposition 1.5.19.

Par l'unicité du prolongement, il suffit de prouver que modulo l'égalité  $\text{Imm}H_* = \text{Imm}H_!$  ces échanges coïncident respectivement avec les échanges sur :

- 1.  $(\text{Imm}H_!, \text{Imm}H_!)$  induit par les 2-isomorphismes de connexions de  $H_!$ ,
- 2.  $(\text{Imm}H_!, \text{Liss}H_!)$  induit également par les 2-isomorphismes de connexions de  $H_!$ .

En ce qui concerne les premiers échanges, il suffit d'invoquer le foncteur croisé sur  $(H^*, H_*, \text{Imm}H_!, \text{Imm}H^!)$  de la proposition 1.4.15.

On s'intéresse donc exclusivement aux deux échanges sur :

- $(\text{Imm}H_*, \text{Liss}H_!)$  de la proposition 1.5.19,
- $(\text{Imm}H_!, \text{Liss}H_!)$  induit par les 2-isomorphismes de connexions de  $H_!$ .

En prenant les adjoints globaux à gauche de tous les 2-foncteurs (ils en ont tous même  $\text{Imm}H_*$ ) on se ramène à prouver que les deux échanges sur :

- $(\text{Imm}H^!, \text{Liss}H^!)$  de la proposition 1.6.36,
- $(\text{Imm}H^!, \text{Liss}H^!)$  induit par les 2-isomorphismes de connexion de  $H^!$ ,

sont égaux. Mais ceci est évident par la construction même du 2-foncteur  $H^!$  comme étant l'unique 2-foncteur qui prolonge  $\text{Imm}H^!$  et  $\text{Liss}H^!$  et tel que l'échange sur les carrés commutatifs  $a(\cdot)$  construit dans la sous-section 1.6.5 devient l'échange trivial induit par les 2-isomorphismes de connexion de  $H^!$ . C.Q.F.D

### 1.7 Le morphisme de 2-foncteurs $H_! \mapsto H_*$ . Fin de la démonstration

Dans cette section, afin pour pouvoir utiliser la 2-dualité, on va "alléger les propriétés" établies jusqu'ici. On suppose donnés :

- un foncteur croisé sur un quadruplet  $(H^*, H_*, H_!, H^!)$  de 2-foncteurs de  $(\text{Sch}/S)$  dans  $\mathfrak{A}$ ,
- pour tout  $S$ -schéma  $X$  et tout  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre  $\mathcal{M}$ , deux équivalences<sup>23</sup> :

$$E(\mathcal{M}), E_{-1}(\mathcal{M}) : H(X) \longrightarrow H(X)$$

quasi-inverses l'une de l'autre. De plus, si  $\mathcal{M}$  est le faisceau nul, ces deux équivalences sont 2-isomorphes au 1-morphisme identité, et si  $\mathcal{M}$  est isomorphe à  $\mathcal{M}'$  les équivalences obtenues sont 2-isomorphes.

On suppose que ces données vérifient les propriétés suivantes.

- 1.  $\text{Imm}H_* = \text{Imm}H_!$ , et les échanges obtenus par restriction du foncteur croisé sur les couples :
  - $(H_*, \text{Imm}H_! = \text{Imm}H_*)$
  - $(\text{Imm}H_! = \text{Imm}H_*, H_!)$
 coïncident avec les structures triviales<sup>24</sup>.
- 2. (Homotopie) Soit  $q : \mathbb{A}_X^1 \longrightarrow X$  la projection de la droite affine au dessus d'un  $S$ -schémas  $X$ . Les deux 2-morphismes d'unités et de counité :

$$1 \xrightarrow{\eta} q_*q^* \quad \text{et} \quad q_!q^! \xrightarrow{\delta} 1$$

sont inversibles.

- 3. (Localité) Il existe deux 2-triangles distingués :

$$i_!i^! \xrightarrow{\delta} 1 \xrightarrow{\eta} j_*j^* \longrightarrow i_!i^![+1]$$

$$j_!j^! \xrightarrow{\delta} 1 \xrightarrow{\eta} i_*i^* \longrightarrow j_!j^![+1]$$

- 4. Pour  $f : Y \longrightarrow X$  et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre, il existe des 2-isomorphismes<sup>25</sup> :

$$f^*E(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} E(f^*\mathcal{M})f^* \quad \text{et} \quad f^!E(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} E(f^*\mathcal{M})f^!$$

$$f^*E_{-1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} E_{-1}(f^*\mathcal{M})f^* \quad \text{et} \quad f^!E_{-1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} E_{-1}(f^*\mathcal{M})f^!$$

<sup>23</sup>On ne demande pas que ces équivalences admettent des isomorphismes de composition associés aux suites exactes courtes de  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres.

<sup>24</sup>La seconde propriété est le contenu du lemme 1.6.49.

<sup>25</sup>Ces 2-isomorphismes ne sont pas supposés former une autoéquivalences d'aucun des 2-foncteurs  $H^*, H_*, H_!$  ou  $H^!$ . Ils sont encore moins supposés être compatibles avec les échanges du foncteur croisé.

5. Pour  $f : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme lisse, on a des 2-isomorphismes :

$$f^! \xrightarrow{\sim} E(\Omega_f)f^* \quad \text{et} \quad f^* \xrightarrow{\sim} E_{-1}(\Omega_f) f^!$$

Les données et les conditions précédentes sont permutées par la 2-dualité dans le sens précis qu'on décrira ci-dessous. Pour tout  $S$ -schéma  $X$  on note  $G(X)$  la catégorie triangulée opposée  $H(X)^{\text{op}}$  de  $H(X)$ . Pour tout  $S$ -morphisme  $f$  on pose  $f_* = (f_!)^{\text{op}}$ ,  $f^* = (f^!)^{\text{op}}$ ,  $f_{\nabla} = (f_*)^{\text{op}}$  et  $f^{\nabla} = (f^*)^{\text{op}}$ . On définit un foncteur croisé sur  $(G^*, G_*, G_{\nabla}, G^{\nabla})$  en posant  $E_{x_*, \nabla} = E_{x_*!}$ ,  $E_{x_*^{\nabla}} = E_{x_*!}^*$ , etc. Toutes les propriétés ci-dessus sont alors vérifiées. Ceci nous permettra de faire des raisonnements par dualité dans la suite.

A l'aide de ces données on va définir pour tout  $S$ -morphisme (*séparé*) un 2-morphisme :

$$\alpha_f : f_! \longrightarrow f_*$$

On insiste sur le fait que  $f$  est séparé (bien que c'est automatiquement le cas puisque on ne considère que les  $S$ -schémas quasi-projectifs) car la séparation joue un rôle crucial dans la définition de  $\alpha_f$ . On montrera ensuite que pour  $f$  projectif le 2-morphisme  $\alpha_f$  est un 2-isomorphisme. On utilisera essentiellement le foncteur croisé  $(H^*, H_*, H_!, H^!)$ . L'axiome de l'homotopie jouera un rôle décisif.

### 1.7.1 Définition et propriétés des 2-morphismes $f_! \rightarrow f_*$

**DEFINITION 1.7.1** — Soit un  $S$ -morphisme entre  $S$ -schémas quasi-projectifs :

$$f : X \longrightarrow Y$$

On forme le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{pr_2} & X \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

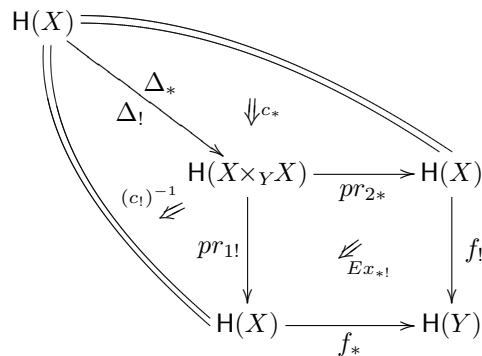
et on note  $\Delta$  l'immersion diagonale :

$$X \longrightarrow X \times_Y X$$

L'immersion  $\Delta$  est fermée puisque  $F$  est séparé. En particulier, on a l'égalité  $\Delta_! = \Delta_*$  (en effet :  $\text{Imm}H_! = \text{Imm}H_*$ ). On prend alors pour  $\alpha = \alpha_f$  la composée :

$$f_! \equiv f_! \text{Id}_{X^*} \xrightarrow{c_*} f_! pr_{2*} \Delta_* \xrightarrow{E_{x_*!}} f_* pr_{1!} \Delta_* \equiv f_* pr_{1!} \Delta_! \xrightarrow{(c_!)^{-1}} f_* \text{Id}_{X^!} \equiv f_*$$

En langage des diagrammes planaires,  $\alpha_f$  est la composée :



**Remarque 1.7.2** — Les 2-morphismes  $\alpha$  sont compatibles à la dualité dans le sens suivant. Le 2-morphisme  $f_{\nabla} \longrightarrow f_*$  qu'on construit par la même formule mais en utilisant le foncteur croisé sur  $(G^*, G_*, G_{\nabla}, G^{\nabla})$  coïncide avec la flèche :

$$(f_*)^{\text{op}} = f_{\nabla} \xleftarrow{\alpha_f^{\text{op}}} (f_!)^{\text{op}} = f_*$$

On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.7.3** — *Les 2-morphismes  $\alpha_f$  sont compatibles aux 2-isomorphismes de connexions de  $H_!$  et  $H_*$ . Plus précisément, pour toute suite de  $S$ -morphisms composables :*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

le diagramme de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} (g \circ f)_! & \xrightarrow{\alpha_{g \circ f}} & (g \circ f)_* \\ c_! \downarrow & & \downarrow c_* \\ g_! f_! & \xrightarrow{\alpha_g} g_* f_! \xrightarrow{\alpha_f} & g_* f_* \end{array}$$

est commutatif. Bien entendu il en est de même du diagramme obtenu en remplaçant la ligne horizontale inférieure du diagramme précédent par :

$$g_! f_! \xrightarrow{\alpha_f} g_! f_* \xrightarrow{\alpha_g} g_* f_*$$

DEMONSTRATION Le 2-morphisme :  $(g \circ f)_! \longrightarrow (g \circ f)_*$  est par définition la composée du diagramme :

(1.121)

$$\begin{array}{ccccc} H(X) & & & & \\ & \searrow^{\Delta_!} & & & \\ & & H(X \times_Z X) & \xrightarrow{pr_{2*}} & H(X) \\ & & \downarrow pr_{1!} & \swarrow Ex_{*!} & \downarrow (g \circ f)_! \\ & & H(X) & \xrightarrow{(g \circ f)_*} & H(Z) \end{array}$$

On dispose d'un diagramme commutatif de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccccc} X \times_Z X & \xrightarrow{v_2} & X \times_Z Y & \xrightarrow{q_2} & X \\ v_1 \downarrow & & \downarrow r_1 & & \downarrow f \\ Y \times_Z X & \xrightarrow{r_2} & Y \times_Z Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ q_1 \downarrow & & \downarrow p_1 & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

à carrés cartésiens. En utilisant la compatibilité des 2-morphismes d'échange  $Ex_{*!}(\cdot)$  avec les compositions horizontales et verticales des carrés cartésiens, on voit que le 2-morphisme  $Ex_{*!}$  qui se trouve dans le diagramme planaire (1.121) est égal à la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc} & & pr_{2*} & & \\ & & \downarrow c_* & & \\ H(X \times_Z X) & \xrightarrow{v_{2*}} & H(X \times_Z Y) & \xrightarrow{q_{2*}} & H(X) \\ v_{1!} \downarrow & & \downarrow r_{1!} & & \downarrow f_! \\ (c_1)^{-1} \swarrow & & \swarrow Ex_{*!} & & \swarrow Ex_{*!} \\ H(Y \times_Z X) & \xrightarrow{r_{2*}} & H(Y \times_Z Y) & \xrightarrow{p_{2*}} & H(Y) \xleftarrow{c_!} (g \circ f)_! \\ q_{1!} \downarrow & & \downarrow p_{1!} & & \downarrow g_! \\ H(X) & \xrightarrow{f_*} & H(Y) & \xrightarrow{g_*} & H(Z) \\ & & \downarrow (c_*)^{-1} & & \\ & & (g \circ f)_* & & \end{array}$$

Il vient que la composée des 2-morphismes :

$$g_! f_! \xrightarrow{(c_!)^{-1}} (g \circ f)_! \xrightarrow{\alpha_{g \circ f}} (g \circ f)_* \xrightarrow{c_*} g_* f_*$$

est égale à la composée du diagramme planaire :

(1.122)

Mais l'immersion fermée  $\Delta$  se factorise par deux immersions fermées :

$$X \xrightarrow{\Delta_2} X \times_Y X \xrightarrow{\Delta'_1} X \times_Z X$$

On voit donc que la face  $c_*$  de (1.122) adjacente au 1-morphisme :

$$H(X) \xrightarrow{\Delta_*} H(X \times_Z X)$$

se factorise par la face :

De même la face  $(c_!)^{-1}$  de (1.122) adjacente au 1-morphisme :

$$H(X) \xrightarrow{\Delta_!} H(X \times_Z X)$$

(le même que le précédent) se factorise par :

En utilisant le fait que  $\text{Imm}H_! = \text{Imm}H_*$  (et plus particulièrement que  $c_! = c_*$ ) on voit que la composée du diagramme planaire :

est l'identité :  $\Delta'_{1*} \circ \Delta_{2*} = \Delta'_{1!} \circ \Delta_{2!}$ . Ainsi, la composée du diagramme planaire (1.122) ne change pas si on remplace le 1-morphisme :

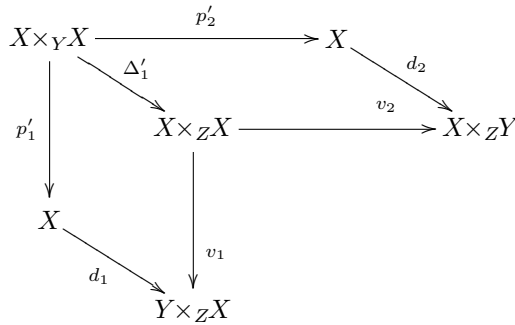
$$H(X) \xrightarrow{\Delta_*} H(X \times_Z X)$$

par le 1-morphisme composé :

$$H(X) \xrightarrow[\Delta_{2!}]{\Delta_{2*}} H(X \times_Y X) \xrightarrow[\Delta'_{1!}]{\Delta'_{1*}} H(X \times_Z X)$$

et les faces adjacentes par les composées des 2-isomorphismes de connexions adéquoints.

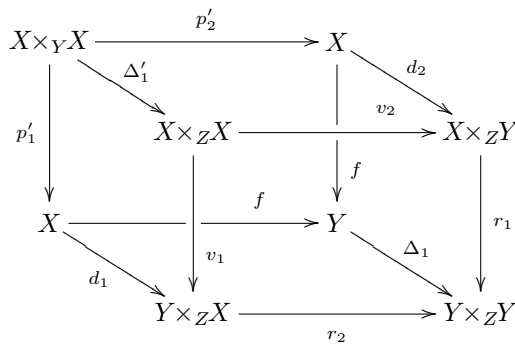
D'autres part, l'immersion fermée  $\Delta'_1$  s'insère dans un diagramme commutatif :



En utilisant alors la relation de cocycle pour les 2-isomorphismes de connexion des 2-foncteurs  $H_!$  et  $H_*$ , on voit que la composée de (1.122) est égale à la composée du diagramme planaire :

(1.123)

On invoque maintenant le cube commutatif de  $S$ -schémas :



Toutes les faces de ce cube sont des carrés cartésiens et les  $S$ -morphisms  $\Delta_1$ ,  $\Delta'_1$ ,  $d_1$  et  $d_2$  sont des immersions fermées.



On forme alors un cube dans  $\mathfrak{A}$  :

(1.124)

$$\begin{array}{ccccc}
 H(X \times_Y X) & \xrightarrow{p'_{2*}} & H(X) & & \\
 \downarrow p'_{1!} & \searrow \Delta'_{1*} & \downarrow & \searrow d_{2*} & \\
 & H(X \times_Z X) & \xrightarrow{v_{2*}} & H(X \times_Z Y) & \\
 & \downarrow & \downarrow f! & \downarrow r_{1!} & \\
 H(X) & \xrightarrow{f_*} & H(Y) & & \\
 \downarrow d_{1!} & \downarrow v_{1!} & \searrow \Delta_{1*} & \searrow \Delta_{1*} & \\
 & H(Y \times_Z X) & \xrightarrow{r_{2*}} & H(Y \times_Z Y) & 
 \end{array}$$

en prenant sur les faces carrées parallèles au plan de la feuille les 2-morphismes d'échange  $Ex_{*,!}$ . Les autres faces sont :

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f_*} & \bullet \\ \downarrow d_{1!} & \swarrow Ex_{*,!} & \downarrow \Delta_{1!} \\ \bullet & \xrightarrow{r_{2*}} & \bullet \end{array} & 
 \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\Delta'_{1!}} & \bullet \\ \downarrow p'_{1!} & \swarrow Ex_{*,!} & \downarrow v_{1!} \\ \bullet & \xrightarrow{d_{1!}} & \bullet \end{array} & 
 \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{p'_{2*}} & \bullet \\ \downarrow \Delta'_{1*} & \swarrow Ex_{*,*} & \downarrow d_{2*} \\ \bullet & \xrightarrow{v_{2*}} & \bullet \end{array} & 
 \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{d_{2*}} & \bullet \\ \downarrow f! & \swarrow Ex_{*,!} & \downarrow r_{1!} \\ \bullet & \xrightarrow{\Delta_{1*}} & \bullet \end{array}
 \end{array}$$

Étant donné que l'échange sur  $(H_*, H_!)$  prolonge l'échange trivial sur  $(H_*, \text{Imm}H_!)$  (modulo l'égalité  $\text{Imm}H_! = \text{Imm}H_*$ ), on voit que la première face est égale à :

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{f_*} & \bullet \\
 \downarrow d_{1*} & \swarrow Ex_{*,*} & \downarrow \Delta_{1*} \\
 \bullet & \xrightarrow{r_{2*}} & \bullet
 \end{array}$$

De même, puisque l'échange sur  $(H_*, H_!)$  prolonge l'échange trivial sur  $(\text{Imm}H_*, H_!)$  (modulo l'égalité  $\text{Imm}H_* = \text{Imm}H_!$ ), on voit que la deuxième face est égale à :

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{\Delta'_{1*}} & \bullet \\
 \downarrow p'_{1!} & \swarrow Ex_{*,!} & \downarrow v_{1!} \\
 \bullet & \xrightarrow{d_{1*}} & \bullet
 \end{array}$$

On voit donc que le cube (1.124) est égal au cube (plus familier):

$$\begin{array}{ccccc}
 H(X \times_Y X) & \xrightarrow{p'_{2*}} & H(X) & & \\
 \downarrow p'_{1!} & \searrow \Delta'_{1*} & \downarrow & \searrow d_{2*} & \\
 & H(X \times_Z X) & \xrightarrow{v_{2*}} & H(X \times_Z Y) & \\
 & \downarrow & \downarrow f! & \downarrow r_{1!} & \\
 H(X) & \xrightarrow{f_*} & H(Y) & & \\
 \downarrow d_{1*} & \downarrow v_{1!} & \searrow \Delta_{1*} & \searrow \Delta_{1*} & \\
 & H(Y \times_Z X) & \xrightarrow{r_{2*}} & H(Y \times_Z Y) & 
 \end{array}$$

où les faces perpendiculaires au plan de la feuille sont soit  $Ex_{**}$  soit  $Ex_{!*}$ . On a déjà vu plusieurs fois que de tels cubes sont commutatifs. L'astuce est de diviser le solide en deux selon les 1-morphisme :  $(v_2 \circ \Delta'_1)_* = (d_2 \circ p'_2)_*$  et  $(r_2 \circ d_1)_* = (\Delta_1 \circ f)_*$  et puis utiliser la compatibilité des 2-morphismes d'échange  $Ex_{*!}(\cdot)$  avec les compositions des carrés. On a ainsi obtenu la commutation du cube (1.124). Ceci montre alors que la composée du diagramme planaire (1.123) est égale à la composée de :

(1.125)

The diagram (1.125) is a complex commutative diagram with nodes representing cohomology groups. The top node is  $H(X)$ . From  $H(X)$ , there are two parallel arrows to  $H(X \times_Y X)$ , labeled  $\Delta_{2*}$  and  $\Delta_{2!}$ . From  $H(X \times_Y X)$ , an arrow  $p_{2*}$  points to  $H(X)$ . From  $H(X)$ , an arrow  $p'_{1!}$  points to  $H(X)$ . From  $H(X)$ , an arrow  $f_!$  points to  $H(Y)$ . From  $H(X)$ , an arrow  $d_{2*}$  points to  $H(X \times_Z Y)$ . From  $H(X \times_Z Y)$ , an arrow  $q_{2*}$  points to  $H(X)$ . From  $H(X)$ , an arrow  $f_*$  points to  $H(Y)$ . From  $H(Y)$ , an arrow  $Ex_{!*}$  points to  $H(X \times_Z Y)$ . From  $H(X \times_Z Y)$ , an arrow  $r_{1!}$  points to  $H(Y \times_Z X)$ . From  $H(Y \times_Z X)$ , an arrow  $r_{2*}$  points to  $H(Y \times_Z Y)$ . From  $H(Y \times_Z Y)$ , an arrow  $p_{2*}$  points to  $H(Y)$ . From  $H(Y)$ , an arrow  $Ex_{*!}$  points to  $H(Y \times_Z X)$ . From  $H(Y \times_Z X)$ , an arrow  $q_{1!}$  points to  $H(X)$ . From  $H(Y \times_Z Y)$ , an arrow  $p_{1!}$  points to  $H(Y)$ . From  $H(Y)$ , an arrow  $Ex_{*!}$  points to  $H(Y \times_Z Y)$ . From  $H(Y)$ , an arrow  $f_!$  points to  $H(Y)$ . From  $H(X)$ , an arrow  $d_{1!}$  points to  $H(Y \times_Z X)$ . From  $H(Y \times_Z X)$ , an arrow  $Ex_{*!}$  points to  $H(Y)$ . From  $H(Y \times_Z Y)$ , an arrow  $Ex_{*!}$  points to  $H(Y)$ . From  $H(Y)$ , an arrow  $g_!$  points to  $H(Z)$ . From  $H(X)$ , an arrow  $f_*$  points to  $H(Y)$ . From  $H(Y)$ , an arrow  $g_*$  points to  $H(Z)$ .

En utilisant en fin de compte la compatibilité des 2-isomorphismes d'échange  $Ex_{*!}(\cdot)$  avec les compositions des carrés, on voit que la composée de (1.125) est la même que celle de :

(1.126)

The diagram (1.126) is a simplified version of (1.125). It shows the same nodes and arrows, but with some paths removed. The top node is  $H(X)$ . From  $H(X)$ , there are two parallel arrows to  $H(X \times_Y X)$ , labeled  $\Delta_{2*}$  and  $\Delta_{2!}$ . From  $H(X \times_Y X)$ , an arrow  $p_{2*}$  points to  $H(X)$ . From  $H(X)$ , an arrow  $p'_{1!}$  points to  $H(X)$ . From  $H(X)$ , an arrow  $f_!$  points to  $H(Y)$ . From  $H(X)$ , an arrow  $d_{2*}$  points to  $H(X \times_Z Y)$ . From  $H(X \times_Z Y)$ , an arrow  $q_{2*}$  points to  $H(X)$ . From  $H(X)$ , an arrow  $f_*$  points to  $H(Y)$ . From  $H(Y)$ , an arrow  $Ex_{!*}$  points to  $H(X \times_Z Y)$ . From  $H(X \times_Z Y)$ , an arrow  $r_{1!}$  points to  $H(Y \times_Z X)$ . From  $H(Y \times_Z X)$ , an arrow  $r_{2*}$  points to  $H(Y \times_Z Y)$ . From  $H(Y \times_Z Y)$ , an arrow  $p_{2*}$  points to  $H(Y)$ . From  $H(Y)$ , an arrow  $Ex_{*!}$  points to  $H(Y \times_Z X)$ . From  $H(Y \times_Z X)$ , an arrow  $q_{1!}$  points to  $H(X)$ . From  $H(Y \times_Z Y)$ , an arrow  $p_{1!}$  points to  $H(Y)$ . From  $H(Y)$ , an arrow  $Ex_{*!}$  points to  $H(Y \times_Z Y)$ . From  $H(Y)$ , an arrow  $f_!$  points to  $H(Y)$ . From  $H(X)$ , an arrow  $d_{1!}$  points to  $H(Y \times_Z X)$ . From  $H(Y \times_Z X)$ , an arrow  $Ex_{*!}$  points to  $H(Y)$ . From  $H(Y \times_Z Y)$ , an arrow  $Ex_{*!}$  points to  $H(Y)$ . From  $H(Y)$ , an arrow  $g_!$  points to  $H(Z)$ . From  $H(X)$ , an arrow  $f_*$  points to  $H(Y)$ . From  $H(Y)$ , an arrow  $g_*$  points to  $H(Z)$ .

La composée du diagramme planaire (1.126) est clairement égale à la composée des 2-morphismes :

$$g_! f_! \xrightarrow{\alpha_g} g_* f_! \xrightarrow{\alpha_f} g_* f_*$$

La proposition est prouvée.

C.Q.F.D

Une autre façon d'énoncer la proposition précédente est :

**COROLLAIRE 1.7.4** — Les 2-morphismes  $\alpha_f : f_! \rightarrow f_*$  définissent un morphisme de 2-foncteurs (égaux sur les objets) :

$$\alpha : H_! \longrightarrow H_*$$

De plus, ce morphisme prolonge le morphisme identité :

$$\text{Imm}H_! \equiv \text{Imm}H_*$$

On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.7.5** — Supposons donné un carré cartésien dans  $(\text{Sch}/S)$  :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Le carré de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} f_!g'_* & \xrightarrow{Ex_{*!}} & g_*f'_! \\ \alpha_f \downarrow & & \downarrow \alpha_{f'} \\ f_*g'_* & \xrightarrow{Ex_{**}} & g_*f'_* \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION Notons d'abord qu'on a un cube de  $S$ -schémas ayant pour faces des carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} X' \times_{Y'} X' & \xrightarrow{r} & X \times_Y X & & \\ \downarrow p'_1 & \searrow p'_2 & \downarrow p_1 & \searrow p_2 & \\ X' & \xrightarrow{g'} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow f' & \downarrow f' & \downarrow f & & \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y & & \end{array}$$

Ce cube de  $S$ -schéma définit un cube dans la 2-catégorie  $\mathfrak{A}$  :

$$(1.127) \quad \begin{array}{ccccc} H(X' \times_{Y'} X') & \xrightarrow{r_*} & H(X \times_Y X) & & \\ \downarrow p'_{1!} & \searrow p'_{2*} & \downarrow p_{1!} & \searrow p_{2*} & \\ H(X') & \xrightarrow{g'_*} & H(X) & \xrightarrow{f_!} & H(Y) \\ \downarrow f'_* & \downarrow f'_! & \downarrow f_* & & \\ H(Y') & \xrightarrow{g_*} & H(Y) & & \end{array}$$

Sur les faces on a soit un 2-morphisme  $Ex_{*!}$  soit un 2-isomorphisme  $Ex_{**}$ . Ce cube est commutatif (pour voir cela, on peut le diviser en deux). Revenons à la preuve de la proposition. On va expliciter la composée :

$$f_!g'_* \xrightarrow{Ex_{*!}} g_!f'_! \xrightarrow{\alpha_{f'}} g_*f'_*$$

En reprenant la définition de  $\alpha_{f'}$ , on obtient le diagramme planaire :

$$(1.128) \quad \begin{array}{ccccc} H(X') & & & & \\ \Delta'_* \searrow & & \Downarrow c_* & & \\ H(X' \times_{Y'} X') & \xrightarrow{p'_{2*}} & H(X') & \xrightarrow{g'_*} & H(X) \\ \downarrow p'_{1!} & \Downarrow Ex_{*!} & \downarrow f'_! & \Downarrow Ex_{*!} & \downarrow f_! \\ H(X') & \xrightarrow{f'_*} & H(Y') & \xrightarrow{g_*} & H(Y) \end{array}$$

avec  $\Delta'$  l'immersion diagonale :  $X' \longrightarrow X' \times_{Y'} X'$ . La composée du diagramme planaire (1.128) est égale à celle de :

$$(1.129) \quad \begin{array}{ccccc} & & H(X) & & \\ & g_* \nearrow & & \Delta_* \searrow & \\ H(X') & & H(X \times_Y X) & & \\ \downarrow Ex_{**} & & \downarrow Ex_{**} & & \\ H(X') & \xrightarrow{g'_*} & H(X) & & \\ \Delta'_* \searrow & & \downarrow p_{2*} & & \\ H(X' \times_{Y'} X') & \xrightarrow{r_*} & H(X) & & \\ \downarrow p'_{1!} & \Downarrow Ex_{**} & \downarrow f'_! & & \\ H(X') & \xrightarrow{p'_{2*}} & H(X') & \xrightarrow{g'_*} & H(Y) \\ \downarrow f'_* & \Downarrow Ex_{*!} & \downarrow f'_! & \Downarrow Ex_{*!} & \\ H(Y') & \xrightarrow{f'_*} & H(Y') & \xrightarrow{g_*} & H(Y) \end{array}$$

Pour s'en convaincre, il suffit de voir que la partie du diagramme située au-dessus de la ligne en pointillé :

$$H(X') \xrightarrow{\Delta'_*} H(X' \times_{Y'} X') \xrightarrow{p'_{2*}} H(X') \xrightarrow{g'_*} H(X)$$

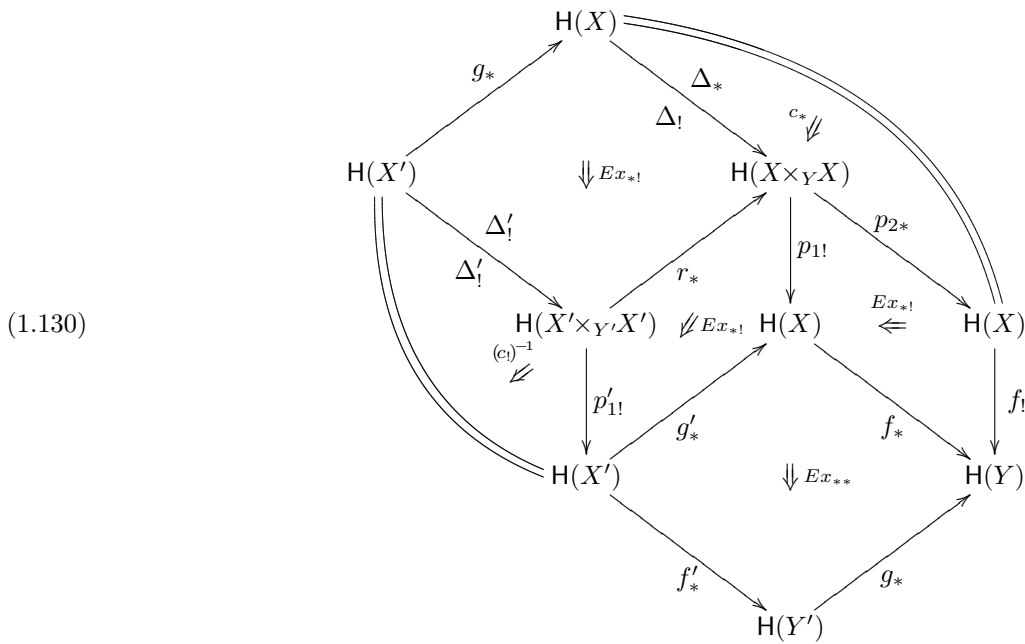
est égale à la composée des 2-morphismes :

$$g'_* \circ p'_{2*} \circ \Delta'_* \xrightarrow{c_*(\Delta'_*, p'_{2*})} g'_*$$

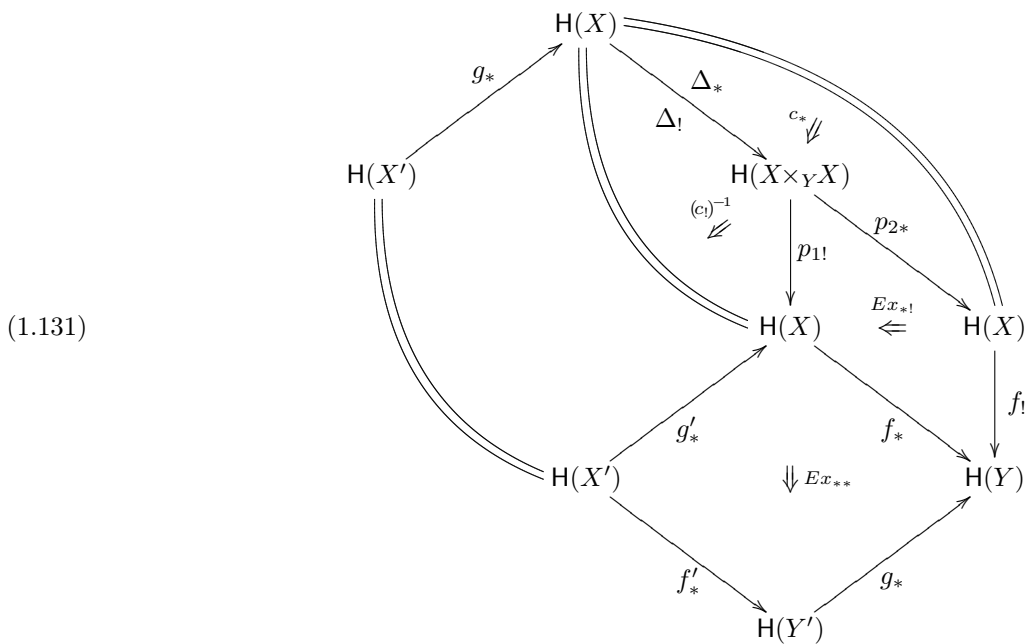
Mais ceci est clair par la relation de cocycle pour le 2-foncteur  $H_*$  étant donné que la partie en question du diagramme ne fait intervenir que des 2-morphismes de connexion  $c_*(.)$  ou d'échange  $Ex_{**} = c(.)c(.)^{-1}$ . En utilisant maintenant le cube commutatif (1.127) ainsi que l'égalité des deux 2-morphismes d'échanges  $Ex_{1*}$  et  $Ex_{**}$  associés au carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \Delta' \downarrow & & \downarrow \Delta \\ X' \times_{Y'} X' & \xrightarrow{r} & X \times_Y X \end{array}$$

on voit que la composée de (1.129) est égale à la composée de :



En utilisant en fin la compatibilité des 2-morphismes d'échange  $Ex_{*!}$  avec la composition des carrés on obtient :



Évidemment, la composée du diagramme planaire ci-dessus est égale à la composée des 2-morphismes :

$$f_! g'_* \xrightarrow{\alpha_f} f_* g'_* \xrightarrow{Ex_{*,*}} g_* f_*$$

La proposition est donc prouvée.

C.Q.F.D

On a également les analogues suivants :

**PROPOSITION 1.7.6** — *Supposons donné un carré cartésien dans  $(Sch/S)$  :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Le carré de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} f_!g'_! & \xrightarrow{Ex_{!}} & g_!f'_! \\ \alpha_{g'} \downarrow & & \downarrow \alpha_g \\ f_!g'_* & \xrightarrow{Ex_{*!}} & g_!f'_* \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION Cette proposition découle de la proposition 1.7.5 par un argument de 2-dualité. En effet la commutativité du carré de l'énoncé équivaut à la commutativité de :

$$\begin{array}{ccc} f_*g'_* & \xleftarrow{Ex_{*,*}} & g_*f'_* \\ \alpha^{\text{op}} \uparrow & & \uparrow \alpha^{\text{op}} \\ f_*g'_{\nabla} & \xleftarrow{Ex_{*,\nabla}} & g_*f'_{\nabla} \end{array}$$

Ce qui est assuré par la proposition 1.7.5 appliqué au foncteur croisé sur le quadruplet  $(G^*, G_*, G_{\nabla}, G^{\nabla})$ . C.Q.F.D

**PROPOSITION 1.7.7** — Supposons donné un carré cartésien dans  $(\text{Sch}/S)$  :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Le carré de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} g^*f_! & \xrightarrow{Ex_!^*} & f'_!g'^* \\ \alpha_f \downarrow & & \downarrow \alpha_{f'} \\ g^*f_* & \xrightarrow{Ex_*^*} & f'_*g'^* \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION Le diagramme commutatif de l'énoncé s'obtient du diagramme de la proposition 1.7.5 via l'adjonction globale entre  $H_*$  et  $H^*$ . C.Q.F.D

**PROPOSITION 1.7.8** — Supposons donné un carré cartésien dans  $(\text{Sch}/S)$  :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Le carré de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} f'_!g'^! & \xrightarrow{Ex_!^!} & g'^!f_! \\ \alpha_{f'} \downarrow & & \downarrow \alpha_f \\ f'_*g'^! & \xrightarrow{Ex_*^!} & g'^!f_* \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION Le diagramme commutatif de l'énoncé s'obtient du diagramme de la proposition 1.7.6 via l'adjonction globale entre  $H_!$  et  $H^!$ . On peut également le déduire par un argument de 2-dualité à partir de la proposition 1.7.7. C.Q.F.D

### 1.7.2 Pour $f$ projectif, $f_! \rightarrow f_*$ est un 2-isomorphisme

#### Le cas des espaces projectifs

Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. Dans ce numéro on prouvera que si  $p_n$  est la projection canonique  $\mathbb{P}_X^n \longrightarrow X$  alors :

**THEOREME 1.7.9** — *Le 2-morphisme :*

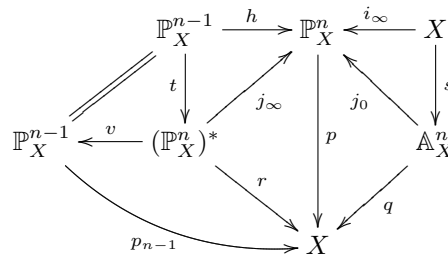
$$\alpha_{p_n} : p_n! \longrightarrow p_n*$$

est inversible.

On va raisonner par récurrence sur l'entier  $n$ . Pour  $n = 0$ , il n'y a rien à démontrer. On fixe donc  $n \geq 1$ . Pour simplifier les notations, on écrira simplement  $p$  à la place de  $p_n$  la projection  $\mathbb{P}_X^n \longrightarrow X$  mais on conservera la notation<sup>26</sup>  $p_m$  pour  $m \neq n$ . L'hypothèse de récurrence nous dit donc que le 2-morphisme :

$$\alpha_{p_{n-1}} : p_{n-1}! \longrightarrow p_{n-1}*$$

est inversible. On considère le diagramme commutatif de  $S$ -schémas :



Les notations sont expliquées ci-dessous :

- $h$  est l'inclusion de l'hyperplan défini par l'annulation de la dernière coordonnée homogène,
- $j_0$  est l'inclusion de l'ouvert complémentaire envoyant la section nulle de  $\mathbb{A}_X^n$  sur la section à l'infini de  $\mathbb{P}_X^n$ ,
- $i_\infty$  est l'inclusion de la section à l'infini de  $\mathbb{P}_X^n$ ,
- $j_\infty$  est l'immersion de l'ouvert complémentaire à  $i_\infty$ ,
- $v$  est la projection sur  $\mathbb{P}_X^{n-1}$  de centre  $i_\infty$ . La projection  $v$  est naturellement un fibré en droites sur  $\mathbb{P}_X^{n-1}$  avec  $t$  pour section nulle. On choisit  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X^{n-1}}$ -module tel que  $(\mathbb{P}_X^n)^*$  soit isomorphe à  $\mathbb{V}(\mathcal{N})$ .

Fixons un objet  $A$  de  $H(X)$ . On considère le complexe (ou plutôt le triangle) dans la catégorie additive  $H(\mathbb{P}_X^n)$  :

$$(\Delta) \quad h_!h^!p^*A \xrightarrow{\delta} p^*A \xrightarrow{\eta} i_{\infty*}i_{\infty}^*p^*A \xrightarrow{0} h_!h^!p^*A[+1]$$

On a la proposition :

**PROPOSITION 1.7.10** — *Si on applique  $p_*$  au triangle  $(\Delta)$ , on obtient un triangle distingué de  $H(X)$ .*

**DEMONSTRATION** On forme le diagramme suivant dans  $H(\mathbb{P}_X^n)$  :

$$(1.132) \quad \begin{array}{ccccccc} h_!h^!p^*A & \xrightarrow{\delta} & p^*A & \xrightarrow{\eta} & i_{\infty*}i_{\infty}^*p^*A & \xrightarrow{0} & h_!h^!p^*A[+1] \\ \parallel & & \parallel & & \uparrow a & & \\ h_!h^!p^*A & \xrightarrow{\delta} & p^*A & \xrightarrow{\eta} & j_{0*}j_0^*p^*A & \xrightarrow{\theta} & h_!h^!p^*A[+1] \end{array}$$

Le triangle inférieur étant le premier triangle distingué de l'axiome de localité. La flèche  $a$  est l'évaluation en  $p^*A$  de la composée :

$$j_{0*}j_0^* \xrightarrow{\eta} j_{0*}s_*s^*j_0^* \xrightarrow{\sim} i_{\infty*}i_{\infty}^*$$

Le diagramme (1.132) est commutatif. En effet la commutation du second carré de (1.132) découle de la proposition 1.1.17.

<sup>26</sup>En fait on aura seulement besoin de  $p_{n-1}$ .

Appliquons  $p_*$  au diagramme (1.132). On obtient alors le diagramme commutatif :

$$(1.133) \quad \begin{array}{ccccccc} p_*h_!h^!p^*A & \xrightarrow{\delta} & p_*p^*A & \xrightarrow{\eta} & p_*i_{\infty*}i_{\infty}^*p^*A & \xrightarrow{0} & p_*h_!h^!p^*A[+1] \\ \parallel & & \parallel & & \uparrow p_*(a) & & \\ p_*h_!h^!p^*A & \xrightarrow{\delta} & p_*p^*A & \xrightarrow{\eta} & p_*j_{0*}j_0^*p^*A & \xrightarrow{\theta} & p_*h_!h^!p^*A[+1] \end{array}$$

On va prouver que ce diagramme se prolonge en un isomorphisme de triangles, ce qui prouvera la proposition. On divise la démonstration en deux étapes :

**Étape 1 :** La flèche  $p_*(a)$  du diagramme (1.133) est un isomorphisme. On montrera plus généralement que le 2-morphisme :

$$p_*j_{0*}j_0^*p^* \xrightarrow{\eta} p_*j_{0*}s_*s^*j_0^*p^* \xrightarrow{\sim} p_*i_{\infty*}i_{\infty}^*p^*$$

est inversible. Le 2-morphisme en question est la composée du diagramme planaire suivant :

$$(1.134) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & H(X) & & & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ & & & i_{\infty}^* & & i_{\infty*} & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ & & & (c^*)^{-1} \Uparrow & & \Uparrow (c_*)^{-1} & \\ & & & s^* & \Uparrow \eta & s_* & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{j_0^*} & H(\mathbb{A}_X^n) = H(\mathbb{A}_X^n) & \xrightarrow{j_{0*}} & H(\mathbb{P}_X^n) \xrightarrow{p_*} H(X) \end{array}$$

Pour montrer qu'il est un 2-isomorphisme, il suffira de prouver que la composée du diagramme planaire suivant en est un :

$$(1.135) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & H(X) & & & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ & & & i_{\infty}^* & & i_{\infty*} & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ & & & (c^*)^{-1} \Uparrow & & \Uparrow (c_*)^{-1} & \\ & & & s^* & \Uparrow \eta & s_* & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{j_0^*} & H(\mathbb{A}_X^n) = H(\mathbb{A}_X^n) & \xrightarrow{j_{0*}} & H(\mathbb{P}_X^n) \xrightarrow{p_*} H(X) \\ & & \uparrow c^* & & & & \uparrow c_* \\ & & q^* & & & & q_* \end{array}$$

En effet, les deux diagrammes planaires (1.134) et (1.135) ne diffèrent que par des 2-isomorphismes de connexion du type  $c^*$  et  $c_*$ . Mais en utilisant l'axiome de cocycle pour les 2-isomorphismes de connexion des 2-foncteurs  $H^*$  et  $H_*$  on voit immédiatement que la composée de (1.135) est simplement la composée de :

$$(1.136) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & H(X) & & & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ & & & (qs)^* & & (qs)_* & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ & & & (c^*)^{-1} \Uparrow & & \Uparrow (c_*)^{-1} & \\ & & & s^* & \Uparrow \eta & s_* & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ H(X) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{A}_X^n) = H(\mathbb{A}_X^n) & \xrightarrow{q_*} & H(X) & & \end{array}$$

Par l'axiome d'homotopie, on sait que le 2-morphisme d'unité :  $1 \xrightarrow{\sim} q_*q^*$  est inversible. En attachant ce 2-isomorphisme au diagramme planaire (1.136), on se ramène finalement à prouver que la composée du diagramme



planaire :

$$(1.137) \quad \begin{array}{ccccc} & & H(X) & & \\ & (qs)^* \nearrow & & \searrow (qs)_* & \\ & & & & \\ H(X) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{A}_X^n) & \xlongequal{\quad} & H(\mathbb{A}_X^n) & \xrightarrow{q_*} & H(X) \\ & \nwarrow (c^*)^{-1} & \uparrow s^* & \uparrow \eta & \downarrow s_* & \nwarrow (c_*)^{-1} & \\ & & & & & & \end{array}$$

est un 2-isomorphisme. Mais par la proposition 1.1.17, la composée du diagramme planaire 1.137 n'est autre que le 2-morphisme d'unité de l'adjonction entre  $(q \circ s)^*$  et  $(q \circ s)_*$ . Puisque  $q \circ s = \text{id}_X$  ce 2-morphisme d'unité est forcément un 2-isomorphisme. D'où le résultat recherché !

**Étape 2 :** *Fin de la preuve.* Pour terminer la preuve de la proposition, on pourra prouver que la flèche :

$$(1.138) \quad p_* j_{0*} j_0^* p^* A \xrightarrow{\theta} p_* h_! h^! p^* A[+1]$$

est nulle. En effet, si c'est le cas, le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} p_* h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_* p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_* i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{0} & p_* h_! h^! p^* A[+1] \\ \parallel & & \parallel & & \uparrow p_*(a) & & \parallel \\ p_* h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_* p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_* j_{0*} j_0^* p^* A & \xrightarrow{\theta} & p_* h_! h^! p^* A[+1] \end{array}$$

sera commutatif et d'après l'étape précédente il aura les flèches verticales des isomorphismes.

Mais pour que la flèche (1.138) soit nulle, il suffit (compte tenu du fait que le triangle inférieur est distingué) que la flèche :

$$(1.139) \quad p_* p^* A \xrightarrow{\eta} p_* j_{0*} j_0^* p^* A$$

admette une section. Par la proposition 1.1.17, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p_* p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_* j_{0*} j_0^* p^* A \\ \eta \uparrow & & \downarrow \sim \\ A & \xrightarrow{\eta} & q_* q^* A \end{array}$$

La flèche horizontale inférieure est un isomorphisme par l'axiome de l'homotopie. On peut donc prendre comme section à (1.139) la composée :

$$p_* j_{0*} j_0^* p^* A \xrightarrow{\sim} q_* q^* A \xleftarrow{\sim} A \xrightarrow{\eta} p_* p^* A$$

En effet, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} p_* j_{0*} j_0^* p^* A & \xrightarrow{\sim} & q_* q^* A & \xleftarrow{\sim} & A & \xrightarrow{\eta} & p_* p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_* j_{0*} j_0^* p^* A \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ p_* j_{0*} j_0^* p^* A & \xrightarrow{\sim} & q_* q^* A & \xleftarrow{\sim} & A & \xrightarrow{\eta} & q_* q^* A & \xrightarrow{\sim} & p_* j_{0*} j_0^* p^* A \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ p_* j_{0*} j_0^* p^* A & \xrightarrow{\sim} & q_* q^* A & \xlongequal{\quad} & q_* q^* A & \xrightarrow{\sim} & p_* j_{0*} j_0^* p^* A \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ p_* j_{0*} j_0^* p^* A & \xlongequal{\quad} & p_* j_{0*} j_0^* p^* A & & & & p_* j_{0*} j_0^* p^* A \end{array}$$

La proposition est prouvée.

C.Q.F.D

**Remarque 1.7.11** — Le lecteur pourra remarquer que l’hypothèse de récurrence n’a servi nulle part dans la démonstration de la proposition 1.7.10. En fait on a juste utilisé l’axiome de l’homotopie et quelques sorites élémentaires sur les adjonctions globaux (la proposition 1.1.17). En ce sens, la proposition 1.7.10 est élémentaire. La démonstration de la proposition 1.7.12, suit les même lignes de la démonstration précédente mais utilisera des résultats plus élaborés ainsi que l’hypothèse de récurrence.

**PROPOSITION 1.7.12** — Si on applique  $p_!$  au triangle  $(\Delta)$ , on obtient un triangle distingué de  $H(X)$ .

DEMONSTRATION On forme le diagramme suivant dans  $H(\mathbb{P}_X^n)$  :

$$\begin{array}{ccccccc} h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p^* A & \xrightarrow{\eta} & i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{0} & h_! h^! p^* A[+1] \\ \downarrow a & & \parallel & & \parallel & & \\ j_{\infty!} j_{\infty}^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p^* A & \xrightarrow{\eta} & i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{\theta} & j_{\infty!} j_{\infty}^! p^* A[+1] \end{array}$$

Le triangle inférieur étant le triangle distingué habituel et  $a$  est l’évaluation en  $p^* A$  de la composée :

$$h_! h^! \xrightarrow{\sim} j_{\infty!} t_! t^! j_{\infty}^! \xrightarrow{\delta} j_{\infty!} j_{\infty}^!$$

Ce diagramme est commutatif par la proposition 1.1.17. Lorsqu’on applique  $p_!$  on obtient le diagramme commutatif :

$$(1.140) \quad \begin{array}{ccccccc} p_! h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_! p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_! i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{0} & p_! h_! h^! p^* A[+1] \\ \downarrow p_!(a) & & \parallel & & \parallel & & \\ p_! j_{\infty!} j_{\infty}^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_! p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_! i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{\theta} & p_! j_{\infty!} j_{\infty}^! p^* A[+1] \end{array}$$

Il suffit comme dans la démonstration de 1.7.10 de prouver les points suivants.

- La flèche  $p_!(a) : p_! h_! h^! p^* A \longrightarrow p_! j_{\infty!} j_{\infty}^! p^* A$  est un isomorphisme.
- La flèche  $p_! j_{\infty!} j_{\infty}^! p^* A \xrightarrow{\delta} p_! p^* A$  admet une rétraction ou encore (une fois qu’on sait que  $p_!(a)$  est inversible) que la flèche :

$$(1.141) \quad p_! h_! h^! p^* A \xrightarrow{\delta} p_! p^* A$$

admet une rétraction.

On établira chaque point dans une étape à part :

**Étape 1 :** la flèche  $p_!(a)$  du diagramme (1.140) est un isomorphisme. On prouvera plus généralement que la composée des 2-morphismes :

$$p_! h_! h^! p^* \xrightarrow{\sim} p_! j_{\infty!} t_! t^! j_{\infty}^! p^* \xrightarrow{\delta} p_! j_{\infty!} j_{\infty}^! p^*$$

est inversible. En langage de diagrammes planaires, le 2-morphisme en question est la composée de :

$$(1.142) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & H(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & h^! & & h_! \\ & & & & \swarrow & & \searrow \\ & & & & c^! \Downarrow & & \Downarrow c_! \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{j_{\infty}^!} & H((\mathbb{P}_X^n)^*) & \xrightarrow{j_{\infty!}} & H(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{p_!} & H(X) \\ & & & & \uparrow t^! & & \downarrow t_! & & \\ & & & & \Downarrow \delta & & \Downarrow \delta & & \end{array}$$

Dire que la composée du diagramme planaire (1.142) est un 2-isomorphisme est équivalent à dire que la composée du diagramme planaire suivant en est un :

$$(1.143) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \\ & & \uparrow t^! & \searrow t_! & \\ & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^n) & \downarrow \delta & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^n) \\ \mathbf{H}(X) & \xrightarrow{p^*} & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{j_\infty^!} & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{p_!} & \mathbf{H}(X) \\ & \searrow r^* & \downarrow b & \downarrow \delta & \downarrow (c_1)^{-1} & \searrow r_! & \\ & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \xrightarrow{v^*} & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \xrightarrow{p_{n-1}!} & \mathbf{H}(X) \\ & \downarrow p_{n-1}^* & & & \downarrow c_1 & & \\ & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \end{array}$$

( $b$  étant la composée des 2-isomorphismes<sup>27</sup> :  $j_\infty^! p^* \xrightarrow{\sim} E(\Omega_{j_\infty}) j_\infty^* p^* = j_\infty^* p^* \xrightarrow{(c^*)^{-1}} r^*$ ). En effet, les deux diagrammes planaires (1.142) et (1.143) ne diffèrent que par des 2-isomorphismes de connexions du type  $c^*$ ,  $c^!$  et  $c_!$  ainsi que le 2-isomorphisme  $b$ . On voit alors qu'on pourra se contenter de prouver que la composée du diagramme planaire suivant :

$$(1.144) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \\ & & \uparrow t^! & \searrow t_! & \\ & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \downarrow \delta & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) \\ \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \xrightarrow{v^*} & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \xrightarrow{v_!} & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) \end{array}$$

est un 2-isomorphisme. Rappelons qu'on avait choisi un  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X^{n-1}}$ -module inversible  $\mathcal{N}$  tel que  $v$  soit isomorphe à la projection du fibré :  $\mathbb{V}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{P}_X^{n-1}$ . Par un calcul facile<sup>28</sup>, on voit qu'on a un isomorphisme entre  $\Omega_v$  et  $v^* \mathcal{N}$ . En particulier  $\Omega_v$  provient d'un pull-back par  $v$ . Rappelons également qu'on peut associer à  $\mathcal{N}$  une équivalence  $E(\mathcal{N})$  de  $\mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1})$ . Pour prouver que la composée de (1.144) est un 2-isomorphisme il suffit de le faire après composition à gauche par  $E(\mathcal{N})$ , i.e. :

$$(1.145) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \\ & & \uparrow t^! & \searrow t_! & \\ & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \downarrow \delta & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) \\ \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \xrightarrow{E(\mathcal{N})} & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \xrightarrow{v^*} & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \xrightarrow{v_!} & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) \end{array}$$

Mais  $v^!$  et  $v^* E(\mathcal{N})$  sont 2-isomorphes par la composée des 2-isomorphismes :

$$v^* E(\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} E(v^* \mathcal{N}) v^* \xrightarrow{\sim} E(\Omega_v) v^* \xrightarrow{\sim} v^!$$

(le second isomorphisme provient de l'isomorphisme entre  $v^* \mathcal{N}$  et  $\Omega_v$ ). Ainsi, pour montrer ce que l'on veut, il suffira de prouver que la composée du diagramme planaire :

$$(1.146) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \\ & & \uparrow t^! & \searrow t_! & \\ & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \downarrow \delta & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) \\ \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \xrightarrow{v^!} & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \xrightarrow{v_!} & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) \end{array}$$

<sup>27</sup>Remarque que le  $\mathcal{O}_{(\mathbb{P}_X^n)^*}$ -module  $\Omega_{j_\infty}$  est nul puisque  $j_\infty$  est une immersion ouverte.

<sup>28</sup>En effet soit  $E \xrightarrow{e} B$  un fibré vectoriel. Par définition  $\Omega_e$  est le faisceau normal de l'immersion diagonale  $d : E \rightarrow E \times_B E$ .

Notons  $p_1$  la projection sur le premier facteur :  $E \times_B E \rightarrow E$ . Maintenant, le  $B$ -schéma  $E \times_B E$  s'identifie à la somme directe  $E \oplus E$  et la projection  $p_1$  s'identifie à l'application  $x \oplus y \rightarrow x$ . En particulier  $p_1$  définit un fibré vectoriel sur  $E$  isomorphe au pull-back de  $E$  par  $e$  et l'immersion diagonale  $d$  devient une section. De là il est facile de conclure que  $\mathbb{V}(\Omega_e) \simeq e^* E$ .

est un 2-isomorphisme. On peut aussi considérer le diagramme planaire :

$$(1.147) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \\ & \nearrow^{(vt)^\dagger} & & \searrow_{(vt)_!} & \\ & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \\ & \searrow_{c'_!} & \uparrow_{t^\dagger} & \downarrow_{\delta} & \downarrow_{\delta} & \uparrow_{c_!} & \searrow_{c_!} \\ \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \xrightarrow{v_!} & \mathbf{H}((\mathbb{P}_X^n)^*) & \xlongequal{\quad} & \mathbf{H}((\mathbb{P}_X^n)^*) & \xrightarrow{v_!} & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) \end{array}$$

puisque les deux diagrammes planaires (1.146) et (1.147) diffèrent par des 2-isomorphismes de connexions de type  $c^\dagger$  et  $c_!$  ainsi que par le 2-morphisme de cointé  $v_!v^\dagger \xrightarrow{\sim} 1$  qui est inversible par l'axiome d'homotopie (étant donné que  $v$  est la projection d'un fibré en droites). Mais par la proposition 1.1.17, la composée du diagramme planaire (1.147) est égale au morphisme de cointé de l'adjonction entre  $(v \circ t)_!$  et  $(v \circ t)^\dagger$ . Puisque  $v \circ t = \text{id}_{\mathbb{P}_X^{n-1}}$ , ce 2-morphisme de cointé est un 2-isomorphisme. D'où le résultat recherché<sup>29</sup> !

**Étape 2 :** La flèche (1.141) admet une rétraction. On construira dans cette étape une rétraction à la flèche (1.141) :

$$p_!h_!h^!p^*A \longrightarrow p_!p^*A$$

Pour cela on va utiliser le 2-morphisme  $\alpha_p : p_! \longrightarrow p_*$  (voir la définition 1.7.1). Par naturalité, le diagramme suivant :

$$(1.148) \quad \begin{array}{ccc} p_!h_!h^!p^*A & \xrightarrow{\delta} & p_!p^*A \\ \alpha_p \downarrow & & \downarrow \alpha_p \\ p_*h_!h^!p^*A & \xrightarrow{\delta} & p_*p^*A \end{array}$$

est commutatif. La flèche horizontale inférieure admet une rétraction par la proposition précédente<sup>30</sup>. On en fixe une qu'on notera  $\rho$ . D'autre part, la flèche :

$$p_!h_!h^!p^*A \xrightarrow{\alpha_p} p_*h_!h^!p^*A$$

est un isomorphisme et même le 2-morphisme  $\alpha_p : p_!h_! \longrightarrow p_*h_!$  est inversible. En effet, par la proposition 1.7.3 on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p_{n-1}! & \xrightarrow{\alpha_{p_{n-1}}} & p_{n-1}* \\ c_! \downarrow & & \downarrow c_* \\ p_!h_! & \longrightarrow & p_*h_! \xlongequal{\quad} p_*h_* \end{array}$$

à flèches verticales des 2-isomorphismes de connexions, et par l'hypothèse de récurrence le 2-morphisme  $\alpha_{p_{n-1}}$  est un 2-isomorphisme. Ceci dit, on peut prendre comme rétraction la composée :

$$p_!p^*A \xrightarrow{\alpha_p} p_*p^*A \xrightarrow{\rho} p_*h_!h^!p^*A \xleftarrow[\alpha_p]{\sim} p_!h_!h^!p^*A$$

<sup>29</sup>Le lecteur pourra remarquer que l'on n'a toujours pas utilisé l'hypothèse de récurrence.  
<sup>30</sup>Ceci a été établi dans la démonstration de la proposition 1.7.10. On peut également le déduire directement de l'énoncé de la proposition en question. En effet, cet énoncé affirme que le triangle suivant :

$$p_*h_!h^!p^*A \xrightarrow{\delta} p_*p^*A \xrightarrow{\eta} p_*i_{\infty}i_{\infty}^*p^*A \xrightarrow{0} p_*h_!h^!p^*A[+1]$$

est distingué. Mais dans un triangle distingué où le troisième coté est nul, le premier coté admet une rétraction et le second une section i.e. le triangle est scindé.

En effet, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_! h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_! p^* A & \xrightarrow{\alpha_p} & p_* p^* A & \xrightarrow{\rho} & p_* h_! h^! p^* A \xleftarrow{\sim_{\alpha_p}} p_! h_! h^! p^* A \\
 \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\
 p_! h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\alpha_p} & p_* h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_* p^* A & \xrightarrow{\rho} & p_* h_! h^! p^* A \xleftarrow{\sim_{\alpha_p}} p_! h_! h^! p^* A \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 p_! h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\alpha_p} & p_* h_! h^! p^* A & \xlongequal{\quad\quad\quad} & p_* h_! h^! p^* A & \xleftarrow{\sim_{\alpha_p}} & p_! h_! h^! p^* A \\
 \parallel & & & & & & \parallel \\
 p_! h_! h^! p^* A & \xlongequal{\quad\quad\quad} & p_! h_! h^! p^* A & \xlongequal{\quad\quad\quad} & p_! h_! h^! p^* A & \xlongequal{\quad\quad\quad} & p_! h_! h^! p^* A
 \end{array}$$

La proposition 1.7.12 est prouvée.

C.Q.F.D

**COROLLAIRE 1.7.13** — Si  $p$  est la projection  $\mathbb{P}^n_X \longrightarrow X$ , le 2-morphisme :

$$\alpha_p : p_! p^* \longrightarrow p_* p^*$$

est inversible.

DEMONSTRATION Il suffit de voir que pour tout objet  $A$  de  $H(X)$  la flèche :

$$p_! p^* A \longrightarrow p_* p^* A$$

induite par le 2-morphisme  $\alpha_p$  est un isomorphisme.

En appliquant le 2-morphisme  $\alpha_p : p_! \longrightarrow p_*$  au triangle  $(\Delta)$ , on obtient par naturalité un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_! h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_! p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_! i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{0} & p_! h_! h^! p^* A[+1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 p_* h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_* p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_* i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{0} & p_* h_! h^! p^* A[+1]
 \end{array}$$

qui est un morphisme de triangles distingués par les propositions 1.7.10 et 1.7.12. Il suffit donc de montrer que les deux 2-morphismes :

$$(1.149) \quad p_! h_! \longrightarrow p_* h_! \quad \text{et} \quad p_! i_{\infty*} \longrightarrow p_* i_{\infty*}$$

sont inversibles. Mais d'après la proposition 1.7.3, on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 p_{n-1}! \xrightarrow{\alpha_{p_{n-1}}} p_{n-1}* & & \text{id}_{X!} \xlongequal{\quad\quad\quad} \text{id}_{X*} \\
 c_! \downarrow & & c_! \downarrow \\
 p_! h_! \longrightarrow p_* h_! \xlongequal{\quad\quad\quad} p_* h_* & & p_! i_{\infty!} \xlongequal{\quad\quad\quad} p_! i_{\infty*} \longrightarrow p_* i_{\infty*}
 \end{array}$$

à flèches verticales des 2-isomorphismes. Il devient alors clair que le second 2-morphisme de (1.149) est inversible. Pour le premier 2-morphisme de (1.149) on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence.

C.Q.F.D

Par 2-dualité on obtient aussi le corollaire :

**COROLLAIRE 1.7.14** — Le 2-morphisme :

$$\alpha_p : p_! p^! \longrightarrow p_* p^!$$

est inversible.

DEMONSTRATION En effet, le corollaire 1.7.13 s'applique au foncteur croisé sur le quadruplet  $(G^*, G_*, G_{\nabla}, G^{\nabla})$ . Ainsi, le 2-morphisme :

$$p_{\nabla} p^* \longrightarrow p_* p^*$$

est inversible. Ceci veut exactement dire (puisque  $\star$  correspond à  $!$  et  $\nabla$  correspond à  $*$ ) que le 2-morphisme :

$$p!p^! \longrightarrow p_*p^!$$

est inversible.

C.Q.F.D

On va construire à l'aide des deux corollaires 1.7.13 et 1.7.14 deux 2-morphismes  $p_* \longrightarrow p!$ .

1. Le premier 2-morphisme est la composée :

$$\phi_1 : p_* \xrightarrow{\eta} [p_*p^*]_{\eta} p_* \xleftarrow[\sim]{\alpha_p} p! [p^*p_*]_{\delta} \xrightarrow{\delta} p!$$

(les notations  $[\cdot]_{\eta}$  et  $[\cdot]_{\delta}$  désignent le couple de 1-morphismes qui définissent les 2-morphismes d'unité et de counité).

2. Le deuxième 2-morphisme est la composée :

$$\phi_2 : p_* \xrightarrow{\eta} p_* [p^!p!]_{\eta} \xleftarrow[\sim]{\alpha_p} [p^!p^!]_{\delta} p! \xrightarrow{\delta} p!$$

On a le lemme :

**LEMME 1.7.15** — *Le 2-morphisme  $\phi_1$  appliqué à  $p^*$  donne l'inverse du 2-isomorphisme  $\alpha_p : p!p^* \xrightarrow{\sim} p_*p^*$ .*

*Dualement, le 2-morphisme  $\phi_2$  appliqué à  $p^!$  donne l'inverse du 2-isomorphisme  $\alpha_p : p!p^! \xrightarrow{\sim} p_*p^!$ .*

**DEMONSTRATION** On démontrera seulement la première assertion : la seconde découlera par 2-dualité en remarquant que  $\phi_2$  est exactement le 2-morphisme  $\phi_1$  mais construit à partir du foncteur croisé sur le quadruplet  $(G^*, G_*, G_{\nabla}, G^{\nabla})$ . Considérons le diagramme suivant :

$$(1.150) \quad \begin{array}{ccccc} p_*p^* & \xrightarrow{\eta} & [p_*\{p^*\}_{\eta}p_*]_{\delta} p^* & \xleftarrow[\sim]{\alpha_p} & p! [p^*\{p_*\}_{\delta}p^*]_{\eta} & \xrightarrow{\delta} & p!p^* \\ & \searrow & \downarrow \delta & & \uparrow \eta & \swarrow & \\ & & p_*p^* & \xleftarrow[\sim]{\alpha_p} & p!p^* & & \end{array}$$

les notations  $[\cdot]_{\eta}$  et  $[\cdot]_{\delta}$  désignent le couple de 1-morphismes qui définissent les 2-morphismes d'unité et de counité dans la ligne horizontale supérieure du diagramme (1.150). Les notations  $\{\cdot\}_{\eta}$  et  $\{\cdot\}_{\delta}$  désignent le couple de 1-morphismes qui définissent les 2-morphismes d'unité et de counité verticaux du diagramme (1.150).

Pour prouver le lemme, il suffit bien évidemment de prouver que le diagramme (1.150) est commutatif.

Le triangle de droite n'est autre que le triangle :

$$\begin{array}{ccc} p_* & \xrightarrow{\eta} & p_*p^*p_* \\ & \searrow & \downarrow \delta \\ & & p_* \end{array}$$

évalué en  $p^*$ . Mais ce triangle est commutatif par définition des adjonctions.

De même le triangle de gauche n'est autre que le triangle :

$$\begin{array}{ccc} p^*p_*p^* & \xrightarrow{\delta} & p^* \\ \uparrow \eta & \swarrow & \\ p^* & & \end{array}$$

sur lequel on applique  $p^!$ . Ce triangle est également commutatif par définition des adjonctions.

Il reste donc à prouver la commutation du carré :

$$\begin{array}{ccc} p_*\{p^*p_*\}_{\delta}p^* & \xleftarrow{\alpha_p} & p!p^*\{p_*p^*\}_{\eta} \\ \downarrow \delta & & \uparrow \eta \\ p_*p^* & \xleftarrow{\alpha_p} & p!p^* \end{array}$$

Ce carré se factorise horizontalement de la manière suivante :

$$(1.151) \quad \begin{array}{ccccc} p_* \{p^* p_*\}_\delta p^* & \xlongequal{\quad} & p_* p^* \{p_* p^*\}_\eta & \xleftarrow{\alpha_p} & p_! p^* \{p_* p^*\}_\eta \\ \downarrow \delta & & \uparrow \eta & & \uparrow \eta \\ p_* p^* & \xlongequal{\quad} & p_* p^* & \xleftarrow{\alpha_p} & p_! p^* \end{array}$$

Le second carré de (1.151) est commutatif par naturalité de  $\alpha_p$  et le premier carré de (1.151) n'est autre que le carré :

$$\begin{array}{ccc} p^* p_* p^* & \xlongequal{\quad} & p^* p_* p^* \\ \delta \downarrow & & \uparrow \eta \\ p^* & \xlongequal{\quad} & p^* \end{array}$$

sur lequel on a appliqué  $p_*$ . En particulier, il est aussi commutatif par définition des adjonctions. Ceci termine la preuve de la commutation du carré central de (1.150) et donc la preuve du lemme. C.Q.F.D

On est en mesure maintenant de prouver le cas  $n$  de la récurrence et donc le théorème 1.7.9 :

**PROPOSITION 1.7.16** — (Le cas  $n$  de la récurrence) *Le 2-morphisme :*

$$\alpha_p : p_! \xrightarrow{\sim} p_*$$

*est inversible.*

DEMONSTRATION Pour montrer que le 2-morphisme  $\alpha_p$  est inversible il suffit de montrer qu'il a un inverse à droite et un inverse à gauche<sup>31</sup>. Nous prouverons que  $\phi_1$  est un inverse à gauche de  $\alpha_p$  et que  $\phi_2$  est un inverse à droite de  $\alpha_p$ . Il faut donc montrer que les composées :

$$(1.152) \quad u_1 : p_* \xrightarrow{\phi_1} p_! \xrightarrow{\alpha_p} p_*$$

et

$$(1.153) \quad u_2 : p_! \xrightarrow{\alpha_p} p_* \xrightarrow{\phi_2} p_!$$

sont les 2-morphismes identités. Pour prouver cela il suffira de le faire pour les 2-morphismes  ${}^a u_1 : p^* \longrightarrow p^*$  et  ${}^a u_2 : p^! \longrightarrow p^!$  obtenus par adjonction.

**Étape 1 :** Commençons par le 2-morphisme  $p^* \longrightarrow p^*$ . Il est la composée :

$$(1.154) \quad p^* \xrightarrow{\eta} p^* p_* p^* \xrightarrow{u_1} p^* p_* p^* \xrightarrow{\delta} p^*$$

Le 2-morphisme du milieu est par définition la composée :

$$(1.155) \quad p^* p_* p^* \xrightarrow{\phi_1} p^* p_! p^* \xrightarrow{\alpha_p} p^* p_* p^*$$

Mais par le lemme 1.7.15, les deux 2-morphismes :  $p_* p^* \xrightarrow{\phi_1} p_! p^*$  et  $p_! p^* \xrightarrow{\alpha_p} p_* p^*$  sont inverses l'un de l'autre. Il vient que le 2-morphisme composé de (1.155) est le 2-morphisme identité. Ainsi, la composée de (1.154) est simplement la composée :

$$p^* \xrightarrow{\eta} p^* p_* p^* \xrightarrow{\delta} p^*$$

Par la définition des adjonctions cette composée est le 2-morphisme identité.

<sup>31</sup>Par 2-dualité, il suffit juste de prouver que  $\alpha_p$  admet un inverse à gauche. En effet en appliquant ceci au foncteur croisé  $(G^*, G_*, G_\nabla, G^\nabla)$  on voit que  $\alpha_p^{\text{op}}$  admet aussi un inverse à gauche ce qui équivaut à dire que  $\alpha_p$  admet un inverse à droite.

**Étape 2 :** On fait pareil pour le 2-morphisme  $p^! \longrightarrow p^!$ . Il est la composée :

$$p^! \xrightarrow{\eta} p^! p_! p^! \xrightarrow{u_2} p^! p_! p^! \xrightarrow{\delta} p^!$$

Le 2-morphisme du milieu est par définition la composée :

$$(1.156) \quad p^! p_! p^! \xrightarrow{\alpha_p} p^! p_* p^! \xrightarrow{\phi_2} p^! p_! p^!$$

Étant donné que  $p_! p^! \xrightarrow{\alpha_p} p_* p^!$  et  $p_* p^! \xrightarrow{\phi_2} p_! p^!$  sont inverses l'un de l'autre (par le lemme 1.7.15), on voit alors que la composée de (1.156) est l'identité. Ainsi, notre 2-endomorphisme  $p^! \longrightarrow p^!$  est la composée des 2-morphismes :

$$p^! \xrightarrow{\eta} p^! p_! p^! \xrightarrow{\delta} p^!$$

C'est donc le 2-morphisme identité.

C.Q.F.D

**Le cas général. Application**

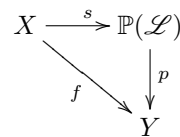
**THEOREME 1.7.17** — Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un  $S$ -morphisme projectif. Le 2-morphisme :

$$\alpha_f : f_! \longrightarrow f_*$$

est inversible.

**DEMONSTRATION** Dans le numéro précédent on a traité le cas de l'espace projectif sur  $Y$ . Il est facile en utilisant l'axiome de localité et la compatibilité du 2-morphisme  $p_! \longrightarrow p_*$  avec les échanges, de déduire le cas où  $p$  est la projection :  $\mathbb{P}(\mathcal{L}) \longrightarrow Y$  avec  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -module localement libre.

Pour traiter le cas général, on choisit une  $Y$ -immersion :



(avec  $\mathcal{L}$  localement libre sur  $Y$ ) et on invoque le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f_! & \xrightarrow{\alpha_f} & f_* \\ c_! \downarrow & & \downarrow c_* \\ p_! s_! & \xrightarrow{\alpha_p} & p_* s_* \end{array}$$

Le théorème est prouvé.

C.Q.F.D

On termine par une application importante du théorème précédent :

**COROLLAIRE 1.7.18** — Supposons donné un carré cartésien de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec  $f$  projectif. Le 2-morphisme d'échange :

$$Ex_*^* : g^* f_* \longrightarrow f'_* g'^*$$

est inversible.



DEMONSTRATION En effet, par 1.7.7 on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 g_* f_! & \xrightarrow{Ex_1^*} & f'_! g'^* \\
 \alpha_f \downarrow & & \downarrow \alpha_{f'} \\
 g^* f_* & \xrightarrow{Ex_*^*} & f'_* g'^*
 \end{array}$$

Étant donné que les 2-morphismes  $Ex_1^*$ ,  $\alpha_f$  et  $\alpha_{f'}$  sont inversibles, le résultat est clair.

C.Q.F.D

**Remarque 1.7.19** — L'analogie du corollaire 1.7.18 est connu dans [SGA 4] sous le nom du "théorème de changement de base pour un morphisme propre".



## Chapitre 2

# Compléments sur les 2-foncteurs homotopiques stables et les quatres opérations

**Introduction.** Beaucoup de théorèmes de base en cohomologie étale se démontrent par dévissage en utilisant le théorème de changement de base propre et le théorème de changement de base par un morphisme lisse. Parmi ces théorèmes, on note :

- la constructibilité des faisceaux de cohomologie  $R^i f_* \mathcal{F}$ , pour  $f$  de type fini et  $\mathcal{F}$  un faisceau de  $\Lambda$ -modules constructible,
- les encadrements de la dimension cohomologique des  $Rf_*$  (par exemple, le théorème d'Artin sur les images directes cohomologiques par des morphismes affines<sup>1</sup>),
- le formalisme de dualité de Verdier (qui repose en partie sur la notion de faisceau constructible).

Mis à part la section 2.4, on peut dire que le but de ce chapitre est d'établir des analogues motiviques d'une partie de ces théorèmes en se basant sur le théorème de changement de base pour un morphisme projectif démontré dans le chapitre précédent. Pour cela, on doit d'abord préciser les notions de *constructibilité* et de *dimension cohomologique* dans le cadre motivique voire même dans le cadre abstrait d'un 2-foncteur homotopique stable. Fixons donc un 2-foncteur homotopique stable  $\mathbf{H} : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{R}$ .

Comme remplaçant des faisceaux constructibles, il est naturel d'utiliser les objets compacts. Malheureusement, pour que la notion de compacité ait un sens, il faudra que les catégories  $\mathbf{H}(-)$  admettent des petites sommes. Ainsi, on a opté pour une autre définition qui garde un sens pour n'importe quel  $\mathbf{H}$ . Pour motiver la dite définition, plaçons nous un instant dans le 2-foncteur  $\mathbf{SH}$ . Parmi les objets compacts de  $\mathbf{SH}(X)$ , on trouve les motifs  $(U_+) \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n}$  associés à un  $X$ -schéma lisse  $U$ . Il est bien connu que ces motifs engendrent la catégorie avec petites sommes  $\mathbf{SH}(X)$ . Par un résultat classique (voir la proposition 2.1.24), on déduit que tout objet compact de  $\mathbf{SH}(X)$  peut être construit en un nombre fini d'étapes à partir des  $(U_+) \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n}$  en prenant des cônes successifs et des facteurs directs. Ainsi la sous-catégorie des objets compacts de  $\mathbf{SH}(X)$  est la plus petite sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs contenant les motifs  $(U_+) \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n}$ . D'autre part, si  $f$  est le morphisme structural du  $X$ -schéma lisse  $U$ , on sait que  $(U_+) = f_{\#} \mathbb{S}_U^0$  avec  $\mathbb{S}^0$  la sphère simpliciale de dimension nulle. N'ayant pas d'objets distingués dans  $\mathbf{H}(S)$ , ceci nous amène à définir la sous-catégorie des objets constructibles de  $\mathbf{H}(X)$  comme étant celle engendrée par les  $f_{\#} A_U$  avec  $A$  variant dans une classe d'objets de  $\mathbf{H}(S)$  fixée à l'avance.

Pour ce qui est de la dimension cohomologique dans  $\mathbf{H}$ , le formalisme des  $t$ -structures s'impose (voir [BBD82]). Reste bien sûr à en choisir une. En vue des applications potentielles, notre choix est tombé sur une généralisation de la  $t$ -structure homotopique sur  $\mathbf{DM}(k)$  ou  $\mathbf{SH}(k)$  (avec  $k$  un corps). Notre point de départ, est un théorème de Fabien Morel [Mor05], affirmant que la  $t$ -structure homotopique de  $\mathbf{SH}(k)$  est "engendrée" (au sens de la définition 2.1.71) par les motifs de la forme :  $(X_+) \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n}$  avec  $X$  un  $k$ -schéma lisse et  $n \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, nous étudierons les  $t$ -structures sur  $\mathbf{H}(-)$  engendrée par les objets analogues à savoir des  $f_{\#} A_{X'}(n)[n]$  avec  $f$  lisse de source  $X'$ ,  $A$  variant dans un ensemble d'objets de  $\mathbf{H}(S)$  fixé à l'avance.

Ayant expliqué nos notions de constructibilité et de dimension cohomologique, faisons un bref aperçu des résultats obtenus dans ce chapitre.

**1-** La section 2.1 regroupera une grande partie des techniques générales employées dans ce chapitre. La première partie concerne les catégories triangulées. On y trouvera les notions élémentaires de sous-catégories suspendues et cosuspendues engendrées par une classe d'objets. On discutera également des objets constructibles, compacts et des

<sup>1</sup>Notons tout de suite, qu'on est très loin de démontrer et même de formuler un analogue du théorème d'Artin motivique.

catégories bien engendrées. On redémontrera quelques théorèmes bien connus comme le lemme de représentabilité de Brown. Tous ces résultats se trouvent déjà dans la littérature (voir par exemple le livre de Neeman [Nee01]). On passe ensuite aux dérivateurs triangulés auxquels on consacre une sous-section relativement grande. Une bonne partie des résultats discutés se trouvent dans [Gro90], [Mal01a] et [Mal01b]. Mise à part, la section 2.4, la théorie des dérivateurs sera très rarement utilisée dans ce chapitre. Elle le sera par contre beaucoup plus dans le chapitre suivant. On enchaîne sur les histoires d'engendrement de  $t$ -structure et de  $t$ -exactitude des foncteurs, avec lesquels on termine la partie "techniques triangulées" de ces préliminaires.

La suite des préliminaires concerne surtout les catégories monoïdales. Dans cette partie très technique, on introduira les notions de modules et projecteurs dans le but d'alléger les problèmes de cohérences rencontrés dans la théorie de dualité de Verdier. Le lecteur remarquera qu'on travaillera systématiquement avec des catégories monoïdales non forcément symétriques ou unitaires. Cette généralité est peut-être inutile étant donné que toutes les catégories motiviques connues sont monoïdales symétriques et unitaires. Il y a au moins trois raisons pour ce choix :

- Les catégories monoïdales sont formellement plus faciles à étudier que les catégories monoïdales symétriques et unitaires, pour la simple raison que ces derniers contiennent plus de structures.
- Le fait de travailler avec une structure monoïdale non forcément symétrique nous force à conserver les objets dans le bon ordre, ce qui rend, il nous semble, l'exposition plus claire.
- Il est tout de même bon de savoir que la théorie de dualité de Verdier peut se faire sans l'isomorphisme de commutation. Ou, si l'on préfère, de savoir à quel endroit l'isomorphisme de commutation intervient. En fait, l'unique différence avec le cas symétrique, est que les opérateurs de dualités ne sont pas involutifs.

On termine, la section par un retour à la géométrie. Un numéro sera consacré aux notions de 2-foncteurs homotopiques stables,  $\mathbb{Q}$ -linéaire, séparé, quasi-séparé, parfait pour les petites sommes, etc. Dans un deuxième numéro on rappellera très brièvement les techniques de résolution des singularités.

**2-** La seconde section est consacrée aux analogues des théorèmes de constructibilité et de dimension cohomologique du formalisme étale. Pour simplifier, on décrit les résultats obtenus uniquement lorsque la base  $S$  est le spectre d'un corps parfait  $k$  admettant la résolution des singularités. Dans un premier temps, on prouve le théorème de constructibilités des quatre opérations, qui affirme que pour  $f$  quasi-projectif, les foncteurs  $f^*$ ,  $f_*$ ,  $f_!$  et  $f^!$  envoient un objet constructible sur un objet constructible. Un des résultats intermédiaires de cette preuve est particulièrement intéressant. Il s'agit de la proposition 2.2.27 qui décrit un système de générateur des catégories des objets constructibles. Cette proposition sera utilisée dans le chapitre 2.

Pour ce qui concerne les dimensions cohomologiques des opérations, i.e., leurs propriétés de  $t$ -exactitude, la situation est plus complexe. Notons simplement que pour  $f$  un morphisme de  $k$ -schémas quasi-projectifs, le foncteur  $f_*$  est  $t$ -exact à droite et  $f_*[d]$  est  $t$ -exact à gauche avec  $d$  la dimension de la source, que l'on peut remplacer par la dimension maximale des fibres lorsque  $f$  est projectif. Pour des résultats plus détaillés, voir la scholie 2.2.95. Notons également, qu'on arrive à borner la  $t$ -dimension des opérations  $f^!$  alors qu'il semble impossible de trouver des bornes supérieures (homologiques) pour les opérations  $f^*$  et  $f_!$  en général. Retenons également, que pour prouver la scholie 2.2.95, on introduit une autre  $t$ -structure qu'on appelle la  $t$ -structure engendrée perverse, qui partage des points communs avec la  $t$ -structure perverse en cohomologie étale (voir [BBD82]). La  $t$ -structure engendrée perverse est, à notre avis, intéressante en elle-même. De plus, elle constitue un outil puissant pour résoudre des questions de  $t$ -exactitude à gauche concernant d'autres  $t$ -structures, notamment la  $t$ -structure engendrée non perverse, et ceci grâce à son système de générateurs dégagé dans la proposition 2.2.69 ainsi qu'aux théorèmes 2.2.82 et 2.2.86. Notons enfin un résultat intéressant, qu'on peut considérer comme un petit pas vers un théorème d'Artin motivique pour les schémas affines. Il s'agit en fait de la  $t$ -exactitude de l'opération  $j_*$  lorsque  $j$  est l'immersion d'un ouvert dans une courbe. En effet, la dimension cohomologique de ce foncteur chute de 1 à 0!

**3-** La section 2.3 est consacrée au formalisme de dualité de Verdier. Une bonne partie de cette section est consacrée à des problèmes de cohérence. Une fois ces problèmes surmontés, on aboutit à un accouplement canonique  $f^*(-) \otimes f^!(-) \longrightarrow f^!(- \otimes -)$  qui fait de  $f^!$  un  $f^*$ -module au sens de 2.1.93. C'est cette structure qui sera à la base de la plupart des formules habituelles reliant les quatre opérations, le produit tensoriel et les homomorphismes internes. On définira également des accouplements  $f_*(-) \otimes f_!(-) \longrightarrow f_!(-)$ . On montre ensuite l'existence et l'unicité des objets dualisants (au sens de 2.3.66) et on déduit les formules habituelles de commutations aux foncteurs de dualités.

**4-** La dernière section est d'un esprit différent des deux dernières. Il ne s'agit plus d'analogies avec la cohomologie étale, mais simplement de préparer le terrain pour le dernier chapitre. On y trouvera une définition fonctionnelle de ce que doit être un dérivateur algébrique homotopique et stable. La définition choisie est minimale. On montrera dans le dernier chapitre comment étendre le 2-foncteur  $\mathbf{SH}$  en un dérivateur algébrique  $\mathbf{SH}$ .

## 2.1 Préliminaires généraux

Pour la commodité du lecteur, on regroupe dans cette section quelques résultats généraux qui seront utilisés dans les sections qui suivent. Beaucoup de ces résultats sont bien connus et facilement accessibles dans la littérature : pour cela, l'exposition sera parfois brève, et le lecteur sera renvoyé à la source pour des démonstrations jugées longues.

La première moitié de ces préliminaires concerne les catégories triangulées. On traitera, d'abord, les questions d'engendrement, de sommes infinies et d'objets compacts. On introduit juste après la notion de dérivateurs triangulés pour terminer avec des compléments sur les  $t$ -structures. La seconde moitié est essentiellement consacrée aux catégories monoïdales. On rappellera brièvement les définitions de catégories monoïdales et de foncteurs pseudo-monoïdaux entre eux pour s'intéresser ensuite à leurs adjoints. Juste après, on étudie les bifoncteurs homomorphismes internes dans une catégorie monoïdale fermée. On termine les préliminaires sur les catégories monoïdales par un petit paragraphe portant sur les catégories monoïdales triangulées voire sur les dérivateurs monoïdaux triangulés. Dans les deux derniers paragraphes, on retourne à la géométrie algébrique avec quelques mots sur les 2-foncteurs homotopiques et sur la résolution des singularités.

### 2.1.1 Sous-catégories triangulées et engendremments

Pour ce qui concerne la définition des catégories triangulées ainsi que les conséquences directes des axiomes, le lecteur peut consulter [Ver96] ou [Nee01]. L'autoéquivalence de suspension sera notée comme d'habitude  $[+1]$ . Étant donnée une catégorie triangulée  $\mathcal{T}$ , on s'intéressera à trois sortes de sous-catégories de  $\mathcal{T}$  :

**DEFINITION 2.1.1** — Soit  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée. Une sous-catégorie pleine  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{T}$  est dite stable par extensions si pour tout triangle distingué :

$$A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow A'[+1]$$

de  $\mathcal{T}$ , on a l'implication :  $[A' \text{ et } A'' \in \text{Ob}(\mathcal{C})] \implies [A \in \text{Ob}(\mathcal{C})]$ .

1- Une sous-catégorie triangulée de  $\mathcal{T}$  est une sous-catégorie pleine  $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$  stable par extensions et par les auto-équivalences de suspension  $[+1]$  et de cosuspension  $[-1]$ .

2- Une sous-catégorie suspendue (resp. cosuspendue) est une sous-catégorie pleine  $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$  stable par extensions et le foncteur de suspension  $[+1]$  (resp. de cosuspension  $[-1]$ ).

**Remarque 2.1.2** — 1- Une sous-catégorie triangulée est clairement une sous-catégorie pleine qui est suspendue et cosuspendue. Précisons également qu'une sous-catégorie triangulée est elle même une catégorie triangulée.

2- Les deux notions de sous-catégorie suspendue et cosuspendue sont échangées par la dualité. Plus précisément, soient  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée et  $\mathcal{T}^{\text{op}}$  sa catégorie triangulée opposée. Une sous-catégorie suspendue (resp. cosuspendue)  $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$  induit par passage aux catégories opposées, une sous-catégorie cosuspendue (resp. suspendue)  $\mathcal{C}^{\text{op}} \subset \mathcal{T}^{\text{op}}$ . En effet, le foncteur de suspension de  $\mathcal{T}^{\text{op}}$  est l'inverse de celui de  $\mathcal{T}$ .

Le lemme suivant est une trivialité :

**LEMME 2.1.3** — Soient  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée et  $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$  une sous-catégorie pleine. La catégorie  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie suspendue (resp. cosuspendue) si et seulement si pour tout triangle distingué de  $\mathcal{T}$  :

$$A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow A'[+1]$$

On a les deux implications :

- (stabilité par extension)  $[A' \text{ et } A'' \in \text{Ob}(\mathcal{C})] \implies [A \in \text{Ob}(\mathcal{C})]$ ,
- (stabilité par conoyau)  $[A' \text{ et } A \in \text{Ob}(\mathcal{C})] \implies [A'' \in \text{Ob}(\mathcal{C})]$  (resp. (stabilité par noyau)  $[A \text{ et } A'' \in \text{Ob}(\mathcal{C})] \implies [A' \in \text{Ob}(\mathcal{C})]$ ).

Soit  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$  un foncteur. Si  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{D}'$  est une sous-catégorie, on note  $f^{-1}(\mathcal{C}')$  la sous-catégorie de  $\mathcal{D}$  dont les objets sont les  $A \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  tels que  $f(A) \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$  et les flèches sont les  $a \in \text{Fl}(\mathcal{D})$  telles que  $f(a) \in \text{Fl}(\mathcal{C}')$ . On a :

**LEMME 2.1.4** — Soit  $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées. Soit  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{T}'$  une sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue) de  $\mathcal{T}'$ . Alors,  $f^{-1}(\mathcal{C}')$  est une sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue) de  $\mathcal{T}$ .

**LEMME 2.1.5** — Soient  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée et  $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$  un ensemble (ou une classe) d'objets de  $\mathcal{T}$ . Il existe une plus petite sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue)  $\langle \Lambda \rangle^{s-ct}$  (resp.  $\langle \Lambda \rangle_+^{s-ct}$ ,  $\langle \Lambda \rangle_-^{s-ct}$ ) de  $\mathcal{T}$  contenant les objets dans  $\Lambda$ .

**DEMONSTRATION** En effet, On définit par récurrence des sous-catégories  $\langle \Lambda \rangle^n$  avec :

- $\langle \Lambda \rangle^0$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$  ayant pour objets les suspensions et cosuspensions itérés d'objets de  $\Lambda \cup \{0\}$ ,
- $\langle \Lambda \rangle^n$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$  dont les objets sont ceux qui s'obtiennent comme une extension entre deux objets de  $\langle \Lambda \rangle^{n-1}$ .

Du fait que  $\langle \Lambda \rangle^n$  contient un objet nul, on déduit les inclusion  $\langle \Lambda \rangle^n \subset \langle \Lambda \rangle^{n+1}$ . L'union des  $\langle \Lambda \rangle^n$  convient clairement. Les cas respés se traitent de la même manière. C.Q.F.D

**DEFINITION 2.1.6** — *1-* La sous-catégorie  $\langle \Lambda \rangle^{s-ct}$  est appelée la sous-catégorie triangulée strictement engendrée par  $\Lambda$ . Les objets de cette catégorie sont dits  $\Lambda$ -strictement constructibles.

*2-* De même, la sous-catégorie  $\langle \Lambda \rangle_+^{s-ct}$  (resp.  $\langle \Lambda \rangle_-^{s-ct}$ ) est appelée la sous-catégorie suspendue (resp. co-suspendue) strictement-engendrée par  $\Lambda$ . Les objets de cette catégorie sont dits  $\Lambda$ -strictement positivement (resp. négativement) constructibles.

**LEMME 2.1.7** — Soit  $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées. Supposons donnée une sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue)  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{T}'$ . Soit  $\Lambda$  un ensemble (ou une classe) d'objets de  $\mathcal{T}$ . Supposons que  $f(\Lambda) \subset \mathcal{C}'$ . Alors,  $f(\langle \Lambda \rangle^{s-ct}) \subset \mathcal{C}'$  (resp.  $f(\langle \Lambda \rangle_+^{s-ct}) \subset \mathcal{C}'$ ,  $f(\langle \Lambda \rangle_-^{s-ct}) \subset \mathcal{C}'$ ).

DEMONSTRATION Ceci découle immédiatement de la minimalité de  $\langle \Lambda \rangle^{s-ct}$  et du fait que  $f^{-1}\mathcal{C}'$  est triangulée. De même pour les cas respés. C.Q.F.D

Le “strictement” de la définition 2.1.6, est employé pour distinguer la notion analogue où l'on permet d'ajouter les facteurs directes :

**DEFINITION 2.1.8** — Soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie pleine d'une catégorie additive  $\mathcal{D}$ . On dit que  $\mathcal{C}$  est stable par facteurs directs si pour tout triplets  $(A, B, C)$  d'objets de  $\mathcal{D}$ , l'implication suivante :

$$[A \simeq B \oplus C \text{ et } A \in \text{Ob}(\mathcal{C})] \implies [B \in \mathcal{C}]$$

est vérifiée.

**LEMME 2.1.9** — Soient  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée et  $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$  un ensemble (ou une classe) d'objets de  $\mathcal{T}$ . Il existe une plus petite sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue)  $\langle \Lambda \rangle^{ct}$  (resp.  $\langle \Lambda \rangle_+^{ct}$ ,  $\langle \Lambda \rangle_-^{ct}$ ) de  $\mathcal{T}$  contenant les objets dans  $\Lambda$  et qui soit stable par facteurs directs.

DEMONSTRATION La preuve est aussi évidente que celle de 2.1.5. Il suffit seulement d'ajouter les facteurs directes quand on passe du rang  $n-1$  à  $n$ . C.Q.F.D

**DEFINITION 2.1.10** — *1-* La sous-catégorie  $\langle \Lambda \rangle^{ct}$  est appelée la sous-catégorie triangulée engendrée par  $\Lambda$ . Les objets de cette catégorie sont dits  $\Lambda$ -constructibles.

*2-* De même, la sous-catégorie  $\langle \Lambda \rangle_+^{ct}$  (resp.  $\langle \Lambda \rangle_-^{ct}$ ) est appelée la sous-catégorie suspendue (resp. cosuspendue) engendrée par  $\Lambda$ . Les objets de cette catégorie sont dits  $\Lambda$ -positivement (resp.  $\Lambda$ -négativement) constructibles.

**LEMME 2.1.11** — Soit  $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées. Supposons donnée une sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue)  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{T}'$  stable par facteurs directes. Soit  $\Lambda$  un ensemble (ou une classe) d'objets de  $\mathcal{T}$ . Supposons que  $f(\Lambda) \subset \mathcal{C}'$ . Alors,  $f(\langle \Lambda \rangle^{ct}) \subset \mathcal{C}'$  (resp.  $f(\langle \Lambda \rangle_+^{ct}) \subset \mathcal{C}'$ ,  $f(\langle \Lambda \rangle_-^{ct}) \subset \mathcal{C}'$ ).

DEMONSTRATION Ceci découle immédiatement de la minimalité de  $\langle \Lambda \rangle^{ct}$  et du fait que  $f^{-1}\mathcal{C}'$  est triangulée et stable par facteurs directes. De même pour les cas respés. C.Q.F.D

Rappelons qu'une catégorie discrète est une catégorie qui n'a pour flèches que les identités. Si  $I$  est une petite catégorie discrète, un foncteur  $I \longrightarrow \mathcal{C}$  est parfois appelé une famille d'objets de  $\mathcal{C}$ .

**DEFINITION 2.1.12** — *1-* Soit  $\mathcal{D}$  une catégorie. On dit que  $\mathcal{D}$  est une catégorie avec petites sommes (resp. avec petits produits) si les limites inductives (resp. projectifs) indicées par des petites catégories discrètes sont représentables dans  $\mathcal{D}$ .

*2-* Soit  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie pleine d'une catégorie  $\mathcal{D}$  avec petites sommes (resp. petits produits). On dit que  $\mathcal{C}$  est stable par petites sommes (resp. petits produits), si la colimite (resp. limite) dans  $\mathcal{D}$  d'une petite famille discrète d'objets de  $\mathcal{C}$  est un objet de  $\mathcal{C}$ .

La notion de catégorie avec somme (resp. avec produits) est particulièrement féconde lorsque la catégorie en question est munie d'un triangulation. On parle alors de catégories triangulées avec petites sommes (resp. petits produits).

**Remarque 2.1.13** — La notion d'une catégorie triangulée avec petites sommes est duale de celle d'une catégorie triangulée avec petits produits. Ainsi, dans la suite, il sera uniquement question de catégories triangulées avec petites

sommes. Les énoncés et notions concernant les catégories triangulées avec petits produits s’obtiennent par passage aux catégories opposées<sup>2</sup>.

**LEMME 2.1.14** — Soient  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée avec petites sommes et  $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$  un ensemble (ou une classe) d’objets de  $\mathcal{T}$ . Il existe une plus petite sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue)  $\ll \Lambda \gg$  (resp.  $\ll \Lambda \gg_+$ ,  $\ll \Lambda \gg_-$ ) de  $\mathcal{T}$  contenant les objets dans  $\Lambda$  et qui soit stable par petites sommes.

DEMONSTRATION Pour tout ordinal  $\alpha$ , on définit par récurrence transfinie des sous-catégories pleines  $\langle \Lambda \rangle^\alpha \subset \mathcal{T}$  de la manière suivante.

- Les objets de  $\langle \Lambda \rangle^0$  sont les suspensions et cosuspensions itérées d’objets de  $\Lambda \cup \{0\}$ .
- On prend pour  $\langle \Lambda \rangle^\alpha$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$  dont les objets sont ceux qui s’obtiennent comme une extension de deux objets de dans  $\langle \Lambda \rangle^{\alpha_0}$  avec  $\alpha_0 \in \alpha$  ou comme une petite sommes d’objets dans  $\bigcup_{\alpha_0 \in \alpha} \langle \Lambda \rangle^{\alpha_0}$ .

La catégorie obtenu comme l’union des  $\langle \Lambda \rangle^\alpha$  convient clairement. Les cas respés se traitent exactement de la même manière. C.Q.F.D

**DEFINITION 2.1.15** — 1- La sous-catégorie  $\ll \Lambda \gg$  est appelée la sous-catégorie triangulée avec petite sommes engendrée par  $\Lambda$ . Les objets de cette catégorie sont dits  $\Lambda$ -ind-constructibles.

2- De même, la sous-catégorie  $\ll \Lambda \gg_+$  (resp.  $\ll \Lambda \gg_-$ ) est appelée la sous-catégorie suspendue (resp. cosuspendue) stable par petites sommes et engendrée par  $\Lambda$ . Les objets de cette catégorie sont dits  $\Lambda$ -ind-positivement (resp.  $\Lambda$ -ind-négativement) constructibles.

**LEMME 2.1.16** — Soit  $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  un foncteur triangulé commutant aux petites sommes, entre deux catégories triangulées avec petites sommes. Supposons donnée une sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue)  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{T}'$  stable par petites sommes.

Soit  $\Lambda$  un ensemble (ou une classe) d’objets de  $\mathcal{T}$ . Supposons que  $f(\Lambda) \subset \mathcal{C}'$ . Alors,  $f(\ll \Lambda \gg) \subset \mathcal{C}'$  (resp.  $f(\ll \Lambda \gg_+) \subset \mathcal{C}'$ ,  $f(\ll \Lambda \gg_-) \subset \mathcal{C}'$ ).

DEMONSTRATION Ceci découle immédiatement de la minimalité de  $\ll \Lambda \gg$  et du fait que  $f^{-1}\mathcal{C}'$  est triangulée et stable par petites sommes. De même pour les cas respés. C.Q.F.D

L’analogie avec “facteurs directs” de la définition 2.1.15 est superflu du moins pour ce qui concerne les sous-catégories triangulées à cause du résultat suivant<sup>3</sup> :

**LEMME 2.1.17** — Soient  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée avec petites sommes. Alors, la catégorie additive sous-jacente à  $\mathcal{T}$  est pseudo-abélienne.

La définition suivante est classique :

**DEFINITION 2.1.18** — 1- Soit  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée avec petites sommes. Un objet  $A$  de  $\mathcal{T}$  est dit compact si le foncteur  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(A, -)$  commute aux petites sommes, i.e., pour toute petite famille  $(B_i)_{i \in I}$  d’objets de  $\mathcal{T}$ , l’homomorphisme canonique :

$$\bigoplus_{i \in I} \text{hom}_{\mathcal{T}}(A, B_i) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(A, \bigoplus_{i \in I} B_i)$$

est inversible.

2- On notera  $\mathcal{T}_{\text{comp}}$  la sous-catégorie des objets compacts de  $\mathcal{T}$ . C’est une sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs de  $\mathcal{T}$ .

Soit  $(u_i : D_i \longrightarrow D_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$  un système inductif indicé par  $\mathbb{N}$  dans une catégorie triangulée  $\mathcal{T}$  admettant des petites sommes. On peut associer à ce système inductif une colimite homotopique  $\text{HoColim}_i(D_i)$  bien définie à un isomorphisme (non unique) près par le triangle distingué :

$$\bigoplus_{i \in I} D_i \xrightarrow{\oplus_i (\text{id}_{D_i}, -u_i)} \bigoplus_{i \in I} D_i \longrightarrow \text{HoColim}_i D_i \longrightarrow$$

On définit des flèches  $D_i \longrightarrow \text{HoColim } D_i$  en prenant la composée :

$$D_i \longrightarrow \bigoplus_i D_i \longrightarrow \text{HoColim } D_i$$

<sup>2</sup>Les catégories triangulées qui apparaissent dans la nature (par exemple les catégorie homotopique de certaines catégories de modèles) admettent toutes des petites sommes et produits. Toutefois, en pratique, les petites sommes directes semblent être plus utiles que les petits produits. Ceci peut s’expliquer par l’abondance en pratique des objets compacts et la rareté des objets cocompacts.

<sup>3</sup>Ce résultat ne sera pas utilisé par la suite. Pour cela, on ne donnera pas de preuve. Notons tout de même que dans le cas où  $\mathcal{T}$  est compactement engendrée au sens de la définition 2.1.20, on peut obtenir le lemme en question comme conséquence directe du critère de représentabilité de Brown (voir la proposition 2.1.21).

De plus, les triangles suivant sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 D_i & \xrightarrow{u_i} & D_{i+1} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \text{HoColim } D_i &
 \end{array}$$

étant donné que la composée :

$$D_i \xrightarrow{(\text{id}_{D_i}, -u_i)} D_i \oplus D_{i+1} \longrightarrow \oplus_i D_i \longrightarrow \text{HoColim } D_i$$

est nulle par construction. Ceci permet de définir un homomorphisme de groupe abéliens :

$$\text{Colim}_{i \in \mathbb{N}} \text{hom}(A, D_i) \longrightarrow \text{hom}(A, \text{HoColim}_{i \in \mathbb{N}} D_i)$$

naturel en  $A \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ . Le lemme suivant est facile :

**LEMME 2.1.19** — Soit  $A$  un objet d'une catégorie triangulée avec petites sommes  $\mathcal{T}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est un objet compact.
2. Pour tout système inductif  $(u_i : D_i \longrightarrow D_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ , le morphisme canonique :

$$\text{Colim}_{i \in \mathbb{N}} \text{hom}(A, D_i) \longrightarrow \text{hom}(A, \text{HoColim}_{i \in \mathbb{N}} D_i)$$

est un isomorphisme.

DEMONSTRATION L'implication 1  $\implies$  2 est claire. Montrons l'implication réciproque, i.e., que  $A$  est compact si  $\text{hom}(A, -)$  commute aux colimites homotopiques indicées par  $\mathbb{N}$ . Soit  $(B_i)_{i \in I}$  une famille (qu'on peut supposer infinie) d'objets de  $\mathcal{T}$  et montrons que :

$$\oplus_i \text{hom}(A, B_i) \longrightarrow \text{hom}(A, \oplus_i B_i)$$

est inversible. En considérant la composée :

$$(2.1) \quad \oplus_i \text{hom}(A, B_i) \longrightarrow \text{hom}(A, \oplus_i B_i) \longrightarrow \text{hom}(A, \prod_i B_i) \longrightarrow \prod_i \text{hom}(A, B_i)$$

on voit que notre homomorphisme est injectif. Montrons donc la surjectivité. Soit  $f : A \longrightarrow \oplus_i B_i$  une flèche. On note  $I_0$  l'ensemble des  $i_0 \in I$  tels que la composée :

$$f_{i_0} : A \xrightarrow{f} \oplus_i B_i \longrightarrow B_{i_0}$$

est non nulle. Il suffit de montrer que  $I_0$  est fini. En effet, dans ce cas,  $f$  sera la composée :

$$A \longrightarrow \oplus_{i_0 \in I_0} B_{i_0} \longrightarrow \oplus_i B_i$$

puisque cette dernière a la même image que  $f$  dans  $\prod_i \text{hom}(A, B_i)$  par le monomorphisme (2.1). Supposons donc par l'absurde que  $I_0$  est infini. On peut dans ce cas trouver une suite strictement croissante  $J_0 \subset J_1 \subset \dots \subset J_n \subset \dots \subset I_0$  telle que  $I_0 = \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ . On vérifie immédiatement que  $\oplus_{i \in I} B_i$  est la colimite du système inductif  $\oplus_{j \in J_n} \coprod_{(I-I_0)} B_j$ . Par la seconde condition de l'énoncé, il existe  $m \in \mathbb{N}$  et une factorisation de  $f$  :

$$A \longrightarrow \oplus_{j \in J_m} \coprod_{(I-I_0)} B_j \longrightarrow \oplus_{i \in I} B_i$$

Mais dans ce cas, pour  $i_0 \in I_0 - J_m$ , la flèche  $f_{i_0}$  est nulle. On a obtenu une contradiction. C.Q.F.D

**DEFINITION 2.1.20** — Soit  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée avec petites sommes. On dit que  $\mathcal{T}$  est compactement engendrée, s'il existe un ensemble d'objets compacts  $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$  tel que  $\ll \Lambda \gg = \mathcal{T}$ . L'ensemble  $\Lambda$  est appelé un ensemble de générateurs compacts de  $\mathcal{T}$ .

On a le bien-connu critère de représentabilité de Brown :

**PROPOSITION 2.1.21** — Soit  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée avec petites sommes, compactement engendrée. Soit  $h : \mathcal{T} \longrightarrow \text{Ab}$  un foncteur exact contravariant qui transforme les petites sommes en petits produits. Alors,  $h$  est représentable.

DEMONSTRATION Si  $A$  est un objet de  $\mathcal{T}$ , on peut voir un élément  $a \in h(A)$  comme une flèche  $a : A \longrightarrow h$  (par exemple dans la catégorie des préfaisceaux en groupes abéliens sur  $\mathcal{T}$ ).

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on va construire par récurrence les données suivantes :



- un objet  $\Phi_n$  de  $\mathcal{T}$ ,
- un élément  $\alpha_n \in h(\Phi_n)$ ,
- une flèche  $u_{n-1} : \Phi_{n-1} \longrightarrow \Phi_n$  lorsque  $n$  est non nul telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{n-1} & \xrightarrow{u_{n-1}} & \Phi_n & \xrightarrow{\alpha_n} & h \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & \alpha_{n-1} \end{array}$$

Fixons un ensemble d'objets compacts  $\Lambda$  qui engendre la catégorie triangulée avec petites sommes  $\mathcal{T}$ . On supposera, quitte à l'élargir, que l'ensemble  $\Lambda$  est stable par suspensions et cosuspensions. On posera :

$$\Phi_0 = \bigoplus_{A \in \Lambda, a \in h(A)} A$$

et on prend pour  $\alpha_0$  le produit des  $a$  dans :

$$h(\Phi_0) = \prod_{A \in \Lambda, a \in h(A)} h(A)$$

Lorsque  $n$  est un entier non nul, on définit  $\Phi_n$  par un triangle distingué :

$$\left( \bigoplus_{A \in \Lambda, b \in \text{Ker}(\alpha_{n-1} : \text{hom}_{\mathcal{T}}(A, \Phi_{n-1}) \rightarrow h(A))} A \right) \longrightarrow \Phi_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \Phi_n \longrightarrow$$

En utilisant l'hypothèse que  $h$  est exact, on déduit immédiatement que  $\alpha_{n-1} \in h(\Phi_{n-1})$  est l'image d'un certain élément  $\alpha_n \in h(\Phi_n)$ .

Une fois les  $\Phi_n$  construits, on pose  $\Phi = \text{HoColim } \Phi_n$ . Par définition, et du fait que  $h$  transforme les petites sommes en petits produits, on a une suite exacte :

$$h(\Phi) \longrightarrow \prod_n h(\Phi_n) \xrightarrow{(\prod \text{id}_{\Phi_n}, - \prod u_n)} \prod_n h(\Phi_n)$$

Et donc une surjection :  $h(\Phi) \twoheadrightarrow \text{Lim } h(\Phi_n)$ . On choisit alors un antécédent  $\alpha$  par cette surjection de la limite des  $\alpha_n$ .

On montrera que  $\alpha : \Phi \twoheadrightarrow h$  induit un isomorphisme de préfaisceaux. Étant donné que le préfaisceau représenté par  $\Phi$  ainsi que  $h$  sont tous les deux exacts, et transforment petites sommes en petits produits, on se ramène immédiatement à montrer que l'homomorphisme  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(A, \Phi) \longrightarrow h(A)$  est inversible pour  $A$  dans  $\Lambda$  (noter, qu'ici on utilise le fait que  $\Lambda$  est stable par suspension et cosuspension). La surjectivité de cet homomorphisme découle facilement de la surjectivité de  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(A, \Phi_0) \longrightarrow h(A)$ . Pour montrer l'injectivité, on considère un élément  $a$  dans le noyau. Comme  $A$  est compact, la flèche  $a : A \longrightarrow \Phi$  provient d'une certaine flèche  $a' : A \longrightarrow \Phi_n$ . Mais par construction, la composée :

$$A \longrightarrow \Phi_n \longrightarrow \Phi_{n+1}$$

est nulle. Ceci assure la nullité de  $a$ .

C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.1.22** — Soient  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  deux catégories triangulées avec petites sommes. On suppose que  $\mathcal{T}$  est compactement engendrée. Soit  $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  un foncteur triangulé covariant commutant aux petites sommes. Alors,  $f$  admet un adjoint à droite.

DEMONSTRATION Soit  $B'$  un objet de  $\mathcal{T}'$ . Le foncteur  $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$  qui à un objet  $A$  de  $\mathcal{T}$  associe  $\text{hom}_{\mathcal{T}'}(f(A), B')$  transforme petites sommes en petits produits. Par le critère de représentabilité de Brown, ce foncteur est représenté par un objet  $g(B')$  de  $\mathcal{T}$ . De plus, on a un isomorphisme :

$$\text{hom}_{\mathcal{T}'}(f(A), B') \xrightarrow{\sim} \text{hom}_{\mathcal{T}}(A, g(B'))$$

Il existe alors une unique façon d'étendre l'association  $B' \rightsquigarrow g(B')$  en un foncteur covariant, de sorte que l'isomorphisme ci-dessus soit naturel en  $A$  et  $B'$ .

C.Q.F.D

L'adjoint à droite de  $f$  est automatiquement triangulé. En effet :

**LEMME 2.1.23** — Soit  $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées. Si  $g : \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{T}$  est adjoint à  $f$ , alors  $g$  est triangulé.

DEMONSTRATION On traitera uniquement le cas où  $g$  est adjoint à droite de  $f$ . L'autre cas, se traite de manière analogue. Supposons donné un triangle distingué de  $\mathcal{T}'$  :

$$A' \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow A'[+1]$$

et complétons la flèche  $g(A') \longrightarrow g(B')$  en un triangle distingué de  $\mathcal{T}$  :

$$g(A') \longrightarrow g(B') \longrightarrow D \longrightarrow g(A')[+1]$$

A l'aide des axiomes des catégorie triangulée, il existe une flèche en pointillée rendant commutatif le diagramme suivant de  $\mathcal{T}'$  :

$$\begin{array}{ccccccc} fg(A') & \longrightarrow & fg(B') & \longrightarrow & f(D) & \longrightarrow & fg(A')[+1] \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \cdots & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & A'[+1] \end{array}$$

En effet, le triangle du bas est distingué ainsi que celui du haut puisque  $f$  est un foncteur triangulé. Par adjonction, on déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} g(A') & \longrightarrow & g(B') & \longrightarrow & D & \longrightarrow & g(A')[+1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow u & & \parallel \\ g(A') & \longrightarrow & g(B') & \longrightarrow & g(C') & \longrightarrow & g(A')[+1] \end{array}$$

Étant donné que le triangle du haut est distingué, il suffira de prouver que  $u$  est inversible. Il suffit encore de montrer que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{T}$ , l'homomorphisme induit par  $u$  :

$$\text{hom}_{\mathcal{T}}(X, D) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(X, g(C'))$$

est inversible. On applique pour cela le lemme des cinq au morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{hom}(X, g(A')) & \longrightarrow & \text{hom}(X, g(B')) & \longrightarrow & \text{hom}(X, D) & \longrightarrow & \text{hom}(X, g(A')[+1]) & \longrightarrow & \text{hom}(X, g(B')[+1]) \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow u & & \parallel & & \parallel \\ \text{hom}(X, g(A')) & \longrightarrow & \text{hom}(X, g(B')) & \longrightarrow & \text{hom}(X, g(C')) & \longrightarrow & \text{hom}(X, g(A')[+1]) & \longrightarrow & \text{hom}(X, g(B')[+1]) \end{array}$$

la ligne du bas étant exacte puisque isomorphe à :

$$\text{hom}(f(X), A') \longrightarrow \text{hom}(f(X), B') \longrightarrow \text{hom}(f(X), C') \longrightarrow \text{hom}(f(X), A'[+1]) \longrightarrow \text{hom}(f(X), B'[+1])$$

Le lemme est prouvé.

C.Q.F.D

La preuve de la proposition suivante utilise la construction qu'on a exposée dans la preuve du lemme de représentabilité de Brown :

**PROPOSITION 2.1.24** — Soit  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée avec petites sommes engendrée par un ensemble d'objets compacts  $\Lambda$ . La sous-catégorie  $\mathcal{T}_{comp}$  est la plus petite sous-catégorie triangulée de  $\mathcal{T}$  contenant  $\Lambda$  et stable par facteurs directes. En d'autres termes, on a l'égalité :

$$\mathcal{T}_{comp} = \langle \Lambda \rangle^{ct}$$

DEMONSTRATION L'inclusion  $\langle \Lambda \rangle^{ct} \subset \mathcal{T}_{comp}$  est claire. Fixons un objet compact  $C$  de  $\mathcal{T}$ . On va montrer que  $C$  est  $\Lambda$ -constructible.

On applique la construction de la preuve de la proposition 2.1.21 au foncteur représentable  $h = \text{hom}_{\mathcal{T}}(-, C)$ . On obtient ainsi une présentation de  $C$  comme une colimite homotopique du système inductif  $(u_n : \Phi_n \longrightarrow \Phi_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$\text{HoColim } \Phi_n \xrightarrow{\sim} C$$

Puisque  $C$  est compact, on a :

$$\text{Colim } \text{hom}_{\mathcal{T}}(C, \Phi_n) \simeq \text{hom}_{\mathcal{T}}(C, \text{HoColim } \Phi_n) \simeq \text{hom}_{\mathcal{T}}(C, C)$$

Ainsi, on choisissant un représentant de l'identité de  $C$  dans la colimite de gauche, on obtient une factorisation de l'identité :

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \Phi_{n_0} \longrightarrow C$$

pour un certain  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Ceci prouve que  $C$  est facteur direct de  $\Phi_{n_0}$ .

Posons  $\Phi_{-1} = 0$ . On va construire par récurrence descendante pour  $k \in \{-1, \dots, n_0\}$  un triangle distingué :

$$(2.2) \quad N_k \longrightarrow \Phi_k \longrightarrow D_k \longrightarrow N_k[+1]$$

avec  $N_k$  dans  $\langle \Lambda \rangle^{s-ct}$  et tel que  $C$  soit facteur direct de  $D_k$ . Pour  $k = n_0$  on prendre  $N_{n_0} = 0$ . Si on arrive à construire  $N_{-1}$  le corollaire découlera. En effet puisque  $\Phi_{-1} = 0$ , on obtient que  $C$  est facteur direct de  $N_{-1}[+1]$ .

Dans la suite, on utilisera uniquement le fait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe un triangle distingué :

$$\bigoplus_{i \in I_n} A_i \longrightarrow \Phi_{n-1} \longrightarrow \Phi_n \longrightarrow (\bigoplus_{i \in T_n} A_i)[+1]$$

avec  $I_n$  un ensemble d'indices qu'on n'aura pas besoin de préciser et  $A_i$  des objets de  $\Lambda$ . Insistons que ceci reste vrai même pour  $n = 0$ . Supposons le triangle (2.2) construit pour un  $k \in \{1, \dots, n_0\}$ . On va le construire au rang  $k - 1$ . On considère d'abord la composée :  $N_k \longrightarrow \Phi_k \longrightarrow \bigoplus_{i \in I_k} A_i[+1]$ . L'objet  $N_k$  étant compact, il existe un sous-ensemble fini  $F_k \subset I_k$  tel que la composée en question se factorise par l'inclusion  $\bigoplus_{i \in F_k} A_i[+1] \subset \bigoplus_{i \in I_k} A_i[+1]$ . On choisit alors un triangle distingué :

$$\bigoplus_{i \in F_k} A_i \longrightarrow \Phi_{k-1} \longrightarrow \Phi_{k-1}^{(1)} \longrightarrow (\bigoplus_{i \in F_k} A_i)[+1]$$

L'axiome de l'octaèdre appliqué au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in I_k} A_i & \longrightarrow & \Phi_{k-1} \\ \uparrow & & \parallel \\ \bigoplus_{i \in F_k} A_i & \longrightarrow & \Phi_{k-1} \end{array}$$

fournit un triangle distingué :

$$\bigoplus_{i \in I_k - F_k} A_i \longrightarrow \Phi_{k-1}^{(1)} \longrightarrow \Phi_k \longrightarrow (\bigoplus_{i \in I_k - F_k} A_i)[+1]$$

Par construction, la composée :  $N_k \longrightarrow \Phi_k \longrightarrow \bigoplus_{i \in I_k - F_k} A_i[+1]$  est maintenant nulle. On déduit de cette manière une factorisation :

$$N_k \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \Phi_{k-1}^{(1)} \longrightarrow \Phi_k$$

Formons un triangle distingué :

$$N_k \longrightarrow \Phi_{k-1}^{(1)} \longrightarrow D_{k-1}^{(1)} \longrightarrow N_k[+1]$$

L'axiome de l'octaèdre appliqué maintenant au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} N_k & \longrightarrow & \Phi_k \\ \parallel & & \uparrow \\ N_k & \longrightarrow & \Phi_{k-1}^{(1)} \end{array}$$

fournit un triangle distingué :

$$\bigoplus_{i \in I_k - F_k} A_i \longrightarrow D_{k-1}^{(1)} \longrightarrow D_k \longrightarrow (\bigoplus_{i \in I_k - F_k} A_i)[+1]$$

L'étape suivante consiste à considérer la composée :  $C \longrightarrow D_k \longrightarrow \bigoplus_{i \in I_k - F_k} A_i[+1]$ . L'objet  $C$  étant compact, on déduit qu'il existe un ensemble fini  $G_k \subset I_k$  contenant  $F_k$ , tel que la composée en question se factorise par l'inclusion  $\bigoplus_{i \in G_k - F_k} A_k \subset \bigoplus_{i \in I_k - F_k} A_i$ . On forme alors un triangle distingué :

$$\bigoplus_{i \in G_k - F_k} A_i \longrightarrow D_{k-1}^{(1)} \longrightarrow D_{k-1} \longrightarrow (\bigoplus_{i \in G_k - F_k} A_i)[+1]$$

En appliquant l'axiome de l'octaèdre au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in I_k - F_k} A_i & \longrightarrow & D_{k-1}^{(1)} \\ \uparrow & & \parallel \\ \bigoplus_{i \in G_k - F_k} A_i & \longrightarrow & D_{k-1}^{(1)} \end{array}$$

on obtient un triangle distingué :

$$\bigoplus_{i \in I_k - G_k} A_i \longrightarrow D_{k-1} \longrightarrow D_k \longrightarrow (\bigoplus_{i \in I_k - G_k} A_i)[+1]$$

De plus, par construction, la composée  $C \longrightarrow D_k \longrightarrow \bigoplus_{i \in I_k - G_k} A_i [+1]$  est nulle. Ceci fournit une factorisation :

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{---} & & \\ & & \text{---} & \text{---} & \\ & & \text{---} & & \\ C & \longrightarrow & D_{k-1} & \longrightarrow & D_k \end{array}$$

On déduit alors facilement que  $C$  est facteur direct de  $D_{k-1}$ .

Pour terminer, considérons la composée :

$$\phi_{k-1} \xrightarrow{a} \phi_{k-1}^{(1)} \xrightarrow{b} D_{k-1}^{(1)} \xrightarrow{c} D_{k-1}$$

On va montrer que l'objet  $N_{k-1}$  dans le triangle distingué :

$$N_{k-1} \longrightarrow \Phi_{k-1} \longrightarrow D_{k-1} \longrightarrow$$

est strictement  $\Lambda$ -constructible. En utilisant suffisamment de fois l'axiome de l'octaèdre on se ramène à montrer que les "noyaux" des flèches :  $a, b$  et  $c$  sont  $\Lambda$ -constructibles. Ces "noyaux" sont respectivement  $\bigoplus_{i \in F_k} A_i, N_k$  et  $\bigoplus_{i \in G_k - F_k} A_i$ . Les objets  $A_i$  sont dans  $\Lambda$  et les ensembles d'indices  $F_k$  et  $G_k$  sont finis. De plus par induction  $N_k$  est  $\Lambda$ -strictement constructible. Le corollaire est prouvé. C.Q.F.D

On continue avec un critère qui permet de décider si un ensemble d'objets engendre une catégorie triangulée avec petites sommes. La définition suivante est également classique :

**DEFINITION 2.1.25** — Soit  $\Lambda$  un ensemble d'objets d'une catégorie triangulée  $\mathcal{T}$ . On note  $\Lambda^\perp$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$  formée des objets  $B \in \text{Ob}(\mathcal{T})$  avec :

$$\text{hom}_{\mathcal{T}}(A[n], B) = 0, \quad \forall A \in \Lambda \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}$$

Un objet de  $\Lambda^\perp$  est dit orthogonal (à droite) à  $\Lambda$ .

Le lemme suivant est facile :

**LEMME 2.1.26** — La sous-catégorie  $\Lambda^\perp \subset \mathcal{T}$  est une sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs. Si  $\mathcal{T}$  admet les petits produits, alors  $\Lambda^\perp$  est stable par petits produits. Finalement si  $\mathcal{T}$  admet les petites sommes, et si les objets de  $\Lambda$  sont compacts, alors  $\Lambda^\perp$  est stable par petites sommes.

**PROPOSITION 2.1.27** — Soit  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée avec petites sommes. Soit  $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$  un ensemble d'objets compacts. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.

1. L'ensemble  $\Lambda$  engendre la catégorie avec petites sommes  $\mathcal{T}$ , i.e.,  $\ll \Lambda \gg = \mathcal{T}$ .
2. La sous-catégorie  $\Lambda^\perp$  est réduite à 0.
3. La famille de foncteurs  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(A[n], -) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$  avec  $A \in \Lambda$  et  $n \in \mathbb{Z}$  est conservative.

DEMONSTRATION Les deux dernières assertions sont clairement deux façons différentes de dire la même chose.

Il est immédiat que la première condition implique la seconde (d'ailleurs sans l'hypothèse de compacité sur les objets de  $\Lambda$ ). Prouvons l'implication réciproque.

Notons  $\mathcal{T}_0 = \ll \Lambda \gg$  et  $i : \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$  le foncteur d'inclusion. On prouvera que  $i$  est une équivalence.

Il est clair que le foncteur  $i$  commute aux petites sommes. Puisque  $\mathcal{T}_0$  est compactement engendrée, on dispose d'un adjoint à droite  $L : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_0$ . Puisque  $i$  est pleinement fidèle, le morphisme d'unité  $1 \longrightarrow L \circ i$  est inversible. Il reste donc à prouver que le morphisme de counité  $i \circ L \longrightarrow 1$  est inversible.

Soit donc  $B$  un objet de  $\mathcal{T}$  et choisissons un triangle distingué :

$$(2.3) \quad i \circ L(B) \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow i \circ L(B)[+1]$$

On montera que  $C$  est nul. Pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{T}_0$ , on a :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(i(A)[m], i \circ L(B)) = \mathrm{hom}_{\mathcal{T}_0}(A[m], L(B)) = \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(i(A)[m], B)$$

En utilisant le triangle distingué (2.3), on déduit immédiatement que  $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(i(A), C) = 0$ . En particulier  $C$  est un objet de  $\Lambda^\perp = 0$ . C.Q.F.D

Notons le résultat suivant :

**LEMME 2.1.28** — *Soit  $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées avec petites sommes. On suppose que  $f$  admet un adjoint à droite  $g$ .*

- 1- *Si le foncteur  $g$  commute aux petites sommes, alors  $f$  envoie un objet compact de  $\mathcal{T}$  sur un objet compact de  $\mathcal{T}'$ .*
- 2- *Réciproquement, supposons que  $f$  envoie un objet compact de  $\mathcal{T}$  sur un objet compact de  $\mathcal{T}'$ . Si  $\mathcal{T}$  est compactement engendrée alors  $g$  commute aux petites sommes.*

DEMONSTRATION Soit  $A$  un objet compact de  $\mathcal{T}$ . Le foncteur  $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}'}(f(A), -)$  est isomorphe à  $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, g(-)) = \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, -) \circ g$ . Le foncteur  $g$  commute aux petites sommes. De même pour  $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, -)$ . Ceci montre que  $f(A)$  est compact.

Pour la réciproque, on considère une petite famille  $(A_i)_i$  d'objets de  $\mathcal{T}'$ . On veut montrer que le morphisme canonique :

$$\oplus_i g(A_i) \longrightarrow g(\oplus_i A_i)$$

est inversible. Par la proposition 2.1.27, on se ramène à prouver que pour tout objet compact  $C$  de  $\mathcal{T}$  l'homomorphisme :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(C, \oplus_i g(A_i)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(C, g(\oplus_i A_i))$$

est inversible. Comme  $C$  est compact, on se ramène à prouver que l'homomorphisme :

$$\oplus_i \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(C, g(A_i)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(C, g(\oplus_i A_i))$$

induit par les flèches canoniques  $g(A_i) \longrightarrow g(\oplus_i A_i)$  est un isomorphisme. Mais cet homomorphisme correspond par l'adjonction  $(f, g)$  à :

$$\oplus_i \mathrm{hom}_{\mathcal{T}'}(f(C), A_i) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{T}'}(f(C), \oplus_i A_i)$$

Cet homomorphisme est effectivement inversible puisque  $f(C)$  est compact. C.Q.F.D

### 2.1.2 Dérivateurs triangulés. Application aux 2-triangles distingués

Dans notre étude des foncteurs homotopiques stables, notamment dans notre construction des foncteurs cycles proches, il est pratique d'utiliser le langage souple des dérivateurs. Les dérivateurs n'étant pas le sujet d'étude de ce travail, on adoptera un point de vu différent et moins satisfaisant que celui de [Mal01a] et [Mal01b]. Ainsi, au lieu de donner le système d'axiomes minimal que doit vérifier un dérivateur triangulé pour pouvoir y faire de l'homotopie, on a préféré inclure dans la définition des structures et propriétés supplémentaires qui découlent des axiomes initiaux. A titre d'exemple, un dérivateur triangulé sera pour nous un 2-foncteur  $\mathbb{D}$  de la catégorie des petites catégories dans la 2-catégorie des catégories triangulées. Par contre dans [Mal01b], un dérivateur triangulé est simplement un 2-foncteur  $\mathbb{D}$  à valeur dans la 2-catégorie des catégories abstraites vérifiant un certain nombre de propriétés permettant de munir les catégories  $\mathbb{D}(-)$  d'une structure triangulée canonique.

#### Définition d'un dérivateur triangulé

Dans la suite, on fixe une sous-catégorie pleine  $\mathrm{Dia}$  de la 2-catégorie stricte des petites catégories vérifiant les conditions suivantes :

- **D0** : la catégorie vide  $\emptyset$ , la catégorie ponctuelle  $\mathbf{e}$ , et la catégorie  $\mathbf{1} = \{0 \rightarrow 1\}$  sont des objets de  $\mathrm{Dia}$ ,
- **D1** : la 1-catégorie sous-jacente à  $\mathrm{Dia}$  est stable par coproduits finis et produits fibrés et passage aux sous-catégories,
- **D2** : pour tout foncteur  $u : A \longrightarrow B$  de  $\mathrm{Dia}$  et  $b \in \mathrm{Ob}(B)$ , les catégories  $A/b$  et  $b \setminus A$  sont dans  $\mathrm{Dia}$ .

**Remarque 2.1.29** — Avec les notations de **D2**, la catégorie  $A/b$  a pour objets les couples  $(a, f)$  avec  $a \in \mathrm{Ob}(A)$  et  $f : u(a) \rightarrow b \in \mathrm{Fl}(B)$ . Une flèche de  $A/b$  entre deux objets  $(a, f)$  et  $(a', f')$  est simplement une flèche  $g : a \rightarrow a' \in \mathrm{Fl}(A)$  telle que  $f = f' \circ u(g)$ . On définit  $b \setminus A$  de sorte que  $(b \setminus A)^{\mathrm{op}} = A^{\mathrm{op}}/b$ . Les deux faces suivantes :

$$(2.4) \quad \begin{array}{ccc} A/b & \xrightarrow{j_{A/b}} & A \\ p_{A/b} \downarrow & \alpha \swarrow & \downarrow u \\ \mathbf{e} & \xrightarrow{b} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} b \setminus A & \xrightarrow{j_{b \setminus A}} & A \\ p_{b \setminus A} \downarrow & \beta \nearrow & \downarrow u \\ \mathbf{e} & \xrightarrow{b} & B \end{array}$$

jouent un rôle important dans la théorie des dérivateurs triangulés.

**Remarque 2.1.30** — Soient  $A$  une catégorie et  $a$  un objet de  $A$ . On notera souvent dans la suite par  $a$  l'unique foncteur  $\mathbf{e} \longrightarrow A$  qui envoie l'objet de  $\mathbf{e}$  sur  $a$ . De même si  $C$  est une catégorie, on notera  $p_C$  l'unique foncteur  $C \longrightarrow \mathbf{e}$ . Notons que le foncteur  $p_C$  admet un adjoint à droite si et seulement si la catégorie  $C$  admet un objet final. Dualement, le foncteur  $p_C$  admet un adjoint à gauche si et seulement si la catégorie  $C$  admet un objet initial.

On appellera  $\mathbf{Dia}$  la 2-catégorie des diagrammes. Un dérivateur triangulé est un 2-foncteur de la 2-catégorie  $\mathbf{Dia}$  dans celles des catégories. Contrairement à [Gro90] et [Mal01a], on ne supposera pas que ce 2-foncteur est strict. Pour la commodité du lecteur, on rappellera la notion de 2-foncteurs stricts et pas forcément stricts.

Dans la suite, une 2-catégorie sera implicitement supposée stricte.

**DEFINITION 2.1.31** — 1- Soient  $\mathfrak{D}$  et  $\mathfrak{D}'$  deux 2-catégories. Un 2-foncteur  $F : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}'$ , strict, 1-covariant et 2-covariant est l'ensemble des données suivantes :

- une fonction  $F$  qui à un objet  $A$  de  $\mathfrak{D}$  associe un objet  $F(A)$  de  $\mathfrak{D}'$ ,
  - pour tout couple d'objet  $A$  et  $B$  de  $\mathfrak{D}$  un foncteur  $F_{A,B} : \text{hom}_{\mathfrak{D}}(A, B) \longrightarrow \text{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(A), F(B))$  covariant, envoyant les 1-morphismes identités sur des 1-morphismes identités (lorsque  $A = B$ ),
- tels que pour un triplet d'objets  $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathfrak{D})^3$ , le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_{\mathfrak{D}}(B, C) \times \text{hom}_{\mathfrak{D}}(A, B) & \xrightarrow{F_{B,C} \times F_{A,B}} & \text{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(B), F(C)) \times \text{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(A), F(B)) \\ \circ \downarrow & & \downarrow \circ \\ \text{hom}_{\mathfrak{D}}(A, C) & \xrightarrow{F_{A,C}} & \text{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(A), F(C)) \end{array}$$

soit commutatif (au sens strict).

2- Les autres types de 1-variance et de 2-variance s'obtiennent de la manière habituelle en remplaçant  $\mathfrak{D}'$  par  $(\mathfrak{D}')^{1\text{-op}}$ ,  $(\mathfrak{D}')^{2\text{-op}}$  ou  $(\mathfrak{D}')^{12\text{-op}}$ .

Pour obtenir la définition des 2-foncteurs non nécessairement strictes, on dstrictifie la définition précédente :

**DEFINITION 2.1.32** — 1- Soient  $\mathfrak{D}$  et  $\mathfrak{D}'$  deux 2-catégories. Un 2-foncteur  $F : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}'$ , non nécessairement strict, 1-covariant et 2-covariant est l'ensemble des données suivantes :

- une fonction  $F$  qui à un objet  $A$  de  $\mathfrak{D}$  associe un objet  $F(A)$  de  $\mathfrak{D}'$ ,
- pour tout couple d'objet  $A$  et  $B$  de  $\mathfrak{D}$  un foncteur  $F_{A,B} : \text{hom}_{\mathfrak{D}}(A, B) \longrightarrow \text{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(A), F(B))$  covariant, envoyant les 1-morphismes identités sur des 1-morphismes identités (lorsque  $A = B$ ),
- pour tout triplet d'objets  $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathfrak{D})^3$ , une transformation naturelle inversible :

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_{\mathfrak{D}}(B, C) \times \text{hom}_{\mathfrak{D}}(A, B) & \xrightarrow{F_{B,C} \times F_{A,B}} & \text{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(B), F(C)) \times \text{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(A), F(B)) \\ \circ \downarrow & \xrightarrow{\sim} & \downarrow \circ \\ \text{hom}_{\mathfrak{D}}(A, C) & \xrightarrow{F_{A,C}} & \text{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(A), F(C)) \end{array}$$

égale au 2-morphisme identité lorsqu'elle est appliquée sur les couples de 1-morphismes de la forme  $(\text{id}, -)$  (avec  $B = C$ ) ou  $(-, \text{id})$  (avec  $A = B$ ).

Ces données doivent vérifier la condition de cohérence suivante. Étant donnée une suite de 1-morphismes composables de  $\mathfrak{D}$  :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

le carré de 2-morphismes de  $\mathfrak{D}'$  est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(h \circ g \circ f) & \xrightarrow{c(g \circ f, h)} & F(h) \circ F(g \circ f) \\ c(f, h \circ g) \downarrow & & \downarrow c(f, g) \\ F(h \circ g) \circ F(f) & \xrightarrow{c(g, h)} & F(h) \circ F(g) \circ F(f) \end{array}$$

2- Les autres types de 1-variance et de 2-variance s'obtiennent de la manière habituelle en remplaçant  $\mathfrak{D}'$  par  $(\mathfrak{D}')^{1\text{-opp}}$ ,  $(\mathfrak{D}')^{2\text{-opp}}$  ou  $(\mathfrak{D}')^{12\text{-opp}}$ .

Notons le lemme simple ci-dessous dont la vérification est laissée aux lecteurs :

**LEMME 2.1.33** — Soit  $f : A \longrightarrow B$  un 1-morphisme de  $\mathfrak{D}$  admettant un adjoint à droite  $g : B \longrightarrow A$ . Alors  $F(f)$  admet pour adjoint à droite  $F(g)$  et les 2-morphismes d'unité et de counité sont donnés par les composées :

$$\text{id} \equiv F(\text{id}) \longrightarrow F(gf) \xrightarrow{\sim} F(f) \circ F(g) \quad \text{et} \quad F(g) \circ F(f) \xrightarrow{\sim} F(gf) \longrightarrow F(\text{id}) \equiv \text{id}$$

On peut maintenant donner la définition adoptée dans cette thèse de la notion de dérivateurs triangulés.

**DEFINITION 2.1.34** — Un pré-dérivateur triangulé  $\mathbb{D}$  de domaine  $\text{Dia}$  est un 2-foncteur (non nécessairement strict) 1-contravariant et 2-contravariant :

$$\mathbb{D} : \text{Dia} \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

S'il n'y a pas de confusion possible, on notera pour un foncteur  $u$  (resp. une transformation naturelle  $\alpha$ ) de  $\text{Dia}$ ,  $u^*$  le foncteur  $\mathbb{D}(u)$  (resp.  $\alpha^*$  la transformation naturelle  $\alpha^*$ ).

Le pré-dérivateur  $\mathbb{D}$  est un dérivateur s'il vérifie la liste d'axiomes suivante.

1.  $\mathbb{D}(\emptyset) = 0$  la catégorie nulle.
2. Soient  $I$  et  $J$  deux catégories de  $\text{Dia}$ . Considérons l'accouplement évident :

$$\mathbb{D}(I \times J) \times I^{\text{op}} \longrightarrow \mathbb{D}(J)$$

qui à un couple  $(X, i) \in \text{Ob}(\mathbb{D}(I \times J)) \times \text{Ob}(I^{\text{op}})$  associe l'objet  $(i \times \text{id}_J)^* X$  (en notant comme d'habitude  $i : \mathbf{e} \longrightarrow I$  le foncteur qui pointe l'objet  $i$ ). Par adjonction, on déduit un foncteur :

$$\mathbb{D}(I \times J) \longrightarrow \text{HOM}(I^{\text{op}}, \mathbb{D}(J))$$

Il est appelé le foncteur  $I$ -squelette. L'image d'un objet  $X$  de  $\mathbb{D}(I \times J)$  par ce foncteur est appelé le  $I$ -squelette de  $X$ .

Le foncteur  $I$ -squelette vérifie les trois propriétés :

- il est conservatif pour toutes les catégories  $I$  et  $J$  de  $\text{Dia}$ ,
- il est plein et essentiellement surjectif lorsque  $I = \mathbf{1}$ ,
- il est une équivalence lorsque  $I$  est discrète.

3. Pour tout foncteur  $u : A \longrightarrow B$  de  $\text{Dia}$ , le foncteur  $u^* : \mathbb{D}(B) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$  admet un adjoint à droite  $u_*$  et un adjoint à gauche  $u_{\#}$ ,
4. Soient  $u : A \longrightarrow B$  un foncteur de  $\text{Dia}$  et  $b$  un objet de  $B$ . Les faces (2.4) induisent par 2-fonctorialité les deux faces de  $\mathfrak{TR}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(A/b) \xleftarrow{j_{A/b}^*} \mathbb{D}(A) & & \mathbb{D}(b \setminus A) \xleftarrow{j_{b \setminus A}^*} \mathbb{D}(A) \\ \uparrow p_{A/b}^* & \alpha^* \swarrow & \uparrow p_{b \setminus A}^* \\ \mathbb{D}(\mathbf{e}) \xleftarrow{b^*} \mathbb{D}(B) & & \mathbb{D}(\mathbf{e}) \xleftarrow{b^*} \mathbb{D}(B) \end{array}$$

Les deux faces obtenues par adjonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(A/b) \xleftarrow{j_{A/b}^*} \mathbb{D}(A) & & \mathbb{D}(b \setminus A) \xleftarrow{j_{b \setminus A}^*} \mathbb{D}(A) \\ \downarrow (p_{A/b})_* & Ex_*^* \swarrow & \downarrow (p_{b \setminus A})_{\#} \\ \mathbb{D}(\mathbf{e}) \xleftarrow{b^*} \mathbb{D}(B) & & \mathbb{D}(\mathbf{e}) \xleftarrow{b^*} \mathbb{D}(B) \end{array}$$

sont inversibles.

5. Notons  $\square$  la catégorie  $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$  :

$$\begin{array}{ccc} (1, 1) & \longleftarrow & (0, 1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (1, 0) & \longleftarrow & (0, 0) \end{array}$$

On appelle  $i_\Gamma : \Gamma \longrightarrow \square$  la sous-catégorie pleine ayant pour objets  $\text{Ob}(\square) - \{(0, 0)\}$ . De même on appelle  $i_\sqcup : \sqcup \longrightarrow \square$  la sous-catégorie pleine ayant pour objets  $\text{Ob}(\square) - \{(1, 1)\}$ . Soit  $I$  une catégorie de  $\text{Dia}$ . Un objet  $X$  de  $\mathbb{D}(\square \times I)$  est dit cartésien (resp. cocartésien) si le morphisme évident  $X \longrightarrow (i_\sqcup)_*(i_\sqcup)^*X$  (resp.  $(i_\Gamma)_\#(i_\Gamma)^*X \longrightarrow X$ ) est un isomorphisme. Dans un dérivateur triangulé  $\mathbb{D}$ , un objet de  $\mathbb{D}(\square \times I)$  est cartésien si et seulement si il est cocartésien.

6. Gardons les notations de l'axiome précédent. On définit un foncteur  $\Sigma : \mathbb{D}(I) \longrightarrow \mathbb{D}(I)$  par la formule :

$$\Sigma = (0, 0)^*(i_\Gamma)_\#(i_\Gamma)^*(1, 1)_*$$

Il existe un isomorphisme de foncteurs  $\Sigma \longrightarrow [+1]$  entre  $\Sigma$  et l'autoéquivalence de suspension de la catégorie  $\mathbb{D}(I)$ . De plus, soit  $X$  un objet cartésien et cocartésien de  $\mathbb{D}(\square \times I)$ . On définit un morphisme  $(0, 0)^*X \longrightarrow \Sigma(1, 1)^*X$  par la composée suivante :

$$(0, 0)^*X \xleftarrow{\sim} (0, 0)^*(i_\Gamma)_\#(i_\Gamma)^*X \longrightarrow (0, 0)^*(i_\Gamma)_\#(i_\Gamma)^*(1, 1)_*(1, 1)^*X = \Sigma(1, 1)^*X \simeq (1, 1)^*X[+1]$$

Supposons que l'objet  $(1, 0)^*A$  est nul. Alors le triangle :

$$(1, 1)^*X \xrightarrow{(1)} (0, 1)^*X \xrightarrow{(2)} (0, 0)^*X \longrightarrow (1, 1)^*X[+1]$$

avec (1) et (2) les deux flèches canoniques est un triangle distingué.

**Remarque 2.1.35** — Comme annoncé au début du paragraphe, la définition 2.1.34 contient des redondances. Habituellement, les structures triangulés sur les catégories  $\mathbb{D}(I)$  sont construites à partir des carrés cartésiens et cocartésiens dont l'abondance est assurée par l'axiome 5. Ainsi, notre dernier axiome peut être considéré comme la définition de la classe des triangles distingués. Bien entendu, si on fait ce choix, des vérifications doivent être effectuées.

On aurait pu également énoncer l'axiome 5 avec  $I$  la catégorie ponctuelle. En effet, il est facile de déduire le cas général en utilisant la conservation des foncteurs squelettes.

**Remarque 2.1.36** — Soit  $\mathbb{D}$  un pré-dérivateur triangulé de domaine  $\text{Dia}$ . Notons  $\text{Dia}'$  la sous-2-catégorie pleine de  $\mathfrak{Cat}$  dont les objets sont les catégories opposées des catégories dans  $\text{Dia}$ . On définit un pré-dérivateur  $\mathbb{D}^{\text{op}}$  de domaine  $\text{Dia}'$  par l'association  $\mathbb{D}^{\text{op}}(A) = \mathbb{D}(A^{\text{op}})^{\text{op}}$ . On dit que  $\mathbb{D}^{\text{op}}$  est le pré-dérivateur opposé à  $\mathbb{D}$ . On vérifie facilement que lorsque  $\mathbb{D}$  est un dérivateur triangulé, il en est de même de  $\mathbb{D}^{\text{op}}$ .

**Remarque 2.1.37** — Soit  $\mathbb{D}$  est un pré-dérivateur triangulé de domaine  $\text{Dia}$ . Pour des catégories  $I$  et  $J$  de  $\text{Dia}$ , on pose  $\mathbb{D}_I(J) = \mathbb{D}(I \times J)$ . Il est facile de voir que cette association s'étend d'une manière canonique en un pré-dérivateur triangulé  $\mathbb{D}_I : \text{Dia} \longrightarrow \mathfrak{TR}$ . C'est un bon exercice de vérifier que lorsque  $\mathbb{D}$  est un dérivateur triangulé, alors il en est de même de  $\mathbb{D}_I$ . L'unique difficulté est dans la vérification de l'axiome 4. Pour cela on peut se servir de la conservation du foncteur squelette et de la formule  $(I \times A/b)/i = (I \times A)/(i \times b)$  pour  $i \in \text{Ob}(I)$ .

**Remarque 2.1.38** — Le dernier axiome paraît plutôt compliqué à première vue. Nous allons essayer de montrer qu'il est au contraire simple et naturel. Expliquons d'abord la définition du foncteur  $\Sigma$ . Le point est que dans une catégorie triangulée, le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E[+1] \end{array}$$

est cartésien et cocartésien ou encore de Mayer-Vietoris. D'où l'idée de définir le foncteur de suspension comme étant la colimite du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \\ & & 0 \end{array}$$

La difficulté est de trouver pour chaque  $E \in \text{Ob}(\mathbb{D}(\mathfrak{e}))$  un objet de  $\mathbb{D}(\Gamma)$  d'une manière fonctorielle en  $E$  et ayant pour squelette le diagramme ci-dessus. Une formule qui marche bien est  $(i_\Gamma)^*(1, 1)_*E$ . En effet, pour un objet  $a$  de



$\underline{1} \times \underline{1}$  différent de  $(1, 1)$ , la catégorie  $\mathbf{e}/a$  qui apparaît dans la face :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}/a & \xrightarrow{j_{\mathbf{e}/a}} & \mathbf{e} \\ p_{\mathbf{e}/a} \downarrow & \alpha \swarrow & \downarrow (1, 1) \\ \mathbf{e} & \xrightarrow{a} & \underline{1}^2 \end{array}$$

est vide. Ainsi, par l'axiome 4, on a  $a^*(1, 1)_*E = 0$ . On démontre de même que  $(1, 1)^*(1, 1)_*E = E$ .

La seconde partie de l'axiome 6, formalise l'idée qu'un carré de Mayer-Vietoris donne un triangle distingué. Mieux, si  $X$  est un objet cartésien et cocartésien de  $\mathbb{D}(\square)$  il doit déterminer un triangle distingué fonctoriel. La difficulté est de définir ce triangle. En regardant le squelette de  $X$  :

$$\begin{array}{ccc} X_{11} & \xrightarrow{b} & X_{01} \\ a \downarrow & & \downarrow c \\ X_{10} & \xrightarrow{d} & X_{00} \end{array}$$

on devine que le triangle commencera par :

$$X_{11} \xrightarrow{(a, -b)} X_{10} \oplus X_{01} \xrightarrow{c+d} X_{00}$$

Pour deviner/trouver la flèche connectante, on utilise la functorialité. En effet si on considère le morphisme de  $(i_r)^*X$  vers l'objet de  $\mathbb{D}(\Gamma)$  ayant pour squelette :

$$\begin{array}{ccc} X_{11} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

et en complétant en un carré cocartésien on tombe sur un morphisme de  $X$  vers un objet  $Y$  ayant pour squelette :

$$\begin{array}{ccc} X_{11} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma X_{11} \end{array}$$

En passant aux triangles distingués hypothétiques, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X_{11} & \xrightarrow{(a, -b)} & X_{10} \oplus X_{01} & \xrightarrow{c+d} & X_{00} & \xrightarrow{?} & \Sigma X_{11} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{11} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma X_{11} & \longlongequal{\quad} & \Sigma X_{11} \end{array}$$

Ceci nous force à prendre pour morphisme connectant celui induit par  $X \longrightarrow Y$  après application du foncteur  $(0, 0)^*$ . C'est exactement la définition de la flèche connectante de l'axiome 6. Finalement, pour éviter les problèmes de signes, on considère uniquement les carrés cartésiens et cocartésiens  $X$  tels que  $(1, 0)^*X = 0$ .

Fixons un dérivateur triangulé  $\mathbb{D}$  de domaine  $\text{Dia}$ . Voici quelques conséquences faciles de la 2-functorialité :

**LEMME 2.1.39** — *Supposons donné un couple  $(u, v)$  de foncteurs adjoints :*

$$u : A \longrightarrow B \quad \text{et} \quad v : B \longrightarrow A$$

entre catégories de  $\text{Dia}$ . Les composées suivantes :

$$(p_B)_\# v^* \longrightarrow (p_A)_\# v_\# v^* \longrightarrow (p_A)_\# \quad \text{et} \quad (p_B)_* \longrightarrow (p_B)_* u_* u^* \longrightarrow (p_A)_* u^*$$

sont inversibles.

DEMONSTRATION Par le lemme 2.1.33, on a un couple de foncteurs adjoints  $(u^*, v^*)$ . Il vient que  $u^*$  est isomorphe à  $v_{\#}$  et que  $v^*$  est isomorphe à  $u_*$ . On traite uniquement le premier morphisme. Le second en découle par un argument de dualité.

La composée :  $(p_A)_{\#}u^* \simeq (p_A)_{\#}v_{\#} \xrightarrow{\sim} (p_A \circ v)_{\#} = (p_B)_{\#}$  définit clairement un isomorphisme de  $(p_A)_{\#}u^*$  vers  $(p_B)_{\#}$ . Il s'agit de montrer que ce morphisme est égal au morphisme de l'énoncé :

$$(p_A)_{\#}u^* \longrightarrow (p_B)_{\#}u_{\#}u^* \longrightarrow (p_B)_{\#}$$

On se ramène aisément à montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (p_B \circ u)_{\#}v_{\#} = (p_A)_{\#}v_{\#} & \longrightarrow & (p_A \circ v)_{\#} = (p_B)_{\#} \\ \downarrow & \nearrow & \\ (p_B)_{\#}u_{\#}v_{\#} & & \end{array}$$

Ceci découle immédiatement par 2-fonctorialité. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.1.40** — 1- Soit  $A$  une catégorie de  $\mathbf{Dia}$  admettant un objet initial  $o$ . Les 2-morphismes :

$$o^* = (p_A)_{\#}o_{\#}o^* \longrightarrow (p_A)_{\#} \quad \text{et} \quad p_A^* \longrightarrow p_A^*o^*o_{\#} = o_{\#}$$

sont inversibles.

2- Dualement si  $A$  admet un objet final  $o$ , les 2-morphismes :

$$(p_A)_* \longrightarrow (p_A)_*o_*o^* = o^* \quad \text{et} \quad o_* = o_*o^*p_A^* \longrightarrow p_A^*$$

sont inversibles.

Dans le même esprit on a :

**PROPOSITION 2.1.41** — Soit  $i : I \subset J$  une inclusion pleinement fidèle dans  $\mathbf{Dia}$ . On suppose que le foncteur  $i$  admet un adjoint à droite ou à gauche  $p : J \longrightarrow I$ . Alors le foncteur  $p^*$  est pleinement fidèle. En particulier les deux 2-morphismes :

$$\text{id} \longrightarrow p_*p^* \quad \text{et} \quad p_{\#}p^* \longrightarrow \text{id}$$

sont inversibles.

DEMONSTRATION On traitera uniquement le cas où  $p$  est un adjoint à droite de  $i$ . Comme  $i$  est pleinement fidèle, le 2-morphisme  $\text{id} \longrightarrow p \circ i$  est inversible. Il vient par le lemme 2.1.33 que  $p^*$  est adjoint à gauche de  $i^*$  est que le morphisme de counité est inversible. On en déduit que  $p^*$  est pleinement fidèle. C.Q.F.D

Il est pratique d'introduire la définition suivante :

**DEFINITION 2.1.42** — On note  $R_{\#}$  et  $R_*$  les foncteurs de la 1-catégorie sous-jacente à  $\mathbf{Dia}$  dans celle des endofoncteurs triangulés de  $\mathbb{D}(\mathbf{e})$  définis par les formules :

$$A \rightsquigarrow R_{\#}(A) = (p_A)_{\#}(p_A)^* \quad \text{et} \quad (u : A \rightarrow B) \rightsquigarrow [R_{\#}(u) = (p_A)_{\#}(p_A)^* \simeq (p_B)_{\#}u_{\#}u^*(p_B)^* \mapsto (p_B)_{\#}(p_B)^*]$$

$$A \rightsquigarrow R_*(A) = (p_A)_*(p_A)^* \quad \text{et} \quad (u : A \rightarrow B) \rightsquigarrow [R_*(u) = (p_B)_*(p_B)^* \mapsto (p_B)_*u_*u^*(p_B)^* \simeq (p_A)_*(p_A)^*]$$

Remarquons que  $R_{\#}$  est covariant alors que  $R_*$  est contravariant. Ces foncteurs seront respectivement appelés la réalisation homologique et cohomologique. Remarquons également que le foncteur  $R_{\#}$  (resp.  $R_*$ ) prend ses valeurs dans la catégorie des endofoncteurs de  $\mathbb{D}(\mathbf{e})$  munis d'une transformation naturelle vers (resp. depuis) le foncteur identité.

**LEMME 2.1.43** — Soient  $u_0, u_1 : A \longrightarrow B$  deux foncteurs de  $\mathbf{Dia}$ . On suppose qu'il existe une transformation naturelle  $t : u_0 \longrightarrow u_1$ . Alors, les deux transformations naturelles :

$$R_{\#}(u_0), R_{\#}(u_1) : R_{\#}(A) \longrightarrow R_{\#}(B) \quad (\text{resp. } R_*(u_0), R_*(u_1) : R_*(B) \longrightarrow R_*(A))$$

sont égales.

DEMONSTRATION On traitera uniquement le cas non respé. Le cas respé s'en déduit par dualité. La transformation naturelle  $t$  équivaut à la donnée d'un foncteur  $u : A \times \underline{1} \longrightarrow B$  tel que les composées :

$$A \xrightarrow{\text{id}_A \times 0} A \times \underline{1} \longrightarrow B \quad \text{et} \quad A \xrightarrow{\text{id}_A \times 1} A \times \underline{1} \longrightarrow B$$

soient respectivement  $u_0$  et  $u_1$ . Notons  $p = \text{id}_A \times p_{\underline{1}} : A \times \underline{1} \longrightarrow A$  la rétraction commune à  $\text{id}_A \times 0$  et  $\text{id}_A \times 1$ . Il suffit clairement de prouver que le 2-morphisme :

$$R_{\#}(p) : R_{\#}(A \times \underline{1}) \longrightarrow R_{\#}(A)$$

est inversible. En revenant à la définition, on se ramène à montrer que le morphisme de counité :

$$p_{\#}p^* \longrightarrow \text{id}$$

est inversible. Par l'axiome 2 de la définition 2.1.34, il suffit de prouver que ce morphisme devient inversible après application de  $a^*$  pour tout objet  $a$  de  $A$ . En utilisant l'axiome 4 de la définition 2.1.34, on sait que  $a^*p_{\#} \simeq (p_{a \setminus A \times \underline{1}})_{\#}j_a^*$ . Mais la catégorie  $a \setminus A \times \underline{1}$  admet un objet initial à savoir  $((a, 0), \text{id}_a)$ . Il vient par le corollaire 2.1.40 que  $(p_{a \setminus A \times \underline{1}})_{\#} \simeq ((a, 0), \text{id}_a)^*$ . Ceci montre que  $a^*p_{\#}p^* \simeq (p \circ j_a \circ ((a, 0), \text{id}_a))^* \simeq a^*$ . On laisse aux lecteurs les soins de vérifier que cet isomorphisme est bien celui induit par la counité de  $(p_{\#}, p^*)$ . C.Q.F.D

### Morphismes de dérivateurs triangulés

L'étape suivante consiste à définir les 1-morphismes et les 2-morphismes de dérivateurs triangulés. Pour cela on considère d'abord les 1-morphismes et 2-morphismes entre les 2-foncteurs généraux :

**DEFINITION 2.1.44** — Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux 2-catégories. On suppose donnés deux 2-foncteurs  $F_1, F_2 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ . Un morphisme de 2-foncteurs  $m : F_1 \longrightarrow F_2$  est l'ensemble des données suivantes :

1. pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{D}$ , d'un 1-morphisme  $m_A : F_1(A) \longrightarrow F_2(A)$ ,
2. pour tout 1-morphisme  $a : A \longrightarrow B$  de  $\mathcal{D}$  d'un 2-isomorphisme  $\alpha_m :$

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{m_A} & F_2(A) \\ F_1(a) \downarrow & \swarrow \alpha_m & \downarrow F_2(a) \\ F_1(B) & \xrightarrow{m_B} & F_2(B) \end{array}$$

Ces données doivent vérifier les conditions suivantes.

– Pour un 2-morphisme :

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ & \curvearrowright & \\ A & & B \\ & \Downarrow t & \\ & \curvearrowleft & \\ & a' & \end{array}$$

de  $\mathcal{D}$ , le carré de 2-morphismes de  $\mathcal{D}'$  :

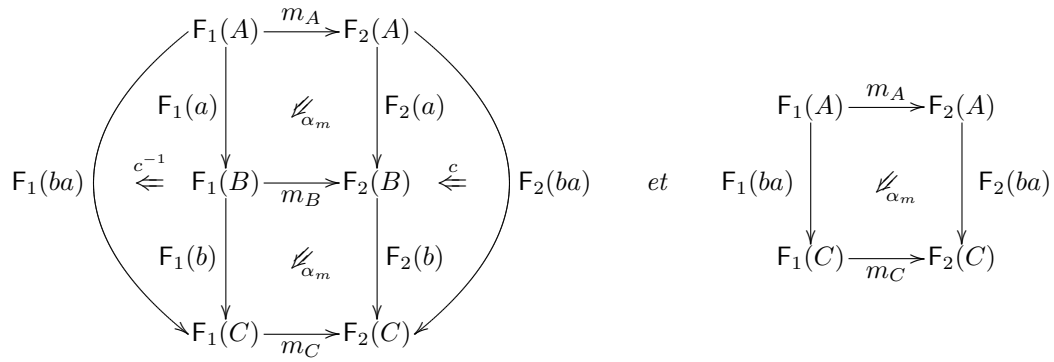
$$\begin{array}{ccc} F_2(a) \circ m_A & \longrightarrow & m_B \circ F_1(a) \\ F_2(t) \downarrow & & \downarrow F_1(t) \\ F_2(a') \circ m_A & \longrightarrow & m_B \circ F_1(a') \end{array}$$

est commutatif.

– Pour une suite composable de 1-morphismes de  $\mathcal{D}$  :

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$$

les deux diagrammes planaires :



ont la même composée.

La définition de 2-morphismes entre 1-morphismes de 2-foncteurs est relativement simple :

**DEFINITION 2.1.45** — Supposons donnés deux 2-foncteurs  $F_1$  et  $F_2$  entre deux 2-catégories  $\mathfrak{D}$  et  $\mathfrak{D}'$  comme dans la définition 2.1.44. On suppose également donnés deux 1-morphismes  $m, m' : F_1 \longrightarrow F_2$ . Un 2-morphisme  $\theta : m \longrightarrow m'$  est la donnée pour tout objet  $A$  de  $\mathfrak{D}$  d'un 2-morphisme  $\theta_A : m_A \longrightarrow m'_A$  tel que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} F_2(a) \circ m_A & \longrightarrow & m_B \circ F_1(a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_2(a) \circ m'_A & \longrightarrow & m'_B \circ F_1(a) \end{array}$$

soit commutatif.

Il existe plusieurs définitions non équivalentes de morphismes de dérivateurs. La définition de 1-morphismes et de 2-morphismes de dérivateurs triangulés qu'on adoptera est la plus faible possible :

**DEFINITION 2.1.46** — 1- Soient  $\mathbb{D}_1$  et  $\mathbb{D}_2$  deux dérivateurs triangulés de domaine  $\text{Dia}$ . Un 1-morphisme de dérivateurs est simplement un 1-morphisme entre les 2-foncteurs (1 et 2-contravariants) sous-jacents.

2- De même, un 2-morphisme entre deux 1-morphismes de dérivateurs ayant les mêmes source et but, est simplement un 2-morphisme entre les 1-morphismes des 2-foncteurs sous-jacents à ces dérivateurs.

3- Ces notions de 1 et 2-morphismes, définissent une 2-catégorie stricte, qu'on appellera la 2-catégorie des dérivateurs triangulés et qu'on notera  $\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ .

Soit  $m : \mathbb{D}_1 \longrightarrow \mathbb{D}_2$  un 1-morphisme de dérivateurs de domaine  $\text{Dia}$ . Supposons donné un foncteur  $u : A \longrightarrow B$  entre catégories de  $\text{Dia}$ . A partir de la face :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_1(A) & \xrightarrow{m_A} & \mathbb{D}_2(A) \\ u^* \downarrow & \searrow \alpha_m & \downarrow u^* \\ \mathbb{D}_1(B) & \xrightarrow{m_B} & \mathbb{D}_2(B) \end{array}$$

ainsi que son inverse, on déduit en utilisant les adjonctions  $(u^*, u_*)$  et  $(u_\#, u^*)$  deux faces carrées :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_1(A) & \xrightarrow{m_A} & \mathbb{D}_2(A) \\ u_* \uparrow & \searrow Ex_*^* & \uparrow u_* \\ \mathbb{D}_1(B) & \xrightarrow{m_B} & \mathbb{D}_2(B) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{D}_1(A) & \xrightarrow{m_A} & \mathbb{D}_2(A) \\ u_\# \uparrow & \searrow Ex_\#^* & \uparrow u_\# \\ \mathbb{D}_1(B) & \xrightarrow{m_B} & \mathbb{D}_2(B) \end{array}$$

On fait la définition suivante :

**DEFINITION 2.1.47** — Soit  $m : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$  un 1-morphisme de dérivateurs triangulés. On dit que  $m$  commute aux  $\text{Dia}$ -limites homotopiques (resp. aux  $\text{Dia}$ -colimites homotopiques) si les faces  $Ex_*^*$  (resp.  $Ex_\#^*$ ) ci-dessus sont inversibles pour tout foncteur  $u$  de  $\text{Dia}$ .

La proposition suivante décrit les adjonctions entre 1-morphismes de  $\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{R}$  :

**PROPOSITION 2.1.48** — 1- Soit  $m : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$  un 1-morphisme de dérivateurs triangulés. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- Le 1-morphisme  $m$  admet un adjoint à droite  $n : \mathbb{D}' \longrightarrow \mathbb{D}$ .
- Le 1-morphisme  $m$  commute aux Dia-colimites homotopiques, et pour toute catégorie  $A$  de Dia, le foncteur  $m_A : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}'(A)$  admet un adjoint à droite.

Si en plus la 2-catégorie Dia contient toutes les petites catégories discrètes et que les catégories triangulées  $\mathbb{D}(A)$  sont compactement engendrées, on peut simplifier la seconde condition en la suivante :

- Le 1-morphisme  $m$  commute aux Dia-colimites homotopiques.
- 2- Dualement, les conditions suivantes sont équivalentes.
- Le 1-morphisme  $m$  admet un adjoint à gauche  $n : \mathbb{D}' \longrightarrow \mathbb{D}$ .
- Le 1-morphisme  $m$  commute aux Dia-limites homotopiques, et pour toute catégorie  $A$  de Dia, le foncteur  $m_A : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}'(A)$  admet un adjoint à gauche.

DEMONSTRATION On prouvera uniquement la première partie du lemme. Supposons que  $m : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$  admet un adjoint à droite  $n$ . En examinant la définition des 2-morphismes de  $\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ , il est facile de voir que pour toute catégorie  $A$  de Dia, le foncteur  $n_A$  est un adjoint à droite de  $m_A$ . De plus, pour un foncteur  $u : A \longrightarrow B$  de Dia, les deux faces carrées :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{D}_1(A) & \xrightarrow{n_A} & \mathbb{D}_2(A) \\
 u^* \downarrow & \swarrow \alpha_n & \downarrow u^* \\
 \mathbb{D}_1(B) & \xrightarrow{n_B} & \mathbb{D}_2(B)
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{D}_1(A) & \xrightarrow{m_A} & \mathbb{D}_2(A) \\
 u_{\#} \uparrow & \swarrow Ex_{\#}^* & \uparrow u_{\#} \\
 \mathbb{D}_1(B) & \xrightarrow{m_B} & \mathbb{D}_2(B)
 \end{array}$$

sont échangées via les adjonctions  $(u_{\#} \circ m_B, n_B \circ u^*)$  et  $(m_A \circ u_{\#}, u^* \circ n_A)$ . Étant donné que la première face est inversible, nous déduisons que  $m$  commute aux Dia-colimites. D'où la première implication.

L'implication réciproque est tout aussi facile. Finalement la simplification de la seconde assertion découle immédiatement du lemme 2.1.22 et du fait que les colimites homotopiques de familles discrètes calculées dans  $\mathbb{D}$  coïncident avec les sommes directes. C.Q.F.D

### Foncteurs $\mathbb{D}$ -filtrants. Homotopies simpliciales

Avec les notations de la définition 2.1.42, on a le résultat important suivant :

**PROPOSITION 2.1.49** — On suppose donné un dérivateur triangulé de domaine Dia. Soit  $f : J \longrightarrow I$  un foncteur de Dia. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Le 2-morphisme  $(p_J)_{\#} f^* \simeq (p_I)_{\#} f_{\#} f^* \longrightarrow (p_I)_{\#}$  est inversible.
2. Le 2-morphisme  $(p_I)^* \longrightarrow f_* f^*(p_I)^* \simeq f_*(p_J)^*$  est inversible.
3. Pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$  le 2-morphisme évident  $R_{\#}(J/i) \longrightarrow \text{id}$  est inversible.
4. Pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$  le 2-morphisme évident  $\text{id} \longrightarrow R_*(J/i)$  est inversible.

DEMONSTRATION Les deux premières conditions sont équivalentes puisqu'on passe de l'une à l'autre en utilisant les adjonctions :

$$((p_J)_{\#} f^*, f_*, (p_J)^*) \quad \text{et} \quad ((p_I)_{\#}, (p_I)^*)$$

De même, les deux dernières conditions sont équivalentes puisque  $R_{\#}(J/i)$  est l'adjoint à gauche de  $R_*(J/i)$ . Ainsi, pour montrer la proposition, il suffit de montrer l'équivalence entre la seconde et dernière condition.

Par l'axiome 2 de la définition 2.1.34, la seconde condition équivaut à dire que pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$  le 2-morphisme :

$$i^*(p_I)^* \longrightarrow i^* f_* f^*(p_I)^* \longrightarrow i^* f_*(p_J)^*$$

est inversible. Considérons la face carrée :

$$\begin{array}{ccc}
 J/i & \xrightarrow{j_i} & J \\
 p_{J/i} \downarrow & \swarrow \alpha & \downarrow f \\
 \mathbf{e} & \xrightarrow{i} & I
 \end{array}$$

Par l'axiome 4 de la définition 2.1.34, on sait que la face :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{D}(J/i) & \xleftarrow{j_i^*} & \mathbb{D}(J) \\
 \downarrow (p_{J/i})_* & \swarrow Ex_*^* & \downarrow f_* \\
 \mathbb{D}(\mathbf{e}) & \xleftarrow{i^*} & \mathbb{D}(I)
 \end{array}$$

est inversible. Il vient que la seconde assertion équivaut à l'inversibilité pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$  de la composée suivante :

$$\text{id} \simeq i^*(p_I)^* \longrightarrow i^* f_* f^*(p_I)^* \longrightarrow i^* f_*(p_J)^* \xrightarrow{Ex_*^*} (p_{J/i})_* j_i^*(p_J)^* \simeq (p_{J/i})_*(p_{J/i})^*$$

Il n'est pas difficile de voir que cette composée est simplement le morphisme d'unité de l'adjonction  $((p_{J/i})^*, (p_{J/i})_*)$ . En d'autres termes, c'est exactement le 2-morphisme  $\text{id} \longrightarrow R_*(J/i)$ . C.Q.F.D

**DEFINITION 2.1.50** — Soit  $f : J \longrightarrow I$  un foncteur de  $\text{Dia}$ . On dira que  $f$  est  $\mathbb{D}$ -filtrant lorsque  $f$  vérifie l'une des quatre conditions équivalentes de la proposition 2.1.49. On dira que  $f$  est universellement filtrant s'il est  $\mathbb{D}$ -filtrant pour tout  $\text{Dia}$ -dérivateur triangulé  $\mathbb{D}$ .

Notons le résultat simple suivant :

**PROPOSITION 2.1.51** — La classe des foncteurs  $\mathbb{D}$ -filtrants est stable par composition et coproduits finis. La classe des foncteurs universellement filtrants est stable par produits finis.

**DEMONSTRATION** Soit  $K \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} I$  une suite composable de foncteurs de  $\text{Dia}$ . Pour montrer que  $f \circ g$  est  $\mathbb{D}$ -filtrant sachant que  $f$  et  $g$  le sont, il suffit de remarquer que le 2-morphisme  $(p_K)_\#(f \circ g)^* \longrightarrow (p_I)_\#$  est la composée suivante :

$$(p_K)_\#(f \circ g)^* \simeq (p_K)_\#g^* f^* \longrightarrow (p_J)_\#f^* \longrightarrow (p_I)_\#$$

La stabilité par coproduits finis est facile et laissée aux lecteurs. Pour la stabilité par produits finis, on considère deux foncteurs universellement filtrants  $f : J \longrightarrow I$  et  $f' : J' \longrightarrow I'$ . Le produit  $f' \times f : J \times J' \longrightarrow I \times I'$  se décompose :

$$J \times J' \xrightarrow{f \times \text{id}} I \times J' \xrightarrow{\text{id} \times f'} I \times I'$$

En utilisant la stabilité par composition, on se ramène à montrer que  $f \times \text{id} : J \times K \longrightarrow I \times K$  est universellement filtrant sachant que  $f$  l'est.

Étant donné un dérivateur triangulé  $\mathbb{D}$ , on considère le dérivateur triangulé  $\mathbb{D}_K = \mathbb{D}(- \times K)$ . En utilisant le fait que  $f$  est  $\mathbb{D}_K$ -filtrant on déduit que dans  $\mathbb{D}$  le 2-morphisme :

$$(\text{id} \times p_J)_\#(\text{id} \times f)^* \longrightarrow (\text{id} \times p_I)_\#$$

est inversible. Mais le 2-morphisme qui nous intéresse s'obtient du 2-morphisme ci-dessus en appliquant  $(p_K)_\#$ . La proposition est prouvée. C.Q.F.D

Il est facile de donner des exemples de foncteurs universellement filtrants entre ensembles ordonnés.

**DEFINITION 2.1.52** — Soit  $(I, <)$  un ensemble ordonné. On dit que  $(I, <)$  est semi-bien ordonné si toute partie non vide  $A$  de  $I$  admet une borne supérieure  $\text{sup}(A)$  dans  $I$  (i.e., un plus petit majorant).

**LEMME 2.1.53** — Soit  $J \subset I$  une inclusion entre deux ensembles semi-bien ordonnés. On suppose que tout élément de  $I$  est minoré par un élément de  $J$ . Alors le foncteur  $J \longrightarrow I$  est universellement filtrant.

**DEMONSTRATION** En effet, soit  $i$  un objet (ou plutôt un élément) de  $I$ . La catégorie  $J/i$  correspond alors au sous-ensemble ordonné de  $J$  formé des objets inférieurs ou égaux à  $i$ . Cet ensemble est non vide. Il admet donc une borne supérieure  $\text{sup}(J/i)$  (dans  $J$ !). Mais alors cet élément est un objet final de  $J/i$ . Il vient par la proposition 2.1.41 que  $R_*(J/i) \simeq \text{id}$ . D'où le résultat. C.Q.F.D

On donne également deux exemples importants de nature simplicale. Notons  $\Delta$  est la catégorie dont les objets sont les ordinaux finis  $\underline{n} = \{0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n\}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Le point clef est le lemme suivant :

**LEMME 2.1.54** — On notera  $\Delta/\underline{n} \times \underline{r}$  la catégorie dont les objets sont les couples de flèches  $(\underline{m} \rightarrow \underline{n}, \underline{m} \rightarrow \underline{r})$ . Le 2-morphisme  $R_\#(\Delta/\underline{n} \times \underline{r}) \longrightarrow \text{id}$  est inversible.

DEMONSTRATION Notons  $E \subset \Delta/\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{r}}$  la sous-catégorie pleine dont les objets sont les couples  $(a : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{n}}, b : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{r}})$  vérifiant  $a(0) = 0$  et  $b(0) = 0$ .

Appelons  $inc : E \subset \Delta/\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{r}}$  l'inclusion évidente et  $\phi : \Delta/\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{r}} \longrightarrow E$  le foncteur qui envoie  $(a : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{n}}, b : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{r}})$  sur le couple  $(a' : \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{n}}, b' : \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{r}})$  avec  $a'(0) = 0, b'(0) = 0, a'(i) = a(i-1)$  et  $b'(i) = b(i-1)$  pour  $1 \leq i \leq m+1$ .

On dispose d'une transformation naturelle  $\phi \circ inc \longrightarrow id$  donnée au niveau de  $(a : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{n}}, b : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{r}}) \in \text{Ob}(E)$  par l'unique application croissante surjective  $\underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{m}}$  identifiant 0 et 1. De même, on dispose d'une transformation naturelle  $id \longrightarrow inc \circ \phi$  donnée au niveau de  $(a : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{n}}, b : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{r}}) \in \text{Ob}(E)$  par l'unique application strictement croissante  $\underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{m}}$  évitant 0. Le lecteur pourra vérifier que ces transformations naturelles font de  $inc$  et  $\phi$  un couple de foncteurs adjoints.

Par le lemme 2.1.43, on déduit que  $R_{\#}inc : R_{\#}(E) \xrightarrow{\sim} R_{\#}(\Delta/\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{r}})$  et  $R_{\#}\phi : R_{\#}(\Delta/\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{r}}) \xrightarrow{\sim} R_{\#}(E)$  sont des 2-isomorphismes inverses l'un de l'autre. On est donc ramené à montrer que  $R_{\#}(E) \simeq id$ .

On dispose d'un foncteur  $e : \Delta \longrightarrow E$  qui à  $\underline{\mathbf{m}}$  associe le couple  $(0 : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{n}}, 0 : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{r}})$ . Ce foncteur admet un adjoint à droite  $f : E \longrightarrow \Delta$  qui à  $(a : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{n}}, b : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{r}})$  associe  $(a \times b)^{-1}(0, 0) = \{0 \rightarrow \dots \rightarrow s\}$  avec  $0 \leq s \leq m$  vérifiant  $a(s) = b(s) = 0$  et maximal pour cette propriété. Notons que le morphisme de counité  $e \circ f \longrightarrow id_E$ , évalué en l'objet  $(a : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{n}}, b : \underline{\mathbf{m}} \rightarrow \underline{\mathbf{r}})$  ci-dessus, correspond à l'inclusion  $\underline{\mathbf{s}} \subset \underline{\mathbf{m}}$  d'image  $\{0, \dots, s\}$ .

Par une deuxième application du lemme 2.1.43, on voit que  $R_{\#}e$  est un 2-isomorphisme. Il suffit donc de montrer que  $R_{\#}(\Delta) \simeq id$ . Ceci découle du fait que  $\Delta$  admet un objet final. Le lemme est démontré. C.Q.F.D

On en déduit deux exemples de foncteurs filtrants :

**COROLLAIRE 2.1.55** — 1- Le foncteur diagonal  $diag : \Delta \longrightarrow \Delta \times \Delta$  est universellement filtrant.

2- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $\Delta/\underline{\mathbf{n}} \longrightarrow \Delta$  est universellement filtrant.

DEMONSTRATION Le premier point découle immédiatement du lemme 2.1.54 et de la quatrième caractérisation des foncteurs  $\mathbb{D}$ -filtrants de la proposition 2.1.49. Pour le second point, on utilise le fait que  $\Delta/\underline{\mathbf{n}}/\underline{\mathbf{r}} = \Delta/\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{r}}$ . C.Q.F.D

En utilisant le fait que  $\Delta/\underline{\mathbf{1}} \longrightarrow \Delta$  est filtrant, on peut définir une notion d'homotopie simpliciale entre les morphismes de  $\mathbb{D}(\Delta)$  de sorte que deux flèches homotopes deviennent égales après application de  $(p_{\Delta})_{\#}$ .

On notera dans la suite  $q : \Delta/\underline{\mathbf{1}} \longrightarrow \Delta$  la projection canonique et  $s_0$  (resp.  $s_1$ ) le foncteur  $\Delta \longrightarrow \Delta/\underline{\mathbf{1}}$  qui envoie un ordinal  $\underline{\mathbf{n}}$  sur la flèche composée :

$$\underline{\mathbf{n}} \longrightarrow \underline{\mathbf{0}} \xrightarrow{s_0} \underline{\mathbf{1}} \quad (\text{resp. } \underline{\mathbf{n}} \longrightarrow \underline{\mathbf{0}} \xrightarrow{s_1} \underline{\mathbf{1}})$$

**DEFINITION 2.1.56** — Soient  $A$  et  $B$  deux objets de  $\mathbb{D}(\Delta)$  et  $f, g : A \longrightarrow B$  deux flèches. Une homotopie de  $f$  à  $g$  est une flèche :

$$h : q_{\#}q^*A \longrightarrow B$$

telle que les composées suivantes :

$$A \simeq q_{\#}(s_0)_{\#}s_0^*q^*A \longrightarrow q_{\#}q^*A \xrightarrow{h} B$$

$$A \simeq q_{\#}(s_1)_{\#}s_1^*q^*A \longrightarrow q_{\#}q^*A \xrightarrow{h} B$$

soient respectivement égales à  $f$  et  $g$ .

On a effectivement :

**PROPOSITION 2.1.57** — Soient  $A$  et  $B$  deux objets de  $\mathbb{D}(\Delta)$  et  $f, g : A \longrightarrow B$  deux flèches homotopes. Les deux flèches :

$$(p_{\Delta})_{\#}A \xrightarrow{f} (p_{\Delta})_{\#}B \quad \text{et} \quad (p_{\Delta})_{\#}A \xrightarrow{g} (p_{\Delta})_{\#}B$$

sont égales.

DEMONSTRATION Soit  $h : q_{\#}q^*A \longrightarrow B$  une homotopie de  $f$  à  $g$ . Il suffit de prouver que les deux morphismes :

$$A = q_{\#}(s_0)_{\#}s_0^*q^*A \longrightarrow q_{\#}q^*A \quad \text{et} \quad A = q_{\#}(s_1)_{\#}s_1^*q^*A \longrightarrow q_{\#}q^*A$$

deviennent égales après application de  $(p_{\Delta})_{\#}$ . Ces deux flèches admettent la rétraction commune :

$$q_{\#}q^*A \longrightarrow A$$

Ainsi, il suffira de montrer que :

$$(p_{\Delta})_{\#}q_{\#}q^*A \longrightarrow (p_{\Delta})_{\#}A$$

est inversible. C'est effectivement le cas puisque  $q$  est un foncteur filtrant par le corollaire 2.1.55.

C.Q.F.D

### Application aux 2-triangles distingués

On termine cette petite introduction sur les dérivateurs par une application aux 2-triangles distingués. Soient  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  deux catégories triangulées. Une suite :

$$(2.5) \quad f' \longrightarrow f \longrightarrow f'' \longrightarrow f'[+1]$$

de foncteurs triangulés  $f, f'$  et  $f'' : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$  est appelée un 2-triangle. On dit que cette suite est un 2-triangle distingué si pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{T}_1$ , le triangle :

$$f'(A) \longrightarrow f(A) \longrightarrow f''(A) \longrightarrow f'(A)[+1]$$

est distingué. Étant donné un 2-triangle (2.5) et des adjoints (à droite pour fixer les idées)  $g, g'$  et  $g''$  de  $f, f'$  et  $f''$  respectivement, on peut former un autre 2-triangle :

$$(2.6) \quad g'' \longrightarrow g \longrightarrow g' \longrightarrow g''[+1]$$

La question naturelle qu'on se pose dans ce paragraphe est la suivante : *Si le 2-triangle (2.5) est distingué, en-est-il de même du triangle (2.6) ?*

La réponse à cette question est probablement négative sans hypothèses supplémentaires. Toutefois, il semble difficile de construire des contre-exemples.

On commencera l'étude de cette question par un cas particulier qui provient justement de la théorie des dérivateurs triangulés.

Soit  $\mathbb{D}$  un dérivateur triangulé de domaine  $\mathbf{Dia}$ . Soit  $X$  un objet de  $\mathbb{D}(\mathbf{1})$ . Notons  $s : \mathbf{1} \longrightarrow \Gamma$  le foncteur qui envoie 0 et 1 sur  $(0, 1)$  et  $(1, 1)$  respectivement. On vérifie facilement que l'objet  $s_*X$  vérifie :

$$(0, 1)^*s_*X = 0^*X = X_0 \quad , \quad (1, 1)^*s_*X = 1^*X = X_1 \quad \text{et} \quad (1, 0)^*s_*X = 0$$

Ainsi l'axiome 6 de la définition 2.1.34 fournit un triangle distingué fonctoriel en  $X$  :

$$X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow (0, 0)^*(i_{\Gamma})_{\#}(s_*X) \longrightarrow X_1[+1]$$

Il est alors naturel de poser  $\text{Cone}(X) = (0, 0)^*(i_{\Gamma})_{\#}(s_*X)$ . On a ainsi un foncteur cône :

$$\text{Cone} : \mathbb{D}(\mathbf{1}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbf{e})$$

qui s'insère dans un 2-triangle distingué :

$$(2.7) \quad 1^* \longrightarrow 0^* \longrightarrow \text{Cone} \longrightarrow 1^*[+1]$$

Ce 2-triangle peut être considéré comme un 2-triangle distingué universel parmi les "bons" 2-triangles distingués. On montrera que le 2-triangle formé des adjoints à droites de  $1^*$ ,  $0^*$  et  $\text{Cone}$  est 2-distingué.

Il est utile de considérer la variante suivante du foncteur cône :

**DEFINITION 2.1.58** — Soit  $t : \mathbf{1} \longrightarrow \sqcup$  le foncteur qui envoie 0 et 1 sur  $(0, 0)$  et  $(0, 1)$  respectivement. On définit le foncteur triangulé  $\theta : \mathbb{D}(\mathbf{1}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbf{1})$  par la composée :

$$(2.8) \quad \mathbb{D}(\mathbf{1}) \xrightarrow{s_*} \mathbb{D}(\Gamma) \xrightarrow{(i_{\Gamma})_{\#}} \mathbb{D}(\square) \xrightarrow{(i_{\sqcup})^*} \mathbb{D}(\sqcup) \xrightarrow{t^*} \mathbb{D}(\mathbf{1})$$

Ainsi si  $X \in \text{Ob}(\mathbb{D}(\mathbf{1}))$ , on a  $\theta(X) = t^*(i_{\sqcup})^*(i_{\Gamma})_{\#}(s_*X)$ .



**Remarque 2.1.59** — Pour faciliter la tâche aux lecteurs, on fera un petit dessin décrivant les foncteurs  $s$  et  $t$  qui entrent en jeu dans la définition de  $\theta$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & \longleftarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow i_\Gamma \circ s & & \\
 (1, 1) & \longleftarrow & (0, 1) & & 1 \\
 \uparrow & & \uparrow & \longleftarrow i_\sqcup \circ t & \uparrow \\
 (1, 0) & \longleftarrow & (0, 0) & & 0
 \end{array}$$

**Remarque 2.1.60** — Si  $X$  est un objet de  $\mathbb{D}(\mathbf{1})$ , le squelette de  $\theta(X)$  est simplement le second côté du triangle distingué canonique (2.7) à savoir :  $0^*X \longrightarrow \text{Cone}(X)$  .

On résume quelques propriétés du foncteur  $\theta$  dans la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.1.61** — *Le foncteur  $\theta$  est une équivalence de catégories. Un inverse à  $\theta$  est donné par la composée duale de 2.8 :*

$$\mathbb{D}(\mathbf{1}) \xrightarrow{t_\#} \mathbb{D}(\sqcup) \xrightarrow{(i_\sqcup)_*} \mathbb{D}(\square) \xrightarrow{(i_\Gamma)^*} \mathbb{D}(\Gamma) \xrightarrow{s^*} \mathbb{D}(\mathbf{1})$$

Il existe également des isomorphismes canoniques :

- $1^* \circ \theta \simeq 0^*$ ,
- $0^* \circ \theta \simeq \text{Cone}$ ,
- $1^*\theta^3 \simeq 0^*\theta^2 \simeq 1^*[+1]$ .

Enfin, on peut récrire le 2-triangle distingué 2.7 :

$$(2.9) \quad 1^* \xrightarrow{r} 1^*\theta \xrightarrow{r} 1^*\theta^2 \xrightarrow{r} 1^*\theta^3 \simeq 1^*[+1]$$

avec  $r$  la composée :  $1^* \longrightarrow 0^* \simeq 1^*\theta$  .

**DEMONSTRATION** Pour montrer que  $\theta$  est une équivalence, on utilise l'axiome 5 de la définition 2.1.34 affirmant qu'un carré est cartésien si et seulement si il est cocartésien. Ainsi, pour  $X$  un objet de  $\mathbb{D}(\mathbf{1})$  le carré cartésien  $(i_\Gamma)_\# s_* X$  coïncide avec le carré cocartésien  $(i_\sqcup)_* t_\# \theta(X)$ . Ceci fournit un isomorphisme canonique :

$$X \simeq s^*(i_\Gamma)^*(i_\sqcup)_* t_\# \theta(X)$$

Dualement, on a aussi un isomorphisme canonique :

$$X \simeq \theta(i_\Gamma)^*(i_\sqcup)_* t_\# X$$

Il vient que  $\theta$  est une équivalence et son inverse est donné par son adjoint  $s^*(i_\Gamma)^*(i_\sqcup)_* t_\# = \theta^{-1}$ .

Les isomorphismes  $1^*\theta \simeq 0^*$  et  $0^*\theta \simeq \text{Cone}$  sont faciles à construire.

L'isomorphisme  $0^*\theta^2 \simeq 1^*[+1]$  est moins trivial. Pour le construire on procède de la manière suivante. Soit  $\mathbf{2} \times \mathbf{1}$  la catégorie :

$$\begin{array}{ccccc}
 (2, 1) & \longleftarrow & (1, 1) & \longleftarrow & (0, 1) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 (2, 0) & \longleftarrow & (1, 0) & \longleftarrow & (0, 0)
 \end{array}$$

Et  $r : I \subset \mathbf{2} \times \mathbf{1}$  la sous-catégorie pleine privée des objets  $(1, 0)$  et  $(0, 0)$ . On note  $i : \mathbf{1} \longrightarrow I$  le foncteur qui envoie 1 sur  $(2, 1)$  et 0 sur  $(1, 1)$ .

Soit  $X$  un objet de  $\mathbb{D}(\mathbf{1})$ . Considérons l'objet  $r_\# i_* X$  de  $\mathbb{D}(\mathbf{2} \times \mathbf{1})$ . Son squelette est :

$$\begin{array}{ccccc}
 1^*X & \longrightarrow & 0^*X & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Cone}(X) & \longrightarrow & \text{Cone}(\theta(X))
 \end{array}$$

Notons  $e : \mathbf{1} \times \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2} \times \mathbf{1}$  le produit du foncteur  $\mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{1}$  envoyant 0 sur 0 et 1 sur 2, par le foncteur identité. On vérifie facilement que  $e^*(r_{\#}i_*X)$  est un carré cartésien. Ceci induit canoniquement un isomorphisme :  $\text{Cone}(\theta(X)) \longrightarrow \Sigma(X)$ . C.Q.F.D

**Remarque 2.1.62** — Il est probable qu'on dispose d'un isomorphisme canonique  $\theta^3 \simeq [+1]$ . Toutefois, on n'aura pas besoin d'un tel isomorphisme dans la suite.

L'adjoint à droite de  $1^*$  est le foncteur  $1_* : \mathbb{D}(\mathbf{e}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbf{1})$ . Comme 1 est l'objet final de  $\mathbf{1}$ , par le corollaire 2.1.40, le foncteur  $1_*$  est canoniquement isomorphe à  $p^*$  avec  $p : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{e}$ . On répondra par l'affirmatif à la question proposée dans le cas particulier du 2-triangle (2.7), en montrant que le 2-triangle :

$$p^*[-1] = \theta^{-3}p^* \xrightarrow{r'} \theta^{-2}p^* \xrightarrow{r'} \theta^{-1}p^* \xrightarrow{r'} p^*$$

est distingué avec  $r'$  le morphisme déduit de  $r$  par adjonction. Il revient au même de considérer le triangle :

$$(2.10) \quad \theta^{-1}p^* \xrightarrow{r'} p^* \longrightarrow \theta p^* \longrightarrow \theta^2 p^* \simeq \theta^{-1}p^* [+1]$$

Fixons un objet  $X$  de  $\mathbb{D}(\mathbf{e})$ . Il est clair que l'objet  $\theta^{-1}p^*X$  admet pour squelette :

$$0 \longrightarrow X$$

D'autre part ce squelette détermine son objet à isomorphisme unique près. En effet si  $A$  est un objet ayant un squelette de cette forme, le morphisme  $1_{\#}1^*A \longrightarrow A$  est inversible. Pour la même raison, un morphisme de  $\theta^{-1}p^*X$  vers n'importe quel objet de  $\mathbb{D}(\mathbf{1})$  est uniquement déterminé par son induit sur les squelettes. Ainsi, le morphisme  $1^*X \longrightarrow 0^* \simeq 1^*\theta(X)$  est l'unique morphisme ayant pour squelette :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \parallel \\ X & \xlongequal{\quad} & X \end{array}$$

où les squelettes des objets de  $\mathbb{D}(\mathbf{1})$  sont représentés par des flèches verticales.

D'autre part, l'objet  $\theta p^*X$  admet pour squelette :

$$X \longrightarrow 0$$

La discussion précédente s'applique. Ainsi le morphisme  $p^*X \longrightarrow \theta p^*X$  est l'unique morphisme ayant pour squelette :

$$\begin{array}{ccc} X & \xlongequal{\quad} & X \\ \parallel & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les squelettes des objets de  $\mathbb{D}(\mathbf{1})$  sont représentés par des flèches verticales.

Il reste à comprendre le troisième coté du 2-triangle (2.10) :  $\theta p^* \longrightarrow \theta^2 p^*$ . Notons d'abord que le squelette de  $\theta^2 p^*X$  est :

$$0 \longrightarrow X[+1]$$

Il vient que le squelette du morphisme qui nous intéresse est nul puisque de la forme :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X[+1] \end{array}$$

Il va donc falloir travailler un peu plus que tout à l'heure. On commence par un lemme :

**LEMME 2.1.63** — Soient  $E$  et  $F$  des objets de  $\mathbb{D}(\underline{\mathbf{1}})$  ayant pour squelettes respectifs :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & F_0 \end{array}$$

On va définir des applications  $\text{hom}(E, F) \longrightarrow \text{hom}(E_1[+1], F_0)$  par différentes recettes.

1. En prenant la composée :

$$\text{hom}(E, F) \longrightarrow \text{hom}(\text{Cone}(E), \text{Cone}(F)) \xrightarrow{\sim} \text{hom}(E_1[+1], F_0)$$

2. En prenant la composée :

$$\text{hom}(E, F) \longrightarrow \text{hom}(\theta E, \theta F) \longrightarrow \text{hom}(0^*\theta E, 0^*\theta F) \simeq \text{hom}(E_1[+1], F_0)$$

3. En prenant la composée :

$$\text{hom}(E, F) \longrightarrow \text{hom}(\theta^{-1}E, \theta^{-1}F) \longrightarrow \text{hom}(1^*\theta^{-1}E, 1^*\theta^{-1}F) \simeq \text{hom}(E_1, F_0[-1]) \simeq \text{hom}(E_1[+1], F_0)$$

4. Soit  $a : E \longrightarrow F$ . On choisit un objet  $G$  de  $\mathbb{D}(\square)$  dont le  $\underline{\mathbf{1}}$ -squelette est le morphisme  $a$ . Le squelette de  $i_r^*G$  est simplement :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

Ainsi, le morphisme canonique :  $(i_r)_\# i_r^*G \longrightarrow G$  induit un morphisme  $E_1[+1] \longrightarrow F_0$  après application de  $(0, 0)^*$ . Ce morphisme ne dépend que de  $a$ .

Toutes ses applications coïncident. De plus, c'est des isomorphismes de groupes abéliens.

**DEMONSTRATION** Notons par ordre  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$  les applications de l'énoncé. Il est clair que  $\alpha_1 = \alpha_2$  puisque le morphisme  $\alpha_2$  est induit par le foncteur  $0^*\theta$  qui s'identifie canoniquement au foncteur  $\text{Cone}$ . Montrons au passage que  $\alpha_2$  est un isomorphisme. Pour cela il suffit de prouver que le morphisme  $\text{hom}(\theta E, \theta F) \longrightarrow \text{hom}(0^*\theta E, 0^*\theta F)$  est inversible. Mais les squelettes de  $\theta E$  et  $\theta F$  sont respectivement :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & F_0 \\ \downarrow & & \parallel \\ E_1[+1] & & F_0 \end{array}$$

Il vient que les flèches  $\theta E \longrightarrow \theta F$  sont uniquement déterminées par leurs squelettes. Mais il est facile de voir qu'un morphisme entre ces deux squelettes n'est rien d'autre qu'un morphisme  $E[+1] \longrightarrow F_0$ .

Prouvons que les morphismes  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont égaux. Par la proposition 2.1.61, les foncteurs  $0^*\theta^2$  et  $1^*[+1]$  sont canoniquement isomorphes. On en déduit un isomorphisme canonique  $0^*\theta \simeq 1^*\theta^{-1}[+1]$ . On vérifie facilement qu'il est compatible avec les identifications :

$$0^*\theta E = E_1[+1] \quad , \quad 0^*\theta F = F_0 \quad \text{et} \quad 1^*\theta^{-1}E[+1] = E_1[+1] \quad , \quad 1^*\theta^{-1}F[+1] = F_0$$

Ceci prouve que  $\alpha_2 = \alpha_3$ .

Montrons finalement que l'application  $\alpha_4$  coïncide avec  $\alpha_1$ . Notons  $C$  le carré cartésien  $(i_r)_\# i_r^*G$  et  $E'$  l'objet de  $\mathbb{D}(\underline{\mathbf{1}})$  ayant pour squelette :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ \downarrow & & \\ E[+1] & & \end{array}$$

Le  $\underline{\mathbf{1}}$ -squelette de  $C$  est un morphisme de  $a' : E \longrightarrow E'$ .

Le morphisme  $C \longrightarrow G$  induit alors un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xlongequal{\quad} & E \\ a' \downarrow & & \downarrow a \\ E' & \xrightarrow{b} & F \end{array}$$

L'application  $\alpha_4$  associe à  $a : E \longrightarrow F$  la flèche  $E_1[+1] \longrightarrow F_0$  obtenue en appliquant  $0^*$  à  $b : E' \longrightarrow F$ . Appliquons le foncteur  $\text{Cone}$  :

$$\begin{array}{ccc} \text{Cone}(E) & \xlongequal{\quad} & \text{Cone}(E) \\ a' \downarrow & & \downarrow a \\ \text{Cone}(E') & \xrightarrow{b} & \text{Cone}(F) \end{array}$$

Ce diagramme s'identifie alors à :

$$\begin{array}{ccc} E_1[+1] & \xlongequal{\quad} & E_1[+1] \\ \parallel & & \downarrow \alpha_1(a) \\ E_1[+1] & \xrightarrow{\alpha_4(a)} & F_0 \end{array}$$

Ceci prouve l'égalité  $\alpha_1 = \alpha_4$ .

C.Q.F.D

On déduit facilement du lemme précédent que le morphisme  $\theta p^*X \longrightarrow \theta^2 p^*X$  vient de l'objet cartésien et cocartésien de  $\mathbb{D}(\square)$  dont le squelette est :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X[+1] \end{array}$$

On a ainsi réussi à décrire complètement le 2-triangle (2.10). On résume la description obtenue :

**PROPOSITION 2.1.64** — Soit  $A$  un objet de  $\mathbb{D}(\mathbf{e})$ . Le triangle :

$$\theta^{-1}p^*A \longrightarrow p^*A \longrightarrow \theta p^*A \longrightarrow \theta^{-1}p^*A[+1]$$

est canoniquement isomorphe au triangle suivant :

$$U' \xrightarrow{a} U \xrightarrow{b} U'' \xrightarrow{c} U'[+1]$$

avec  $U', U$  et  $U''$  les objets de  $\mathbb{D}(\mathbf{1})$  uniquement déterminés par leurs squelettes respectifs :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & A & & A \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ A & & A & & 0 \end{array}$$

et  $a$  et  $b$  les flèches de  $\mathbb{D}(\mathbf{1})$  uniquement déterminées par leurs squelettes respectifs :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \parallel \\ A & \xlongequal{\quad} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xlongequal{\quad} & A \\ \parallel & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De plus, le morphisme  $c$  est le  $\mathbf{1}$ -squelette de l'objet cartésien et cocartésien  $(i_\Gamma)_\#(i_\Gamma)^*(\mathbf{1}, \mathbf{1})_*A$ .

**THEOREME 2.1.65** — Le 2-triangle (2.10) est distingué.

DEMONSTRATION Il s'agit de prouver que pour tout objet  $A$  de  $\mathbb{D}(\mathbf{e})$ , le triangle décrit dans la proposition 2.1.64 est distingué.

Notons d'abord que l'opérateur  $\theta$  s'étend à  $\mathbb{D}(\mathbf{1} \times I)$  pour toute catégorie  $I$  de  $\text{Dia}$ . En particulier, l'opérateur  $\theta$  agit sur  $\mathbb{D}(\square)$ . En fait, on dispose de deux tels opérateurs suivant le facteur  $\mathbf{1}$  de  $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$  considéré. Lorsqu'on prend

l'opérateur  $\theta$  relativement au premier facteur, on parlera du foncteur  $\theta$  horizontal qu'on notera  $\theta_h$ . Lorsqu'on prend l'opérateur  $\theta$  relativement au second facteur, on parlera du foncteur  $\theta$  vertical qu'on notera  $\theta_v$ . Il est facile de voir que les équivalences  $\theta$  verticales et horizontales commutent, i.e., il existe un isomorphisme canonique  $\theta_v \circ \theta_h \simeq \theta_h \circ \theta_v$ . Une façon économique de vérifier ceci est de considérer  $\theta_v$  comme une autoéquivalence de dérivateurs :  $\mathbb{D}_{\mathbf{1}} \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathbf{1}}$  et d'utiliser le fait qu'un morphisme de dérivateurs commutant aux Dia-limites et colimites, commute forcément au foncteur  $\theta$ . On a également deux foncteurs cônes  $\text{Cone}_v$  et  $\text{Cone}_h$ , ainsi qu'un isomorphisme canonique  $\text{Cone}_v \circ \theta_h = \theta \circ \text{Cone}_v$ .

Considérons l'objet  $D$  de  $\mathbb{D}(\square)$  donné par la formule  $(i_{\lrcorner})_{\#} p^* A$ . Son squelette est :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \parallel \\ A & \xlongequal{\quad} & A \end{array}$$

Ainsi, son  $\mathbf{1}$ -squelette est le morphisme  $a$ . Pour prouver le corollaire, on va identifier notre triangle à :

$$1^* D \longrightarrow 1^* \theta_h D \longrightarrow 1^* \theta_h^2 D \longrightarrow 1^* \theta_h^3 D \simeq 1^* D[+1]$$

Pour les deux premières flèches, il suffit de passer aux squelettes. Pour identifier la troisième flèche avec celle décrite dans la proposition 2.1.64, il suffit de montrer que  $\theta_h^2 D$  est le carré cartésien et cocartésien canonique de squelette :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A[+1] \end{array}$$

Le calcul du squelette est facile et laissé aux lecteurs. Par le lemme 2.1.63, pour calculer le morphisme de  $\mathbb{D}(\mathbf{1})$  induit par  $\theta_h^2 D$  entre les deux objets ayant pour squelettes :

$$\begin{array}{ccc} A & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & A[+1] \end{array}$$

il suffit de regarder l'induit sur les cônes. Il suffirait donc de montrer que le squelette de  $\text{Cone}_v \theta_h^2 D$  est :

$$A[+1] \xlongequal{\quad} A[+1]$$

En utilisant la commutation de  $\theta_h$  avec  $\text{Cone}_v$ , il vient que  $\text{Cone}_v \theta_h^2 D = \theta_h^2 \text{Cone}_v D$ . Mais le squelette de  $\text{Cone}_v D$  est simplement  $A \longrightarrow 0$ . D'où le résultat. C.Q.F.D

On peut en déduire le résultat suivant :

**PROPOSITION 2.1.66** — Soient  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  deux catégories triangulées avec petites sommes. On suppose également que  $\mathcal{T}_1$  est compactement engendrée.

On suppose donné un 2-triangle distingué de foncteurs  $\mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$  :

$$f' \longrightarrow f \longrightarrow f'' \longrightarrow f'[+1]$$

et des adjoints à droites  $g, g'$  et  $g''$  de  $f, f'$  et  $f''$  respectivement.

Supposons qu'il existe :

- un dérivateur triangulé  $\mathbb{D}_2$  de domaine une sous-catégorie  $\text{Dia} \subset \mathcal{C}\text{at}$  contenant les petites catégories discrètes tel que  $\mathcal{T}_2 = \mathbb{D}_2(\mathbf{e})$ ,
- un foncteur  $F : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathbb{D}_2(\mathbf{1})$  ainsi qu'un isomorphisme de 2-triangles :

$$\begin{array}{ccccccc} 1^* F & \longrightarrow & 0^* F & \longrightarrow & \text{Cone} \circ F & \longrightarrow & 1^* F[+1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f' & \longrightarrow & f & \longrightarrow & f'' & \longrightarrow & f'[+1] \end{array}$$

Alors, le 2-triangle :  $g'' \longrightarrow g \longrightarrow g' \longrightarrow g''[+1]$  est distingué.

DEMONSTRATION En effet, l'existence d'adjoints à droite force les foncteurs  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  à commuter aux petites sommes. L'axiome 2 de la définition 2.1.34, montre qu'il en est de même de  $F$ . Ainsi,  $F$  admet lui aussi un adjoint à droite  $G$  (qui est triangulé par le lemme 2.1.23). Mais le 2-triangle :

$$g'' \longrightarrow g \longrightarrow g' \longrightarrow g''[+1]$$

est clairement isomorphe au 2-triangle distingué :

$$\theta^{-2}p^* \xrightarrow{r'} \theta^{-1}p^* \xrightarrow{r'} p^* \longrightarrow \theta p^* \simeq \theta^{-2}p^*[+1]$$

auquel on applique le foncteur  $G$ . Ceci prouve la proposition. C.Q.F.D

**Remarque 2.1.67** — Pour un exemple d'application de cette proposition, le lecteur peut consulter la proposition 2.1.152.

### 2.1.3 Quelques compléments sur les $t$ -structures

Pour la définition et la théorie basique des  $t$ -structures, le lecteur pourra consulter [BBD82]. On fera attention que dans la suite on utilisera la convention homologique. On va décrire une méthode simple due à Fabien Morel [Mor02] qui permet de construire des  $t$ -structures.

**DEFINITION 2.1.68** — Soient  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée et  $\underline{G} \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$  un ensemble d'objets.

- Un objet  $N$  de  $\mathcal{T}$  est dit strictement  $\underline{G}$ -négatif si pour tout entier  $n$  positif ou nul, le foncteur  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(-, N[-n])$  s'annule sur les éléments de  $\underline{G}$ .
- Un objet  $P$  de  $\mathcal{T}$  est dit  $\underline{G}$ -positif si le foncteur  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(P, -)$  s'annule sur tous les objets strictement  $\underline{G}$ -négatifs de  $\mathcal{T}$ .

On notera  $\mathcal{T}_{<0}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$  formée des objets strictement négatifs et  $\mathcal{T}_{\geq 0}$  celle formée des objets positifs. Plus généralement, pour tout entier  $m \in \mathbb{Z}$ , on notera  $\mathcal{T}_{<m}$  (resp.  $\mathcal{T}_{\geq m}$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$  formée des objets  $A[m]$  avec  $A \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{<0})$  (resp.  $A \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{\geq 0})$ ).

Il nous arrivera parfois de noter  $\mathcal{T}_{\leq m-1}$  à la place de  $\mathcal{T}_{<m}$ . On a le lemme facile suivant :

**LEMME 2.1.69** — Gardons les notations de la définition précédente :

- 1- Tout élément de  $\underline{G}$  est un objet de  $\mathcal{T}_{\geq 0}$ . Si  $m \leq m'$  sont deux entiers relatifs, on a les inclusions  $\mathcal{T}_{<m} \subset \mathcal{T}_{<m'}$  et  $\mathcal{T}_{\geq m'} \subset \mathcal{T}_{\geq m}$ .
- 2- Soit  $m$  un entier. La sous-catégorie  $\mathcal{T}_{<m}$  est cosuspendue (voir la définition 2.1.1). Dualement, la sous-catégorie  $\mathcal{T}_{\geq m}$  est suspendue.
- 3- La sous-catégorie  $\mathcal{T}_{<m}$  est stable par limites catégoriques représentables. La sous-catégorie  $\mathcal{T}_{\geq m}$  est stable par colimites catégoriques représentables<sup>4</sup>.
- 4- Si  $\mathcal{T}$  admet des petits produits (resp. des petites sommes) alors  $\mathcal{T}_{<m}$  (resp.  $\mathcal{T}_{\geq 0}$ ) est stable par limites homotopiques (resp. colimites homotopiques) de  $\mathbb{N}^{\text{op}}$ -diagrammes (resp.  $\mathbb{N}$ -diagrammes).

DEMONSTRATION L'inclusion  $\underline{G} \subset \text{Ob}(\mathcal{T}_{\geq 0})$  est évidente.

On montre que  $\mathcal{T}_{<0}$  est cosuspendue en vérifiant la stabilité par extensions et noyaux. Choisissons deux objets strictement négatifs  $A$  et  $B$  ainsi que deux triangles distingués :

$$A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow A[+1] \quad \text{et} \quad N \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow N[+1]$$

Pour  $P$  un élément de  $\underline{G}$  et  $n \in \mathbb{N}$  on a les suites exactes :

$$\text{hom}(P, A[-n]) \longrightarrow \text{hom}(P, E[-n]) \longrightarrow \text{hom}(P, B[-n])$$

$$\text{hom}(P, B[-n-1]) \longrightarrow \text{hom}(P, N[-n]) \longrightarrow \text{hom}(P, A[-n])$$

Puisque les groupes  $\text{hom}(P, A[-k])$ ,  $\text{hom}(P, B[-k])$  sont nuls pour  $k$  positif ou nul, on déduit que  $\text{hom}(P, E[-n])$  et  $\text{hom}(P, N[-n])$  sont nuls. Ainsi,  $E$  et  $N$  sont strictement négatifs. En particulier,  $\mathcal{T}_{<0}$  est stable par cosuspensions. On en déduit immédiatement les inclusions  $\mathcal{T}_{<m} \subset \mathcal{T}_{<m'}$  de **1**.

<sup>4</sup>Les limites (resp. colimites) catégoriques sont à opposer avec les limites (resp. colimites) homotopiques. Les premières gardent un sens dans toute catégorie. Les secondes peuvent être définies pour certains diagrammes dans une catégorie triangulée ayant des produits (resp. des sommes) infinis.

Montrons que  $\mathcal{T}_{\geq 0}$  est suspendue en vérifiant la stabilité par extensions et conoyaux. Supposons donnés deux triangles distingués :

$$A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow A[+1] \quad \text{et} \quad A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A[+1]$$

avec  $A$  et  $B$  positifs. Pour  $N$  est un objet négatif, les suites exactes :

$$\text{hom}(B, N) \longrightarrow \text{hom}(E, N) \longrightarrow \text{hom}(A, N)$$

$$\text{hom}(A[+1], N) = \text{hom}(A, N[-1]) \longrightarrow \text{hom}(C, N) \longrightarrow \text{hom}(B, N)$$

montrent que  $\text{hom}(E, N) = \text{hom}(C, N) = 0$  (on utilise ici que  $N[-1]$  est encore strictement négatif). Donc  $E$  et  $C$  sont bien positifs. En particulier  $\mathcal{T}_{\geq 0}$  est stable par suspensions. On en déduit immédiatement les inclusions  $\mathcal{T}_{\geq m'} \subset \mathcal{T}_{\geq m}$  de **1**.

Remarquons que le point **4** découle immédiatement de **3**, de la stabilité par noyaux (resp. conoyaux) et de la définition de la limite homotopique (resp. colimite homotopique). Pour terminer, il nous reste à prouver le point **3**.

Soit  $I$  une petite catégorie et  $F : I \longrightarrow \mathcal{T}_{< 0}$  un foncteur. Supposant que  $F$  admet une limite  $L$  dans  $\mathcal{T}$ . Si  $P$  est un objet de  $\underline{G}$ , on a pour  $n \in \mathbb{N} : \text{hom}(P, L[-n]) = \text{hom}(P[n], L) = \text{Lim}_I \text{hom}(P[n], F(i)) = 0$  ce qui prouve que  $L$  est bien strictement négatif.

On procède pareillement pour le cas respé. Si  $F$  admet une colimite  $C$  dans  $\mathcal{T}$  on a pour  $N$  strictement négatif :  $\text{hom}(C, N) = \text{Lim}_I \text{hom}(F(i), N) = 0$ . C.Q.F.D

Sous une hypothèse de compacité on a :

**PROPOSITION 2.1.70** — *On garde les notations de la définition 2.1.68. Supposons que  $\mathcal{T}$  admet les petites sommes et que les objets dans  $\underline{G}$  sont compacts. Alors :*

- *Le triplet  $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{< 0})$  forme une  $t$ -structure sur  $\mathcal{T}$ .*
- *La sous-catégorie  $\mathcal{T}_{\geq 0}$  est égale à  $\ll \underline{G} \gg_+$  (avec les notations de la définition 2.1.15), i.e., à la plus petite sous-catégorie suspendue, stable par petites sommes et contenant les objets de  $\underline{G}$ .*

DEMONSTRATION Nous suivons la preuve de [Mor02]. Pour chaque objet  $E$  de  $\mathcal{T}$  choisissons un triangle distingué :

$$\left( \bigoplus_{n \in \mathbb{N}, A \in \underline{G}, f \in \text{hom}_{\mathcal{T}}(A[n], E)} A[n] \right) \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha_E} \phi(E) \longrightarrow$$

Posons  $\phi^0(E) = E$ . On définit par récurrence sur  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  :

- $\phi^k(E) = \phi(\phi^{k-1}(E))$ ,
- $\alpha_{k-1} = \alpha_{\phi^{k-1}(E)} : \phi^{k-1}(E) \longrightarrow \phi^k(E)$  .

On obtient ainsi un  $\mathbb{N}$ -diagramme inductif :

$$E = \phi^0(E) \longrightarrow \dots \longrightarrow \phi^{k-1}(E) \xrightarrow{\alpha_{k-1}} \phi^k(E) \xrightarrow{\alpha_k} \phi^{k+1}(E) \longrightarrow \dots$$

On définit un objet  $E_{< 0}$  de  $\mathcal{T}$  par :  $E_{< 0} = \text{HoColim}_{k \in \mathbb{N}} \phi^k(E)$ . Cet objet reçoit l'objet  $E$ . On choisit enfin un triangle distingué de  $\mathcal{T}$  :

$$E_{\geq 0} \longrightarrow E \longrightarrow E_{< 0} \longrightarrow E_{\geq 0}[+1]$$

Pour prouver la proposition, il suffira d'établir les deux points suivants :

1. L'objet  $E_{< 0}$  est strictement négatif.
2. L'objet  $E_{\geq 0}$  est dans  $\ll \underline{G} \gg_+$ .

En effet, par le lemme 2.1.69, on a immédiatement l'inclusion  $\ll \underline{G} \gg_+ \subset \mathcal{T}_{\geq 0}$ . Ainsi, le second point suffit pour montrer que  $E_{\geq 0}$  est positif et donc la première assertion de la proposition. D'autre part, soit  $P$  est un objet positif. Le fait qu'on a une  $t$ -structure implique que le triangle distingué :

$$P_{\geq 0} \longrightarrow P \longrightarrow P_{< 0} \longrightarrow$$

est l'unique triangle distingué ayant ses deux extrémités respectivement positive et strictement négative. Ceci montre que  $P_{< 0} = 0$  et  $P = P_{\geq 0}$ . En particulier  $P$  est dans  $\ll \underline{G} \gg_+$  ce qui fournit l'inclusion inverse  $\mathcal{T}_{\geq 0} \subset \ll \underline{G} \gg_+$ .

Prouvons donc les points 1 et 2 ci-dessus. Pour 1, on choisit un objet  $B$  de  $\underline{G}$  et un entier positif  $m$ . L'objet  $B$  étant compact, on voit que :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(B[m], E_{<0}) = \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(B[m], \mathrm{HoColim}_{k \in \mathbb{N}} \phi^k(E)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Colim}_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(B[m], \phi^k(E))$$

Il suffit donc de montrer que la colimite des groupes abéliens à droite est nulle. Il suffira encore de montrer que les morphismes de transitions :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(B[m], \phi^k(E)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(B[m], \phi^{k+1}(E))$$

sont nuls. Pour toute flèche  $b : B[m] \longrightarrow \phi^k(E)$ , il existe une flèche en pointillés rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & B[m] \\ & \swarrow \text{pointillés} & \downarrow b \\ \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{N}, A \in \underline{G}, f \in \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A[n], \phi^k(E))} A[n] \right) & \longrightarrow & \phi^k(E) \longrightarrow \phi^{k+1}(E) \end{array}$$

Comme la composée des flèches horizontales est nulle (deux arêtes consécutives d'un triangle distingué), le premier point est prouvé.

Pour vérifier que  $E_{\geq 0}$  est dans  $\ll \underline{G} \gg_+$ , on choisit des triangles distingués :

$$F_k \longrightarrow E \longrightarrow \phi^k(E) \longrightarrow F_k[+1]$$

ainsi que des morphismes de triangles :

$$(2.11) \quad \begin{array}{ccccccc} F_k & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \phi^k(E) & \longrightarrow & \\ \beta_k \downarrow & & \parallel & & \downarrow \alpha_k & & \\ F_{k+1} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \phi^{k+1}(E) & \longrightarrow & \end{array}$$

En utilisant la définition de la colimite homotopique il est facile de se convaincre que  $E_{\geq 0}$  est une colimite homotopique des  $F_k$ . Il suffit donc de montrer que les  $F_k$  sont dans  $\ll \underline{G} \gg_+$ . On montre ceci par récurrence sur  $k$  (pour  $k = 0$ , c'est clair puisque  $F_0 = 0$ ).

En appliquant l'axiome de l'octaèdre à (2.11), on obtient un triangle distingué :

$$F_k \longrightarrow F_{k+1} \longrightarrow \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{N}, A \in \underline{G}, f \in \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A[n], \phi^k(E))} A[n] \right) \longrightarrow F_k[+1]$$

La catégorie  $\ll \underline{G} \gg_+$  étant stable par extensions et petites sommes, le second point est également démontré. C.Q.F.D

**DEFINITION 2.1.71** — La  $t$ -structure  $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{<0})$  sur  $\mathcal{T}$  sera appelée la  $t$ -structure engendrée par  $\underline{G}$ .

**COROLLAIRE 2.1.72** — Sous les conditions de la proposition 2.1.70, pour un objet  $E$  de  $\mathcal{T}$  on a les propriétés suivantes :

- $E$  est positif si et seulement si pour tout  $N$  strictement négatif, on a  $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(E, N) = 0$ .
- $E$  est strictement négatif si et seulement si pour tout  $P$  positif, on a  $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(P, E) = 0$ .

Il existe deux conditions simples sur  $\underline{G}$  qui assurent que la  $t$ -structure  $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{<0})$  est non dégénérée :

**PROPOSITION 2.1.73** — On garde les hypothèses de la proposition 2.1.70. On suppose en plus que :

- l'ensemble  $\underline{G}$  est un ensemble de générateurs de la catégorie triangulée avec petites sommes  $\mathcal{T}$ ,
- pour tout  $A$  dans  $\underline{G}$  il existe un entier  $d_A$  tel que pour tout  $B$  dans  $\underline{G}$ ,  $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, B[n])$  est nul pour  $n \geq d_A$ .

Alors, la  $t$ -structure engendrée par  $\underline{G}$  est non dégénérée.

**DEMONSTRATION** Montrons que l'intersection  $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{<-n}$  est réduite à la catégorie nulle. En effet, soient  $N$  un objet de cette intersection et  $m$  un entier relatif. Si  $m$  est positif, l'objet  $N[-m]$  est encore strictement négatif puisque  $\mathcal{T}_{<0}$  est stable par cosuspensions. Si  $m$  est négatif, l'objet  $N[-m]$  est également strictement négatif puisque  $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_{<m})$ . Ainsi pour  $A \in \underline{G}$  et  $m$  un entier relatif quelconque on a  $\mathrm{hom}(A, N[-m]) = 0$ . En d'autres termes,  $N$  est orthogonal à l'ensemble  $\underline{G}$  qui engendre  $\mathcal{T}$ . Il est donc forcément nul.

Avant de passer à l'intersection  $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{\geq n}$ , montrons que si  $A \in \underline{G}$  et  $P \in \mathcal{T}_{\geq 0}$  on a  $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, P[n]) = 0$  dès que  $n \geq d_A$  (avec  $d_A$  l'entier de l'énoncé). Pour cela on montre l'inclusion  $\mathcal{T}_{\geq 0} \subset \ll \underline{G} \gg_+ \subset \mathcal{T}_A$  avec  $\mathcal{T}_A$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$  formée des objets ? tels que  $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, ?[n]) = 0$  si  $n \geq d_A$ . En utilisant l'hypothèse que  $\underline{G} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_A)$ , on voit qu'il suffit de prouver les deux points :



- $\mathcal{T}_A$  est stable par petites sommes.
- $\mathcal{T}_A$  est suspendue.

La première assertion découle du fait que  $A$  est compact. Pour la seconde on vérifie la stabilité par extensions et conoyaux. On prend donc des objets  $Q$  et  $R$  de  $\mathcal{T}_A$  et des triangles distingués :

$$Q \longrightarrow E \longrightarrow R \longrightarrow Q[+1]$$

$$Q \longrightarrow R \longrightarrow C \longrightarrow Q[+1]$$

On en déduit deux suites exactes :

$$\text{hom}(A, Q[n]) \longrightarrow \text{hom}(A, E[n]) \longrightarrow \text{hom}(A, R[n])$$

$$\text{hom}(A, R[n]) \longrightarrow \text{hom}(A, C[n]) \longrightarrow \text{hom}(A, Q[n+1])$$

ce qui montre que pour  $n \geq d_A$  on a bien  $\text{hom}(A, E[n]) = \text{hom}(A, C[n]) = 0$ .

Muni de ce résultat, il est facile de montrer que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{\geq n} = 0$ . Soit en effet  $P$  un objet de toutes les catégories  $\mathcal{T}_{\geq n}$ . Pour  $m$  un entier relatif, l'objet  $P[m - d_A]$  est dans  $\mathcal{T}_{\geq 0}$  et donc par ce qui précède  $\text{hom}(A, P[m]) = 0$ . En utilisant encore une fois que  $\underline{G}$  engendre  $\mathcal{T}$  on déduit que  $P$  est nul. C.Q.F.D

### Quelques lemmes utiles

On fixe la terminologie à l'aide de la définition ci-dessous :

**DEFINITION 2.1.74** — 1- On se donne une catégorie triangulée  $\mathcal{T}$  munie d'une  $t$ -structure  $(\mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{\leq 0})$ . Un objet de  $\mathcal{T}_{\leq 0}$  est dit  $t$ -négatif. Un objet de  $\mathcal{T}_{\geq 0}$  est dit  $t$ -positif. Un objet est majoré (resp. minoré) si un certain décalé de cet objet est  $t$ -négatif (resp.  $t$ -positif) ; il est borné s'il est minoré et majoré.

2- Un foncteur triangulé  $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  entre deux catégories triangulées avec  $t$ -structures est dit  $t$ -négatif (resp.  $t$ -positif) s'il envoie tout objet  $t$ -négatif (resp.  $t$ -positif) sur un objet du même  $t$ -signe. Il sera dit  $t$ -exact s'il est à la fois  $t$ -négatif et  $t$ -positif.

**Remarque 2.1.75** — D'habitude on dit d'un foncteur  $t$ -négatif (resp.  $t$ -positif) qu'il est exact à droite (resp à gauche). On a préféré employer une terminologie commune aux foncteurs et aux objets suivant la philosophie que dans un 2-foncteur homotopique on peut remplacer l'étude des objets par celui des opérations. Notons à titre d'exemples que la propriété pour un foncteur triangulé d'être  $t$ -négatif (resp.  $t$ -positif) est stable par extensions et noyaux (resp. conoyaux) au sens des 2-triangles distingués.

On a le lemme facile suivant :

**LEMME 2.1.76** — Soient  $\mathcal{T}$  et  $(\mathcal{T}_i)_i$  des catégories triangulées munies de  $t$ -structures. Supposons donnée une famille conservative de foncteurs  $t$ -exacts  $f_i : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_i$ . Soit  $E$  un objet de  $\mathcal{T}$ . Alors  $E$  est positif (resp. négatif) si et seulement si  $f_i(E)$  est positif (resp. négatif) pour tout  $i$ .

**DEMONSTRATION** On traite uniquement le cas positif (le cas négatif en découle par dualité). Il existe un triangle distingué :

$$E_{\geq 0} \longrightarrow E \longrightarrow E_{< 0} \longrightarrow$$

avec  $E_{\geq 0}$  positif et  $E_{< 0}$  strictement négatif. L'objet  $E$  est donc positif si  $E_{< 0}$  est nul. La famille des  $f_i$  étant conservative, il suffira de montrer que les  $f_i(E_{< 0})$  sont nuls. Puisque  $f_i$  est  $t$ -exact  $f_i(E_{\geq 0})$  est positif et  $f_i(E_{< 0})$  est strictement négatif. Il vient que :

$$f_i(E_{\geq 0}) \longrightarrow f_i(E) \longrightarrow f_i(E_{< 0}) \longrightarrow$$

est l'unique triangle distingué ayant pour sommets respectivement : un objet positif,  $f_i(E)$  et un objet strictement négatif. Comme  $f_i(E)$  est positif, on a forcément  $f_i(E_{< 0}) = 0$ . C.Q.F.D

Les deux lemmes qui suivent donnent des critères de  $t$ -exactitudes pour les foncteurs. Ils seront utilisés à plusieurs reprises dans la suite.

**LEMME 2.1.77** — Soit  $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées munies chacune d'une  $t$ -structure. Alors :

- Supposons que  $f$  admet un adjoint à droite  $f_d$  qui est  $t$ -négatif. Alors  $f$  est  $t$ -positif.
- Supposons que  $f$  admet un adjoint à gauche  $f_g$  qui est  $t$ -positif. Alors  $f$  est  $t$ -négatif.

DEMONSTRATION Les deux propriétés à démontrer sont duales. On s'intéressera donc uniquement à la première. Soit  $P$  un objet  $t$ -positif de  $\mathcal{T}$ . Pour montrer que  $f(P)$  reste  $t$ -positif, il suffit de prouver que pour tout objet strictement  $t$ -négatif  $N$  de  $\mathcal{T}'$  le groupe  $\text{hom}_{\mathcal{T}'}(f(P), N)$  est nul. Par adjonction ce groupe est isomorphe à  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(P, f_d(N))$ . Comme  $f_d$  est  $t$ -négatif, l'objet  $f_d(N)$  est strictement  $t$ -négatif. D'où l'annulation recherchée. C.Q.F.D

**LEMME 2.1.78** — *Soit  $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées. On suppose que  $\mathcal{T}$  admet les petites sommes et que  $f$  commute aux petites sommes. Supposons également que  $\mathcal{T}'$  est munie d'une  $t$ -structure. Soit  $\underline{G}$  un ensemble d'objets compacts de  $\mathcal{T}$  et munissons  $\mathcal{T}$  de la  $t$ -structure engendrée par  $\underline{G}$ . Si pour tout  $A$  dans  $\underline{G}$ , l'objet  $f(A)$  est  $t$ -positif, alors le foncteur  $f$  est  $t$ -positif.*

DEMONSTRATION Notons  $\mathcal{D}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$  ayant pour classe d'objets  $f^{-1}\text{Ob}(\mathcal{T}'_{\geq 0})$ . Il s'agit de montrer que  $\ll \underline{G} \gg_+ = \mathcal{T}_{\geq 0} \subset \mathcal{D}$ . Il suffirait donc de vérifier les points :

1.  $\underline{G} \subset \text{Ob}(\mathcal{D})$ ,
2.  $\mathcal{D}$  est stable par petites sommes,
3.  $\mathcal{D}$  est suspendue.

Le premier point est dans les hypothèses de l'énoncé. Pour le second point, on se donne une petite famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'objets dans  $\mathcal{D}$ . Comme  $f$  commute aux petites sommes, on voit que  $f(\oplus_i A_i)$  représente la somme directe des  $f(A_i)$ . En particulier :

$$\text{hom}_{\mathcal{T}'}(f(\oplus_i A_i), N) = \prod_i \text{hom}_{\mathcal{T}'}(f(A_i), N) = 0$$

pour tout objet strictement  $t$ -négatif  $N$ . Ceci montre que  $f(\oplus_i A_i)$  est positif et donc  $\oplus_i A_i$  est dans  $\mathcal{D}$ . Pour le troisième point, on choisit deux objets  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{D}$  et deux triangles distingués dans  $\mathcal{T}$  :

$$A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow \quad \text{et} \quad A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow$$

Pour voir que  $E$  et  $N$  sont dans  $\mathcal{D}$ , il suffit de montrer que  $f(E)$  et  $f(C)$  sont  $t$ -positifs. On applique alors  $f$  à nos deux triangles :

$$f(A) \longrightarrow f(E) \longrightarrow f(B) \longrightarrow \quad \text{et} \quad f(A) \longrightarrow f(B) \longrightarrow f(C) \longrightarrow$$

La sous-catégorie  $\mathcal{T}'_{\geq 0}$  étant suspendue et les objets  $f(A)$  et  $f(B)$   $t$ -positifs, on a immédiatement le résultat recherché. C.Q.F.D

### 2.1.4 Catégories monoïdales, foncteurs pseudo-monoïdaux, modules et projecteurs

Dans cette sous-section, on étudie les catégories monoïdales du point de vue fonctoriel. Ainsi, on est intéressé par les foncteurs pseudo-monoïdaux et pseudo-comonoïdaux, mais aussi par des foncteurs munis d'un accouplement avec un foncteur pseudo-monoïdal fixé. On mettra surtout l'accent sur les structures déduites par passage aux foncteurs adjoints à droite ou à gauche. On commence par un petit rappel sur les catégories monoïdales.

#### Quelques rappels

On rappelle brièvement la définition d'une catégorie monoïdale. Pour plus de précisions le lecteur pourra consulter [Mac63] :

- DEFINITION 2.1.79** — **1-** Une catégorie monoïdale est un triplet  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$  avec :
- $\mathcal{C}$  une catégorie,
  - $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  un foncteur covariant,
  - $\sigma : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\sim} A \otimes (B \otimes C)$  une famille d'isomorphismes naturels en  $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^3$ .

Les isomorphismes  $\sigma$  sont appelés les isomorphismes d'associativité. Ils vérifient certains axiomes dont celui du pentagone affirmant que tous les isomorphismes entre les objets  $(A \otimes B) \otimes (C \otimes D)$  et  $((A \otimes B) \otimes C) \otimes D$  construits à partir des isomorphismes d'associativité (et de leurs inverses) sont égaux entre eux.

- 2-** Une catégorie monoïdale symétrique, est un quadruplet  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma, \tau)$  avec :
- $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$  une catégorie monoïdale,
  - $\tau : A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A$  une famille d'isomorphismes naturels en  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ .

Les isomorphismes  $\tau$  sont appelés les isomorphismes de commutativité. Ils vérifient certains axiomes dont l'égalité  $\tau \circ \tau = \text{id}$ . Des axiomes supplémentaires sont imposés pour décrire les compatibilités entre les isomorphismes d'associativité et de commutativité.

**Remarque 2.1.80** — Les définitions exactes d’une catégorie monoïdale et d’une catégorie monoïdale symétrique et plus précisément les axiomes vérifiés par les isomorphismes d’associativité et de commutativité ne seront utilisés nul part dans la théorie générale développée dans cette sous-section ou dans la section 2.3. Toutefois, ces axiomes sont importants dans la cas d’une catégorie monoïdale symétrique pour construire une action du groupe symétrique  $\Sigma_n$  sur les objets de la forme  $A^{\otimes n}$ .

Certains auteurs supposent qu’une catégorie monoïdale possède par définition un objet unité. Nous avons choisi de supposer que l’objet unité est une donnée supplémentaire :

**DEFINITION 2.1.81** — 1- Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$  une catégorie monoïdale. Un objet unité de  $\mathcal{C}$  est un triplet  $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$  avec :

- $\mathbb{1}$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,
- $u_g : \mathbb{1} \otimes A \xrightarrow{\sim} A$  et  $u_d : A \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\sim} A$  des isomorphismes naturels en  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

Les isomorphismes  $u_g$  et  $u_d$  sont appelés les isomorphismes d’unité à gauche et à droite respectivement. Ils doivent vérifier certaines conditions. Notons par exemple que les deux isomorphismes  $u_g, u_d : \mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$  coïncident.

2- Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma, \tau)$  une catégorie monoïdale symétrique. Un objet unité de  $\mathcal{C}$  est un objet unité  $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$  de la catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$  vérifiant certaines compatibilités supplémentaires avec les isomorphismes de commutation. Notons par exemple que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} \otimes A & \xrightarrow{\tau} & A \otimes \mathbb{1} \\ & \searrow u_g & \swarrow u_d \\ & A & \end{array}$$

est commutatif. En particulier, les isomorphismes  $u_g$  et  $u_d$  se déduisent l’un de l’autre.

3- Une catégorie monoïdale (resp. monoïdale symétrique) munie d’un objet unité est appelée une catégorie monoïdale unitaire (resp. monoïdale symétrique unitaire).

**Remarque 2.1.82** — On évitera, lorsque c’est possible, de nommer les isomorphismes d’associativité, de commutativité ou d’unité. Ainsi on dira : soit  $(\mathcal{C}, \otimes)$  (resp.  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ ) une catégorie monoïdale (resp. catégorie monoïdale unitaire).

**Remarque 2.1.83** — 1- Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$  une catégorie monoïdale. On peut munir la catégorie opposée  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  d’une structure de catégorie monoïdale. En effet, le foncteur  $\otimes$  induit un foncteur covariant :

$$\otimes^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$$

et on prend pour isomorphismes d’associativité les flèches  $(\sigma^{-1})^{\text{op}}$ . On appellera  $(\mathcal{C}^{\text{op}}, \otimes^{\text{op}}, (\sigma^{-1})^{\text{op}})$  la catégorie monoïdale opposée de  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$ .

D’autre part, notons  $per : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  le foncteur de permutation des facteurs :  $per(A, B) = (B, A)$  pour  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ . On définit alors un foncteur :

$$\otimes^\circ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

par  $\otimes^\circ = \otimes \circ per$ . Ainsi pour  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ , on a :  $A \otimes^\circ B = B \otimes A$ . Pour un triplet  $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^3$  on définit un isomorphisme :

$$\sigma^\circ : (A \otimes^\circ B) \otimes^\circ C \xrightarrow{\sim} A \otimes^\circ (B \otimes^\circ C)$$

en prenant  $\sigma^{-1} : C \otimes (B \otimes A) \longrightarrow (C \otimes B) \otimes A$ . On obtient ainsi une nouvelle catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes^\circ, \sigma^\circ)$  qu’on appellera la catégorie monoïdale  $\otimes$ -opposée de  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$ .

Un objet unité  $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$  de  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$  induit des objets unités  $(\mathbb{1}, (u_g^{-1})^{\text{op}}, (u_d^{-1})^{\text{op}})$  et  $(\mathbb{1}, u_d, u_g)$  des catégories monoïdales  $(\mathcal{C}^{\text{op}}, \otimes^{\text{op}})$  et  $(\mathcal{C}, \otimes^\circ)$ .

2- Lorsque  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma, \tau)$  est une catégorie monoïdale symétrique, les quadruplets

$$(\mathcal{C}^{\text{op}}, \otimes^{\text{op}}, (\sigma^{-1})^{\text{op}}, \tau^{\text{op}}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{C}^\circ, \otimes^\circ, \sigma^\circ, \tau^\circ)$$

(avec  $\tau^\circ = \tau^{-1}$ ) sont des catégories monoïdales symétriques qu’on appellera respectivement la catégorie monoïdale symétrique opposée et  $\otimes$ -opposée de  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma, \tau)$ . Il est clair que les isomorphismes de commutativité fournissent un isomorphisme de catégories monoïdales entre  $(\mathcal{C}, \otimes)$  et son  $\otimes$ -opposée. Lorsque  $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$  est un objet unité de  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma, \tau)$  les formules ci-dessus définissent des objets unités des catégories monoïdales symétriques opposée et  $\otimes$ -opposée.

3- On peut voir une catégorie monoïdale comme une 2-catégorie (non forcément stricte ou unitaire) ayant un seul objet. Ainsi, les catégories monoïdales opposée et  $\otimes$ -opposée correspondent aux 2-catégories 2-opposée et 1-opposée respectivement.

Le résultat suivant est bien connu :

**LEMME 2.1.84** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$  une catégorie monoïdale et  $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$  un objet unité de  $\mathcal{C}$ . Notons  $\text{End}(\mathbb{1})$  l'ensemble des endomorphismes de l'objet  $\mathbb{1}$ . Cet ensemble est muni de deux lois de composition à savoir :

- Le produit de composition  $\circ$  induit par la composition des flèches de  $\mathcal{C}$ ,
- Le produit tensoriel  $\otimes$ , qui à un couple  $(a, b) \in \text{End}(\mathbb{1})^2$  associe la composée :

$$\mathbb{1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{a \otimes b} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}$$

Ces deux lois de composition coïncident et sont commutatives

DEMONSTRATION En utilisant le fait que  $\otimes$  est un foncteur, on voit immédiatement qu'on a dans  $\text{End}(\mathbb{1})$  la relation :

$$(a \circ a') \otimes (b \circ b') = (a \otimes b) \circ (a' \otimes b'), \quad \forall (a, a', b, b') \in \text{End}(\mathbb{1})^4$$

De plus, l'identité de  $\mathbb{1}$  est neutre pour les deux lois de composition. On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a \circ b &= (a \otimes \text{id}_{\mathbb{1}}) \circ (\text{id}_{\mathbb{1}} \otimes b) = (a \circ \text{id}_{\mathbb{1}}) \otimes (\text{id}_{\mathbb{1}} \circ b) = a \otimes b \\ a \circ b &= (\text{id}_{\mathbb{1}} \otimes a) \circ (b \otimes \text{id}_{\mathbb{1}}) = (\text{id}_{\mathbb{1}} \circ b) \otimes (a \circ \text{id}_{\mathbb{1}}) = b \otimes a \end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme.

C.Q.F.D

**Foncteurs entre catégories monoïdales**

On passe maintenant aux 1-morphismes et 2-morphismes entre catégories monoïdales. Plusieurs définitions sont possibles. La plus naturelle est probablement celle des foncteurs monoïdaux puisqu'elle correspond aux 2-foncteurs non forcément stricts entre 2-catégories non forcément strictes (avec un seul objet). Malheureusement pour les applications en vue, cette notion est insuffisante. On utilisera la notion plus faible de foncteurs pseudo-monoïdaux. Pour plus de symétrie, on considérera également la notion de foncteurs pseudo-comonoïdaux :

**DEFINITION 2.1.85** — 1- Soient  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$  et  $(\mathcal{C}', \otimes', \sigma')$  deux catégories monoïdales. Un foncteur pseudo-monoïdal de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$  est un couple  $(f, a)$  formé :

- d'un foncteur  $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ,
- de morphismes  $a : f(A) \otimes' f(B) \longrightarrow f(A \otimes B)$  naturels en  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ , tels que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (f(A) \otimes' f(B)) \otimes' f(C) & \longrightarrow & f(A \otimes B) \otimes' f(C) & \longrightarrow & f((A \otimes B) \otimes C) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ f(A) \otimes' (f(B) \otimes' f(C)) & \longrightarrow & f(A) \otimes' f(B \otimes C) & \longrightarrow & f(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$

soit commutatif pour tout  $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^3$ .

Les morphismes  $a$  sont parfois appelés les morphismes d'accouplement de  $f$ . Lorsqu'ils sont inversibles, on dit que  $(f, a)$  est monoïdal.

Une transformation naturelle entre deux foncteurs pseudo-monoïdaux  $(f_1, a_1)$  et  $(f_2, a_2)$  est une transformation naturelle  $f_1 \longrightarrow f_2$  telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f_1(A) \otimes f_1(B) & \longrightarrow & f_2(A) \otimes f_2(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_1(A \otimes B) & \longrightarrow & f_2(A \otimes B) \end{array}$$

pour tout  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ .

2- Gardons les notations du 1-, et supposons donnés des objets unités  $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$  et  $(\mathbb{1}', u'_g, u'_d)$  de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  respectivement. Un foncteur pseudo-monoïdal pseudo-unitaire de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$  est un triplet  $(f, a, e)$  tel que :

- $(f, a)$  est un foncteur pseudo-monoïdal de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$ ,
- $e : \mathbb{1}' \longrightarrow f(\mathbb{1})$  est une flèche compatible avec les isomorphismes d'unité à droite et à gauche, i.e., telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{1}' \otimes' f(A) & \xrightarrow{e} & f(\mathbb{1}) \otimes' f(A) & \longrightarrow & f(\mathbb{1} \otimes A) \\ u'_g \downarrow \sim & & & & \sim \downarrow u_g \\ f(A) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & & & f(A) \end{array}$$

ainsi que son analogue pour  $u_d$  et  $u'_d$ .

Lorsque les morphismes  $a$  et  $e$  sont inversibles, on dit que  $(f, a, e)$  est un foncteur monoïdal unitaire.

Une transformation naturelle entre deux foncteurs pseudo-monoïdaux pseudo-unitaires  $(f_1, a_1, e_1)$  et  $(f_2, a_2, e_2)$  est une transformation naturelle entre les foncteurs pseudo-monoïdaux  $(f_1, a_1)$  et  $(f_2, a_2)$  telle que en plus le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1}' & \xrightarrow{e_1} & f_1(\mathbb{1}) \\ \parallel & & \downarrow \\ \mathbb{1}' & \xrightarrow{e_2} & f_2(\mathbb{1}) \end{array}$$

Lorsqu'on travaille avec des catégories monoïdales symétriques on impose également une compatibilité avec les isomorphismes de commutativité :

**DEFINITION 2.1.86** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma, \tau)$  et  $(\mathcal{C}', \otimes', \sigma', \tau')$  deux catégories monoïdales symétriques (resp. monoïdales symétriques unitaires). Un foncteur pseudo-monoïdal symétrique (resp. pseudo-monoïdal symétrique et pseudo-unitaire) de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$  est un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-monoïdal et pseudo-unitaire)  $(f, a)$  tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} f(A) \otimes' f(B) & \xrightarrow{a} & f(A \otimes B) \\ \tau \downarrow \sim & & \sim \downarrow \tau \\ f(B) \otimes' f(A) & \longrightarrow & f(B \otimes A) \end{array}$$

soit commutatif pour tout  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ .

Une transformation naturelle entre deux foncteurs pseudo-monoïdaux symétriques (resp. pseudo-monoïdaux symétriques et pseudo-unitaires) est simplement une transformation naturelle entre les foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. pseudo-monoïdaux et pseudo-unitaires) sous-jacents.

Un foncteur pseudo-monoïdal  $(f, a) : (\mathcal{C}, \otimes) \longrightarrow (\mathcal{C}', \otimes')$  induit un foncteur pseudo-monoïdal sur les catégories  $\otimes$ -opposées  $(f, a) : (\mathcal{C}, \otimes^\circ) \longrightarrow (\mathcal{C}', \otimes'^\circ)$ . Lorsqu'on passe aux catégories opposées, le foncteur  $(f, a)$  n'est plus pseudo-monoïdal. En effet, le morphisme d'accouplement est dans le mauvais sens et induit plutôt une structure de foncteur pseudo-comonoïdal.

**DEFINITION 2.1.87** — 1- On obtient la notion de foncteur pseudo-comonoïdal à partir de celle de foncteur pseudo-monoïdal en passant aux catégories opposées. Ainsi, si  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$  et  $(\mathcal{C}', \otimes', \sigma')$  sont deux catégories monoïdales, un foncteur pseudo-comonoïdal de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$  est un couple  $(f, a)$  formé :

- d'un foncteur  $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ,
- de morphismes  $a : f(A \otimes B) \longrightarrow f(A) \otimes' f(B)$  naturels en  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ , compatibles de la manière évidente avec les isomorphismes d'associativité.

Les morphismes  $a$  sont parfois appelés les morphismes de coaccouplement de  $f$ . Lorsqu'ils sont inversibles, on dit que  $(f, a)$  est comonoïdal.

Une transformation naturelle entre deux foncteurs pseudo-comonoïdaux  $(f_1, a_1)$  et  $(f_2, a_2)$  est une transformation naturelle  $f_1 \longrightarrow f_2$  telle que les diagrammes suivant soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} f_1(A \otimes B) & \longrightarrow & f_2(A \otimes B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_1(A) \otimes f_1(B) & \longrightarrow & f_2(A) \otimes f_2(B) \end{array}$$

Pour tout  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ .

2- On obtient la notion de foncteur pseudo-comonoïdal pseudo-counitaire (resp. foncteur comonoïdal counitaire) en passant aux catégories opposées. De même, on a également la notion de foncteur pseudo-comonoïdal symétrique entre des catégories monoïdales symétriques. Les détails seront laissés aux lecteurs.

**Remarque 2.1.88** — Si  $(f, a) : (\mathcal{C}, \otimes) \longrightarrow (\mathcal{C}', \otimes')$  est un foncteur monoïdal, alors  $(f, a^{-1})$  est un foncteur comonoïdal.

**Remarque 2.1.89** — Il va de soi qu'on peut composer les foncteurs pseudo-monoïdaux, (resp. pseudo-comonoïdaux) ainsi que les transformations naturelles entre eux. Par exemple, étant données trois catégories monoïdales  $(\mathcal{C}, \otimes)$ ,

$(\mathcal{C}', \otimes')$  et  $(\mathcal{C}'', \otimes'')$  ainsi que deux foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. pseudo-comonoïdaux)  $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  et  $(f', a') : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$  leurs composée est  $(f' \circ f, a'')$  avec  $a''$  l'accouplement composé :

$$f'f(A) \otimes f'f(B) \xrightarrow{a'} f'(f(A) \otimes f(B)) \xrightarrow{a} f'f(A \otimes B)$$

(resp. le coaccouplement composé :

$$f'f(A \otimes B) \xrightarrow{a} f'(f(A) \otimes f(B)) \xrightarrow{a'} (f'f(A) \otimes'' f'f(B))$$

pour  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ .

On vérifie aisément que les catégories monoïdales avec les foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. pseudo-comonoïdaux) et leurs transformations naturelles forment une 2-catégorie stricte :  $(\mathbf{pMono})$  (resp.  $(\mathbf{pcMono})$ ). On a également la sous-2-catégorie  $(\mathbf{Mono})$  (resp.  $(\mathbf{pMono})$ ) où l'on prend uniquement les foncteurs monoïdaux (resp. comonoïdaux). L'association  $(f, a) \rightsquigarrow (f, a^{-1})$  définit un isomorphisme entre  $\mathbf{Mono}$  et  $\mathbf{pMono}$ .

L'adjonction des foncteurs transforme les foncteurs pseudo-monoïdaux en foncteurs pseudo-comonoïdaux et vice versa :

**PROPOSITION 2.1.90** — Soient deux catégories monoïdales (resp. monoïdales et unitaires)  $(\mathcal{C}, \otimes)$  et  $(\mathcal{C}', \otimes')$  (resp. avec objets unités  $\mathbb{1}$  et  $\mathbb{1}'$  respectivement).

1- Soit  $(f, a)$  (resp.  $(f, a, e)$ ) un foncteur pseudo-comonoïdal (resp. pseudo-comonoïdal et pseudo-counitaire) :  $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ . Supposons que  $f$  admet un adjoint à droite  $g$ . On définit des morphismes :

$$b : g(A') \otimes g(B') \longrightarrow g(A' \otimes' B')$$

naturels en  $(A', B') \in \text{Ob}(\mathcal{C}')^2$  par la composée :

$$g(A') \otimes g(B') \longrightarrow gf(g(A') \otimes g(B')) \xrightarrow{a} g(fg(A') \otimes' fg(B')) \longrightarrow g(A' \otimes' B')$$

(resp. ainsi qu'un morphisme  $n : \mathbb{1} \longrightarrow g(\mathbb{1}')$  par adjonction à partir de  $f(\mathbb{1}) \longrightarrow \mathbb{1}'$ ). Le couple  $(g, b)$  (resp.  $(g, b, n)$ ) est alors un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-monoïdal et pseudo-unitaire). De plus, cette construction est fonctorielle contravariante pour les 2-morphismes de foncteurs pseudo-comonoïdaux (resp. pseudo-comonoïdaux et pseudo-counitaires).

2- Soit  $(l, a)$  (resp.  $(l, a, e)$ ) un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-monoïdal et pseudo-unitaire) :  $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ . Supposons que  $l$  admet un adjoint à gauche  $k$ . On définit des morphismes :

$$b : k(A' \otimes' B') \longrightarrow k(A') \otimes k(B')$$

naturels en  $(A', B') \in \text{Ob}(\mathcal{C}')^2$  par la composée :

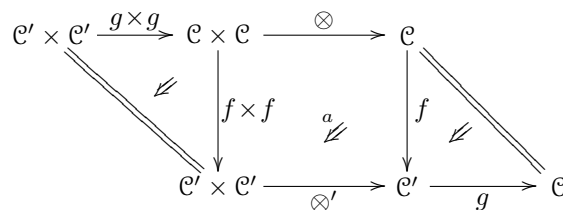
$$k(A' \otimes' B') \longrightarrow k(lk(A') \otimes' lk(B')) \xrightarrow{a} kl(l(A') \otimes l(B')) \longrightarrow l(A') \otimes l(B')$$

(resp. ainsi qu'un morphisme  $n : g(\mathbb{1}') \longrightarrow \mathbb{1}$  par adjonction à partir de  $\mathbb{1}' \longrightarrow f(\mathbb{1})$ ). Le couple  $(g, b)$  (resp.  $(g, b, n)$ ) est alors un foncteur pseudo-comonoïdal (resp. pseudo-comonoïdal et pseudo-counitaire). De plus, cette construction est fonctorielle contravariante pour les 2-morphismes de foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. pseudo-monoïdaux et pseudo-unitaires).

3- Les variantes symétriques de 1 et 2 sont également vraies.

**DEMONSTRATION** Les deux parties 1 et 2 sont échangées par la dualité. Plus précisément, l'énoncé 2 pour  $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  est l'énoncé 1 pour le foncteur induit entre les catégories monoïdales opposées  $f^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}'^{\text{op}}$ . Il suffit de prouver la première partie.

Dans le langage des diagrammes planaires, la transformation naturelle  $b$  s'écrit comme la composée de :



Ainsi,  $b$  n'est rien d'autre que le morphisme obtenu par adjonction à partir de la face carrée du coaccouplement de  $f$  :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \\
 f \times f \downarrow & \swarrow a & \downarrow f \\
 \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}'
 \end{array}$$

La compatibilité de  $b$  avec les isomorphismes d'associativité, s'exprime en disant que les composées des deux diagrammes plans suivants :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \times \mathcal{C} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C} \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \\
 (g \times g) \times g \uparrow & \swarrow g \times (g \times g) & \uparrow & \swarrow g \times g & \uparrow & \swarrow g & \uparrow \\
 (\mathcal{C}' \times \mathcal{C}') \times \mathcal{C}' & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C}' \times (\mathcal{C}' \times \mathcal{C}') & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}'
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{C} \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \\
 g \times (g \times g) \uparrow & \swarrow g \times g & \uparrow & \swarrow g & \uparrow \\
 \mathcal{C}' \times (\mathcal{C}' \times \mathcal{C}') & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}'
 \end{array}$$

sont égales modulo les isomorphismes d'associativité. En utilisant la compatibilité avec la composition horizontale (voir la proposition 1.1.12), on se ramène à montrer que les composées suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \times \mathcal{C} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C} \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \\
 (f \times f) \times f \downarrow & \swarrow f \times (f \times f) & \downarrow & \swarrow f \times f & \downarrow & \swarrow f & \downarrow \\
 (\mathcal{C}' \times \mathcal{C}') \times \mathcal{C}' & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C}' \times (\mathcal{C}' \times \mathcal{C}') & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}'
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{C} \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \\
 f \times (f \times f) \downarrow & \swarrow f \times f & \downarrow & \swarrow f & \downarrow \\
 \mathcal{C}' \times (\mathcal{C}' \times \mathcal{C}') & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}'
 \end{array}$$

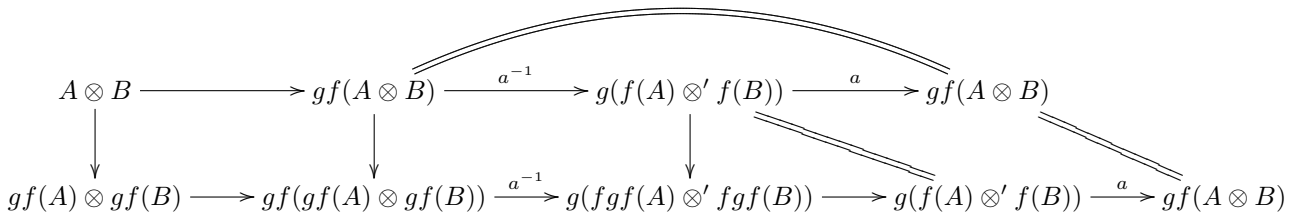
coïncident modulo les isomorphismes d'associativité. Ceci est clair par la définition même d'un foncteur pseudo-comonoïdal. Le même raisonnement s'applique pour la preuve de la compatibilité de  $b$  avec les isomorphismes de commutations.

La functorialité de cette construction par rapport aux transformations naturelles entre foncteurs pseudo-monoïdaux est évidente. Les vérifications concernant les objets unités sont également faciles. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.1.91** — Soit  $(f, a)$  un 1-morphisme dans la 2-catégorie  $\mathbf{pMono}$ . On suppose que  $(f, a)$  est monoïdal et que le foncteur sous-jacent  $f$  admet un adjoint à droite. Alors le 1-morphisme  $(f, a)$  admet un adjoint à droite dans  $\mathbf{pMono}$ .

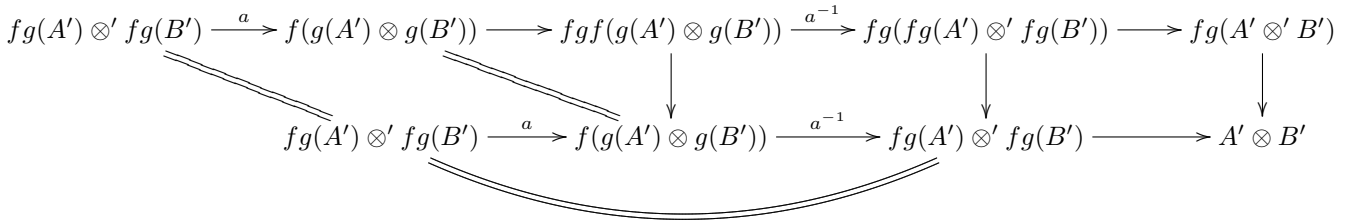
DEMONSTRATION Le foncteur  $(f, a) : (\mathcal{C}, \otimes) \longrightarrow (\mathcal{C}', \otimes')$  étant monoïdal, le couple  $(f, a^{-1})$  est un foncteur comonoïdal. Par la proposition 2.1.90, l'adjoint à droite  $g$  est naturellement un foncteur pseudo-comonoïdal. Pour montrer le lemme, il suffit de vérifier que les morphismes d'unité et de counité sont des transformations de foncteurs pseudo-monoïdaux.

On traite d'abord le morphisme d'unité. Pour  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ , on a un diagramme commutatif :



La composée des flèches horizontales inférieures du diagramme n'est autre que l'accouplement du foncteur pseudo-monoïdal  $g \circ f$ . Ce qui prouve que  $\text{id} \longrightarrow gf$  est bien compatible avec l'accouplement.

De même, pour le morphisme de counité, on utilise le diagramme commutatif :



pour  $(A', B') \in \text{Ob}(\mathcal{C}')^2$ .

C.Q.F.D

**Remarque 2.1.92** — On a vu que lorsqu'on prend l'adjoint à gauche (resp. à droite) d'un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-comonoïdal), on obtient un foncteur pseudo-comonoïdal (resp. pseudo-monoïdal). En fait, il est possible de raffiner la structure mise sur l'adjoint en un structure de projecteur (resp. coprojecteur). Concentrons-nous uniquement sur le cas non respé. Soient  $(l, a) : (\mathcal{C}, \otimes) \longrightarrow (\mathcal{C}', \otimes')$  un foncteur pseudo-monoïdal et  $k$  un adjoint à gauche de  $l$ . On définit une transformation naturelle :  $k(l(A) \otimes' B') \longrightarrow A \otimes k(B')$  par la composée :

$$k(l(A) \otimes' B') \longrightarrow k(l(A) \otimes' lk(B')) \longrightarrow kl(A \otimes k(B')) \longrightarrow A \otimes k(B')$$

Cette structure est plus fine que la structure de pseudo-comodule de  $k$  puisqu'elle permet de la retrouver en prenant simplement la composition :

$$k(A' \otimes' B') \longrightarrow k(lk(A') \otimes' B') \longrightarrow k(A') \otimes k(B')$$

La notion de projecteurs et coprojecteurs sera étudiée en détails dans la suite. Pour des raisons qui seront claires dans la section 2.3, il est important d'étendre la construction qu'on vient d'esquisser au cadre plus général des modules et comodules sur des foncteurs pseudo-monoïdaux et pseudo-comonoïdaux.

**Modules et projecteurs entre catégories monoïdales**

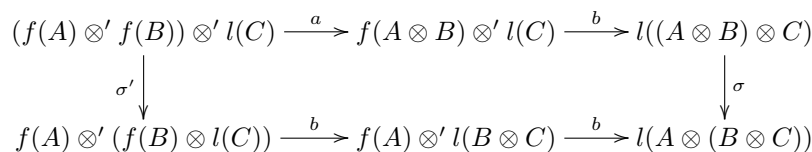
La notion d'un foncteur pseudo-monoïdal ressemble jusqu'à un certain point à la notion d'algèbre. Dans ce paragraphe, on poussera cette ressemblance un cran plus loin en introduisant la notion de modules sur un foncteur pseudo-monoïdal.

**DEFINITION 2.1.93** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes)$  et  $(\mathcal{C}', \otimes')$  deux catégories monoïdales (resp. monoïdales unitaires avec objets unités  $\mathbb{1}$  et  $\mathbb{1}'$  respectivement).

1- Soit  $(f, a)$  (resp.  $(f, a, e)$ ) un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-monoïdal et pseudo-unitaire). On appelle  $f$ -module (resp.  $f$ -module unitaire) à gauche, un couple  $(l, b)$  avec :

- $l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur,
- $b : f(A) \otimes' l(B) \longrightarrow l(A \otimes B)$  des morphismes naturels en  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ ,

tel que pour tout  $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^3$  le diagramme suivant :





soit commutatif (resp. et tel que la composée suivante :

$$l(-) \xrightarrow{u_g^{-1}} \mathbb{1}' \otimes l(-) \longrightarrow f(\mathbb{1}) \otimes l(-) \xrightarrow{b} l(\mathbb{1} \otimes -) \xrightarrow{u_g} l(-)$$

soit égale à l'identité du foncteur  $l$ ).

On a la notion  $\otimes$ -duale de  $f$ -module (resp.  $f$ -module unitaire) à droite. Un morphisme de  $f$ -modules de  $(l, b)$  vers  $(l', b')$  est une transformation naturelle de  $l$  vers  $b$  compatible au sens évident avec les morphismes  $b$  et  $b'$ .

2- Soit  $(g, a)$  (resp.  $(g, a, e)$ ) un foncteur pseudo-comonoïdal (resp. pseudo-comonoïdal et pseudo-counitaire). On appelle  $g$ -comodule (resp.  $g$ -comodule counitaire) à gauche, un couple  $(k, c)$  avec :

- $k : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur,
- $c : k(A \otimes B) \longrightarrow g(A) \otimes' k(B)$  des morphismes naturels en  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ ,

tel que les conditions duales du 1- soient vérifiées.

On a également la notion de  $g$ -comodule (resp.  $g$ -comodule counitaire) à droite. Un morphisme de  $g$ -comodules de  $(k, c)$  vers  $(k', c')$  est une transformation naturelle de  $k$  vers  $k'$  compatible au sens évident avec les morphismes  $c$  et  $c'$ .

**DEFINITION 2.1.94** — 1- Un module à gauche  $[f, l]$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$  est un quadruplet  $(f, l, a, b)$  avec  $(f, a)$  un foncteur pseudo-monoïdal et  $(l, b)$  un  $f$ -module à gauche. La catégorie des modules à gauche de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$  est notée  $\text{Mod}_g(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ . Une flèche de  $\text{Mod}_g(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  est un couple  $(u, v) : (f_1, l_1, a_1, b_1) \longrightarrow (f_2, l_2, a_2, b_2)$  avec  $u : f_1 \longrightarrow f_2$  une transformation naturelle monoïdale et  $v : l_1 \longrightarrow l_2$  une transformation naturelle tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} f_1(A) \otimes' l_1(B) & \longrightarrow & l_1(A \otimes B) \\ \begin{array}{c} u \otimes' v \downarrow \\ \downarrow \end{array} & & \downarrow v \\ f_2(A) \otimes' l_2(B) & \longrightarrow & l_2(A \otimes B) \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ .

Étant donnée une troisième catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}'', \otimes'')$ , il existe un foncteur de composition :

$$\text{Mod}_g(\mathcal{C}', \mathcal{C}'') \times \text{Mod}_g(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \longrightarrow \text{Mod}_g(\mathcal{C}, \mathcal{C}'')$$

qui associe à  $[f', l'] = (f', l', a', b')$  et  $[f, l] = (f, l, a, b)$  le quadruplet  $[f' \circ f, l' \circ l] = (f' \circ f, l' \circ l, a'', b'')$  avec  $(f' \circ f, a'')$  le foncteur pseudo-monoïdal composé de  $f$  et  $f'$  (voir la remarque 2.1.89) et  $b''$  la composée :

$$f' \circ f(A) \otimes l'(B) \longrightarrow l'(f(A) \circ l(A)) \longrightarrow l' \circ l(A)$$

On obtient ainsi une 2-catégorie dont les objets sont les catégories monoïdales, et dont les 1-morphismes sont les modules à gauche. On appellera  $\mathfrak{Mod}_g$  cette 2-catégorie. On a un 2-foncteur d'oubli 1-covariant et 2-covariant évident :

$$\mathfrak{Mod}_g \longrightarrow \mathfrak{pMono}$$

qui associe à un quadruplet  $(f, l, a, b)$  le foncteur pseudo-monoïdal  $(f, a)$ .

2- On a la notion duale de comodule à gauche de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$ . On forme également la 2-catégorie stricte des comodules  $\mathfrak{cMod}_g$ . Les notions  $\otimes$ -duales, de modules à droite et de comodules à droite s'organisent également en deux 2-catégories strictes  $\mathfrak{Mod}_d$  et  $\mathfrak{cMod}_d$ .

**DEFINITION 2.1.95** — 1- Gardons les notations de la définition 2.1.93. Un  $f$ -bimodule est un triplet  $(l, b_g, b_d)$  tel que  $(l, b_g)$  est un  $f$ -module à gauche et  $(l, b_d)$  un  $f$ -module à droite et tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} (f(A) \otimes' l(B)) \otimes' f(C) & \xrightarrow{b_g} & l(A \otimes B) \otimes' f(C) & \xrightarrow{b_d} & l((A \otimes B) \otimes C) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ f(A) \otimes' (l(B) \otimes' f(C)) & \xrightarrow{b_d} & f(A) \otimes' l(B \otimes C) & \xrightarrow{b_g} & l(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$

pour tout  $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^3$ . On définit également la notion de bimodule de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$  ainsi que la 2-catégorie des bimodules  $\mathfrak{Mod}$ .

2- On a également la notion duale de  $g$ -bicomodules et de bicomodules de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$ . On notera  $\mathfrak{cMod}$  la 2-catégorie des bicomodules.

**Remarque 2.1.96** — Soit  $f$  un foncteur pseudo-monoïdal. L'exemple le plus simple de  $f$ -module est le foncteur  $f$  lui-même. Remarquons que  $f$  est même un  $f$ -bimodule. Il va sans dire que si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont symétriques et que  $f$  est également symétrique, un module à droite est immédiatement un module à gauche et même un bimodule. Ceci s'applique aussi pour les comodules.

**PROPOSITION 2.1.97** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes)$  et  $(\mathcal{C}', \otimes')$  deux catégories monoïdales et  $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur pseudo-monoïdal.

1- On suppose donné un  $f$ -module à gauche  $(l, b)$  et un adjoint à gauche  $k$  du foncteur  $l$ . On définit un morphisme  $c : k(f(A) \otimes' B') \longrightarrow A \otimes k(B')$ , naturel en  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  et  $B' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ , par la composée :

$$k(f(A) \otimes' B') \longrightarrow k(f(A) \otimes' lk(B')) \xrightarrow{b} kl(A \otimes k(B')) \longrightarrow A \otimes k(B')$$

Alors, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} k(f(A) \otimes' (f(B) \otimes' C')) & \longrightarrow & A \otimes k(f(B) \otimes' C') & \longrightarrow & A \otimes (B \otimes k(C')) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ k((f(A) \otimes' f(B)) \otimes' C') & \longrightarrow & k(f(A \otimes B) \otimes' C') & \longrightarrow & (A \otimes B) \otimes k(C') \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A, B, C') \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2 \times \text{Ob}(\mathcal{C}')$ .

2- On suppose donné un  $f$ -bimodule  $(l, b_g, b_d)$  ainsi qu'un adjoint à gauche  $k$  de  $l$ . Le module à gauche  $(l, b_g)$  et le module à droite  $(l, b_d)$  induisent par 1- les deux transformations :

$$c_g : k(f(A) \otimes' B') \longrightarrow A \otimes k(B') \quad \text{et} \quad c_d : k(A' \otimes' f(B)) \longrightarrow k(A') \otimes B$$

naturelles en  $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2 \times \text{Ob}(\mathcal{C}')^2$ . Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} k(f(A) \otimes' (B' \otimes' f(C))) & \xrightarrow{c_g} & A \otimes k(B' \otimes' f(C)) & \xrightarrow{c_d} & A \otimes (k(B') \otimes C) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ k((f(A) \otimes' B') \otimes' f(C)) & \xrightarrow{c_d} & k(f(A) \otimes' B') \otimes C & \xrightarrow{c_g} & (A \otimes k(B')) \otimes C \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A, B', C) \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}') \times \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

DEMONSTRATION Il est pratique de penser à un  $f$ -module  $(l, b)$  comme à une classe de faces carrées :

$$(2.12) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \\ l \downarrow & \cong_b & \downarrow l \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(A) \otimes' -} & \mathcal{C}' \end{array}$$

paramétrée par les objets de  $\mathcal{C}$ . On voit alors immédiatement que les 2-morphismes  $c$  sont ceux obtenus à partir de la face (2.12) par les adjonctions  $(l, k)$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \\ k \uparrow & \xleftarrow{c} & \uparrow k \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(A) \otimes' -} & \mathcal{C}' \end{array}$$

Il s'agit de montrer que les composées des diagrammes planaires suivants :

$$(2.13) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{B \otimes -} & \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \\ \uparrow k & \nearrow^c & \uparrow k & \nearrow^c & \uparrow k \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(B) \otimes' -} & \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(A) \otimes' -} & \mathcal{C}' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{(A \otimes B) \otimes -} & \mathcal{C} \\ \uparrow k & \nearrow^c & \uparrow k \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(A \otimes B) \otimes' -} & \mathcal{C}' \\ \uparrow a & & \uparrow a \\ & (f(A) \otimes' f(B)) \otimes - & \end{array}$$

sont égales modulo les morphismes de foncteurs :

$$A \otimes (B \otimes -) \simeq (A \otimes B) \otimes - \quad \text{et} \quad f(A) \otimes' (f(B) \otimes' -) \simeq (f(A) \otimes' f(B)) \otimes' -$$

Ces isomorphismes étant ceux induits par les isomorphismes d'associativité. Par la functorialité de la construction 1.1.9, on voit que la composée du second diagramme planaire de (2.13) coïncide avec le 2-morphisme obtenu par les adjonctions  $(k, l)$  à partir de la face carrée composée de :

$$(2.14) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{(A \otimes B) \otimes -} & \mathcal{C} \\ \downarrow l & \nearrow_b & \downarrow l \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(A \otimes B) \otimes' -} & \mathcal{C}' \\ \uparrow a & & \uparrow a \\ & (f(A) \otimes' f(B)) \otimes - & \end{array}$$

De même, en utilisant la compatibilité de la construction 1.1.9 avec la composition horizontale des faces carrées (voir la proposition 1.1.12), on voit que la composée du premier diagramme planaire de (2.13) est la face carrée obtenue par les adjonctions  $(k, l)$  à partir de la face carrée composée de :

$$(2.15) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{B \otimes -} & \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \\ \downarrow l & \nearrow_b & \downarrow l & \nearrow_b & \downarrow l \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(B) \otimes' -} & \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(A) \otimes' -} & \mathcal{C}' \end{array}$$

On se ramène ainsi à prouver que les composées des diagrammes planaires (2.14) et (2.15) sont égales modulo les isomorphismes d'associativités. Ceci découle immédiatement de la commutation du diagramme de la définition 2.1.93. La commutation du diagramme de **1-** est prouvée. La commutation du diagramme de **2-** se démontre par la même méthode. Elle sera laissée en exercice pour le lecteur. C.Q.F.D

En passant aux catégories opposées, on obtient le résultat correspondant pour les comodules :

**PROPOSITION 2.1.98** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes)$  et  $(\mathcal{C}', \otimes')$  deux catégories monoïdales et  $(g, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur pseudo-comonoïdal.

**1-** On suppose donné un  $g$ -comodule à gauche  $(k, b)$  tel que le foncteur  $k$  admet un adjoint à droite  $l$ . On définit un morphisme  $c : A \otimes l(B') \longrightarrow l(g(A) \otimes' B')$ , naturel en  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  et  $B' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ , par la composée :

$$A \otimes l(B') \longrightarrow lk(A \otimes l(B')) \xrightarrow{b} l(g(A) \otimes' kl(B')) \longrightarrow l(g(A) \otimes' B')$$

Alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes (B \otimes l(C')) & \longrightarrow & A \otimes l(g(B) \otimes' C') & \longrightarrow & l(g(A) \otimes' (g(B) \otimes' C')) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ (A \otimes B) \otimes l(C') & \longrightarrow & l(g(A \otimes B) \otimes' C') & \longrightarrow & l((g(A) \otimes' g(B)) \otimes' C') \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A, B, C') \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2 \times \text{Ob}(\mathcal{C}')$ .

2- On suppose donné un  $g$ -bicomodule  $(k, b_g, b_d)$  ainsi qu'un adjoint à gauche  $l$  de  $k$ . Le comodule à gauche  $(l, b_g)$  et le comodule à droite  $(l, b_d)$  induisent par **1**- les deux transformations :

$$c_g : A \otimes l(B') \longrightarrow l(g(A) \otimes' B') \quad \text{et} \quad c_d : l(A') \otimes B \longrightarrow l(A' \otimes' g(B))$$

naturelles en  $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2 \times \text{Ob}(\mathcal{C}')^2$ . Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes (l(B') \otimes C) & \xrightarrow{c_d} & A \otimes l(B' \otimes' g(C)) & \xrightarrow{c_g} & l(g(A) \otimes' (B' \otimes' g(C))) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ (A \otimes l(B')) \otimes C & \xrightarrow{c_g} & l(g(A) \otimes' B') \otimes C & \xrightarrow{c_d} & l((g(A) \otimes' B') \otimes' g(C)) \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A, B', C) \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}') \times \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

Les propositions 2.1.97 et 2.1.98 motivent les définitions suivantes :

**DEFINITION 2.1.99** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes)$  et  $(\mathcal{C}', \otimes')$  deux catégories monoïdales.

1- Soit  $(f, a)$  un foncteur pseudo-monoïdal. On appelle  $f$ -projecteur à gauche un couple  $(k, c)$  avec :

–  $k : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$  un foncteur,

–  $c : k(f(A) \otimes' B') \longrightarrow A \otimes k(B')$  des morphismes naturels en  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  et  $B' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ ,

tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} k(f(A) \otimes' (f(B) \otimes' C')) & \longrightarrow & A \otimes k(f(B) \otimes' C') & \longrightarrow & A \otimes (B \otimes k(C')) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ k((f(A) \otimes' f(B)) \otimes' C') & \longrightarrow & k(f(A \otimes B) \otimes' C') & \longrightarrow & (A \otimes B) \otimes k(C') \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A, B, C') \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2 \times \text{Ob}(\mathcal{C}')$ .

On a la notion  $\otimes$ -duale de  $f$ -projecteur à droite. Un morphisme de  $f$ -projecteurs de  $(k, c)$  vers  $(k', c')$  est une transformation naturelle de  $k$  vers  $k'$  compatible au sens évident avec les morphismes  $b$  et  $b'$ .

2- Soit  $(g, a)$  un foncteur pseudo-comonoïdal. On appelle  $g$ -coprojecteur à gauche un couple  $(n, d)$  avec :

–  $n : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$  un foncteur,

–  $d : A \otimes n(B') \longrightarrow n(g(A) \otimes' B')$  des morphismes naturels en  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  et  $B' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ ,

tel que les conditions duales du **1**- soient vérifiés.

On a également la notion  $\otimes$ -duale de  $g$ -coprojecteur à droite. Un morphisme de  $g$ -coprojecteurs de  $(n, d)$  vers  $(n', d')$  est une transformation naturelle de  $n$  vers  $n'$  compatible au sens évident avec les morphismes  $c$  et  $c'$ .

**DEFINITION 2.1.100** — **1**- Un projecteur à gauche  $[f, k]$  de  $\mathcal{C}'$  dans  $\mathcal{C}$  un quadruplet  $(f, k, a, c)$  avec  $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur pseudo-monoïdal et  $(k, c)$  un  $f$ -projecteur à gauche. La catégorie des projecteurs à gauche de  $\mathcal{C}'$  dans  $\mathcal{C}$  est notée  $\text{Proj}_g(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ . Une flèche de  $\text{Proj}_g(\mathcal{C}', \mathcal{C})$  est un couple  $(u, v) : (f_1, k_1, a_1, c_1) \longrightarrow (f_2, k_2, a_2, c_2)$  avec  $u : f_2 \longrightarrow f_1$  une transformation naturelle monoïdale et  $v : k_1 \longrightarrow k_2$  une transformation naturelle telle que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} k_1(f_2(A) \otimes' B') & \xrightarrow{v} & k_2(f_2(A) \otimes' B') & \xrightarrow{c_2} & A \otimes k_2(B') \\ \parallel & & & & \uparrow v \\ k_1(f_2(A) \otimes' B') & \xrightarrow{u} & k_1(f_1(A) \otimes' B') & \xrightarrow{c_1} & A \otimes k_1(B') \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A, B') \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}')$ .

Étant donnée une troisième catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}'', \otimes'')$ , il existe un foncteur de composition :

$$\text{Proj}_g(\mathcal{C}', \mathcal{C}) \times \text{Proj}_g(\mathcal{C}'', \mathcal{C}') \longrightarrow \text{Proj}_g(\mathcal{C}'', \mathcal{C})$$

qui associe à  $[f', k'] = (f', k', a', c')$  et  $[f, k] = (f, k, a, c)$  le quadruplet  $(f' \circ f, k \circ k', a'', c'')$  avec  $(f' \circ f, a'')$  le foncteur monoïdal composée (voir la remarque 2.1.89) et  $c''$  la composée :

$$kk'(f'f(A) \otimes'' B'') \xrightarrow{c'} k(f(A) \otimes' k'(B'')) \xrightarrow{c} A \otimes kk'(B'')$$

On obtient ainsi une 2-catégorie dont les objets sont les catégories monoïdales, et les 1-morphismes, les projecteurs à gauche. On appellera  $\mathfrak{Proj}_g$  cette 2-catégorie. Notons que le 2-foncteur évident :  $\mathfrak{Proj}_g \longrightarrow \mathfrak{pMono}$  qui à  $[f, k]$  associe le foncteur pseudo-monoïdal  $f$  est 1-contravariant et 2-contravariant.

2- On a également la notion duale de coprojecteur à gauche qui s'organise en une 2-catégorie  $\mathfrak{cProj}_g$ . Les notions  $\otimes$ -duales fournissent également deux 2-catégories strictes  $\mathfrak{Proj}_d$  et  $\mathfrak{cProj}_d$ .

**DEFINITION 2.1.101** — 1- Gardons les notations de la définition 2.1.99. Un  $f$ -biprojecteur est un triplet  $(k, c_g, c_d)$  tel que  $(k, c_g)$  est un  $f$ -projecteur à gauche et  $(k, c_d)$  un  $f$ -projecteur à droite et tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} k(f(A) \otimes' (B' \otimes' f(C))) & \xrightarrow{c_g} & A \otimes k(B' \otimes' f(C)) & \xrightarrow{c_d} & A \otimes (k(B') \otimes C) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ k((f(A) \otimes' B') \otimes' f(C)) & \xrightarrow{c_d} & k(f(A) \otimes' B') \otimes C & \xrightarrow{c_g} & (A \otimes k(B')) \otimes C \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A, B', C) \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}') \times \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

2- On a également la notion duale de  $g$ -bicoprojecteurs. On définit également la notion de biprojecteurs et bico-projecteurs de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$ . On notera  $\mathfrak{Proj}$  et  $\mathfrak{cProj}$  les 2-catégories des projecteurs et coprojecteurs bilatères.

**Remarque 2.1.102** — On peut reformuler les propositions 2.1.97 et 2.1.98 de la manière suivante. Étant donné un module à gauche  $[f, l]$  (resp. un comodule à gauche  $[g, k]$ ) de  $(\mathcal{C}, \otimes)$  dans  $(\mathcal{C}', \otimes')$  avec  $l$  (resp.  $k$ ) admettant un adjoint à gauche  $k$  (resp. un adjoint à droite  $l$ ), on peut munir le couple  $(f, k)$  (resp.  $(g, l)$ ) d'une structure de projecteur (resp. coprojecteur) à droite. On a réciproquement :

**PROPOSITION 2.1.103** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes)$  et  $(\mathcal{C}', \otimes')$  deux catégories monoïdales et  $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur pseudo-monoïdal.

1- On suppose donné un  $f$ -projecteur à gauche  $(k, c)$  tel que le foncteur  $k$  admet un adjoint à droite  $l$ . On définit un morphisme  $b : f(A) \otimes' l(B) \longrightarrow l(A \otimes B)$ , naturel en  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$  par la composée :

$$f(A) \otimes' l(B) \longrightarrow lk(f(A) \otimes l(B)) \xrightarrow{c} l(A \otimes kl(B)) \longrightarrow l(A \otimes B)$$

Alors, le couple  $(l, b)$  est un  $f$ -module à gauche.

2- On suppose donné un  $f$ -biprojecteur  $(l, c_g, c_d)$  ainsi qu'un adjoint à droite  $l$  de  $k$ . Les deux transformations :

$$b_g : f(A) \otimes l(B) \longrightarrow l(A \otimes B) \quad \text{et} \quad b_d : l(A) \otimes f(B) \longrightarrow l(A \otimes B)$$

naturelles en  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$  définissent une structure de  $f$ -bimodule sur  $l$ .

DEMONSTRATION On obtient une preuve en parcourant celle de la proposition 2.1.97 dans le sens inverse. On laissera les détails aux lecteurs. C.Q.F.D

On a bien entendu l'énoncé correspondant pour les coprojecteurs et comodules. Le lemme suivant est facile et laissé aux lecteurs :

**LEMME 2.1.104** — Les constructions des propositions 2.1.97 et 2.1.98 sont compatibles à la composition et aux 2-morphismes dans  $\mathfrak{Mod}_g$  et  $\mathfrak{cMod}_g$ . De même les constructions de la propositions 2.1.103 sont compatibles à la composition et aux 2-morphismes dans  $\mathfrak{Proj}_g$  et  $\mathfrak{cProj}_g$ .

### Faces carrées exotiques

On termine avec quatre diagrammes commutatifs faisant apparaître des projecteurs et des modules à droite et à gauche. Le plus simple est le résultat ci-dessous :

**LEMME 2.1.105** — 1- On suppose donnée une face carrée dans la 2-catégorie  $\mathfrak{Mod}_g$  :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{[g', m']} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\ \uparrow [f', l'] & \llcorner & \uparrow [f, l] \\ (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{[g, m]} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \end{array}$$

avec  $[f, l]$ ,  $[f', l']$ ,  $[g, m]$  et  $[g', m']$  des modules à gauche. Soient  $k$  et  $k'$  des adjoints à gauche de  $l$  et  $l'$  respectivement. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 k'(g'f(A_1) \otimes_2' m'(B'_1)) & \xrightarrow{d'} & k'm'(f(A_1) \otimes_1' B'_1) & \longrightarrow & mk(f(A_1) \otimes_1' B'_1) & \longrightarrow & m(A_1 \otimes_1 k(B'_1)) \\
 \downarrow & & & & & & \parallel \\
 k'(f'g(A_1) \otimes_2' m'(B'_1)) & \longrightarrow & g(A_1) \otimes_2 k'm'B'_1 & \longrightarrow & g(A_1) \otimes_2 mkB'_1 & \xrightarrow{d} & m(A_1 \otimes_1 k(B'_1))
 \end{array}$$

formé de :

- le morphisme  $g'f \longrightarrow f'g$  de la face carrée de  $\mathfrak{Mod}_g$ ,
- les morphismes structuraux des modules à gauche  $[g, m]$  et  $[g', m']$ ,
- les morphismes structuraux des projecteurs à gauche  $[f, k]$  et  $[f', k']$ ,
- le morphisme  $k'm' \longrightarrow mk$  obtenu par les adjonctions  $(k, l)$  et  $(k', l')$  à partir de  $m'l \longrightarrow l'm$ ,

est commutatif.

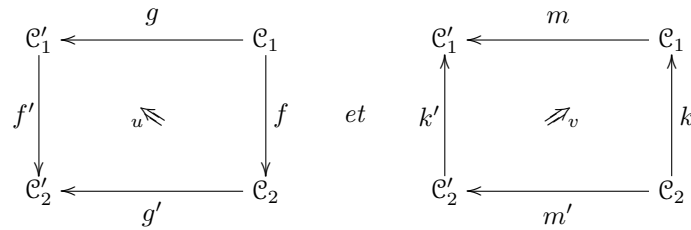
2- Réciproquement, soient quatre catégories monoïdales  $(\mathcal{C}_1, \otimes_1)$ ,  $(\mathcal{C}'_1, \otimes'_1)$ ,  $(\mathcal{C}_2, \otimes_2)$  et  $(\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$ . On suppose donnés deux modules à gauche :

$$(g, m) : (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2) \quad \text{et} \quad (g', m') : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$$

ainsi que deux projecteurs à gauche :

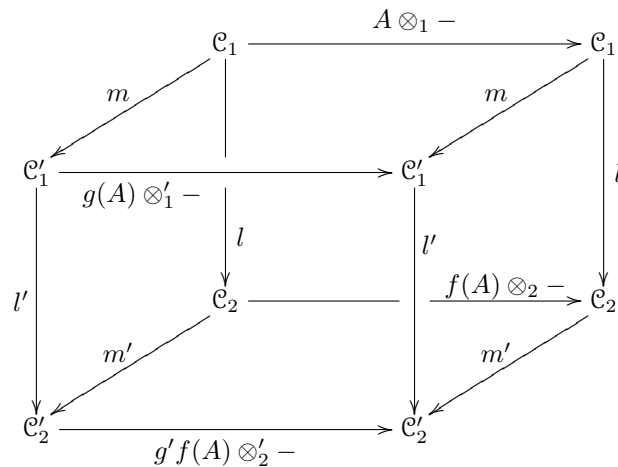
$$(f, k) : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \quad \text{et} \quad (f', k') : (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2)$$

On suppose également données les deux faces carrées dans  $\mathfrak{Cat}$  :



avec  $u$  une transformation naturelle de foncteurs pseudo-monoïdaux et  $v$  faisant commuter le diagramme du 1. Si  $l$  est un adjoint à droite de  $k$  et  $v' : m'l \longrightarrow l'm$  la transformation obtenue à partir de  $v$  suivant les adjonctions  $(k, l)$  et  $(k', l')$ , alors le couple  $(u, v')$  est un 2-morphisme de modules à gauche.

DEMONSTRATION On démontre uniquement la première partie du lemme. La seconde partie se démontre en remontant la démonstration du 1. En écrivant ce qu'est une face carrée dans  $\mathfrak{Mod}_g$  on voit que pour  $A_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1)$  on a un cube solide commutatif :



formé des quatre faces carrées :

$$(2.16) \quad \begin{array}{cccc}
 \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{g(A) \otimes_1' -} & \mathcal{C}'_1 \\ l' \downarrow & \nearrow & \downarrow l' \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{g'f(A) \otimes_2' -} & \mathcal{C}'_2 \end{array} & , & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{A \otimes_1 -} & \mathcal{C}_1 \\ m \downarrow & \nearrow & \downarrow m \\ \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{g(A) \otimes_1' -} & \mathcal{C}'_1 \end{array} & , & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{A \otimes_1 -} & \mathcal{C}_1 \\ l \downarrow & \nearrow & \downarrow l \\ \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{f(A) \otimes_2 -} & \mathcal{C}_2 \end{array} & \text{et} & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{f(A) \otimes_2 -} & \mathcal{C}_2 \\ m' \downarrow & \nearrow & \downarrow m' \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{g'f(A) \otimes_2' -} & \mathcal{C}'_2 \end{array}
 \end{array}$$

et de deux faces carrées égales à :

$$(2.17) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{m} & \mathcal{C}_1 \\ \downarrow l' & \cong & \downarrow l \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{m'} & \mathcal{C}_2 \end{array}$$

Les trois dernières faces de (2.16), sont simplement les morphismes structuraux des modules à gauche  $(g, m)$ ,  $(f, l)$  et  $(g', m')$ , tandis que la première est la composée :

$$g'f(A) \otimes'_2 l'(-) \longrightarrow f'g(A) \otimes'_2 l'(-) \longrightarrow l'(g(A) \otimes'_1 -)$$

La face carrée (2.17), est celle sous-jacente à la face carrée de  $\mathfrak{Mod}_g$  de l'énoncé. En utilisant le corollaire 1.1.14, on déduit un cube commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{A \otimes_1 -} & \mathcal{C}_1 \\ & m \nearrow & \uparrow & & \nearrow m \\ \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{g(A) \otimes'_1 -} & \mathcal{C}'_1 & & \mathcal{C}'_1 \\ \uparrow k' & & \downarrow k & & \uparrow k \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{g'f(A) \otimes'_2 -} & \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{f(A) \otimes_2 -} & \mathcal{C}_2 \\ & m' \nearrow & \downarrow k' & & \nearrow m' \end{array}$$

On laisse aux lecteurs la tâche de vérifier que la commutation de ce cube se traduit dans le langage habituel des flèches par la commutation du diagramme de l'énoncé. Notons en guise d'indication que par la proposition 1.1.11, la face carrée :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{g(A) \otimes'_1 -} & \mathcal{C}'_1 \\ \uparrow k' & \cong & \uparrow k' \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{g'f(A) \otimes'_2 -} & \mathcal{C}'_2 \end{array}$$

est égale à la composée :  $k'(g'f(A) \otimes'_2 -) \longrightarrow k'(f'g(A) \otimes'_2 -) \longrightarrow g(A) \otimes'_1 k'(-)$ . C.Q.F.D

**Remarque 2.1.106** — Le lemme ci-dessus, admet une version pour les faces dans la 2-catégorie  $\mathfrak{Comod}_g$  des comodules à gauche. On prendra alors un adjoint à droite au lieu d'un adjoint à gauche. Le résultat correspondant s'obtient alors par dualité. Les détails sont laissés aux lecteurs.

On fait la définition suivante :

**DEFINITION 2.1.107** — Une face carrée à gauche de modules et comodules :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{[g', n']} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\ \uparrow [f', l'] & \cong & \uparrow [f, l] \\ (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{[g, n]} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \end{array}$$

est la donnée de deux comodules à gauche  $[f, l]$  et  $[f', l']$  et de deux modules à gauche  $[g, n]$  et  $[g', n']$  ainsi que deux transformations naturelles :

$$f'g \longrightarrow g'f \quad \text{et} \quad l'n \longrightarrow n'l$$

telles que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 l'(g(A_1) \otimes_2 n(B_1)) & \longrightarrow & f'g(A_1) \otimes'_2 l'n(B) & \longrightarrow & g'f(A_1) \otimes'_2 n'l(B_1) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 l'n(A_1 \otimes_1 B_1) & \longrightarrow & n'l(A_1 \otimes_1 B_1) & \longrightarrow & n'(f(A_1) \otimes'_1 l(B_1))
 \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A_1, B_1) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1)^2$ .

**Remarque 2.1.108** — On a la notion  $\otimes$ -duale de face carrée à droite de modules et comodules. On peut par ailleurs passer aux catégories opposées. On obtient alors une face carrée à gauche de modules et comodules en faisant une symétrie par rapport à une diagonale :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) \xleftarrow{[f'^{\text{op}}, l'^{\text{op}}]} & & (\mathcal{C}_2^{\text{op}}, \otimes_2^{\text{op}}) \\
 [g'^{\text{op}}, n'^{\text{op}}] \uparrow & \cong & \uparrow [g^{\text{op}}, n^{\text{op}}] \\
 (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \xleftarrow{[f^{\text{op}}, l^{\text{op}}]} & & (\mathcal{C}_1^{\text{op}}, \otimes_1^{\text{op}})
 \end{array}$$

Ceci permet de déduire du lemme qui suivra une version concernant les adjoints à gauche de  $n$  et  $n'$ . Le lecteur pourra facilement écrire le diagramme commutatif correspondant.

**Remarque 2.1.109** — Il est évident qu'on peut composer les faces carrées à gauche de modules et comodules dans les deux sens vertical et horizontal.

On a l'analogie du lemme 2.1.105 pour les faces carrées à gauche de modules et comodules :

**LEMME 2.1.110** — 1- On suppose donnée une face carrée à gauche de modules et comodules :

$$(2.18) \quad \begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) \xleftarrow{[g', n']} & & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\
 [f', l'] \uparrow & \cong & \uparrow [f, l] \\
 (\mathcal{C}_2, \otimes_2) \xleftarrow{[g, n]} & & (\mathcal{C}_1, \otimes_1)
 \end{array}$$

avec  $[f, l]$  et  $[f', l']$  deux comodules à gauche et  $[g, n]$  et  $[g', n']$  deux modules à gauche. Soient  $m$  et  $m'$  des adjoints à droite de  $l$  et  $l'$ . Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 g(A_1) \otimes_2 nm(B'_1) & \longrightarrow & n(A_1 \otimes_1 m(B'_1)) & \longrightarrow & nm(f(A_1) \otimes'_1 B'_1) & \longrightarrow & m'n'(f(A_1) \otimes'_1 B'_1) \\
 \downarrow & & & & & & \parallel \\
 g(A_1) \otimes_2 m'n'(B'_1) & \longrightarrow & m'(f'g(A_1) \otimes'_2 n'(B'_1)) & \longrightarrow & m'(g'f(A_1) \otimes'_2 n'(B'_1)) & \longrightarrow & m'n'(f(A_1) \otimes'_1 B'_1)
 \end{array}$$

formé de :

- le 1-morphisme  $f'g \longrightarrow g'f$  de la face carrée à gauche (2.18),
- les 1-morphismes structuraux des coprojecteurs à gauche  $[f, m]$  et  $[f', m']$ ,
- les 1-morphismes structuraux des modules à gauche  $[g, n]$  et  $[g', n']$ ,
- le 1-morphisme  $nm \longrightarrow m'n'$  obtenu à partir de  $l'n \longrightarrow n'l$  suivant les adjonctions  $(l, m)$  et  $(l', m')$ ,

est commutatif.

2- Réciproquement, soient quatre catégories monoïdales  $(\mathcal{C}_1, \otimes_1)$ ,  $(\mathcal{C}'_1, \otimes'_1)$ ,  $(\mathcal{C}_2, \otimes_2)$  et  $(\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$ . On suppose donnés deux modules à gauche :

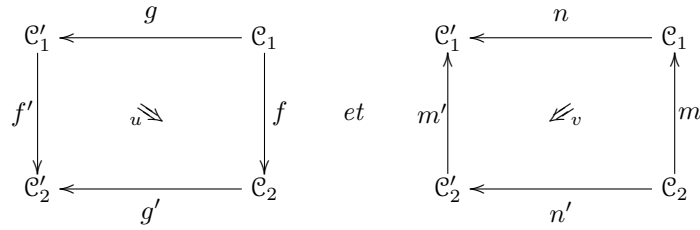
$$[g, n] : (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2) \quad \text{et} \quad [g', n'] : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$$

ainsi que deux coprojecteurs à gauche :

$$[f, m] : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \quad \text{et} \quad [f', m'] : (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2)$$

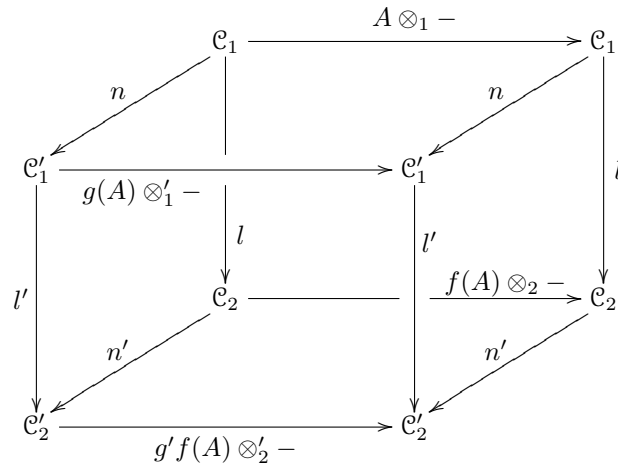
On suppose également données les deux faces carrées dans  $\mathcal{C}\text{at}$  :



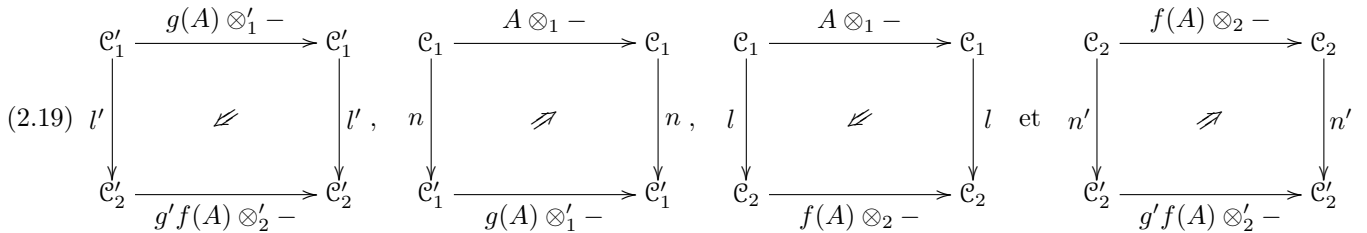


faisant commuter le diagramme du 1. Si  $l$  est un adjoint à gauche de  $m$  et  $v' : m'l \longrightarrow l'm$  la transformation déduite de  $v$  suivant les adjonctions  $(l, m)$  et  $(l', m')$ , le couple  $(u, v')$  définit une face carrée à gauche de modules et comodules.

DEMONSTRATION La preuve de ce lemme est complètement analogue à celle du lemme 2.1.105. La seule différence, est qu'on part plutôt du cube solide :



formé des quatre faces carrées :



et de deux faces carrées égales à :



Les trois dernières faces de (2.19), sont simplement les morphismes structuraux des modules et comodules à gauche  $(g, n)$ ,  $(f, l)$  et  $(g', n')$ , tandis que la première est la composée:

$$l'(g(A) \otimes'_1 -) \longrightarrow f'g(A) \otimes'_2 l'(-) \longrightarrow g'f(A) \otimes'_2 l'(-)$$

La face carrée (2.20), est celle sous-jacente à la face carrée à gauche de modules et comodules de l'énoncé. C.Q.F.D

On continue avec :

**DEFINITION 2.1.111** — Une face carrée mixte de modules :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{[g', m']} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\
 \uparrow [f', l'] & \Downarrow & \uparrow [f, l] \\
 (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{[g, m]} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1)
 \end{array}$$

est la donnée de deux modules à droite  $[f, l]$  et  $[f', l']$  et deux modules à gauche  $[g, m]$  et  $[g', m']$  ainsi que trois transformations naturelles :

$$f'm \longrightarrow m'f \quad , \quad g'l \longrightarrow l'g \quad \text{et} \quad m'l \longrightarrow l'm$$

faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g'l(A_1) \otimes'_2 m'f(B_1) & \longrightarrow & m'(l(A_1) \otimes'_1 f(B_1)) & \longrightarrow & m'l(A_1 \otimes_1 B_1) \\
 & \nearrow & & & & & \downarrow \\
 g'l(A_1) \otimes'_2 f'm(B_1) & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & \\
 & & l'g(A_1) \otimes'_2 f'm(B_1) & \longrightarrow & l'(g(A_1) \otimes m(B_1)) & \longrightarrow & l'm(A_1 \otimes_1 B_1)
 \end{array}$$

**Remarque 2.1.112** — Le sens du 2-morphisme entre  $m'l$  et  $l'm$  est arbitraire. Dans nos applications, cela ne posera pas de problèmes puisque la flèche en question sera inversible. Remarquons également que la  $\otimes$ -dualité ne transforme pas les faces carrées mixtes en faces carrées mixtes à cause du fait que l'on a imposé un sens à ce 2-morphisme.

**Remarque 2.1.113** — Il est clair qu'on peut composer les faces carrées mixtes de modules horizontalement et verticalement.

On a la notion duale de face carrée mixte de comodules. On laissera aux lecteurs le soin d'écrire la version duale de la définition 2.1.111 et du lemme suivant :

**LEMME 2.1.114** — 1- On suppose donnée une face carrée mixte de modules :

(2.21)

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{[g', m']} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\
 \uparrow [f', l'] & \Downarrow & \uparrow [f, l] \\
 (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{[g, m]} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1)
 \end{array}$$

avec  $[f, l]$  et  $[f', l']$  des modules à droite et  $[g, m]$  et  $[g', m']$  des modules à gauche. Soient  $k$  et  $k'$  des adjoints à gauche de  $l$  et  $l'$  respectivement. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 k'(g'(A'_1) \otimes'_2 f'm(B_1)) & \longrightarrow & k'g'(A'_1) \otimes_2 m(B_1) & \longrightarrow & gk(A'_1) \otimes_2 m(B_1) & \longrightarrow & m(k(A'_1) \otimes_1 B_1) \\
 \downarrow & & & & & & \parallel \\
 k'(g'(A'_1) \otimes'_2 m'f(B_1)) & \longrightarrow & k'm'(A'_1 \otimes'_1 f(B_1)) & \longrightarrow & mk(A'_1 \otimes f(B_1)) & \longrightarrow & m(k(A'_1) \otimes B_1)
 \end{array}$$

formé de :

- le 1-morphisme  $f'm \longrightarrow m'f$  de la face carrée mixte (2.21),
- les morphismes structuraux des projecteurs à droite  $[f, k]$  et  $[f', k']$ ,
- les morphismes structuraux des modules à gauche  $[g, m]$  et  $[g', m']$ ,
- les morphismes  $k'g' \longrightarrow gk$  et  $k'm' \longrightarrow mk$  déduits de  $g'l \longrightarrow l'g$  et  $m'l \longrightarrow l'm$  suivant les adjonctions  $(k, l)$  et  $(k', l')$ ,

est commutatif.

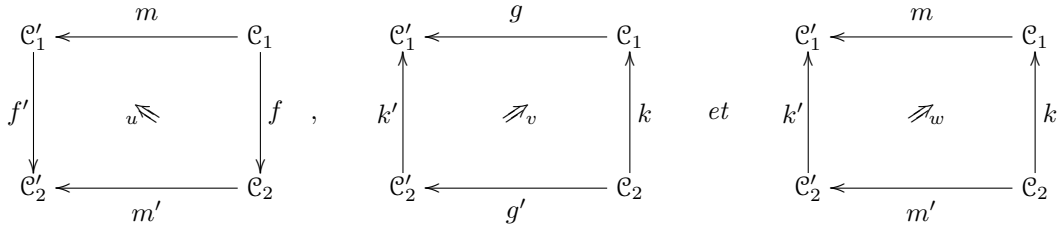
2- Réciproquement, soient quatre catégories monoïdales  $(\mathcal{C}_1, \otimes_1)$ ,  $(\mathcal{C}'_1, \otimes'_1)$ ,  $(\mathcal{C}_2, \otimes_2)$  et  $(\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$ . On suppose donnés deux modules à gauche :

$$(g, m) : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \quad \text{et} \quad (g', m') : (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2)$$

ainsi que deux projecteurs à droite :

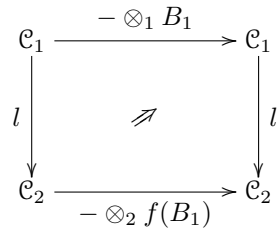
$$(f, k) : (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2) \quad \text{et} \quad (f', k') : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$$

On suppose également données trois faces carrées dans  $\mathcal{Cat}$  :

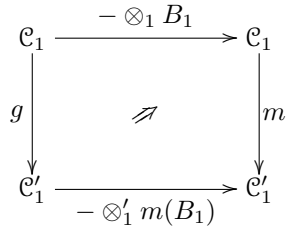


faisant commuter le diagramme du 1. Si  $l$  est un adjoint à droite de  $k$  et  $v' : g'l \longrightarrow l'g$  et  $w' : m'l \longrightarrow l'm$  les transformations déduites de  $v$  et  $w$ , le triplet  $(u, v', w')$  définit une face mixte de modules.

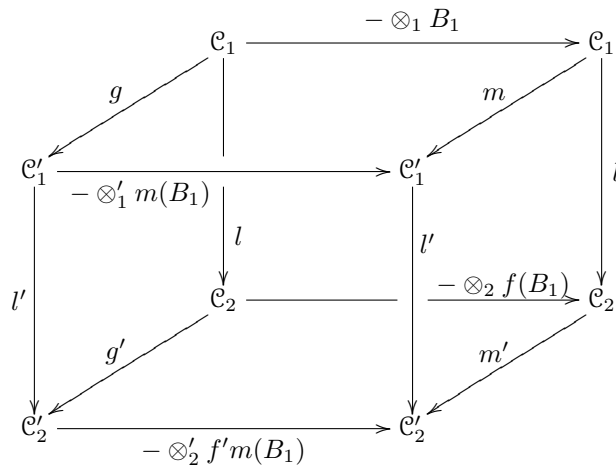
DEMONSTRATION On pensera à un module à droite  $[f, l]$  comme étant une famille de faces carrées :



alors qu'on pensera à un module à gauche  $[g, m]$  comme étant une famille de faces carrées :



Ainsi, la définition 2.1.111 se traduit par la commutation du cube solide :



formé des six faces carrées :

$$(2.22) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{- \otimes'_1 m(B_1)} & \mathcal{C}'_1 & & \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{- \otimes_1 B_1} & \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{- \otimes_1 B_1} & \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{- \otimes_2 f(B_1)} & \mathcal{C}_2 \\ l' \downarrow & \nearrow & l' \downarrow & , & g \downarrow & \nearrow & m \downarrow & , & l \downarrow & \nearrow & l \downarrow & , & g' \downarrow & \nearrow & m' \downarrow \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{- \otimes'_2 f' m(B_1)} & \mathcal{C}'_2 & & \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{- \otimes'_1 m(B_1)} & \mathcal{C}'_1 & & \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{- \otimes_2 f(B_1)} & \mathcal{C}_2 & & \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{- \otimes'_2 f' m(B_1)} & \mathcal{C}'_2 \end{array}$$

$$(2.23) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{g} & \mathcal{C}_1 \\ l' \downarrow & \lrcorner & \downarrow l \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{g'} & \mathcal{C}_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{m} & \mathcal{C}_1 \\ l' \downarrow & \lrcorner & \downarrow l \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{m'} & \mathcal{C}_2 \end{array}$$

Les trois premières faces de (2.22), sont simplement les morphismes structuraux des modules à gauche et à droite  $(f', l')$ ,  $(g, m)$  et  $(f, l)$ . La quatrième, est la composée :

$$g'(-) \otimes'_2 f' m(B_1) \longrightarrow g'(-) \otimes'_2 m' f(B_1) \longrightarrow m'(- \otimes'_1 f(B_1))$$

Les deux faces carrées (2.23) sont celles sous-jacentes à la face carrée mixte de l'énoncé. On termine alors la preuve exactement comme pour le lemme 2.1.105. C.Q.F.D

On termine notre liste de faces exotiques par :

**DEFINITION 2.1.115** — Une face carrée mixte de modules et comodules :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{[g', n']} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\ [f', l'] \uparrow & \nearrow & \uparrow [f, l] \\ (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{[g, n]} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \end{array}$$

est la donnée de deux comodules à droite  $[f, l]$  et  $[f', l']$  et de deux modules à gauche  $[g, n]$  et  $[g', n']$  ainsi que trois transformations naturelles :

$$l'g \longrightarrow g'l \quad , \quad f'n \longrightarrow n'f \quad \text{et} \quad l'n \longrightarrow n'l$$

telles que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} l'(g(A_1) \otimes_2 n(B_1)) & \longrightarrow & l'g(A_1) \otimes'_2 f'n(B_1) & \longrightarrow & g'l(A_1) \otimes'_2 n'f(B) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ l'n(A_1 \otimes_1 B_1) & \longrightarrow & n'l(A_1 \otimes_1 B_1) & \longrightarrow & n'(l(A_1) \otimes'_1 f(B_1)) \end{array}$$

soit commutatif.

**Remarque 2.1.116** — On aurait pu prendre dans la définition ci-dessus des modules à droite et des comodules à gauche. On obtient alors la version  $\otimes$ -duale mais aussi la version duale de la définition.

**Remarque 2.1.117** — Il va sans dire qu'on peut composer les faces carrées mixtes de modules et comodules dans les deux sens vertical et horizontal.

**LEMME 2.1.118** — Supposons donnée une face mixte de modules et comodules :

$$(2.24) \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{(g', n')} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\ (f', l') \uparrow & \nearrow & \uparrow (f, l) \\ (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{(g, n)} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \end{array}$$

avec  $[f, l]$  et  $[f', l']$  des comodules à droite et  $[g, m]$  et  $[g', m']$  des modules à gauche. Soient  $m$  et  $m'$  des adjoints à droite de  $l$  et  $l'$  respectivement. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 gm(A'_1) \otimes_2 n(B_1) & \longrightarrow & n(m(A'_1) \otimes_1 B_1) & \longrightarrow & nm(A'_1 \otimes'_1 f(B_1)) & \longrightarrow & m'n'(A'_1 \otimes'_1 f(B_1)) \\
 \downarrow & & & & & & \downarrow \\
 m'g'(A'_1) \otimes_2 n(B_1) & \longrightarrow & m'(g'(A) \otimes'_2 f'n(B_1)) & \longrightarrow & m'(g'(A'_1) \otimes'_2 n'f(B_1)) & \longrightarrow & m'n'(A'_1 \otimes'_1 f(B_1))
 \end{array}$$

formé de :

- le 1-morphisme  $f'n \longrightarrow n'f$  de la face carrée mixte (2.24),
- les morphismes structuraux des coprojecteurs à droite  $[f, m]$  et  $[f', m']$ ,
- les morphismes structuraux des modules à gauche  $[g, n]$  et  $[g', n']$ ,
- les morphismes  $gm \longrightarrow m'g'$  et  $nm \longrightarrow m'n'$  déduits de  $l'g \longrightarrow g'l$  et  $l'n \longrightarrow n'l$  suivant les adjonctions  $(l, m)$  et  $(l', m')$ ,

est commutatif.

2- Réciproquement, soient quatre catégories monoïdales  $(\mathcal{C}_1, \otimes_1)$ ,  $(\mathcal{C}'_1, \otimes'_1)$ ,  $(\mathcal{C}_2, \otimes_2)$  et  $(\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$ . On suppose donnés deux modules à gauche :

$$(g, n) : (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2) \quad \text{et} \quad (g', n') : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$$

ainsi que deux coprojecteurs à droite :

$$(f, m) : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \quad \text{et} \quad (f', m') : (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2)$$

On suppose également données trois faces carrées dans  $\mathfrak{Cat}$  :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{n} & \mathcal{C}_1 \\ f' \downarrow & \cong_u & \downarrow f \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{n'} & \mathcal{C}_2 \end{array} & , & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{g} & \mathcal{C}_1 \\ m' \uparrow & \cong_v & \uparrow m \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{g'} & \mathcal{C}_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{n} & \mathcal{C}_1 \\ m' \uparrow & \cong_w & \uparrow m \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{n'} & \mathcal{C}_2 \end{array}
 \end{array}$$

faisant commuter le diagramme du 1. Si  $l$  est un adjoint à gauche de  $m$  et  $v' : l'g \longrightarrow g'l$  et  $w' : l'n \longrightarrow n'l$  les transformations déduites de  $v$  et  $w$ , le triplet  $(u, v', w')$  définit une face mixte de modules et comodules.

DEMONSTRATION La preuve est encore une fois une adaptation de la preuve du lemme 2.1.105. On part du cube solide traduisant la commutativité du diagramme de la définition 2.1.115 :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{- \otimes_1 B_1} & \mathcal{C}_1 \\
 & g \swarrow & \downarrow & & \downarrow n \\
 \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{- \otimes'_1 n(B_1)} & \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{l} & \mathcal{C}'_1 \\
 \downarrow l' & & \downarrow l' & & \downarrow l' \\
 \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{- \otimes'_1 n(B_1)} & \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{- \otimes_2 f(B_1)} & \mathcal{C}'_1 \\
 \downarrow l' & & \downarrow l' & & \downarrow l' \\
 \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{- \otimes'_2 f'n(B_1)} & \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{- \otimes_2 f(B_1)} & \mathcal{C}'_2 \\
 & g' \swarrow & \downarrow & & \downarrow n' \\
 & & \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{- \otimes_2 f(B_1)} & \mathcal{C}_2
 \end{array}$$

formé des six faces carrées :

$$(2.25) \quad \begin{array}{cccc}
 \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{- \otimes'_1 n(B_1)} & \mathcal{C}'_1 \\ l' \downarrow & \cong & \downarrow l' \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{- \otimes'_2 f'n(B_1)} & \mathcal{C}'_2 \end{array} & , & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{- \otimes_1 B_1} & \mathcal{C}_1 \\ g \downarrow & \cong & \downarrow n \\ \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{- \otimes'_1 n(B_1)} & \mathcal{C}'_1 \end{array} & , & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{- \otimes_1 B_1} & \mathcal{C}_1 \\ l \downarrow & \cong & \downarrow l \\ \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{- \otimes_2 f(B_1)} & \mathcal{C}_2 \end{array} & , & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{- \otimes_2 f(B_1)} & \mathcal{C}_2 \\ g' \downarrow & \cong & \downarrow n' \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{- \otimes'_2 f'n(B_1)} & \mathcal{C}'_2 \end{array}
 \end{array}$$

$$(2.26) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{g} & \mathcal{C}_1 \\ \downarrow l' & \Downarrow & \downarrow l \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{g'} & \mathcal{C}_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{n} & \mathcal{C}_1 \\ \downarrow l' & \Downarrow & \downarrow l \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{n'} & \mathcal{C}_2 \end{array}$$

Les trois premières faces de (2.25), sont simplement les morphismes structuraux des modules à gauche et comodules à droite  $(f', l')$ ,  $(g, n)$  et  $(f, l)$ . La quatrième, est la composée :

$$g'(-) \otimes'_2 f'n(B_1) \longrightarrow g'(-) \otimes'_2 n'f(B_1) \longrightarrow n'(- \otimes'_1 f(B_1))$$

Les deux faces carrées (2.26) sont celles sous-jacentes à la face carrée mixte de l'énoncé. On termine alors la preuve exactement comme pour le lemme 2.1.105. C.Q.F.D

### 2.1.5 Catégories monoïdales fermés

Dans ce paragraphe on étudie les bifoncteurs homomorphismes internes dans une catégorie monoïdale fermée. Les résultats de cette sous-section sont tous bien connus du moins dans des situations particulières.

#### Définitions et généralités

**DEFINITION 2.1.119** — 1- Soit  $(\mathcal{C}, \otimes)$  une catégorie monoïdale. On dit qu'elle est fermée à gauche si pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $A \otimes -$  admet un adjoint à droite. On dit que  $\mathcal{C}$  est fermée à droite si pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $- \otimes A$  admet un adjoint à droite.

2- Une catégorie monoïdale  $\mathcal{C}$  est fermée à droite si la catégorie  $\otimes$ -opposée  $\mathcal{C}^\circ$  est fermée à gauche et vice versa. Il suffit donc d'étudier un seul type de catégories monoïdales fermées.

Par la suite, on considèrera principalement les catégories monoïdales fermées à droite. On notera  $\underline{\text{Hom}}(A, -)$  l'adjoint à droite de  $- \otimes A$ . On a ainsi des isomorphismes :

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(U \otimes A, V) \xrightarrow{\sim} \text{hom}_{\mathcal{C}}(U, \underline{\text{Hom}}(A, V))$$

ainsi que des flèches :

$$ev : \underline{\text{Hom}}(A, V) \otimes A \longrightarrow V \quad \text{et} \quad \delta : U \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, U \otimes A)$$

naturelles en  $U$  et  $V$  dans  $\mathcal{C}$ .

Lorsqu'on aura besoin de considérer des catégories monoïdales fermées à droite et à gauche, on notera, pour les distinguer,  $\underline{\text{Hom}}_g(A, -)$  et  $\underline{\text{Hom}}_d(A, -)$  les adjoints à droite respectifs de  $A \otimes -$  et  $- \otimes A$ .

Si  $(\mathcal{C}, \otimes)$  est une catégorie monoïdale fermée, on définit un bifoncteur :

$$\underline{\text{Hom}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

par les associations :

- à  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$  on associe l'objet  $\underline{\text{Hom}}(A, B)$ ,
- aux deux flèches  $f : A' \mapsto A$  et  $g : B \mapsto B'$  de  $\mathcal{C}$  on associe la composée :

$$\underline{\text{Hom}}(A, B) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, B') \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A', B')$$

où la seconde flèche est induite par adjonction de la transformation naturelle :  $- \otimes A' \longrightarrow - \otimes A$ .

Ce bifoncteur est appelé le *bifoncteur d'homomorphismes internes*.

**LEMME 2.1.120** — Soit  $(\mathcal{C}, \otimes)$  une catégorie monoïdale fermée à droite et  $(\mathbf{1}, u_g, u_d)$  un objet unité de  $\mathcal{C}$ . Les transformations naturelles ci-dessous :

$$\underline{\text{Hom}}(\mathbf{1}, A) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(\mathbf{1}, A) \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{ev} A \quad \text{et} \quad A \xrightarrow{\delta} \underline{\text{Hom}}(\mathbf{1}, A \otimes \mathbf{1}) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(\mathbf{1}, A)$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

**DEMONSTRATION** Ceci découle immédiatement du fait que le foncteur  $- \otimes \mathbf{1}$  est une équivalence puisque isomorphe au foncteur identique. C.Q.F.D

**DEFINITION 2.1.121** — Soit  $(\mathcal{C}, \otimes)$  une catégorie monoïdale fermée à droite. On définit un morphisme :

$$\underline{\text{Hom}}(A \otimes B, C) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, C))$$

naturel en  $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^3$  par la composée :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(A \otimes B, C) & & \\ \downarrow \delta & & \\ \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(A \otimes B, C) \otimes A) & \xrightarrow{\delta} & \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, (\underline{\text{Hom}}(A \otimes B, C) \otimes A) \otimes B)) \\ & & \downarrow \sigma \\ \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, C)) & \xleftarrow{ev} & \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, \underline{\text{Hom}}(A \otimes B, C) \otimes (A \otimes B))) \end{array}$$

**LEMME 2.1.122** — La transformation naturelle ci-dessus est inversible.

**DEMONSTRATION** En effet,  $\underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, -))$  est l'adjoint à droite du foncteur composé :  $(- \otimes B) \circ (- \otimes A)$ . D'autre part,  $\underline{\text{Hom}}(A \otimes B, -)$  est l'adjoint à droite du foncteur  $- \otimes (A \otimes B)$ . Les isomorphismes d'associativité donnent un isomorphisme de foncteurs :

$$(- \otimes B) \circ (- \otimes A) \xrightarrow{\sim} - \otimes (A \otimes B)$$

Le morphisme en question, est exactement l'induit par adjonction de cet isomorphisme.

C.Q.F.D

**DEFINITION 2.1.123** — On définit un morphisme de composition :

$$\underline{\text{Hom}}(B, C) \otimes \underline{\text{Hom}}(A, B) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, C)$$

en prenant la composée :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(B, C) \otimes \underline{\text{Hom}}(A, B) & \xrightarrow{\delta} & \underline{\text{Hom}}(A, (\underline{\text{Hom}}(B, C) \otimes \underline{\text{Hom}}(A, B)) \otimes A) \\ & & \downarrow \\ \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, C) \otimes B) & \xleftarrow{ev} & \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, C) \otimes (\underline{\text{Hom}}(A, B) \otimes A)) \\ \downarrow ev & & \\ \underline{\text{Hom}}(A, C) & & \end{array}$$

La proposition ci-dessous est bien connue, mais ne sera pas utilisée dans la suite. On renvoie le lecteur à [KM71] pour une démonstration.

**PROPOSITION 2.1.124** — Le produit de composition ci-dessus est associatif. La catégorie  $\mathcal{C}$  est naturellement une  $\mathcal{C}$ -catégorie.

**Remarque 2.1.125** — La proposition précédente explique la notation  $\underline{\text{Hom}}$  ainsi que la terminologie d'homomorphismes internes.

### Objets inversibles et objets dualisants

On commence ce paragraphe par la notion d'objets inversibles. La définition des objets inversibles, ne fait pas intervenir la propriété d'une catégorie monoïdale d'être fermée :

**DEFINITION 2.1.126** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$  une catégorie monoïdale unitaire et  $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . On dit que :

- $U$  est inversible à gauche, s'il existe un objet  $V_g$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $U \otimes V_g$  soit isomorphe à l'objet unité  $\mathbb{1}$ . Un tel objet  $V_g$  est appelé un inverse à gauche de  $U$ ,
- $U$  est inversible à droite, s'il existe un objet  $V_d$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $V_d \otimes U$  soit isomorphe à l'objet unité  $\mathbb{1}$ . Un tel objet  $V_d$  est appelé un inverse à droite de  $U$ .

On dit que  $U$  est inversible s'il est inversible à gauche et à droite.

On a le résultat classique suivant :

**LEMME 2.1.127** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$  une catégorie monoïdale unitaire et  $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  un objet inversible. Tout inverse à droite de  $U$  est isomorphe à tout inverse à gauche de  $U$ . En particulier, un inverse à gauche (resp. à droite) de  $U$  est défini à un isomorphisme près.

DEMONSTRATION En effet, soit  $V_g$  et  $V_d$  des inverses à gauche et à droite de  $U$ . On a les isomorphismes :

$$V_d \simeq V_d \otimes \mathbb{1} \simeq V_d \otimes (U \otimes V_g) \simeq (V_d \otimes U) \otimes V_g \simeq \mathbb{1} \otimes V_g \simeq V_g$$

D'où le résultat.

C.Q.F.D

**Remarque 2.1.128** — Si  $U$  est un objet inversible d'une catégorie monoïdale unitaire, on appelle *inverse* de  $U$ , un objet  $V$  tel que  $V \otimes U \simeq \mathbb{1} \simeq U \otimes V$ . L'existence et l'unicité à isomorphisme près d'un inverse est assurée par le lemme précédent.

**PROPOSITION 2.1.129** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$  une catégorie monoïdale unitaire et  $U$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Il y a équivalence entre les conditions suivantes :

1. Le foncteur  $U \otimes - : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  est une équivalence de catégories.
2. Le foncteur  $- \otimes U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  est une équivalence de catégories.
3. L'objet  $U$  est inversible.

De plus si  $V$  est un inverse de  $U$ , les foncteurs  $V \otimes -$  et  $- \otimes V$  sont des quasi-inverses de  $U \otimes -$  et  $- \otimes U$  respectivement.

DEMONSTRATION Supposons que  $U$  est inversible d'inverse  $V$ . Le foncteur  $U \otimes -$  admet un quasi-inverse à gauche et à droite puisque :

$$(U \otimes -) \circ (V \otimes -) \simeq (U \otimes V) \otimes - \simeq \mathbb{1} \otimes - \simeq \text{id}_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad (V \otimes -) \circ (U \otimes -) \simeq (V \otimes U) \otimes - \simeq \mathbb{1} \otimes - \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$$

Ceci prouve que  $3 \implies 1$ . Par  $\otimes$ -dualité, on a également l'implication :  $3 \implies 2$ . Il suffira donc de prouver que  $1 \implies 3$  puisque par  $\otimes$ -dualité on aura également  $2 \implies 3$ .

Supposons donc que le foncteur  $U \otimes -$  est une équivalence. Par essentielle surjectivité, il existe un objet  $V$  tel que  $U \otimes V$  soit isomorphe à l'objet unité  $\mathbb{1}$ . Ainsi,  $V$  est un inverse à gauche de  $U$ . Le foncteur  $V \otimes -$  fournit alors un quasi-inverse à gauche du foncteur  $U \otimes -$  puisque :

$$(U \otimes -) \circ (V \otimes -) \simeq (U \otimes V) \otimes - \simeq \mathbb{1} \otimes - \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$$

Étant donné que  $(U \otimes -)$  est quasi-inversible, le foncteur  $V \otimes -$  est également un inverse à droite. On a alors un isomorphisme de foncteurs :  $(V \otimes -) \circ (U \otimes -) \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$ . Il suffit alors d'évaluer en l'objet unité pour obtenir un isomorphisme  $V \otimes U \simeq \mathbb{1}$ . La proposition est démontrée.

C.Q.F.D

Dans la suite, Il sera question de catégories monoïdales fermées à gauche et à droite. On utilisera ainsi les notations  $\underline{\text{Hom}}_g$  et  $\underline{\text{Hom}}_d$ . Soient  $(A, C) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ . On a une face évidente :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \\ - \otimes C \downarrow & \cong & \downarrow - \otimes C \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \end{array}$$

Supposons que  $\mathcal{C}$  est fermée à gauche (resp. à droite). En utilisant l'adjonction  $(A \otimes -, \underline{\text{Hom}}_g(A, -))$  (resp.  $(- \otimes C, \underline{\text{Hom}}_d(C, -))$ ) on déduit la face carrée :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xleftarrow{\underline{\text{Hom}}_g(A, -)} & \mathcal{C} \\ - \otimes C \downarrow & \cong & \downarrow - \otimes C \\ \mathcal{C} & \xleftarrow{\underline{\text{Hom}}_g(A, -)} & \mathcal{C} \end{array} \quad (\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \\ \uparrow & \cong & \uparrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \end{array} \quad \underline{\text{Hom}}_d(C, -))$$

Lorsque l'objet  $A$  est inversible, le foncteur  $A \otimes -$  est une équivalence. On vérifie alors facilement que les deux faces ci-dessus sont des 2-isomorphismes. Par  $\otimes$ -dualité, les deux faces ci-dessus sont encore des 2-isomorphismes si  $C$  est un objet inversible. On a ainsi :



**COROLLAIRE 2.1.130** — Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$  une catégorie monoïdale unitaire fermée à gauche (resp. à droite). Soit  $U$  un objet inversible de  $\mathcal{C}$ . Pour tout  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ , les flèches :

$$\underline{\text{Hom}}_g(U, A) \otimes B \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_g(U, A \otimes B) \quad (\text{resp. } A \otimes \underline{\text{Hom}}_d(U, B) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_d(U, A \otimes B))$$

$$\underline{\text{Hom}}_g(A, B) \otimes U \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_g(A, B \otimes U) \quad (\text{resp. } U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, B) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_d(A, U \otimes B))$$

sont inversibles.

**Remarque 2.1.131** — Lorsque  $(\mathcal{C}, \otimes)$  est fermée à gauche et à droite, en passant aux adjoints à droite, on obtient une face carrée inversible :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xleftarrow{\underline{\text{Hom}}_g(A, -)} & \mathcal{C} \\ \underline{\text{Hom}}_d(C, -) \uparrow & \xrightarrow{\sim} & \uparrow \underline{\text{Hom}}_d(C, -) \\ \mathcal{C} & \xleftarrow{\underline{\text{Hom}}_g(A, -)} & \mathcal{C} \end{array}$$

Cette face sera utilisée dans la preuve du lemme 2.1.137.

Notons également un deuxième corollaire de la proposition 2.1.129 :

**COROLLAIRE 2.1.132** — Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$  une catégorie monoïdale unitaire fermée à gauche (resp. à droite). Soit  $U$  un objet inversible de  $\mathcal{C}$ . Alors, l'objet  $\underline{\text{Hom}}_g(U, \mathbb{1})$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}_d(U, \mathbb{1})$ ) est un inverse de  $U$ .

DEMONSTRATION On traite uniquement le cas non-respé. Le cas respé s'obtient alors par  $\otimes$ -dualité. Si  $V$  est un inverse de  $U$ , on sait que le foncteur  $V \otimes -$  est un quasi-inverse de  $U \otimes -$ . Puisque  $\underline{\text{Hom}}_g(U, -)$  est un adjoint à  $U \otimes -$  on en déduit un isomorphisme :

$$\underline{\text{Hom}}_g(U, -) \xrightarrow{\sim} V \otimes -$$

Lorsqu'on évalue en l'objet unité  $\mathbb{1}$ , on obtient les isomorphismes :  $\underline{\text{Hom}}_g(U, \mathbb{1}) \simeq V \otimes \mathbb{1} \simeq V$ . C.Q.F.D

On passe maintenant à la notion d'objets dualisants. Jusqu'à la fin du paragraphe, on fixe une catégorie monoïdale unitaire  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$  fermée à droite et à gauche. Pour  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ , on construit deux flèches échangées par  $\otimes$ -dualité :

$$(2.27) \quad A \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, B), B) \quad \text{et} \quad A \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(A, B), B)$$

en prenant les composées :

$$A \xrightarrow{\delta} \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, B), \underline{\text{Hom}}_d(A, B) \otimes A) \xrightarrow{ev} \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, B), B)$$

$$A \xrightarrow{\delta} \underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(A, B), A \otimes \underline{\text{Hom}}_g(A, B)) \xrightarrow{ev} \underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(A, B), B)$$

Ces morphismes sont ceux obtenus par adjonction des deux morphismes d'évaluations :  $\underline{\text{Hom}}_d(A, B) \otimes A \longrightarrow B$  et  $A \otimes \underline{\text{Hom}}_g(A, B) \longrightarrow B$ . Notons le lemme :

**LEMME 2.1.133** — Les foncteurs  $\underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(-, B), B)$  et  $\underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(-, B), B)$  sont covariants. De plus, les morphismes :

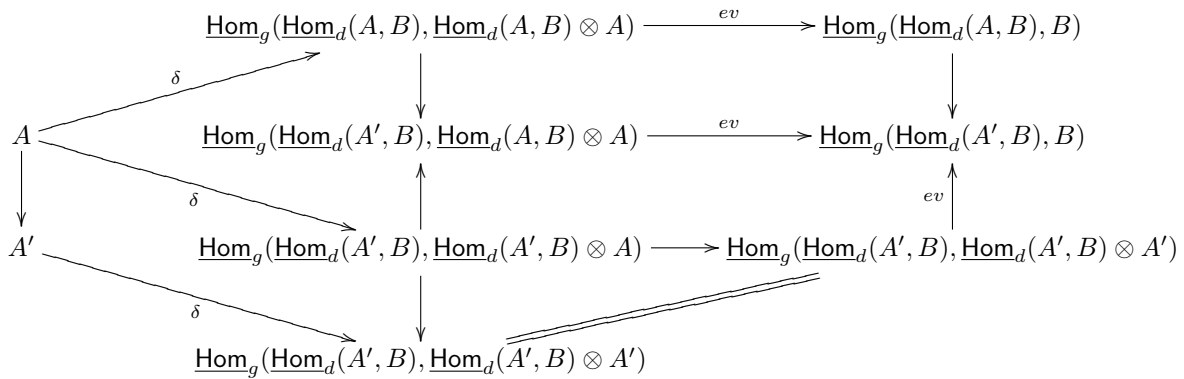
$$A \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, B), B) \quad \text{et} \quad A \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(A, B), B)$$

définissent des transformations naturelles.

DEMONSTRATION On traite uniquement le premier morphisme. Le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(-, B), B)$  étant égal à la composée de deux foncteurs contravariants  $\underline{\text{Hom}}_d(-, B) \circ \underline{\text{Hom}}_g(-, B)$  est covariant. Si  $A \longrightarrow A'$  est une flèche de  $\mathcal{C}$ , on doit prouver que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(A, B), B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(A', B), B) \end{array}$$

En revenant aux définitions, on voit qu'il suffit de prouver que le diagramme suivant :



est commutatif. Ceci est facile et laissé aux lecteurs.

C.Q.F.D

On note le résultat suivant même si il ne sera pas utilisé dans la suite :

**PROPOSITION 2.1.134** — Soit  $B$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_d(-, B) : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$  est un adjoint à droite du foncteur  $\underline{\text{Hom}}_g(-, B) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ . De plus, les 2-morphismes d'unité et de counité sont donnés par (2.27). On a également les énoncés dual et  $\otimes$ -dual.

DEMONSTRATION Soient  $A$  et  $A'$  deux objets de  $\mathcal{C}$ . On des isomorphismes naturels en  $A$  et  $A'$  :

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\text{Hom}}_d(A', B)) \simeq \text{hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes A', B) \simeq \text{hom}_{\mathcal{C}}(A', \underline{\text{Hom}}_g(A, B)) \simeq \text{hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\underline{\text{Hom}}_g(A, B), A')$$

Ceci prouve que  $\underline{\text{Hom}}_d(-, B) : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$  est l'adjoint à droite de  $\underline{\text{Hom}}_g(-, B) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ . La dernière assertion est facile et laissée en exercice.

C.Q.F.D

On fait la définition suivante :

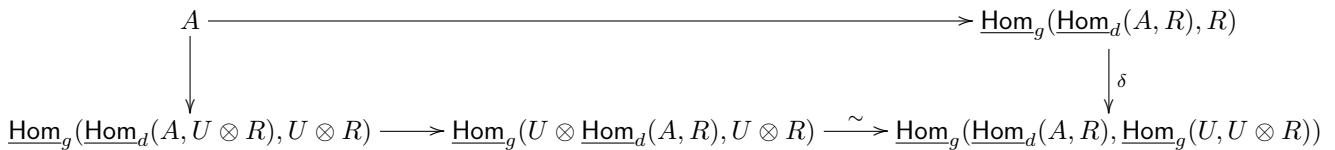
**DEFINITION 2.1.135** — Un objet  $R$  de  $\mathcal{C}$  est dualisant à gauche (resp. à droite) si la transformation naturelle :

$$\text{id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(-, R), R) \quad (\text{resp. } \text{id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(-, R), R))$$

est inversible. On dit que  $R$  est dualisant, s'il est dualisant à gauche et à droite.

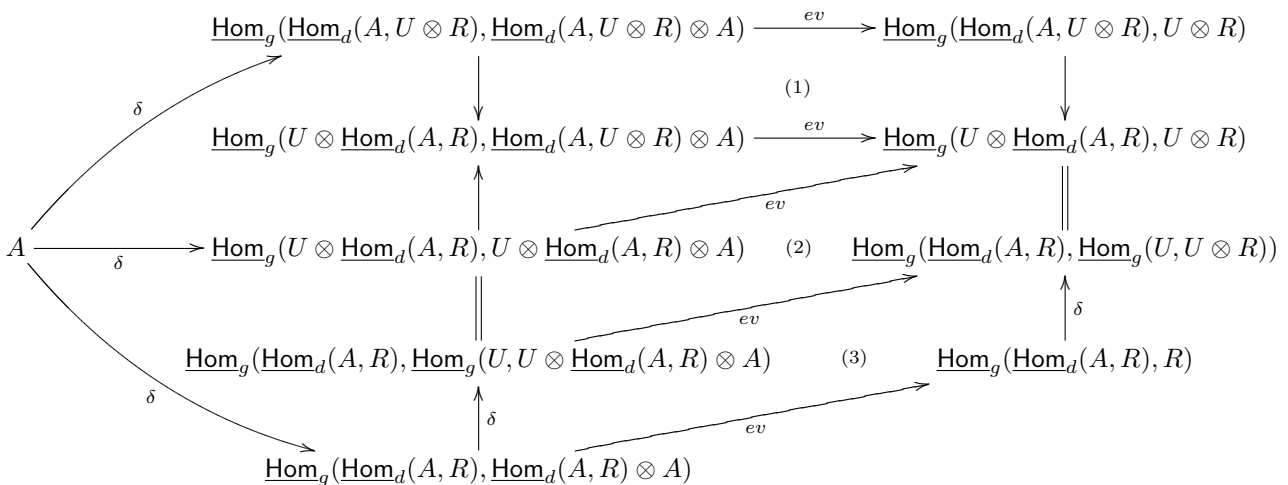
On aura besoin des deux lemmes techniques suivants :

**LEMME 2.1.136** — Soient  $A, R$  et  $U$  des objets de  $\mathcal{C}$ . Le diagramme suivant :



est commutatif.

DEMONSTRATION On montrera que le diagramme ci-dessous :



est commutatif. La commutation des parallélogrammes (1), (2) et (3) est évidente. Pour montrer la commutation du triangle :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}_g(U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R), \underline{\text{Hom}}_d(A, U \otimes R) \otimes A) & \xrightarrow{ev} & \underline{\text{Hom}}_g(U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R), U \otimes R) \\ \uparrow & \nearrow ev & \\ \underline{\text{Hom}}_g(U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R), U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R) \otimes A) & & \end{array}$$

il suffit de montrer la commutation de :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}_d(A, U \otimes R) \otimes A & \xrightarrow{ev} & U \otimes R \\ \uparrow & \nearrow ev & \\ U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R) \otimes A & & \end{array}$$

Ce qui est clair par définition. La commutation de :

$$\begin{array}{ccc} & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, U \otimes R), \underline{\text{Hom}}_d(A, U \otimes R) \otimes A) & \\ & \downarrow & \\ \delta \nearrow & \underline{\text{Hom}}_g(U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R), \underline{\text{Hom}}_d(A, U \otimes R) \otimes A) & \\ \delta \rightarrow & \uparrow & \\ A & \underline{\text{Hom}}_g(U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R), U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R) \otimes A) & \end{array}$$

découle de la proposition 1.1.5 appliquée au morphisme de foncteurs :  $[U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R)] \otimes - \longrightarrow [\underline{\text{Hom}}(A, U \otimes R)] \otimes -$ . La commutation de la partie restante s'obtient par le même raisonnement. C.Q.F.D

**LEMME 2.1.137** — Soient  $A, R$  et  $U$  des objets de  $\mathcal{C}$ . Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, \underline{\text{Hom}}_d(U, R)), \underline{\text{Hom}}_d(U, R)) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes U, R), \underline{\text{Hom}}_d(U, R)) \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ \underline{\text{Hom}}_d(U, A \otimes U) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_d(U, \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes U, R), R)) \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION Notons  $\alpha$  la flèche rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, \underline{\text{Hom}}_d(U, R)), \underline{\text{Hom}}_d(U, R)) \xrightarrow{b} \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes U, R), \underline{\text{Hom}}_d(U, R)) \\ & \searrow \alpha & \downarrow \sim c \\ & & \underline{\text{Hom}}_d(U, \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes U, R), R)) \end{array}$$

avec  $c$  l'isomorphisme de la remarque 2.1.131. La flèche  $a$  correspond par adjonction à la flèche d'évaluation :

$$\underline{\text{Hom}}_d(A, \underline{\text{Hom}}_d(U, R)) \otimes A \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_d(U, R)$$

donc, par une deuxième adjonction, à la composée :

$$(\underline{\text{Hom}}_d(A, \underline{\text{Hom}}_d(U, R)) \otimes A) \otimes U \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_d(U, R) \otimes U \longrightarrow R$$

Il vient que la composée  $b \circ a$  correspond par adjonction à la composée :

$$(\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes U, R) \otimes A) \otimes U \longrightarrow (\underline{\text{Hom}}_d(A, \underline{\text{Hom}}_d(U, R)) \otimes A) \otimes U \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_d(U, R) \otimes U \longrightarrow R$$

Finalement la composée  $\alpha = c \circ b \circ a$  correspond par adjonction à la composée :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}_d(A \otimes U, R) \otimes (A \otimes U) & & \\ \downarrow & & \\ (\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes U, R) \otimes A) \otimes U & \longrightarrow & (\underline{\text{Hom}}_d(A, \underline{\text{Hom}}_d(U, R)) \otimes A) \otimes U \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_d(U, R) \otimes U \longrightarrow R \end{array}$$

Cette composée est simplement la morphisme d'unité de l'adjonction  $(-\otimes(A\otimes U), \underline{\text{Hom}}_d(A\otimes U, -))$ . On déduit que  $\alpha$  correspond via l'adjonction  $(-\otimes U, \underline{\text{Hom}}_d(U, -))$  au morphisme :

$$A \otimes U \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes U, R), R)$$

Ceci prouve le résultat annoncé.

C.Q.F.D

Muni des lemmes 2.1.136 et 2.1.137, il est facile de prouver :

**PROPOSITION 2.1.138** — *Si  $R$  est un objet dualisant à gauche (resp. à droite) de  $\mathcal{C}$  et  $U$  un objet inversible, alors les objets  $U \otimes R$  et  $R \otimes U$  sont encore dualisants à gauche (resp. à droite).*

DEMONSTRATION On traite uniquement le cas non respé. Le cas respé découle par  $\otimes$ -dualité. On suppose donc que  $R$  est dualisant à gauche. Il s'agit de montrer que les transformations naturelles :

- $\text{id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(-, U \otimes R), U \otimes R)$ ,
- $\text{id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(-, R \otimes U), R \otimes U)$ .

sont inversibles. On traite d'abord la première transformation naturelle. Par le lemme 2.1.136, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, R), R) \\ \downarrow & & \downarrow \delta \\ \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, U \otimes R), U \otimes R) & \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R), U \otimes R) \xrightarrow{\sim} & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, R), \underline{\text{Hom}}_g(U, U \otimes R)) \end{array}$$

pour tout  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Il suffira donc de prouver que les flèches :

$$U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_d(A, U \otimes R) \quad \text{et} \quad R \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(U, U \otimes R)$$

sont inversibles. Ceci est le cas pour la première flèche par 2.1.130. Pour la seconde, on remarque que c'est la unité de l'adjonction  $(U \otimes -, \underline{\text{Hom}}_g(U, -))$  et que le foncteur  $U \otimes -$  est une équivalence.

Pour la seconde transformation naturelle, on utilisera le lemme 2.1.137. Il suffit en fait de remarquer que  $R \otimes U$  est isomorphe à  $\underline{\text{Hom}}_d(V, R)$  où  $V$  est un inverse à  $U$ . Il suffira donc de prouver que  $\underline{\text{Hom}}_d(V, R)$  est dualisant à gauche. Ceci découle immédiatement de la commutation du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, \underline{\text{Hom}}_d(V, R)), \underline{\text{Hom}}_d(V, R)) \xrightarrow{\sim} & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes V, R), \underline{\text{Hom}}_d(V, R)) \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ \underline{\text{Hom}}_d(V, A \otimes V) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_d(V, \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes V, R), R)) \end{array}$$

et du fait que l'unité de l'adjonction  $(-\otimes V, \underline{\text{Hom}}_d(V, -))$  est inversible.

C.Q.F.D

On a ainsi une "action" à gauche et à droite de la "catégorie groupoïdale" des objets inversibles de  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$  sur la catégorie des objets dualisants à gauche. Lorsqu'on se restreint aux objets dualisants, on obtient alors un "torseur" sous la "catégorie groupoïdale" des objets inversibles. En effet :

**PROPOSITION 2.1.139** — *Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux objets dualisants de  $\mathcal{C}$ . Les quatre objets :*

$$\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2) \quad , \quad \underline{\text{Hom}}_g(R_1, R_2) \quad , \quad \underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1) \quad \text{et} \quad \underline{\text{Hom}}_g(R_2, R_1)$$

sont des objets inversibles. De plus, les morphismes d'évaluations :

$$\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2) \otimes R_1 \xrightarrow{\sim} R_2 \quad \text{et} \quad R_1 \otimes \underline{\text{Hom}}_g(R_1, R_2) \xrightarrow{\sim} R_2$$

$$\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1) \otimes R_2 \xrightarrow{\sim} R_1 \quad \text{et} \quad R_2 \otimes \underline{\text{Hom}}_g(R_2, R_1) \xrightarrow{\sim} R_1$$

sont inversibles.

DEMONSTRATION On sait que les morphismes canoniques :

$$R_1 \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), R_2) \quad \text{et} \quad R_2 \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1), R_1)$$

sont inversibles. Considérons l'isomorphisme  $\alpha$  rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 R_1 & \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), R_2) & \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1), R_1)) \\
 & \searrow \alpha & \downarrow \sim \\
 & & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1) \otimes \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), R_1)
 \end{array}$$

On obtient un isomorphisme  $\mathbb{1} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1) \otimes \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2)$  en prenant la flèche  $\beta$  qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_1) & \xrightarrow[\sim]{\text{Hom}(\alpha, R_1)} & \underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1) \otimes \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), R_1), R_1) \\
 \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\
 \mathbb{1} & \xrightarrow{\beta} & \underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1) \otimes \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2)
 \end{array}$$

Notons que les flèches verticales sont des isomorphismes puisque  $R_1$  est dualisant à droite. Ceci prouve que  $\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1)$  est inversible à gauche et que  $\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2)$  est inversible à droite. Étant donné que les objets  $R_1$  et  $R_2$  jouent des rôles symétriques, on déduit que les objets  $\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2)$  et  $\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1)$  sont tous les deux inversibles. Par  $\otimes$ -dualité, on déduit que  $\underline{\text{Hom}}_g(R_1, R_2)$  et  $\underline{\text{Hom}}_g(R_2, R_1)$  sont également inversibles. La première partie de la proposition est prouvée.

Pour terminer la preuve de la proposition, il suffit par symétrie et  $\otimes$ -dualité de montrer que le morphisme d'évaluation :

$$(2.28) \quad \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2) \otimes R_1 \longrightarrow R_2$$

est inversible. Par définition, l'isomorphisme  $R_1 \simeq \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), R_2)$  est la composée :

$$R_1 \xrightarrow{\delta} \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2) \otimes R_1) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), R_2)$$

La première flèche est un isomorphisme puisque  $\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2)$  est un objet inversible. Il vient que la seconde flèche est inversible, ce qui se traduit par le fait que le morphisme d'évaluation (2.28) devient un isomorphisme après application du foncteur  $\underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), -)$ . Mais ce foncteur est une équivalence puisque  $\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2)$  est inversible. La proposition est prouvée. C.Q.F.D

### Homomorphismes internes, modules et projecteurs

Dans ce paragraphe, on étudie la functorialité des catégories monoïdales fermées à droite.

**DEFINITION 2.1.140** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes, \underline{\text{Hom}})$  et  $(\mathcal{C}', \otimes', \underline{\text{Hom}}')$  deux catégories monoïdales fermées à droite. Soit  $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur pseudo-monoïdal. On définit un morphisme :

$$f\underline{\text{Hom}}(A, B) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}'(f(A), f(B))$$

naturel en  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$  par la composée :

$$f\underline{\text{Hom}}(A, B) \xrightarrow{\delta} \underline{\text{Hom}}'(f(A), f\underline{\text{Hom}}(A, B) \otimes' f(A)) \xrightarrow{a} \underline{\text{Hom}}'(f(A), f(\underline{\text{Hom}}(A, B) \otimes A)) \xrightarrow{ev} \underline{\text{Hom}}'(f(A), f(B))$$

**DEFINITION 2.1.141** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes, \underline{\text{Hom}})$  et  $(\mathcal{C}', \otimes', \underline{\text{Hom}}')$  deux catégories monoïdales fermées. On suppose donné un foncteur pseudo-monoïdal  $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  admettant un adjoint à droite  $g : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ . On définit des morphismes :

$$(2.29) \quad \underline{\text{Hom}}(A, g(B')) \longrightarrow g\underline{\text{Hom}}'(f(A), B')$$

naturels en  $(A, B') \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}')$  par la composée :

$$\underline{\text{Hom}}(A, g(B')) \longrightarrow g f\underline{\text{Hom}}(A, g(B')) \longrightarrow g\underline{\text{Hom}}'(f(A), f g(B')) \longrightarrow g\underline{\text{Hom}}'(f(A), B')$$

**LEMME 2.1.142** — On garde les notations et les hypothèses de la définition 2.1.141. Le morphisme de foncteurs  $\underline{\text{Hom}}(A, g(-)) \longrightarrow g\underline{\text{Hom}}'(f(A), -)$  correspond via les adjonctions :

$$((- \otimes' f(A)) \circ f, g\underline{\text{Hom}}'(f(A), -)) \quad \text{et} \quad (f \circ (- \otimes A), \underline{\text{Hom}}(A, g(-)))$$

au morphisme de foncteurs :

$$a : (- \otimes f(A)) \circ f \longrightarrow f \circ (- \otimes A)$$

En particulier, lorsque  $f$  est monoïdal, la flèche (2.29) est inversible.

DEMONSTRATION En effet, le morphisme de la définition 2.1.140, correspond à la face carrée :

$$(2.30) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xleftarrow{\underline{\text{Hom}}(A, -)} & \mathcal{C} \\ f \downarrow & \cong & \downarrow f \\ \mathcal{C}' & \xleftarrow{\underline{\text{Hom}}'(f(A), -)} & \mathcal{C}' \end{array}$$

obtenue via les adjonctions  $(- \otimes A, \underline{\text{Hom}}(A, -))$  et  $(- \otimes f(A), \underline{\text{Hom}}'(f(A), -))$  à partir de la face carrée :

$$(2.31) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{- \otimes A} & \mathcal{C} \\ f \downarrow & \cong_a & \downarrow f \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{- \otimes' f(A)} & \mathcal{C}' \end{array}$$

D'autre part, le morphisme de la définition 2.1.141, n'est autre que la face carrée obtenue à partir de (2.31) via les adjonctions  $(f, g)$  et  $(f, g)$ . Le résultat découle alors du lemme 1.1.15. C.Q.F.D

La définition suivante généralise 2.1.140 :

**DEFINITION 2.1.143** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes, \underline{\text{Hom}})$  et  $(\mathcal{C}', \otimes', \underline{\text{Hom}}')$  deux catégories monoïdales fermées à droite. On suppose donné un foncteur pseudo-monoïdal  $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  et un  $f$ -module à droite  $(l, b)^5$ . On définit des morphismes :

$$(2.32) \quad l\underline{\text{Hom}}(A, B) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}'(f(A), l(B))$$

naturels en  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$  par la composée :

$$l\underline{\text{Hom}}(A, B) \xrightarrow{\delta} \underline{\text{Hom}}'(f(A), l\underline{\text{Hom}}(A, B) \otimes' f(A)) \xrightarrow{b} \underline{\text{Hom}}'(f(A), l(\underline{\text{Hom}}(A, B) \otimes A)) \xrightarrow{ev} \underline{\text{Hom}}'(f(A), l(B))$$

**LEMME 2.1.144** — Gardons les hypothèses de la définition précédente. On suppose que le foncteur  $l$  admet un adjoint à gauche  $k$ . La transformation naturelle  $l\underline{\text{Hom}}(A, -) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}'(f(A), l(-))$  correspond via les adjonctions :

$$(k \circ (- \otimes' f(A)), \underline{\text{Hom}}'(f(A), l(-))) \quad \text{et} \quad ((- \otimes A) \circ k, l\underline{\text{Hom}}(A, -))$$

au morphisme de projection (voir la proposition 2.1.97) :

$$k \circ (- \otimes' f(A)) \longrightarrow (- \otimes A) \circ k$$

En particulier, lorsque le morphisme structural du projecteur  $[f, k]$  est inversible la flèche (2.32) est inversible.

DEMONSTRATION Le morphisme de la définition est celui obtenu à partir de la face carrée suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{- \otimes A} & \mathcal{C} \\ l \downarrow & \cong_b & \downarrow l \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{- \otimes' f(A)} & \mathcal{C}' \end{array}$$

<sup>5</sup>Rappelons qu'un  $f$ -module à droite est un foncteur  $l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  muni de morphismes  $l(A) \otimes f(B) \rightarrow l(A \otimes B)$  naturels en  $A$  et  $B$ .

via les adjonctions  $(- \otimes A, \underline{\text{Hom}}(A, -))$  et  $(- \otimes' f(A), \underline{\text{Hom}}'(f(A), -))$ . D'autre part, le morphisme de projection est obtenu de la même façon via l'adjonction  $(k, l)$ . Le résultat découle maintenant du lemme 1.1.15. C.Q.F.D

**DEFINITION 2.1.145** — Soient  $(\mathcal{C}, \otimes, \underline{\text{Hom}})$  et  $(\mathcal{C}', \otimes', \underline{\text{Hom}}')$  deux catégories monoïdales fermées à droite. On suppose donné un foncteur pseudo-monoïdal  $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  et un  $f$ -module à gauche  $(l, b)$ . Soit  $k$  un adjoint à gauche de  $l$  et  $g$  un adjoint à droite de  $f$ . On définit un morphisme :

$$\underline{\text{Hom}}(k(A'), B) \longrightarrow g\underline{\text{Hom}}'(A', l(B))$$

naturel en  $(A', B) \in \text{Ob}(\mathcal{C}') \times \text{Ob}(\mathcal{C})$  à partir de :

$$k(f(-) \otimes' A') \longrightarrow - \otimes k(A')$$

via les adjonctions :

$$(k(f(-) \otimes' A'), g\underline{\text{Hom}}'(A', l(-))) \quad \text{et} \quad (- \otimes k(A'), \underline{\text{Hom}}(k(A'), -))$$

**LEMME 2.1.146** — Gardons les notations et hypothèses de la définition 2.1.145. Si le morphisme structural du projecteur  $[f, k]$  est inversible, alors la flèche :

$$\underline{\text{Hom}}(k(A'), B) \xrightarrow{\sim} g\underline{\text{Hom}}'(A', l(B))$$

est inversible pour tout  $A'$  et  $B$ .

### 2.1.6 Catégories monoïdales triangulées

Soit  $(\mathcal{C}, \otimes)$  une catégorie monoïdale. Lorsque la catégorie  $\mathcal{C}$  est une catégorie additive on aimerait que le bifoncteur  $- \otimes -$  soit biadditif. Ainsi, on fait la définition suivante :

**DEFINITION 2.1.147** — 1- Une catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$  est une catégorie monoïdale additive si la catégorie  $\mathcal{C}$  est additif et si le bifoncteur  $- \otimes -$  est biadditif, i.e., pour tout  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  les foncteurs  $A \otimes -$  et  $- \otimes A$  sont additifs.

Lorsqu'en plus la catégorie monoïdale  $\mathcal{C}$  est symétrique et/ou unitaire, on parlera de catégorie monoïdale additive, symétrique et/ou unitaire.

2- Les foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. monoïdaux) entre catégories monoïdales additives sont les foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. monoïdaux) entre les catégories monoïdales sous-jacentes qui sont en plus additifs.

Pour les applications qui suivront, on est surtout intéressé par la notion de catégories monoïdales triangulées.

**DEFINITION 2.1.148** — Une catégorie monoïdale (resp. monoïdale symétrique) triangulée est une catégorie monoïdale additive  $(\mathcal{T}, \otimes, \sigma)$  (resp.  $(\mathcal{T}, \otimes, \sigma, \tau)$ ), avec une structure de catégorie triangulée sur  $\mathcal{T}$  ainsi que des isomorphismes :

$$A[+1] \otimes B \xrightarrow[\sim]{s_g} (A \otimes B)[+1] \xleftarrow[\sim]{s_d} A \otimes B[+1]$$

naturels en  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{T})^2$  et commutant de la manière évidente avec les isomorphismes d'associativité (resp. d'associativité et de commutativité). Deux axiomes supplémentaires sont imposés :

1. Pour tout triangle distingué  $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A[+1]$  et tout objet  $D$  de  $\mathcal{T}$  les deux triangles ci-dessous :

$$A \otimes D \longrightarrow B \otimes D \longrightarrow C \otimes D \longrightarrow (A \otimes D)[+1]$$

$$D \otimes A \longrightarrow D \otimes B \longrightarrow D \otimes C \longrightarrow (D \otimes A)[+1]$$

sont distingués. En d'autres termes, les foncteurs  $- \otimes D$  et  $D \otimes -$  munis des isomorphismes  $s_g$  et  $s_d$  respectivement, sont des foncteurs triangulés.

2. Pour tout  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{T}$  le carré ci-dessus est commutatif à multiplication par  $-1$  près :

$$\begin{array}{ccc} A[+1] \otimes B[+1] & \longrightarrow & (A[+1] \otimes B)[+1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A \otimes D[+1])[+1] & \xrightarrow{-1} & (C \otimes D)[+2] \end{array}$$

On dégage facilement la notion de foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. monoïdaux) triangulés :

**DEFINITION 2.1.149** — Soient  $(\mathcal{T}, \otimes)$  et  $(\mathcal{T}', \otimes')$  deux catégories monoïdales (resp. monoïdales symétriques) triangulées. Un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-monoïdal symétrique) triangulé de  $\mathcal{T}$  dans  $\mathcal{T}'$  est un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-monoïdal symétrique) entre les catégories additives monoïdales sous-jacentes, qui est triangulé et compatible avec les isomorphismes  $s_g$  et  $s_d$ .

Supposons donnés des objets unités dans  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$ . Un foncteur pseudo-monoïdal triangulé et pseudo-unitaire est simplement un foncteur pseudo-monoïdal triangulé muni d'une flèche  $e$  qui le rend également un foncteur pseudo-monoïdal et pseudo-unitaire.

Il est utile de considérer les dérivateurs triangulés monoïdaux :

**DEFINITION 2.1.150** — 1- Un dérivateur triangulé monoïdal (resp. monoïdal symétrique) est un dérivateur triangulé  $\mathbb{D}$  muni des données supplémentaires suivantes :

- Pour chaque  $I \in \text{Ob}(\text{Dia})$  d'une structure de catégorie monoïdale (resp. monoïdale symétrique) triangulée  $(\mathbb{D}(I), \otimes_I, \sigma)$ .
- Pour chaque foncteur  $u : A \longrightarrow B$  de  $\text{Dia}$  d'une structure de foncteur monoïdal (resp. monoïdal symétrique) sur  $u^*$ .

2- Un dérivateur triangulé monoïdal (resp. monoïdal symétrique) unitaire est un dérivateur triangulé monoïdal (resp. monoïdal symétrique) muni d'un objet unité  $\mathbb{1}_I \in \text{Ob}(\mathbb{D}(I))$  pour chaque  $I \in \text{Ob}(\text{Dia})$  et d'un isomorphisme  $u^* \mathbb{1}_I \simeq \mathbb{1}_J$  pour chaque  $u : J \rightarrow I \in \text{Fl}(\text{Dia})$  faisant de  $u^*$  un foncteur monoïdal (resp. monoïdal symétrique) unitaire.

**Remarque 2.1.151** — Étant donné un dérivateur triangulé monoïdal  $(\mathbb{D}, \otimes)$  on peut définir un produit extérieur  $\boxtimes$  de la manière usuelle suivante. Si  $I$  et  $J$  sont deux catégories de  $\text{Dia}$  de projections respectives  $p_I$  et  $p_J$  sur  $\mathbf{e}$  on définit un foncteur biadditif :

$$\boxtimes : \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J) \longrightarrow \mathbb{D}(I \times J)$$

par la composée suivante :

$$\mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J) \xrightarrow{(p_J \times \text{id})^* \times (\text{id} \times p_I)^*} \mathbb{D}(I \times J) \times \mathbb{D}(I \times J) \xrightarrow{\otimes_{I \times J}} \mathbb{D}(I \times J)$$

On vérifie facilement que si  $X$  est un objet de  $\mathbb{D}(\mathbf{e})$ , les foncteurs  $- \boxtimes X$  et  $X \boxtimes -$  définissent des morphismes de dérivateurs triangulés.

On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.1.152** — Soit  $(\mathcal{T}, \otimes)$  une catégorie triangulée monoïdale. Supposons que la catégorie monoïdale sous-jacente à  $\mathcal{T}$  est fermée à droite. Soit  $B$  un objet de  $\mathcal{T}$  et considérons le foncteur :

$$\underline{\text{Hom}}(-, B) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^{\text{op}}$$

Pour que le foncteur  $\underline{\text{Hom}}(-, B)$  soit triangulé, il suffit que les deux hypothèses ci-dessous soient vérifiées :

- La catégorie  $\mathcal{T}$  admet des petites sommes et un système de générateurs compacts.
- Il existe un dérivateur triangulé monoïdal  $(\mathbb{D}, \otimes)$  de domaine une sous-catégorie  $\text{Dia}$  de  $\mathbf{Cat}$  contenant les petites catégories discrètes, tel que  $\mathbb{D}(e) = \mathcal{T}$  (en tant que catégorie monoïdale triangulée).

**DEMONSTRATION** Remarquons tout de suite que l'hypothèse  $\mathcal{C}$  fermée à droite assure que les foncteurs  $- \otimes A$  commutent aux petites sommes pour tout  $A \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ .

Soit  $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow A[+1]$  un triangle distingué de  $\mathcal{T} = \mathbb{D}(\mathbf{e})$ . Les axiomes des catégories monoïdales triangulées impliquent que le 2-triangle de foncteurs de  $\mathcal{T}$  dans  $\mathcal{T}$  :

$$(- \otimes A') \longrightarrow (- \otimes A) \longrightarrow (- \otimes A'') \longrightarrow (- \otimes A)[+1]$$

est distingué. Si on savait montrer que le 2-triangle obtenu par adjonction :

$$\underline{\text{Hom}}(A'', -) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, -) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A', -) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A'', -)[+1]$$

est également distingué la conclusion de la proposition sera vraie. On cherchera ainsi à appliquer la proposition 2.1.66.

Notons que par l'axiome 2 de la définition 2.1.34, le foncteur  $\mathbb{D}(\mathbf{1}) \longrightarrow \text{HOM}(\mathbf{1}^{\text{op}}, \mathbb{D}(e))$  est essentiellement surjectif. Il existe ainsi un objet  $E$  de  $\mathbb{D}(\mathbf{1})$  dont le squelette est :

$$A' \longrightarrow A$$



Il existe alors un morphisme de triangle :

$$\begin{array}{ccccccc}
 1^*E & \longrightarrow & 0^*E & \longrightarrow & \text{Cone}(E) & \longrightarrow & 1^*E[+1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & A[+1]
 \end{array}$$

Le foncteur  $- \boxtimes E : \mathbb{D}(e) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbf{1})$  vérifie les conditions de la proposition 2.1.66. En effet, on a un morphisme canonique :

$$\text{Cone}(- \boxtimes E) \simeq - \otimes \text{Cone}(E)$$

qui fait commuter le diagramme de foncteurs :

$$\begin{array}{ccccccc}
 1^*(- \boxtimes E) & \longrightarrow & 0^*(- \boxtimes E) & \longrightarrow & \text{Cone}(- \boxtimes E) & \longrightarrow & 1^*(- \boxtimes E)[+1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 - \otimes A' & \longrightarrow & - \otimes A & \longrightarrow & - \otimes A'' & \longrightarrow & - \otimes A[+1]
 \end{array}$$

fournissant ainsi un isomorphisme de 2-triangles distingués. La proposition 2.1.66 s'applique.

C.Q.F.D

### 2.1.7 Des hypothèses sur un 2-foncteur homotopique stable

Soit  $S$  un schéma de base. Dans cette section, on regroupe quelques conditions de nature technique qu'on peut imposer à un 2-foncteur homotopique stable sur  $\text{Sch}/S$  (voir la définition 1.4.1). On commence par la condition la plus simple :

**DEFINITION 2.1.153** — Soit  $\Lambda \subseteq \mathbb{Q}$  une  $\mathbb{Z}$ -algèbre. Un 2-foncteur homotopique stable  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$  est dit  $\Lambda$ -linéaire si l'une des conditions équivalentes ci-dessous est vérifiée :

- Pour tout  $S$ -schéma  $X$ , les groupes de morphismes de la catégorie additive  $H(X)$  sont naturellement des  $\Lambda$ -modules.
- Pour tout  $S$ -schéma  $X$ , tout objet  $A$  de  $H(X)$  et tout entier naturel  $n$ , la flèche  $n \cdot \text{id}_A : A \longrightarrow A$  est inversible dès que l'entier  $n$  est inversible dans  $\Lambda$ .

L'équivalence des deux conditions découle du fait que les sous-anneaux de  $\mathbb{Q}$  sont tous de la forme  $\mathbb{Z}[1/p, p \in I]$  où  $I$  est une partie de l'ensemble des nombres premiers.

On peut également définir la notion de 2-foncteur homotopique stable  $\Lambda$ -linéaire pour un anneau  $\Lambda$  quelconque. Notons toutefois que si  $\Lambda$  n'est pas un quotient d'un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$ , cette notion n'est pas une propriété mais une structure supplémentaire.

On continue avec la définition suivante :

**DEFINITION 2.1.154** — **1-** Un 2-foncteur homotopique stable  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$  avec petites sommes est un 2-foncteur homotopique stable  $H$  tel que les catégories triangulées  $H(X)$  admettent les petites sommes pour tous les  $S$ -schémas quasi-projectifs  $X$ .

**2-** On dit d'un 2-foncteur homotopique stable avec petites sommes  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$  qu'il est compactement engendré si pour tout  $S$ -schéma  $X$ , la catégorie  $H(X)$  est compactement engendrée.

Plus intéressant que la définition précédente :

**DEFINITION 2.1.155** — **1-** On dit qu'un 2-foncteur homotopique stable avec petites sommes  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$  est engendré par la base si pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$ , on a l'égalité :

$$\ll \{f_{\#} \pi_Y^* A, f : Y \longrightarrow X \text{ lisse et } A \in \text{Ob}(H(S))\} \gg = H(X)$$

où  $\pi_Y = \pi_X \circ f$  désigne la projection structurale de  $Y$  sur  $S$ .

**2-** On dit que  $H$  est compactement engendré par la base si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout  $S$ -morphisme  $f$  le foncteur  $f^*$  envoie un objet compact sur un objet compact,
- il existe un ensemble d'objets compacts  $\Lambda \subset H(S)$  tel que pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$ , on a l'égalité :

$$\ll \{f_{\#} \pi_Y^* A, f : Y \longrightarrow X \text{ lisse et } A \in \Lambda\} \gg = H(X)$$

avec  $\pi_Y$  comme dans **1-**.

**Remarque 2.1.156** — Un 2-foncteur homotopique stable  $H$  avec petites sommes et compactement engendré par la base prend ses valeurs parmi les catégories triangulées compactement engendrée au sens de la définition 2.1.20. En effet les objets  $f_{\#}\pi_Y^*A$  sont compacts pour  $A$  compact puisque  $f_{\#}$  admet un adjoint à droite commutant aux petites sommes. D'autre part, la classe d'objets considérée dans la définition 2.1.155 est essentiellement équivalente à un ensemble puisque c'est le cas pour la classe des morphismes lisses.

**LEMME 2.1.157** — Soit  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$  un 2-foncteur homotopique stable avec petites sommes. Les cinq conditions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout  $f : Y \longrightarrow X$  les 4 foncteurs  $f^*$ ,  $f_*$ ,  $f_!$  et  $f^!$  commutent aux petites sommes.
2. Pour tout  $f : Y \longrightarrow X$  le foncteur  $f_*$  commute aux petites sommes.
3. La même chose que la condition précédente avec  $f$  une immersion ouverte.
4. Pour tout  $f : Y \longrightarrow X$  le foncteur  $f^!$  commute aux petites sommes.
5. La même chose que la condition précédente avec  $f$  une immersion fermée.

DEMONSTRATION Notons que les opérations  $f^*$  et  $f_!$  commutent aux petites sommes puisqu'ils admettent des adjoints à gauche. Ainsi, si on démontre que (2)  $\iff$  (4) on a immédiatement les équivalences (1)  $\iff$  (2) et (1)  $\iff$  (4).

Notons d'autre part que (2)  $\iff$  (3) et (4)  $\iff$  (5). Pour la première équivalence, il suffit de factoriser un  $S$ -morphisme par une immersion ouverte suivie d'un morphisme projectif et d'utiliser le fait que pour  $f$  projectif,  $f_* = f_!$  commute aux petites sommes. Pour la deuxième équivalence, il suffit de factoriser un  $S$ -morphisme par une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse et de remarquer que lorsque  $f$  est lisse,  $f^! = \text{Th}(\Omega_f)f^*$  commute également aux petites sommes.

Pour terminer, il suffit de montrer l'équivalence : (3)  $\iff$  (5). Elle découle facilement du 2-triangle distingué de localité (voir la proposition 1.4.9). C.Q.F.D

**DEFINITION 2.1.158** — Gardons les hypothèses du lemme précédent. Si les cinq conditions équivalentes sont satisfaites, on dit  $H$  est parfait pour les petites sommes.

**LEMME 2.1.159** — Soit  $H$  un 2-foncteur homotopique stable avec petites sommes et compactement engendré par la base. Alors  $H$  est parfait pour les petites sommes.

DEMONSTRATION En effet, soit  $j$  une immersion ouverte. Le foncteur  $j^*$  envoie objet compact sur objet compact. Il vient que sont adjoint à droite  $j_*$  commute aux petites sommes puisque la catégorie  $H(\text{Source}(j))$  est compactement engendrée. C.Q.F.D

On termine les définitions avec les deux notions de séparabilité et de semi-séparabilité :

**DEFINITION 2.1.160** — Soit  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$  un 2-foncteur homotopique stable.

- 1- On dit que  $H$  est séparé si pour tout  $S$ -morphisme  $f : Y \longrightarrow X$  surjectif, le foncteur  $f^*$  est conservatif.
- 2- On dit que  $H$  est semi-séparé si pour tout  $S$ -morphisme  $e : X' \longrightarrow X$  fini surjectif et totalement inséparable, le foncteur  $e^*$  est conservatif.

**Remarque 2.1.161** — Soit  $X$  un  $S$ -schéma et  $i : X_{\text{red}} \longrightarrow X$  l'immersion fermée de son sous-schéma réduit. L'axiome de localité appliqué à l'immersion  $i$  de complémentaire l'ouvert  $\emptyset$ , montre que le foncteur  $i^*$  est conservatif. En écrivant le triangle de localité, on trouve même que  $i^*$  est une équivalence. En particulier, lorsque  $S$  est un schéma d'égal caractéristique nulle,  $H$  est automatiquement semi-séparé. En effet, les morphismes finis surjectifs et totalement inséparables entre schémas d'égal caractéristique nulle deviennent des isomorphismes après passage aux schémas réduits.

La proposition suivante donne un critère simple pour qu'un 2-foncteur homotopique stable soit séparé :

**PROPOSITION 2.1.162** — Soit  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$  un 2-foncteur homotopique stable sur une base noethérienne  $S$ . Supposons que les foncteurs  $f^*$  sont conservatifs pour les  $S$ -morphisms  $f : X' \longrightarrow X$  tels que :  
 –  $X$  et  $X'$  sont des schémas intègres et  $f$  est fini surjectif,  
 –  $f$  admet une factorisation  $f = e \circ f_0$  avec  $f_0$  un revêtement étale et  $e$  fini surjectif et totalement inséparable.  
 Alors  $H$  est séparé.

DEMONSTRATION En effet, soit  $h : Y \longrightarrow X$  un morphisme surjectif et montrons que  $h^*$  est conservatif en admettant l'hypothèse de l'énoncé. On raisonne par récurrence noethérienne sur  $X$ . Si  $U$  est un ouvert de  $X$  et  $Z$  le fermé

complémentaire, on forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & T \\ g \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow l \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Z \end{array}$$

Si  $U$  est non vide, par récurrence noethérienne,  $l^*$  est conservatif. En utilisant l'axiome de localité, on voit que l'on peut remplacer  $X$  par n'importe quel ouvert non vide. En particulier, on peut supposer  $X$  intègre. Quitte à prendre le normalisé du produit fibré par une extension totalement inséparable  $e : X_0 \longrightarrow X$  on peut supposer que le lieu de lissité de la fibre générique de  $f$  est non vide. Il existe alors une section localement pour la topologie étale. Les détails sont laissés aux lecteurs. C.Q.F.D

**PROPOSITION 2.1.163** — *Soit  $H$  un 2-foncteur homotopique stable semi-séparé. Soit  $e : X' \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme fini surjectif et totalement inséparable. Le foncteur  $e^*$  est une équivalence de catégories.*

DEMONSTRATION Formons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' \times_X X' & \xrightarrow{pr_2} & X' \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow e \\ X' & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

Comme  $e$  est totalement inséparable, les morphismes  $pr_i$  induisent des isomorphismes :

$$(pr_i)_{\text{red}} : (X' \times_X X')_{\text{red}} \longrightarrow (X')_{\text{red}}$$

Pour montrer que  $e^*$  est une équivalence de catégories, on montrera que les morphismes d'adjonctions :

$$\text{id} \longrightarrow e_* e^* \quad \text{et} \quad e^* e_* \longrightarrow \text{id}$$

sont inversibles.

Pour le morphisme d'unité, on utilise que le foncteur  $e^*$  est conservatif par semi-séparabilité. Il suffit donc de montrer que le morphisme :

$$e^* \longrightarrow e^*(e_* e^*)$$

est inversible. Mais par le théorème de changement de base appliqué au morphisme fini  $e$ , on a les isomorphismes canoniques :

$$(2.33) \quad e^* e_* e^* \simeq pr_{1*} pr_2^* e^* \simeq pr_{1*} pr_1^* e^*$$

De plus modulo cette identification, le morphisme (2.33) est simplement le morphisme d'unité de  $(pr_1^*, pr_{1*})$  :

$$e^* \longrightarrow (pr_1^* pr_{1*}) e^*$$

Ce 2-morphisme est inversible puisque  $pr_1^*$  est une équivalence étant donné que  $(pr_1)_{\text{red}}$  est un isomorphisme de schémas.

Pour le morphisme de counité, on remarque que lorsqu'on applique le 1-morphisme  $e_*$  à  $e^* e_* \longrightarrow \text{id}$  on obtient un 2-isomorphisme. En effet le 2-morphisme (provenant de la counité de l'adjonction)  $e_* e^* e_* \longrightarrow e_*$  est un inverse à droite du 2-morphisme (provenant de l'unité de l'adjonction)  $e_* \longrightarrow e_* e^* e_*$ . Ce dernier est inversible puisqu'on a montré que l'unité est inversible. Il suffira donc de prouver que le foncteur  $e_*$  est lui aussi conservatif. Sachant que  $e^*$  est conservatif, il suffit de prouver que la composée  $e^* e_*$  est conservative. Mais par l'isomorphisme de changement de base  $e^* e_* \simeq pr_{1*} pr_2^*$ . Le résultat découle alors du fait que  $pr_i^*$  et  $pr_{i*}$  sont des équivalences inverses l'une de l'autre, puisque  $(pr_i)_{\text{red}}$  est un isomorphisme de schémas. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.1.164** — *On suppose que  $H$  est semi-séparé. Soit  $e : X' \longrightarrow X$  un pseudo-revêtement étale, i.e., un revêtement étale  $r$  suivi d'un morphisme fini surjectif et totalement inséparable  $e_0$ . Les foncteurs  $e^!$  et  $e^*$  sont naturellement isomorphes.*

DEMONSTRATION On sait que  $r^! = r^*$  étant donné que le faisceau  $\Omega_r$  est nul. Il suffit de montrer que  $e_0^! = e_0^*$ . Par la proposition 2.1.163, on sait que  $e_{0*} = e_0!$  est une équivalence. Il est bien connu que les adjoints à gauche et à droite

d'une équivalence sont isomorphes entre eux. Il vient que l'adjoint à gauche  $e_0^*$  de  $e_{0*}$  est isomorphe à l'adjoint à droite  $e_0^!$  de  $e_{0!}$ . C.Q.F.D

L'hypothèse de séparabilité sera souvent utilisée via le lemme :

**LEMME 2.1.165** — **1-** Soit  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$  un 2-foncteur homotopique stable  $\mathbb{Z}_{(n)}$ -linéaire et séparé.

Soit  $e : X' \longrightarrow X$  un pseudo-revêtement étale de  $S$ -schémas de partie étale  $r$  de degré divisant  $n$ . En utilisant le corollaire 2.1.164, on définit un 2-morphisme par la composée :

$$\text{id} \longrightarrow e_*e^* \xleftarrow{\sim} e_!e^! \longrightarrow \text{id}$$

Ce 2-morphisme est inversible.

**2-** Pour simplifier, on supposera que les catégories  $H(-)$  sont pseudo-abéliennes. On garde les hypothèse du **1-**. Supposons en plus que la partie étale  $r$  est galoisienne de groupe  $G$ . Le groupe  $G$  agit alors sur les 1-morphismes  $e_*e^*$  et  $e_!e^!$  et le projecteur :

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

définit des facteurs directes  $F_* \subset e_*e^*$  et  $F_! \subset e_!e^!$ . Les 2-morphismes évidents :

$$\text{id} \longrightarrow F_* \quad \text{et} \quad F_! \longrightarrow \text{id}$$

sont inversibles.

**DEMONSTRATION 1-** Il suffit de prouver que cette transformation naturelle est inversible après application du foncteur  $g^* = g^!$  avec  $g : Y \longrightarrow X$  une pseudo-revêtement étale pseudo-galoisien qui domine  $r$  :

$$(2.34) \quad g^* \longrightarrow g^*e_*e^* \xleftarrow{\sim} g^*e_!e^! \longrightarrow g^*$$

Considérons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & X' \\ e' \downarrow & & \downarrow e \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Le morphisme  $Y'/Y$  est alors la somme disjointe de  $d$  morphismes finis surjectifs totalement inséparables (où  $d$  est le degré de la partie étale  $r$  de  $e$ ). Ces morphismes finis surjectifs et totalement inséparables induisent même un isomorphisme après passage aux schémas réduits.

Il est facile de voir que la composée de (2.34) est égale à :

$$(2.35) \quad g^* \longrightarrow e'_*e'^*g^* \xleftarrow{\sim} e'_!e'^!g^* \longrightarrow g^*$$

On se ramène ainsi à traiter le cas où  $r$  est un revêtement trivial (i.e., somme de  $d$  copies) et  $e_0 = \text{id}$ . Il est facile de voir que dans ce cas, la composée est simplement la multiplication par le degré  $d$ .

**2-** Le même raisonnement qu'on vient d'utiliser, nous ramène à prouver la conclusion pour  $e$  la projection de  $\coprod_G X \longrightarrow X$  avec l'action évidente de  $G$ . C'est là un exercice facile. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.1.166** — Soit  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$  un 2-foncteur homotopique stable qu'on supposera  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. Soit  $r : X' \longrightarrow X$  un morphisme fini surjectif dans  $\text{Sch}/S$  muni d'une action d'un groupe fini  $G$  transitive sur les fibres géométriques. L'image du projecteur :

$$p : \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} g$$

dans  $r_*r^*$  s'identifie au foncteur identité via le 2-morphisme d'unité  $\text{id} \longrightarrow r_*r^*$ .

**DEMONSTRATION** Notons  $F$  l'image de  $p : r_*r^* \longrightarrow r_*r^*$ . On dispose d'une factorisation du 2-morphisme d'unité :

$$\text{id} \longrightarrow F \longrightarrow r_*r^*$$

Il s'agit de prouver que  $\text{id} \simeq F$ . On raisonnera par récurrence noethérienne sur  $X$ . Il existe un ouvert non vide  $j : U \longrightarrow X$  au dessus duquel le morphisme  $r$  est pseudo-galoisien, i.e., composé d'un revêtement étale galoisien suivi par un morphisme fini surjectif totalement inséparable. Par le lemme 2.1.165, on sait que  $j^* \longrightarrow j^*F$  est inversible. Si  $i$  désigne l'immersion fermée du complémentaire  $Z$  de  $U$ , on se ramène par l'axiome de localité à montrer que  $i^* \longrightarrow i^*F$  est inversible. Ceci équivaut à la conclusion du lemme pour le morphisme  $Z' = X' \times_X Z \longrightarrow Z$ . La récurrence noethérienne permet de conclure. C.Q.F.D

### 2.1.8 Résolution des singularités

On termine nos préliminaires par un petit paragraphe concernant les techniques de résolution des singularités.

**DEFINITION 2.1.167** — Soit  $S$  un schéma noethérien. On dit que  $S$  admet la résolution des singularités par éclatements, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$ , il existe un éclatement  $m : X' \longrightarrow X$  avec  $X'$  un schéma régulier.
2. Pour tout  $S$ -schéma régulier  $Y$  et tout sous-schéma  $Z \subset Y$ , il existe un éclatement  $e : Y' \longrightarrow Y$  de centre inclus dans le lieu de non régularité de  $Z$  tel que :
  - $Y'$  est encore régulier,
  - le diviseur exceptionnel  $E$  de  $e$  est un diviseur à croisements normaux,
  - le transformé pur  $Z'$  de  $Z$  est régulier, et rencontre  $E$  transversalement.

**Remarque 2.1.168** — Lorsque le schéma  $S$  est lui même régulier, la première condition est conséquence de la seconde puisqu'un schéma quasi-projectif est un sous-schéma de  $\mathbb{P}_S^n$ .

**Remarque 2.1.169** — La résolution des singularité est connue pour les bases  $S$  qui sont des schémas essentiellement de type fini sur un corps  $k$  de caractéristique zéro. C'est là, un théorème profond de la géométrie algébrique dû à Hironaka. La résolution des singularités est conjecturée sur des bases plus générales comme les corps finis et les anneaux de valuation discrète d'inégale caractéristique.

**Remarque 2.1.170** — On fera attention qu'un corps  $k$  admettant la résolution des singularités, n'est pas forcément parfait.

La technique de résolution des singularités par altérations à la de Jong permet souvent de contourner la résolution des singularités par éclatements au pris de quelques hypothèses supplémentaires.

**DEFINITION 2.1.171** — Soit  $X$  un schéma noethérien. Une altération est un morphisme projectif  $e : X' \longrightarrow X$  tel qu'il existe un ouvert Zariski dense  $U$  de  $X$  au dessus duquel  $e$  est fini et surjectif.

Deux sortes d'altérations apparaissent dans les résultats de De Jong :

- Une altération est dite génériquement étale si l'ouvert  $U$  peut être choisi de sorte que  $e|_{e^{-1}(U)} : e^{-1}(U) \longrightarrow U$  soit étale.
- Une altération est dite génériquement pseudo-galoisienne si l'ouvert  $U$  peut être choisi de sorte que  $e|_{e^{-1}(U)} : e^{-1}(U) \longrightarrow U$  soit la composée d'un revêtement étale galoisien suivi d'une extension totalement inséparable.

Voici les résultats de désingularisation de De Jong qu'on aura à utiliser par la suite :

**THEOREME 2.1.172** — 1- Soit  $X$  un schéma de type fini sur un corps ou un anneau de valuation discrète. Il existe une altération génériquement étale  $e : X' \longrightarrow X$  avec  $X'$  régulier. Il existe également une altération génériquement pseudo-galoisienne  $e' : X'' \longrightarrow X$  avec  $X''$  régulier.

2- Soit  $X$  un schéma régulier de type fini sur un corps ou un anneau de valuation. Soit  $Y \subset X$  un sous-schéma de  $X$ . Il existe une altération génériquement étale  $e : X' \longrightarrow X$  telle que  $e^{-1}(Y)$  soit un diviseur à croisements normaux. Il existe également une altération génériquement pseudo-galoisienne  $e' : X'' \longrightarrow X$  avec la même propriété.

**DEFINITION 2.1.173** — Soit  $S$  un schéma noethérien. On dit que  $S$  admet la résolution des singularités par altérations lorsque :

- tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$  vérifie la conclusion de la première partie du théorème 2.1.172,
- tout  $S$ -schéma quasi-projectif et régulier  $X$  vérifie la conclusion de la seconde partie du théorème 2.1.172

## 2.2 Engendrement de sous-catégories et de $t$ -structures dans un 2-foncteur homotopique stable.

Soit  $S$  un schéma noethérien admettant une famille ample de fibrés en droites. On note  $(\text{Sch}/S)$  la catégorie des  $S$ -schémas quasi-projectifs (i.e., de type fini et admettant une immersion dans  $\mathbb{P}(\mathcal{M})$  avec  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_S$ -module localement

libre de rang fini). On se donne un 2-foncteur homotopique stable  $H : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$  au sens de la définition 1.4.1.

Dans cette section, on définit des sous-catégories  $C(-) \subset H(-)$  par engendrement et on étudie la question de la stabilité de  $C$  par les quatre opérations. Ensuite, on définit (sous certaines conditions) des  $t$ -structures sur les catégories  $H(-)$  et on considère la question de la  $t$ -exactitude des opérations.

### 2.2.1 Définitions des sous-catégories engendrées et propriétés élémentaires de stabilité

Soit  $A$  un objet de  $H(S)$ . Pour tout  $S$ -schéma  $f : X \longrightarrow S$ , on pose :

$$A_X = f^*A \in \text{Ob}(H(X))$$

Ainsi pour tout morphisme  $g : Y \longrightarrow X$  de  $S$ -schémas, les 2-isomorphismes de connexions de  $H^*$  fournissent un isomorphisme  $A_Y \simeq g^*A_X$ . Ceci justifie l'abus de notation quelquefois utilisé :  $A = A_X$ .

**DEFINITION 2.2.1** — *Supposons donnée une classe d'objets  $\Lambda \subset \text{Ob}(H(S))$ . Pour tout  $S$ -schéma  $X$ , on notera  $\Lambda(X) \subset \text{Ob}(H(X))$  la classe formée des objets  $g_{\#}A_U$  avec  $A \in \Lambda$  et  $g : U \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme lisse.*

**Remarque 2.2.2** — Lorsque  $\Lambda$  est un ensemble (et pas seulement une classe) d'objets, il existe un ensemble d'objets  $\Lambda(X)'$  contenu dans  $\Lambda(X)$  et essentiellement équivalent à  $\Lambda(X)$ , i.e., tel que tout objet de  $\Lambda(X)$  soit isomorphe à un objet de  $\Lambda(X)'$ . Pour construire un tel  $\Lambda(X)'$ , on choisit un ensemble  $L$  de  $S$ -morphisms lisses de but  $X$  représentant les classes d'isomorphismes des  $S$ -morphisms lisses de but  $X$ . Un tel ensemble  $L$  existe puisque les  $S$ -morphisms lisses de but  $X$  sont des morphisms de type fini et donc paramétrés par un ensemble. Une fois l'ensemble  $L$  choisi, on prend pour  $\Lambda(X)'$  l'ensemble des objets de la forme  $f_{\#}A$  avec  $f$  dans  $L$  et  $A$  dans  $\Lambda$ .

Dans la suite, une classe d'objets  $\Lambda \subset \text{Ob}(H(S))$  sera fixée.

**DEFINITION 2.2.3** — *Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif :*

1- Avec les notations de la définition 2.1.6, on pose  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)_{?} = \langle \Lambda(X) \rangle_{?}^{s-ct} \subset H(X)$  avec  $? \in \{\emptyset, -, +\}$ . Les objets de  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$  seront appelés les objets strictement constructibles (ou  $\Lambda$ -strictement constructibles lorsque le contexte permet une confusion). De même, les objets de  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)_{-}$  (resp.  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)_{+}$ ) sont appelés négativement (resp. positivement) strictement constructibles.

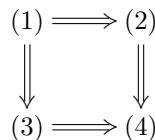
2- Avec les notations de la définition 2.1.10, on note  $H_{\Lambda}^{ct}(X)_{?} = \langle \Lambda(X) \rangle_{?}^{ct} \subset H(X)$  avec  $? \in \{\emptyset, -, +\}$ . Les objets de  $H_{\Lambda}^{ct}(X)$  seront appelés les objets constructibles (ou  $\Lambda$ -constructibles lorsque le contexte permet une confusion). De même, les objets de  $H_{\Lambda}^{ct}(X)_{-}$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(X)_{+}$ ) sont appelés négativement (resp. positivement) constructibles.

Dans la suite, on utilisera sans le préciser les lemmes 2.1.7 et 2.1.11. De même, le résultat facile suivant permettra de déduire des propriétés sur les objets constructibles de leurs analogues sur les positivement constructibles :

**LEMME 2.2.4** — *Soit  $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées. Soient  $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$  et  $\Lambda' \subset \text{Ob}(\mathcal{T}')$  deux classes d'objets. Considérons les assertions suivantes :*

1.  $f(\langle \Lambda \rangle_{+}^{s-ct}) \subset \langle \Lambda' \rangle_{+}^{s-ct}$ ,
2.  $f(\langle \Lambda \rangle_{+}^{ct}) \subset \langle \Lambda' \rangle_{+}^{ct}$ ,
3.  $f(\langle \Lambda \rangle^{s-ct}) \subset \langle \Lambda' \rangle^{s-ct}$ ,
4.  $f(\langle \Lambda \rangle^{ct}) \subset \langle \Lambda' \rangle^{ct}$ .

On a les implications suivantes :



DEMONSTRATION L'implication (3)  $\implies$  (4) découle de  $\Lambda \subset f^{-1}(\langle \Lambda' \rangle^{s-ct}) \subset f^{-1}(\langle \Lambda' \rangle^{ct})$  et du fait que la sous-catégorie triangulée  $\langle \Lambda' \rangle^{ct}$  est stable par facteurs directs. Les autres implications se démontrent de manière analogue. C.Q.F.D

**Stabilité par  $f_{\#}$  et  $f^*$**

On commence notre liste des propriétés élémentaires par le résultat facile suivant :

**PROPOSITION 2.2.5** — Soient  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs et  $? \in \{\emptyset, +, -\}$  :

1. Le 1-morphisme  $f^* : H(X) \longrightarrow H(Y)$  envoie la sous-catégorie  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)_{?}$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(X)_{?}$ ) dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)_{?}$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(Y)_{?}$ ),
2. Si  $f$  est lisse, le 1-morphisme  $f_{\#} : H(Y) \longrightarrow H(X)$  envoie la sous-catégorie  $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)_{?}$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(Y)_{?}$ ) dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)_{?}$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(X)_{?}$ ).

**DEMONSTRATION** Le second point découle facilement de l'inclusion (à isomorphisme près)  $f_{\#}\Lambda(Y) \subset \Lambda(X)$ . Pour montrer le premier point, on vérifie qu'on a également  $f^*\Lambda(X) \subset \Lambda(Y)$  à isomorphisme près.

Soit  $A \in \Lambda$  et  $g : U \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme lisse. Formons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f'} & U \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Le 2-morphisme d'échange  $Ex_{\#}^* : g'_{\#}f'^* \longrightarrow f^*g_{\#}$  est inversible. On déduit que l'objet  $f^*(g_{\#}A_U)$  est isomorphe à  $g'_{\#}f'^*A_U$  et donc à  $g'_{\#}A_V \in \Lambda(Y)$ . C.Q.F.D

On en déduit le corollaire :

**COROLLAIRE 2.2.6** — Soient  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $A$  un objet de  $H(X)$ . Soit  $(U_k)_{k=1, \dots, r}$  un recouvrement Zariski de  $X$ , et notons  $j_k$  l'immersion de  $U_k$  dans  $X$ . Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

- L'objet  $A$  est dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)_+$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(X)_+$ ,  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ ,  $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ ).
- Pour tout  $k \in \{1, \dots, r\}$ , l'objet  $j_k^*A$  est dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(U_k)_+$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(U_k)_+$ ,  $H_{\Lambda}^{s-ct}(U_k)$ ,  $H_{\Lambda}^{ct}(U_k)$ ).

**DEMONSTRATION** La première assertion implique la seconde par la proposition 2.2.5. On s'intéresse donc à l'implication réciproque.

On suppose que  $j_k^*A$  est dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(U_k)_+$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(U_k)_+$ ,  $H_{\Lambda}^{s-ct}(U_k)$ ,  $H_{\Lambda}^{ct}(U_k)$ ) pour tout  $k$ . Si  $I$  est une partie non vide de  $\{1, \dots, r\}$ , on notera  $U_I$  l'intersection des  $U_k$  pour  $k \in I$  et  $j_I$  l'inclusion de  $U_I$  dans  $X$ . Toujours par la proposition 2.2.5, l'objet  $j_I^*A$  est dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(U_I)_+$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(U_I)_+$ ,  $H_{\Lambda}^{s-ct}(U_I)$ ,  $H_{\Lambda}^{ct}(U_I)$ ) car pour  $I$  non vide et  $k \in I$ , on a un isomorphisme  $j_I^*A \simeq j_{I,k}^*(j_k^*A)$  avec  $j_{I,k}$  l'inclusion de  $U_I$  dans  $U_k$ .

Raisonnons par récurrence sur  $r$ . Lorsque  $r = 1$  il n'y a rien à démontrer. Si  $r = 2$ , on utilise le triangle de Mayer-Vietoris :

$$j_{12\#}j_{12}^*A \longrightarrow j_{1\#}j_1^*A \oplus j_{2\#}j_2^*A \longrightarrow A \longrightarrow j_{12\#}j_{12}^*A[+1]$$

Le résultat découle alors de la proposition 2.2.5 et le fait que la catégorie  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)_+$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(X)_+$ ,  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ ,  $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ ) est suspendue.

Enfin si  $r \geq 3$ , on se ramène au cas  $r - 1$  en considérant le recouvrement  $(V_k)_{k=1, \dots, r-1}$  donné par  $V_k = U_k$  pour  $k \leq r - 2$  et  $V_{r-1} = U_{r-1} \cup U_r$ . Pour vérifier que ce recouvrement possède encore la propriété de l'énoncé, on applique le cas  $r = 2$  au recouvrement de  $V_{r-1}$  par  $U_{r-1}$  et  $U_r$ . C.Q.F.D

**Remarque 2.2.7** — Le corollaire 2.2.6 est faux en général pour les sous-catégories  $H_{\Lambda}^{s-ct}(-)_-$ . En effet, l'argument utilisant le triangle de Mayer-Vietoris, ne s'applique plus puisque ces sous-catégories sont cosuspendues et non suspendues.

**Stabilité par  $i_i$  avec  $i$  une immersion**

Dans ce paragraphe, on établit le résultat suivant :

**PROPOSITION 2.2.8** — Soit  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion localement fermée de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme  $i_i$  envoie la sous-catégorie  $H_{\Lambda}^{s-ct}(Z)_+$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(Z)_+$ ,  $H_{\Lambda}^{s-ct}(Z)$ ,  $H_{\Lambda}^{ct}(Z)$ ) dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)_+$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(Y)_+$ ,  $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$ ,  $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$ ).

Dans la suite on considérera uniquement le cas non-respé. On fera attention que les  $S$ -schémas  $Z$  et  $Y$  ne sont pas supposés réduits. La preuve de la proposition 2.2.8 repose sur les quatre lemmes 2.2.9, 2.2.10, 2.2.11 et 2.2.13. Le premier de ces lemmes, traite un cas particulier :

**LEMME 2.2.9** — Soit  $A$  un objet de  $\Lambda$ . Pour toute immersion  $i : Z \longrightarrow Y$  de  $S$ -schémas quasi-projectifs, l'objet  $i_!A_Z$  de  $H(Y)$  est dans  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)_+$ .

DEMONSTRATION On peut écrire  $i = b \circ i'$  avec  $b$  une immersion ouverte et  $i'$  une immersion fermée :

$$Z \xrightarrow{i'} Y_0 \xrightarrow{b} Y$$

On en déduit que  $i_! \simeq b_!i'_! \simeq b_{\#}i'_*$ . Étant donné que le 1-morphisme  $b_{\#}$  envoie  $H_\Lambda^{s-ct}(Y_0)_+$  dans  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)_+$ , il suffira de prouver que l'objet  $i'_*A_Z$  est positivement strictement constructible. Pour cela, on utilise le triangle de localité :

$$j'_{\#}j'^*A_{Y_0} \longrightarrow A_{Y_0} \longrightarrow i'_*i'^*A_{Y_0} \longrightarrow j'_{\#}j'^*A_{Y_0}[+1]$$

où  $j'$  est l'immersion ouverte complémentaire à  $i'$ . Le lemme découle alors du fait que  $A_{Y_0}$  et  $j'_{\#}j'^*A_{Y_0}$  sont positivement strictement constructibles. C.Q.F.D

Le lecteur attentif a sûrement remarqué que la proposition 2.2.8 découle immédiatement de son cas particulier où  $i$  est une immersion fermée. En effet, il suffit de considérer la factorisation  $i = b \circ i'$  introduite dans la preuve du lemme précédent. Ceci dit, il est plus pratique de considérer l'énoncé 2.2.8 avec des immersions générales plutôt qu'avec des immersions fermées en vue du lemme suivant :

**LEMME 2.2.10** — Soient  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion de  $S$ -schémas quasi-projectifs et  $E$  un objet de  $H(Z)$ . Soit  $v : V \subset Z$  une immersion ouverte et  $t : T \subset Z$  le fermé complémentaire. Supposons que les objets  $(i \circ v)_!v^*E$  et  $(i \circ t)_!t^*E$  sont dans  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)_+$ . Alors, il en est de même de l'objet  $i_!E$ .

DEMONSTRATION Remarquons d'abord que  $(i \circ v)_! \simeq i_!v_{\#}$  et  $(i \circ t)_! \simeq i_!t_*$ . En appliquant  $i_!$  au triangle distingué de localité :

$$v_{\#}v^*E \longrightarrow E \longrightarrow i_*i^*E \longrightarrow$$

on voit que  $i_!E$  est une extension de  $(i \circ v)_!v^*E$  par  $(i \circ t)_!t^*E$ . C.Q.F.D

Le troisième lemme qu'on admettra provisoirement est un ingrédient géométrique :

**LEMME 2.2.11** — Soient  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion (avec  $Z$  non vide) et  $g : X \longrightarrow Z$  un morphisme lisse. Tout point générique  $\eta$  de  $Z$  admet un voisinage ouvert  $V$  suffisamment petit tel que les données suivantes existent :

- une famille finie de morphismes lisses  $h_k : R_k \longrightarrow Y$ ,
- des immersions ouvertes  $R_k \times_Y V \longrightarrow X \times_Z V$  de  $V$ -schémas formant un recouvrement de  $X \times_Z V$  pour la topologie de Zariski.

**Remarque 2.2.12** — Soient  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion et  $g : X \longrightarrow Z$  un  $Z$ -schéma lisse. On dit que  $g$  provient d'un  $Y$ -schéma lisse, s'il existe un  $Y$ -schéma lisse  $h : R \longrightarrow Y$  est un isomorphisme  $R \times_Y Z \simeq X$ . Ainsi, le lemme ci-dessus dit simplement que pour tout  $Z$ -schéma lisse  $X$  et tout point générique  $\eta$  de  $Z$ , il existe un voisinage  $V$  de  $\eta$  dans  $Z$  et un recouvrement Zariski de  $X|_V = X \times_Z V$  par des  $V$ -schémas lisses provenant de  $Y$ -schémas lisses (cette fois, par produit fibré suivant l'immersion de  $V$ ).

Le dernier lemme est d'un intérêt indépendant du problème considéré :

**LEMME 2.2.13** — Soit  $(X_k)_{k=1, \dots, r}$  un recouvrement Zariski d'un  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$ . Pour  $I \subset \{1, \dots, r\}$  non vide, on note  $j_I$  l'immersion ouverte de  $\cap_{k \in I} X_k$  dans  $X$ . Tout objet  $E$  de  $H(X)$  appartient à la sous-catégorie suspendue :

$$\langle \{j_{I\#}j_I^*E; I \subset \{1, \dots, r\} \text{ non vide} \} \rangle_+^{s-ct}$$

DEMONSTRATION On raisonne par récurrence sur l'entier  $r$ . Lorsque  $r = 1$ , il n'y a rien à prouver.

Supposons que  $r \geq 2$ . On définit un recouvrement à  $r - 1$  ouverts  $(X'_k)_{k=1, \dots, r-1}$  par :  $X'_k = X_k$  pour  $k \in \{1, \dots, r - 2\}$  et  $X'_{r-1} = X_{r-1} \cup X_r$ . Pour  $K \subset \{1, \dots, r - 1\}$  non vide on note  $j'_K$  l'immersion de l'ouvert  $\cup_{k \in K} X'_k$ . L'hypothèse de récurrence nous dit que l'objet  $E$  est dans la sous-catégorie :

$$\langle \{j'_{K\#}j'^*_K E; K \subset \{1, \dots, r - 1\} \text{ non vide} \} \rangle_+^{s-ct}$$

Pour prouver ce que l'on cherche, il suffit de montrer que les objets  $j'_{K\#}j'^*_K E$  sont dans :

$$\langle \{j_{I\#}j_I^*E; I \subset \{1, \dots, r\} \text{ non vide} \} \rangle_+^{s-ct}$$

On distinguera deux cas : selon que  $K$  contient ou pas  $r - 1$ . Lorsque la partie  $K$  ne contient pas  $r - 1$ , l'immersion  $j'_K$  est simplement  $j_K$ . L'assertion est donc claire pour l'objet  $j'_{K\#}j'^*_K E$ . Lorsque  $K$  contient  $r - 1$ , l'immersion  $j'_K$  est



l'union des immersions  $j_K$  et  $j_{K'}$  avec  $K' = (K - \{r - 1\}) \cup \{r\} \subset \{1, \dots, r\}$ . Ainsi si  $L = K \cup \{r\}$ , on a un triangle de Mayer-Vietoris :

$$j_{L\#}j_L^*E \longrightarrow j_{K\#}j_K^*E \oplus j_{K'\#}j_{K'}^*E \longrightarrow j_{K'}^*E \longrightarrow$$

D'où l'assertion dans le second cas.

C.Q.F.D

On utilisera le lemme 2.2.13 sous la forme du corollaire :

**COROLLAIRE 2.2.14** — Soient  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion,  $g : X \longrightarrow Z$  un  $Z$ -schéma lisse et  $A$  un objet de  $\Lambda$ .

Soit  $(X_k)_{k=1, \dots, r}$  un recouvrement Zariski de  $X$ . Pour  $I \subset \{1, \dots, r\}$  non vide, on note  $j_I$  l'immersion ouverte de  $\bigcap_{k \in I} X_k$  dans  $X$ . Supposons que  $i_*(g \circ j_I)_\# A$  est dans  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)_+$  pour toutes les parties non vides  $I$  de  $\{1, \dots, r\}$ . Alors  $i_*g_\# A_X$  est également dans  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)_+$ .

Muni des quatre lemmes ci-dessus, il est facile de prouver la proposition 2.2.8. Supposons le  $S$ -schéma  $Y$  fixé, et raisonnons par récurrence noethérienne sur l'adhérence de  $Z$ . Lorsque  $Z$  est vide il n'y a rien à démontrer. Sinon, on choisit un objet  $g_\# A_X$  de  $\Lambda(Y)$  avec  $g : X \longrightarrow Z$  lisse et  $A \in \Lambda$  et on essaye de montrer que  $i_!g_\# A_X$  est positivement strictement constructible.

Soit  $v : V \longrightarrow Z$  une immersion ouverte vérifiant la propriété du lemme 2.2.11 (relativement au  $Z$ -schéma lisse  $g$ ). Notons  $t : T \subset Z$  le fermé complémentaire à  $V$ . On sait par le lemme 2.2.10 qu'il suffit de montrer que les objets  $(v \circ i)_!v^*g_\# A_X$  et  $(t \circ i)_!t^*g_\# A_X$  sont positivement strictement constructibles. C'est le cas pour le second objet par récurrence noethérienne et le fait que  $t^*g_\# A_X$  est dans  $H_\Lambda^{s-ct}(T)_+$ . Il suffit donc de montrer que l'objet  $(v \circ i)_!v^*g_\# A_X$  est dans  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)_+$ .

Par un argument de changement de base appliqué au carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z V & \longrightarrow & X \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{v} & Z \end{array}$$

On voit que  $v^*g_\# A_X \simeq g'_\# A_{X \times_Z V}$ . Ceci nous ramène à supposer  $Z = V$ . En d'autres termes, on peut supposer qu'il existe un recouvrement Zariski  $(X_k)_{k=1 \dots r}$  de  $X$  par des ouverts  $X_k$  qui proviennent de  $Y$ -schémas lisses. Remarquons que la propriété de provenir d'un  $Y$ -schéma lisse est stable par passage à un ouvert Zariski. Il vient que pour  $I \subset \{1, \dots, r\}$  non vide, le  $Z$ -schéma lisse  $X_I = \bigcap_{k \in I} X_k$  provient également d'un  $Y$ -schéma lisse. Ainsi par 2.2.14 on se ramène à montrer que  $i_*g_\# A_X$  est positivement strictement constructible pour des  $Z$ -schémas  $X$  provenant d'un  $Y$ -schéma lisse  $R$ . En d'autres termes, il existe un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i'} & R \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

avec  $h$  lisse. Dans cette situation on dispose d'un 2-isomorphisme d'échange :

$$Ex_{\#,*} : h_\#i'_! \xrightarrow{\sim} i_!g_\#$$

Il vient que  $i_!g_\# A_X$  est isomorphe à  $h_\#i'_!A_X$ . Par le lemme 2.2.9, on sait que  $i'_!A_X$  est dans  $H_\Lambda^{s-ct}(R)_+$ . De plus le foncteur  $h_\#$  envoie  $H_\Lambda^{s-ct}(R)_+$  dans  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)_+$ . Ceci montre que  $i_*g_\# A_X$  est dans  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)_+$ . La proposition 2.2.8 est prouvée.

Comme application au résultat démontré, notons le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 2.2.15** — Soit  $X$  un  $S$ -schéma et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de type fini. Alors, l'équivalence de Thom :

$$\text{Th}(\mathcal{N}) : H(X) \longrightarrow H(X)$$

envoie la sous-catégorie  $H_\Lambda^{s-ct}(X)_+$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(X)_+$ ,  $H_\Lambda^{s-ct}(X)$ ,  $H_\Lambda^{ct}(X)$ ) dans elle même.

DEMONSTRATION En effet  $\text{Th}(\mathcal{N}) = p_\#s_*$  où  $p$  est la projection de  $\mathbb{V}(\mathcal{N})$  et  $s$  la section nulle.

C.Q.F.D

On termine le paragraphe par une preuve du lemme 2.2.11. Soit  $\eta$  un point générique de  $Z$  et  $Y_{(\eta)}$  le localisé pour la topologie de Zariski du schéma  $Y$  au point  $\eta$ . L'existence de l'ouvert  $V$  vérifiant l'hypothèse de 2.2.11 découle via des arguments standards du lemme ci-dessus appliqué à  $S = Y_{(\eta)}$  et  $s = \eta$  :

**LEMME 2.2.16** — Soit  $S$  un schéma local de point fermé  $s$ . On suppose donné un  $s$ -schéma lisse  $E$ . Il existe alors un recouvrement ouvert  $E_k$  de  $E$  et des  $S$ -schémas lisses  $F_k$  tels que  $(F_k)_s \simeq E_k$ .

DEMONSTRATION Il suffit de démontrer que pour tout point fermé  $x$  de  $E$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $E$  qui provient d'un  $S$ -schéma lisse. Pour cela, on choisit d'abord  $V_0 \subset E$  un voisinage affine de  $x$  tel que l'idéal de définition du fermé  $x$  dans  $\Gamma(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$  soit engendré par une suite régulière  $a_1, \dots, a_n$  (ceci est possible puisque  $E$  est lisse sur  $s$ ). Soit alors  $e_0 : V_0 \longrightarrow \mathbb{A}_s^n = \text{Spec}(k(s)[T_1, \dots, T_n])$  le morphisme de  $s$ -schémas défini sur les anneaux de fonctions par l'association  $T_i \rightsquigarrow a_i$ . Ce morphisme est étale au voisinage de  $x \in V_0$ . Il existe alors un voisinage ouvert  $V \subset V_0$  de  $x$  tel le morphisme  $e : V \longrightarrow \mathbb{A}_s^n$  obtenue en restreignant  $e_0$  à  $V$  soit isomorphe à celui induit par le morphisme de  $k(s)$ -algèbres :

$$k(s)[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow (k(s)[T_1, \dots, T_n][T]/P)_{(a.P'.Q)}$$

avec  $P$  et  $Q$  des polynômes en  $(T, T_1, \dots, T_n)$ ,  $P'$  la dérivée de  $P$  par rapport à la variable  $T$  et  $a$  le coefficient dominant de  $P = P(T)$  (i.e. de  $P$  vue comme un polynôme en  $T$ ).

Choisissons alors des relèvements  $\bar{P}$  et  $\bar{Q}$  de  $P$  et  $Q$  tels que les polynômes  $\bar{P}(T)$  et  $\bar{P}'(T)$  considérés comme des polynômes de la variable  $T$  soient de même degré. On notera  $\bar{a}$  le coefficient dominant de  $\bar{P} = \bar{P}(T)$ . On prend alors pour relèvement de  $V$  le  $S$ -schéma lisse  $\text{Spec}((\mathcal{O}_S[T_1, \dots, T_n][T]/\bar{P})_{(\bar{a}.\bar{P}'.\bar{Q})})$ . C.Q.F.D

### 2.2.2 La constructibilité des quatre opérations

Dans cette sous-section on considère uniquement les sous-catégories triangulées  $H_\Lambda^{s-ct}(-)$  et  $H_\Lambda^{ct}(-)$ . Le but est de trouver des conditions suffisantes simples qui garantissent la  $\Lambda$ -constructibilité des quatre opérations, i.e., que les quatre opérations transforment les objets constructibles en des objets constructibles. Notons qu'à ce stade, on a établi la constructibilité de  $f^*$ ,  $f_\#$  (avec  $f$  lisse) et de  $i_*$  (avec  $i$  une immersion fermée).

#### Constructibilité de $f_!$

Pour avoir la constructibilité des quatre opérations, il faudrait au moins la constructibilité des équivalences de Thom  $\text{Th}(-)$  ainsi que leurs inverses  $\text{Th}^{-1}(-)$ . Dans la sous-section précédente, on a vu que les équivalences de Thom  $\text{Th}(\mathcal{N})$  étaient constructibles pour  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini. Par contre, il est faux en général que l'équivalence  $\text{Th}^{-1}(\mathcal{N})$  préserve la sous-catégorie  $H_\Lambda^{s-ct}(X)$  (ou  $H_\Lambda^{ct}(X)$ ).

Ainsi pour aller plus loin, il faut imposer des conditions sur l'ensemble  $\Lambda$ . Une condition qui résoud au moins le problème des équivalences  $\text{Th}^{-1}(-)$  est de supposer que  $\Lambda$  est stable par les twist de Tate négatifs :

**DEFINITION 2.2.17** — On dit que la classe  $\Lambda \subset H(S)$  est stable par twist de Tate (négatifs) si pour tout  $A \in \Lambda$  il existe un objet  $B \in \Lambda$  qui soit isomorphe à  $A(-1)$ . On dira que  $\Lambda$  est quasi-stable par twist de Tate si pour tout  $A \in \Lambda$  l'objet  $A(-1)$  est strictement constructible.

**Remarque 2.2.18** — Si  $\Lambda \subset H(S)$  est une classe quelconque, on peut la rendre stable par twist de Tate en prenant la classe  $\Lambda'$  formée des objets de la forme  $A(-n)$  avec  $A \in \Lambda$  et  $n \in \mathbb{N}$  (ou même dans  $\mathbb{Z}$ ). Il est facile de montrer qu'on l'égalité  $H_{\Lambda'}^{s-ct} = H_\Lambda^{s-ct}(-)$  si et seulement si  $\Lambda$  est quasi-stable par twist de Tate.

**LEMME 2.2.19** — Supposons que  $\Lambda$  est quasi-stable par twist de Tate. Alors sous les hypothèses du corollaire 2.2.15, l'équivalence de Thom :

$$\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}) : H(X) \longrightarrow H(X)$$

envoie la sous-catégorie  $H_\Lambda^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(X)$ ) dans elle-même.

DEMONSTRATION On se ramène facilement à  $\mathcal{N}$  libre de rang  $n$  en utilisant le corollaire 2.2.6. Mais dans ce cas,  $\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}) \simeq (-n)[-2n]$ . Le résultat découle alors immédiatement de la stabilité de  $H_\Lambda^{s-ct}(X)$  et  $H_\Lambda^{ct}(X)$  par twist de Tate et du fait que les catégories  $H_\Lambda^{s-ct}(X)$  et  $H_\Lambda^{ct}(X)$  sont cosuspensées. C.Q.F.D

Le résultat important ci-dessous est un corollaire de 2.2.5, 2.2.8 et 2.2.19 :

**COROLLAIRE 2.2.20** — Supposons que  $\Lambda$  est quasi-stable par twist de Tate. Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme :

$$f_! : H(Y) \longrightarrow H(X)$$

envoie  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(Y)$ ) dans  $H_\Lambda^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(X)$ ).

DEMONSTRATION En effet, choisissons une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & U \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

avec  $g$  lisse et  $i$  une immersion fermée. Il suffit alors de montrer la conclusion du corollaire pour  $i_!$  et pour  $g_!$ . Mais  $i_! = i_*$  et  $g_! = g_{\#} \text{Th}^{-1}(\Omega_g)$ . C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.2.21** — *Gardons les hypothèses et notations du corollaire 2.2.20. Supposons en plus que  $f$  est projectif. Alors, le 1-morphisme :*

$$f_* : H(Y) \longrightarrow H(X)$$

envoie  $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$ ) dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ ).

DEMONSTRATION En effet pour  $f$  projectif, on a un 2-isomorphisme  $f_! \simeq f_*$ . C.Q.F.D

Dans le reste de cette section on tentera de se débarrasser de l’hypothèse “ $f$  projective” dans l’énoncé du corollaire précédent.

**Classes génératrices des sous-catégories  $H_{\Lambda}^{s-ct}(-)$  et  $H_{\Lambda}^{ct}(-)$**

Dans cette sous-section on introduit certaines classes d’objets de  $H(X)$  engendrant la sous-catégorie triangulée  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$  et/ou  $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ . La première de ces classes est :

**DEFINITION 2.2.22** — *Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. On appelle  $\Lambda_{*,proj}(X)$  la classe d’objets de  $H(X)$  formée de ceux qui sont de la forme  $g_* A_{X'}(n)$  avec  $g : X' \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme projectif et  $n \in \mathbb{N}$  un entier naturel.*

On a le résultat suivant :

**LEMME 2.2.23** — *On suppose que  $\Lambda$  est quasi-stable par twist de Tate. Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. La sous-catégorie  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ ) est la plus petite sous-catégorie triangulée (resp. triangulée et stable par facteurs directs) de  $H(X)$  contenant la classe d’objets  $\Lambda_{*,proj}(X)$ . En d’autres termes on a les égalités :*

$$H_{\Lambda}^{s-ct}(X) = \langle \Lambda_{*,proj}(X) \rangle^{s-ct} \quad \text{et} \quad H_{\Lambda}^{ct}(X) = \langle \Lambda_{*,proj}(X) \rangle^{ct}$$

DEMONSTRATION Par 2.2.4, appliqué au foncteur identité, on voit qu’il suffit de traiter le cas non-respé. On sait par le corollaire 2.2.21 que les objets de la forme  $g_* A(n)$  avec  $g : X' \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme projectif,  $n \in \mathbb{N}$  et  $A \in \Lambda$  sont dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ .

Il s’agit donc de montrer qu’un objet de la forme  $h_{\#} B_U$  avec  $h : U \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme lisse et  $B \in \Lambda$ , est dans la sous-catégorie  $\langle \Lambda_{*,proj}(X) \rangle^{s-ct}$ . Supposons donné un recouvrement Zariski  $(U_k)_{k=1,\dots,r}$  de  $U$ . Pour  $I \subset \{1, \dots, r\}$ , on note comme d’habitude  $j_I$  l’inclusion de l’ouvert  $\cap_{k \in I} U_k$  dans  $U$ . Par le lemme 2.2.13, on voit qu’il suffit de montrer que les objets  $(h \circ j_I)_{\#} B_{U_I}$  sont dans  $\langle \Lambda_{*,proj}(X) \rangle^{s-ct}$ . Ainsi en prenant un recouvrement trivialisant du  $\mathcal{O}_U$ -module localement libre  $\Omega_h$  on voit qu’il est suffisant de prouver que les objets de la forme  $h_{\#} B_U$  sont dans  $\langle \Lambda_{*,proj}(X) \rangle^{s-ct}$  uniquement pour les  $h$  tel que  $\Omega_h$  est libre.

L’intérêt de cette réduction vient de la formule  $h_{\#} B = h_! \text{Th}(\Omega_h) B = h_! B(r)[2r]$  où  $r$  est le rang du  $\mathcal{O}_U$ -module libre  $\Omega_h$ . On se ramène en fin de compte à prouver que pour tout  $S$ -morphisme lisse  $h : U \longrightarrow X$ , tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$  et tout objet  $B \in \Lambda$  on a :

$$h_! B_U(n) \in \text{Ob}(\langle \Lambda_{*,proj}(X) \rangle^{s-ct})$$

Pour établir cette appartenance, on choisit une  $X$ -compactification  $j : U \longrightarrow X'$  avec  $X'$  projectif sur  $X$ . On forme le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j} & X' \xleftarrow{i} Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

avec  $g$  projectif,  $j$  une immersion ouverte et  $i$  une immersion fermée complémentaire à  $j$  (en particulier  $f$  est projective). On a un triangle distingué de localité :

$$j_! B_U(n) \longrightarrow B_{X'}(n) \longrightarrow i_* B_Y(n) \longrightarrow j_! B_U(n)[+1]$$

En lui appliquant le 1-morphisme  $g_* = g_!$ , on obtient le triangle :

$$h_!B_U(n) \longrightarrow g_*B_{X'}(n) \longrightarrow f_*B_Y(n) \longrightarrow h_!B_U(n)[+1]$$

Le résultat découle alors du fait que  $f$  et  $g$  sont tous les deux projectifs.

C.Q.F.D

Les autres classes d'objets de  $H(X)$  seront paramétrés par un sous-schéma fermée  $T \subset X$  :

**DEFINITION 2.2.24** — Soient  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $T$  une partie fermée de  $X$ . On appelle  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$  la classe d'objet de  $H(X)$  de la forme  $g_*A_{X'}(n)$  avec  $A \in \Lambda$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $g : X' \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme vérifiant :

- $g$  est projectif,
- $X'$  est un schéma régulier connexe,
- la partie  $g^{-1}(T) \subset X'$  est soit  $X'$  tout entier, soit l'union de diviseurs lisses à croisements normaux.

On a clairement l'inclusion  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T \subset \Lambda_{*,proj}$ . Notons que dans la définition précédente on adopte la convention que le sous-schéma vide est un diviseur lisse. En particulier  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_\emptyset$  est simplement la classe des  $g_*A(n)$  avec  $g$  projectif de source un schéma régulier ; elle sera notée simplement  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)$ . Remarquons également que  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_X = \Lambda_{*,proj-reg}(X)_\emptyset = \Lambda_{*,proj-reg}(X)$ . Une autre conséquence de cette convention est que  $g_*A(n)$  est dans  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$  si l'image de  $g$  ne rencontre pas  $T$  (exemple si  $g$  est l'immersion d'un point fermé qui n'est pas sur  $T$ ).

Avant de prouver que les sous-catégories des objets  $\Lambda$ -constructibles de  $H(X)$  sont engendrées par les classes  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$  on introduit la notion de  $S$ -dimension. La  $S$ -dimension est utile lorsqu'on a besoin de faire une récurrence double : une noethérienne sur les fermées de  $S$  et une sur la dimension des fibres d'un  $S$ -schéma.

**DEFINITION 2.2.25** — Soit  $S$  un schéma noethérien. On appelle  $D(S)$  l'ensemble des couples  $(Z, d)$  avec  $Z$  une partie fermée de  $S$  et  $d$  une fonction de l'ensemble des points génériques de  $Z$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . L'ensemble  $D(S)$  sera muni de l'ordre lexicographique  $(Z, d) \prec (Z', d')$  lorsque  $Z \subset Z'$  ou  $Z = Z'$  et  $d < d'$  (i.e., pour tout point générique  $\eta$  de  $Z$  on a  $d(\eta) \leq d'(\eta)$  avec une inégalité stricte au moins une fois).

Étant donné un  $S$ -schéma quasi-projectif  $f : X \longrightarrow S$  on définit un élément  $d_S(X) \in D(S)$  en prenant le couple :

$$(\overline{\text{Image}(f)}, d(\eta) = \dim_\eta X_\eta)$$

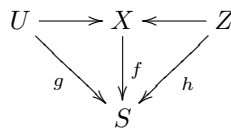
On appellera  $d_S(X)$  la  $S$ -dimension du  $S$ -schéma  $X$ .

On résume quelques propriétés de la fonction  $d_S(-)$  dans le lemme :

**LEMME 2.2.26** — 1- Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $U$  un ouvert dense de  $X$ . Alors  $d_S(X) = d_S(U)$  et  $d_S(X - U) \prec d_S(X)$ .

2- Soit  $e : X' \longrightarrow X$  une altération de  $S$ -schémas quasi-projectifs telle que toute composante irréductible de  $X'$  domine une composante irréductible de  $X$ . Alors  $d_S(X) = d_S(X')$ .

DEMONSTRATION Formons le diagramme suivant :



Puisque  $U$  est dense dans  $X$  l'image de  $U$  dans  $S$  sera dense dans l'image de  $X$ . Ceci prouve que :

$$\overline{\text{Image}(f)} = \overline{\text{Image}(g)} = R$$

D'autre part si  $\eta$  est un point générique de  $R$  l'ouvert  $U_\eta$  est un ouvert dense du  $\eta$ -schéma quasi-projectif  $X_\eta$ . Ils ont donc la même dimension de Krull.

Montrons que  $d_S(Z)$  est strictement inférieur à  $d_S(X)$ . On a clairement :

$$\overline{\text{Image}(f)} \subset \overline{\text{Image}(h)}$$

Si l'inclusion est stricte il n'y a rien à démontrer. On suppose donc qu'il y a égalité et on note comme avant  $R$  la partie fermée ainsi définie. Soit  $\eta$  un point générique de  $R$ . Comme  $U_\eta$  est dense dans  $X_\eta$  on voit que  $Z_\eta$  est de codimension partout non nulle dans  $X_\eta$ .

Pour démontrer le second point, on procède exactement de la même manière.

C.Q.F.D

Voici le résultat clef de ce paragraphe :

**PROPOSITION 2.2.27** — *On suppose que  $\Lambda$  est quasi-stable par twist de Tate. Soient  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $T \subset X$  une partie fermée de  $X$  :*

**1-** *Supposons que le schéma  $S$  admet la résolution des singularités par éclatements. La sous-catégorie  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ ) est la plus petite sous-catégorie triangulée (resp. triangulée et stable par facteurs directes) contenant la classe  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$ . En d'autres termes, on a les égalités :*

$$H_{\Lambda}^{s-ct}(X) = \langle \Lambda_{*,proj-reg}(X)_T \rangle^{s-ct} \quad \text{et} \quad H_{\Lambda}^{ct}(X) = \langle \Lambda_{*,proj-reg}(X)_T \rangle^{ct}$$

**2-** *Supposons que  $S$  admet la résolution des singularités par altérations. On suppose également que  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. La catégorie  $H_{\Lambda}^{ct}(X)$  est la plus petite sous-catégorie triangulée de  $H(X)$  stable par facteurs directs et contenant la classe  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$ . En d'autres termes, on a l'égalité  $H_{\Lambda}^{ct}(X) = \langle \Lambda_{*,proj-reg}(X)_T \rangle^{ct}$ .*

**DEMONSTRATION** Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $T \subset X$  un fermé. Notons provisoirement  $H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$  (resp.  $H_{proj-reg}^{ct}(X)_T$ ) la sous-catégorie triangulée (resp. triangulée et stable par facteurs directs) engendrée par  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$ . Par 2.2.21 on a les inclusions :

$$H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T \subset H_{\Lambda}^{s-ct}(X) \quad \text{et} \quad H_{proj-reg}^{ct}(X)_T \subset H_{\Lambda}^{ct}(X)$$

Pour prouver la proposition, il s'agit de montrer qu'on a des inclusions inverses dans les cas suivants :

1.  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X) \subset H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$  sous l'hypothèse de **1**,
2.  $H_{\Lambda}^{ct}(X) \subset H_{proj-reg}^{ct}(X)_T$  sous l'hypothèse de **2**.

En utilisant le lemme 2.2.23, on se ramène à prouver les inclusions :

1.  $\Lambda_{*,proj}(X) \subset H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$  sous l'hypothèse de **1**,
2.  $\Lambda_{*,proj}(X) \subset H_{proj-reg}^{ct}(X)_T$  sous l'hypothèse de **2**.

Avant de se lancer dans la preuve de ces inclusions notons que pour tout  $S$ -morphisme projectif  $f : X' \rightarrow X$  le foncteur  $f_*$  envoie la catégorie  $H_{proj-reg}^{s-ct}(X')_{T'}$  (resp.  $H_{proj-reg}^{ct}(X')_{T'}$ ) dans  $H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$  (resp.  $H_{proj-reg}^{ct}(X)_T$ ) où  $T'$  est le fermé  $f^{-1}(T)$ . En effet, il suffit de remarquer que pour tout objet  $g_*A_{X'}(n) \in \Lambda_{*,proj-reg}(X')_{T'}$  avec  $g : X'' \rightarrow X'$  vérifiant les conditions de 2.2.24, l'objet  $(f \circ g)_*A_{X''}$  est également dans  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$ .

En particulier, pour montrer qu'un objet de la forme  $f_*A_{X'}(n)$  avec  $f : X' \rightarrow X$  projectif,  $A \in \Lambda$  et  $n \in \mathbb{N}$ , est dans la catégorie  $H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$  (resp.  $H_{proj-reg}^{ct}(X)_T$ ), il suffira de montrer que l'objet  $A_{X'}(n)$  est dans  $H_{proj-reg}^{s-ct}(X')_{T'}$  (resp.  $H_{proj-reg}^{ct}(X')_{T'}$ ). En remarquant que ces catégories sont stables par  $-(n)$  pour  $n$  positif, on se ramène en fin de compte à prouver les appartenances :

1.  $A_X \in \text{Ob}(H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T)$  sous l'hypothèse de **1**,
2.  $A_X \in \text{Ob}(H_{proj-reg}^{ct}(X)_T)$  sous les hypothèse de **2**,

pour tout  $A \in \Lambda$  et  $T \subset X$  des  $S$ -schémas quasi-projectifs. On raisonne par induction sur la  $S$ -dimension  $d_S(X) \in D(S)$  de  $X$ . Le plus petit élément de  $D(S)$  est le couple  $(\emptyset, \emptyset)$  qui est atteint par  $d_S$  uniquement lorsque le  $S$ -schéma est vide. Il n'y a rien à prouver dans ce cas.

Fixons donc  $X$  un  $S$ -schéma et un fermé  $T \subset X$ . On suppose que  $A_Y$  est dans  $H_{proj-reg}^{s-ct}(Y)_Z$  (resp.  $H_{proj-reg}^{ct}(Y)_Z$ ) pour tout  $S$ -schéma  $Y$  avec  $d_S(Y) < d_S(X)$  (la partie fermée  $Z \subset Y$  étant quelconque). On montrera que lorsque  $S$  admet la résolution des singularités par éclatements (resp. altérations, avec en plus les hypothèses de **2** sur  $H$ ) que  $A_X$  est dans  $H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$  (resp.  $H_{proj-reg}^{ct}(X)_T$ ).

Soit  $e : \tilde{X} \rightarrow X$  un  $S$ -morphisme projectif tel que :

- le schéma  $\tilde{X}$  est régulier et toute composante irréductible domine une unique composante irréductible de  $X$ ,
- il existe un ouvert dense  $U$  dans  $X$  tel que le morphisme  $f^{-1}(U) \rightarrow U$  soit un isomorphisme (resp. un revêtement étale),
- la restriction de  $f^{-1}(T)$  à toute composante irréductible est soit la composante toute entière, soit un diviseur à croisement normaux.

L'existence d'un tel  $e$  découle de l'hypothèse de désingularisation par éclatements (resp. par altérations). Formons alors le diagramme commutatif suivant à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{X} & \xleftarrow{\tilde{s}} & E \\ u \downarrow & & \downarrow e & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{s} & Z \end{array}$$

avec  $s$  l'immersion du fermé complémentaire à  $U$ . On a un triangle distingué de localité :

$$j_!A_U \longrightarrow A_X \longrightarrow s_*A_Z \longrightarrow$$

Puisque  $d_S(Z) \prec d_S(X)$ , l'objet  $A_Z \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Z))$  est dans  $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(Z)_{Z \cap T}$  (resp.  $\mathbf{H}_{proj-reg}^{ct}(Z)_{Z \cap T}$ ) par l'hypothèse de récurrence. On en déduit que  $s_*A_Z$  est dans  $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$  (resp.  $\mathbf{H}_{proj-reg}^{ct}(X)_T$ ). Il suffit donc de montrer que  $j_!A_U$  est dans  $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$  (resp.  $\mathbf{H}_{proj-reg}^{ct}(X)_T$ ).

Remarquons d'abord que  $j_!A_U$  est isomorphe à (resp. est facteur direct de)  $e_*\tilde{j}_!A_{\tilde{U}}$ . Pour voir cela, on utilise l'isomorphisme  $e_* \simeq e_!$  ( $e$  étant projectif) et l'isomorphisme de connexion  $e_!\tilde{j}_! = j_!u_!$ . On se ramène ainsi à prouver que  $A_U$  est isomorphe à (resp. est facteur direct de)  $u_!A_{\tilde{U}}$ . Ceci est clair pour le cas non-respé étant donné que  $u$  est un isomorphisme. Pour le cas respé, i.e., lorsque  $u$  est un revêtement étale, on considère la composée :

$$A_U \longrightarrow u_*u^*A_U \xleftarrow{\sim} u_!u^!A_U \longrightarrow A_U$$

Par 2.1.165, cette composée est inversible lorsque  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. Ceci montre qu'effectivement  $A_U$  est facteur direct de  $u_!u^!A_U \simeq u_!A_{\tilde{U}}$ .

À ce stade, il suffira de prouver que  $\tilde{j}_!A$  est dans la sous-catégorie  $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(\tilde{X})_{e^{-1}(T)}$ . On utilise pour cela le triangle distingué de localité :

$$\tilde{j}_!A_{\tilde{U}} \longrightarrow A_{\tilde{X}} \longrightarrow \tilde{s}_*A_E \longrightarrow$$

L'ouvert  $\tilde{U}$  est clairement dense dans  $\tilde{X}$  puisque les composantes irréductibles de  $\tilde{X}$  dominent des composantes irréductibles de  $X$ . Il vient que  $d_S(E) \prec d_S(\tilde{X}) = d_S(X)$ . On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à  $E$  pour déduire que  $A_E$  est dans  $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(E)_{e^{-1}(T) \cap E}$ . Ceci prouve que  $\tilde{s}_*A_E$  est dans  $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(\tilde{X})_{e^{-1}(T)}$ . On se ramène en fin de compte à prouver que  $A_{\tilde{X}}$  est dans  $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(\tilde{X})_{e^{-1}(T)}$ . Mais ceci est clair puisque  $\tilde{X}$  est somme disjointe de schémas réguliers et  $e^{-1}(T)$  est somme de composantes irréductibles et de diviseurs à croisements normaux. La proposition est ainsi démontrée. C.Q.F.D

**Constructibilité de  $f_*$  et  $f^!$**

Dans ce paragraphe on étudie la constructibilité des opérations  $f_*$  et  $f^!$  pour  $f$  un  $S$ -morphisme quasi-projectif quelconque. Malheureusement si on travaille sur une base  $S$  qui n'est pas un corps, la stabilité de  $\Lambda$  par twist de Tate négatif, ne suffit pas pour prouver la constructibilité de  $f_*$  ou  $f^!$ . On introduit alors la condition suivante :

**DEFINITION 2.2.28** — *On dit que la classe d'objets  $\Lambda \subset \mathbf{H}(S)$  est quasi-pure si pour toute  $S$ -immersion fermée  $i : Y \longrightarrow X$  avec  $Y$  et  $X$  réguliers et tout objet  $A$  dans  $\Lambda$ , l'objet  $i^!A_X$  est dans  $\mathbf{H}_\Lambda^{s-ct}(Y)$ .*

La définition précédente paraît artificielle. Le point est que pour  $S$  le spectre d'un corps parfait, la condition de quasi-pureté est équivalente à celle de quasi-stabilité par twist de Tate :

**LEMME 2.2.29** — *Si  $S$  est le spectre d'un corps parfait  $k$ , les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\Lambda$  est quasi-stable par twist de Tate,
2.  $\Lambda$  est quasi-pure.

**DEMONSTRATION** Si  $\Lambda$  est quasi-pure elle est quasi-stable par twist de Tate en vue de la formule  $(-1)[-2] = s^!p^*$  avec  $p : \mathbb{A}_k^1 \longrightarrow k$  la projection de la droite affine et  $s$  la section nulle.

Réciproquement, supposons que  $\Lambda$  est quasi-stable par twist de Tate. Soit  $i : Y \longrightarrow X$  une  $k$ -immersion fermée entre schémas réguliers. Comme  $k$  est parfait, les  $k$ -schémas  $Y$  et  $X$  sont lisses. Il vient d'après l'isomorphisme de pureté que  $i^!A_X \simeq \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_i)A_Y$  avec  $\mathcal{N}_i$  le fibré normal de l'immersion  $i$ . On conclut alors à l'aide du lemme 2.2.19. C.Q.F.D

Dans ce paragraphe, la classe  $\Lambda$  sera supposée quasi-pure. Voici le lemme clef :

**LEMME 2.2.30** — *On suppose que  $S$  admet la résolution des singularités par éclatements (resp. par altérations). Dans le cas respé, on suppose en plus que  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.*

*Soit  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion fermée de  $S$ -schéma quasi-projectifs. Le 1-morphisme  $i^!$  envoie  $\mathbf{H}_\Lambda^{s-ct}(Y)$  (resp.  $\mathbf{H}_\Lambda^{ct}(Y)$ ) dans  $\mathbf{H}_\Lambda^{s-ct}(Z)$  (resp.  $\mathbf{H}_\Lambda^{ct}(Z)$ ).*

**DEMONSTRATION** En appliquant la proposition 2.2.27 à  $Y$  et son fermé  $Z$  on voit qu'il suffit de prouver que  $i^!K$  est dans  $\mathbf{H}_\Lambda^{s-ct}(Z)$  pour tout objet  $K$  de la forme  $g_*A_{Y'}(n)$  avec :

- $g : Y' \longrightarrow Y$  un  $S$ -morphisme projectif de source un schéma régulier irréductible,

- $Z' = g^{-1}(Z)$  soit égal à  $Y'$  tout entier soit un diviseur à croisements normaux dans  $Y'$ ,
- $A \in \Lambda$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

On forme pour cela le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{i'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

On a le 2-isomorphisme de changement de base  $i^!g_* \xrightarrow{\sim} g'_*i'^!$ . Par le corollaire 2.2.21, il suffit alors de prouver que  $i'^!$  envoie l'objet  $A_{Y'}(n)$  dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(Z')$ . C'est effectivement le cas lorsque  $Z' = Y'$ . On supposera donc dans la suite que  $Z'$  est un diviseur à croisements normaux.

On écrit  $Z' = \cup_{k=1}^m D_k$  avec  $D_k$  les composantes irréductibles de  $Z'$ . On considère alors les schémas réguliers  $D_I = \cap_{k \in I} D_k$  pour  $I \subset \{1, \dots, m\}$  non vide ainsi que les immersions  $i_I : D_I \longrightarrow Z'$ . Par le lemme 2.2.31 ci-dessous, pour montrer que  $i^!A_{Y'}(n)$  est dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(Z')$  il suffira de montrer que les  $i_{I!}i_I^!i^!A_{Y'}(n)$  y sont. Par la proposition 2.2.8, on se ramène à prouver que les objets  $(i \circ i_I)^!A_{Y'}(n)$  sont dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(D_I)$ . Ceci découle immédiatement de la quasi-pureté et du fait que les schémas  $D_I$  sont réguliers. C.Q.F.D

**LEMME 2.2.31** — *Soit  $Y$  un  $S$ -schéma quasi-projectif recouverts par des sous-schémas fermés  $(Y_k)_{k=1, \dots, r}$ . Pour  $I \subset \{1, \dots, r\}$  une partie non vide, on note  $Y_I = \cap_{k \in I} Y_k$  et  $i_I : Y_I \longrightarrow Y$  l'immersion fermée évidente. Tout objet  $E$  de  $H(Y)$  appartient à la sous-catégorie suspendue :*

$$\langle \{i_{I!}i_I^!E; I \subset \{1, \dots, r\} \text{ non vide} \} \rangle_+^{s-ct}$$

DEMONSTRATION Ce lemme peut-être considéré comme l'analogie pour les immersions fermées du lemme 2.2.13. Cette analogie s'étend même aux démonstrations. En effet, on obtient une preuve du lemme en calquant la preuve de 2.2.13 et en remplaçant le triangle de Mayer-Vietoris par un triangle de Mayer-Vietoris pour les immersions fermées :

$$(i_{12})!i_{12}^! \longrightarrow i_{1!}i_1^! \oplus i_{2!}i_2^! \longrightarrow 1 \longrightarrow$$

avec  $i_1 : Y_1 \longrightarrow Y$  et  $i_2 : Y_2 \longrightarrow Y$  deux immersions fermées recouvrant  $Y$  et  $i_{12}$  l'immersion fermée de l'intersection. C.Q.F.D

A l'aide de la proposition 2.2.8 et du lemme 2.2.30, on déduit :

**COROLLAIRE 2.2.32** — *Supposons que  $S$  admet la résolution des singularités par éclatements (resp. par altérations). Dans le cas respé, on suppose en plus que  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.*

*Soit  $j : U \longrightarrow X$  une immersion ouverte entre  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le foncteur  $j_*$  envoie  $H_{\Lambda}^{s-ct}(U)$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(U)$ ) dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ ).*

DEMONSTRATION En effet, considérons le 2-triangle distingué de localité :

$$i_*i^!j_! \longrightarrow j_! \longrightarrow j_* \longrightarrow$$

Le résultat découle du fait que  $j_!$ ,  $i_*$  et  $i^!$  envoient  $H_{\Lambda}^{s-ct}(-)$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(-)$ ) dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(-)$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(-)$ ). C.Q.F.D

Il est maintenant aisé de déduire le résultat :

**PROPOSITION 2.2.33** — *Supposons que  $S$  admet la résolution des singularités par éclatements (resp. par altérations). Dans le cas respé, on suppose en plus que  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.*

*Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme de  $k$ -schémas. Alors  $f_*$  envoie  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ ) dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$ ). De même  $f^!$  envoie  $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$ ) dans  $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ ).*

DEMONSTRATION Pour  $f_*$ , il suffit de factoriser  $f$  par une immersion ouverte suivie d'un morphisme projectif. Pour  $f^!$  on factorise  $f$  par une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse. C.Q.F.D

**Résumé des résultats**

Pour la commodité du lecteur, on résume les résultats obtenus dans cette section dans le théorème de constructibilité des quatre opérations :

**SCHOLIE 2.2.34** — *A- Sans hypothèses sur la classe d'objets  $\Lambda$  on a :*

- Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme  $f^*$  envoie  $H_\Lambda^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(X)$ ) dans  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(Y)$ ).
- Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme lisse de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme  $f_\#$  envoie  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(Y)$ ) dans  $H_\Lambda^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(X)$ ).
- Soit  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion fermée de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme  $i_*$  envoie  $H_\Lambda^{s-ct}(Z)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(Z)$ ) dans  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(Y)$ ).

**B-** On suppose que la classe d'objets  $\Lambda$  est quasi-stable par twist de Tate. Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme  $f_!$  envoie  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(Y)$ ) dans  $H_\Lambda^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(X)$ ).

**C-** On suppose que la classe d'objets  $\Lambda$  est quasi-pure (c'est le cas par exemple lorsque  $S$  est le spectre d'un corps parfait et  $\Lambda$  comme dans le point **B**, i.e., quasi-stable par twist de Tate). Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme entre  $S$ -schémas quasi-projectifs. On a :

1. On suppose que la base  $S$  admet la résolution des singularités par éclatements (voir la définition 2.1.167). Alors :
  - le 1-morphisme  $f^!$  envoie  $H_\Lambda^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(X)$ ) dans  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(Y)$ ),
  - le 1-morphisme  $f_*$  envoie  $H_\Lambda^{s-ct}(Y)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(Y)$ ) dans  $H_\Lambda^{s-ct}(X)$  (resp.  $H_\Lambda^{ct}(X)$ ).
2. On suppose que la base  $S$  admet la résolution des singularités par altérations (voir la définition 2.1.173) et que le 2-foncteur homotopique stable  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé (voir les définitions 2.1.153 et 2.1.160). Alors :
  - le 1-morphisme  $f^!$  envoie  $H_\Lambda^{ct}(X)$  dans  $H_\Lambda^{ct}(Y)$ ,
  - le 1-morphisme  $f_*$  envoie  $H_\Lambda^{ct}(Y)$  dans  $H_\Lambda^{ct}(X)$ .

**Remarque 2.2.35** — Le lecteur peut remarquer que dans le théorème précédent toutes les assertions admettent deux versions, une stricte et l'autre non stricte, sauf le dernière. Il ne s'agit pas d'un oubli. En effet, cette différence vient de la proposition 2.2.27 et du fait qu'on ne sait pas prouver que  $H_{proj-reg}^{s-ct}(X) = H_\Lambda^{s-ct}(X)$  en utilisant uniquement des résolutions par altérations.

Notons le corollaire :

**COROLLAIRE 2.2.36** — **1-** Sous les hypothèses de (C.1) du théorème précédent, il existe une unique structure de foncteur croisé sur les  $H_\Lambda^{s-ct}(-)$  et les  $H_\Lambda^{ct}(-)$  faisant des inclusions  $H_\Lambda^{s-ct}(-) \subset H_\Lambda^{ct}(-) \subset H(-)$  une suite de morphismes de foncteurs croisés.

**2-** Sous les hypothèses de (C.2) du théorème précédent, il existe une unique structure de foncteur croisé sur les  $H_\Lambda^{ct}(-)$  faisant des inclusions  $H_\Lambda^{ct}(-) \subset H(-)$  un morphisme de foncteurs croisés.

**Le cas où  $H$  est compactement engendré par sa base**

On termine notre étude de la constructibilité des quatre opérations par quelques compléments dans le cas où  $H$  est compactement engendré par la base (voir la définition 2.1.155). Plus précisément, on supposera que :

- Pour tout  $S$ -morphisme  $f$  le foncteur  $f^*$  envoie un objet compact sur un objet compact,
- $\Lambda$  est un ensemble d'objets compacts,
- les classes  $\Lambda(X)$  engendrent les catégories triangulées avec petites sommes  $H(X)$ .

Par la proposition 2.1.24 et la remarque 2.1.156, la catégorie  $H_\Lambda^{ct}(X)$  est simplement la catégorie des objets compacts de  $H(X)$ . En utilisant ce fait il est aisé de prouver les théorèmes de constructibilités "élémentaires" à savoir ceux des foncteurs  $f_!$ . En effet, on sait par le lemme 2.1.159 que  $H$  est parfait pour les petites sommes au sens de la définition 2.1.158. En particulier, le foncteur  $f_!$  admet un adjoint à droite  $f^!$  qui commute aux petites sommes. On conclut en appliquant le lemme 2.1.28. Par simple traduction de la scholie 2.2.34, on obtient :

**THEOREME 2.2.37** — On suppose que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $S$  admet la résolution des singularités par éclatements,
- $S$  admet la résolution des singularités par altérations et  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.

Si  $\Lambda$  est quasi-pure alors les quatre opérations envoient un objet compact sur un objet compact.

**2.2.3 Définition des  $t$ -structures engendrées et propriétés élémentaires de  $t$ -exactitude**

On fixe un schéma de base noethérien  $S$ . Soit  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$  un 2-foncteur homotopique stable. On se donne un ensemble d'objets  $\mathcal{G}$  dans  $H(S)$ . Sous certaines hypothèses techniques, on va associer à l'ensemble  $\mathcal{G}$  une  $t$ -structure sur chacune des catégories triangulées  $H(X)$ . Ces  $t$ -structures ont été introduites pour la première fois par F. Morel [Mor02] dans le cas de  $\mathbf{SH}$  avec  $\mathcal{G}$  le singleton formé du spectre de la sphère de dimension nulle. On appellera ces  $t$ -structures, les  $t$ -structures engendrées par  $\mathcal{G}$  (ou engendrées tout court lorsqu'il n'y a pas de confusion).

On notera comme d'habitude  $A_X$  l'objet  $f^*A$  de  $H(X)$  pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $f : X \longrightarrow S$  et  $A \in \text{Ob}(H(S))$ . Les hypothèses sur  $H$  et  $\mathcal{G}$  dont on aura besoin pour définir nos  $t$ -structures sont :



**HYPOTHÈSE 2.2.38** — On supposera dans la suite que le 2-foncteur homotopique stable  $H$  admet les petites sommes et que les objets  $A_X$  sont compacts pour tout  $A \in \mathcal{G}$ .

**DEFINITION 2.2.39** — Pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $f : X \longrightarrow S$  on notera  $\mathcal{G}_\#(X)$  la classe d'objets de  $H(X)$  définie par :

$$\mathcal{G}_\#(X) = \{g_\#(A_Y(n)[n]); \text{ avec } g : Y \rightarrow X \text{ un } S\text{-morphisme lisse et } n \in \mathbb{Z}\}$$

**LEMME 2.2.40** — Sous l'hypothèse 2.2.38, les objets de  $\mathcal{G}_\#(X)$  sont compacts. De plus la classe  $\mathcal{G}_\#(X)$  est essentiellement équivalente à un ensemble d'objets de  $H(X)$ .

DEMONSTRATION La compacité des objets de  $\mathcal{G}_\#(X)$  découle du fait que les 1-morphismes  $g_\#$  admettent des adjoints à droite commutant aux petites sommes. C.Q.F.D

**DEFINITION 2.2.41** — 1- La  $t$ -structure sur  $H(X)$  engendrée par l'ensemble d'objets compacts  $\mathcal{G}_\#(X)$  est appelée la  $t$ -structure engendrée (par  $\mathcal{G}$ , si confusion est possible) sur  $H(X)$ . On notera  $H_{\geq 0}(X)$  la sous-catégorie pleine des objets positifs (qu'on appellera  $t$ -positifs) et  $H_{< 0}(X)$  celle des objets strictement négatifs (qu'on appellera strictement  $t$ -négatifs). Le coeur  $H_{\geq 0}(X) \cap H_{\leq 0}(X)$  de cette  $t$ -structure sera noté  $HE(X)$ .

2- Les troncations par rapport à cette  $t$ -structure seront notées  $h_{\geq}$  et  $h_{\leq}$ . Ainsi pour tout objet  $E$  de  $H(X)$  on a un triangle distingué :

$$h_{\geq 0}(E) \longrightarrow E \longrightarrow h_{\leq -1}(E) \longrightarrow$$

On notera finalement  $h_i(E) = (h_{< i} \circ h_{\geq i})(E)[-i] \in \text{Ob}(HE(X))$ . On appellera  $h_i(E)$  le  $i$ -ème objet d'homologie de  $E$ .

On s'intéresse aux propriétés de  $t$ -exactitude des quatre opérations  $f^*$ ,  $f_*$ ,  $f_!$  et  $f^!$ . Dans cette sous-section on considère uniquement les propriétés de  $t$ -exactitude élémentaires. Des résultats plus élaborés seront obtenus dans la sous-section 2.2.5.

**Traduction des propositions 2.2.5 et 2.2.8 en termes de  $t$ -positivité et conséquences**

Dans ce paragraphe, on commence par interpréter les résultats de positive constructibilité obtenus au numéro 2.2.1 en termes de  $t$ -positivité. Le lien vient de la remarque triviale suivante :

**Remarque 2.2.42** — Notons  $\Lambda$  la classe des objets de  $H(S)$  qui sont de la forme  $A(n)[n]$  avec  $A \in \mathcal{G}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif on a, avec la notation de la définition 2.2.1,  $\Lambda(X) = \mathcal{G}_\#(X)$ .

Par la proposition 2.1.70, on sait que :

**LEMME 2.2.43** — Pour tout  $S$ -schéma  $X$  on a  $H_{\geq 0}(X) = \ll \mathcal{G}_\#(X) \gg_+ = \ll \Lambda(X) \gg_+$ .

Ainsi, un foncteur qui commute aux petites sommes est  $t$ -positif s'il envoie les objets  $\Lambda$ -positivement constructibles sur des objets  $\Lambda$ -positivement constructibles.

**PROPOSITION 2.2.44** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. On a :

1. le 1-morphisme  $f^* : H(X) \longrightarrow H(Y)$  est  $t$ -positif,
2. si  $f$  est lisse le 1-morphisme  $f_\# : H(Y) \longrightarrow H(X)$  est  $t$ -positif.

DEMONSTRATION Il s'agit de montrer que  $f^*$  envoie la catégorie  $\ll \Lambda(X) \gg_+$  dans  $\ll \Lambda(Y) \gg_+$ . Comme  $f^*$  commute aux petites sommes, il suffirait de montrer que  $f^*$  envoie  $\langle \Lambda(X) \rangle_+^{ct}$  dans  $\langle \Lambda(Y) \rangle_+^{ct}$ . Ceci est vrai par 2.2.5.

De même, si  $f$  est lisse, le 1-morphisme  $f_\#$  commute aux petites sommes ce qui nous ramène à montrer que  $f_\#$  envoie  $\langle \Lambda(Y) \rangle_+^{ct}$  dans  $\langle \Lambda(X) \rangle_+^{ct}$ . Ceci est également vrai par 2.2.5. C.Q.F.D

On aurait pu donner une preuve directe de la proposition ci-dessus sans se référer à 2.2.5. On aurait ainsi montré deux fois la même chose en remplaçant simplement  $\Lambda$  par  $\mathcal{G}$ , ce qui ne pas coûte trop cher, étant donné que la preuve tient en quelques lignes. Ceci n'est pas le cas pour les 1-morphismes  $i_!$ , avec  $i$  une immersion, dont la preuve correspondante est bien plus longue :

**PROPOSITION 2.2.45** — Soit  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion (pas forcément fermée ou ouverte) de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le foncteur  $i_!$  est  $t$ -positif.

DEMONSTRATION En effet, le foncteur  $i_!$  commute aux petites sommes puisqu'il admet un adjoint à droite  $i^!$ . Cela revient donc à montrer que  $i_!$  envoie la sous-catégorie  $\langle \Lambda(Z) \rangle_+^{ct}$  dans  $\langle \Lambda(Y) \rangle_+^{ct}$ . Ceci a été démontré dans le lemme 2.2.8. C.Q.F.D

On déduit par adjonction, les propriétés de  $t$ -négativité suivantes :

**PROPOSITION 2.2.46** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. On a :

1. le 1-morphisme  $f_* : H(Y) \longrightarrow H(X)$  est  $t$ -négatif,
2. si  $f$  est lisse le 1-morphisme  $f^* : H(X) \longrightarrow H(Y)$  est  $t$ -négatif.

DEMONSTRATION Le 1-morphisme  $f_*$  est  $t$ -négatif puisqu'il admet un adjoint à gauche  $f^*$  qui est  $t$ -positif. De même pour le 1-morphisme  $f^*$  avec  $f$  lisse. C.Q.F.D

En combinant 2.2.44 et 2.2.45 avec 2.2.46 on obtient des résultats de  $t$ -exactitudes :

**COROLLAIRE 2.2.47** — 1- Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme lisse de  $S$ -schémas quasi-projectifs . Le 1-morphisme  $f^*$  est  $t$ -exact.

2- Soit  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion fermée de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme  $i_*$  est  $t$ -exact.

**Remarque 2.2.48** — Soit  $X$  un  $S$ -schéma et notons  $i_{\text{red}} : X_{\text{red}} \longrightarrow X$  la nil-immersion fermée évidente. Le foncteur  $(i_{\text{red}})_*$  est alors une équivalence de catégories  $t$ -exacte. On en déduit qu'il en est de même de son inverse, i.e., le foncteur  $(i_{\text{red}})^*$  est également  $t$ -exact.

Notons également :

**PROPOSITION 2.2.49** — Soit  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme  $i^!$  est  $t$ -négatif.

DEMONSTRATION On utilise l'adjonction  $(i_!, i^!)$  et le fait que  $i_!$  est  $t$ -positif. C.Q.F.D

On termine le paragraphe par deux résultats concernant le passage du local au global. Une application aux équivalences de Thom est également donnée :

**COROLLAIRE 2.2.50** — Soit  $(u_i : U_i \longrightarrow X)_i$  un recouvrement Nisnevich d'un  $S$ -schéma  $X$ . Pour qu'un objet  $A$  de  $H(X)$  soit  $t$ -positif (resp.  $t$ -négatif), il faut et il suffit que pour tout  $i$  l'objet  $u_i^*A$  de  $H(U_i)$  soit  $t$ -positif (resp.  $t$ -négatif).

DEMONSTRATION En effet, la famille de foncteurs  $u_i^*$  est conservative et pour tout  $i$  le foncteur  $u_i^*$  est  $t$ -exact. On conclut à l'aide du lemme 2.1.76. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.2.51** — Soit  $X$  un  $S$ -schéma et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de dimension constante  $n$ . L'équivalence  $\text{Th}(\mathcal{M})[-n]$  est  $t$ -exacte. De même l'équivalence  $\text{Th}^{-1}(\mathcal{M})[n]$  est  $t$ -exacte.

DEMONSTRATION Soit  $u_i : U_i \longrightarrow X$  un recouvrement Zariski trivialisant  $\mathcal{M}$ . Soit  $A$  un objet  $t$ -positif (resp.  $t$ -négatif) de  $H(X)$ . Il faut montrer que les objets  $\text{Th}(\mathcal{M})A[-n]$  et  $\text{Th}^{-1}(\mathcal{M})A[n]$  sont  $t$ -positifs (resp.  $t$ -négatifs). Par le corollaire 2.2.50, il suffit de montrer que pour tout  $i$ , c'est le cas pour les objets

$$u_i^* \text{Th}(\mathcal{M})A[-n] \simeq \text{Th}(\mathcal{O}_{U_i}^n)A[-n] \simeq A(n)[n] \quad \text{et} \quad u_i^* \text{Th}^{-1}(\mathcal{M})A[n] \simeq \text{Th}^{-1}(\mathcal{O}_{U_i}^n)A[n] \simeq A(-n)[-n]$$

On s'est donc ramené à montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , le foncteur  $(-)(n)[n]$  est  $t$ -exact. Ce foncteur commute clairement aux petites sommes. De plus, il garde stable l'ensemble  $\mathcal{G}_{\#}(X)$ . D'où la  $t$ -positivité de  $(-)(n)[n]$ . D'autre part, ce foncteur admet un adjoint à gauche à savoir  $(-)(-n)[-n]$  qui est aussi  $t$ -positif. On déduit que  $(-)[n](n)$  est également  $t$ -négatif. C.Q.F.D

**LEMME 2.2.52** — Soit  $X$  un  $S$ -schéma. Soient  $i : Y \longrightarrow X$  une immersion fermée et  $j : U \longrightarrow X$  l'immersion ouverte complémentaire. Soit  $A$  un objet de  $H(X)$ . Les deux assertions suivantes :

1.  $A$  est dans  $H_{\geq 0}(X)$ ,
2.  $i^*A$  est dans  $H_{\geq 0}(Y)$  et  $j^*A$  est dans  $H_{\geq 0}(U)$ ,

sont équivalentes.

DEMONSTRATION Il s'agit de montrer que la seconde assertion implique la première. On prend donc un objet  $A$  de  $H(X)$  tel que  $i^*A$  et  $j^*A$  sont  $t$ -positifs et on montre que  $A$  est aussi  $t$ -positif. Pour cela, on considère le triangle distingué :

$$(2.36) \quad h_{\geq 0}(A) \longrightarrow A \longrightarrow h_{< 0}(A) \longrightarrow$$

En appliquant  $j^*$ , on obtient :

$$j^*h_{\geq 0}(A) \longrightarrow j^*A \longrightarrow j^*h_{< 0}(A) \longrightarrow$$

Puisque  $j^*$  est  $t$ -exact, on voit que  $j^*h_{< 0}(A)$  est forcément nul. En particulier, il est concentré sur  $Y$ , i.e., le morphisme d'adjonction :

$$h_{< 0}(A) \longrightarrow i_*i^*h_{< 0}(A)$$

est inversible. Pour montrer que  $h_{<0}(A)$  est nul, il suffirait de montrer qu'il est  $t$ -positif. Ainsi par 2.2.45, il suffit de montrer que  $i^*h_{<0}(A)$  est  $t$ -positif. On applique alors  $i^*$  au triangle (2.36) :

$$i^*h_{\geq 0}(A) \longrightarrow i^*A \longrightarrow i^*h_{<0}(A) \longrightarrow$$

Comme  $i^*$  est  $t$ -positif, l'objet  $i^*h_{\geq 0}(A)$  est  $t$ -positif. Par hypothèse, on sait que  $i^*A$  est  $t$ -positif. Il vient que  $i^*h_{<0}(A)$  est  $t$ -positif puisque la sous-catégorie  $H_{\geq 0}(Y)$  est suspendue. C.Q.F.D

**Les propriétés de  $t$ -exactitude des opérations  $f_!$  et  $f^!$**

Dans ce paragraphe on donne une borne inférieure pour la dimension (homologique) des foncteurs  $f_!$ . Pour que notre preuve fonctionne, on doit imposer une restriction à  $H$ . Ainsi, on supposera que  $H$  est semi-séparé (voir la définition 2.1.160). Rappelons que lorsque  $S$  est d'égale caractéristique nulle,  $H$  est automatiquement semi-séparé (voir la remarque 2.1.161). On aura besoin d'un lemme géométrique :

**LEMME 2.2.53** — *Soit  $X$  un schéma réduit et noethérien. On suppose donné un morphisme  $e : X' \longrightarrow X$  fini surjectif et totalement inséparable avec  $X'$  également réduit, ainsi qu'un  $X'$ -schéma lisse  $V'$ . Quitte à remplacer  $X$  par un de ses ouverts denses (et  $X'$  et  $V'$  par les images inverses de l'ouvert en question), on peut supposer que les données suivantes existent :*

- un morphisme fini surjectif totalement inséparable  $e' : X'' \longrightarrow X'$ ,
- un  $X$ -schéma lisse  $U$ ,
- un  $X''$ -morphisme  $V' \times_{X'} X'' \longrightarrow U \times_X X''$  fini surjectif et totalement inséparable.

DEMONSTRATION La liberté de pouvoir remplacer  $X$  par un de ses ouverts denses, nous ramène immédiatement au cas où  $X$  est somme disjointe de schémas intègres. En traitant chaque composante connexe à part, on peut même supposer  $X$  intègre.

Lorsque le point générique de  $X$  est le spectre d'un corps de caractéristique nulle, le morphisme  $e : X' \longrightarrow X$  est génériquement un isomorphisme. En effet un corps de caractéristique nulle n'admet pas d'extensions totalement inséparables non triviales. Dans ce cas, on peut supposer que  $e$  est un isomorphisme quitte à remplacer  $X$  par un ouvert non vide (et donc dense). Le lemme est donc trivial dans ce cas.

Par la suite, on supposera donc que le point générique de  $X$  est un corps de caractéristique  $p$ . Cette condition ne se produit que lorsque  $X$  est lui même un  $\mathbb{F}_p$ -schéma.

Supposons  $e$  et  $V'$  fixé. Si la conclusion du lemme est vraie pour  $e$  et  $V'$ , elle sera vraie pour tout changement de base de  $e$  et  $V'$  suivant un morphisme dominant  $Y \longrightarrow X$  avec  $Y$  intègre.

Réciproquement, si jamais  $e$  et  $V'$  proviennent de  $e_0 : X'_0 \longrightarrow X_0$  et  $V'_0/X'_0$  (vérifiant les hypothèses de l'énoncé) par changement de base suivant un morphisme dominant  $X \longrightarrow X_0$ , il suffira de prouver le lemme pour  $e_0$  et  $V'_0$ . Ceci nous ramène immédiatement à supposer (en plus des hypothèses de l'énoncé) que  $X, X'$  et  $V'$  sont de type fini sur le corps premier  $\mathbb{F}_p$ . Une fois qu'on s'est ramené aux schémas de type fini sur  $\mathbb{F}_p$ , on peut utiliser la liberté de remplacer  $X$  par un ouvert dense pour supposer que  $X$  et  $X'$  sont des schémas normaux et ensuite irréductibles.

Considérons alors l'endomorphisme de Frobenius absolu  $F$ . Comme  $e$  est fini surjectif et totalement inséparable entre schémas normaux il est facile de voir qu'il existe une puissance suffisamment élevée  $n$  de  $F_X : X \longrightarrow X$  qui domine  $e$ , i.e., on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow e' & \searrow F_X^n & \\ X' & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

Notons alors  $V''$  le pull-back du  $X'$ -schéma  $V'$  suivant  $e'$ . On prendra alors pour  $U$  le  $X$ -schéma  $V''$ . Les endomorphismes  $F_X$  et  $F_U$  commutent au morphisme  $U \longrightarrow X$ , i.e., le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F_U^n} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{F_X^n} & X \end{array}$$

Mais par construction le  $X$ -schéma  $U$  est égal à  $V''$ . D'où le résultat si on pose  $X'' = X$ . C.Q.F.D

**PROPOSITION 2.2.54** — *On suppose que  $H$  est semi-séparé. Soit  $e : X' \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme fini surjectif et totalement inséparable entre  $S$ -schémas quasi-projectifs. Alors l'équivalence de catégories  $e^*$  est  $t$ -exacte.*

DEMONSTRATION On se ramène immédiatement au cas où  $X'$  et  $X$  sont tous les deux réduits en utilisant la remarque 2.2.48.

On sait que  $e^*$  est  $t$ -positif. Comme  $e^*$  est une équivalence il suffira de montrer que le foncteur  $e_*$  est  $t$ -positif. On montrera ceci par récurrence sur la  $S$ -dimension de  $X$ . On supposera donc que  $e_{0*}$  est  $t$ -positif pour les  $S$ -morphisms finis surjectifs et totalement inséparable dont le but et de  $S$ -dimension strictement inférieure à  $d_S(X)$ .

Comme  $e_*$  commute aux petites sommes (puisque c'est une équivalence), il suffit d'établir l'inclusion :

$$e_*\mathcal{G}_\#(X') \subset H_{\geq 0}(X)$$

Fixons un morphisme lisse  $g' : V' \longrightarrow X'$  et montrons que pour  $A \in \mathcal{G}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , l'objet  $e_*g'_\#A_{V'}(n)[n]$  est  $t$ -positif. On se ramène immédiatement au cas  $n = 0$ . Considérons un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} V'_1 & \xrightarrow{j} & V' & \xleftarrow{i} & V'_2 \\ g_1 \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow g_2 \\ X'_1 & \xrightarrow{j} & X' & \xleftarrow{i} & X'_2 \\ e_1 \downarrow & & \downarrow e & & \downarrow e_2 \\ X_1 & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_2 \end{array}$$

avec  $j$  une immersion ouverte et  $i$  une immersion fermée complémentaire. Par le lemme 2.2.52, il suffit de montrer que  $j^*(e_*g'_\#A_{V'}) \simeq e_{1*}g'_{1\#}A_{V'_1}$  et  $i^*(e_*g'_\#A_{V'}) \simeq e_{2*}g'_{2\#}A_{V'_2}$  sont tous les deux  $t$ -positifs. Lorsque  $j$  est l'immersion d'un ouvert dense, on a  $d_S(X_2) < d_S(X)$  et le second objet est  $t$ -positif par récurrence. Dans ce cas, la  $t$ -positivité de  $e_*g'_\#A_{V'}$  découle de celle de  $e_{1*}g'_{1\#}A_{V'_1}$ . Ceci permet de remplacer  $X$  par un de ses ouverts denses. Ainsi par le lemme 2.2.53, on peut supposer qu'il existe :

- un morphisme fini surjectif totalement inséparable  $e' : X'' \longrightarrow X'$ ,
- un  $X$ -schéma lisse  $h : U \longrightarrow X$ ,
- un  $X''$ -morphisme  $a : V'' = V' \times_{X'} X'' \longrightarrow U'' = U \times_X X''$  fini surjectif et totalement inséparable.

Rappelons qu'on veut montrer que l'objet  $e_*g'_\#A_{V'}$  est  $t$ -positif. Remarquons d'abord, qu'il suffit de prouver que  $g'_\#A_{V'}$  est dans  $e^*H_{\geq 0}(X)$ . En effet, le foncteur  $e_*e^*$  est  $t$ -positif puisque isomorphe au foncteur identité de  $H(X)$ . D'autre part, comme  $e'^*$  est une équivalence de catégories, il suffira de montrer que  $e'^*g'_\#A_{V'}$  est dans  $e'^*e^*H_{\geq 0}(X)$ .

On montrera plus précisément que  $e'^*g'_\#A_{V'}$  est isomorphe à  $(e \circ e')^*h_\#A_U$ . En appliquant les 2-isomorphismes d'échange  $Ex_\#^*$  aux carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} V'' & \longrightarrow & V' \\ g'' \downarrow & & \downarrow g' \\ X'' & \xrightarrow{e'} & X' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U'' & \longrightarrow & U \\ h'' \downarrow & & \downarrow g \\ X'' & \xrightarrow{e \circ e'} & X \end{array}$$

on obtient des isomorphismes  $g''_\#A_{V''} \simeq e'^*g'_\#A_{V'}$  et  $h''_\#A_{U''} \simeq (e \circ e')^*h_\#A_U$ . On se ramène donc à montrer que  $g''_\#A$  et  $h''_\#A$  sont isomorphes. On montrera plus généralement que les 1-morphismes  $g''_\#g''^*$  et  $h''_\#h''^*$  sont 2-isomorphes. En passant aux adjoints à droite on a à comparer  $g''_*g''^*$  et  $h''_*h''^*$ . Le  $X''$ -morphisme de schéma  $a : V'' \longrightarrow U''$  fournit une transformation naturelle :

$$h''_*h''^* \longrightarrow h''_*a_*a^*h''^* \longrightarrow g''_*g''^*$$

Par la proposition 2.1.163,  $a^*$  est une équivalence. Il en résulte que le morphisme d'unité  $\text{id} \longrightarrow a_*a^*$  est inversible. Ceci termine l'étape de la récurrence. C.Q.F.D

**PROPOSITION 2.2.55** — *On suppose que  $H$  est semi-séparé. Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme quasi-projectif. Notons  $d_f$  le maximum des dimensions des fibres  $f^{-1}(x)$  pour  $x$  un point (non forcément fermé) de  $X$ . Le foncteur  $f_![d_f]$  est  $t$ -positif. En d'autres termes, le foncteur  $f_!$  envoie  $H_{\geq 0}(Y)$  dans  $H_{\geq -d_f}(X)$ .*

DEMONSTRATION Notons  $X_0$  le sous-schéma fermé de  $X$  égal à l'adhérence de l'image de  $f$ . On obtient ainsi la factorisation de  $f$  :

$$Y \xrightarrow{f_0} X_0 \xrightarrow{i} X$$

Il vient que  $f_! = i_*f_{0!}$ . Comme  $i_*$  est  $t$ -exact et que les maxima des dimensions des fibres de  $f$  et de  $f_0$  sont les mêmes, on se ramène à considérer le  $S$ -morphisme  $f_0$ . En d'autre termes, on peut supposer que  $f$  est dominant. On peut également supposer que  $X$  et  $Y$  sont réduits (par la remarque 2.2.48) et connexes.

On raisonne par récurrence sur la  $S$ -dimension de  $Y$  (voir la définition 2.2.25). Lorsque  $d_S(Y)$  est minimale,  $Y$  est vide et il n'y a rien à prouver. On suppose donc que  $Y$  est non vide.

Soit  $U$  un ouvert de  $Y$  et  $Z$  le fermé complémentaire. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & Z \\
 & \searrow g & \downarrow f & & \swarrow h \\
 & & X & & 
 \end{array}$$

On obtient le 2-triangle distingué :

$$g_!j^*[d_f] \longrightarrow f_![d_f] \longrightarrow h_!i^*[d_f] \longrightarrow$$

en appliquant  $f_![d_f]$  au 2-triangle distingué de localité.

Pour montrer que  $f_![d_f]$  est  $t$ -positif, il suffit donc de montrer que  $g_![d_g]$  et  $h_![d_h]$  le sont. Étant donné que  $d_g \leq d_f$  et que  $d_h \leq d_f$ , on voit qu'il suffit de montrer que  $g_![d_g]$  et  $h_![d_h]$  sont  $t$ -positifs. En particulier si  $U$  est dense dans  $Y$ , le schéma  $Z$  est de  $S$ -dimension strictement plus petite que celle de  $Y$  (par le lemme 2.2.26). Dans ce cas l'hypothèse de récurrence assure que  $h_![d_h]$  est  $t$ -positif et la  $t$ -positivité de  $f_![d_f]$  résulte alors de celle de  $g_![d_g]$ . Ceci montre qu'on peut remplacer  $Y$  par n'importe quel ouvert dense de  $Y$ . Comme première application de ce principe, on se ramène au cas où  $Y$  est  $X$  sont tous les deux irréductibles. En effet, il suffit de choisir  $U$  de telle sorte que toute composante connexe de  $U$  soit irréductible. On se ramène ensuite à traiter à part le cas de chaque composante connexe. En appliquant une seconde fois la discussion du début, on remplace  $X$  par l'image de la composante connexe choisie.

Supposons maintenant donné  $t : X' \longrightarrow X$  un morphisme fini surjectif totalement inséparable avec  $X'$  irréductible et formons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{t'} & Y \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 X' & \xrightarrow{t} & X
 \end{array}$$

Comme  $t^*$  est une équivalence  $t$ -exacte, pour montrer que  $f_![d_f]$  est  $t$ -positif, il suffit de montrer que  $t^*f_![d_f]$  est  $t$ -positif. Mais  $t^*f_! \simeq f'_!t'^*$ . Il vient qu'il suffit de montrer la conclusion de la proposition pour  $f' : Y' \longrightarrow X'$ . Ceci nous permet de supposer que  $f$  est génériquement lisse, i.e., lisse au dessus d'un ouvert non vide (et donc dense) de  $Y$ . En remplaçant  $Y$  par cet ouvert, on se ramène en fin de compte au cas où  $f$  est lui même lisse avec  $\Omega_f$  libre. Dans ce cas, on a  $f_![d_f] = f_{\#}(-d_f)[-d_f]$ . Ceci termine la preuve de la proposition. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.2.56** — Si  $H$  est semi-séparé, le foncteur  $f^![-d_f]$  est  $t$ -négatif. Plus précisément, le foncteur  $f^!$  envoie  $H_{<0}(X)$  dans  $H_{<d_f}(Y)$ .

DEMONSTRATION En effet  $f^![-d_f]$  admet comme adjoint à gauche  $f_![d_f]$ . Ce dernier est  $t$ -positif par 2.2.55. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.2.57** — Supposons que  $H$  est semi-séparé. Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme projectif. Notons  $d_f$  le maximum des dimensions des fibres de  $f$ . Le foncteur  $f_*[d_f]$  est  $t$ -positif. En particulier  $f_*$  est de dimension homologique concentrée dans l'intervalle  $[0, -d_f]$ .

DEMONSTRATION En effet pour  $f$  projectif on a  $f_! = f_*$ . C.Q.F.D

Dans le numéro 2.2.5, on verra comment se débarrasser de l'hypothèse de projectivité dans l'énoncé ci-dessus.

### 2.2.4 Définition des $t$ -structures engendrées perverses et les propriétés de $t$ -exactitude

Rappelons qu'on s'est donné un 2-foncteur homotopique stable  $H$  sur  $(Sch/S)$  ainsi qu'un ensemble d'objets  $\mathcal{G}$  de  $H(S)$ . Dans cette sous-section on considère une variante "perverse" de la  $t$ -structure de la sous-section précédente. On commence par adapter l'hypothèse 2.2.38 :

**HYPOTHÈSE 2.2.58** — On suppose dans la suite que :

- Pour tout  $S$ -schéma de type fini  $f : X \longrightarrow S$ , la catégorie triangulée  $H(X)$  admet les petites sommes et les objets  $f^!A$  sont compacts pour tout  $A \in \mathcal{G}$ .
- Le 2-foncteur homotopique stable  $H$  est parfait pour les petites sommes au sens de la définition 2.1.158.

**DEFINITION 2.2.59** — Pour un  $S$ -schéma quasi-projectif  $f : X \longrightarrow S$ , on notera  $\mathcal{G}_!(X)$  la classe d'objets de  $H(X)$  définie par :

$$\mathcal{G}_!(X) = \{g_!g^!f^!A(n)[n], \text{ avec } g : X' \rightarrow X \text{ un } S\text{-morphisme et } n \in \mathbb{Z}\}$$

Remarquons, que contrairement à la définition de  $\mathcal{G}_\#(X)$ , on ne fait pas d'hypothèses de lissité sur les morphismes  $g$ .

On a le correspondant du lemme 2.2.40 :

**LEMME 2.2.60** — *Sous l'hypothèse 2.2.58, les éléments de  $\mathcal{G}_1(X)$  sont compacts. De plus, la classe  $\mathcal{G}_1(X)$  est essentiellement équivalente à un ensemble.*

DEMONSTRATION Ceci est une conséquence directe du lemme 2.1.28 et du fait que  $g_!$  admet un adjoint à droite  $g^!$  commutant aux petites sommes. C.Q.F.D

**DEFINITION 2.2.61** — **1-** *La  $t$ -structure sur  $H(X)$  engendrée par l'ensemble d'objets compacts  $\mathcal{G}_1(X)$  est appelée la  $t$ -structure engendrée perverse sur  $H(X)$ . On notera  ${}^pH_{\geq 0}(X)$  la sous-catégorie pleine des objets positifs (qu'on appellera  ${}^p$ t-positifs) et  ${}^pH_{< 0}(X)$  celle des objets strictement négatifs (qu'on appellera strictement  ${}^p$ t-négatifs). Le coeur  ${}^pH_{\geq 0}(X) \cap {}^pH_{\leq 0}(X)$  de cette  $t$ -structure sera noté  ${}^pHE(X)$ .*

**2-** *Les troncations par rapport à cette  $t$ -structure seront notées  ${}^ph_{\geq}$  et  ${}^ph_{\leq}$ . Ainsi, pour tout objet  $E$  de  $H(X)$  on a un triangle distingué :*

$${}^ph_{\geq 0}(E) \longrightarrow E \longrightarrow {}^ph_{\leq -1}(E) \longrightarrow$$

On note finalement  ${}^ph_i(E) = ({}^ph_{\leq i} \circ {}^ph_{\geq i})(E)[-i] \in \text{Ob}({}^pHE(X))$ .

Comme pour la  $t$ -structure engendrée non perverse, on axera l'étude sur les propriétés de  $t$ -exactitude des 4 opérations. Contrairement au cas de la  $t$ -structure non perverse, il y a très peu de résultats élémentaires. En effet, on n'obtient des résultats intéressant qu'en utilisant les techniques de résolution des singularités.

**Les propriétés de  ${}^p$ t-exactitude des opérations  $f_!$  et  $f^!$**

On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.2.62** — *Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme quasi-projectif. On a :*

- *Le foncteur  $f_!$  est  ${}^p$ t-positif. Le foncteur  $f^!$  est  ${}^p$ t-négatif.*
- *Si  $f$  est lisse, le foncteur  $f^!$  est  $t$ -exact.*

DEMONSTRATION Comme  $f_!$  commute aux petites sommes, il suffira de montrer l'inclusion  $f_!\mathcal{G}_1(Y) \subset \mathcal{G}_1(X)$ . Ceci est évident par la définition même. Comme  $f^!$  est un adjoint à droite de  $f_!$ , il est  ${}^p$ t-négatif. Ceci prouve la première assertion.

Supposons maintenant que  $f$  est lisse. Il faut montrer que  $f^!$  est  ${}^p$ t-positif. Comme  $f^!$  commute aux petites sommes il suffit d'établir l'inclusion  $f^!\mathcal{G}_1(X) \subset \mathcal{G}_1(Y)$ . Notons  $p$  la projection structurale de  $X$  sur  $S$ . Un élément de  $\mathcal{G}_1(X)$  est un objet de la forme  $g_!g^!p^!A(n)[n]$  avec  $g : X' \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme,  $A \in \mathcal{G}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Formons un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

On déduit alors les isomorphismes  $f^!g_!g^!p^!A(n)[n] \simeq g_!f'^!g^!p^!A(n)[n] \simeq g_!g'^!(p \circ f)^!A(n)[n]$ . C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.2.63** — *Soit  $(u_i : U_i \longrightarrow X)$  un recouvrement Nisnevich d'un  $S$ -schéma  $X$ . Pour qu'un objet  $A$  de  $H(X)$  soit  ${}^p$ t-positif (resp.  ${}^p$ t-négatif) il faut et il suffit que pour tout  $i$  l'objet  $u_i^*A$  de  $H(U_i)$  soit  ${}^p$ t-positif (resp.  ${}^p$ t-négatif).*

DEMONSTRATION En effet on a pour tout  $i$ ,  $u_i^* = u_i^!$ . En particulier les  $u_i^*$  sont  ${}^p$ t-exacts. D'autre part, la famille des  $u_i^*$  est conservative. Le résultat découle alors du lemme 2.1.76. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.2.64** — *Soit  $X$  un  $S$ -schéma et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de dimension constante  $n$ . Les équivalences  $\text{Th}(\mathcal{M})[-n]$  et  $\text{Th}^{-1}(\mathcal{M})[n]$  sont  ${}^p$ t-exacts.*

DEMONSTRATION C'est exactement la même preuve que celle du corollaire 2.2.51. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.2.65** — *Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme lisse de dimension relative constante  $d$ . Le foncteur  $f^*[d]$  est  $t$ -exact.*

DEMONSTRATION En effet, on a  $f^* = \text{Th}^{-1}(\Omega_f)f^!$ . Il vient que  $f^*[d] = \text{Th}^{-1}(\Omega_f)[d]f^!$ . Comme  $\Omega_f$  est de dimension  $d$ , le corollaire est prouvé. C.Q.F.D

**Des systèmes de générateurs de la  $t$ -structure perverse**

Dans cette section, on définit de nouvelles classes d'objets de  $H(X)$  qui engendrent la  $t$ -structure perverse de la définition 2.2.61. Tous les résultats de  ${}^p t$ -exactitude qu'on obtiendra par la suite reposent essentiellement sur le résultat principal de ce paragraphe à savoir la proposition 2.2.69. On introduit d'abord nos classes :

**DEFINITION 2.2.66** — 1- Pour un  $S$ -schéma  $f : X \longrightarrow S$  et un sous-schéma fermé  $Z \subset X$ , on note  $\mathcal{G}_{1,Z}^{\text{projreg}}(X)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{G}_1(X)$  formé des objets  $g_! g^! f^! A(n)[n]$  avec  $g : X' \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme projectif,  $A \in \mathcal{G}$  et  $n \in \mathbb{Z}$  tels que  $X'$  est connexe régulier et l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $g^{-1}(Z)$  est somme de diviseurs réguliers à croisements normaux dans  $X'$ ,
- $g$  se factorise par l'inclusion  $Z \subset X$ , i.e.,  $g^{-1}(Z) = X'$ .

Lorsque  $Z$  est vide ou égal à  $X$ , on notera simplement  $\mathcal{G}_1^{\text{projreg}}(X)$  la classe dont il est question.

2- On définit de la même façon les classes  $\mathcal{G}_{1,Z}^{\text{reg}}(X)$  lorsqu'on ne demande plus à  $g$  d'être projectif mais seulement quasi-projectif.

Le but est de trouver des conditions suffisantes pour que la  $t$ -structure engendrée par  $\mathcal{G}_{1,Z}^{\text{projreg}}(X)$  soit la  $t$ -structure perverse de la définition 2.2.61. Une condition de pureté sur l'ensemble  $\mathcal{G}$  semble indispensable :

**DEFINITION 2.2.67** — 1- Nous dirons que l'ensemble  $\mathcal{G}$  est faiblement  ${}^p t$ -pure si pour toute immersion fermée de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & S \end{array}$$

telle que :

- les schémas  $Z$  et  $Y$  sont réguliers et connexes,
- le faisceau normal  $\mathcal{N}_i$  de l'immersion  $i$  est libre de rang non nul,

la propriété suivante est vérifiée. Pour tout objet  $A \in \mathcal{G}$ , l'objet  $i^* g^! A[-1]$  appartient à la sous-catégorie suspendue :

$$\langle \{h^! B(n)[n]; B \in \mathcal{G} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\} \rangle_+^{ct}$$

2- On dit que l'ensemble  $\mathcal{G}$  est  ${}^p t$ -pure si pour toute immersion de  $S$ -schémas  $i$  comme ci-dessus, et tout objet  $A \in \mathcal{G}$ , l'objet  $i^* g^! A[-r]$  appartient à la sous-catégorie suspendue :

$$\langle \{h^! B(n)[n]; B \in \mathcal{G} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\} \rangle_+^{ct}$$

avec  $r$  le rang du faisceau normal  $\mathcal{N}_i$ .

**LEMME 2.2.68** — Si  $S$  est le spectre d'un corps parfait, l'ensemble  $\mathcal{G}$  est automatiquement  ${}^p t$ -pure.

DEMONSTRATION Tout  $k$ -schéma régulier est lisse sur  $k$ . Il vient que l'immersion :

$$Z \xrightarrow{i} Y$$

est une immersion entre deux  $k$ -schémas lisses. Par l'isomorphisme de pureté, on a  $i^* g^! \simeq \text{Th}(\mathcal{N})h^!$ . Mais  $\mathcal{N}$  est libre de rang non nul  $r$ . Il vient que  $i^* g^! A[-r] \simeq h^! A(r)[2r][-r] = h^! A(r)[r]$ . C.Q.F.D

Voici le résultat principal :

**PROPOSITION 2.2.69** — Supposons l'une des deux conditions suivantes vérifiée :

- $S$  admet la résolution des singularités par éclatements,
- $S$  admet la résolution des singularités par altérations et  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.

Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $Z \subset X$  une partie fermée. La  $t$ -structure sur  $H(X)$  engendrée par  $\mathcal{G}_{1,Z}^{\text{reg}}(X)$  coïncide avec la  $t$ -structure engendrée perverse (voir la définition 2.2.61).

Si on suppose en plus que l'ensemble  $\mathcal{G}$  est faiblement  ${}^p t$ -pure, alors la  $t$ -structure sur  $H(X)$  engendrée par  $\mathcal{G}_{1,Z}^{\text{projreg}}(X)$  coïncide également avec la  $t$ -structure engendrée perverse (voir la définition 2.2.61).

Notons provisoirement  $({}^p H_{Z,\geq 0}^{\text{reg}}(X), {}^p H_{Z,< 0}^{\text{reg}}(X))$  et  $({}^p H_{Z,\geq 0}^{\text{projreg}}(X), {}^p H_{Z,< 0}^{\text{projreg}}(X))$  les  $t$ -structures engendrées par  $\mathcal{G}_{1,Z}^{\text{reg}}(X)$  et  $\mathcal{G}_{1,Z}^{\text{projreg}}(X)$  respectivement. On a clairement les inclusions  ${}^p H_{Z,\geq 0}^{\text{projreg}}(X) \subset {}^p H_{Z,\geq 0}^{\text{reg}}(X) \subset {}^p H_{\geq 0}(X)$ . Il s'agit de montrer que ces inclusions sont en fait des égalités. Pour cela, il suffit de montrer que la classe d'objets  $\mathcal{G}_1(X)$  est dans  ${}^p H_{Z,\geq 0}^{\text{reg}}(X)$  voire dans  ${}^p H_{Z,\geq 0}^{\text{projreg}}(X)$  lorsque les conditions adéquates sont satisfaites.

Fixons donc un objet  $h_! h^! f^! A(n)[n]$  de  $\mathcal{G}_1(X)$  avec  $h : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme quasi-projectif,  $A \in \mathcal{G}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . On va prouver que  $h_! h^! f^! A(n)[n]$  est dans  ${}^p H_{Z,\geq 0}^{\text{reg}}(X)$  (resp.  ${}^p H_{Z,\geq 0}^{\text{projreg}}(X)$ ). On se ramène tout de suite au cas

$n = 0$  et  $Y$  réduit et connexe. On raisonnera par récurrence sur la  $S$ -dimension  $d_S(Y)$  de  $Y$  (voir la définition 2.2.25). Lorsque  $d_S(Y)$  est minimal,  $Y$  est le  $S$ -schéma vide. Il n'y a rien à montrer dans ce cas.

Supposons que  $d_S(Y) \succ (\emptyset, \emptyset)$ . On fixe une  $X$ -compactification<sup>6</sup> de  $h$  :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{c} & \bar{Y} \\ & \searrow h & \downarrow \bar{h} \\ & & X \end{array}$$

Cette compactification n'est utile que pour le cas respé. Le lemme suivant implique immédiatement le cas non-respé :

**LEMME 2.2.70** — *On peut supposer que  $\bar{Y}$  est régulier et que  $\bar{h}^{-1}(Z)$  est égal à  $\bar{Y}$  tout entier ou un diviseur à croisements normaux.*

DEMONSTRATION Par la résolution des singularités, il existe un  $S$ -morphisme projectif  $\bar{e} : \bar{Y}' \longrightarrow \bar{Y}$  qui est :

- Un éclatement lorsqu'on n'a pas d'hypothèses supplémentaire sur  $H$ .
- Une altération lorsque  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. On supposera en plus que cette altération est munie d'une action d'un groupe fini  $G$  (induisant l'action triviale sur la base  $\bar{Y}$ ) telle que l'extension  $k(X') \subset k(X)^G$  est purement inséparable.

On suppose de plus que  $\bar{Y}'$  est un schéma régulier connexe et que  $\bar{e}^{-1}\bar{h}^{-1}(Z)$  est un diviseur à croisements normaux dans  $\bar{Y}'$  ou égal à  $\bar{Y}'$  tout entier. Dans le cas non-respé on conviendra que le groupe trivial  $G = \{1\}$  agit sur le  $\bar{Y}$ -schéma  $\bar{Y}'$ . On définit un projecteur de l'algèbre du groupe  $\mathbb{Z}_{(|G|)}[G]$  par la formule habituelle :

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

Notons que dans tous les cas considérés, le 2-foncteur homotopique stable  $H$  est  $\mathbb{Z}_{(|G|)}$ -linéaire.

On forme le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{c'} & \bar{Y}' \\ e \downarrow & & \downarrow \bar{e} \\ Y & \xrightarrow{c} & \bar{Y} \end{array}$$

L'action de  $G$  induit une action sur le  $Y$ -schéma  $Y'$ . On en déduit une action du groupe  $G$  sur le foncteur  $e_!e^!$  donnée par :

$$g : e_!e^! \longrightarrow e_!g_!g^!e^! \longrightarrow (e \circ g)_!(e \circ g)^! = e_!e^!$$

et du coups un projecteur  $p : e_!e^! \longrightarrow e_!e^!$ . On définit le foncteur  $F_Y : H(Y) \longrightarrow H(Y)$  par :

$$F_Y(A) = \text{Image} (p : e_!e^!A \longrightarrow e_!e^!A)$$

Notons que la catégorie  $H(Y)$  est pseudo-abélienne puisqu'elle est triangulée et admet les petites sommes. Finalement, en remarquant que le 2-morphisme de counité  $e_!e^! \longrightarrow \text{id}$  est  $G$ -équivariant (avec  $\text{id}$  muni de l'action triviale), on obtient une factorisation :

$$e_!e^! \longrightarrow F_Y \longrightarrow \text{id}$$

Plus généralement pour tout  $S$ -morphisme  $r : R \longrightarrow Y$ , formons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{r'} & Y' \\ e_R \downarrow & & \downarrow e \\ R & \xrightarrow{r} & Y \end{array}$$

L'action de  $G$  sur le  $Y$ -schéma  $Y'$  induit une action de  $G$  sur le  $R$ -schéma  $R'$ . On posant  $F_R = \text{Image} (p : e_{R'}e_{R'}^! \longrightarrow e_{R'}e_{R'}^!)$  on obtient également la factorisation  $e_{R'}e_{R'}^! \longrightarrow F_R \longrightarrow \text{id}$ .

On appliquera ceci pour  $u : U \longrightarrow Y$  l'inclusion d'un ouvert dense de  $Y$  au-dessus duquel  $e$  est pseudo-revêtement étale pseudo-galoisien (i.e., composé d'un morphisme étale galoisien suivit d'un morphisme fini surjectif totalement

<sup>6</sup>Une compactification d'un  $S$ -schéma est une immersion ouverte *dense* dans un  $S$ -schéma projectif.



inséparable) et  $t : T \longrightarrow Y$  l'immersion du fermé complémentaire. On a dans ce cas le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xleftarrow{t'} & T' \\ e_U \downarrow & & \downarrow e & & \downarrow e_T \\ U & \xrightarrow{u} & Y & \xleftarrow{t} & T \end{array}$$

On aura besoin du fait que le 2-morphisme  $u^*F_Y \longrightarrow u^*$  est un 2-isomorphisme. En effet, il s'identifie canoniquement à  $F_U u^* \longrightarrow u^*$ . Par le lemme 2.1.165, le 2-morphisme  $F_U \longrightarrow 1$  est inversible.

Revenons à notre problème. Pour prouver le lemme, il suffit de montrer les implications :

$$[(h \circ e)_!(h \circ e)^!f^!A \in {}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)] \implies [h_!h^!f^!A \in {}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)]$$

$$[(h \circ e)_!(h \circ e)^!f^!A \in {}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)] \implies [h_!h^!f^!A \in {}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)]$$

Supposons donc que l'objet  $(h \circ e)_!(h \circ e)^!f^!A$  est dans  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)$  (resp.  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$ ). Par construction de  $F_Y$ , l'objet  $h_!F_Y h^!f^!A$  est un facteur direct de  $h_!e_!e^!h^!f^!A$ . On en déduit que  $h_!F_Y h^!f^!A$  est dans  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)$  (resp.  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$ ).

Formons un triangle distingué de  $\mathbf{H}(Y)$  :

$$F_Y h^!f^!A \longrightarrow h^!f^!A \longrightarrow C \longrightarrow F_Y h^!f^!A[+1]$$

Il suffit de montrer que  $h_!C$  est dans  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)$  (resp.  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$ ). Par la discussion précédente, on sait que  $u^*C = 0$ . Ainsi l'objet  $C$  est à support dans  $T$ . En d'autres termes,  $t_!t^!C \simeq C$ . En appliquant  $t_!t^!$  on obtient un triangle distingué :

$$t_!t^!F_Y h^!f^!A \longrightarrow t_!t^!h^!f^!A \longrightarrow C \longrightarrow t_!t^!F_Y h^!f^!A[+1]$$

Il est facile de montrer que  $t^!F_Y \simeq F_T t^!$ . Notre triangle distingué s'écrit donc sous la forme :

$$t_!F_T t^!h^!f^!A \longrightarrow t_!t^!h^!f^!A \longrightarrow C \longrightarrow t_!F_T t^!h^!f^!A[+1]$$

Pour terminer, on montrera que les deux objets  $h_!t_!F_T t^!h^!f^!A$  et  $h_!t_!t^!h^!f^!A$  sont dans  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)$  (resp.  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$ ). Puisque  $U$  et  $U'$  sont denses dans  $Y$  et  $Y'$ , on déduit par le lemme 2.2.26 que  $d_S(T) \prec d_S(Y)$  et  $d_S(T') \prec d_S(Y') = d_S(Y)$ . On sait donc que  $(e_T \circ t \circ h)_!(e_T \circ t \circ h)^!f^!A$  et  $(t \circ h)_!(t \circ h)^!f^!A$  sont dans  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)$  (resp.  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$ ) par l'hypothèse de récurrence. Pour terminer, il suffit de noter que  $h_!t_!F_T t^!h^!f^!A$  est facteur direct de  $h_!t_!e_{T'}^!e_T^!t^!h^!f^!A$ . Le lemme est prouvé. C.Q.F.D

La preuve de l'égalité  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X) = {}^p\mathbf{H}_{\geq 0}(X)$  étant achevée, on passe à la preuve de  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X) = {}^p\mathbf{H}_{\geq 0}(X)$ . Il nous reste pour cela à montrer que l'objet  $h_!h^!f^!A$  est dans  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$  sachant que le  $S$ -morphisme  $h : Y \longrightarrow X$  admet une  $X$ -compactification  $\bar{h} : \bar{Y} \longrightarrow X$  avec  $\bar{Y}$  un schéma régulier et  $\bar{h}^{-1}(Z)$  égal à  $\bar{Y}$  ou à un diviseur à croisement normaux. Il va sans dire que  $A$  est toujours supposé dans  $\mathcal{G}$ .

On raisonne maintenant par une deuxième récurrence sur la  $S$ -dimension de  $D = \bar{Y} - Y$ . Lorsque ce dernier est de  $S$ -dimension  $(\emptyset, \emptyset)$ , il est vide et  $Y = \bar{Y}$ . La conclusion recherchée est clairement vraie dans ce cas.

Supposons donc que  $D$  est non vide. Notons  $D_{\text{sing}} \subset D$  le lieu singulier<sup>7</sup> de  $D$ . Soit  $C \subset D$  un sous-schéma partout de codimension non nulle contenant  $D_{\text{sing}}$  et tel que le faisceau normal de l'inclusion de  $D - C$  dans  $\tilde{Y} = \bar{Y} - C$  soit libre. Notons que  $d_S(C) \prec d_S(D)$ .

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{v} & \tilde{Y} \xleftarrow{i} D - C \\ & \searrow h & \downarrow \bar{h} \\ & & X \end{array}$$

Par la récurrence sur la  $S$ -dimension du complémentaire de la compactification, on sait que l'objet  $\tilde{h}_! \tilde{h}^! f^! A$  est dans  ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$ . Du 2-triangle distingué de localité :

$$v_!v^! \longrightarrow \text{id} \longrightarrow i_*i^* \longrightarrow v_!v^![+1]$$

<sup>7</sup>Comme  $S$  est un schéma admettant la résolution des singularités par altération, tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $P$  admet un ouvert dense  $R \subset P$  avec  $R$  régulier. Le lieu singulier de  $P$  est alors le complémentaire du plus gros ouvert régulier de  $P$  qui est donc un fermé de codimension strictement positive.

on déduit le triangle distingué :

$$\tilde{h}_! i_* i^* \tilde{h}^! f^! A[-1] \longrightarrow \tilde{h}_! v_! v^! \tilde{h}^! f^! A \longrightarrow \tilde{h}_! \tilde{h}^! f^! A \longrightarrow \tilde{h}_! i_* i^* \tilde{h}^! f^! A$$

Pour terminer la preuve de la proposition 2.2.69 il suffira de montrer que l'objet  $\tilde{h}_! i_* i^* \tilde{h}^! f^! A[-1]$  est dans  ${}^p\mathbf{H}_{\mathbb{Z}, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$ .

Si l'on note  $E_\alpha$  les composantes connexes de  $D - C$  et  $i_\alpha : E_\alpha \longrightarrow \tilde{Y}$  les inclusions évidentes, il est équivalent de prouver que les objets  $\tilde{h}_! i_{\alpha*} i_\alpha^* \tilde{h}^! f^! A[-1]$  sont dans  ${}^p\mathbf{H}_{\mathbb{Z}, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$ .

Pour montrer cela, on utilise l'hypothèse (qui jusqu'ici n'a pas servi) que  $\mathcal{G}$  est faiblement  ${}^p t$ -pure. On l'appliquera à l'immersion :

$$\begin{array}{ccc} E_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & \tilde{Y} \\ & \searrow f \circ k_\alpha & \downarrow f \circ \tilde{h} \\ & & S \end{array}$$

avec  $k_\alpha = \tilde{h} \circ i_\alpha$ . Il vient que l'objet  $i_\alpha^* \tilde{h}^! f^! A[-1]$  est dans la sous-catégorie suspendue :

$$\langle \{k_\alpha^! f^! B(m)[m]; B \in \mathcal{G} \text{ et } m \in \mathbb{Z}\} \rangle_+^{ct}$$

Pour terminer, il suffira de montrer que pour tout  $B \in \mathcal{G}$  et  $m \in \mathbb{Z}$  l'objet

$$\tilde{h}_! i_{\alpha*} i_\alpha^! \tilde{h}^! f^! B(m)[m] = \tilde{h}_! i_{\alpha!} i_\alpha^! \tilde{h}^! f^! B(m)[m] \simeq (\tilde{h} i_\alpha)_! (\tilde{h} i_\alpha)^! f^! B(m)[m]$$

est dans  ${}^p\mathbf{H}_{\mathbb{Z}, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$ . Ceci découle alors par l'hypothèse de la première récurrence appliquée au morphisme  $\tilde{h} \circ i_\alpha$  puisque  $d_S(E_\alpha) < d_S(Y)$ . La proposition est finalement prouvée.

**Remarque 2.2.71** — Soit  $f : X \longrightarrow S$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. On définit une classe  $\mathcal{G}_!^{\text{proj}}(X) \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$  formée des objets de la forme  $h_! h^! f^! A$  avec  $A \in \mathcal{G}$  et  $h$  un morphisme *projectif* de but  $X$ . On a clairement les inclusions :

$$\mathcal{G}_!^{\text{projreg}}(X) \subset \mathcal{G}_!^{\text{proj}}(X) \subset \mathcal{G}_!(X)$$

Il vient par 2.2.69 que la classe d'objets compacts  $\mathcal{G}_!^{\text{proj}}(X)$  engendre la  $t$ -structure perverse de  $\mathbf{H}(X)$ . On peut alors se demander s'il existe une preuve directe de ce fait, qui n'utilise pas par les techniques de résolutions des singularités, et qui donc sera valable sous des hypothèses moins restrictives que celle de la proposition 2.2.69. Nous pensons qu'une telle preuve est difficile à obtenir. En tout cas la tentative naïve de compactifier et de raisonner par récurrence sur la  $S$ -dimension du complémentaire échoue puisque l'hypothèse de  ${}^p t$ -pureté ne porte que sur des schémas réguliers.

Le résultat suivant utilise uniquement que la  $t$ -structure perverse est engendrée par les  $\mathcal{G}_!^{\text{proj}}(-)$  :

**COROLLAIRE 2.2.72** — Gardons les hypothèses de la proposition 2.2.69. Soit  $f : X' \longrightarrow X$  un morphisme quasi-projectif de  $S$ -schémas. Le foncteur  $f^!$  est  ${}^p t$ -exact.

DEMONSTRATION En effet on sait déjà que  $f^!$  est  ${}^p t$ -négatif. Montrons qu'il est  ${}^p t$ -positif. Étant donné que  $f^!$  commute aux sommes infinies il suffit de montrer que  $f^! \mathcal{G}_!^{\text{proj}}(X) \subset \mathcal{G}_!^{\text{proj}}(X')$  (à isomorphisme près).

Notons  $p$  la projection structurale de  $X$  sur  $S$ . Considérons donc un objet  $h_! h^! p^! A(n)[n]$  de  $\mathbf{H}(X)$  avec  $h : Y \longrightarrow X$  un morphisme projectif  $A \in \mathcal{G}$  et  $n$  un entier relatif. Formons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & Y \\ h' \downarrow & & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Par le théorème de changement de base pour un morphisme projectif, on a  $f^! h_! \simeq h'_! f'^!$ . Il vient que :

$$f^! h_! h^! p^! A(n)[n] \simeq h'_! f'^! h^! p^! A(n)[n] \simeq h'_! h'^! (p \circ f)^! A(n)[n]$$

D'où le résultat.

**Les propriétés de  ${}^p t$ -exactitude des opérations  $f_*$  et  $f^*$**

On aura besoin de la conséquence suivante de la  ${}^p t$ -pureté :

**LEMME 2.2.73** — *Supposons donnée une immersion de  $S$ -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & S \end{array}$$

avec  $Y$  un schéma régulier et  $Z$  un diviseur à croisements normaux dans  $Y$ . Si  $\mathcal{G}$  est faiblement  ${}^p t$ -pure, alors pour tout  $A \in \mathcal{G}$ , l'objet  $i^*g^!A[-1]$  est  ${}^p t$ -positif.

**DEMONSTRATION** On raisonne par récurrence sur le nombre  $r$  de composantes irréductibles de  $Z$ . Lorsque  $r = 1$ , le schéma  $Z$  est régulier et le résultat découle de l'hypothèse que  $\mathcal{G}$  est faiblement  ${}^p t$ -pure. On supposera dans la suite que  $r > 1$ .

Écrivons  $Z = \cup_{k=1, \dots, r} D_k$  avec  $D_i$  les composantes irréductibles de  $Z$ . Posons  $T = \cup_{k=1, \dots, r-1} D_k$  l'union des  $r - 1$  premières composantes et notons  $D$  la composante restante  $D_r$ . On forme le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{s'} & T \\ \downarrow t' & \searrow c & \downarrow t \\ D & \xrightarrow{s} & Z \end{array}$$

avec  $c = s \circ t' = t \circ s'$ . Pour  $A \in \mathcal{G}$  on a un triangle distingué à la Mayer-Vietoris associé au recouvrement fermé de  $Z$  par  $T$  et  $D$  :

$$c_*c^*(i^*g^!A)[-2] \longrightarrow i^*g^!A[-1] \longrightarrow t_*t^*(i^*g^!A)[-1] \oplus s_*s^*(i^*g^!A)[-1] \longrightarrow c_*c^*(i^*g^!A)[-1]$$

Il suffit donc de montrer que les objets  $c_*c^*(i^*g^!A)[-2]$ ,  $t_*t^*(i^*g^!A)[-1]$  et  $s_*s^*(i^*g^!A)[-1]$  sont  ${}^p t$ -positifs. Les 1-morphismes  $c_* = c_!$ ,  $s_* = s_!$  et  $t_* = t_!$  étant  ${}^p t$ -positifs, on se ramène à prouver que les objets  $(c \circ i)^*g^!A[-2]$ ,  $(t \circ i)^*g^!A[-1]$  et  $(s \circ i)^*g^!A[-1]$  sont  ${}^p t$ -positifs. La  ${}^p t$ -positivité des deux derniers objets découle de l'hypothèse de récurrence puisque  $T \subset Y$  et  $D \subset Y$  sont des diviseurs à croisements normaux dont le nombre de composantes irréductibles est  $r - 1$  et 1 respectivement.

Pour prouver que l'objet  $(c \circ i)^*g^!A[-2]$  est  ${}^p t$ -positif, on remarque que  $C$  est un diviseur à croisements normaux dans le schéma régulier  $D$ . Or, on a un isomorphisme évident :

$$(c \circ i)^*g^!A[-2] \simeq t'^*((s \circ i)^*g^!A[-1])[-1]$$

Par  ${}^p t$ -pureté faible l'objet  $(s \circ i)^*g^!A[-1]$  est dans la sous-catégorie suspendue :

$$\langle \{(h \circ s)^!B(n)[n]; B \in \mathcal{G} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\} \rangle_+^{ct}$$

Pour terminer, il suffit donc de prouver que  $t'^*((h \circ s)^!B(n)[n])[-1]$  est  ${}^p t$ -positif pour tout  $B \in \mathcal{G}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . On se ramène immédiatement à  $n = 0$ . On conclut encore une fois à l'aide de l'hypothèse de récurrence qu'on applique au diviseur à croisements normaux  $C \subset D$  ayant au plus  $r - 1$  composantes irréductibles. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.2.74** — *Soient  $p : X \longrightarrow S$  un  $S$ -schéma quasi-projectif avec  $X$  régulier,  $i : Y \subset X$  l'inclusion d'un diviseur à croisements normaux et  $j : U \subset X$  l'immersion de l'ouvert complémentaire.*

*Si  $\mathcal{G}$  est faiblement  ${}^p t$ -pure, alors pour tout  $A \in \mathcal{G}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , l'objet  $i^*j_*j^*p^!A(n)[n - 1]$  est  ${}^p t$ -positif.*

**DEMONSTRATION** Appliquons le 1-morphisme  $i^*$  au 2-triangle de localité :

$$i_*i^! \longrightarrow \text{id} \longrightarrow j_*j^* \longrightarrow i_*i^![+1]$$

On obtient alors (après rotation) le 2-triangle distingué :

$$i^*[-1] \longrightarrow i^*j_*j^*[-1] \longrightarrow i^! \longrightarrow i^*$$

Ainsi pour montrer que  $i^*j_*j^*p^!A(n)[n - 1]$  est  ${}^p t$ -positif, il suffit de prouver que les objets  $i^*p^!A(n)[n - 1]$  et  $i^!p^!A(n)[n]$  le sont. La  ${}^p t$ -positivité du second objet est claire. Pour le premier, on applique le lemme 2.2.73. C.Q.F.D

**PROPOSITION 2.2.75** — *On suppose que l'une des deux conditions ci-dessous est vérifiée :*

- $S$  admet la résolution des singularité par éclatements,
- $S$  admet la résolution des singularité par altérations et  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.

Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif,  $j : U \longrightarrow X$  une immersion ouverte et  $i : Y \longrightarrow X$  l'immersion fermée complémentaire. Si l'ensemble  $\mathcal{G}$  est faiblement  ${}^p t$ -pure, le foncteurs  $j_*$  est  ${}^p t$ -exact et le foncteur  $i^*j_*[-1]$  est  ${}^p t$ -positif.

DEMONSTRATION Le foncteur  $j_*$  est  ${}^p t$ -négatif puisqu'il admet un adjoint à gauche  ${}^p t$ -exact par la proposition 2.2.62. D'autre part, la  ${}^p t$ -positivité de  $j_*$  découle de la  ${}^p t$ -positivité de  $j_!$ ,  $i_*$  et de  $i^*j_*[-1]$  en invoquant le 2-triangle distingué :

$$i_*i^*j_*[-1] \longrightarrow j_! \longrightarrow j_* \longrightarrow$$

On se contente donc de prouver que  $i^*j_*[-1]$  est  ${}^p t$ -positif. Ce dernier commute aux sommes infinies. En remarquant que  $\mathcal{G}_!(U) = j^*\mathcal{G}(X)$  (à isomorphisme près) on voit qu'il suffirait de montrer que le foncteur  $F = i^*j_*j^*[-1]$  est  ${}^p t$ -positif. Par la proposition 2.2.69, on se ramène à montrer l'inclusion  $F\mathcal{G}_{!,Y}^{\text{projreg}}(X) \subset {}^p H_{\geq 0}(Y)$ .

Appelons  $f$  la projection de  $X$  sur  $S$  et fixons un objet  $h_!h^!f^!A(n)[n] \in \mathcal{G}_{!,Y}^{\text{projreg}}(X)$  avec :

- $h : W \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme projectif,
- $W$  un schéma régulier connexe, et  $h^{-1}(Y)$  est égal à  $W$  ou à un diviseur à croisements normaux dans  $W$ ,
- $A \in \mathcal{G}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

On montrera que  $F(h_!h^!f^!A(n)[n])$  est  ${}^p t$ -positif. Il suffit bien sûr de traiter le cas  $n = 0$ . Formons le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{j'} & W & \xleftarrow{i'} & Z \\ h_U \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow h_Y \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Y \end{array}$$

Lorsque  $Z = h^{-1}(Y) = W$ ,  $j^*h_!h^!f^!A$  est nul. On peut donc supposer que  $Z$  est un diviseur à croisements normaux dans  $W$ . Comme  $h$  est projectif, on a les isomorphismes :

$$i^*j_*j^*h_! \simeq i^*j_*h_{U!}j'^* \simeq i^*j_*h_{U!}j'^* \simeq i^*h_*j'_*j'^* \simeq i^*h_!j'_*j'^* \simeq h_{Y!}i'^*j'_*j'^*$$

Étant donné que  $h_{Y!}$  est  ${}^p t$ -positif, on voit qu'il suffit de montrer que  $(i'^*j'_*j'^*(p \circ h)^!A)[-1]$  est un objet  ${}^p t$ -positif de  $H(Z)$ . Le corollaire 2.2.74 permet donc de conclure. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.2.76** — On garde les hypothèses sur  $S$ ,  $H$  et  $\mathcal{G}$  de la proposition 2.2.75. Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas. Le foncteur  $f_*$  est  ${}^p t$ -positif.

DEMONSTRATION On compactifie le morphisme  $f$  :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{c} & \bar{Y} \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & X \end{array}$$

avec  $c$  une immersion ouverte et  $\bar{f}$  un morphisme projectif. On a  $f_* = \bar{f}_*c_* = \bar{f}_!c_*$ . Le foncteur  $\bar{f}_!$  est  ${}^p t$ -positif par la proposition 2.2.62. Le foncteur  $c_*$  est  ${}^p t$ -exact par la proposition 2.2.75. D'où le résultat. C.Q.F.D

Pour les opérations  $f^*$  on commence par le cas des immersions fermées :

**LEMME 2.2.77** — On garde les hypothèses sur  $S$ ,  $H$  et  $\mathcal{G}$  de la proposition 2.2.75. Soit  $i : Y \longrightarrow X$  une immersion fermée de  $S$ -schémas. Le foncteur  $i^*$  est  ${}^p t$ -positif.

DEMONSTRATION En effet, on le 2-triangle distingué de localité dans  $H(X)$  :

$$i_*i^! \longrightarrow \text{id} \longrightarrow j_*j^* \longrightarrow$$

En appliquant le foncteur  $i^*$  on obtient (après rotation) le 2-triangle distingué :

$$i^*j_*j^*[-1] \longrightarrow i^! \longrightarrow i^* \longrightarrow$$

Mais les foncteurs  $i^*j_*j^*[-1]$  et  $i^!$  sont tous les deux  ${}^p t$ -positifs par 2.2.75 et 2.2.72. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.2.78** — Gardons les hypothèses sur  $S$ ,  $H$  et  $\mathcal{G}$  de 2.2.75. Le foncteur  $i_*$  est  ${}^p t$ -exact.

DEMONSTRATION En effet,  $i_*$  est  ${}^p t$ -négatif puisqu'il admet un adjoint à gauche qui est  ${}^p t$ -positif. D'autre part, par la proposition 2.2.62 on sait qu'il est également  ${}^p t$ -positif. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.2.79** — Gardons les hypothèses sur  $S$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathcal{G}$  de 2.2.75. Soit  $j : U \longrightarrow X$  une immersion ouverte de  $S$ -schémas et  $i : Z \longrightarrow X$  l'immersion fermée complémentaire. Soit  $A$  un objet de  $\mathbf{H}(X)$ . Il y a équivalence entre :

- $A$  est  ${}^p t$ -positif,
- $j^*A$  et  $i^*A$  sont  ${}^p t$ -positifs.

DEMONSTRATION La première assertion implique la seconde par la proposition 2.2.62 et le lemme 2.2.77. Il s'agit de montrer que  $A$  est  ${}^p t$ -positif sachant que  $j^*A$  et  $i^*A$  le sont. Mais on a le triangle distingué de localité :

$$j_!j^*A \longrightarrow A \longrightarrow i_*i^*A \longrightarrow$$

Le résultat découle alors de la  ${}^p t$ -positivité de  $j_!$  et  $i_*$ .

C.Q.F.D

On est en mesure de démontrer :

**PROPOSITION 2.2.80** — On suppose que l'une des deux conditions ci-dessous est vérifiée :

- $S$  admet la résolution des singularité par éclatements et  $\mathbf{H}$  est semi-séparé,
- $S$  admet la résolution des singularité par altérations et  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.

Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme quasi-projectif. Notons  $d_f$  le maximum des dimensions des fibres de  $f$ . Si  $\mathcal{G}$  est faiblement  ${}^p t$ -pure, le foncteur  $f^*[d_f]$  est  ${}^p t$ -positif.

DEMONSTRATION On divisera la preuve en deux parties. La première est consacrée à un cas particulier.

*Étape 1* : Supposons donné un morphisme  $e : X' \longrightarrow X$  fini surjectif et totalement inséparable. Alors, l'équivalence  $e^*$  est  ${}^p t$ -exacte. En effet,  $e^*$  est un adjoint à droite et à gauche de son inverse. Il vient que  $e^*$  est un adjoint à droite de  $e_*$ . Comme  $e$  est fini,  $e_* \simeq e_!$ . Il vient que  $e^*$  est un adjoint à droite de  $e_!$ . Ceci fournit un isomorphisme  $e^* \simeq e^!$ . Le résultat recherché découle alors de 2.2.72.

*Étape 2* : On prouve la proposition 2.2.80 par récurrence sur la  $S$ -dimension du  $S$ -schéma  $Y$ . Soit  $U$  un ouvert dense de  $Y$ . On appelle  $Z$  le complémentaire de  $U$  et on considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & Z \\ & \searrow g & \downarrow f & \swarrow h & \\ & & X & & \end{array}$$

Par le corollaire 2.2.79, pour montrer que  $f^*[d_f]$  est  ${}^p t$ -positif, il suffirait de montrer que  $j^*f^*[d_f]$  et  $i^*f^*[d_f]$  le sont. L'hypothèse de récurrence assure la  ${}^p t$ -positivité de  $i^*f^*[d_f]$ . Il vient qu'on peut remplacer  $Y$  par n'importe quel ouvert dense de  $Y$ . En particulier, on peut supposer  $Y$  régulier. Quitte à prendre une composante connexe de  $Y$ , on peut le supposer irréductible.

Notons  $Z \subset X$  la clôture Zariski de l'image de  $f$ . On a alors la factorisation de  $f$  :

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{i} X$$

avec  $g$  dominant et  $i$  une immersion fermée. Étant donné que  $i^*$  est  ${}^p t$ -positif, on se ramène donc à traiter le morphisme  $g$ . En remarquant également que  $d_f = d_g$  on voit qu'on peut supposer  $f$  dominant. Quitte à remplacer  $Y$  par un ouvert dense plus petit, on peut supposer qu'il existe un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{e'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

avec  $f'$  lisse et  $e$  et  $e'$  des morphismes finis surjectifs totalement inséparables. Par la première étape, ceci nous ramène à traiter le 1-morphisme  $f'^*$ . On peut donc supposer  $f$  lisse. Ce cas a été traité dans le corollaire 2.2.65. C.Q.F.D

On déduit finalement :

**COROLLAIRE 2.2.81** — Gardons les hypothèses sur  $S$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathcal{G}$  de 2.2.80. Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme. Notons  $d_f$  le maximum des dimensions des fibres de  $f$ . Le foncteur  $f_*[-d_f]$  est  ${}^p t$ -négatif.

DEMONSTRATION En effet  $f_*[-d_f]$  est adjoint à droite de  $f^*[d_f]$ . Ce dernier est  ${}^p t$ -positif par 2.2.80.

C.Q.F.D

### 2.2.5 Retour aux $t$ -structures engendrées non perverses. Résumé des résultats

Dans cette section on complète et termine l'étude menée dans la sous-section 2.2.3 de la  $t$ -exactitude des 4 opérations. Bien qu'il s'agisse de résultats sur le  $t$ -structure non perverse, on utilisera d'une façon essentielle les résultats concernant la  $t$ -structure perverse établis dans la sous-section précédente. Les théorèmes de comparaisons du paragraphe suivant permettrons de déduire des résultats de  $t$ -exactitude à partir de résultats de  ${}^p t$ -exactitude.

#### Comparaison des $t$ -structures engendrées perverses et non perverses

On supposera les hypothèses 2.2.38 et 2.2.58 satisfaites. Étant donné un  $S$ -morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  on posera  $d_f$  le maximum des dimensions des fibres de  $f$ . Si  $X$  est un  $S$ -schéma on notera simplement  $d_X$  l'entier  $d_\pi$  où  $\pi$  est le morphisme structural de  $X$  vers  $S$ .

**THEOREME 2.2.82** — *On suppose que l'une des deux conditions ci-dessous est vérifiée :*

- $S$  admet la résolution des singularité par éclatements et  $\mathbf{H}$  est semi-séparé,
- $S$  admet la résolution des singularité par altérations et  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.

*Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. Lorsque  $\mathcal{G}$  est faiblement  ${}^p t$ -pure, on a l'inclusion  $\mathbf{H}_{\geq 0}(X) \subset {}^p \mathbf{H}_{\geq -d_X}(X)$ . En d'autres termes, si  $A$  est un objet  $t$ -positif de  $\mathbf{H}(X)$ , l'objet  $A[d_X]$  est  ${}^p t$ -positif.*

**DEMONSTRATION** Il suffira de montrer l'inclusion  $\mathcal{G}_\#(X) \subset {}^p \mathbf{H}_{\geq -d_X}(X)$ . On prend donc un objet  $g_\# A_Y(n)[n]$  avec  $g : Y \longrightarrow X$  lisse,  $A \in \mathcal{G}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . On supposera comme d'habitude  $n = 0$ .

Notons  $f$  la projection structurale de  $X$  sur  $S$ . On a un isomorphisme canonique  $g_\# A_Y \simeq g_! \mathrm{Th}(\Omega_g) A_Y$ . Comme  $g_!$  est  ${}^p t$ -positif, il suffira de montrer que  $\mathrm{Th}(\Omega_g) A_Y(n)[n]$  est dans  ${}^p \mathbf{H}_{\geq -d_X}(Y)$ . On peut supposer que les fibres de  $g$  sont de dimension constante  $d_g$ . Dans ce cas, l'équivalence  $\mathrm{Th}^{-1}(\Omega_g)[d_g]$  est  ${}^p t$ -exact. Il est équivalent donc de prouver que l'objet :

$$\mathrm{Th}^{-1}(\Omega_g) \mathrm{Th}(\Omega_g) A_Y[d_g] \simeq A_Y[d_g]$$

est dans  ${}^p \mathbf{H}_{\geq -d_X}(Y)$ , ou encore que l'objet  $A_Y[d_X + d_g]$  est dans  ${}^p \mathbf{H}_{\geq 0}(Y)$ .

Il est évident que  $d_Y \leq d_X + d_g$ . Mais, par la proposition 2.2.80, le foncteur  $(f \circ g)^*[d_Y]$  est  ${}^p t$ -positif. Il vient que  $(f \circ g)^* A[d_X + d_g] = A_Y[d_X + d_g]$  est bien  ${}^p t$ -positif. Ceci prouve le théorème. C.Q.F.D

Pour le théorème suivant, on aura besoin d'introduire une condition sur l'ensemble  $\mathcal{G}$  :

**DEFINITION 2.2.83** — *Nous dirons que l'ensemble  $\mathcal{G}$  est  $t$ -quasi-pure si pour toute immersion fermée de  $S$ -schémas :*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & S \end{array}$$

*avec  $Z$  et  $Y$  des schémas réguliers et connexes, la propriété suivante est vérifiée. Pour tout objet  $A \in \mathcal{G}$ , l'objet  $i^! g^* A[r]$  est  $t$ -positif où  $r$  est la codimension de  $Z$  dans  $Y$ .*

**LEMME 2.2.84** — *Si  $S$  est le spectre d'un corps parfait, l'ensemble  $\mathcal{G}$  est automatiquement  $t$ -quasi-pure.*

**DEMONSTRATION** Tout  $k$ -schéma régulier est lisse sur  $k$ . Il vient que l'immersion :

$$Z \xrightarrow{i} Y$$

est une immersion entre deux  $k$ -schémas lisses. Par l'isomorphisme de pureté on a  $i^! g^* \simeq \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) h^*$  et donc  $i^! g^* A[r] \simeq (\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})[r]) A_X$ . Mais  $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})[r]$  est  $t$ -exact pour  $r$  le rang de  $\mathcal{N}$ . C.Q.F.D

On utilisera la conséquence suivante de la  $t$ -quasi-pureté :

**LEMME 2.2.85** — *Supposons que le schéma  $S$  est régulier universellement caténaire de dimension de Krull finie  $s$ . Soit  $f : X \longrightarrow S$  un  $S$ -schéma quasi-projectif avec  $X$  régulier et connexe. Si  $\mathcal{G}$  est  $t$ -quasi-pure alors pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{G}$ , l'objet  $f^! A[-d_X + s]$  est  $t$ -positif.*

**DEMONSTRATION** On peut supposer que  $X$  est affine. Soit  $i : X \longrightarrow W$  une immersion fermée avec  $W$  un ouvert de  $\mathbb{A}_S^n$  pour  $n$  suffisamment grand. On notera  $p$  la projection de  $W$  sur  $S$ . Comme  $S$  est régulier, le schéma  $W$  est lui aussi régulier.

Notons  $c$  la codimension de  $X$  dans  $W$ . On a :  $c \leq n + s - d_X$ . En effet,  $c$  est plus petite que la codimension d'une fibre  $X_t$  pour  $t \in S$ . Il vient que :

$$c \leq \mathrm{codim}_W(X_t) = \mathrm{codim}_{W_t}(X_t) + \mathrm{codim}_S(t) \leq n - \dim(X_t) + s$$

Il suffit alors de prendre  $t \in S$  tel que  $X_t$  soit de dimension maximale.

Il vient par  $t$ -quasi-pureté que  $i^!p^*A[n + s - d_X]$  est  $t$ -positif. Mais on a les isomorphismes :

$$i^!p^*A[n + s - d_X] \simeq i^!\mathrm{Th}^{-1}(\Omega_p)p^!A[n + s - d_X] \simeq i^!p^!A(-n)[-2n][n + s - d_X] \simeq (f^!A(-n)[-n])[s - d_X]$$

Le résultat est maintenant clair.

C.Q.F.D

**THEOREME 2.2.86** — *On suppose que l'une des deux conditions ci-dessous est vérifiée :*

- $S$  est régulier, universellement caténaire et admet la résolution des singularité par éclatements,
- $S$  est régulier, universellement caténaire et admet la résolution des singularité par altérations et  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.

Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. Lorsque  $\mathcal{G}$  est  $t$ -quasi-pure, on a l'inclusion  ${}^p\mathbf{H}_{\geq s}(X) \subset \mathbf{H}_{\geq 0}(X)$ . En d'autres termes, si  $A$  est un objet  ${}^p t$ -positif de  $\mathbf{H}(X)$  alors  $A[s]$  est  $t$ -positif avec  $s$  la dimension de Krull de  $S$ .

**DEMONSTRATION** Par la proposition 2.2.69, il suffira d'établir l'inclusion  $\mathcal{G}_t^{\mathrm{reg}}(X) \subset \mathbf{H}_{\geq -s}(X)$ . Notons  $f$  le morphisme structural de  $X$ . On considère un objet  $g_!g^!f^!A(n)[n]$  avec  $g : Y \longrightarrow X$  un morphisme quasi-projectif avec  $Y$  régulier,  $A \in \mathcal{G}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . On montrera que  $g_!g^!f^!A(n)[n + s]$  est  $t$ -positif. On se ramène immédiatement au cas  $n = 0$ .

On a clairement  $d_Y \geq d_g$  avec égalité si par exemple  $g$  se factorise par l'inclusion d'un point fermé. Par la proposition 2.2.55, on sait que le foncteur  $g_![d_g]$  est  $t$ -positif. Il en est de même donc du foncteur  $g_![d_Y]$ . Ainsi pour montrer que  $g_!g^!f^!A[s]$  est  $t$ -positif, il suffira de montrer que  $((f \circ g)^!A)[-d_Y + s]$  est un objet  $t$ -positif de  $\mathbf{H}(Y)$ . Ceci a été établi dans le lemme précédent.

C.Q.F.D

### Les propriétés de $t$ -exactitude des opérations $f_*$ et $f^!$

Introduisons l'hypothèse suivante :

**HYPOTHÈSE 2.2.87** — **1-** Le 2-foncteur homotopique stable avec petites sommes  $\mathbf{H}$  est parfait pour les petites sommes. Si  $A$  est un objet de  $\mathcal{G}$  et  $f : X \longrightarrow S$  un  $S$ -morphisme quasi-projectif, les objets  $f_*A$  et  $f^!A$  sont compacts.

**2-** Le schéma  $S$  est régulier et universellement caténaire. On suppose en plus que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $S$  admet la résolution des singularités par éclatements et  $\mathbf{H}$  est semi-séparé,
- $S$  admet la résolution des singularités par altérations et  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.

**3-** L'ensemble  $\mathcal{G}$  est  $t$ -quasi-pure et faiblement  ${}^p t$ -pure.

**Remarque 2.2.88** — La seconde condition est satisfaite dans les deux cas particuliers suivants :

- $S$  le spectre d'un corps de caractéristique nulle,
- $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé et  $S$  le spectre d'un corps quelconque.

La troisième condition est automatique lorsque  $S$  est le spectre d'un corps parfait. La première condition est également satisfaites dans les bons cas.

Dans la suite du paragraphe, on supposera que l'hypothèse 2.2.87 est satisfaite.

**COROLLAIRE 2.2.89** — *Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme. Le foncteur  $f_*[d_Y + s]$  est  $t$ -positif. De même le foncteur  $f^![d_X + s]$  est  $t$ -positif.*

**DEMONSTRATION** En effet, soit  $A$  un objet  $t$ -positif de  $\mathbf{H}(Y)$ . On sait par le théorème 2.2.82 que  $A[d_Y]$  est un objet  ${}^p t$ -positif de  $\mathbf{H}(Y)$ . Comme le foncteur  $f_*$  est  ${}^p t$ -positif (par le corollaire 2.2.76), on déduit que  $f_*A[d_Y]$  est un objet  ${}^p t$ -positif de  $\mathbf{H}(X)$ . Il vient par le théorème 2.2.86 que  $f_*A[d_Y + s]$  est  $t$ -positif.

Pour le foncteur  $f^!$ , on procède de la même manière. Soit  $A$  un objet  $t$ -positif de  $\mathbf{H}(X)$ . On sait par le théorème 2.2.82 que  $A[d_X]$  est  ${}^p t$ -positif. Par le corollaire 2.2.72, le foncteur  $f^!$  est  ${}^p t$ -exact. Il vient que l'objet  $f^!A[d_X]$  est  ${}^p t$ -positif. Ainsi par le théorème 2.2.86,  $f^!A[d_X + s]$  est  $t$ -positif.

C.Q.F.D

On continue avec le résultat suivant :

**PROPOSITION 2.2.90** — *On suppose donnés des morphismes de  $S$ -schémas :*

$$U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} Y$$

avec  $i$  une immersion fermée et  $j$  l'immersion ouverte complémentaire. Notons  $d_U$  le maximum des dimensions des fibres de  $U \longrightarrow S$ . Le foncteur  $i^*j_*[d_U - 1 + s] : \mathbf{H}(U) \longrightarrow \mathbf{H}(Y)$  est  $t$ -positif.

**DEMONSTRATION** Rappelons que par la proposition 2.2.75, le foncteur  $i^*j_*[-1]$  est  ${}^p t$ -positif. Soit  $A$  un objet  $t$ -positif de  $\mathbf{H}(U)$ . On sait par le théorème 2.2.82 que  $A[d_U]$  est  ${}^p t$ -positif. Ceci montre que  $i^*j_*A[d_U - 1]$  est  ${}^p t$ -positif. Donc  $i^*j_*A[d_U - 1 + s]$  est  $t$ -positif par le théorème 2.2.86.

C.Q.F.D

Le corollaire suivant est une amélioration du corollaire 2.2.89 dans le cas d'une immersion ouverte.

**COROLLAIRE 2.2.91** — *On garde les hypothèses de la proposition 2.2.90. On suppose de plus que  $d_U + s \geq 1$ . Le foncteur  $j_*[d_U - 1 + s] : H(U) \longrightarrow H(X)$  est  $t$ -positif. En particulier si  $U$  est de dimension 1 et  $S$  de dimension nulle, ce foncteur est  $t$ -exact.*

DEMONSTRATION En effet, on a un 2-triangle distingué :

$$j_![d_U - 1 + s] \longrightarrow j_*[d_U - 1 + s] \longrightarrow i_*i^*j_*[d_U - 1 + s] \longrightarrow$$

Comme  $d_U - 1 + s \geq 0$ , le foncteur  $j_![d_U - 1 + s]$  est  $t$ -positif. Comme  $i_*$  est  $t$ -exact, on déduit de la proposition 2.2.90 que  $i_*i^*j_*[d_U - 1 + s]$  est  $t$ -positif. D'où le résultat. C.Q.F.D

**Résumé des résultats obtenus dans le cas où  $S$  est le spectre d'un corps parfait**

Dans ce paragraphe, on spécialise les résultats obtenus dans les sous-sections 2.2.3 et 2.2.4 ainsi qu'au début de la section 2.2.5 au cas où  $S$  est le spectre d'un corps parfait  $k$ . On introduit d'abord l'hypothèse suivante :

**HYPOTHÈSE 2.2.92** — **1-** Le 2-foncteur homotopique stable avec petites sommes  $H$  est parfait pour les petites sommes. Si  $A$  est un objet de  $\mathcal{G}$  et  $f : X \longrightarrow S$  un  $S$ -morphisme quasi-projectif, l'objet  $f^*A$  est compact.

**2-** On suppose en plus que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $k$  admet la résolution des singularités par éclatements et  $H$  est semi-séparé,
- $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.

On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.2.93** — *Lorsque  $S$  est le spectre d'un corps parfait  $k$ , les hypothèses 2.2.87 et 2.2.92 sont équivalentes.*

DEMONSTRATION L'hypothèse 2.2.87 contient toutes les conditions de l'hypothèse 2.2.92. Il s'agit en fait de déduire les conditions manquantes dans 2.2.92 de celles qu'on a gardées.

Par les lemmes 2.2.84 et 2.2.68, on sait que les propriétés de  $t$ -quasi-pureté et de  ${}^p t$ -pureté faible, sont automatiques lorsque la base est un corps parfait. De même, par le théorème de Jong, la résolution des singularités par altérations est disponible pour les corps.

Il reste à expliquer pourquoi la compacité des objets  $f^!A$  pour  $A \in \mathcal{G}$  découle de l'hypothèse 2.2.92. Pour cela, on pose  $\Lambda \subset H(k)$  la classe des objets de la forme  $A(n)$  avec  $A \in \mathcal{G}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Il est clair que  $\Lambda$  est stable par twist de Tate. Par la seconde condition de l'hypothèse 2.2.92, on dispose du théorème de constructibilité des quatre opérations pour les objets  $\Lambda$ -constructibles (voir le scholie 2.2.34). En particulier, les objets  $f^!A$  sont  $\Lambda$ -constructibles. D'autres part, pour un  $k$ -schéma  $X$ , la classe  $\Lambda(X)$  est formée d'objets compacts puisque les objets  $B_Y$  sont compacts pour  $B \in \mathcal{G}$  et  $Y$  quasi-projectif sur  $k$ . Il vient que les objets  $\Lambda$ -constructibles sont compacts. La proposition est prouvée. C.Q.F.D

Par la suite, on supposera que l'hypothèse 2.2.92 est satisfaite. Avant d'énoncer les scholies 2.2.95 et 2.2.96, notons le résultat intéressant suivant :

**COROLLAIRE 2.2.94** — *Soit  $l/k$  une extension finie. Les deux  $t$ -structures  $(H_{\geq 0}(l), H_{< 0}(l))$  et  $({}^p H_{\geq 0}(l), {}^p H_{< 0}(l))$  sur  $H(l)$  sont égales.*

DEMONSTRATION C'est une conséquence immédiate des théorèmes 2.2.82 et 2.2.86 puisque l'entier  $s$  est nul. C.Q.F.D

En ce qui concerne la  $t$ -structure engendrée non perverse  $(H_{\geq 0}, H_{< 0})$  on a :

**SCHOLIE 2.2.95** — *(Pour la  $t$ -structure  $(H_{\geq 0}, H_{< 0})$ ) Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un  $k$ -morphisme. On note  $d_X$  et  $d_Y$  les dimensions de  $X$  et  $Y$  respectivement. On notera également  $d_f$  le maximum des dimensions des fibres de  $f$ . On a :*

1. Pour le foncteur  $f^*$  :
  - $f^*$  est en  $t$ -positif sans conditions sur  $f$ ,
  - $f^*$  est  $t$ -exact lorsque  $f$  est lisse.
2. Pour le foncteur  $f_*$  :
  - $f_*$  est  $t$ -négatif sans conditions sur  $f$ ,
  - $f_*[d_Y]$  est  $t$ -positif sans conditions sur  $f$ ,
  - $f_*[d_f]$  est  $t$ -positif lorsque  $f$  est projectif.
3. Pour le foncteur  $f_!$  :
  - $f_![d_f]$  est  $t$ -positif sans conditions sur  $f$ ,
  - $f_!$  est  $t$ -négatif lorsque  $f$  est projectif.



- 4. Pour le foncteur  $f^!$  :
  - $f^![-d_f]$  est  $t$ -négatif sans conditions sur  $f$ ,
  - $f^![d_X]$  est  $t$ -positif sans conditions sur  $f$ ,
  - $f^![-d_f]$  est  $t$ -exact lorsque  $f$  est lisse de fibres partout de dimension  $d_f$ .

Enfin, si  $j : U \longrightarrow X$  est une immersion ouverte avec  $U$  de dimension  $d_U$  non nulle, le foncteur  $j_*[d_U - 1]$  est  $t$ -positif.

En ce qui concerne la  $t$ -structure engendrée perverse  $({}^p\mathbf{H}_{\geq 0}, {}^p\mathbf{H}_{< 0})$  on a :

**SCHOLIE 2.2.96** — (Pour la  $t$ -structure  $({}^p\mathbf{H}_{\geq 0}, {}^p\mathbf{H}_{< 0})$ ) Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un  $k$ -morphisme. On note  $d_f$  le maximum des dimensions des fibres de  $f$ . On a :

1. Pour le foncteur  $f^*$  :
  - $f^*[d_f]$  est  ${}^p t$ -positif sans conditions sur  $f$ ,
  - $f^*[d_f]$  est  ${}^p t$ -exact lorsque  $f$  est lisse.
2. Pour le foncteur  $f_*$  :
  - $f_*$  est  ${}^p t$ -positif sans conditions sur  $f$ ,
  - $f_*[-d_f]$  est  ${}^p t$ -négatif sans conditions sur  $f$ .
3. Pour le foncteur  $f_!$  :
  - $f_!$  est  ${}^p t$ -positif sans conditions sur  $f$ ,
  - $f_![-d_f]$  est  ${}^p t$ -négatif lorsque  $f$  est projectif.
4. Le foncteur  $f^!$  est  ${}^p t$ -exact sans conditions sur  $f$ .

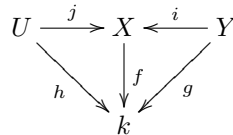
**Remarque 2.2.97** — Dans les deux scholies 2.2.95 et 2.2.96, on remarque que les foncteurs  $f_*$  et  $f^!$  sont de  $t$ -dimension bornée sans conditions sur  $f$ . Par contre pour le foncteur  $f_!$  (resp.  $f^*$ ) on donne uniquement des bornes supérieures sauf dans le cas  $f$  projectif (resp. lisse). On pourra donc penser que la liste de propriétés obtenues est incomplète. Malheureusement, ceci semble faux même dans des cas très simples. En effet, soit  $j$  (resp.  $i$ ) l’immersion d’un ouvert non vide et strict (resp. l’immersion d’un point fermé) dans une courbe lisse. Il y a des bonnes raisons de croire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les foncteurs  $j_![-n]$  et  $i^*[-n]$  ne sont ni  $t$ -négatifs ni  ${}^p t$ -négatifs.

**Deux compléments**

Dans ce numéro, on démontre deux résultats concernant la  $t$ -exactitude des foncteurs  $f^*$  et  $f_!f^*$  dans le cas où  $f$  est le morphisme structural d’un  $k$ -schéma non forcément lisse ou projectif.

**PROPOSITION 2.2.98** — Soit  $k$  un corps parfait admettant la résolution des singularités. Soit  $f : X \longrightarrow k$  un  $k$ -schéma de type fini. Le foncteur  $f^* : \mathbf{H}(k) \longrightarrow \mathbf{H}(X)$  est  $t$ -exact.

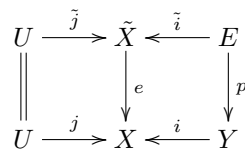
DEMONSTRATION On sait que  $f^*$  est  $t$ -positif. Il s’agit de prouver qu’il est  $t$ -négatif. C’est effectivement le cas pour  $f$  lisse. Pour le cas général, on procède par récurrence sur la dimension de  $X$ . On fixe un objet  $t$ -négatif  $N$  de  $\mathbf{H}(k)$ . Soit  $U$  un ouvert régulier partout dense dans  $X$ . On forme le diagramme de  $k$ -schémas :



où  $Y$  est le fermé  $X - U$ . On a le 2-triangle de localité :

$$j_!j^*f^* = j_!h^* \longrightarrow f^* \longrightarrow i_*i^*f^* = i_*g^* \longrightarrow$$

Ainsi pour démontrer que  $f^*N$  est  $t$ -négatif, il suffira (en vue de la  $t$ -exactitude de  $i_*$ ) de prouver que  $g^*N$  et  $j_!h^*N$  sont  $t$ -négatifs. L’hypothèse de récurrence nous dit que  $g^*N$  est  $t$ -négatif. Il nous reste à traiter l’objet  $j_!h^*$ . Soit  $e : \tilde{X} \longrightarrow X$  un éclatement disjoint de  $U$  avec  $\tilde{X}$  régulier. On forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens :



On a la chaîne de 2-isomorphismes :

$$e_* \tilde{j}_! \tilde{j}^* e^* \simeq e_! \tilde{j}_! \tilde{j}^* e^* \simeq j_! \text{id}_{U_!} \tilde{j}^* e^* \simeq j_! j^*$$

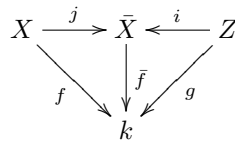
Il vient que  $j_! j^* f^* N$  est isomorphe à  $e_* \tilde{j}_! \tilde{j}^* e^* f^* N$ . Comme  $e_*$  est  $t$ -négatif, on se ramène à montrer que  $\tilde{j}_! \tilde{j}^* e^* f^* N$  est  $t$ -négatif. On utilise alors le 2-triangle de localité :

$$\tilde{j}_! \tilde{j}^* e^* f^* \longrightarrow e^* f^* \longrightarrow \tilde{i}_* \tilde{i}^* e^* f^* \longrightarrow$$

Comme  $\tilde{X}$  est lisse sur  $k$ , on voit que  $e^* f^*$  est  $t$ -exact. D'autre part, comme  $E$  est de dimension plus petite de  $X$ , l'hypothèse de récurrence assure que  $\tilde{i}^* e^* f^*$  est  $t$ -négatif. Le résultat découle alors du fait que  $H_{\leq 0}$  est cosuspendue. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.2.99** — *Sous les conditions de la proposition 2.2.98, le foncteur  $f_! f^*$  est  $t$ -négatif.*

DEMONSTRATION On choisit une compactification :



On obtient alors le triangle distingué :

$$f_! f^* = \bar{f}_! j_! j^* \bar{f}^* \longrightarrow \bar{f}_! f^* \longrightarrow g_! g^* = \bar{f}_! i_* i^* \bar{f}^* \longrightarrow$$

Les foncteurs  $\bar{f}^*$  et  $g^*$  sont  $t$ -négatifs. De même, puisque  $\bar{f}$  et  $g$  sont projectifs, les foncteurs  $\bar{f}_!$  et  $g_!$  sont  $t$ -négatifs. Il vient que le deuxième et troisième sommet de ce 2-triangle sont  $t$ -négatifs. D'où le résultat. C.Q.F.D

### 2.3 Les 2-foncteurs monoïdaux homotopiques stables

Soit  $S$  un schéma noethérien admettant une famille ample de fibrés en droites. Dans cette section, on étudie des 2-foncteurs homotopiques stables  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$  munis d'un produit tensoriel  $\otimes_X$  sur  $H(X)$  pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$ . On commencera notre étude par une liste de diagrammes commutatifs déduite de la théorie générale développée dans la sous-section 2.1.4. Chemin prenant, on mettra en évidence quelques modules et projecteurs. Les modules les plus importants sont les  $[f^*, f^!]$  pour  $f$  un morphisme entre  $S$ -schémas quasi-projectifs. Un des résultats principaux sera la construction de ces modules, ou plutôt leur indépendance de certains choix. On obtiendra même un 2-foncteur  $[H^*, H^!] : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{M}\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ . On supposera ensuite que nos catégories monoïdales sont fermées, et on traduit les formules de la sous-section 2.1.5 en termes des quatre opérations. Des compatibilités avec les isomorphismes d'échanges sont également établies.

#### 2.3.1 Définitions et premières propriétés

Notons  $\mathfrak{M}\mathfrak{o}\mathfrak{n}\mathfrak{o}\mathfrak{T}\mathfrak{R}$  (resp.  $\mathfrak{u}\mathfrak{M}\mathfrak{o}\mathfrak{n}\mathfrak{o}\mathfrak{T}\mathfrak{R}$ ) la 2-catégorie des catégories monoïdales (resp. monoïdales unitaires) triangulées. Les 1-morphismes de  $\mathfrak{M}\mathfrak{o}\mathfrak{n}\mathfrak{o}\mathfrak{T}\mathfrak{R}$  (resp.  $\mathfrak{u}\mathfrak{M}\mathfrak{o}\mathfrak{n}\mathfrak{o}\mathfrak{T}\mathfrak{R}$ ) sont les foncteurs monoïdaux (resp. monoïdaux unitaires) et triangulés commutant aux isomorphismes  $s_g$  et  $s_d$  (voir la définition 2.1.148). Les transformations naturelles, sont les transformations naturelles des foncteurs monoïdaux (resp. monoïdaux et unitaires) qui sont également des transformations naturelles de foncteurs triangulés.

**DEFINITION 2.3.1** — *1- Un 2-foncteur monoïdal (resp. monoïdal unitaire) triangulé est un 2-foncteur :*

$$(H, \otimes) : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{M}\mathfrak{o}\mathfrak{n}\mathfrak{o}\mathfrak{T}\mathfrak{R} \quad (\text{resp. } (H, \otimes, \mathbb{1}) : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{u}\mathfrak{M}\mathfrak{o}\mathfrak{n}\mathfrak{o}\mathfrak{T}\mathfrak{R})$$

qui à un  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$  associe une catégorie monoïdale (resp. monoïdale unitaire) triangulée  $(H(X), \otimes_X)$  (resp.  $(H(X), \otimes_X, \mathbb{1}_X)$ ) et à un  $S$ -morphisme  $f : Y \longrightarrow X$  associe un foncteur monoïdal (resp. monoïdal unitaire) triangulé  $f^*$ .

2- Un 2-foncteur monoïdal triangulé  $(H, \otimes)$  est dit un 2-foncteur monoïdal homotopique stable si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- Lorsqu'on compose à droite par le 2-foncteur (strict) d'oubli :  $\mathfrak{M}\mathfrak{o}\mathfrak{n}\mathfrak{o}\mathfrak{T}\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$  (resp.  $\mathfrak{u}\mathfrak{M}\mathfrak{o}\mathfrak{n}\mathfrak{o}\mathfrak{T}\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ ) on obtient un 2-foncteur homotopique stable.

– (Formule de projection) Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme lisse. Les deux morphismes (voir la proposition 2.1.97) :

$$p_g : f_{\#}(f^*(A) \otimes_Y B') \longrightarrow A \otimes_X f_{\#}(B') \quad \text{et} \quad p_d : f_{\#}(A' \otimes_Y f^*(B)) \longrightarrow f_{\#}(A') \otimes_X B$$

naturels en  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$  et  $(A', B') \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2$  sont inversibles.

3- On obtient la notion de 2-foncteur monoïdal symétrique (resp. monoïdal symétrique unitaire) homotopique stable en faisant les changements évidents.

**Remarque 2.3.2** — Étant donné un 2-foncteur monoïdal homotopique stable  $(\mathbf{H}, \otimes)$  on obtient un autre en remplaçant les catégories monoïdales  $(\mathbf{H}(X), \otimes_X)$  par les catégories  $\otimes$ -opposées  $(\mathbf{H}(X), \otimes_X^\circ)$ . Ce 2-foncteur monoïdal homotopique stable est appelé le  $\otimes$ -opposé de  $(\mathbf{H}, \otimes)$ . Le passage à  $(\mathbf{H}, \otimes^\circ)$  permettra de déduire des résultats par dualité.

Par la suite, on se donne un 2-foncteur monoïdal homotopique stable  $(\mathbf{H}, \otimes)$ . On commence par des résultats de cohérence qu'on déduit directement de la définition 2.3.1. Pour un morphisme lisse  $f$  entre  $S$ -schémas quasi-projectifs, les morphismes  $p_g$  et  $p_d$  sont les morphismes structuraux du projecteur  $[f^*, f_{\#}]$  obtenu via l'adjonction  $(f_{\#}, f^*)$  à partir du module tautologique  $[f^*, f^*]$  (voir la proposition 2.1.97). On a :

**LEMME 2.3.3** — Les isomorphismes de connexion des 2-foncteurs  $\mathbf{H}^*$  et  ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_{\#}$  induisent un 2-foncteur :

$$[{}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^*, {}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_{\#}] : (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{P}roj$$

DEMONSTRATION Ceci se démontre facilement en partant du 2-foncteur  $[\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_{\#}] : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{M}od$ . C.Q.F.D

**Remarque 2.3.4** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme lisse de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le fait que les  $p_g$  et  $p_d$  définissent un projecteur bilatère  $[f^*, f_{\#}]$  se traduit par les trois diagrammes commutatifs ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} f_{\#}(f^*A \otimes_Y (f^*B \otimes_Y C')) & \xrightarrow{p_g} & A \otimes_X f_{\#}(f^*B \otimes_Y C') & \xrightarrow{p_g} & A \otimes_X (B \otimes_X f_{\#}C') \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ f_{\#}((f^*A \otimes_Y f^*B) \otimes_Y C') & \xrightarrow{\sim} & f_{\#}(f^*(A \otimes_X B) \otimes_Y C') & \xrightarrow{p_g} & (A \otimes_X B) \otimes_X f_{\#}C' \\ f_{\#}((A' \otimes_Y f^*B) \otimes_Y f^*C) & \xrightarrow{p_d} & f_{\#}(A' \otimes_Y f^*B) \otimes_X C & \xrightarrow{p_d} & (f_{\#}A' \otimes_X B) \otimes_X C \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ f_{\#}(A' \otimes_Y (f^*B \otimes_Y f^*C)) & \xrightarrow{\sim} & f_{\#}(A' \otimes_Y f^*(B \otimes_X C)) & \xrightarrow{p_d} & f_{\#}A' \otimes_X (B \otimes_X C) \\ f_{\#}(f^*A \otimes_Y (B' \otimes_Y f^*C)) & \xrightarrow{p_g} & A \otimes_X f_{\#}(B' \otimes_Y f^*C) & \xrightarrow{p_d} & A \otimes_X (f_{\#}B' \otimes_X C) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ f_{\#}((f^*A \otimes_Y B') \otimes_Y f^*C) & \xrightarrow{p_d} & f_{\#}(f^*A \otimes_Y B') \otimes_X C & \xrightarrow{p_g} & (A \otimes_X f_{\#}B') \otimes_X C \end{array}$$

avec  $(A, B, C, A', B', C') \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^3 \times \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^3$ .

**LEMME 2.3.5** — Soit un carré cartésien de  $S$ -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

avec  $f$  (et donc  $f'$ ) lisse. Pour  $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2 \times \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2$ , les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} f'_{\#}((f \circ g')^*A \otimes_{Y'} g'^*B') & \xrightarrow{c^*} & f'_{\#}(g'^*f^*A \otimes_{Y'} g'^*B') & \xrightarrow{\sim} & f'_{\#}g'^*(f^*A \otimes_Y B') \\ c^* \downarrow & & & & \downarrow Ex_{\#}^* \\ f'_{\#}(f'^*g^*A \otimes_{Y'} g'^*B') & & & & g^*f_{\#}(f^*A \otimes_Y B') \\ p_g \downarrow & & & & \downarrow p_g \\ g^*A \otimes_{X'} f'_{\#}g'^*B' & \xrightarrow{Ex_{\#}^*} & g^*A \otimes_{X'} g^*f_{\#}B' & \xrightarrow{\sim} & g^*(A \otimes_X f_{\#}B') \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 f'_{\#}(g'^*A' \otimes_{Y'} (f \circ g')^*B) & \xrightarrow{c^*} & f'_{\#}(g'^*A' \otimes_{Y'} g'^*f^*B) & \xrightarrow{\sim} & f'_{\#}g'^*(A' \otimes_Y f^*B) \\
 \downarrow c^* & & & & \downarrow Ex_{\#}^* \\
 f'_{\#}(g'^*A' \otimes_{Y'} f'^*g^*B) & & & & g^*f_{\#}(A' \otimes_Y f^*B) \\
 \downarrow p_d & & & & \downarrow p_d \\
 f'_{\#}g'^*A' \otimes_{X'} g^*B & \xrightarrow{Ex_{\#}^*} & g^*f_{\#}A' \otimes_{X'} g^*B & \xrightarrow{\sim} & g^*(f_{\#}A' \otimes_X B)
 \end{array}$$

sont commutatifs.

DEMONSTRATION Le second diagramme s'obtient du premier en remplaçant  $\otimes$  par  $\otimes^\circ$ ,  $A$  par  $B$  et  $B'$  par  $A'$ . Pour montrer que le premier diagramme est commutatif, on applique le lemme 2.1.105 à la face carrée de  $\mathfrak{Mod}_g$  :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbf{H}(Y'), \otimes_{Y'}) & \xleftarrow{[g'^*, g'^*]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\
 \uparrow [f'^*, f'^*] & \swarrow \llcorner Ex_{*,*} & \uparrow [f^*, f^*] \\
 (\mathbf{H}(X'), \otimes_{X'}) & \xleftarrow{[g^*, g^*]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_X)
 \end{array}$$

formée des quatre modules tautologiques sur  $f^*$ ,  $g^*$ ,  $f'^*$  et  $g'^*$ . Dans le diagramme commutatif obtenu, on remplace l'isomorphisme d'échange  $Ex_{*,*}$  par la composée de deux isomorphismes de connexion du type  $c^*$ . On obtient de cette façon le diagramme de l'énoncé. C.Q.F.D

Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme entre  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme  $f^*$  étant monoïdal, il admet un adjoint à droite  $f_*$  pseudo-monoïdal par le corollaire 2.1.91. Si en plus  $\mathbf{H}$  est unitaire, le 1-morphisme  $f_*$  est naturellement pseudo-unitaire. On a même un 2-foncteur :

$$H_* : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathbf{pMod}_g$$

adjoint à droite global de la composée  $\text{Sch}/S \longrightarrow \mathbf{Mod}_g \subset \mathbf{pMod}_g$  par la proposition 1.1.17.

**LEMME 2.3.6** — Soient  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion fermée de  $S$ -schémas quasi-projectifs et  $A$  et  $B$  des objets de  $\mathbf{H}(Z)$ . L'accouplement :

$$i_*A \otimes_Y i_*B \longrightarrow i_*(A \otimes_Z B)$$

est inversible.

DEMONSTRATION Appelons  $j$  l'immersion ouverte complémentaire de  $i$ . On a  $j^*(i_*A \otimes_Y i_*B) \simeq (j^*i_*A) \otimes_{Y-Z} (j^*i_*B) = 0$ . Il vient par le triangle de localité que le morphisme d'unité :

$$i_*A \otimes_Y i_*B \longrightarrow i_*i^*(i_*A \otimes_Y i_*B)$$

est inversible. Or, l'accouplement du foncteur pseudo-monoïdal  $i_*$  est donné par la composition :

$$i_*A \otimes_Y i_*B \xrightarrow{\sim} i_*i^*(i_*A \otimes_Y i_*B) \longrightarrow i_*(i^*i_*A \otimes_Z i^*i_*B) \longrightarrow i_*(A \otimes_Z B)$$

La seconde flèche est un isomorphisme puisque  $i^*$  est monoïdal. La troisième est également inversible puisque la couinté de l'adjonction  $(i^*, i_*)$  est inversible. Le lemme est prouvé. C.Q.F.D

**Remarque 2.3.7** — Sous les conditions du lemme précédent, le foncteur  $i_*$  est un foncteur monoïdal. On fera attention que, dans le cas où  $\mathbf{H}$  est unitaire, le foncteur  $i_*$  n'est pas unitaire mais seulement pseudo-unitaire.

La discussion précédente peut-être rendue plus précise. En effet, si  $f : Y \longrightarrow X$  est un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs, le foncteur  $f^*$  est un foncteur comonoïdal lorsqu'il est muni du coaccouplement inverse de l'accouplement de  $f$ . Par la proposition 2.1.98, l'adjoint à droite  $f_*$  est naturellement un  $f^*$ -coprojecteur bilatère. On notera pour  $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2 \times \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2$  :

$$q_g : A \otimes_X f_*B' \longrightarrow f_*(f^*A \otimes_Y B') \quad \text{et} \quad g_d : f_*A' \otimes_X B \longrightarrow f_*(A' \otimes_Y f^*B)$$

les morphismes structuraux du coprojecteur  $[f^*, f_*]$ .

**LEMME 2.3.8** — Les isomorphismes de connexion des 2-foncteurs  $H^*$  et  $H_*$  induisent un 2-foncteur :

$$[H^*, H_*] : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{c}\mathfrak{B}\mathfrak{r}\mathfrak{o}\mathfrak{j}$$

**Remarque 2.3.9** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. On a les trois diagrammes commutatifs ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes_X (B \otimes_X f_* C') & \xrightarrow{q_g} & A \otimes_X f_*(f^* B \otimes_Y C') & \xrightarrow{q_g} & f_*(f^* A \otimes_Y (f^* B \otimes_Y C')) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ (A \otimes_X B) \otimes_X f_* C' & \xrightarrow{q_g} & f_*(f^*(A \otimes_X B) \otimes_Y C') & \xrightarrow{\sim} & f_*((f^* A \otimes_Y f^* B) \otimes_Y C') \\ \\ f_* A' \otimes_X B \otimes_X C & \xrightarrow{q_d} & f_*(A' \otimes_Y f^* B) \otimes_X C & \xrightarrow{q_d} & f_*((A' \otimes_Y f^* B) \otimes_Y f^* C) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ f_* A' \otimes_X (B \otimes C) & \xrightarrow{q_d} & f_*(A' \otimes_Y f^*(B \otimes_X C)) & \xrightarrow{\sim} & f_*(A' \otimes_Y (f^* B \otimes_Y f^* C)) \\ \\ A \otimes_X (f_* B' \otimes_X C) & \xrightarrow{q_d} & A \otimes_X f_*(B' \otimes_Y f^* C) & \xrightarrow{q_g} & f_*(f^* A \otimes_Y (B' \otimes_Y f^* C)) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ (A \otimes_X f_* B') \otimes_X C & \xrightarrow{q_g} & f_*(f^* A \otimes_Y B') \otimes_X C & \xrightarrow{q_d} & f_*((f^* A \otimes_Y B') \otimes_Y f^* C) \end{array}$$

avec  $(A, B, C, A', B', C') \in \text{Ob}(H(X))^3 \times \text{Ob}(H(Y))^3$ .

On peut également préciser le lemme 2.3.6 en :

**LEMME 2.3.10** — Soit  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion fermée de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Les morphismes structuraux de  $i^*$ -coprojecteur bilatère  $i_*$  :

$$q_g : A \otimes_Y i_* B' \longrightarrow i_*(i^* A \otimes_Z B') \quad \text{et} \quad q_d : i_* A' \otimes_Y B \longrightarrow i_*(A' \otimes_Z i^* B)$$

sont des isomorphismes pour tout  $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(H(Y))^2 \times \text{Ob}(H(Z))^2$ .

DEMONSTRATION Par définition, les morphismes  $q_g$  et  $q_d$  sont donnés par les composées suivantes :

$$\begin{array}{l} A \otimes_Y i_* B' \longrightarrow i_* i^*(A \otimes_Y i_* B') \longrightarrow i_*(i^* A \otimes_Z i^* i_* B') \longrightarrow i_*(i^* A \otimes_Z B') \\ i_* A' \otimes_Y B \longrightarrow i_* i^*(i_* A' \otimes_Y B) \longrightarrow i_*(i^* i_* A' \otimes_Z i^* B) \longrightarrow i_*(A' \otimes_Z i^* B) \end{array}$$

Dans ces deux composées, les deuxièmes et troisièmes flèches sont inversibles. Il suffit donc de prouver que les deux morphismes d'unités :

$$A \otimes_Y i_* B' \longrightarrow i_* i^*(A \otimes_Y i_* B') \quad \text{et} \quad i_* A' \otimes_Y B \longrightarrow i_* i^*(i_* A' \otimes_Y B)$$

sont inversibles. En utilisant le triangle de localité, ceci revient à dire que les objets  $j^*(A \otimes_Y i_* B')$  et  $j^*(i_* A' \otimes_Y B)$  sont nuls lorsque  $j$  est l'immersion ouverte complémentaire à  $i$ . Par monoïdalité, on a :

$$j^*(A \otimes_Y i_* B') = j^* A \otimes_{Y-Z} j^* i_* B' = j^* A \otimes 0 = 0 \quad \text{et} \quad j^*(i_* A' \otimes_Y B) = j^* i_* A' \otimes_{Y-Z} j^* B = 0 \otimes j^* B = 0$$

D'où le lemme. C.Q.F.D

### 2.3.2 Le module $[i^*, i^!]$ pour une immersion fermée $i$

Pour  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion fermée de  $S$ -schémas quasi-projectifs, on a vu que les morphismes structuraux du  $i^*$ -coprojecteur  $i_*$  sont des isomorphismes. On peut donc définir un projecteur  $[i^*, i_*]$  en inversant les morphismes  $q_g$  et  $q_d$  :

$$q_g^{-1} : i_*(i^* A \otimes_Z B') \longrightarrow A \otimes_Y i_* B' \quad \text{et} \quad q_d^{-1} : i_*(A' \otimes_Z i^* B) \longrightarrow i_* A' \otimes_Y B$$

Le résultat suivant s'obtient immédiatement à partir du lemme 2.3.8 :

**LEMME 2.3.11** — *Les morphismes de connexion des 2-foncteurs  $H^*$  et  $H_*$  induisent un 2-foncteur :*

$$[\text{Imm}H^*, \text{Imm}H_*] : (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{Froj}$$

Soit  $i : Z \longrightarrow Y$  une immersion fermée entre  $S$ -schémas quasi-projectifs. On sait par la proposition 1.4.9 que le foncteur  $i_*$  admet un adjoint à droite  $i^!$ . Ainsi le  $i^*$ -projecteur bilatère  $i_*$  induit une structure de  $i^*$ -module bilatère sur  $i^!$ . On a ainsi des morphismes :

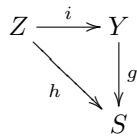
$$r_g : i^*A \otimes_Z i^!B \longrightarrow i^!(A \otimes_Y B) \quad \text{et} \quad r_d : i^!A \otimes i^*B \longrightarrow i^!(A \otimes B)$$

naturels en  $(A, B) \in \text{Ob}(H(Y))^2$ . On obtient immédiatement :

**LEMME 2.3.12** — *Les isomorphismes de connexion de  $H^*$  et  $\text{Imm}H^!$  induisent un 2-foncteur :*

$$[\text{Imm}H^*, \text{Imm}H^!] : (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{Mod}$$

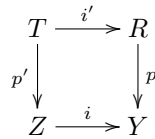
**Remarque 2.3.13** — Le morphisme  $i^*A \otimes_Z i^!B \longrightarrow i^!(A \otimes_Y B)$  n'est pas inversible en général. Supposons pour simplifier que  $i$  est une immersion fermée entre deux  $S$ -schémas lisses :



Fixons un objet  $E$  de  $H(S)$  et posons  $A = i_*h^*E$  et  $B = g^*E$ . On a  $i^*A \otimes i^!B = h^*E \otimes \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_i)h^*E$ . D'autre part,  $i^!(A \otimes B) = i^!(i_*h^*E \otimes g^*E) = i^!(i_*(h^*E \otimes i^*g^*E)) = h^*(E \otimes E)$ . En général, les deux objets  $h^*E \otimes \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_i)h^*E$  et  $h^*(E \otimes E)$  sont non-isomorphes.

On continue avec quelques diagrammes commutatifs de compatibilité avec les 2-morphismes d'échanges :

**LEMME 2.3.14** — *Soit un carré cartésien de  $S$ -schémas quasi-projectifs :*



avec  $i$  une immersion fermée. Pour  $(A, B) \in \text{Ob}(H(Y))^2$ , le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} p'^*i^*A \otimes_T p'^*i^!B & \longrightarrow & p'^*(i^*A \otimes_Y i^!B) & \longrightarrow & p'^*i^!(A \otimes_X B) \\ \downarrow Ex^{*,*} \otimes Ex^{!,*} & & & & \downarrow Ex^{!,*} \\ i'^*p^*A \otimes_T i'^!p^*B & \longrightarrow & i'^!(p^*A \otimes_R p^*B) & \longrightarrow & i'^!p^*(A \otimes_X B) \end{array}$$

ainsi que son  $\otimes$ -dual sont commutatifs. En d'autres termes, les morphismes d'échanges  $Ex^{*,*}$  et  $Ex^{!,*}$  induisent une face carrée dans la 2-catégorie des bimodules  $\mathfrak{Mod}$  :

$$\begin{array}{ccc} (H(T), \otimes_T) & \xleftarrow{[i'^*, i'^!]} & (H(R), \otimes_R) \\ [p'^*, p'^*] \uparrow & \begin{array}{c} \cong \\ [Ex^{*,*}, Ex^{!,*}] \end{array} & \uparrow [p^*, p^*] \\ (H(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^!]} & (H(Y), \otimes_Y) \end{array}$$

**DEMONSTRATION** On part de la face carrée de  $\mathfrak{Mod}$  :

$$\begin{array}{ccc} (H(T), \otimes_T) & \xleftarrow{[i'^*, i'^*]} & (H(R), \otimes_R) \\ [p'^*, p'^*] \uparrow & \begin{array}{c} \cong \\ [Ex^{*,*}, Ex^{*,*}] \end{array} & \uparrow [p^*, p^*] \\ (H(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^*]} & (H(Y), \otimes_Y) \end{array}$$

formée des comodules tautologiques sur les foncteurs comonoïdaux  $f^*$ ,  $i^*$ ,  $f'^*$  et  $i'^*$ . Par la version duale du lemme 2.1.105, appliquée aux adjoints à droite  $i_*$  et  $i'_*$  de  $i^*$  et  $i'^*$  respectivement, on obtient le diagramme commutatif de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccccc} p^*(A \otimes_Y i_* B') & \xrightarrow{\sim} & p^* i_*(i^* A \otimes_Z B') & \xrightarrow{\sim} & i'_* p'^*(i^* A \otimes_Z B') & \xrightarrow{\sim} & i'^*(p'^* i^* A \otimes_T p'^* B') \\ \parallel & & & & & & \uparrow \sim \\ p^*(A \otimes_Y i_* B') & \xrightarrow{\sim} & p^* A \otimes_R p^* i_* B' & \xrightarrow{\sim} & p^* A \otimes_R i'_* p'^* B' & \xrightarrow{\sim} & i'_*(i'^* p^* A \otimes_T p'^* B') \end{array}$$

Pour tout  $(A, B') \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y)) \otimes \text{Ob}(\mathbf{H}(Z))$ . Ainsi, en inversant toutes les flèches, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} i'^*(p'^* i^* A \otimes_T p'^* B') & \xrightarrow{\sim} & i'_* p'^*(i^* A \otimes_Z B') & \xrightarrow{\sim} & p^* i_*(i^* A \otimes_Z B') & \xrightarrow{\sim} & p^*(A \otimes_Y i_* B') \\ \downarrow \sim & & & & & & \parallel \\ i'_*(i'^* p^* A \otimes_T p'^* B') & \xrightarrow{\sim} & p^* A \otimes_R i'_* p'^* B' & \xrightarrow{\sim} & p^* A \otimes_R p^* i_* B' & \xrightarrow{\sim} & p^*(A \otimes_Y i_* B') \end{array}$$

On obtient le résultat recherché en appliquant la seconde partie du même lemme 2.1.105 (version modules) aux adjoints à droite  $i^!$  et  $i'^!$  de  $i_*$  et  $i'_*$  respectivement. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.3.15** — *Soit un carré cartésien de  $S$ -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{i'} & R \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

avec  $p$  lisse et  $i$  une immersion fermée. Pour  $A \in \mathbf{H}(Y)$  et  $B' \in \mathbf{H}(T)$ , le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} p_{\#} i'_*(p'^* i^* A \otimes_T B') & \xrightarrow{Ex_{*,\#}} & i_* p'_{\#}(p'^* i^* A \otimes_T B') & \xrightarrow{\sim} & i_*(i^* A \otimes_Z p'_{\#} B') & \xrightarrow{\sim} & A \otimes_Y i_* p'_{\#} B' \\ \downarrow Ex^{*,*} & & & & & & \parallel \\ p_{\#} i'_*(i'^* p^* A \otimes_T B') & \xrightarrow{\sim} & p_{\#}(p^* A \otimes_R i'_* B') & \xrightarrow{\sim} & A \otimes_Y p_{\#} i'_* B' & \xrightarrow{Ex_{*,\#}} & A \otimes_Y i_* p'_{\#} B' \end{array}$$

est commutatif. En d'autres termes, les 2-morphismes  $Ex^{*,*}$  et  $Ex_{*,\#}$  définissent une face dans la 2-catégorie  $\mathfrak{P}roj$  :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(T), \otimes_T) & \xrightarrow{[i'^*, i'_*]} & (\mathbf{H}(R), \otimes_R) \\ \downarrow [p'^*, p'_{\#}] & \swarrow [Ex^{*,*}, Ex_{*,\#}] & \downarrow [p^*, p_{\#}] \\ (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xrightarrow{[i^*, i_*]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \end{array}$$

**DEMONSTRATION** Par le lemme 2.3.14, les morphismes de connexions  $Ex^{*,*}$  et  $Ex_{*,\#}$  induisent une face de la 2-catégorie  $\mathfrak{Mod}$ . Le résultat découle de la functorialité de la construction 2.1.97, et du fait que le transformé du 2-morphisme  $Ex^{!,*}$  par les adjonctions  $(i_* p'_{\#}, p'^* i^!)$  et  $(p_{\#} i'_*, i'^! p^*)$  est le 2-morphisme d'échange  $Ex_{*,\#}$ . C.Q.F.D

On continue avec :

**LEMME 2.3.16** — *Soit un carré cartésien de  $S$ -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{s'} & Y \\ t' \downarrow & & \downarrow t \\ Z & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

avec  $s$  et  $t$  des immersions fermées. Les 2-morphismes d'échange :

$$Ex^{!,*} : t'^* s' \longrightarrow s'^* t' \quad , \quad Ex^{!,*} : s'^* t' \longrightarrow t'^! s^* \quad \text{et} \quad Ex^{!,!} : t'^! s' \xrightarrow{\sim} s'^! t'$$

induisent une face carrée mixte de modules (au sens de la définition 2.1.111) :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(T), \otimes_T) & \xleftarrow{[s'^*, s'^!]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\ \uparrow [t'^*, t'^!] & \swarrow \cong & \uparrow [t^*, t^!] \\ (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[s^*, s^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_X) \end{array}$$

avec  $[t^*, t^!]$  et  $[t'^*, t'^!]$  considérés avec leur structure de modules à droite et  $[s^*, s^!]$  et  $[s'^*, s'^!]$  avec leur structure de modules à gauche. En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} s'^*t^!(A) \otimes_T t'^*s^!(B) & \longrightarrow & t'^!s^*(A) \otimes_T t'^*s^!(B) & \longrightarrow & t'^!(s^*(A) \otimes_Z s^!(B)) & \longrightarrow & t'^!s^!(A \otimes_X B) \\ \parallel & & & & & & \downarrow \sim \\ s^*t^!(A) \otimes_T t'^*s^!(B) & \longrightarrow & s'^*t^!(A) \otimes_T s'^!t^*(B) & \longrightarrow & s^!(t^!(A) \otimes_Y t^*(B)) & \longrightarrow & s^!t^!(A \otimes_X B) \end{array}$$

Pour tout  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$ .

DEMONSTRATION On part de la face carrée de  $\mathfrak{Mod}$  :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(T), \otimes_T) & \xleftarrow{[s'^*, s'^!]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\ \uparrow [t'^*, t'^*] & \swarrow \cong [Ex'^*, Ex'^*] & \uparrow [t^*, t^*] \\ (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[s^*, s^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_X) \end{array}$$

Plutôt que de considérer  $[t^*, t^*]$  et  $[t'^*, t'^*]$  avec leur structure de modules à gauche, on va les considérer comme des comodules à droite. Il est alors immédiat qu'on a une face carrée mixte de modules et comodules :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(T), \otimes_T) & \xleftarrow{[s'^*, s'^!]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\ \uparrow [t'^*, t'^*] & \swarrow \cong & \uparrow [t^*, t^*] \\ (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[s^*, s^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_X) \end{array}$$

formée des modules à gauche  $[s^*, s^!]$  et  $[s'^*, s'^!]$  et des comodules à droite tautologiques sur  $t^*$  et  $t'^*$ . Il vient par le lemme 2.1.118 que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} s^*t_*(A') \otimes_Z s^!(B) & \longrightarrow & s^!(t_*(A') \otimes_X B) & \xrightarrow{\sim} & s^!t_*(A' \otimes_Y s^*(B)) & \xrightarrow{\sim} & t'^*s^!(A' \otimes_Y s^*(B)) \\ \downarrow \sim & & & & & & \parallel \\ t'_*s'^*(A') \otimes_Z s^!(B) & \xrightarrow{\sim} & t'_*(s'^*(A') \otimes_T t'^*s^!(B)) & \longrightarrow & t'_*(s'^*(A') \otimes_T s'^!t^*(B)) & \longrightarrow & t'_*s^!(A' \otimes_Y t^*(B)) \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A', B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y)) \times \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$ . L'inversibilité des flèches marquées découle de 2.3.10 et du théorème de changement de base pour une immersion fermée (voir la proposition 1.4.15). Ainsi, en renversant le sens des flèches :

$$\begin{array}{ccc} s^!(t_*(A') \otimes_X B) & \xrightarrow{\sim} & s^!t_*(A' \otimes_Y s^*(B)) & \xrightarrow{\sim} & t'^*s^!(A' \otimes_Y s^*(B)) \\ s^*t_*(A') \otimes_Z s^!(B) & \xrightarrow{\sim} & t'_*s'^*(A') \otimes_Z s^!(B) & \xrightarrow{\sim} & t'_*(s'^*(A') \otimes_T t'^*s^!(B)) \end{array}$$

on obtient un nouveau diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} t'_*(s'^*(A') \otimes_T t'^*s^!(B)) & \longrightarrow & t'_*s'^*(A') \otimes_Z s^!(B) & \longrightarrow & s^*t_*(A') \otimes_Z s^!(B) & \longrightarrow & s^!(t_*(A') \otimes_X B) \\ \downarrow & & & & & & \parallel \\ t'_*(s'^*(A') \otimes_T s'^!t^*(B)) & \longrightarrow & t'_*s^!(A' \otimes_Y t^*(B)) & \longrightarrow & s^!t_*(A' \otimes_Y t^*(B)) & \longrightarrow & s^!(t_*(A') \otimes_X B) \end{array}$$

Pour conclure, on applique la seconde partie du lemme 2.1.114 aux :



- modules à gauche  $[s^*, s^!]$  et  $[s'^*, s'^!]$ ,
- projecteurs à droite  $[t^*, t_*]$  et  $[t'^*, t'_*]$ ,
- 2-morphismes  $Ex_*^{!,*} : t'^* s^! \longrightarrow s'^! t^*$ ,  $(Ex_*^*)^{-1} : t'_* s'^* \xrightarrow{\sim} s^* t_*$  et  $Ex_*^! : t'_* s'^! \xrightarrow{\sim} s^! t_*$ .

Le lemme est prouvé.

C.Q.F.D

### 2.3.3 Structure monoïdale et équivalences de Thom

Dans ce paragraphe, on verra que les couples  $[\text{id}, \text{Th}(\mathcal{N})]$  et  $[\text{id}, \text{Th}^{-1}(\mathcal{N})]$  sont naturellement des modules bilatères pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre sur un  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$ .

**DEFINITION 2.3.17** — Soient  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini.

1- On définit une structure de  $\text{id}_{\mathbf{H}(X)}$ -projecteur bilatère sur  $\text{Th}(\mathcal{N})$  en prenant la composée des 1-morphismes de  $\mathfrak{P}roj : [p^*, p_{\#}] \circ [s^*, s_*] = [s^* p^*, \text{Th}(\mathcal{N})]$  et en identifiant  $s^* p^*$  au foncteur identité via les 2-isomorphismes de connexion. En particulier, on dispose pour  $(A, B) \in \mathbf{H}(X)$  des isomorphismes :

$$(\text{Th}(\mathcal{N})A) \otimes_X B \xleftarrow{\sim} \text{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) \xrightarrow{\sim} A \otimes_X (\text{Th}(\mathcal{N})B)$$

2- On définit une structure de  $\text{id}_{\mathbf{H}(X)}$ -module bilatère sur  $\text{Th}^{-1}(\mathcal{N})$  en prenant la composition des 1-morphismes de  $\mathfrak{M}od : [i^*, i^!] \circ [p^*, p^*] = [i^* p^*, \text{Th}^{-1}(\mathcal{N})]$  et en identifiant  $s^* p^*$  avec le foncteur identité de  $\mathbf{H}(X)$  via les 2-isomorphismes de connexion. En particulier, on dispose pour  $(A, B) \in \mathbf{H}(X)$  des isomorphismes :

$$(\text{Th}^{-1}(\mathcal{N})A) \otimes_X B \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) \xleftarrow{\sim} A \otimes_X (\text{Th}^{-1}(\mathcal{N})B)$$

La proposition suivante regroupe quelques faits évidents :

**PROPOSITION 2.3.18** — Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini.

On a :

1. Les morphismes structuraux du projecteur  $[\text{id}, \text{Th}(\mathcal{N})]$  définissent une structure de  $\text{id}_{\mathbf{H}(X)}$ -comodule bilatère sur le foncteur  $\text{Th}(\mathcal{N})$ .
2. Les inverses des morphismes structuraux du projecteur  $[\text{id}, \text{Th}(\mathcal{N})]$  définissent une structure de  $\text{id}_{\mathbf{H}(X)}$ -module et une structure de  $\text{id}_{\mathbf{H}(X)}$ -coprojecteur sur le foncteur identité de  $\mathbf{H}(X)$ .
3. Les morphismes structuraux du module  $[\text{id}, \text{Th}^{-1}(\mathcal{N})]$  définissent une structure de  $\text{id}_{\mathbf{H}(X)}$ -coprojecteur bilatère sur le foncteur  $\text{Th}^{-1}(\mathcal{N})$ .
4. Les inverses des morphismes structuraux du module  $[\text{id}, \text{Th}(\mathcal{N})]$  définissent une structure de  $\text{id}_{\mathbf{H}(X)}$ -projecteur et une structure de  $\text{id}_{\mathbf{H}(X)}$ -comodule sur le foncteur identité de  $\mathbf{H}(X)$ .
5. Les adjonctions  $(\text{Th}(\mathcal{N}), \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}))$  et  $(\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}), \text{Th}(\mathcal{N}))$  transforment le module (resp. projecteur, comodule, coprojecteur)  $[\text{id}, \text{Th}(\mathcal{N})]$  en le projecteur (resp. module, coprojecteur, comodule)  $[\text{id}, \text{Th}^{-1}(\mathcal{N})]$  et vice versa.

**PROPOSITION 2.3.19** — Soient  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini. Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Les 2-isomorphismes de commutation aux équivalences de Thom :

$$f^* \circ \text{Th}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \text{Th}(f^* \mathcal{N}) \circ f^* \quad \text{et} \quad f^* \circ \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) \circ f^*$$

induisent des isomorphismes de modules :

$$[f^*, f^* \circ \text{Th}(\mathcal{N})] = [f^*, f^*] \circ [\text{id}, \text{Th}(\mathcal{N})] \xrightarrow{\sim} [f^*, \text{Th}(f^* \mathcal{N}) \circ f^*] = [\text{id}, \text{Th}(f^* \mathcal{N})] \circ [f^*, f^*]$$

$$[f^*, f^* \circ \text{Th}^{-1}(\mathcal{N})] = [f^*, f^*] \circ [\text{id}, \text{Th}^{-1}(\mathcal{N})] \xrightarrow{\sim} [f^*, \text{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) \circ f^*] = [\text{id}, \text{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})] \circ [f^*, f^*]$$

En d'autres termes, les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} f^*(A) \otimes_Y f^* \text{Th}(\mathcal{N})B & \xrightarrow{\sim} & f^*(A \otimes_X \text{Th}(\mathcal{N})B) & \xrightarrow{\sim} & f^* \text{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ f^*(A) \otimes_Y \text{Th}(f^* \mathcal{N})f^*B & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(f^* \mathcal{N})(f^*A \otimes_Y f^*B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(f^* \mathcal{N})f^*(A \otimes_X B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
f^*(A) \otimes_Y f^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})B & \xrightarrow{\sim} & f^*(A \otimes_X \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})B) & \xrightarrow{\sim} & f^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) \\
\sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
f^*(A) \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})f^*B & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})(f^*A \otimes_Y f^*B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})f^*(A \otimes_X B)
\end{array}$$

ainsi que leur  $\otimes$ -dual sont commutatifs pour tout  $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X))^2$

DEMONSTRATION On traite d'abord le cas de l'équivalence  $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})$ . On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
Y & \xrightarrow{s'} & \mathbb{V}(f^* \mathcal{N}) & \xrightarrow{p} & Y \\
f \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\
X & \xrightarrow{s} & \mathbb{V}(\mathcal{N}) & \xrightarrow{p} & X
\end{array}$$

Le morphisme de commutation avec  $\mathrm{Th}^{-1}$  est la composée :

$$f^* s' p^* \xrightarrow{Ex^{*,!}} s'! f'^* p^* \xrightarrow{Ex^{*,*}} s'! p'^* f^*$$

Le résultat découle alors du fait que les 2-morphismes ci-dessus sont des morphismes de  $f^*$ -modules par 2.3.14.

Pour l'équivalence  $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ , on applique le lemme 2.1.105 à la face carrée de  $\mathfrak{Mod}$  :

$$[f^*, f^*] \circ [\mathrm{id}, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})] \xrightarrow{\sim} [\mathrm{id}, \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})] \circ [f^*, f^*]$$

et à l'adjonction  $(\mathrm{Th}(\mathcal{N}), \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}))$ . On obtient alors immédiatement le diagramme commutatif recherché. C.Q.F.D

**PROPOSITION 2.3.20** — Soient  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini. Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Les 2-isomorphismes de commutation aux équivalences de Thom :

$$\mathrm{Th}(\mathcal{N}) \circ f_* \xrightarrow{\sim} f_* \circ \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) \circ f_* \xrightarrow{\sim} f_* \circ \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})$$

induisent des isomorphismes de coprojecteurs :

$$[f^*, \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \circ f_*] = [\mathrm{id}, \mathrm{Th}(\mathcal{N})] \circ [f^*, f_*] \xrightarrow{\sim} [f^*, f_* \circ \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})] = [f^*, f_*] \circ [\mathrm{id}, \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})]$$

$$[f^*, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) \circ f_*] = [\mathrm{id}, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})] \circ [f^*, f_*] \xrightarrow{\sim} [f^*, f_* \circ \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})] = [f^*, f_*] \circ [\mathrm{id}, \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})]$$

En d'autres termes, les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
A \otimes_X \mathrm{Th}(\mathcal{N})f_*B' & \xrightarrow{\sim} & A \otimes_X f_* \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})B' & \longrightarrow & f_*(f^*A \otimes_Y \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})B') \\
\sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
\mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X f_*B') & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathcal{N})f_*(f^*A \otimes_Y B') & \xrightarrow{\sim} & f_* \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})(f^*A \otimes_Y B')
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
A \otimes_X \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})f_*B' & \xrightarrow{\sim} & A \otimes_X f_* \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})B' & \longrightarrow & f_*(f^*A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})B') \\
\sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X f_*B') & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})f_*(f^*A \otimes_Y B') & \xrightarrow{\sim} & f_* \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})(f^*A \otimes_Y B')
\end{array}$$

ainsi que leur  $\otimes$ -dual sont commutatifs pour tout  $(A, B') \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y))$ .

DEMONSTRATION Les trois modules  $[f^*, f^*]$ ,  $[\mathrm{id}, \mathrm{Th}(\mathcal{N})]$  et  $[\mathrm{id}, \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})]$  sont naturellement des comodules. On obtient la partie de l'énoncé concernant l'équivalence de Thom inverse  $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})$  en utilisant la functorialité et la compatibilité avec la composition pour la construction 2.1.98. La partie concernant l'équivalence de Thom  $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$  est traitée de la même manière. C.Q.F.D

Par le même raisonnement, on démontre aussi :

**PROPOSITION 2.3.21** — Soient  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini. Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme lisse de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Les 2-isomorphismes de commutation aux équivalences de Thom :

$$f_{\#} \circ \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(\mathcal{N}) f_{\#} \quad \text{et} \quad f_{\#} \circ \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) f_{\#}$$

induisent des isomorphismes de projecteurs :

$$[f^*, f_{\#} \circ \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})] = [f^*, f_{\#}] \circ [\mathrm{id}, \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})] \xrightarrow{\sim} [f^*, \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \circ f_{\#}] = [\mathrm{id}, \mathrm{Th}(\mathcal{N})] \circ [f^*, f_{\#}]$$

$$[f^*, f_{\#} \circ \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})] = [f^*, f_{\#}] \circ [\mathrm{id}, \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})] \xrightarrow{\sim} [f^*, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) \circ f_{\#}] = [\mathrm{id}, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})] \circ [f^*, f_{\#}]$$

En d'autres termes, les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} f_{\#}(f^* A \otimes_Y \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) B') & \xrightarrow{\sim} & A \otimes_X f_{\#} \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) B' & \xrightarrow{\sim} & A \otimes_X \mathrm{Th}(\mathcal{N}) f_{\#} B' \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ f_{\#} \mathrm{Th}(f^*(\mathcal{N}))(f^* A \otimes_Y B') & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(\mathcal{N}) f_{\#}(f^* A \otimes_Y B') & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X f_{\#} B') \\ \\ f_{\#}(f^* A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) B') & \xrightarrow{\sim} & A \otimes_X f_{\#} \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) B' & \xrightarrow{\sim} & A \otimes_X \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) f_{\#} B' \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ f_{\#} \mathrm{Th}^{-1}(f^*(\mathcal{N}))(f^* A \otimes_Y B') & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) f_{\#}(f^* A \otimes_Y B') & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X f_{\#} B') \end{array}$$

ainsi que leur  $\otimes$ -dual sont commutatifs pour tout  $(A, B') \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y))$ .

**PROPOSITION 2.3.22** — Soient  $Y$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -module localement libre de rang fini. Soit  $i : Z \longrightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Les 2-isomorphismes de commutation aux équivalences de Thom :

$$\mathrm{Th}(i^* \mathcal{N}) \circ i^! \xrightarrow{\sim} i^! \circ \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Th}^{-1}(i^* \mathcal{N}) \circ i^! \xrightarrow{\sim} i^! \circ \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})$$

induisent des isomorphismes de modules :

$$[i^*, \mathrm{Th}(i^* \mathcal{N}) \circ i^!] = [\mathrm{id}, \mathrm{Th}(i^* \mathcal{N})] \circ [i^*, i^!] \xrightarrow{\sim} [i^*, i^! \circ \mathrm{Th}(\mathcal{N})] = [i^*, i^!] \circ [\mathrm{id}, \mathrm{Th}(\mathcal{N})]$$

$$[i^*, \mathrm{Th}^{-1}(i^* \mathcal{N}) \circ i^!] = [\mathrm{id}, \mathrm{Th}^{-1}(i^* \mathcal{N})] \circ [i^*, i^!] \xrightarrow{\sim} [i^*, i^! \circ \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})] = [i^*, i^!] \circ [\mathrm{id}, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})]$$

En d'autres termes, les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} i^*(A) \otimes_Z \mathrm{Th}(i^* \mathcal{N}) i^!(B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(i^* \mathcal{N})(i^*(A) \otimes_Z i^!(B)) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathcal{N}) i^!(A \otimes_Y B) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ i^*(A) \otimes_Z i^! \mathrm{Th}(\mathcal{N})(B) & \longrightarrow & i^!(A \otimes_Y \mathrm{Th}(\mathcal{N})(B)) & \xrightarrow{\sim} & i^! \mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_Y B) \\ \\ i^*(A) \otimes_Z \mathrm{Th}^{-1}(i^* \mathcal{N}) i^!(B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(i^* \mathcal{N})(i^*(A) \otimes_Z i^!(B)) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) i^!(A \otimes_Y B) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ i^*(A) \otimes_Z i^! \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(B) & \longrightarrow & i^!(A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(B)) & \xrightarrow{\sim} & i^! \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_Y B) \end{array}$$

ainsi que leur  $\otimes$ -dual sont commutatifs pour tout  $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y))^2$ .

**DEMONSTRATION** L'assertion pour le module  $[\mathrm{id}, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})]$  découle immédiatement du lemme 2.3.14. Pour l'équivalence de Thom  $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$  on applique le lemme 2.1.105 à l'adjonction  $(\mathrm{Th}(\mathcal{N}), \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}))$ . C.Q.F.D

On a également :

**PROPOSITION 2.3.23** — Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. On suppose donnée une suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de rang fini :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

Les diagrammes :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{Th}(\mathcal{M})(A \otimes_X B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(\mathcal{L})\mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(\mathcal{L})(A \otimes_X \mathrm{Th}(\mathcal{N})B) \\
 \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 A \otimes_X \mathrm{Th}(\mathcal{M})B & \xrightarrow{\sim} & & \xrightarrow{\sim} & A \otimes_X \mathrm{Th}(\mathcal{L})\mathrm{Th}(\mathcal{N})B
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{M})(A \otimes_X B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{L})\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{L})(A \otimes_X \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})B) \\
 \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 A \otimes_X \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{M})B & \xrightarrow{\sim} & & \xrightarrow{\sim} & A \otimes_X \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{L})\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})B
 \end{array}$$

sont commutatifs. En d'autres termes, les 2-isomorphismes de composition sont des isomorphismes de modules. Il en est de même des 2-isomorphismes de commutation et des 2-isomorphismes de composition modifiés. La même chose s'applique pour les  $\mathrm{Th}^{-1}(-)$ .

DEMONSTRATION En effet, par définition, le 2-isomorphisme de composition des équivalences de Thom inverses  $\mathrm{Th}^{-1}(-)$  est une composée de 2-isomorphismes de connexion de type  $c^*$  et  $c^!$  et d'un 2-morphisme d'échange de type  $Ex^{!*}$ . Par le lemme 2.3.14, ces 2-morphismes sont des morphismes de modules. Les détails sont laissés aux lecteurs. La partie concernant les équivalences de Thom  $\mathrm{Th}(-)$  s'obtient en utilisant les adjonctions  $(\mathrm{Th}(-), \mathrm{Th}^{-1}(-))$ . C.Q.F.D

On continue avec des compatibilités mixtes :

**PROPOSITION 2.3.24** — Soient  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini. Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X f_*(B') & \longrightarrow & f_*(f^*\mathrm{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_Y B') \xrightarrow{\sim} f_*(\mathrm{Th}(f^*\mathcal{N})f^*(A) \otimes_Y B') \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 \mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X f_*(B')) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathcal{N})f_*(f^*(A) \otimes_Y B') \xrightarrow{\sim} f_*\mathrm{Th}(f^*\mathcal{N})(f^*(A) \otimes_Y B')
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_X f_*(B') & \longrightarrow & f_*(f^*\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_Y B') \xrightarrow{\sim} f_*(\mathrm{Th}^{-1}(f^*\mathcal{N})f^*(A) \otimes_Y B') \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X f_*(B')) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})f_*(f^*(A) \otimes_Y B') \xrightarrow{\sim} f_*\mathrm{Th}^{-1}(f^*\mathcal{N})(f^*(A) \otimes_Y B')
 \end{array}$$

ainsi que leur  $\otimes$ -dual sont commutatifs pour tout  $(A, B') \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y))$ .

DEMONSTRATION Il suffit d'appliquer le lemme 2.1.114 à la face carrée mixte de modules et comodules ayant pour cotés  $[\mathrm{id}, \mathrm{Th}(\mathcal{N})]$ ,  $[\mathrm{id}, \mathrm{Th}(f^*\mathcal{N})]$ ,  $[f^*, f^*]$  et  $[f_*, f^*]$ . C.Q.F.D

Lorsque  $f$  est lisse, on a une version de la proposition précédente pour le foncteur  $f_{\#}$ . On laisse aux lecteurs le soin de formuler l'énoncé correspondant et de trouver le lemme qui le démontre. On passe à :

**PROPOSITION 2.3.25** — Soient  $Y$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -module localement libre de rang fini. Soit  $i : Z \rightarrow Y$  une immersion fermée. Les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
 i^*\mathrm{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_Z i^!(B) & \longrightarrow & i^!(\mathrm{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_Y B) & \xrightarrow{\sim} & i^!\mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_Y B) \\
 \sim \downarrow & & & & \uparrow \sim \\
 \mathrm{Th}(i^*\mathcal{N})i^*(A) \otimes_Z i^!(B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(i^*\mathcal{N})(i^*(A) \otimes_Z i^!(B)) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(i^*\mathcal{N})i^!(A \otimes_Y B)
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccc}
 i^*\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_Z i^!(B) & \longrightarrow & i^!(\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_Y B) & \xrightarrow{\sim} & i^!\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_Y B) \\
 \sim \downarrow & & & & \uparrow \sim \\
 \mathrm{Th}^{-1}(i^*\mathcal{N})i^*(A) \otimes_Z i^!(B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(i^*\mathcal{N})(i^*(A) \otimes_Z i^!(B)) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(i^*\mathcal{N})i^!(A \otimes_Y B)
 \end{array}$$

sont commutatifs. En d'autres termes, on a deux faces carrées mixtes de modules :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 (\mathbf{H}(T), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^!]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\
 \uparrow [\text{id}, \text{Th}(f^* \mathcal{N})] & \swarrow \cong & \uparrow [\text{id}, \text{Th}(\mathcal{N})] \\
 (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_Y)
 \end{array} & \text{et} & 
 \begin{array}{ccc}
 (\mathbf{H}(T), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^!]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\
 \uparrow [\text{id}, \text{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})] & \swarrow \cong & \uparrow [\text{id}, \text{Th}^{-1}(\mathcal{N})] \\
 (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_Y)
 \end{array}
 \end{array}$$

DEMONSTRATION Le résultat pour les équivalences de Thom inverses  $\text{Th}^{-1}(-)$  découle immédiatement des lemmes 2.3.14 et de 2.3.16. Le cas des équivalences de Thom  $\text{Th}(-)$  s'obtiennent en appliquant le lemme 2.1.114 et en réarrangeant le sens des flèches dans le diagramme commutatif obtenu. C.Q.F.D

Comme application de 2.3.19 et 2.3.25, on obtient le résultat suivant :

**COROLLAIRE 2.3.26** — Soient  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{M}$  deux  $\mathcal{O}_X$ -module localement libres de rang fini. Les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X \text{Th}(\mathcal{M})(B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X \text{Th}(\mathcal{M})(B)) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(\mathcal{N})\text{Th}(\mathcal{M})(A \otimes_X B) \\
 \parallel & & & & \downarrow \sim \\
 \text{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X \text{Th}(\mathcal{M})(B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(\mathcal{M})(\text{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(\mathcal{M})\text{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X B)
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_X \text{Th}^{-1}(\mathcal{M})(B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X \text{Th}^{-1}(\mathcal{M})(B)) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N})\text{Th}^{-1}(\mathcal{M})(A \otimes_X B) \\
 \parallel & & & & \downarrow \sim \\
 \text{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_X \text{Th}^{-1}(\mathcal{M})(B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{M})(\text{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_X B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{M})\text{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X B)
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X \text{Th}^{-1}(\mathcal{M})(B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X \text{Th}^{-1}(\mathcal{M})(B)) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(\mathcal{N})\text{Th}^{-1}(\mathcal{M})(A \otimes_X B) \\
 \parallel & & & & \downarrow \sim \\
 \text{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X \text{Th}^{-1}(\mathcal{M})(B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{M})(\text{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{M})\text{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X B)
 \end{array}$$

sont commutatifs pour tout  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$ .

### 2.3.4 Le module $[f^*, f^!]$ lorsque $f$ est lisse

**DEFINITION 2.3.27** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme lisse de  $S$ -schémas quasi-projectifs. On définit une structure de  $f^*$ -module bilatère sur  $f^!$  en prenant la composée des 1-morphismes de  $\mathfrak{Mod}$  :

$$[\text{id}, \text{Th}(\Omega_f)] \circ [f^*, f^*] = [f^*, f^!]$$

En particulier, on a des isomorphismes  $f^*A \otimes f^!B \xrightarrow{\sim} f^!(A \otimes B)$  naturels en  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$ .

**LEMME 2.3.28** — Les bimodules  $[f^*, f^!]$  s'organisent naturellement en un 2-foncteur :

$$(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{Mod}$$

DEMONSTRATION Il s'agit de montrer que les isomorphismes de connexions des 2-foncteurs  $\mathbf{H}^*$  et  $\mathbf{H}^!$  induisent des morphismes de modules. Mais par définition, les isomorphismes de connexions de  $\mathbf{H}^!$  sont essentiellement des composées de morphismes de commutation de  $f^*$  avec des équivalences de Thom ainsi que des morphismes de composition. Le lemme découle alors de 2.3.19 et 2.3.23. C.Q.F.D

On aura besoin de deux faces carrées mixtes :

**LEMME 2.3.29** — *Soit un carré cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g'} & V \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

de  $S$ -schémas quasi-projectifs avec  $f$  et  $g$  lisses. On a une face carrée mixte de modules :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(W), \otimes_W) & \xleftarrow{[g'^*, g'^!]} & (\mathbf{H}(V), \otimes_V) \\ [f'^*, f'^!] \uparrow & \swarrow \nearrow & \uparrow [f^*, f^!] \\ (\mathbf{H}(U), \otimes_U) & \xleftarrow{[g^*, g^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_X) \end{array}$$

formée des modules à gauche  $[g^*, g^!]$  et  $[g'^*, g'^!]$  et des modules à droite  $[f^*, f^!]$  et  $[f'^*, f'^!]$  ainsi que les 2-morphismes :

$$Ex^{!,*} : f'^* g^! \longrightarrow g'^! f^* \quad , \quad Ex^{!,*} : g'^* f^! \longrightarrow f'^! g^* \quad \text{et} \quad Ex^{!,!} : g'^! f^! \xrightarrow{\sim} f'^! g^!$$

**DEMONSTRATION** Ceci est une conséquence facile de 2.3.19 et 2.3.23.

C.Q.F.D

On a de même :

**LEMME 2.3.30** — *Soit un carré cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{i'} & V \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

de  $S$ -schémas quasi-projectifs avec  $f$  lisse et  $i$  une immersion fermée. On a une face carrée mixte de modules :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(W), \otimes_W) & \xleftarrow{[i'^*, i'^!]} & (\mathbf{H}(V), \otimes_V) \\ [f'^*, f'^!] \uparrow & \swarrow \nearrow & \uparrow [f^*, f^!] \\ (\mathbf{H}(U), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_Y) \end{array}$$

formée des modules à gauche  $[i^*, i^!]$  et  $[i'^*, i'^!]$  et des modules à droite  $[f^*, f^!]$  et  $[f'^*, f'^!]$  ainsi que les 2-morphismes :

$$Ex^{!,*} : f'^* i^! \longrightarrow i'^! f^* \quad , \quad Ex^{!,*} : i'^* f^! \longrightarrow f'^! i^* \quad \text{et} \quad Ex^{!,!} : i'^! f^! \xrightarrow{\sim} f'^! i^!$$

**DEMONSTRATION** C'est une conséquence facile de 2.3.14 et 2.3.25.

C.Q.F.D

### 2.3.5 Le module $[f^*, f^!]$ pour $f$ quelconque

On voudrait recoller les deux 2-foncteurs :

$$[\text{Imm} \mathbf{H}^*, \text{Imm} \mathbf{H}^!] : (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{Mod} \quad \text{et} \quad [\text{Liss} \mathbf{H}^*, \text{Liss} \mathbf{H}^!] : (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{Mod}$$

en un 2-foncteur :

$$[\mathbf{H}^*, \mathbf{H}^!] : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{Mod}$$

Étant donné un  $S$ -morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  entre  $S$ -schémas quasi-projectifs, on peut trouver une factorisation  $f = p \circ s$  avec  $p$  lisse et  $i$  une immersion fermée. On déduit alors un module  $[f^*, f^!]$  en prenant la composée :

$$[s^*, s^!] \circ [p^*, p^!]$$

et en identifiant  $f^*$  avec  $s^*p^*$  et  $f^!$  avec  $s^!p^!$  via les 2-isomorphismes de connexions. La difficulté est de prouver l'indépendance des modules obtenus du choix de la factorisation. La preuve de cette indépendance est basée sur le résultat suivant :

**THEOREME 2.3.31** — (*Compatibilité avec l'isomorphisme de pureté*) Supposons donné un diagramme commutatif (D) de  $S$ -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec  $s$  une immersion fermée et  $f$  et  $g$  lisses. Pour  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Z))^2$ , le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} s^*f^*A \otimes_Y s^!f^*B & \longrightarrow & s^!(f^*A \otimes_X f^*B) & \xrightarrow{\sim} & s^!f^*(A \otimes_Z B) \\ \Pi \downarrow & & & & \downarrow \Pi \\ g^*A \otimes_Y \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*B & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^*A \otimes_Y g^*B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*(A \otimes_Z B) \end{array}$$

est commutatif ainsi que son  $\otimes$ -dual.

De l'énoncé précédent, on déduit que  $s^*f^*A \otimes s^!f^*B \longrightarrow s^!(f^*A \otimes f^*B)$  est inversible. On aura à établir cela au cours de la preuve du théorème (voir le lemme 2.3.36). Un diagramme (D) sera dit bon si la conclusion du théorème ci-dessus est satisfaite pour (D). On commence par le lemme :

**LEMME 2.3.32** — Soit  $a : R \longrightarrow X$  un morphisme lisse. Formons un carré cartésien au dessus de  $Z$  :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t} & R \\ a \downarrow & & \downarrow a \\ Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

Pour tout  $A$  et  $B$  dans  $\mathbf{H}(Z)$ , les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} a^*(s^*f^*A \otimes_Y s^!f^*B) & \longrightarrow & a^*s^!(f^*A \otimes_X f^*B) & \xrightarrow{\sim} & a^*s^!f^*(A \otimes_Z B) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ a^*(g^*A \otimes_Y \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*B) & \xrightarrow{\sim} & a^*\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^*A \otimes_Y g^*B) & \xrightarrow{\sim} & a^*\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*(A \otimes_Z B) \\ t^*(fa)^*A \otimes_T t^!(fa)^*B & \longrightarrow & t^!((fa)^*A \otimes_R (fa)^*B) & \xrightarrow{\sim} & t^!(fa)^*(A \otimes_Z B) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ (ga)^*A \otimes_T \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(ga)^*B & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)((ga)^*A \otimes_T (ga)^*B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(ga)^*(A \otimes_Z B) \end{array}$$

sont isomorphes.

DEMONSTRATION Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} t^*(fa)^*A \otimes_T t^!(fa)^*B & \xrightarrow{\sim} & t^*a^*f^*A \otimes_T t^!a^*f^*B & \xrightarrow{\sim} & a^*s^*f^*A \otimes_T a^*s^!f^*B & \xrightarrow{\sim} & a^*(s^*f^*A \otimes_Y s^!f^*B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ t^!((fa)^*A \otimes_R (fa)^*B) & \xrightarrow{\sim} & t^!(a^*f^*A \otimes_R a^*f^*B) & \xrightarrow{\sim} & t^!a^*(f^*A \otimes_X f^*B) & \xrightarrow{\sim} & a^*s^!(f^*(A) \otimes_X f^*B) \\ \sim \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ t^!(fa)^*(A \otimes_Z B) & \xrightarrow{\sim} & t^!a^*f^*(A \otimes_Z B) & \xrightarrow{\sim} & a^*s^!f^*(A \otimes_Z B) & & \end{array}$$

(1)

(2)

Le rectangle (1) est commutatif puisque les isomorphismes d'échanges  $Ex^{**}$  et  $Ex^{!*}$  définissent une face carrée dans la 2-catégorie  $\mathfrak{Mod}$ . D'autre part, le rectangle (2) est commutatif puisque l'isomorphisme de connexion  $(fa)^* \longrightarrow a^*f^*$

est une transformation naturelle de foncteurs monoïdaux. Il vient que notre diagramme est commutatif. Notons également que toutes les flèches horizontales de ce diagramme sont inversibles.

De l'autre côté, on considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 (ga)^* A \otimes_T \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(ga)^* B & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)((ga)^* A \otimes_T (ga)^* B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(ga)^*(A \otimes_Z B) \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 a^* g^* A \otimes_T \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) a^* g^* B & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(a^* g^* A \otimes_T a^* g^* B) & & \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim & & \\
 a^* g^* A \otimes_T a^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) a^*(g^* A \otimes_Y g^* B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) a^* g^*(A \otimes_Z B) \\
 \sim \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim \\
 a^*(g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B) & \xrightarrow{\sim} & a^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^* A \otimes_Y g^* B) & \xrightarrow{\sim} & a^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*(A \otimes_Z B)
 \end{array} \quad (4)$$

Le carré (3) est commutatif puisque les 2-isomorphismes de commutation des équivalences de Thom avec  $a^*$  induisent des isomorphismes de modules. Le rectangle (4) est commutatif pour la même raison que la commutativité du carré (2). On déduit alors que notre diagramme est commutatif. Notons également que toutes les flèches de ce diagramme sont inversibles.

De même, les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 t^*(fa)^* A \otimes_T t^!(fa)^* B & \xrightarrow{\sim} & (ga)^* A \otimes_T \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(ga)^* B \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 t^* a^* f^* A \otimes_T t^! a^* f^* B & & a^* g^* A \otimes_T \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) a^* g^* B \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 a^* s^* f^* A \otimes_T a^* s^! f^* B & \xrightarrow{\sim} & a^* g^* A \otimes_T a^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 a^*(s^* f^* A \otimes_Y s^! f^* B) & \xrightarrow{\sim} & a^*(g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B)
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccc}
 t^!(fa)^*(A \otimes_Z B) & \xrightarrow{\sim} & t^! a^* f^*(A \otimes_Z B) & \xrightarrow{\sim} & a^* s^! f^*(A \otimes_Z B) \\
 \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(ga)^*(A \otimes_Z B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) a^* g^*(A \otimes_Z B) & \xrightarrow{\sim} & a^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

sont commutatifs. Ceci découle immédiatement de la compatibilité de l'isomorphisme de pureté avec les restrictions suivants les morphismes lisses. Il est facile, à partir de là, de fournir un isomorphisme entre les deux diagrammes de l'énoncé. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.3.33** — Gardons les notations du lemme précédent. Notons  $(D')$  le diagramme obtenu en composant  $a$  avec  $g$  et  $f$ . Supposons que le foncteur  $a^* : \mathbf{H}(Y) \longrightarrow \mathbf{H}(T)$  est fidèle. Alors si  $(D')$  est bon, il en est de même de  $(D)$ .

Muni de ce corollaire, on peut établir un cas particulier du théorème 2.3.31 :

**PROPOSITION 2.3.34** — Les diagrammes du type :

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{s} & X \\
 & \searrow & \downarrow f \\
 & & Z
 \end{array}$$

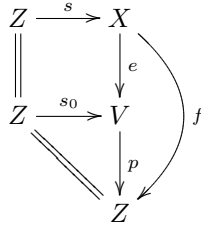
avec  $f$  lisse, sont bons.

**DEMONSTRATION** Par l'astuce de Jonalolou, on peut trouver un torseur  $a : T \longrightarrow Z$  sous un fibré vectoriel avec  $T$  un schéma affine (on utilise ici le fait que la base  $S$  admet une famille ample de fibrés en droites). Le foncteur  $a^*$  est



fidèle puisque par homotopie,  $a_*a^* \simeq \text{id}$ . Il vient par le lemme 2.3.32 qu'on peut remplacer  $Z$  par  $T$  et  $X$  par  $X \times_Z T$ . On se ramène ainsi à traiter le cas où  $Z$  est un schéma affine.

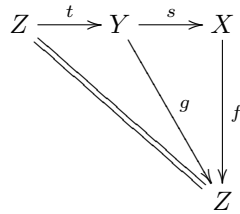
Posons  $V = \mathbb{V}(\mathcal{N}_s)$  avec  $\mathcal{N}_s$  le faisceau normal de l'immersion  $s$ . Puisque  $Z$  est affine, on peut trouver un diagramme commutatif :



avec  $e$  étale,  $s_0$  la section nulle. De plus, on peut supposer que le carré du diagramme ci-dessus est cartésien. Toujours par le lemme 2.3.32, on se ramène à traiter le cas où  $f$  est la projection d'un fibré vectoriel  $\mathbb{V}(\mathcal{M})$  (avec  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_Z$ -module localement libre) et  $s$  l'inclusion de la section nulle. Mais dans ce cas, l'isomorphisme de pureté coïncide avec l'isomorphisme  $\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) \simeq \text{Th}^{-1}(\mathcal{M}) = s^!f^*$  induit par l'isomorphisme  $\mathcal{N}_s \simeq \mathcal{M}$ . La conclusion de la proposition est claire dans ce cas. C.Q.F.D

Avant de traiter le cas général, on démontre le lemme suivant en se basant de manière essentielle sur le cas particulier qu'on vient de traiter.

**LEMME 2.3.35** — *Supposons donné un diagramme commutatif :*



avec  $f$  et  $g$  lisses et  $t$  et  $s$  des immersions fermées. Pour  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Z))^2$  le diagramme suivant :

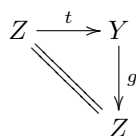
$$\begin{array}{ccccc}
 t^!(s^*f^*A \otimes_Y s^!f^*B) & \longrightarrow & t^!s^!(f^*A \otimes_X f^*B) & \xrightarrow{\sim} & t^!s^!f^*(A \otimes_Z B) \\
 \downarrow \sim & & & & \downarrow \sim \\
 t^!(g^*A \otimes_Y \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*B) & \xrightarrow{\sim} & t^!\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^*A \otimes_Y g^*B) & \xrightarrow{\sim} & t^!\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

est commutatif.

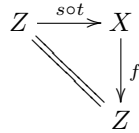
DEMONSTRATION Considérons le diagramme  $(\star)$  suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 t^*s^*f^*A \otimes t^!s^!f^*B & \xrightarrow{\sim} & t^*g^*A \otimes t^!\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*B & \xrightarrow{\sim} & t^*g^*A \otimes \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)t^!g^*B & \xrightarrow{\sim} & A \otimes \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)B \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 t^!(s^*f^*A \otimes s^!f^*B) & \xrightarrow{\sim} & t^!(g^*A \otimes \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)(t^*g^*A \otimes t^!g^*B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)(A \otimes \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)B) \\
 \downarrow & & \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow \sim \\
 t^!s^!(f^*A \otimes f^*B) & \xrightarrow{\sim} & t^!\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^*A \otimes g^*B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)t^!(g^*A \otimes g^*B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(A \otimes B) \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \parallel \\
 t^!s^!f^*(A \otimes B) & \xrightarrow{\sim} & t^!\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*(A \otimes B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)t^!g^*(A \otimes B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(A \otimes B)
 \end{array}$$

Les carrés numérotés (1), (4) et (6) sont clairement commutatifs. Le diagramme numéroté (2) est celui dont on cherche à prouver la commutation. Le diagramme (3) commute par 2.3.22. La commutation du diagramme (6) découle de la proposition 2.3.34 appliquée au triangle commutatif :



D'autre part, par le lemme ci-dessous, toutes les flèches du diagrammes (★) (sauf peut-être ceux du sous-diagramme (2)) sont inversibles. Il vient que pour prouver la commutation du sous-diagramme (2), il suffit de montrer que le bord de (★) est commutatif. Pour montrer cela, on applique encore une fois la proposition 2.3.34 au triangle commutatif :



pour obtenir la commutation du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 (s \circ t)^* f^* A \otimes_Z (s \circ t)^! f^* B & \longrightarrow & (s \circ t)^!(f^* A \otimes_X f^* B) & \xrightarrow{\sim} & (s \circ t)^! f^*(A \otimes_Z B) \\
 \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 A \otimes_Z \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s \circ t}) B & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s \circ t})(A \otimes_Z B) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s \circ t})(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

En utilisant la compatibilité de l'isomorphisme de pureté avec la composition des immersions fermées et le fait que les isomorphismes de connexion ainsi que ceux de composition des équivalences de Thom sont des isomorphismes de modules, on peut développer ce diagramme pour obtenir le bord de (★). Ceci prouve le lemme. C.Q.F.D

Pour compléter la preuve du lemme 2.3.35, il nous reste à montrer :

**LEMME 2.3.36** — *Gardons les notations du lemme précédent. Les flèches suivantes :*

$$t^* g^* A \otimes t^! \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B \longrightarrow t^!(g^* A \otimes \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B) \quad \text{et} \quad t^* g^* A \otimes t^! g^* B \longrightarrow t^!(g^* A \otimes g^* B)$$

sont inversibles.

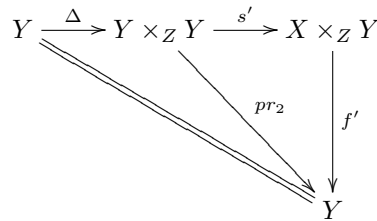
**DEMONSTRATION** La question étant locale pour la topologie de Nisnévich, on se ramène immédiatement au cas où  $\mathcal{N}_s$  est libre de rang  $r$ . Il vient que  $\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B \simeq g^*(B(-r)[-2r])$ . On doit donc traiter uniquement le second morphisme.

Pour le second morphisme, on utilise le diagramme commutatif de la proposition 2.3.34 :

$$\begin{array}{ccccc}
 t^* g^* A \otimes_Z t^! g^* B & \longrightarrow & t^!(g^* A \otimes_Y g^* B) & \xrightarrow{\sim} & t^! g^*(A \otimes_Z B) \\
 \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 A \otimes_Z \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) B & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(A \otimes_Z B) & = & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

D'où le résultat. C.Q.F.D

Achevons la preuve du théorème 2.3.31. On forme la diagramme commutatif :



Par le lemme ci-dessus appliqué aux objets  $g^* A$  et  $g^* B$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^!(s'^* f'^*(g^* A) \otimes_{Y \times_Z Y} s'^! f'^*(g^* B)) & \xrightarrow{\sim} & \Delta^!(pr_2^*(g^* A) \otimes_{Y \times_Z Y} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'}) pr_2^*(g^* B)) \\
 \downarrow & & \downarrow \sim \\
 \Delta^! s'^!(f'^*(g^* A) \otimes_{X \times_Z Y} f'^*(g^* B)) & & \Delta^! \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'})(pr_2^*(g^* A) \otimes_{Y \times_Z Y} pr_2^*(g^* B)) \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 \Delta^! s'^! f'^*(g^* A \otimes_Y g^* B) & \xrightarrow{\sim} & \Delta^! \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'}) pr_2^*(g^* A \otimes_Y g^* B)
 \end{array}$$

Ce diagramme est clairement isomorphe au diagramme ci-dessous qui est donc également commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^!(s'^*(g \circ f')^*A \otimes_{Y \times_Z Y} s'^!(g \circ f')^*B) & \xrightarrow{\sim} & \Delta^!((g \circ pr_2)^*A \otimes_{Y \times_Z Y} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'})((g \circ pr_2)^*B)) \\
 \downarrow & & \downarrow \sim \\
 \Delta^!s'^!((g \circ f')^*A \otimes_{X \times_Z Y} (g \circ f')^*B) & & \Delta^!\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'})((g \circ pr_2)^*A \otimes_{Y \times_Z Y} (g \circ pr_2)^*B) \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 \Delta^!s'^!(g \circ f')^*(A \otimes_Z B) & \xrightarrow{\sim} & \Delta^!\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'})((g \circ pr_2)^*(A \otimes_Z B))
 \end{array}$$

En appliquant le lemme 2.3.32 à :

$$\begin{array}{ccc}
 Y \times_Z Y & \xrightarrow{s'} & X \times_Z Y \\
 \downarrow pr_1 & & \downarrow pr_1 \\
 Y & \xrightarrow{s} & X \\
 & \searrow g & \downarrow f \\
 & & Z
 \end{array}$$

et en utilisant les égalités  $g \circ f' = f \circ pr_1$  et  $g \circ pr_2 = g \circ pr_1$ , on déduit que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^!pr_1^*(s^*f^*A \otimes_Y s'^!f^*B) & \xrightarrow{\sim} & \Delta^!pr_1^*(g^*A \otimes_Y \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*B) \\
 \downarrow & & \downarrow \sim \\
 \Delta^!pr_1^*s^!(f^*A \otimes_X f^*B) & & \Delta^!pr_1^*\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^*A \otimes_Y g^*B) \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 \Delta^!pr_1^*s^!f^*(A \otimes_Z B) & \xrightarrow{\sim} & \Delta^!pr_1^*a^*\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

Ainsi, on a prouvé que le diagramme qui nous intéresse devient commutatif si on applique le foncteur  $\Delta^{-1}pr_1^* \simeq \text{Th}^{-1}(\Omega_g)$ . Mais les foncteurs de Thom  $\text{Th}^{-1}(-)$  sont des équivalences et donc fidèles. Le théorème est prouvé.

Le théorème 2.3.31 se réécrit :

**COROLLAIRE 2.3.37** — *Supposons donné un diagramme commutatif de  $S$ -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{s} & X \\
 & \searrow g & \downarrow f \\
 & & Z
 \end{array}$$

avec  $s$  une immersion fermée et  $g$  et  $f$  des morphismes lisses. Alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 s^*f^*A \otimes s^!f^!B & \xrightarrow{\sim} & g^*A \otimes g^!B \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 s^!(f^*A \otimes f^!B) & & \\
 \downarrow \sim & & \\
 s^!f^!(A \otimes B) & \xrightarrow{\sim} & g^!(A \otimes B)
 \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 s^* f^* A \otimes_Y s^! \mathrm{Th}(\Omega_f) f^* B & \xrightarrow{\sim} & s^* f^* A \otimes_Y \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) s^! f^* B & \xrightarrow{\sim} & g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 s^! (f^* A \otimes_X \mathrm{Th}(\Omega_f) f^* B) & & \mathrm{Th}(s^* \Omega_f)(s^* f^* A \otimes_Y s^! f^* B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(s^* \Omega_f)(g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B) \\
 \downarrow \sim & (1) & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 s^! \mathrm{Th}(\Omega_f)(f^* A \otimes_Y f^* B) & & \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) s^! (f^* A \otimes_Y f^* B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^* A \otimes_Y g^* B) \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \sim & (2) & \downarrow \sim \\
 s^! \mathrm{Th}(\Omega_f) f^*(A \otimes_Z B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) s^! f^*(A \otimes_Z B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

La commutation du rectangle (1) découle de 2.3.22. La commutation du rectangle (2) découle de la compatibilité avec l'isomorphisme de pureté 2.3.31. Il vient que notre diagramme est commutatif. Pour terminer, il reste à montrer que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B & \xrightarrow{\sim} & g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}(\Omega_g) g^* B \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 \mathrm{Th}(s^* \Omega_f)(g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B) & & \mathrm{Th}(\Omega_g)(g^* A \otimes_Y g^* B) \\
 \downarrow \sim & \xrightarrow{\sim} & \downarrow \sim \\
 \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^* A \otimes_Y g^* B) & & \mathrm{Th}(\Omega_g) g^*(A \otimes_Z B) \\
 \downarrow \sim & \xrightarrow{\sim} & \downarrow \sim \\
 \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*(A \otimes_Z B) & & \mathrm{Th}(\Omega_g) g^*(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

est commutatif. Ceci découle immédiatement du fait que le 2-isomorphisme de composition :

$$\mathrm{Th}(\Omega_g) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)$$

est un isomorphisme de  $\mathrm{id}_{\mathbb{H}(Y)}$ -modules.

C.Q.F.D

On peut maintenant prouver le théorème suivant :

**THEOREME 2.3.38** — *Il existe un 2-foncteur contravariant :*

$$[\mathbf{H}^*, \mathbf{H}^!]: \mathrm{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{Mod}$$

qui coïncide avec  $[\mathrm{Imm} \mathbf{H}^*, \mathrm{Imm} \mathbf{H}^!]$  et  $[\mathrm{Liss} \mathbf{H}^*, \mathrm{Liss} \mathbf{H}^!]$  lorsqu'on se restreint à  $(\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{Imm}}$  et  $(\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{Liss}}$  respectivement.

DEMONSTRATION Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Il suffit de montrer l'indépendance de la factorisation du module  $[f^*, f^!]$ . Supposons données deux factorisations de  $f$  en  $p \circ s$  et  $p' \circ s'$ . On se ramène immédiatement aux cas où il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{s} & \bullet & \xrightarrow{p} & X \\
 \parallel & & \downarrow i & & \parallel \\
 Y & \xrightarrow{s'} & \bullet & \xrightarrow{p'} & X
 \end{array}$$

avec  $i$  une immersion fermée. On sait que les isomorphismes de connexions :

$$[s'^*, s'^!] \xrightarrow{\sim} [s^*, s^!][i^*, i^!]$$

sont des isomorphismes de modules puisque  $s, s'$  et  $i$  sont des immersions fermées. Il suffit donc de montrer que les isomorphismes de connexion induisent un isomorphisme de modules :

$$[p^*, p^!] \xrightarrow{\sim} [i^*, i^!][p'^*, p'^!]$$

Ceci est vrai par le corollaire 2.3.37.

C.Q.F.D

Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. En utilisant l'adjonction  $(f_!, f^!)$  on déduit à partir du  $f^*$ -module bilatère  $[f^*, f^!]$  un projecteur bilatère  $[f^*, f_!]$ . On a de même :

**COROLLAIRE 2.3.39** — Les 2-isomorphismes de connexion de  $H^*$  et  $H_!$  fournissent un 2-foncteur covariant :

$$[H^*, H_!] : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A} \text{roj}$$

Ce projecteur présente quelques avantages sur le module dont il provient à cause de :

**THEOREME 2.3.40** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Pour tout  $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(H(X))^2 \times \text{Ob}(H(Y))^2$  les morphismes :

$$f_!(f^* A \otimes_Y B') \longrightarrow A \otimes_X f_!(B) \quad \text{et} \quad f_!(A' \otimes_Y f^* B) \longrightarrow f_!(A') \otimes_X B$$

sont inversibles.

DEMONSTRATION On traite uniquement la première flèche, la seconde découle par  $\otimes$ -dualité. Il suffit de prouver la proposition dans le cas où  $f$  est lisse et puis dans le cas où  $f = i$  est une immersion fermée.

1- Si  $f$  est lisse, notre morphisme est la composée :

$$f_{\#} \text{Th}^{-1}(\Omega_f)(f^* A \otimes_Y B') \longrightarrow f_{\#}(f^* A \otimes_Y \text{Th}^{-1}(\Omega_f)B') \longrightarrow A \otimes_X f_{\#} \text{Th}^{-1}(\Omega_f)B$$

Les deux flèches qui figurent dans cette composition sont inversibles (voir la définition 2.3.1).

2- Si  $f = i$  est une immersion fermée, notre morphisme est la composée :

$$i_*(i^* A \otimes_Y B') i_*(i^* A \otimes_X i^* i_* B') \longrightarrow i_* i^*(A \otimes_X i_* B') \longrightarrow A \otimes_X B$$

Les deux flèches de cette composée sont également inversibles.

C.Q.F.D

### 2.3.6 Des diagrammes commutatifs supplémentaires

On commence par la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.3.41** — Supposons donné un carré cartésien de  $S$ -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Les deux 2-morphismes d'échanges  $Ex^{*,*}$  et  $Ex^{!,*}$  induisent une face carrée dans la 2-catégorie  $\mathfrak{M} \text{od}$  :

$$\begin{array}{ccc} (H(Y'), \otimes_{Y'}) & \xleftarrow{[g'^*, g'^*]} & (H(Y), \otimes_Y) \\ [f'^*, f'^!] \uparrow & \swarrow [Ex^{*,*}, Ex^{!,*}] & \uparrow [f^*, f^!] \\ (H(X'), \otimes_{X'}) & \xleftarrow{[g^*, g^*]} & (H(X), \otimes_X) \end{array}$$

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} g'^* f^*(A) \otimes_{Y'} g'^* f^!(B) & \xrightarrow{\sim} & g'^*(f^*(A) \otimes_Y f^!(B)) & \longrightarrow & g'^* f^!(A \otimes_X B) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ f'^* g^*(A) \otimes_{Y'} f'^! g^*(B) & \longrightarrow & f'^!(g^*(A) \otimes_Y g^*(B)) & \xrightarrow{\sim} & f'^! g^*(A \otimes_X B) \end{array}$$

pour tout  $(A, B) \in \text{Ob}(H(X))^2$ .

DEMONSTRATION On choisit une factorisation de  $f = p \circ i$  avec  $i$  une immersion fermée et  $p$  un morphisme lisse de  $S$ -schéma quasi-projectif. On peut alors traiter le cas de  $i$  et  $p$  séparément (puisque que les isomorphismes de

connexions induisent un isomorphisme de modules). Mais pour une immersion fermée  $i$ , le résultat correspondant a été établi dans 2.3.14. Ceci nous ramène à supposer  $f$  lisse. Dans ce cas, on utilise la formule  $f^! = \text{Th}(\Omega_f)f^*$ . En revenant à la définition du morphisme d'échange  $Ex^{!,*}$ , on voit qu'il suffit de prouver qu'on a deux faces dans  $\mathfrak{Mod}$  :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbf{H}(Y'), \otimes_{Y'}) \xleftarrow{[g'^*, g'^*]} (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) & & (\mathbf{H}(Y'), \otimes_{Y'}) \xleftarrow{[g'^*, g'^*]} (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\
 \uparrow [f'^*, f'^*] & \swarrow [Ex^{!,*}, Ex^{*,*}] & \uparrow [1, \text{Th}(\Omega_{f'})] \\
 (\mathbf{H}(X'), \otimes_{X'}) \xleftarrow{[g^*, g^*]} (\mathbf{H}(X), \otimes_X) & \uparrow [f^*, f^*] & \text{et} & \swarrow [1, \text{Th}(\Omega_f)] \\
 & & & \uparrow [1, \text{Th}(\Omega_f)] \\
 & & & (\mathbf{H}(Y'), \otimes_{Y'}) \xleftarrow{[g'^*, g'^*]} (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y)
 \end{array}$$

La première face est évidemment un face de  $\mathfrak{Mod}$  puisque les isomorphismes de connexions sont des transformations naturelles monoïdales. Pour la seconde face, on utilise 2.3.19. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.3.42** — Gardons les hypothèses de la proposition 2.3.41. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f'_!(f'^*g^*(A) \otimes_{Y'} g'^*(B')) & \xrightarrow{\sim} & g^*(A) \otimes_{X'} f'_!g'^*(B') & \xrightarrow{\sim} & g^*(A) \otimes_{X'} g^*f_!(B') & \xrightarrow{\sim} & g^*(A \otimes_X f_!(B')) \\
 \sim \downarrow & & & & & & \parallel \\
 f'_!(g'^*f^*(A) \otimes_{Y'} g'^*(B')) & \xrightarrow{\sim} & f'_!g'^*(f^*(A) \otimes_Y B') & \xrightarrow{\sim} & g^*f_!(f^*(A) \otimes_Y B') & \xrightarrow{\sim} & g^*(A \otimes_X f_!(B'))
 \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A, B') \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X)) \times \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))$ .

DEMONSTRATION Il suffit d'appliquer le lemme 2.1.105 à la face carrée de modules à gauche de la proposition 2.3.41 et aux adjonctions  $(f_!, f^!)$  et  $(f'_!, f'^!)$ . C.Q.F.D

On également :

**COROLLAIRE 2.3.43** — Gardons les hypothèses de la proposition 2.3.41. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f^*g_*(A') \otimes_Y f^!B & \longrightarrow & f^!(g_*(A') \otimes_X B) & \longrightarrow & f^!g_*(A' \otimes_{X'} g^*B) & \xrightarrow{\sim} & g'_*f'^!(A' \otimes_{X'} g^*B) \\
 \sim \downarrow & & & & & & \parallel \\
 g'_*f'^*(A') \otimes_Y f^!B & \longrightarrow & g'_*(f'^*(A') \otimes_{Y'} g'^*f^!B) & \longrightarrow & g'_*(f'^*(A') \otimes_{Y'} f'^!g^*B) & \longrightarrow & g'_*f'^!(A' \otimes_X g^*B)
 \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A', B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X')) \times \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$ .

DEMONSTRATION On peut considérer la face carrée de la proposition 2.3.41 comme une face carrée mixte de modules et comodules, formée des deux modules à gauche  $[f^*, f^!]$  et  $[f'^*, f'^!]$  et des deux comodules à droite tautologiques sur  $g^*$  et  $g'^*$ . On obtient alors la commutation du diagramme de l'énoncé en appliquant le lemme 2.1.118. C.Q.F.D

On continue avec la proposition :

**PROPOSITION 2.3.44** — Supposons donné un carré cartésien de  $S$ -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 X' & \xrightarrow{g} & X
 \end{array}$$

Les 2-morphismes d'échanges :

$$f'^*g^! \longrightarrow g'^!f^* \quad , \quad g'^*f^! \longrightarrow f'^!g^* \quad \text{et} \quad g'^!f^! \xrightarrow{\sim} f'^!g^!$$

induisent une face mixte de modules :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbf{H}(Y'), \otimes_{Y'}) \xleftarrow{[g'^*, g'^!]} (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) & & \\
 \uparrow [f'^*, f'^!] & \swarrow \cong & \uparrow [f^*, f^!] \\
 (\mathbf{H}(X'), \otimes_{X'}) \xleftarrow{[g^*, g^!]} (\mathbf{H}(X), \otimes_X) & & 
 \end{array}$$

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f'^* g^! A \otimes g'^* f^! B & \longrightarrow & g^! f^* A \otimes g'^* f^! B & \longrightarrow & g^! (f^* A \otimes f^! B) & \longrightarrow & g^! f^! (A \otimes B) \\
 \parallel & & & & & & \downarrow \sim \\
 f'^* g^! A \otimes g'^* f^! B & \longrightarrow & f'^* g^! A \otimes f^! g^* B & \longrightarrow & f^! (g^! A \otimes g^* B) & \longrightarrow & f^! g^! (A \otimes B)
 \end{array}$$

pour tout  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$ .

DEMONSTRATION En factorisant  $g$  et  $f$  par une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse, on se ramène immédiatement à traiter les cas suivants :

- $f$  et  $g$  sont tous les deux lisses,
- $f$  et  $g$  sont tous les deux des immersions fermées,
- $f$  est lisse et  $g$  une immersion fermée.

Nous avons déjà traité ces trois cas dans 2.3.29, 2.3.16 et 2.3.30 respectivement.

C.Q.F.D

### 2.3.7 Le module $[f_*, f_!]$

On fait la définition suivante :

**DEFINITION 2.3.45** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Pour  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2$ , on définit une flèche :

$$f_*(A) \otimes_X f_!(B) \longrightarrow f_!(A \otimes_Y B)$$

en prenant la composée :

$$f_*(A) \otimes_X f_!(B) \xleftarrow{\sim} f_!(f^* f_*(A) \otimes_Y B) \longrightarrow f_!(A \otimes_Y B)$$

**PROPOSITION 2.3.46** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Les morphismes :

$$f_*(A) \otimes_X f_!(B) \longrightarrow f_!(A \otimes_Y B) \quad \text{et} \quad f_!(A) \otimes_X f_*(B) \longrightarrow f_!(A \otimes_Y B)$$

avec  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2$ , définissent une structure de  $f_*$ -module bilatère sur  $f_!$ . De plus, les morphismes de connexions de  $\mathbf{H}_*$  et  $\mathbf{H}_!$  induisent un 2-foncteur covariant  $[\mathbf{H}_*, \mathbf{H}_!] : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{Mod}$ .

DEMONSTRATION Montrons que  $f_!$  est un  $f_*$ -module à gauche. Étant donné que  $f_!$  est un  $f^*$ -projecteur, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 f_*(A) \otimes_X (f_*(B) \otimes_X f_!(C)) & \xleftarrow{\sim} & f_*(A) \otimes_X f_!(f^* f_*(B) \otimes_Y C) & \xleftarrow{\sim} & f_!(f^* f_*(A) \otimes_Y (f^* f_*(B) \otimes_Y C)) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 (f_*(A) \otimes_X f_*(B)) \otimes_X f_!(C) & \xleftarrow{\sim} & f_!(f^*(f_*(A) \otimes_X f_*(B)) \otimes_Y C) & \xleftarrow{\sim} & f_!((f^* f_*(A) \otimes_Y f^* f_*(B)) \otimes C)
 \end{array}$$

En composant à droite par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 f_!(f^* f_*(A) \otimes_Y (f^* f_*(B) \otimes_Y C)) & \longrightarrow & f_!(A \otimes_Y (B \otimes_Y C)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f_!((f^* f_*(A) \otimes_Y f^* f_*(B)) \otimes C) & \longrightarrow & f_!((A \otimes_Y B) \otimes C)
 \end{array}$$

On se ramène immédiatement à prouver la commutation de :

$$\begin{array}{ccc}
 f^*(f_*(A) \otimes_X f_*(B)) & \longrightarrow & (f^* f_*(A) \otimes_Y f^* f_*(B)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f^* f_*(A \otimes_Y B) & \longrightarrow & (A \otimes_Y B)
 \end{array}$$

Ceci découle immédiatement de la définition de l'accouplement de  $f_*$  à partir de celui de  $f^*$ .

La preuve du fait que  $f_!$  est un  $f_*$ -module bilatère se démontre par la même méthode. Les détails sont laissés aux lecteurs. Le fait que les 2-isomorphismes de connexion définissent bien un 2-foncteur dans la 2-catégorie des modules découle facilement du fait qu'on a un 2-foncteur  $[H^*, H_!]$  dans la 2-catégorie des projecteurs. C.Q.F.D

**PROPOSITION 2.3.47** — *Soit un carré cartésien de  $S$ -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Les 2-morphismes d'échange définissent deux faces carrées de  $\mathfrak{Mod}$  :

$$\begin{array}{ccc} (H(Y'), \otimes_{Y'}) & \xrightarrow{[g'_*, g'_*]} & (H(Y), \otimes_Y) \\ \downarrow [f'_*, f'_!] & \searrow [Ex_{*,*}, Ex_{!,*}] & \downarrow [f_*, f_!] \\ (H(X'), \otimes_{X'}) & \xrightarrow{[g_*, g_*]} & (H(X), \otimes_X) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} (H(Y'), \otimes_{Y'}) & \xleftarrow{[g'^*, g'^*]} & (H(Y), \otimes_Y) \\ \downarrow [f'_*, f'_!] & \swarrow [Ex_{*}^*, Ex_{!}^*] & \downarrow [f_*, f_!] \\ (H(X'), \otimes_{X'}) & \xleftarrow{[g^*, g^*]} & (H(X), \otimes_X) \end{array}$$

DEMONSTRATION Par le corollaire 2.1.91, on a des paires de 1-morphismes adjoints dans la 2-catégories  $\mathfrak{pMod}$  :

$$(g^*, g_*) \quad \text{et} \quad (g'^*, g'_*)$$

Le 2-foncteur strict  $\mathfrak{pMod} \subset \mathfrak{Mod}$  fournit alors deux paires de 1-morphismes adjoints :

$$([g^*, g^*], [g_*, g_*]) \quad \text{et} \quad ([g'^*, g'^*], [g'_*, g'_*])$$

Il est alors facile de vérifier que la première face carrée, s'obtient de la seconde via ces adjonctions. On peut donc se contenter de vérifier que la seconde face est une face de modules. Il suffit pour cela de prouver la commutation du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} g^* f_*(A) \otimes g^* f_!(B) & \xrightarrow{\sim} & g^*(f_*(A) \otimes f_!(B)) & \longrightarrow & g^* f_!(f^* f_* A \otimes B) & \xrightarrow{\sim} & f'_! g'^*(f^* f_*(A) \otimes B) \\ \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ g^* f_*(A) \otimes f'_! g'^*(B) & \xrightarrow{\sim} & f'_!(f'^* g^* f_*(A) \otimes g'^*(B)) & \longrightarrow & f'_!(g'^* f^* f_*(A) \otimes g'^*(B)) & \xrightarrow{\sim} & f'_! g'^*(f^* f_*(A) \otimes B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f'_! g'^*(A) \otimes f'_! g'^*(B) & \xrightarrow{\sim} & f'_!(f'^* f^* g'^*(A) \otimes g'^*(B)) & \longrightarrow & f'_!(g'^*(A) \otimes g'^*(B)) & \xrightarrow{\sim} & f'_! g'^*(A \otimes B) \end{array}$$

La commutation des trois carrés inférieurs du diagramme est claire. La commutation du grand rectangle découle du lemme 2.1.105 appliqué à la face carrée de modules de la proposition 2.3.41 . C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.3.48** — *Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Les morphismes évidents, induisent un 2-morphisme dans  $\mathfrak{Mod}$  :  $[f_*, f_!] \longrightarrow [f_*, f_*]$  .*

DEMONSTRATION En effet considérons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Y & \xrightarrow{pr_2} & Y \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Si  $\Delta$  désigne l'immersion fermée diagonale  $Y \longrightarrow Y \times_X Y$ , le 2-morphisme  $\alpha_f : f_! \longrightarrow f_*$  est donné par la composée :

$$f_! \simeq f_! pr_{1*} \Delta_* \xrightarrow{Ex_{!,*}} f_* pr_{2!} \Delta_! \simeq f_*$$

Mais en utilisant la proposition 2.3.47, on peut former un 2-morphisme dans  $\mathfrak{Mod}$  en prenant la composée :

$$[f_*, f_!] \simeq [f_* pr_{1*} \Delta_*, f_! pr_{1*} \Delta_*] \xrightarrow{[Ex_{*,*}, Ex_{!,*}]} [f_* pr_{2*} \Delta_*, f_* pr_{2!} \Delta_!] \simeq [f_*, f_*]$$



Ce morphisme est clairement égal à  $[id_{f_*}, \alpha_f]$ . Ceci prouve le corollaire.

C.Q.F.D

On a aussi :

**COROLLAIRE 2.3.49** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Pour  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))$  le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f_!(A) \otimes_X f_!(B) & \longrightarrow & f_!(A) \otimes_X f_*(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_*(A) \otimes_X f_!(B) & \longrightarrow & f_!(A \otimes_Y B) \end{array}$$

DEMONSTRATION Soient  $g$  et  $h$  des morphismes composables de  $S$ -schémas quasi-projectifs. L'énoncé pour  $g$  et  $h$  implique l'énoncé pour  $g \circ h$ . On se ramène ainsi à traiter le cas où  $f$  est projectif et  $f = j$  une immersion ouverte.

Lorsque  $f$  est projectif, le morphisme  $f_! \longrightarrow f_*$  est inversible. Par le corollaire 2.3.48, le carré qui nous intéresse est isomorphe à :

$$\begin{array}{ccc} f_*(A) \otimes_X f_*(B) & \xlongequal{\quad} & f_*(A) \otimes_X f_*(B) \\ \parallel & & \downarrow \\ f_*(A) \otimes_X f_*(B) & \longrightarrow & f_*(A \otimes_Y B) \end{array}$$

Le résultat est alors vrai dans ce cas.

On se donne donc une immersion ouverte  $j : U \longrightarrow X$ . Il s'agit de montrer que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} j_{\#}(A) \otimes_X j_{\#}(B) & \longrightarrow & j_{\#}(A) \otimes_X j_*(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_*(A) \otimes_X j_{\#}(B) & \longrightarrow & j_{\#}(A \otimes B) \end{array}$$

est commutatif. Les quatre sommets du carré sont (à isomorphisme près) dans la sous-catégorie pleine  $j_{\#}(\mathbf{H}(U)) \subset \mathbf{H}(X)$ . Il suffit donc de montrer que le carré en question devient commutatif après application de  $j^*$ . Il est facile de vérifier que lorsqu'on applique  $j^*$  on obtient un carré isomorphe à :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xlongequal{\quad} & A \otimes B \\ \parallel & & \parallel \\ A \otimes B & \xlongequal{\quad} & A \otimes B \end{array}$$

Le lemme est prouvé.

C.Q.F.D

### 2.3.8 Les homomorphismes internes

On suppose donné un 2-foncteur monoïdal homotopique stable  $(\mathbf{H}, \otimes)$ . On fait la définition suivante :

**DEFINITION 2.3.50** — On dira que le 2-foncteur monoïdal homotopique stable  $(\mathbf{H}, \otimes)$  est fermé à droite (resp. à gauche) si pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$ , la catégorie monoïdale  $(\mathbf{H}(X), \otimes)$  est fermée à droite (resp. à gauche). Dans ce cas, on notera  $\underline{\text{Hom}}_{d,X}(A, -)$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}_{g,X}(A, -)$ ) l'adjoint à droite de  $- \otimes_X A$  (resp.  $A \otimes_X -$ ) pour tout  $A \in \mathbf{H}(X)$ .

Comme dans la section précédente, on étudiera des formules faisant apparaître  $- \otimes -$ ,  $\underline{\text{Hom}}(-, -)$  et les quatre opérations. Notons que pour  $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^3$  on a des isomorphismes canoniques :

$$\text{hom}(A \otimes_X B, C) \simeq \text{hom}(B, \underline{\text{Hom}}_{g,X}(A, C)) \simeq \text{hom}(A, \underline{\text{Hom}}_{d,X}(B, C))$$

Dans la suite, on supposera que  $(\mathbf{H}, \otimes)$  est fermée à droite et on notera  $\underline{\text{Hom}}_X(-, -)$  le bifoncteur  $\underline{\text{Hom}}_{d,X}(-, -)$ . Lorsqu'un énoncé concerne les 2-foncteurs monoïdaux homotopiques stables fermés à droite et à gauche, on remettra alors les indices  $d$  et  $g$ . On va définir trois isomorphismes bien connus :

**PROPOSITION 2.3.51** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Par la définition 2.1.141, on a des isomorphismes :

$$\underline{\text{Hom}}_Y(A, f_* B') \xrightarrow{\sim} f_* \underline{\text{Hom}}_X(f^* A, B')$$

naturels en  $(A, B') \in \text{Ob}(\mathcal{H}(X)) \times \text{Ob}(\mathcal{H}(Y))$  et compatibles avec les 2-isomorphismes de connexion dans le sens suivant. Étant donné un deuxième morphisme  $g : Z \longrightarrow Y$  de  $S$ -schémas quasi-projectifs, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}_X(A, (f \circ g)_* B'') & \xrightarrow{\sim} & (f \circ g)_* \underline{\text{Hom}}_Z((f \circ g)^* A, B'') \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \underline{\text{Hom}}_X(A, f_* g_* B'') & & \\ \downarrow \sim & & \\ f_* \underline{\text{Hom}}(f^* A, g_* B'') & \xrightarrow{\sim} & f_* g_* \underline{\text{Hom}}(g^* f^* A, B'') \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A, B'') \in \text{Ob}(\mathcal{H}(X)) \times \text{Ob}(\mathcal{H}(Z))$ .

DEMONSTRATION L'isomorphisme en question est celui de la définition 2.1.141 appliqué au foncteur pseudo-monoïdal  $f^*$ . La compatibilité avec les 2-isomorphismes de connexion provient par adjonction du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (f \circ g)^* \circ (- \otimes_X A) & \xrightarrow{\sim} & (- \otimes_Z (f \circ g)^* A) \circ (f \circ g)^* \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ g^* \circ f^* \circ (- \otimes_X A) & & \\ \downarrow \sim & & \\ g^* \circ (- \otimes_Y f^* A) \circ f^* & \xrightarrow{\sim} & (- \otimes_Z g^* f^* A) \circ g^* \circ f^* \end{array}$$

La proposition est prouvée. C.Q.F.D

**PROPOSITION 2.3.52** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme lisse de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Par la définition 2.1.145, on a des isomorphismes :

$$\underline{\text{Hom}}_X(f_{\#} A', B) \xrightarrow{\sim} f_* \underline{\text{Hom}}_X(A', f^* B)$$

naturels en  $(A', B) \in \text{Ob}(\mathcal{H}(Y)) \times \text{Ob}(\mathcal{H}(X))$  et compatibles avec les 2-isomorphismes de connexion dans le sens suivant. Si  $g : Z \longrightarrow Y$  est un second morphisme lisse, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}_X((f \circ g)_{\#} A'', B) & \xrightarrow{\sim} & (f \circ g)_* \underline{\text{Hom}}_Z(A'', (f \circ g)^* B) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \underline{\text{Hom}}_X(f_{\#} g_{\#} A'', B) & & \\ \downarrow \sim & & \\ f_* \underline{\text{Hom}}_Y(g_{\#} A'', f^* B) & \xrightarrow{\sim} & f_* g_* \underline{\text{Hom}}_Z(A'', g^* f^* B) \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A'', B) \in \text{Ob}(\mathcal{H}(Z)) \times \text{Ob}(\mathcal{H}(X))$ .

DEMONSTRATION L'isomorphisme en question est celui de la définition 2.1.145 appliqué au module à gauche  $[f^*, f^*]$  et les adjonctions  $(f_{\#}, f^*)$  et  $(f^*, f_*)$ . Rappelons que ce morphisme est celui obtenu par adjonction à partir de l'isomorphisme de projection :

$$f_{\#} \circ (- \otimes A') \circ f^* \xrightarrow{\sim} - \otimes f_{\#} A'$$

Pour montrer la compatibilité avec les 2-isomorphismes de connexion, il suffit par adjonction de prouver la commutation de :

$$\begin{array}{ccc} (f \circ g)_{\#} \circ (- \otimes_Z A'') \circ (f \circ g)^* & \xrightarrow{\sim} & - \otimes_X (f \circ g)_{\#} A'' \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ f_{\#} \circ g_{\#} \circ (- \otimes_Z A'') \circ f^* \circ g^* & & \\ \downarrow \sim & & \\ f_{\#} \circ (- \otimes_Y g_{\#} A'') \circ f^* & \xrightarrow{\sim} & - \otimes_X f_{\#} g_{\#} A'' \end{array}$$

Mais ce diagramme est bien commutatif.

C.Q.F.D

On continue dans le même esprit avec la proposition :

**PROPOSITION 2.3.53** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Par la définition 2.1.145, on a des isomorphismes :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_X(f_!A', B) \xrightarrow{\sim} f_*\underline{\mathrm{Hom}}_Y(A', f^!B)$$

naturels en  $(A', B) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X))$  et compatibles avec les 2-isomorphismes de connexion de la manière suivante. Si  $g : Z \longrightarrow Y$  est un autre morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}_X((f \circ g)_!A'', B) & \xrightarrow{\sim} & (f \circ g)_*\underline{\mathrm{Hom}}_Z(A'', (f \circ g)^!B) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \underline{\mathrm{Hom}}_X(f_!g_!A'', B) & & \\ \sim \downarrow & & \\ f_*\underline{\mathrm{Hom}}_Y(g_!A'', f^!B) & \xrightarrow{\sim} & f_*g_*\underline{\mathrm{Hom}}_Z(A'', g^!f^!C) \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(A'', B) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Z)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X))$ .

DEMONSTRATION L'isomorphisme en question est celui de la définition 2.1.145 appliqué au module à gauche  $[f^*, f^!]$  et les adjonctions  $(f_!, f^!)$  et  $(f^*, f_*)$ . Rappelons que ce morphisme est celui obtenu par adjonction à partir de l'isomorphisme de projection :

$$f_! \circ (- \otimes A') \circ f^* \xrightarrow{\sim} - \otimes f_!A'$$

Pour montrer la compatibilité avec les 2-isomorphismes de connexion, il suffit par adjonction de prouver la commutation de :

$$\begin{array}{ccc} (f \circ g)_! \circ (- \otimes_Z A'') \circ (f \circ g)^* & \xrightarrow{\sim} & - \otimes_X (f \circ g)_!A'' \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ f_! \circ g_! \circ (- \otimes_Z A'') \circ f^* \circ g^* & & \\ \sim \downarrow & & \\ f_! \circ (- \otimes_Y g_!A'') \circ f^* & \xrightarrow{\sim} & - \otimes_X f_!g_!A'' \end{array}$$

Mais ce diagramme est bien commutatif par le corollaire 2.3.39.

C.Q.F.D

On peut encore définir deux morphismes de la même famille :

**PROPOSITION 2.3.54** — Soient  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Par la définition 2.1.140, on a des morphismes :

$$(2.37) \quad f^*\underline{\mathrm{Hom}}_X(A, B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_Y(f^*A, f^*B)$$

naturels en  $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X))^2$  et compatibles avec les 2-isomorphismes de connexions de la manière suivante. Si  $g : Z \longrightarrow Y$  est un autre morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (f \circ g)^*\underline{\mathrm{Hom}}_X(A, B) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_Z((f \circ g)^*A, (f \circ g)^*B) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ g^*f^*\underline{\mathrm{Hom}}_X(A, B) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ g^*\underline{\mathrm{Hom}}_Y(f^*A, f^*B) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_Z(g^*f^*A, g^*f^!B) \end{array}$$

est commutatif. Lorsque  $f$  est lisse, le morphisme (2.37) est inversible.

DEMONSTRATION Notre morphisme est celui de la définition 2.1.140 mais encore celui de la définition 2.1.143 appliqué au module tautologique (à droite)  $[f^*, f^*]$ . Lorsque  $f$  est lisse, le foncteur  $f^*$  admet un adjoint à gauche  $f_\#$  et le

morphisme structural du projecteur  $[f^*, f_{\#}]$  est inversible. Il vient par le lemme 2.1.144 que le morphisme (2.37) est bien inversible dans ce cas. La commutation du diagramme est laissée en exercice. C.Q.F.D

**PROPOSITION 2.3.55** — Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Par la définition 2.1.143, on a des isomorphismes :

$$f^! \underline{\mathrm{Hom}}_X(A, B) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_Y(f^* A, f^! B)$$

naturels en  $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$  et compatibles avec les 2-isomorphismes de connexions de la manière suivante. Si  $g : Z \longrightarrow Y$  est un autre morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (f \circ g)^! \underline{\mathrm{Hom}}_X(A, B) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}_Z((f \circ g)^* A, (f \circ g)^! B) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ g^! f^! \underline{\mathrm{Hom}}_X(A, B) & & \\ \sim \downarrow & & \\ g^! \underline{\mathrm{Hom}}_Y(f^* A, f^! B) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}_Z(g^* f^* A, g^! f^! B) \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION Par le lemme 2.1.144, le 2-morphisme en question est obtenu du 2-isomorphisme :

$$f_! \circ (- \otimes f^* A) \xrightarrow{\sim} (- \otimes A) \circ f_!$$

via les adjonctions :  $(f_! \circ (- \otimes f^* A), \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, -) \circ f^!)$  et  $((- \otimes A) \circ f_!, f^! \circ \underline{\mathrm{Hom}}(A, -))$ . Pour prouver la commutation du diagramme de l'énoncé, il suffit de prouver que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (fg)_!(- \otimes (fg)^* A) & \xrightarrow{\sim} & (fg)_!(-) \otimes A \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ f_! g_!(- \otimes g^* f^* A) & & \\ \sim \downarrow & & \\ f_!(g_!(-) \otimes f^* A) & \xrightarrow{\sim} & f_! g_!(-) \otimes A \end{array}$$

est commutatif. Ceci découle du corollaire 2.3.39. C.Q.F.D

### 2.3.9 Compatibilité avec les 2-morphismes d'échange

Dans ce paragraphe on regroupe quelque diagrammes commutatifs décrivant des cohérences entre les morphismes définis dans la sous-section précédente et les 2-morphismes d'échange.

**PROPOSITION 2.3.56** — Supposons donné un carré cartésien de  $S$ -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} g^* f_* \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, B') & \longrightarrow & f'_* g'^* \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, B') & \longrightarrow & f'_! \underline{\mathrm{Hom}}(g'^* f^* A, g'^* B') \\ \sim \uparrow & & & & \downarrow \\ g^* \underline{\mathrm{Hom}}(A, f_* B') & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(g^* A, g^* f_* B') & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(g^* A, f'_* g'^* B') \\ & & & & \uparrow \sim \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 g^! f_* \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, B') & \xrightarrow{\sim} & f'_! g'^! \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, B') & \xrightarrow{\sim} & f'_! \underline{\mathrm{Hom}}(g'^* f^* A, g'^! B') \\
 \uparrow \sim & & & & \downarrow \sim \\
 & & & & f'_! \underline{\mathrm{Hom}}(f'^* g^* A, g'^! B') \\
 & & & & \uparrow \sim \\
 g^! \underline{\mathrm{Hom}}(A, f_* B') & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}(g^* A, g^! f_* B') & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}(g^* A, f'_! g'^! B')
 \end{array}$$

sont commutatifs pour tout  $(A, B') \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y))$ .

DEMONSTRATION On prouvera uniquement la commutation du second diagramme. Si on considère le diagramme en question comme un diagramme de foncteurs en  $B'$ , on remarque immédiatement que tous les foncteurs en question admettent des adjoints à gauche. On passant à ces adjoints on se ramène à prouver la commutation de :

$$\begin{array}{ccccccc}
 g'_!(f'^*(-) \otimes_{Y'} g'^* f^*(A)) & \xrightarrow{\sim} & g'_! f'^*(-) \otimes_Y f^*(A) & \xrightarrow{\sim} & f^* g'_!(-) \otimes_Y f^*(A) & \xrightarrow{\sim} & f^*(g'_!(-) \otimes_X A) \\
 \sim \downarrow & & & & & & \parallel \\
 g'_!(f'^*(-) \otimes_{Y'} f'^* g^*(A)) & \xrightarrow{\sim} & g'_! f'^*(- \otimes_{X'} g^*(A)) & \xrightarrow{\sim} & f^* g'_!(- \otimes_{X'} g^* A) & \xrightarrow{\sim} & f^*(g'_!(-) \otimes_X A)
 \end{array}$$

Ceci découle du corollaire 2.3.42.

C.Q.F.D

On a également :

**PROPOSITION 2.3.57** — *Supposons donné un carré cartésien de  $S$ -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 X' & \xrightarrow{g} & X
 \end{array}$$

Les diagrammes suivants :

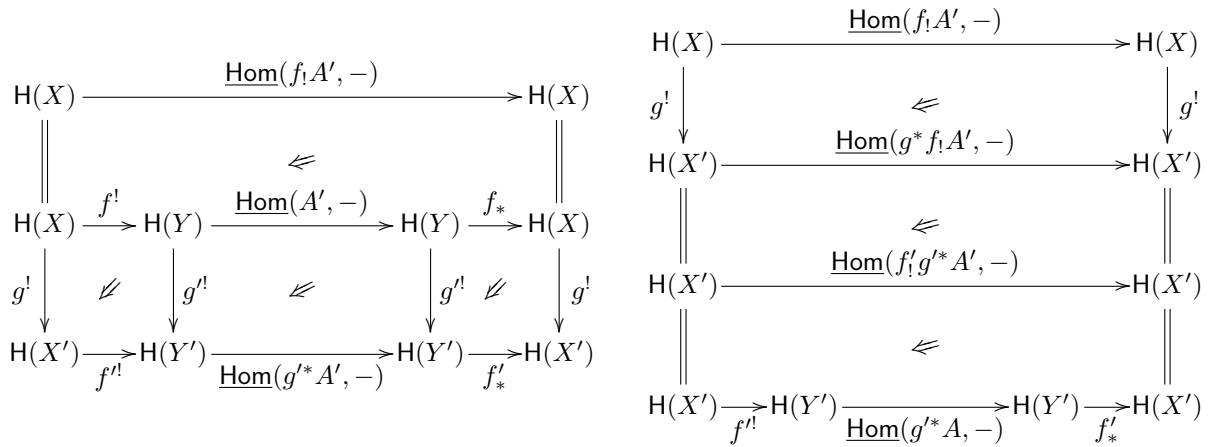
$$\begin{array}{ccccc}
 g^* f_* \underline{\mathrm{Hom}}(A', f^! B) & \longrightarrow & f'_! g'^! \underline{\mathrm{Hom}}(A', f^! B) & \longrightarrow & f'_! \underline{\mathrm{Hom}}(g'^* A', g'^! f^! B) \\
 \uparrow \sim & & & & \downarrow \\
 & & & & f'_! \underline{\mathrm{Hom}}(g'^* A', f'^! g^* B) \\
 & & & & \uparrow \sim \\
 g^* \underline{\mathrm{Hom}}(f_! A', B) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(g^* f_! A', g^* B) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}(f'_! g'^* A', g^* B)
 \end{array}$$

et

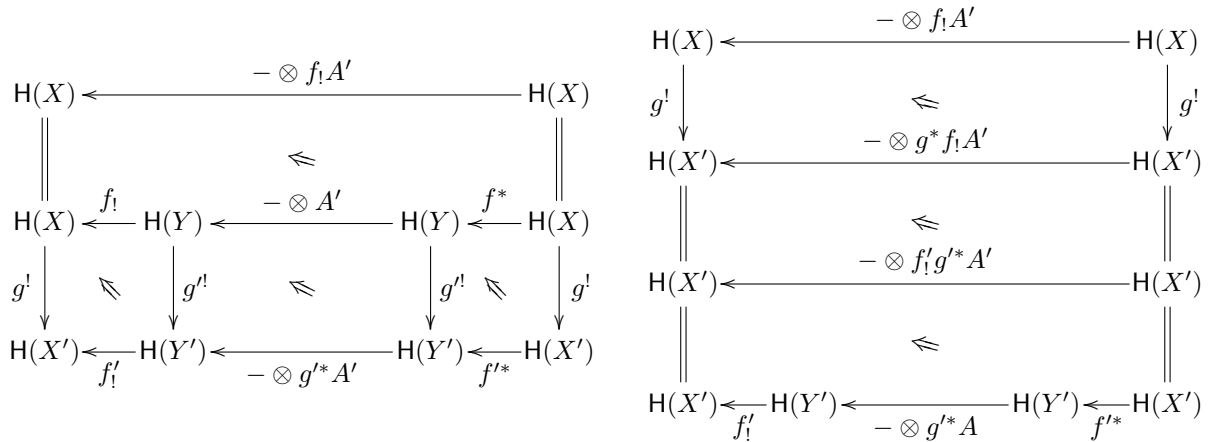
$$\begin{array}{ccccc}
 g^! f_* \underline{\mathrm{Hom}}(A', f^! B) & \xrightarrow{\sim} & f'_! g'^! \underline{\mathrm{Hom}}(A', f^! B) & \xrightarrow{\sim} & f'_! \underline{\mathrm{Hom}}(g'^* A', g'^! f^! B) \\
 \uparrow \sim & & & & \downarrow \sim \\
 & & & & f'_! \underline{\mathrm{Hom}}(g'^* A', f'^! g^! B) \\
 & & & & \uparrow \sim \\
 g^! \underline{\mathrm{Hom}}(f_! A', B) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}(g^* f_! A', g^! B) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}(f'_! g'^* A', g^! B)
 \end{array}$$

sont commutatifs pour tout  $(A', B) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X))$ .

DEMONSTRATION La preuve de la commutation du premier diagramme est complètement analogue à celle du second. On prouvera donc uniquement la commutation du second diagramme. Il s'agit de montrer que les deux diagrammes planaires suivants ont même composition :



En utilisant la compatibilité avec les compositions horizontales et verticales de la construction 1.1.9 (voir les propositions 1.1.11 et 1.1.12), on se ramène à prouver que les composées des diagrammes planaires suivants :



coïncident. Ceci découle du lemme 2.1.114 appliqué à la face carrée mixte de modules de la proposition 2.3.44. C.Q.F.D

On note finalement le résultat de cohérence ci-dessous, dont la preuve est laissée en exercice :

**PROPOSITION 2.3.58** — *Supposons donné un carré cartésien de  $S$ -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} g^* f_! \underline{\mathrm{Hom}}(A, B) & \xrightarrow{\sim} & g'^* \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, f^! B) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(g'^* f^* A, g'^* f^! B) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ f'^! g^* \underline{\mathrm{Hom}}(A, B) & \longrightarrow & f'^! \underline{\mathrm{Hom}}(g^* A, g^* B) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}(f'^! g^* A, f'^! g^* B) \end{array}$$

est commutatif.

### 2.3.10 Constructibilité, objets dualisants et dualité

On fixe un 2-foncteur monoïdal, homotopique et stable  $(\mathbf{H}, \otimes)$ . Rappelons que pour une classe d'objets  $\Lambda \subset \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(S))$  on a défini dans la section 2.2 des catégories  $\mathbf{H}_\Lambda^{\mathrm{ct}}(X)$  (voir la définition 2.2.3) pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$ . Faisons la définition suivante :

**DEFINITION 2.3.59** — Soit  $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(S))$  une classe d'objets. On dit que  $\Lambda$  est stable par  $\otimes$  si pour tout  $A$  et  $B$  de  $\Lambda$ , l'objet  $A \otimes B$  est isomorphe à un objet de  $\Lambda$ .

On a le résultat facile suivant :

**PROPOSITION 2.3.60** — Supposons que  $\Lambda$  est stable par  $\otimes$ . Alors pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$  et tout  $(E, F) \in \text{Ob}(\mathbf{H}_\Lambda^{\text{ct}}(X))^2$ , l'objet  $E \otimes_X F$  est dans  $\mathbf{H}_\Lambda^{\text{ct}}(X)$ .

DEMONSTRATION Le bifoncteur  $-\otimes-$  étant triangulé par rapport à chacune des variables, il suffira de prouver que  $E \otimes_X F$  est constructible pour  $(E, F) \in \Lambda(X)^2$ . Soient donc  $f : U \longrightarrow X$  et  $g : V \longrightarrow X$  deux  $S$ -morphisms lisses et  $(A, B) \in \Lambda^2$ . On va calculer l'objet :

$$f_{\#}A_U \otimes_X g_{\#}B_V$$

Pour cela, on forme un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} V \times_X U & \xrightarrow{pr_2} & U \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

et on note  $h = f \circ pr_2 = g \circ pr_1$ . On utilisant les isomorphismes de projection, on a :

$$f_{\#}A_U \otimes g_{\#}B_V \simeq f_{\#}(A_U \otimes f^*g_{\#}B_V) \simeq f_{\#}(A_U \otimes pr_{2\#}pr_1^*B_V) \simeq f_{\#}pr_{2\#}(pr_2^*A_U \otimes pr_1^*B_V) \simeq h_{\#}(A_{V \times_X U} \otimes B_{V \times_X U})$$

Le résultat découle alors immédiatement du fait que  $A \otimes B$  est dans  $\Lambda$  (à isomorphisme près) et que  $A_{V \times_X U} \otimes_{V \times_X U} B_{V \times_X U} \simeq (A \otimes_S B)_{V \times_X U}$ . C.Q.F.D

**DEFINITION 2.3.61** — Supposons que  $\mathbf{H}$  est fermée à gauche (resp. à droite). On dit qu'une classe d'objets  $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(S))$  est fermée à gauche (resp. à droite) si pour tout  $S$ -schéma  $X$ , avec  $X$  régulier, et pour tout  $(A, B) \in \Lambda$ , l'objet  $\underline{\text{Hom}}_{g,X}(A_X, B_X)$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}_{d,X}(A_X, B_X)$ ) est  $\Lambda$ -constructible.

**PROPOSITION 2.3.62** — On suppose que  $(\mathbf{H}, \otimes)$  est fermée à gauche (resp. à droite) et que les foncteurs  $\underline{\text{Hom}}_{g,X}(-, A)$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}_{d,X}(-, A)$ ) sont triangulés pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$  et  $A \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$ .

Soit  $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(S))$  une classe d'objets, stable par  $\otimes$ , fermée à gauche (resp. à droite) et quasi-pure. On suppose que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- $S$  admet la résolution des singularités par éclatements et  $\mathbf{H}$  est semi-séparé,
- $S$  admet la résolution des singularités par altérations et  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.

Alors pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$  et tout  $(E, F) \in \text{Ob}(\mathbf{H}_\Lambda^{\text{ct}}(X))^2$  l'objet  $\underline{\text{Hom}}_{g,X}(E, F)$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}_{d,X}(E, F)$ ) est dans  $\mathbf{H}_\Lambda^{\text{ct}}(X)$ .

DEMONSTRATION On traite uniquement le cas non-respé. Le bifoncteur  $\underline{\text{Hom}}_{g,X}(-, -)$  étant triangulé par rapport à chacune des variables, on se ramène par la proposition 2.2.27 à supposer que  $E$  est dans  $\Lambda(X)$  et que  $F$  est dans  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)$ . On peut donc supposer que :

- $E = u_{\#}A_U$  avec  $u : U \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme lisse et  $A \in \Lambda$ ,
- $F = f_*B_Y(n)$  avec  $f : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme projectif de source un schéma régulier,  $n \in \mathbb{Z}$  et  $B \in \Lambda$ .

On se ramène immédiatement au cas  $n = 0$ . Par la proposition 2.3.52, on a un isomorphisme :

$$\underline{\text{Hom}}_{d,X}(u_{\#}A_U, f_*B_Y) \simeq u_*\underline{\text{Hom}}_{d,U}(A_U, u^*f_*B_Y)$$

On sait par la scholie 2.2.34 que sous les conditions de l'énoncé, le foncteur  $u_*$  envoie les objets  $\Lambda$ -constructibles sur des objets  $\Lambda$ -constructibles. Il suffit de montrer que  $\underline{\text{Hom}}_{d,U}(A_U, u^*f_*B_Y)$  est dans  $\mathbf{H}_\Lambda^{\text{ct}}(U)$ . Formons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{v} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

Le 2-morphisme d'échange  $Ex_*^*$  associé à ce carré est inversible. On a alors :

$$\underline{\text{Hom}}_{d,U}(A_U, u^*f_*B_Y) \simeq \underline{\text{Hom}}_{d,U}(A_U, g_*v^*B_Y) \simeq g_*\underline{\text{Hom}}_{d,V}(A_V, B_V)$$

Le foncteur  $g_*$  envoie les objets constructibles sur des objets constructibles. Le résultat découle alors du fait que  $\Lambda$  est fermée à gauche et que le schéma  $V$  est régulier puisque lisse sur  $Y$ . C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.3.63** — On garde les hypothèses de la proposition 2.3.62. Il existe une structure de 2-foncteur monoïdal homotopique stable sur les catégories  $\mathbf{H}^{\text{ct}}(-)$  induite par les inclusions  $\mathbf{H}^{\text{ct}}(-) \subset \mathbf{H}(-)$ . De plus les catégories monoïdales  $\mathbf{H}^{\text{ct}}(-)$  sont fermées à gauche (resp. à droite).

**Remarque 2.3.64** — Le cas le plus important est celui où  $(\mathbf{H}, \otimes)$  est unitaire et  $\Lambda$  égal à l'ensemble  $\mathbf{1}(\mathbb{Z}) = \{\mathbf{1}(n); n \in \mathbb{Z}\}$  avec  $\mathbf{1}$  l'objet unité de  $\mathbf{H}(S)$ . Les conditions de  $\otimes$ -stabilité et de fermeture à gauche ou à droite sont alors immédiates.

On a donc le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 2.3.65** — *On suppose que  $S$  est le spectre d'un corps parfait  $k$ . On suppose également que  $(\mathbf{H}, \otimes)$  est fermé à gauche (resp. à droite) et que les foncteurs  $\underline{\mathbf{Hom}}_{g,X}(-, A)$  (resp.  $\underline{\mathbf{Hom}}_{d,X}(-, A)$ ) sont triangulés pour tout  $k$ -schéma quasi-projectif  $X$  et  $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{H}(X))$ .*

*Si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- $k$  admet la résolution des singularités par éclatements et  $\mathbf{H}$  est semi-séparé,
- $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé,

*alors pour tout  $k$ -schéma quasi-projectif  $X$  et tout  $(E, F) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{H}_{\mathbf{1}(\mathbb{Z})}^{\text{ct}}(X))^2$ , l'objet  $\underline{\mathbf{Hom}}_{g,X}(E, F)$  (resp.  $\underline{\mathbf{Hom}}_{d,X}(E, F)$ ) est dans  $\mathbf{H}_{\mathbf{1}(\mathbb{Z})}^{\text{ct}}(X)$ .*

On fait la définition suivante :

**DEFINITION 2.3.66** — *On suppose que le 2-foncteur monoïdal homotopique et stable  $(\mathbf{H}, \otimes)$  est fermé à droite et à gauche. On se donne une classe d'objets  $\Lambda \subset \mathbf{Ob}(\mathbf{H}(S))$ . Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. Un objet  $R$  de  $\mathbf{H}(X)$  est dit  $\Lambda$ -dualisant si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- L'objet  $R$  est  $\Lambda$ -constructible,
- Pour tout objet  $\Lambda$ -constructible  $A$  de  $\mathbf{H}(X)$ , les morphismes :

$$A \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathbf{Hom}}_{d,X}(A, R), R) \quad \text{et} \quad A \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_{d,X}(\underline{\mathbf{Hom}}_{g,X}(A, R), R)$$

*sont inversibles.*

**Remarque 2.3.67** — Supposons que les hypothèses de la proposition 2.3.62 sont vérifiées dans le cas non-respé ainsi que le cas respé. Il vient par le corollaire 2.3.63, qu'un objet  $\Lambda$ -dualisant de  $\mathbf{H}(X)$  est simplement un objet dualisant de la catégorie monoïdale fermée à droite et à gauche  $\mathbf{H}_{\Lambda}^{\text{ct}}(X)$ .

Le résultat suivant est une conséquence directe de la remarque précédente et la proposition 2.1.139 :

**PROPOSITION 2.3.68** — *Supposons que les hypothèses de la proposition 2.3.62 sont vérifiées dans le cas non-respé ainsi que le cas respé. On se donne un  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$ .*

**1-** *Soient  $R$  un objet  $\Lambda$ -dualisant et  $U$  un objet inversible et  $\Lambda$ -constructible de  $\mathbf{H}(X)$ . Alors, les objets  $U \otimes R$  et  $R \otimes U$  sont  $\Lambda$ -dualisants.*

**2-** *Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux objets  $\Lambda$ -dualisants de  $\mathbf{H}(X)$ . Les objets  $\underline{\mathbf{Hom}}_{d,X}(R_1, R_2)$  et  $\underline{\mathbf{Hom}}_{g,X}(R_1, R_2)$  sont inversibles et  $\Lambda$ -constructibles. De plus, les morphismes d'évaluations :*

$$\underline{\mathbf{Hom}}_{d,X}(R_1, R_2) \otimes_X R_1 \longrightarrow R_2 \quad \text{et} \quad R_1 \otimes_X \underline{\mathbf{Hom}}_{g,X}(R_1, R_2) \longrightarrow R_2$$

*sont inversibles.*

Ainsi, sous les bonnes hypothèses, un objet  $\Lambda$ -dualisant de  $\mathbf{H}(X)$  est unique à un objet inversible (et  $\Lambda$ -constructible) près. Toutefois, un tel objet n'existe pas toujours. Dans le reste de la section, on décrira des conditions assurant l'existence d'objets  $\Lambda$ -dualisants. On fait la définition suivante :

**DEFINITION 2.3.69** — *On dit que la classe d'objets  $\Lambda$  est bonne pour la dualité lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :*

- L'objet unité  $\mathbf{1}$  est dans  $\Lambda$ .
- Pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$  avec  $X$  régulier, les morphismes :

$$A_X \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathbf{Hom}}_{d,X}(A_X, \mathbf{1}_X), \mathbf{1}_X) \quad \text{et} \quad A_X \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_{d,X}(\underline{\mathbf{Hom}}_{g,X}(A_X, \mathbf{1}_X), \mathbf{1}_X)$$

*sont inversibles pour tout  $A \in \Lambda$ .*

**Remarque 2.3.70** — L'ensemble  $\mathbf{1}(\mathbb{Z})$  est bon pour la dualité. En effet, les objets de cet ensemble sont inversibles. Or pour  $U$  un objet inversible, on a bien  $U \simeq \underline{\mathbf{Hom}}_g(\underline{\mathbf{Hom}}_d(U, \mathbf{1}), \mathbf{1})$ .

On introduit l'hypothèse suivante :

**HYPOTHÈSE 2.3.71** — **1-** Le schéma  $S$  est régulier. De plus, l'une des deux alternatives suivantes est vraie :

- $S$  admet la résolution des singularités par éclatements et  $\mathbf{H}$  est semi-séparé,
- $S$  admet la résolution des singularités par altérations et  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.



2- Le 2-foncteur monoïdal unitaire, homotopique et stable  $(\mathbf{H}, \otimes, \mathbb{1})$  est fermé à gauche et à droite. De plus les foncteurs  $\underline{\text{Hom}}_{g,X}(-, A)$  et  $\underline{\text{Hom}}_{d,X}(-, A)$  sont triangulés pour tout  $S$ -schéma  $X$  et  $A \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$ .

3- La classe  $\Lambda$  est bonne pour la dualité. De plus, elle est stable par  $\otimes$ , fermée à droite et à gauche et quasi-pure.

4- Pour tout morphisme  $f : Y \longrightarrow X$  de  $S$ -schémas quasi-projectifs, avec  $X$  et  $Y$  réguliers, l'objet  $f^! \mathbb{1}_X$  est inversible au sens de 2.1.126.

Avant d'énoncer et d'établir le théorème d'existence d'objets dualisants, on note un lemme technique :

**LEMME 2.3.72** — *On suppose que le 2-foncteur monoïdal homotopique et stable  $(\mathbf{H}, \otimes)$  est fermé à gauche et à droite. Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Pour tout  $(A, R) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y)) \times \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$ , le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
 f_! A & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{g,X}(\underline{\text{Hom}}_{d,X}(f_! A, R), R) \\
 \downarrow & & \downarrow \sim \\
 & & \underline{\text{Hom}}_{g,X}(f_* \underline{\text{Hom}}_{d,Y}(A, f^! R), R) \\
 & & \downarrow \\
 & & \underline{\text{Hom}}_{g,X}(f_! \underline{\text{Hom}}_{d,Y}(A, f^! R), R) \\
 & & \downarrow \sim \\
 f_* A & \longrightarrow & f_* \underline{\text{Hom}}_{g,Y}(\underline{\text{Hom}}_{d,Y}(A, f^! R), f^! R)
 \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION On utilisera dans cette démonstration le module  $[f_*, f_!]$  (voir la définition 2.3.45) ainsi que les résultats de la sous-section 2.3.7. On divise la preuve en deux étapes :

Étape 1 : Soient  $E$  et  $F$  des objets de  $\mathbf{H}(Y)$ . Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 f_! F & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{g,X}(f_*(E), f_*(E) \otimes_X f_!(F)) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{g,X}(f_!(E), f_!(E \otimes_Y F)) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 f_* F & \longrightarrow & f_* \underline{\text{Hom}}_{g,Y}(E, E \otimes_Y F) & \longrightarrow & f_* \underline{\text{Hom}}_{g,Y}(E, f^! f_!(E \otimes_Y F))
 \end{array}$$

et montrons qu'il est commutatif. Notons  $a$  et  $b$  les deux flèches :

$$f_! F \longrightarrow f_* \underline{\text{Hom}}_{g,Y}(E, f^! f_!(E \otimes_Y F))$$

obtenues en prenant les deux composées possibles dans ce diagramme. On supposera que  $a$  est la composée longue et  $b$  la composée courte. Par l'adjonction  $(f_!(B \otimes_Y f^*(-)), f_* \underline{\text{Hom}}_{g,Y}(B, f^!(-)))$ , les flèches  $a$  et  $b$  correspondent respectivement à deux flèches  $a'$  et  $b'$  :

$$f_!(E \otimes_Y f^* f_!(F)) \longrightarrow f_!(E \otimes_Y F)$$

Il est facile de voir que  $a'$  est la composée :

$$f_!(E \otimes_Y f^* f_!(F)) \xrightarrow{\sim} f_!(E) \otimes_X f_!(F) \longrightarrow f_*(E) \otimes_X f_!(F) \longrightarrow f_!(E \otimes_Y F)$$

alors que  $b'$  est simplement la composée :

$$f_!(E \otimes_Y f^* f_!(F)) \longrightarrow f_!(E \otimes_Y f^* f_*(F)) \longrightarrow f_!(E \otimes_Y F)$$

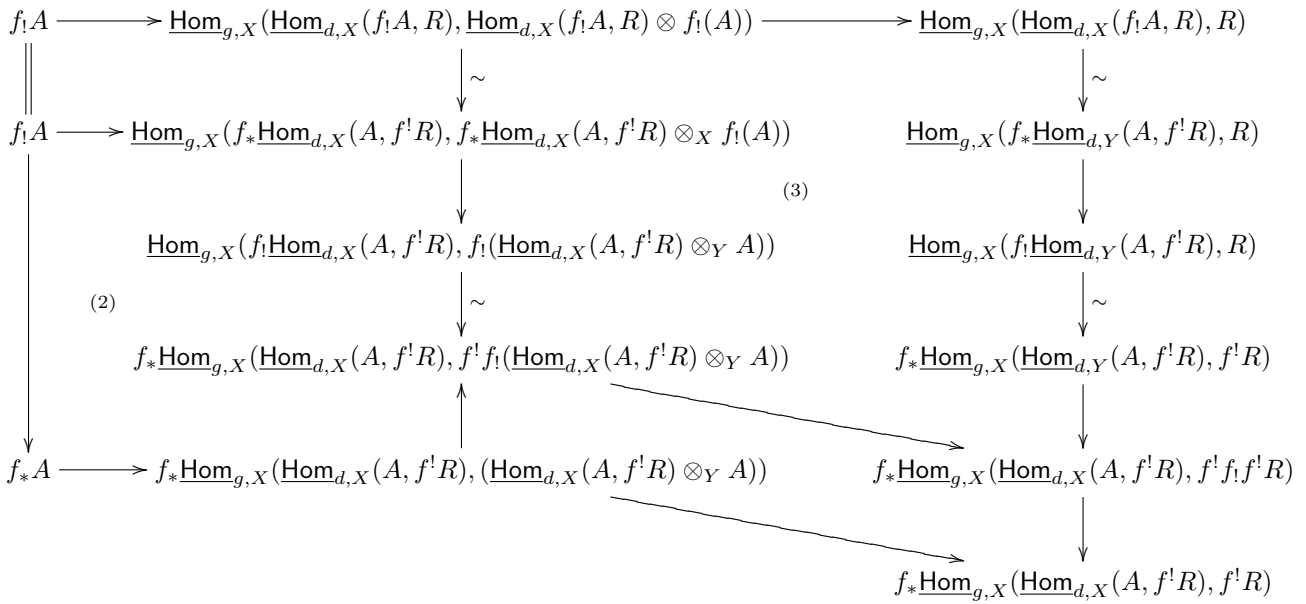
Pour montrer que  $a' = b'$ , on démontre que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 f_!(E \otimes_Y f^* f_!(F)) & \xrightarrow{\sim} & f_!(E) \otimes_X f_!(F) & \longrightarrow & f_*(E) \otimes_X f_!(F) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 f_!(E \otimes_Y f^* f_*(F)) & \xrightarrow{\sim} & f_!(E) \otimes_X f_*(F) & \longrightarrow & f_!(E \otimes_Y F) \\
 & & \uparrow \sim & & \\
 & & f_!(E \otimes_X f^* f_*(F)) & & 
 \end{array}$$

(1)

Le carré (1) commute par le corollaire 2.3.49. L'autre carré commute pour des raisons triviales. La partie restante du diagramme commute par le définition même du morphisme structural du module  $[f_*, f_!]$ .

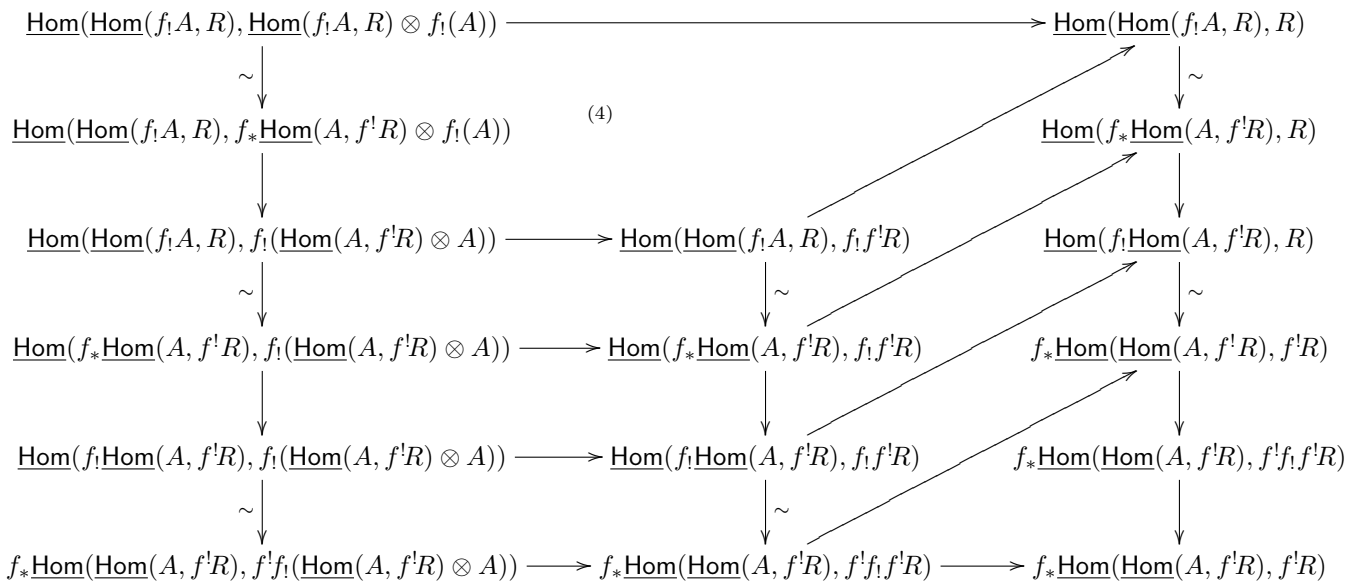
Étape 2 : Avec le résultat de l'étape 1 en main, on prouvera notre lemme. On considère le diagramme :



Pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que le bord de ce diagramme commutatif. La partie (2) de ce diagramme n'est rien d'autre que le diagramme commutatif de l'étape 1 appliqué à  $F = A$  et  $E = \underline{\text{Hom}}_{g,X}(A, f^!R)$ . Le petit parallélogramme en bas et le petit rectangle en haut sont clairement commutatifs. Ainsi, le lemme sera vrai si le sous-diagramme (3) est commutatif. Malheureusement, le diagramme (3) ne commute pas. Mais pour la preuve du lemme, on peut se contenter de prouver que le morphisme :

$$(2.38) \quad f_*\underline{\text{Hom}}_{g,X}(\underline{\text{Hom}}_{d,X}(A, f^!R), f^!f_!f^!R) \longrightarrow f_*\underline{\text{Hom}}_{g,X}(\underline{\text{Hom}}_{d,Y}(A, f^!R), f^!R)$$

égalise les deux composées du bord du sous-diagramme (3). Pour démontrer cela, on factorise le diagrammes (3) (auquel on rajoute la flèche (2.38)) en plusieurs petits diagrammes. On obtient alors le diagramme ci-dessous. Pour des raisons de place, on s'est débarrassé des décorations évidentes en écrivant  $\underline{\text{Hom}}$  à la place de  $\underline{\text{Hom}}_{g,X}$ ,  $\underline{\text{Hom}}_{g,Y}$ ,  $\underline{\text{Hom}}_{d,X}$ ,  $\underline{\text{Hom}}_{d,Y}$  et  $\otimes$  à la place de  $\otimes_X$ ,  $\otimes_Y$ .



Toutes les composantes de ce diagramme commutent pour des raisons triviales sauf la partie (4). Ainsi on achèvera la

preuve du lemme lorsqu'on prouvera que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_!(A), R) \otimes_X f_!(A) & \longrightarrow & R \\
 \downarrow \sim & & \uparrow \\
 f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, f^!R) \otimes_X f_!(A) & & \\
 \downarrow & & \\
 f_!(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, f^!R) \otimes_Y f^!(A)) & \longrightarrow & f_!f^!R
 \end{array}$$

est commutatif. Pour cela, on écrit le diagramme en question en explicitant le morphisme structural du module  $[f_*, f_!]$  :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_!(A), R) \otimes_X f_!(A) & \longrightarrow & & & & & R \\
 \downarrow \sim & & & & & & \parallel \\
 f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^!R) \otimes_X f_!(A) & & & & & & \\
 \downarrow \sim & & & & & & \\
 f_!(f^* f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^!R) \otimes_Y A) & \longrightarrow & f_!(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^!R) \otimes_Y A) & \longrightarrow & f_!f^!R & \longrightarrow & R
 \end{array}$$

On voit alors apparaître, les morphismes de counité des quatre adjonctions :

$$(- \otimes_X f_!A, \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_!(A), -)), (f^*, f_*), (- \otimes_Y A, \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, -)) \text{ et } (f_!, f^!)$$

Le diagramme considéré est celui exprimant la compatibilité des 2-morphismes de counité avec l'isomorphisme de couples de foncteurs adjoints :

$$(- \otimes_X f_!A, \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_!(A), -)) \simeq (f_! \circ (- \otimes_Y A) \circ f^*, f_* \circ \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, -) \circ f^!)$$

Le lemme est finalement prouvé.

C.Q.F.D

Le théorème d'existence d'objets  $\Lambda$ -dualisants est le suivant :

**THEOREME 2.3.73** — *On suppose que l'hypothèse 2.3.71 est satisfaite.*

1- *Soit  $X$  est un  $S$ -schéma quasi-projectif avec  $X$  régulier, l'objet  $\mathbb{1}_X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(X))$  est  $\Lambda$ -dualisant.*

2- *Pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $a : X \longrightarrow S$ , l'objet  $a^! \mathbb{1}_S \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(X))$  est  $\Lambda$ -dualisant.*

3- *Soient  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs et  $R$  un objet  $\Lambda$ -dualisant de  $\mathbf{H}(X)$ . Alors  $f^!R$  est un objet  $\Lambda$ -dualisant de  $\mathbf{H}(Y)$ .*

DEMONSTRATION 1- Par  $\otimes$ -dualité, il suffit de prouver que la transformation naturelle (de foncteurs triangulés) :

$$(2.39) \quad \mathrm{id}_{\mathbf{H}(X)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(-, \mathbb{1}_X), \mathbb{1}_X)$$

est inversible lorsqu'elle est évaluée en un objet  $\Lambda$ -constructible de  $\mathbf{H}(X)$ . Par la proposition 2.2.27, il suffit en fait d'évaluer en un objet de  $\Lambda_{*,proj-reg}(X)$ .

Soit donc  $f : Y \longrightarrow X$  un  $S$ -morphisme projectif de source un schéma régulier. On montrera que (2.39) est un isomorphisme lorsqu'on l'évalue en  $f_* A_Y(n)$  avec  $A \in \Lambda$ . On se ramène immédiatement au cas  $n = 0$ . Par le lemme 2.3.72, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 f_! A_Y & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_! A_Y, \mathbb{1}_X), \mathbb{1}_X) \\
 \downarrow & & \downarrow \sim \\
 & & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A_Y, f^! \mathbb{1}_X), \mathbb{1}_X) \\
 & & \downarrow \\
 & & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_! \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A_Y, f^! \mathbb{1}_X), \mathbb{1}_X) \\
 & & \downarrow \sim \\
 f_* A_Y & \longrightarrow & f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A_Y, f^! \mathbb{1}_X), f^! \mathbb{1}_X)
 \end{array}$$

Étant donné que  $f$  est projectif, les flèches verticales de ce diagramme sont inversibles. Ceci nous ramène à prouver que le morphisme :

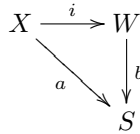
$$A_Y \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{g,Y}(\underline{\text{Hom}}_{d,Y}(A_Y, f^! \mathbb{1}_X), f^! \mathbb{1}_X)$$

est inversible. Par l'hypothèse 2.3.71, l'objet  $f^! \mathbb{1}_X$  est inversible étant donné que  $X$  et  $Y$  sont réguliers. Il suffit de prouver que :

$$A_Y \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{g,Y}(\underline{\text{Hom}}_{d,Y}(A_Y, \mathbb{1}_Y), \mathbb{1}_Y)$$

est inversible (voir pour cela la preuve de la proposition 2.1.138). Ceci est vrai puisque la classe  $\Lambda$  est bonne pour la dualité.

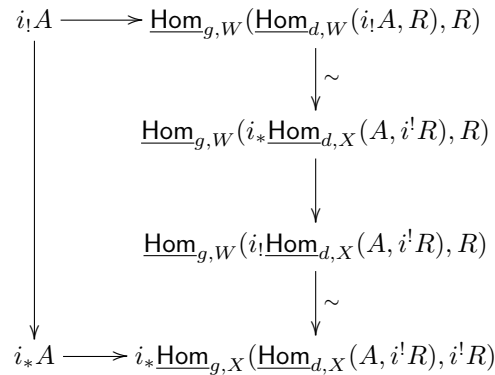
**2-** Par la partie **1**, l'objet  $a^! \mathbb{1}$  est dualisant lorsque  $S$  est régulier. En effet, puisque le schéma de base  $S$  est régulier, on sait que  $a^! \mathbb{1}_S$  est un objet inversible et  $\Lambda$ -constructible. Mais on vient de démontrer que  $\mathbb{1}_X$  est dualisant. Pour traiter le cas général, on choisit une immersion fermée de  $X$  dans un  $S$ -schéma  $W$  avec  $W$  régulier (ou même lisse sur  $S$ ) :



Il suffit alors de prouver l'énoncé de **3** pour  $i$ . En effet, on sait que  $b^! \mathbb{1}_S$  est dualisant et  $a^! \mathbb{1}_S \simeq i^! b^! \mathbb{1}_S$ . On suppose donc donné un objet  $\Lambda$ -dualisant  $R$  de  $\text{H}(W)$ . Soit  $A$  un objet  $\Lambda$ -constructible de  $\text{H}(X)$ . On sait par la proposition 2.2.8 que  $i_* A$  est  $\Lambda$ -constructible. Il vient que :

$$i_* A \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{g,W}(\underline{\text{Hom}}_{d,W}(i_* A, R), R)$$

est inversible. Mais en appliquant encore une fois le lemme 2.3.72, on a un diagramme commutatif :



Ceci prouve que :

$$A \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{g,X}(\underline{\text{Hom}}_{d,X}(A, i^! R), i^! R)$$

devient un isomorphisme lorsqu'on lui applique le foncteur  $i_*$ . Le résultat découle alors du fait que  $i_*$  est conservatif puisqu'il admet un quasi-inverse à gauche, à savoir  $i^*$ .

**3-** Il est maintenant aisé de prouver la troisième partie du théorème. En effet si  $R$  est un objet  $\Lambda$ -dualisant de  $\text{H}(X)$ , on sait par la proposition 2.3.68 qu'il existe un objet inversible et  $\Lambda$ -constructible  $U$  tel que  $R \simeq U \otimes_X a^! \mathbb{1}_S$  (avec  $a$  le morphisme structural du  $S$ -schéma  $X$ ). Si  $V$  est un inverse de  $U$ , on a également  $R \simeq \underline{\text{Hom}}_{d,X}(V, a^! \mathbb{1}_S)$ . En utilisant la proposition 2.3.55, on obtient des isomorphismes :

$$f^!(R) \simeq f^! \underline{\text{Hom}}_{d,X}(V, a^! \mathbb{1}_S) \simeq \underline{\text{Hom}}_{d,Y}(f^* V, f^! a^! \mathbb{1}_S)$$

L'objet  $f^!(R)$  est donc  $\Lambda$ -dualisant puisque  $f^* V$  est un objet inversible et  $\Lambda$ -constructible et  $f^! a^! \mathbb{1}_S \simeq (f \circ a)^! \mathbb{1}_S$  est  $\Lambda$ -dualisant par la partie **2**. Le théorème est prouvé. C.Q.F.D

**DEFINITION 2.3.74** — *On suppose que l'hypothèse 2.3.71 est satisfaite. Pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$  de morphisme structural  $a : X \longrightarrow S$ , on notera  $\text{D}_{g,X}$  et  $\text{D}_{d,X}$  les foncteurs de dualité :*

$$\underline{\text{Hom}}_{g,X}(-, a^! \mathbb{1}_S) : \text{H}_\Lambda^{\text{ct}}(X) \longrightarrow \text{H}_\Lambda^{\text{ct}}(X)^{\text{op}} \quad \text{et} \quad \underline{\text{Hom}}_{d,X}(-, a^! \mathbb{1}_S) : \text{H}_\Lambda^{\text{ct}}(X) \longrightarrow \text{H}_\Lambda^{\text{ct}}(X)^{\text{op}}$$

qu'on a restreint aux sous-catégories des objets  $\Lambda$ -constructibles.

On résume les propriétés essentielles des foncteurs de dualités dans le théorème suivant :

**THEOREME 2.3.75** — *On suppose que l'hypothèse 2.3.71 est satisfaite. Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. Les foncteurs de dualité  $D_{g,X}$  et  $D_{d,X}$  sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre. De plus, si  $f : Y \longrightarrow X$  est un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs, on des isomorphismes de commutation à la dualité :*

- $D_{g,Y} \circ f^* \xrightarrow{\sim} f^! \circ D_{g,X}$  et  $D_{d,Y} \circ f^* \xrightarrow{\sim} f^! \circ D_{d,X}$ ,
- $f^* \circ D_{g,X} \xrightarrow{\sim} D_{g,Y} \circ f^!$  et  $f^* \circ D_{d,X} \xrightarrow{\sim} D_{d,Y} \circ f^!$ ,
- $D_{g,X} \circ f_! \xrightarrow{\sim} f_* \circ D_{g,Y}$  et  $D_{d,X} \circ f_! \xrightarrow{\sim} f_* \circ D_{d,Y}$ ,
- $f_! \circ D_{g,Y} \xrightarrow{\sim} D_{g,X} \circ f_*$  et  $f_! \circ D_{d,Y} \xrightarrow{\sim} D_{d,X} \circ f_*$ .

On fera attention que dans les 2-isomorphismes ci-dessus, les notations  $f^*$ ,  $f_*$ ,  $f_!$  et  $f^!$  désignent les restrictions des quatre opérations usuelles aux objets  $\Lambda$ -constructibles.

DEMONSTRATION Le fait que les foncteurs de dualité sont des équivalences lorsqu'on se restreint aux objets  $\Lambda$ -constructibles est clair.

On note  $a$  (resp.  $b$ ) le morphisme structural du  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$  (resp.  $Y$ ). Ainsi  $b = a \circ f$ . L'isomorphisme  $f^! D_{g,X} \xrightarrow{\sim} D_{g,Y} f^*$  est la composée :

$$f^! \underline{\text{Hom}}_{g,X}(A, a^! \mathbb{1}_S) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_{g,Y}(f^*(A), f^! a^! \mathbb{1}_S) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_{g,Y}(f^*(A), b^! \mathbb{1}_S)$$

En utilisant les adjonctions  $(D_g, D_d)$  et  $(D_d, D_g)$  on déduit la deuxième ligne d'isomorphismes.

L'isomorphisme  $D_{g,X} \circ f_! \xrightarrow{\sim} f_* \circ D_{g,Y}$  est la composée :

$$\underline{\text{Hom}}_{g,X}(f_! A, a^! \mathbb{1}_S) \xrightarrow{\sim} f_* \underline{\text{Hom}}_{g,Y}(A, f^! a^! \mathbb{1}_S) \xrightarrow{\sim} f_* \underline{\text{Hom}}_{g,Y}(A, b^! \mathbb{1}_S)$$

En utilisant les adjonctions  $(D_g, D_d)$  et  $(D_d, D_g)$  on déduit la dernière ligne d'isomorphismes.

C.Q.F.D

On note le résultat de cohérence suivant :

**PROPOSITION 2.3.76** — *On suppose l'hypothèse 2.3.71 satisfaite. Soit un carré cartésien de  $S$ -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccccc} g^! D_{g,X} f_! & \xrightarrow{\sim} & g^! f_* D_{g,Y} & \xrightarrow{\sim} & f'_* g'^! D_{g,Y} \\ \uparrow \sim & & & & \uparrow \sim \\ D_{g,Y} g^* f_! & \xrightarrow{\sim} & D_{g,Y} f'_! g'^* & \xrightarrow{\sim} & f'_* D_{g,Y} g'^* \end{array}$$

DEMONSTRATION On note  $a$  le morphisme structural du  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$ . Par la proposition 2.3.57, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} g^! f_* \underline{\text{Hom}}(A, f^! a^! \mathbb{1}_S) & \xrightarrow{\sim} & f'_* g'^! \underline{\text{Hom}}(A, f^! a^! \mathbb{1}_S) & \xrightarrow{\sim} & f'_* \underline{\text{Hom}}(g'^* A, g'^! f^! a^! \mathbb{1}_S) \\ \uparrow \sim & & & & \downarrow \sim \\ & & & & f'_* \underline{\text{Hom}}(g'^* A, f'^! g'^! a^! \mathbb{1}_S) \\ & & & & \uparrow \sim \\ g^! \underline{\text{Hom}}(f_! A, a^! \mathbb{1}_S) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\text{Hom}}(g^* f_! A, g^! a^! \mathbb{1}_S) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\text{Hom}}(f'_! g'^* A, g^! a^! \mathbb{1}_S) \end{array}$$

On obtient le diagramme de l'énoncé en composant par des 2-isomorphismes de connexion de  $h^!$ . Les détails sont faciles et laissés en exercice.

C.Q.F.D

## 2.4 Dérivateurs algébriques homotopiques et stables

La notion de dérivateurs algébriques est un mariage entre la notion de dérivateurs de Grothendieck et celle de 2-foncteurs homotopiques stables. Comme pour les dérivateurs habituels, un dérivateur motivique constitue le cadre idéal pour faire de l'homotopie motivique de "façon propre", i.e., sans avoir besoin de retourner à la catégorie de modèles.

Dans le chapitre suivant, on a choisi de développer la théorie des cycles évanescents dans un dérivateur algébrique homotopique et stable, plutôt que de le faire pour **SH** et pour **DM** qui sont sans aucun doute les deux cas les plus importants. Nous renvoyons le lecteur à l'introduction pour la justification de ce choix.

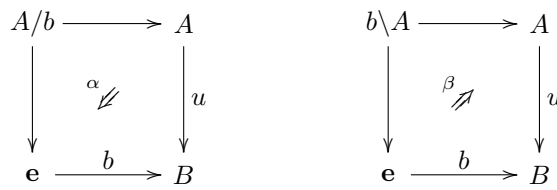
Ainsi, les dérivateurs algébriques apparaissent dans cette thèse comme un outil et non comme un objet d'étude en soi. Pour cela, l'exposition sera axée sur les résultats utiles pour le chapitre suivant. La définition proposée est loin d'être la meilleure possible.

### 2.4.1 Les 2-catégories de diagrammes de $S$ -schémas

Dans la suite, on fixe une sous-catégorie pleine **Dia** de la 2-catégorie stricte des petites catégories vérifiant les conditions suivantes :

- **D0** : La catégorie vide  $\emptyset$ , la catégorie ponctuelle **e**, et la catégorie  $\mathbf{1} = \{0 \rightarrow 1\}$  sont des objets de **Dia**.
- **D1** : La 1-catégorie sous-jacente à **Dia** est stable par coproduits finis et produits fibrés.
- **D2** : Pour tout foncteur  $u : A \longrightarrow B$  de **Dia** et  $b \in \text{Ob}(B)$ , les catégories  $A/b$  et  $b \setminus A$  sont dans **Dia**.

**Remarque 2.4.1** — Rappelons que la catégorie  $A/b$  de **D2** a pour objets les couples  $(a, f)$  avec  $a \in \text{Ob}(A)$  et  $f : u(a) \rightarrow b \in \text{Fl}(B)$ . Une flèche de  $A/b$  entre deux objets  $(a, f)$  et  $(a', f')$  est simplement une flèche  $g : a \rightarrow a' \in \text{Fl}(A)$  telle que  $f = f' \circ u(g)$ . On définit  $b \setminus A$  de telle sorte que  $(b \setminus A)^{\text{op}} = A^{\text{op}}/b$ . Les deux faces :



jouent un rôle important dans la théorie des dérivateurs à cause de l'axiome 4 de la définition 2.1.34.

On appellera dans la suite **Dia** la 2-catégorie des diagrammes.

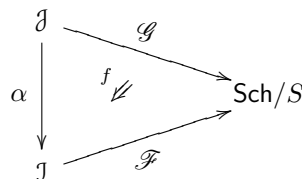
**DEFINITION 2.4.2** — Soit  $\mathcal{J}$  une petite catégorie. La catégorie des  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs est la catégorie des foncteurs covariants de  $\mathcal{J}$  dans  $\text{Sch}/S$ . La catégorie  $\mathcal{J}$  est appelée parfois la catégorie d'indices.

**Remarque 2.4.3** — Plus généralement on a la catégorie des  $\mathcal{J}$ -diagrammes en objets de  $\mathcal{C}$  pour n'importe quel catégorie  $\mathcal{C}$ . En particulier on peut parler de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de schémas pas forcément de type fini sur une base.

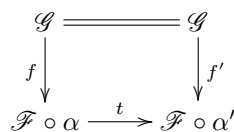
Lorsqu'on fait varier la catégorie d'indices, on obtient la catégorie des diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs :

**DEFINITION 2.4.4** — La 2-catégorie  $\text{DiaSch}/S$  des diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs est définie de la manière suivante :

- Un objet de  $\text{DiaSch}/S$  est un couple  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  avec  $\mathcal{J}$  une catégorie de **Dia** et  $\mathcal{F} : \mathcal{J} \longrightarrow \text{Sch}/S$  un foncteur covariant.
- Un 1-morphisme d'un diagramme de  $S$ -schémas quasi-projectifs  $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$  vers  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  est la donnée d'un foncteur  $\alpha : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$  et d'une transformation naturelle  $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \circ \alpha$ . En d'autres termes, un 1-morphisme de  $\text{DiaSch}/S$  est une face dans la 2-catégorie des catégories :



- Supposons donnés deux 1-morphismes  $(f, \alpha)$  et  $(f', \alpha')$  entre les diagrammes de  $S$ -schémas  $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$  et  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ . Un 2-morphisme dans  $\text{DiaSch}/S$  de  $(f, \alpha)$  vers  $(f', \alpha')$  est la donnée d'une transformation naturelle  $t : \alpha \longrightarrow \alpha'$  telle que le carré suivant :

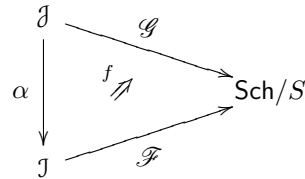


soit commutatif.

La 2-catégorie  $\text{DiaSch}/S$  ainsi définie est une 2-catégorie stricte.

**Remarque 2.4.5** — Il va sans dire qu'on peut définir de la même façon la 2-catégorie stricte  $\text{Dia } \mathcal{C}$  des diagrammes en objets de  $\mathcal{C}$  pour toute catégorie  $\mathcal{C}$ . On peut ainsi parler des diagrammes de schémas pas forcément de type fini sur une base.

**Remarque 2.4.6** — Il est possible de définir une autre variante de la 2-catégorie de diagrammes de schémas ayant pour objets les mêmes couples  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  mais pour 1-morphismes les faces :



Cette 2-catégorie est simplement la 2-opposée de la 2-catégorie  $\text{Dia}(\text{Sch}/S)^{\text{op}}$  dans la notation de la remarque précédente, avec  $(\text{Sch}/S)^{\text{op}}$  la catégorie opposée à  $\text{Sch}/S$ . Il est probable que cette deuxième catégorie de "diagrammes de  $S$ -schémas" doit jouer un rôle dans une définition complète de la notion de dérivateurs algébriques. L'auteur avoue ne pas avoir trop réfléchi à la question étant donné que son objectif est d'avoir une définition fonctionnelle et suffisante pour développer le formalisme des cycles évanescents.

**Remarque 2.4.7** — **1-** Supposons donnés un diagramme de  $S$ -schémas quasi-projectifs  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  et un foncteur  $p : \mathcal{J}' \longrightarrow \mathcal{J}$ . On obtient un deuxième diagramme de  $S$ -schémas en prenant la composée  $\mathcal{F} \circ p$ . On a même un morphisme évident  $p = (\text{id}, p) : (\mathcal{F} \circ p, \mathcal{J}') \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$ .

**2-** Tout 1-morphisme  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  de  $\text{DiaSch}/S$  se factorise de la manière suivante :

$$(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \xrightarrow{f} (\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{F}, \mathcal{J})$$

avec  $f$  un morphisme de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas. On dira que  $f$  est la partie géométrique et  $\alpha$  la partie catégorique. Cette factorisation est fonctorielle pour les 2-morphismes de  $\text{DiaSch}/S$ . Ces derniers agissent par l'identité sur la partie géométrique.

**Remarque 2.4.8** — Si  $X$  est un  $S$ -schéma quasi-projectif et  $\mathcal{J}$  une catégorie de  $\text{Dia}$ , on note  $(X, \mathcal{J})$  le diagramme de  $S$ -schémas défini par le foncteur constant de valeur  $X$ .

Le lemme suivant est trivial :

**LEMME 2.4.9** — La catégorie sous-jacente à la 2-catégorie  $\text{DiaSch}/S$  admet des coproduits finis. Si  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  et  $(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  sont deux diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs, leur coproduit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \coprod (\mathcal{G}, \mathcal{J})$  est représenté par  $(\mathcal{F} \coprod \mathcal{G}, \mathcal{J} \coprod \mathcal{J})$ .

On a également :

**LEMME 2.4.10** — La catégorie sous-jacente à la 2-catégorie  $\text{DiaSch}/S$  admet des produits fibrés finis.

DEMONSTRATION Considérons un diagramme dans  $\text{DiaSch}/S$  :

$$\begin{array}{ccc}
 & (\mathcal{G}_2, \mathcal{J}_2) & \\
 & \downarrow (f_2, \alpha_2) & \\
 (\mathcal{G}_1, \mathcal{J}_1) & \xrightarrow{(f_1, \alpha_1)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J})
 \end{array}$$

ainsi qu'un quatrième objet  $(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ . On se donne deux flèches  $(g_1, \beta_1)$  et  $(g_2, \beta_2)$  rendant commutatif le carré :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{H}, \mathcal{K}) & \xrightarrow{(g_2, \beta_2)} & (\mathcal{G}_2, \mathcal{J}_2) \\
 (g_1, \beta_1) \downarrow & & \downarrow (f_2, \alpha_2) \\
 (\mathcal{G}_1, \mathcal{J}_1) & \xrightarrow{(f_1, \alpha_1)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J})
 \end{array}$$

Le couple de foncteurs  $(\beta_1, \beta_2)$  est équivalent à un foncteur :

$$\beta : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{J}_1 \times_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_2$$

Notons  $\mathcal{J}$  le produit fibré  $\mathcal{J}_1 \times_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_2$ ,  $p_i$  la projection de  $\mathcal{J}$  sur  $\mathcal{J}_i$  et  $\alpha$  le morphisme évident de  $\mathcal{J}$  vers  $\mathcal{J}$ . Le couple  $((g_1, \beta_1), (g_2, \beta_2))$  est équivalent au couple de morphismes  $((g_1, \beta), (g_2, \beta))$  :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}, \mathcal{K}) & \xrightarrow{(g_2, \beta)} & (\mathcal{G}_2 \circ p_2, \mathcal{J}) \\ (g_1, \beta) \downarrow & & \downarrow (f_2, \text{id}) \\ (\mathcal{G}_1 \circ p_1, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(f_1, \text{id})} & (\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \end{array}$$

Si  $\mathcal{G}$  désigne le produit fibré des  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs  $(\mathcal{G}_1 \circ p_1) \times_{\mathcal{F} \circ \alpha} (\mathcal{G}_2 \circ p_2)$ , on voit facilement que le couple  $(g_1, g_2)$  est équivalent à un morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas :

$$(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \xrightarrow{(g, \beta)} (\mathcal{G}, \mathcal{J})$$

Ceci prouve que  $(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  représente la limite du diagramme considéré.

C.Q.F.D

**DEFINITION 2.4.11** — Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme de  $\text{DiaSch}/S$ .

1- On dit que  $(f, \alpha)$  est cartésien lorsque  $\alpha$  est une équivalence et pour toute flèche  $j' \rightarrow j$  de  $\mathcal{J}$  le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(j') & \longrightarrow & \mathcal{G}(j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(\alpha(j')) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\alpha(j)) \end{array}$$

est cartésien.

2- Si  $(P)$  est une propriété des morphismes de  $S$ -schémas quasi-projectifs, on dira que  $(f, \alpha)$  est  $(P)$  argument par argument si pour tout objet  $j$  de  $\mathcal{J}$ , le morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs  $\mathcal{G}(j) \longrightarrow \mathcal{F}(\alpha(j))$  est  $(P)$ .

### 2.4.2 Pré-dérivateurs et dérivateurs algébriques

On fait la définition suivante :

**DEFINITION 2.4.12** — Soit  $\mathcal{D}$  une 2-catégorie stricte. On appelle pré-dérivateur algébrique à valeurs dans  $\mathcal{D}$  un 2-foncteur (non forcément stricte)  $\mathbb{D}$  de la 2-catégorie  $\text{DiaSch}/S$  vers  $\mathcal{D}$ , 1-contravariant et 2-contravariant. En termes explicites, un pré-dérivateur  $\mathbb{D}$  est l'ensemble des données suivantes :

- Un objet  $\mathbb{D}(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  de  $\mathcal{D}$  pour tout diagramme de  $S$ -schémas  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ .
- Un 1-morphisme  $(f, \alpha)^* : \mathbb{D}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  dans  $\mathcal{D}$  pour tout 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas  $(f, \alpha) : (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{G}, \mathcal{J})$ .
- A un 2-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} & (f, \alpha) & \\ & \curvearrowright & \\ (\mathcal{F}, \mathcal{J}) & \Downarrow t & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ & \curvearrowleft & \\ & (f', \alpha') & \end{array}$$

un 2-morphisme dans  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{array}{ccc} & (f, \alpha)^* & \\ & \curvearrowleft & \\ \mathbb{D}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) & \Uparrow t^* & \mathbb{D}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ & \curvearrowright & \\ & (f', \alpha')^* & \end{array}$$

- A une suite composable de 1-morphismes de diagrammes de  $S$ -schémas :

$$(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \xrightarrow{(f, \alpha)} (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \xrightarrow{(g, \beta)} (\mathcal{H}, \mathcal{K})$$

un 2-isomorphisme de connexion  $c((f, \alpha), (g, \beta)) : (f, \alpha)^* \circ (g, \beta)^* \xrightarrow{\sim} (g \circ f, \beta \circ \alpha)^*$  dans  $\mathcal{D}$ .



Ces données doivent vérifier les propriétés 1-opposées et 2-opposées de la définition 2.1.32.

Soit  $\mathbb{D} : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{TA}$  un pré-dérivateur algébrique à valeurs dans la 2-catégorie des catégories triangulées. On introduit maintenant un certain nombre d'axiomes que peut vérifier un tel pré-dérivateur algébrique :

**DerAlg 0** : Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Si  $\mathcal{J}$  est une catégorie discrète, alors les 1-morphismes  $i : (\mathcal{F}(i), \mathbf{e}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  pour  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  induisent une équivalence de catégories :

$$\mathbb{D}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \xrightarrow{\prod_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} i^*} \prod_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \mathbb{D}(\mathcal{F}(i))$$

**DerAlg 1** : Soient  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $S$ -schémas quasi-projectifs et  $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$  un foncteur essentiellement surjectif. Le foncteur triangulé :

$$\alpha^* : \mathbb{D}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J})$$

est conservatif.

**DerAlg 2d** : Pour tout 1-morphisme  $(f, \alpha) : (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{G}, \mathcal{J})$  de  $\text{DiaSch}/S$ , le foncteur  $(f, \alpha)^*$  admet un adjoint à droite  $(f, \alpha)_*$ .

**DerAlg 2g** : Pour tout 1-morphisme *lisse argument par argument*  $(f, \alpha) : (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{G}, \mathcal{J})$  de  $\text{DiaSch}/S$ , le foncteur  $(f, \alpha)^*$  admet un adjoint à gauche  $(f, \alpha)_\#$ .

Soient  $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$  un morphisme de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs et  $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$  un foncteur dans  $\text{Dia}$ . On a un carré :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G} \circ \alpha, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f|_{\mathcal{J}} \downarrow & & \downarrow f \\ (\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

commutatif (et même cartésien) dans  $\text{DiaSch}/S$ .

**DerAlg 3d** : Le 2-morphisme d'échange  $\alpha^* f_* \longrightarrow (f|_{\mathcal{J}})_* \circ \alpha^*$ , associé au carré commutatif ci dessus, est un 2-isomorphisme.

**DerAlg 3g** : Supposons que  $f$  est *cartésien* et lisse argument par argument. Alors le 2-morphisme d'échange  $(f|_{\mathcal{J}})_\# \circ \alpha^* \longrightarrow \alpha^* f_\#$  est un 2-isomorphisme.

**DerAlg 4** : Pour tout  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$  le 2-foncteur :

$$\mathbb{D}(X, -) : \text{Dia} \longrightarrow \mathfrak{TA}$$

qui à une catégorie  $\mathcal{J}$  de  $\text{Dia}$  associe  $\mathbb{D}(X, \mathcal{J})$  est un dérivateur triangulé au sens de la définition 2.1.34.

**DerAlg 5** : Le 2-foncteur :

$$\mathbb{D}(-, \mathbf{e}) : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{TA}$$

qui à un  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$  associe  $\mathbb{D}(X, \mathbf{e})$  est un 2-foncteur homotopique stable.

**DEFINITION 2.4.13** — *Le pré-dérivateur algébrique  $\mathbb{D}$  est un dérivateur algébrique homotopique stable lorsque les axiomes DerAlg 0 à DerAlg 5 sont satisfaits.*

**Remarque 2.4.14** — On aurait pu imposer à la place de l'axiome **DerAlg 4** l'axiome (apparemment) plus fort :

**DerAlg 4'** : Pour tout diagramme de  $S$ -schémas quasi-projectifs  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ , le 2-foncteur :

$$\mathbb{D}_{(\mathcal{F}, \mathcal{J})}(-) : \text{Dia} \longrightarrow \mathfrak{TA}$$

qui à une catégorie  $\mathcal{J}$  de  $\text{Dia}$  associe  $\mathbb{D}(\mathcal{F} \circ pr_1, \mathcal{J} \times \mathcal{J})$  est un dérivateur triangulé au sens de la définition 2.1.34.

Il est possible de montrer que l'axiome **DerAlg 4'** découle des axiomes **DerAlg 0** à **DerAlg 5**.

**Remarque 2.4.15** — Le lecteur attentif a sûrement remarqué que dans l'axiome **DerAlg 3d** on ne met aucune hypothèse sur le 1-morphisme  $(f, \alpha)$  alors que dans l'axiome **DerAlg 3g** on suppose, en plus de l'hypothèse de lissité, que  $(f, \alpha)$  est cartésien. Pour expliquer cette asymétrie, il faut considérer le dérivateur algébrique homotopique et

stable  $\mathbb{S}\mathbb{H}$  qui sera construit au quatrième chapitre. Soit  $U$  un  $S$ -schéma lisse et considérons les deux  $\underline{1}$ -diagrammes de schémas :

$$\mathcal{F} = ( U \xrightarrow{p} S ) \quad \text{et} \quad S \xlongequal{\quad} S$$

ainsi que le morphisme  $p$  de  $\underline{1}$ -diagrammes de schémas induit par le carré commutatif (mais non cartésien en général) :

$$\begin{array}{ccc} (U \longrightarrow S) & & \\ \downarrow & & \parallel \\ (S \xlongequal{\quad} S) & & \end{array}$$

L'objet unité  $\mathbf{1}_{\mathcal{F}}$  de  $\mathbb{S}\mathbb{H}(\mathcal{F}, \underline{1})$  est représenté par l'objet  $( S \xlongequal{\quad} S, 1 )$  de  $\mathbf{Sm}/\mathcal{F}$ . Il vient que  $p_{\#}\mathbf{1}_{\mathcal{F}}$  est l'objet unité de  $\mathbb{S}\mathbb{H}(S, \underline{1})$ . Ainsi le morphisme :

$$p_{\#}\mathbf{1}_U \longrightarrow 0^*p_{\#}\mathbf{1}_{\mathcal{F}}$$

est isomorphe à la classe du morphisme  $p : U \longrightarrow S$  qui est non inversible en général.

**Remarque 2.4.16** — Au lieu d'invoquer les définitions d'un dérivateur triangulé et d'un 2-foncteur homotopique stable dans les axiomes **DerAlg 4** et **DerAlg 5** on aurait pu généraliser les propriétés correspondantes au cadre des pré-dérivateurs algébriques. A titre d'exemple, on expliquera un axiome qui généralise une partie de l'axiome **DerAlg 4** et qui ne découle pas à priori de notre définition :

**DerAlg 4'g** : Supposons donné un 1-morphisme  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  de  $\mathbf{DiaSch}/S$  et  $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})$ . On construit à partir de la face carrée de  $\mathbf{DiaSch}/S$  :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}/i, \mathcal{J}/i) & \xrightarrow{(\text{id}, u_i)} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ \downarrow (f/i) & \swarrow r & \downarrow (f, \alpha) \\ \mathcal{F}(i) & \xrightarrow{(\text{id}_{\mathcal{F}(i)}, i)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

une face carrée de  $\mathfrak{TA}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(\mathcal{G}/i, \mathcal{J}/i) & \xleftarrow{(\text{id}, u_i)^*} & \mathbb{D}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ \downarrow (f/i)_* & \swarrow \cong & \downarrow (f, \alpha)_* \\ \mathbb{D}(\mathcal{F}(i)) & \xleftarrow{(\text{id}_{\mathcal{F}(i)}, i)^*} & \mathbb{D}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

La face carrée ainsi obtenue est un 2-isomorphisme.

Remarquons par ailleurs que la construction duale avec les catégories  $i \backslash \mathcal{J}$  ne fonctionne pas puisqu'on ne dispose pas d'un 1-morphisme évident de  $(i \backslash \mathcal{G}, i \backslash \mathcal{J})$  vers  $(\mathcal{F}(i), \mathbf{e})$ . On peut envisager que l'axiome dual concerne l'autre 2-catégorie des diagrammes de  $S$ -schémas discutée dans la remarque 2.4.6.

### 2.4.3 Quelques conséquences faciles de la définition

On se donne un dérivateur algébrique homotopique et stable :

$$\mathbb{H} : \mathbf{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{TA}$$

On regroupe dans cette section quelques conséquences élémentaires des axiomes **DerAlg 0** à **DerAlg 5**. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de **DerAlg 0** et **DerAlg 1**. Il sera constamment utilisé dans la suite :

**LEMME 2.4.17** — Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Alors la famille de foncteurs  $i^* : \mathbb{H}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{H}(\mathcal{F}(i), \mathbf{e})$  indicée par l'ensemble  $\mathbf{Ob}(\mathcal{J})$  est conservative.

**DEMONSTRATION** On identifie l'ensemble  $\mathbf{Ob}(\mathcal{J})$  à la sous-catégorie discrète de  $\mathcal{J}$  ayant les mêmes objets que ceux de  $\mathcal{J}$ . On applique alors l'axiome **DerAlg 1** à l'inclusion essentiellement surjective  $\mathbf{Ob}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$ . Il suffit alors d'appliquer **DerAlg 0** à la catégorie discrète  $\mathbf{Ob}(\mathcal{J})$  pour conclure.

**COROLLAIRE 2.4.18** — Soit  $s : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y}$  une immersion fermée cartésienne de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs. On note  $u : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Y}$  le  $\mathcal{J}$ -diagramme complémentaire argument par argument à  $s$ . Alors le couple  $(s^*, u^*)$  est conservatif.

DEMONSTRATION Soit  $A$  un objet de  $\mathbb{H}(\mathcal{Y}, \mathcal{J})$  annulé par  $s^*$  et  $u^*$ . Pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  on a :

$$s(i)^* i^* A \simeq i^* s^* A \simeq 0 \quad \text{et} \quad u(i)^* i^* A \simeq i^* u^* A \simeq 0$$

Mais le couple de foncteurs  $(s(i)^*, u(i)^*)$  est conservatif puisque  $(s(i), u(i))$  est une paire complémentaire d'immersions du  $S$ -schéma  $\mathcal{Y}(i)$ . Il vient que  $i^*(A)$  est nul pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . Par le lemme 2.4.17,  $A$  est forcément nul. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 2.4.19** — Soit  $u : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$  un immersion argument par argument de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le morphisme de counité  $u^* u_* \longrightarrow \text{id}$  est inversible.

DEMONSTRATION En effet, pour  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} i^* u^* u_* & \xrightarrow{\sim} & u(i)^* i^* u_* \xrightarrow{Ex_*^*} u(i)^* u(i)_* i^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ i^* & \xlongequal{\quad\quad\quad} & i^* \end{array}$$

Le 2-morphisme d'échange  $Ex_*^*$  ci-dessus est inversible par **DerAlg 3d**. De même le morphisme de counité de l'adjonction  $(u(i)^*, u(i)_*)$  est inversible. D'où le résultat par le lemme 2.4.17. C.Q.F.D

On continue avec une variante améliorée de l'axiome **DerAlg 3g** :

**PROPOSITION 2.4.20** — On suppose donné un carré cartésien de diagrammes de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g', \beta)} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g, \beta)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

avec  $f$  un morphisme de  $\mathcal{J}$ -diagrammes, cartésien et lisse argument par argument. Le morphisme de changement de base  $Ex_{\#}^* : f'_{\#} \circ (g', \beta)^* \longrightarrow (g, \beta)^* \circ f_{\#}$  est inversible.

DEMONSTRATION On peut factoriser le carré cartésien de l'énoncé de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{g'} & (\mathcal{G} \circ \beta, \mathcal{J}') & \xrightarrow{\beta} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f' \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{g} & (\mathcal{F} \circ \beta, \mathcal{J}') & \xrightarrow{\beta} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

Par l'axiome **DerAlg 3g** le morphisme d'échange associé au carré de droite est inversible. Ceci nous ramène à traiter le cas<sup>8</sup> où  $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$ . Par le lemme 2.4.17, il suffit de prouver que le morphisme d'échange devient inversible après application de  $i^*$  pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} i^* f'_{\#} g'^* & \xleftarrow{(1)} & f'(i)_{\#} i^* g'^* & \xleftarrow{\sim} & f'(i)_{\#} g'(i)^* i^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ i^* g^* f_{\#} & \xleftarrow{\sim} & g(i)^* i^* f_{\#} & \xleftarrow{(1)} & g(i)^* f(i)_{\#} i^* \end{array}$$

De plus, les deux 2-morphismes (1) sont inversibles par **DerAlg 3g**. Il suffit donc de montrer que le morphisme d'échange  $f'(i)_{\#} g'(i)^* \longrightarrow g(i)^* f(i)_{\#}$  est inversible. Ceci est vrai par la définition des 2-foncteurs homotopiques stables. C.Q.F.D

Comme corollaire on a immédiatement l'extension suivante du théorème de changement de base par un morphisme lisse :

<sup>8</sup>Cette réduction n'est pas nécessaire mais simplifiera les notations.

**COROLLAIRE 2.4.21** — On suppose donné un carré cartésien de diagramme de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}) & \xrightarrow{g'} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ (f', \alpha) \downarrow & & \downarrow (f, \alpha) \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}) & \xrightarrow{g} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

avec  $g$  un morphisme de  $\mathcal{J}$ -diagrammes, cartésien et lisse argument par argument. Le morphisme de changement de base  $Ex_*^* : g^*(f, \alpha)_* \longrightarrow (f', \alpha)_* g'^*$  est un 2-isomorphisme.

Plus important de ce qui précède est :

**THEOREME 2.4.22** — On suppose donné un carré cartésien de diagrammes de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g', \beta)} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g, \beta)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

tel que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

- le morphisme de  $\mathcal{J}$ -diagrammes  $f$  est projectif argument par argument,
- le morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas  $(g, \beta)$  est lisse arguments par arguments.

Alors le morphisme de changement de base  $Ex_*^* : (g, \beta)^* f_* \longrightarrow f'_*(g', \beta)^*$  est inversible.

**DEMONSTRATION** On peut factoriser le carré cartésien de l'énoncé de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{g'} & (\mathcal{G} \circ \beta, \mathcal{J}') & \xrightarrow{\beta} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f' \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{g} & (\mathcal{F} \circ \beta, \mathcal{J}') & \xrightarrow{\beta} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

Par l'axiome **DerAlg 3d** le morphisme d'échange associé au carré de droite est inversible. Ceci nous ramène à traiter le cas<sup>9</sup> où  $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$ . Par le lemme 2.4.17, il suffit de prouver que le morphisme d'échange devient inversible après application de  $i^*$  pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} i^* g^* f_* & \xrightarrow{\sim} & g(i)^* i^* f_* & \xrightarrow{(1)} & g(i)^* f(i)_* i^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ i^* f'_* g'^* & \xrightarrow{(1)} & f'(i)_* i^* g'^* & \xrightarrow{\sim} & f'(i)_* g'(i)^* i^* \end{array}$$

De plus les deux 2-morphismes (1) sont inversibles par **DerAlg 3d**. Il suffit donc de montrer que le morphisme d'échange  $g(i)^* f(i)_* \longrightarrow f'(i)_* g'(i)^*$  est inversible. Ceci est vrai pas le théorème de changement de base pour un morphisme projectif ou par un morphisme lisse suivant le cas. C.Q.F.D

**Remarque 2.4.23** — On notera bien que dans le théorème précédent le morphisme  $f$  n'est pas supposé cartésien contrairement à la proposition 2.4.20. Ceci est conséquence de l'asymétrie dans les axiomes **DerAlg 3d** et **DerAlg 3g**.

On obtient le corollaire suivant, qui complète la proposition 2.4.20 dans une direction partielle :

**COROLLAIRE 2.4.24** — On suppose donné un carré cartésien de diagrammes de  $S$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}) & \xrightarrow{g'} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ (f', \alpha) \downarrow & & \downarrow (f, \alpha) \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}) & \xrightarrow{g} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

<sup>9</sup>Cette réduction n'est pas nécessaire mais simplifiera les notations.

avec  $(f, \alpha)$  un morphisme de diagrammes de schémas, lisse argument par argument. Le morphisme de changement de base  $Ex_{\#}^* : f'_{\#} \circ (g', \beta)^* \longrightarrow (g, \beta)^* \circ f_{\#}$  est inversible.

En reprenant mot à mot la preuve de la proposition 1.4.9, on peut démontrer le résultat suivant :

**PROPOSITION 2.4.25** — Soit  $s : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y}$  une immersion fermée cartésienne de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs. Le foncteur  $s_*$  admet un adjoint à droite  $s^!$ . De plus si  $u : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Y}$  est l'inclusion du  $\mathcal{J}$ -diagramme complémentaire argument par argument à  $s$ , on a deux 2-triangles distingués canoniques :

$$u_{\#}u^* \longrightarrow \text{id} \longrightarrow s_*s^* \longrightarrow u_{\#}u^*[+1] \quad \text{et} \quad s_*s^! \longrightarrow \text{id} \longrightarrow u_*u^* \longrightarrow s_*s^![+1]$$

On a également l'analogie du corollaire 1.4.17 :

**LEMME 2.4.26** — On suppose donné un carré cartésien de diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{Z}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g', \beta)} & (\mathcal{Z}, \mathcal{J}) \\ s' \downarrow & & \downarrow s \\ (\mathcal{Y}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g, \beta)} & (\mathcal{Y}, \mathcal{J}) \end{array}$$

avec  $s$  une immersion fermée cartésienne de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs et  $g$  un 1-morphisme de  $\text{DiaSch}/S$  lisse argument par argument. Alors, le morphisme de changement de base  $Ex^{*!} : (g', \beta)^*s^! \longrightarrow s'^!(g, \beta)^*$  est inversible.

**DEMONSTRATION** On appelle  $u$  l'immersion ouverte de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas complémentaire à  $s$  et  $u'$  le pull-back de  $u$  par  $(g, \beta)$ . On utilise le fait qu'on a un morphisme de 2-triangles distingués (comme dans l'énoncé de la proposition 1.4.16) :

$$\begin{array}{ccccccc} (g, \beta)^*s_*s^! & \longrightarrow & (g, \beta)^* & \longrightarrow & (g, \beta)^*u_*u^* & \longrightarrow & (g, \beta)^*s_*s^![+1] \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow (1) & & \downarrow \\ s'_*s'^!(g, \beta)^* & \longrightarrow & (g, \beta)^* & \longrightarrow & u'_*u'^*(g, \beta)^* & \longrightarrow & s'_*s'^!(g, \beta)^*[+1] \end{array}$$

Le 2-morphisme (1) est une composée de  $Ex_*^*$  et  $Ex^{*!}$ . Il est donc inversible par le théorème 2.4.22. Il vient que le 2-morphisme  $(g, \beta)^*s_*s^! \longrightarrow s'_*s'^!(g, \beta)^*$  est inversible. Mais ce 2-morphisme est la composée :

$$(g, \beta)^*s_*s^! \xrightarrow{Ex_*^*} s'_*(g', \beta)^*s^! \xrightarrow{Ex^{*!}} s'_*s'^!(g, \beta)^*$$

Le premier 2-morphisme est inversible par le théorème 2.4.22. Il vient que le second est également inversible. Le résultat découle alors du fait que  $s'_*$  est pleinement fidèle (donc conservatif). C.Q.F.D

**PROPOSITION 2.4.27** — Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. On note  $p$  la projection de  $(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_S \mathbb{A}_S^1$  sur le premier facteur et  $s$  la section nulle. Alors :

- le morphisme d'unité  $\text{id} \longrightarrow p_*p^*$  est inversible,
- le foncteur  $p_{\#}s_*$  est une équivalence de catégories.

**DEMONSTRATION** Pour la première propriété, on montre que le morphisme d'unité de  $(p^*, p_*)$  devient un isomorphisme après application de  $i^*$  pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . On utilise pour cela le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} i^* & \xlongequal{\quad} & i^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ i^*p_*p^* & \xrightarrow{\sim} & p(i)_*i^*p^* \xrightarrow{\sim} p(i)_*p(i)^*i^* \end{array}$$

Le résultat découle de l'axiome d'homotopie et du fait que  $p(i)$  est la projection de la droite affine relative sur le  $S$ -schéma  $\mathcal{F}(i)$ .

On passe maintenant à la seconde assertion. On prouvera que  $p_{\#}s_*$  est une équivalence en montrant que les morphismes d'unité et de counité de l'adjonction  $(p_{\#}s_*, s^!p^*)$  sont inversibles. On procède par la même méthode

en utilisant la conservation de la famille de  $i^*$  pour  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . Pour le morphisme d'unité, on utilise le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 i^* & \xlongequal{\quad\quad\quad} & & & & & i^* \\
 \downarrow & & & & & & \downarrow \\
 i^* s^! s_* & \xrightarrow{\sim} & s(i)^! i^* s_* & \xlongequal{\quad\quad\quad} & s(i)^! i^* s_* & \xrightarrow{\sim} & s(i)^! s(i)_* i^* \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 i^* s^! p^* p_{\#} s_* & \xrightarrow{\sim} & s(i)^! i^* p^* p_{\#} s_* & \xrightarrow{\sim} & s(i)^! p(i)^* p_{\#} s_* & \xrightarrow{\sim} & s(i)^! p(i)^* p(i)_{\#} i^* s_* & \xrightarrow{\sim} & s(i)^! p(i)^* p(i)_{\#} s(i)_* i^*
 \end{array}$$

et le fait que le morphisme d'unité de  $(p(i)_{\#} s(i)_*, s(i)^! p(i)^*)$  est inversible par l'axiome de stabilité. Le morphisme de counité est traité par la même méthode. C.Q.F.D

Comme conséquence de ce qui précède, on a la variante améliorée de l'axiome **DerAlg 5** :

**THEOREME 2.4.28** — Soient  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $S$ -schémas quasi-projectifs et  $(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow (X, \mathbf{e})$  un 1-morphisme vers un  $S$ -schéma quasi-projectif  $X$ . Le 2-foncteur :

$$\mathbb{H}_{(\mathcal{F}, \mathcal{J})/X} : \text{Sch}/X \longrightarrow \mathfrak{TA}$$

qui à un  $X$ -schéma  $Y$  associe la catégorie triangulée  $\mathbb{H}((\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_X Y)$  est un 2-foncteur homotopique stable.

**Remarque 2.4.29** — On garde les hypothèses du théorème précédent. Supposons donné un morphisme de  $X$ -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{g} & Y \\
 & \searrow f' & \downarrow f \\
 & & X
 \end{array}$$

On obtient par pull-back un 1-morphisme cartésien de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas :

$$g_{\mathcal{F}} : (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_X Y' \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_X Y$$

on a les quatre opérations  $g_{\mathcal{F}}^*$ ,  $g_{\mathcal{F}*}$ ,  $g_{\mathcal{F}!}$  et  $g_{\mathcal{F}}^!$  entre les deux catégories triangulées  $\mathbb{H}((\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_X Y)$  et  $\mathbb{H}((\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_X Y')$ . Dans le numéro suivant ce résultat sera généralisé et précisé.

### 2.4.4 Extension des résultats du premier chapitre

Vu la remarque 2.4.29, il est naturel d'espérer que tout morphisme cartésien de diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  induit deux opérations :

$$(f, \alpha)_! : \mathbb{H}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{H}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \quad \text{et} \quad (f, \alpha)^! : \mathbb{H}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{H}(\mathcal{G}, \mathcal{J})$$

et que ces foncteurs s'organisent naturellement en deux 2-foncteurs globalement adjoints :

$$\text{Cart} \mathbb{H}_! : (\text{DiaSch}/S)^{\text{Cart}} \longrightarrow \mathfrak{TA} \quad \text{et} \quad \text{Cart} \mathbb{H}^! : (\text{DiaSch}/S)^{\text{Cart}} \longrightarrow \mathfrak{TA}$$

où  $(\text{DiaSch}/S)^{\text{Cart}}$  désigne la sous-2-catégorie 2-pleine de  $\text{DiaSch}/S$  ayant pour objets les diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs (vérifiant peut-être une condition technique) et pour 1-morphismes ceux qui sont cartésiens.

Dans cette sous-section on montre que la quasi-totalité de la construction entreprise dans le premier chapitre s'étend mot à mot à cette nouvelle situation. Toutefois, à quelques rares endroits, des arguments nouveaux doivent être rajoutés. On précisera alors ces endroits et on décrit rapidement ces arguments. On commence d'abord par un petit paragraphe concernant quelques notions élémentaires de géométrie algébrique au-dessus d'un diagramme de schémas.

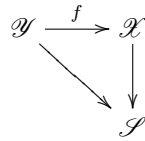
#### La géométrie des $\mathcal{S}$ -schémas

Soient  $\mathcal{J}$  une petite catégorie et  $\mathcal{S}$  un  $\mathcal{J}$ -diagramme de schémas. On fait la définition suivante :

**DEFINITION 2.4.30** — On note  $\mathcal{J}\text{-SC}\mathcal{H}/\mathcal{S}$  la catégorie définie par :

- Les objets de  $\mathcal{J}\text{-SC}\mathcal{H}/\mathcal{S}$  sont les morphismes cartésiens de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de schémas  $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{S}$ ,

– Les flèches de  $\mathcal{J}\text{-SC}\mathcal{H}/\mathcal{S}$  sont des triangles commutatifs de morphismes de  $\mathcal{J}$ -diagrammes :



Les objets de cette catégorie seront simplement appelés des  $\mathcal{S}$ -schémas.

**Remarque 2.4.31** — Si la catégorie  $\mathcal{J}$  admet un objet final  $o$ , la catégorie des  $\mathcal{S}$ -schémas est équivalente à la catégorie des  $\mathcal{S}(o)$ -schémas.

**Remarque 2.4.32** — La catégorie  $\mathcal{J}\text{-SC}\mathcal{H}/\mathcal{S}$  admet des produits fibrés donnés par le produit fibré des  $\mathcal{J}$ -diagrammes de schémas. On dispose plus généralement d'un foncteur de changement de base :

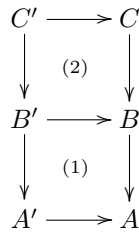
$$\mathcal{J}\text{-SC}\mathcal{H}/\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{J}\text{-SC}\mathcal{H}/\mathcal{T}$$

pour tout 1-morphisme de diagrammes de schémas  $(\mathcal{T}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{S}, \mathcal{J})$  donné par le produit fibré des diagrammes de schémas.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la définition :

**LEMME 2.4.33** — *Un morphisme de  $\mathcal{S}$ -schémas est automatiquement un morphisme cartésien de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de schémas.*

DEMONSTRATION Ceci découle immédiatement du fait général suivant. Soit un diagramme commutatif dans une catégorie  $\mathcal{C}$  :



On suppose que les carrés (1) et (1)  $\circ$  (2) sont cartésiens. Alors le carré (2) est cartésien.

Pour la preuve de ce fait, on considère le morphisme évident  $C' \longrightarrow B' \times_B C$ . Ce morphisme est isomorphe au morphisme évident  $C' \longrightarrow A' \times_A C$ , puisque (1) est cartésien. Mais ce dernier est inversible puisque (1)  $\circ$  (2) est cartésien. C.Q.F.D

Le but de ce paragraphe est de montrer que pour certaines questions, on peut penser aux  $\mathcal{S}$ -schémas comme à des  $S$ -schémas habituels. On étendra en particulier tous les résultats géométriques (sauf un<sup>10</sup>!) sur les  $S$ -schémas utilisés dans le chapitre 1 au cadre des  $\mathcal{S}$ -schémas. Il sera pratique de faire la convention suivante :

**DEFINITION 2.4.34** — **1-** Soit  $(P)$  une propriété des  $S$ -schémas avec  $S$  un schéma de base. On dit qu'un  $\mathcal{S}$ -schéma  $\mathcal{X}$  est  $(P)$  si pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ , le  $\mathcal{S}(i)$ -schéma  $\mathcal{X}(i)$  est  $(P)$ .

**2-** Soit  $(P')$  une propriété des morphismes de  $S$ -schémas avec  $S$  un schéma de base. On dit qu'un morphisme  $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$  de  $\mathcal{S}$ -schémas est  $(P')$  si pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  le morphisme  $\mathcal{Y}(i) \longrightarrow \mathcal{X}(i)$  de  $\mathcal{S}(i)$ -schémas est  $(P')$ .

**Remarque 2.4.35** — Supposons que la propriété  $(P)$  (resp.  $(P')$ ) dans la définition précédente est invariante par changement du schéma de base, i.e., si  $T \longrightarrow S$  est un morphisme de schémas, le foncteur de changement de base  $\text{SC}\mathcal{H}/S \longrightarrow \text{SC}\mathcal{H}/T$  conserve la propriété  $(P)$  (resp.  $(P')$ ). Alors, il en est de même des foncteurs  $\mathcal{J}\text{-SC}\mathcal{H}/\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{J}\text{-SC}\mathcal{H}/\mathcal{T}$  pour tout 1-morphisme de diagrammes de schémas  $(\mathcal{T}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{S}, \mathcal{J})$ .

**Remarque 2.4.36** — Comme premier exemple, on note le fait important suivant. Étant donnée une immersion fermée de  $\mathcal{S}$ -schémas  $\mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y}$ , on peut parler de l'immersion ouverte complémentaire de  $\mathcal{Z}$  dans  $\mathcal{Y}$ . En effet, l'immersion fermée en question est cartésienne par le lemme 2.4.33. La même chose s'applique pour les immersions ouvertes.

<sup>10</sup>Le résultat qui ne s'étend pas aux  $\mathcal{S}$ -schémas est le suivant. Un couple lisse  $(Y, X)$  au dessus d'un schéma  $Z$ , est localement pour la topologie de Nisnevich isomorphe à un couple lisse trivial, i.e., à  $(\mathbb{A}_Z^m, \mathbb{A}_Z^n)$  avec  $m \leq n$ . Ce résultat est généralement faux pour les couples lisses de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de schémas.

**Remarque 2.4.37** — Soit  $s : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y}$  une immersion de  $\mathcal{S}$ -schémas. On peut définir un  $\mathcal{J}$ -diagramme de schémas  $\bar{\mathcal{Z}}$  en prenant pour  $\bar{\mathcal{Z}}(i)$  l'adhérence schématique de l'immersion  $s(i) : \mathcal{Z}(i) \longrightarrow \mathcal{Y}(i)$  (où  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ). Il est clair que le morphisme de  $\mathcal{J}$ -diagramme de schémas  $s$  se factorise par  $\bar{\mathcal{Z}}$ . On fera attention toutefois que  $\bar{\mathcal{Z}}$  n'est pas en général un  $\mathcal{S}$ -schéma car le  $\mathcal{J}$ -morphisme évident  $\bar{\mathcal{Z}} \longrightarrow \mathcal{S}$  n'est pas forcément cartésien. Le lecteur pourra facilement vérifier qu'on a jamais eu besoin de prendre l'adhérence d'une immersion tout au long du chapitre 1.

Étant donné un  $\mathcal{J}$ -diagramme de schémas  $\mathcal{X}$ , on notera  $\mathcal{X}_{\text{Zar}}$  le site défini de la manière suivante :

- Les objets de  $\mathcal{X}_{\text{Zar}}$  sont les couples  $(U, i)$  avec  $i$  un objet de  $\mathcal{J}$  et  $U$  un ouvert Zariski de  $\mathcal{X}(i)$ .
- Une flèche  $(U', i') \rightarrow (U, i)$  est une flèche  $a : i' \rightarrow i$  de  $\mathcal{J}$  telle que  $U'$  est envoyé dans  $U$  par le morphisme  $\mathcal{X}(a) : \mathcal{X}(i') \longrightarrow \mathcal{X}(i)$ .
- La topologie de  $\mathcal{X}_{\text{Zar}}$  est engendrée par les familles  $(\text{id}_i : (U_k, i) \rightarrow (U, i))_k$  où  $(U_k)_k$  est un recouvrement Zariski de  $U$ .

Ainsi, un préfaisceau  $F$  sur  $\mathcal{X}_{\text{Zar}}$  est un faisceau si et seulement si pour tout objet  $i$  de  $\mathcal{J}$  la restriction  $F(i)$  de  $F$  à  $\mathcal{X}(i)_{\text{Zar}}$  est un faisceau.

**DEFINITION 2.4.38** — Soit  $\mathcal{X}$  un  $\mathcal{J}$ -diagramme de schémas. Le faisceau structural de  $\mathcal{X}$ , noté  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ , est le faisceau sur  $\mathcal{X}_{\text{Zar}}$  qui à un couple  $(U, i)$  associe  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}(i)}(U)$ .

On adoptera la notion suivante de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules quasi-cohérents :

**DEFINITION 2.4.39** — Soient  $\mathcal{X}$  un diagramme de  $\mathcal{J}$ -schémas et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module.

1- On dit que  $\mathcal{M}$  est quasi-cohérent (resp. cohérent, localement libre, etc) argument par argument si pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ , la restriction  $\mathcal{M}(i)$  de  $\mathcal{M}$  à  $\mathcal{X}(i)$  est un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}(i)}$ -module quasi-cohérent (resp. cohérent, localement libre, etc).

2- On dit que  $\mathcal{M}$  est quasi-cohérent (resp. cohérent) s'il est quasi-cohérent (resp. cohérent) argument par argument et si pour toute flèche  $a : i' \rightarrow i$  de  $\mathcal{J}$ , le morphisme évident  $\mathcal{X}(a)^* \mathcal{M}(i) \longrightarrow \mathcal{M}(i')$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}(i')}$ -modules.

Le faisceau  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  est lui-même un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent. On fera attention que la catégorie des  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules quasi-cohérents n'est pas une catégorie abélienne en général. En effet, lorsque les morphismes  $\mathcal{X}(i') \longrightarrow \mathcal{X}(i)$  dans le  $\mathcal{J}$ -diagramme ne sont pas tous plats, la deuxième condition de la définition ci-dessus n'est pas stable par passage au noyau d'un morphisme de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules. Pour les  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules localement libres arguments par arguments la situation est meilleure :

**LEMME 2.4.40** — Soit  $\mathcal{X}$  un  $\mathcal{J}$ -diagramme de schémas. On se donne une suite exacte courte de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules localement libres arguments par arguments :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

On suppose que deux des trois  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont quasi-cohérents (resp. cohérents). Alors, il en est de même du troisième.

**DEMONSTRATION** Les trois modules en question sont localement libres. Il vient que pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  les  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}(i)}$ -modules  $\mathcal{L}(i)$ ,  $\mathcal{M}(i)$  et  $\mathcal{N}(i)$  sont quasi-cohérents (resp. cohérents). Il s'agit donc de vérifier la seconde propriété de la définition 2.4.39. Pour toute flèche  $a : i' \rightarrow i$  de  $\mathcal{J}$  on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{X}(a)^* \mathcal{N}(i) & \longrightarrow & \mathcal{X}(a)^* \mathcal{M}(i) & \longrightarrow & \mathcal{X}(a)^* \mathcal{L}(i) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}(i') & \longrightarrow & \mathcal{M}(i') & \longrightarrow & \mathcal{L}(i') \longrightarrow 0 \end{array}$$

Les lignes de ce diagramme sont exactes puisque les modules  $\mathcal{L}(i)$ ,  $\mathcal{M}(i)$  et  $\mathcal{N}(i)$  sont localement libres. Le résultat découle alors du lemme des cinq. C.Q.F.D

**Remarque 2.4.41** — 1- Étant donné un  $\mathcal{J}$ -diagramme de schémas  $\mathcal{X}$  et un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module  $\mathcal{M}$  cohérent argument par argument on peut définir un  $\mathcal{J}$ -diagramme de schémas  $\mathbb{V}(\mathcal{M})$  en prenant  $\mathbb{V}(\mathcal{M})(i) = \mathbb{V}(\mathcal{M}(i))$  pour tout objet  $i$  de  $\mathcal{J}$ . On a alors une projection évidente  $\mathbb{V}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{X}$ . On vérifie alors facilement que  $\mathbb{V}(\mathcal{M})$  est un  $\mathcal{X}$ -schéma au sens de la définition 2.4.30 si et seulement si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent. Le  $\mathcal{X}$ -schéma ainsi obtenu est affine et de type fini.

2- En ce qui concerne le projectivisé de  $\mathcal{M}$ , la situation est légèrement plus délicate. En effet, le diagramme de schémas  $\mathbb{P}(\mathcal{M})$  vérifiant  $\mathbb{P}(\mathcal{M})(i) = \mathbb{P}(\mathcal{M}(i))$  n'existe que lorsque  $\mathcal{M}$  est cohérent. Dans ce cas,  $\mathbb{P}(\mathcal{M})$  est un  $\mathcal{X}$ -schéma projectif.



Les deux modules qui jouent un rôle important dans la construction des deux foncteurs  $H_!$  et  $H^!$  du chapitre 1, sont :

- le faisceau normal  $\mathcal{N}_s$  associé à une immersion fermée  $s$  entre  $Z$ -schémas lisses (avec  $Z$  un certain  $S$ -schéma quasi-projectif),
- le faisceau des différentielles relatives  $\Omega_f$  associé à un morphisme lisse de  $S$ -schémas quasi-projectifs  $f$ .

**DEFINITION 2.4.42** — 1- Soit  $s : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y}$  une immersion fermée argument par argument entre  $\mathcal{J}$ -diagrammes de schémas. On définit un  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -module  $\mathcal{N}_s$  quasi-cohérent argument par argument en prenant  $\mathcal{N}_s = \mathcal{I}_s / \mathcal{I}_s^2$  où  $\mathcal{I}_s$  est l'idéal quasi-cohérent argument par argument de l'immersion  $s$ . On a alors les identifications  $\mathcal{N}_s(i) = \mathcal{N}_{s(i)}$  pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . On dira que  $\mathcal{N}_s$  est le faisceau normal de l'immersion  $s$ .

2- Soit  $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$  un morphisme séparé argument par argument de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de schémas. On définit un  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -module  $\Omega_f$  quasi-cohérent argument par argument en posant  $\Omega_f = \mathcal{N}_{\Delta}$  où  $\Delta : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Y}$  est l'immersion fermée diagonale. On a alors les identifications  $\Omega_f(i) = \Omega_{f(i)}$  pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . On dira que  $\Omega_f$  est le faisceau des différentielles relatives.

Les modules  $\mathcal{N}_s$  et  $\Omega_f$  ne sont pas en général cohérents (ni quasi-cohérents) même lorsque  $s$  et  $f$  sont cartésiens et de présentation finie. Heureusement, dans les cas considérés au chapitre 1, la situation est meilleure :

**LEMME 2.4.43** — Soit  $\mathcal{S}$  un  $\mathcal{J}$ -diagramme de schémas.

1- On suppose donné un triangle commutatif de  $\mathcal{S}$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{s} & \mathcal{X} \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & \mathcal{Z} \end{array}$$

avec  $s$  une immersion fermée et  $f$  et  $g$  lisses. Alors le  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -module  $\mathcal{N}_s$  est localement libre et cohérent.

2- On suppose donné un morphisme lisse  $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$  de  $\mathcal{S}$ -schémas. Alors le  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -module  $\Omega_f$  est localement libre et cohérent.

On termine ce paragraphe par une discussion sur les éclatements. Étant donné un carré cartésien de schémas :

$$\begin{array}{ccc} Z_2 & \longrightarrow & Z_1 \\ s_2 \downarrow & & \downarrow s_1 \\ X_2 & \longrightarrow & X_1 \end{array}$$

avec  $s_1$  et  $s_2$  des immersions fermées, on peut déduire un morphisme  $E_{Z_2}(X_2) \longrightarrow E_{Z_1}(X_1)$  entre les éclatés. Ceci permet alors de parler de l'éclaté  $E_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z})$  d'un sous- $\mathcal{S}$ -schéma fermé  $\mathcal{Z}$  d'un  $\mathcal{S}$ -schéma  $\mathcal{X}$ . En général, le  $\mathcal{J}$ -diagramme de schémas  $E_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z})$  n'est pas un  $\mathcal{S}$ -schéma étant donné que le morphisme  $E_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{X}$  n'est pas toujours cartésien. On a toute fois :

**LEMME 2.4.44** — Soit  $\mathcal{S}$  un  $\mathcal{J}$ -diagramme de schémas. On suppose donné un triangle commutatif de  $\mathcal{S}$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{s} & \mathcal{X} \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & \mathcal{T} \end{array}$$

avec  $s$  une immersion fermée et  $f$  et  $g$  lisses. Alors le  $\mathcal{J}$ -diagramme de schémas  $E_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z})$  est un  $\mathcal{S}$ -schéma.

Ce lemme permet alors d'étendre la déformation au cône normal utilisée au numéro 1.6, dans le contexte des  $\mathcal{S}$ -schémas.

### Les quatre opérations pour les $\mathcal{S}$ -morphisms

On se donne un  $\mathcal{J}$ -diagramme de  $S$ -schémas quasi-projectifs  $\mathcal{S}$ . On note  $\mathcal{J}\text{-Sch}/\mathcal{S}$  la catégorie des  $\mathcal{S}$ -schémas quasi-projectifs (arguments par arguments). On appellera  $\mathcal{J}\text{-Sch}'/\mathcal{S}$  la sous-catégorie formée des  $\mathcal{S}$ -schémas admettant une immersion dans un  $\mathbb{P}(\mathcal{M})$  avec  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module localement libre et cohérent. Les objets de cette catégorie seront appelés les  $\mathcal{S}$ -schémas fortement quasi-projectifs.

Dans ce paragraphe, on va survoler la construction du 2-foncteur  $H^! : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$  dans le cadre des  $\mathcal{S}$ -schémas en expliquant comment on peut la modifier pour obtenir un 2-foncteur :

$$\text{Cart}H_{\mathcal{S}}^! : \mathcal{J}\text{-Sch}'/\mathcal{S} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

Comme on l'a déjà affirmé, la quasi-totalité de la construction s'étend mot à mot aux  $\mathcal{S}$ -schémas. Bien que le résultat final concerne les morphismes de  $\mathcal{S}$ -schémas fortement quasi-projectifs, une grande partie reste valable pour les morphismes de  $S$ -schémas quasi-projectifs voire pour les morphismes de diagrammes de  $S$ -schémas. Ainsi les sections 1.4 et 1.5 seront survolées dans un cadre un peu plus général que celui des  $\mathcal{S}$ -schémas.

Pour simplifier, le lecteur pourra négliger les 2-morphismes des 2-catégories  $\text{DiaSch}/S$ . Ainsi dans la suite de ce paragraphe,  $\text{DiaSch}/S$  désignera la catégorie sous-jacente à la 2-catégorie des diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs. On considérera les sous-catégories suivantes de  $\text{DiaSch}/S$  :

- $(\text{DiaSch}/S)^{\text{Cart}}$  ayant les même objets que  $\text{DiaSch}/S$  et pour morphismes ceux qui sont de la forme :

$$f : (\mathcal{Y}, \mathcal{E}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{E})$$

avec  $f$  un morphisme cartésien de  $\mathcal{E}$ -schémas.

- $(\text{DiaSch}/S)^{\text{LissCart}}$  : la même chose que la première avec en plus  $f$  lisse,
- $(\text{DiaSch}/S)^{\text{ImmCart}}$  : la même chose que la première avec en plus  $f$  une immersion fermée,
- $(\text{DiaSch}/S)^{\text{Cart}'}$  : la même chose que la première avec en plus le  $\mathcal{X}$ -schéma  $\mathcal{Y}$  fortement quasi-projectif.

On utilisera le dictionnaire suivant (que le lecteur pourra facilement compléter si besoin) qui permet le passage du cas des  $S$ -schémas vers celui des diagrammes de  $S$ -schémas.

$H^* : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$	$H^! : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$
$H_* : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$	$H_* : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$
$\text{Liss}H_{\#} : (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{A}$	$\text{LissCart}H_{\#} : (\text{DiaSch}/S)^{\text{LissCart}} \longrightarrow \mathfrak{A}$
$\text{Liss}H^* : (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{A}$	$\text{LissCart}H^* : (\text{DiaSch}/S)^{\text{LissCart}} \longrightarrow \mathfrak{A}$
$\text{Imm}H_* : (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{A}$	$\text{ImmCart}H_* : (\text{DiaSch}/S)^{\text{ImmCart}} \longrightarrow \mathfrak{A}$
$\text{Imm}H^! : (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{A}$	$\text{ImmCart}H^! : (\text{DiaSch}/S)^{\text{ImmCart}} \longrightarrow \mathfrak{A}$
$H_{\dagger} : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$	$\text{Cart}H_{\dagger} : (\text{DiaSch}/S)^{\text{Cart}'} \longrightarrow \mathfrak{A}$
$H^! : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$	$\text{Cart}H^! : (\text{DiaSch}/S)^{\text{Cart}'} \longrightarrow \mathfrak{A}$
$\mathcal{O}_X$ -module localement libre de type fini $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{L} \dots$ etc	$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module localement libre et cohérent de type fini $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{L} \dots$ etc

**1- La section 1.4 :** Comme on l'a déjà remarqué dans le numéro précédent, le numéro 1.4.4 se transcrit mot à mot dans le cadre des immersions fermées cartésiennes des diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs. On obtient ainsi le 2-foncteur :

$$\text{ImmCart}H^! : (\mathcal{J}\text{-Sch}/\mathcal{S})^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

Le numéro 1.4.5 s'étend également mot à mot au cas des diagrammes de  $S$ -schémas. On obtient un foncteur croisé :

$$(H^*, H^*, \text{LissCart}H_{\#}, \text{LissCart}H^*)$$

pour la classe des carrés cartésiens.

Le numéro 1.4.6 s'étend également mot à mot pour fournir un foncteur croisé :

$$(H^*, H^*, \text{ImmCart}H_*, \text{ImmCart}H^!)$$

Dans le numéro 1.4.7, on établit la proposition 1.4.19 avec à la place de  $f$  un morphisme arbitraire de diagramme de  $S$ -schémas et à la place de  $i$  et  $j$  une des immersions cartésiennes complémentaires. La proposition 1.4.20 sera seulement valable pour  $s$  une immersion fermée cartésienne.

**2- La section 1.5 :** Les définitions ne changent pas et seront faites avec  $s$  et  $p$  tous les deux cartésiens. Dans la proposition 1.5.2 et le lemme 1.5.3 on prendra à la place de  $f$  un morphisme de diagrammes de schémas  $(f, \alpha)$ . La conclusion du lemme 1.5.4 est alors valable pour  $(f, \alpha)$  lisse argument par argument.

Pour prouver le théorème 1.5.7, on se ramène immédiatement au cas des  $S$ -schémas en utilisant le lemme 2.4.17 et en invoquant pour  $i$  un objet de la catégorie d'indice, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 i^* & \xlongequal{\quad\quad\quad} & i^* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 i^* \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(s(i), p(i)) i^* \mathrm{Th}(s, p) \longrightarrow \mathrm{Th}^{-1}(s(i), p(i)) \mathrm{Th}(s(i), p(i)) i^*
 \end{array}$$

ainsi que son analogue pour le morphisme de cunité.

Pour le reste de la section on se place dans la catégorie des  $\mathcal{S}$ -schémas  $\mathcal{J}\text{-Sch}/\mathcal{S}$ . Les résultats de la section s'étendent mots à mots aux morphismes de  $\mathcal{S}$ -schémas.

Notons toutefois que l'isomorphisme de commutation avec les équivalences de Thom peut être défini pour des changements de base par des morphismes arbitraires de diagramme de  $S$ -schémas. On obtient en fin de compte foncteur croisé :

$$(\mathbb{H}^*, \mathbb{H}^*, \mathrm{LissCart}_{\mathbb{H}_1}, \mathrm{LissCart}_{\mathbb{H}_1}^!)$$

**3- La section 1.6 :** Dans cette section on se place dans la catégorie des  $\mathcal{S}$ -schémas. Le début de la section jusqu'au lemme 1.6.14 exclu, s'étend sans aucune difficulté aux  $\mathcal{S}$ -schémas. Notons tout de même que la proposition 1.6.7 reste valable pour les changements de base par des morphismes généraux  $(a, \alpha)$  de diagrammes de  $S$ -schémas.

La seconde partie du lemme 1.6.14 s'étend sans difficulté aux cadre des  $\mathcal{S}$ -schémas. Pour la première assertion, il faudra se ramener au cas des  $S$ -schémas.

Pour chaque objet  $k$  de la catégorie d'indices  $\mathcal{J}$ , on prend la section :

$$\sigma_{k^* A} : s(k)^! f(k)^*(k^* A) \longrightarrow i(k)^* j(k)_* q(k)^* s(k)^! f(k)^*(k^* A)$$

faisant commuter le carré :

$$\begin{array}{ccc}
 k^* s^! f^*(A) & \longrightarrow & k^* i^* j_* s^! f^*(A) \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 s(k)^! f(k)^*(k^* A) & \longrightarrow & i(k)^* j(k)_* q(k)^* s(k)^! f(k)^*(k^* A)
 \end{array}$$

Il vient alors qu'on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 k^* s^! f^*(A) & \longrightarrow & k^* s_0^! f_0^*(A) \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 s(k)^! f(k)^*(k^* A) & \longrightarrow & s_0(k)^! f_0(k)^*(k^* A)
 \end{array}$$

Ceci nous ramène immédiatement aux cas des  $S$ -schémas.

Ensuite, le raisonnement se transcrit mot à mot au cadre des  $\mathcal{S}$ -schémas jusqu'à la fin de la construction du 2-foncteur  $\mathbb{H}^!$  en prenant uniquement des  $\mathcal{S}$ -schémas fortement quasi-projectifs pour pouvoir appliquer le critère de prolongement du théorème 1.3.1. Notons que la proposition 6.19 reste valable pour les changements de base par des morphismes généraux de diagrammes de  $S$ -schémas. Ceci permet permet alors de définir les morphismes d'échange  $Ex^{*,!}$  pour des carrés cartésiens de  $\mathrm{DiaSch}/S$  :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{G}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g', \beta)} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 (\mathcal{F}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g, \beta)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J})
 \end{array}$$

avec  $f$  un morphisme cartésien et fortement quasi-projectif de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de schémas. On obtient finalement un foncteur croisé :

$$(\mathbb{H}^*, \mathbb{H}^*, \mathrm{Cart}'_{\mathbb{H}_1}, \mathrm{Cart}'_{\mathbb{H}_1}^!)$$

**Remarque 2.4.45** — En lisant le bref survole qu'on vient de faire, on remarque le fait suivant. Lorsqu'on passe des  $\mathcal{S}$ -schémas aux diagrammes de  $S$ -schémas les seules étapes de la construction où un changement est nécessaire sont :

1. Le théorème 1.5.7 affirmant que les 1-morphismes  $\text{Th}(s, p)$  et  $\text{Th}^{-1}(s, p)$  étaient des équivalences inverses l'une de l'autre.
2. Le lemme 1.6.14 et plus précisément la partie affirmant que  $\tau_A$  est inversible.

La raison pour laquelle l'argument initial n'est pas suffisant est directement lié au fait qu'il impossible en général de trouver des recouvrements Zariski ou Nisnevich de  $\mathcal{X}$  par des  $\mathcal{S}$ -schémas qui soient suffisamment fins. Ainsi, tous les arguments qui nécessitent de trivialisier des  $\mathcal{X}$ -modules localement libres, ou des couples lisses ne sont plus valables tels quels. Nous avons contourné cette difficulté en utilisant la conservation de la famille des foncteur  $i^*$  pour  $i$  un objet de la catégorie d'indice.

Notons le résultat intéressant suivant :

**PROPOSITION 2.4.46** — *Soit un carré cartésien de diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g', \beta)} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g, \beta)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

avec  $f$  un morphisme cartésien, fortement projectif et  $(g, \beta)$  lisse argument par argument. Le 2-morphisme d'échange :

$$\text{Ex}_{\#, *}: (g, \beta)_{\#} f'_* \longrightarrow f_*(g', \beta)_{\#}$$

est inversible.

**DEMONSTRATION** On dispose d'un morphisme d'échange  $\text{Ex}_{\#, !}: (g, \beta)_{\#} f'_! \longrightarrow f_!(g', \beta)_{\#}$  obtenu via les adjonctions  $((g, \beta)_{\#}, (g, \beta)^*)$  et  $((g', \beta)_{\#}, (g', \beta)^*)$  à partir de l'isoéchange  $\text{Ex}_!^*: f'_!(g', \beta)^* \longrightarrow (g, \beta)^* f_!$ . On vérifie facilement que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (g, \beta)_{\#} f'_! & \longrightarrow & f_!(g', \beta)_{\#} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (g, \beta)_{\#} f'_* & \longrightarrow & f_*(g', \beta)_{\#} \end{array}$$

Ce qui nous ramène à montrer que  $\text{Ex}_{\#, !}$  est inversible. Par adjonction, il suffit de montrer que le 2-morphisme  $\text{Ex}_!^{!*}: (g', \beta)^* f'_! \longrightarrow f'_!(g, \beta)$  est inversible. En utilisant la conservation de la famille des  $i'^*$  avec  $i' \in \text{Ob}(\mathcal{J}')$  on se ramène aux cas des schémas. L'énoncé correspondant est alors vrai puisque  $g(i')$  est lisse. C.Q.F.D

**Remarque 2.4.47** — Comme cas particulier de la proposition précédente, on voit que pour  $f$  cartésien et fortement projectif, le foncteur  $f_*$  commute aux Dia-colimites. En fait, l'hypothèse "cartésien" est probablement superflue.

### 2.4.5 Dérivateurs algébriques monoïdaux homotopiques et stables

On termine cette section sur les dérivateurs algébriques par l'étude des structures monoïdales sur eux :

**DEFINITION 2.4.48** — *Un dérivateur algébrique monoïdal homotopique et stable est un pré-dérivateur algébrique :*

$$(\mathbb{H}^*, \otimes): \text{DiaSch}/S \longrightarrow \text{Mono}\mathfrak{A}$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

1. Le pré-dérivateur composé :

$$\text{DiaSch}/S \longrightarrow \text{Mono}\mathfrak{A} \xrightarrow{\text{oubli}} \mathfrak{A}$$

est un dérivateur homotopique et stable.

2. (Formules de projection) Soit  $(f, \alpha): (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme lisse argument par argument. Les morphismes :

$$p_g: (f, \alpha)_{\#}((f, \alpha)^* A \otimes_{\mathcal{G}, \mathcal{J}} B') \longrightarrow A \otimes_{\mathcal{F}, \mathcal{J}} (f, \alpha)_{\#} B'$$

$$p_d: (f, \alpha)_{\#}(A' \otimes_{\mathcal{G}, \mathcal{J}} (f, \alpha)^* B) \longrightarrow (f, \alpha)_{\#} A' \otimes_{\mathcal{F}, \mathcal{J}} B$$

sont inversibles pour  $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(\mathbb{H}(\mathcal{F}, \mathcal{J}))^2 \times \text{Ob}(\mathbb{H}(\mathcal{G}, \mathcal{J}))^2$  dans l'un des cas suivants :

- (a)  $\alpha$  est le foncteur identité et  $f$  est cartésien,
- (b) les foncteurs  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont constants de valeur un même  $S$ -schéma  $X$  et  $f$  est l'identité de  $X$ .

**Remarque 2.4.49** — Les transformations binaturelles  $p_g$  et  $p_d$  ci-dessus sont les morphismes structuraux du  $(f, \alpha)^*$ -projecteur bilatère  $(f, \alpha)_\#$  obtenu à partir du module tautologique via l'adjonction  $((f, \alpha)_\#, (f, \alpha)^*)$ .

Dans le reste du paragraphe, on se donne un dérivateur algébrique monoïdal homotopique et stable  $(\mathbb{H}, \otimes)$ . De la formule de projection, on déduit immédiatement le lemme suivant :

**LEMME 2.4.50** — *Supposons que Dia contient les petites catégories discrètes. Alors les catégories  $\mathbb{H}(-)$  admettent les petites sommes et pour tout  $A \in \text{Ob}(\mathbb{H}(-))$ , les foncteurs  $A \otimes -$  et  $- \otimes A$  commutent aux petites sommes.*

**COROLLAIRE 2.4.51** — *On suppose que Dia contient les petites catégories et que les catégories triangulées  $\mathbb{H}(-)$  sont compactement engendrées. Alors, pour tout objet  $(\mathcal{X}, \mathcal{J})$  de  $\text{DiaSch}/S$ , la catégorie monoïdale  $(\mathbb{H}(\mathcal{X}, \mathcal{J}), \otimes_{\mathcal{X}, \mathcal{J}})$  est fermée à gauche et à droite. De plus, les bifoncteurs homomorphisme interne  $\text{Hom}_{\mathcal{X}, \mathcal{J}, g}(-, -)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{X}, \mathcal{J}, d}(-, -)$  sont triangulés par rapport aux deux variables.*

DEMONSTRATION Ceci découle immédiatement de la proposition 2.1.152.

C.Q.F.D

On peut bien évidemment reprendre l'étude menée pour les 2-foncteurs monoïdaux homotopiques et stables, dans le cadre des dérivateurs algébriques monoïdaux homotopiques et stables. Ceci n'est pas utile à la théorie des cycles évanescents du chapitre suivant. Notons tout de même le résultat suivant :

**LEMME 2.4.52** — *Soit  $g : Y \longrightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas quasi-projectifs. On suppose donné un carré cartésien de diagrammes de  $S$ -schémas :*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \times_X Y & \xrightarrow{(f', \alpha)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_X Y \\ g'' \downarrow & & \downarrow g' \\ (\mathcal{G}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(f, \alpha)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

avec  $g'$  et  $g''$  obtenu par pull-back de  $g$  suivant un 1-morphisme  $(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow (X, \mathbf{e})$ . Considérons les modules bilatères  $[g'^*, g'^!]$  et  $[g''^*, g''^!]$  obtenues en appliquant le théorème 2.3.38 aux 2-foncteurs monoïdaux homotopiques et stables  $\mathbb{H}_{\mathcal{F}/X}$  et  $\mathbb{H}_{\mathcal{G}/X}$ . Les 2-morphismes d'échange  $Ex^{*,*}$  et  $Ex^{!,*}$  induisent un morphisme de modules :

$$[(f', \alpha)^*, (f', \alpha)^*] \circ [g'^*, g'^!] \longrightarrow [g''^*, g''^!] \circ [(f, \alpha)^*, (f, \alpha)^*]$$

DEMONSTRATION Notons que les opérations  $g'^!$  et  $g''^!$  coïncident avec les opérations construites dans la section précédente et que le 2-morphisme  $Ex^{!,*}$  est donné par l'échange sur  $(\mathbb{H}^*, \text{Cart}' \mathbb{H}^!)$ .

Pour démontrer le lemme on peut supposer que  $g$  est une immersion fermée ou un morphisme lisse. Ces deux cas se traitent exactement comme pour le cas des schémas.

C.Q.F.D



## Chapitre 3

# La théorie des foncteurs cycles proches dans un cadre motivique

**Introduction.** On a vu dans les chapitres précédents que l'on disposait dans le monde motivique du formalisme des six opérations de Grothendieck, à savoir  $f^*$ ,  $f_*$ ,  $f_!$ ,  $f^!$ ,  $\otimes$  et  $\text{Hom}$ . Il est alors naturel de se demander si l'on dispose également de la septième opération, à savoir les foncteurs cycles proches  $\Psi$ . Le présent chapitre est consacré à la construction et à l'étude des foncteurs cycles proches motiviques. Pour rester fidèle à l'esprit de cette thèse, on a évité de se restreindre aux cas des 2-foncteurs homotopiques stables **SH** ou **DM**. Malheureusement, pour définir les foncteurs  $\Psi$ , il est nécessaire de sortir de la catégorie des schémas. Ceci ne pose pas de problèmes lorsqu'on considère **SH** ou **DM** puisqu'on peut faire les constructions nécessaires au niveau des catégories de modèles. Une solution satisfaisante est de travailler dans un dérivateur algébrique plutôt que dans un 2-foncteur homotopique. Au début, le prix peut paraître cher, mais en réalité on gagne beaucoup à travailler dans une telle généralité. En effet, parmi les avantages on peut noter :

- Notre construction s'applique ainsi à la plupart des 2-foncteurs homotopiques stables connus. En particulier on peut l'appliquer en cohomologie étale, en théorie de Hodge, etc. Ceci peut être particulièrement intéressant si on s'intéresse à la compatibilité de notre définition avec les réalisations.
- Le fait de travailler dans un cadre abstrait facilite les problèmes de cohérence. Ainsi, la construction de la structure pseudo-monoïdale sur les  $\Psi_f$  se fait beaucoup plus facilement que si l'on avait travaillé avec des modèles.

Un autre point à retenir sur ce chapitre est la théorie des systèmes de spécialisation. En effet, la plupart des théorèmes importants sur les foncteurs  $\Psi$  seront plus ou moins des traductions des résultats sur des systèmes de spécialisation généraux. Faisons un bref aperçu de ce chapitre :

**1-** Dans la section 3.1, on introduit la notion centrale de systèmes de spécialisation. Il s'agit en gros d'une généralisation des propriétés formelles de commutation avec les opérations  $f^*$  et  $f_*$  vérifiées par les foncteurs  $\Psi_f$  en cohomologie étale. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter la définition 3.1.1. On s'intéresse ensuite à quelques problèmes de cohérence et on définit la notion de système de spécialisation pseudo-monoïdale puis on en dérive quelques conséquences.

**2-** Dans la section 3.2, on décrit un procédé de construction des systèmes de spécialisation. Plus précisément, on montre comment la donnée d'un diagramme de schémas permet de construire à partir d'un système de spécialisation donné, un nouveau système de spécialisation. Là, évidemment, il faut que le système de spécialisation de départ soit défini entre deux dérivateurs algébriques (voir la définition 3.2.1 pour plus de détails). Notre construction des foncteurs cycles proches sera un cas particulier de ce procédé.

**3-** La section 3.3 est sans doute le cœur de ce chapitre. C'est ici qu'on fera le calcul fondamental, à savoir le théorème 3.3.10, sur lequel reposent tous les résultats importants sur les systèmes de spécialisation et les foncteurs cycles proches. Pour expliquer de quoi il s'agit, on raisonne en cohomologie étale et on considère le premier cas non trivial. On se donne un schéma strictement hensélien  $S$  de point générique  $\eta$  et de point fermé  $s$ . Soit  $f : X \longrightarrow S$  une courbe semi-stable, génériquement lisse et de fibre spéciale  $X_s$  réunion de deux branches  $D_1$  et  $D_2$ . On voudrait calculer le complexe de faisceaux étale  $\mathbb{R}\Psi_f \Lambda$ . Le théorème 3.3.10, nous dit que la restriction à  $D_1$  du complexe  $\mathbb{R}\Psi_f \Lambda$  est isomorphe à  $\mathbb{R}v_{1*} \Lambda$  avec  $v_1$  l'inclusion de  $D_1 - (D_1 \cap D_2)$  dans  $D_1$ . Ce résultat sera donc généralisé à n'importe quel système de spécialisation entre deux 2-foncteurs homotopiques stables avec  $f$  semi-stable à un nombre arbitraire de branches (voir le théorème 3.3.10 pour plus de détails). Comme conséquence de ce calcul, on obtient un théorème d'unicité (voir les théorèmes 3.3.4, 3.3.45 et 3.3.45 ) donnant un critère simple pour décider si un morphisme de systèmes de spécialisation est un isomorphisme. De même, on obtient un critère simple pour la constructibilité et la  $p$ t-exactitude à gauche des systèmes de spécialisation (voir le théorème 3.3.6 et les corollaires 3.3.48 et 3.3.49).

4- Les sections 3.4 et 3.5 sont consacrées à la définition et à l'étude de deux systèmes de spécialisations  $\Upsilon$  et  $\Psi$ . Les  $\Upsilon_f$  sont appelés les foncteurs cycles proches unipotents tandis que les  $\Psi_f$  sont les foncteurs cycles proches totaux. Ce sont ceci qui jouent le rôle des foncteurs cycles proches classiques en cohomologie étale. On prouvera que  $\Psi_f$  envoie un objet constructible sur un objet constructible, qu'il commute à la dualité et au produit tensoriel extérieur.

5- On termine ce chapitre par une section consacrée à la construction d'un 2-triangle distingué de monodromie pour les foncteurs cycles proches unipotents (à coefficients rationnelles) :

$$\Upsilon_{\gamma}(-1)[-1] \longrightarrow \chi_{\gamma} \longrightarrow \Upsilon \xrightarrow{N} \Upsilon_{\gamma}(-1)$$

La flèche  $N$  est l'opérateur de monodromie pour les cycles proches unipotents. La construction de ce 2-triangle passe par un système de spécialisation auxiliaire  $\log$  qu'on appellera le système de spécialisation logarithmique. Il est démontré, sous les bonnes hypothèses, que  $\log$  est isomorphe à  $\Upsilon$ . Ainsi, la définition de  $\log$  fournit une deuxième construction des cycles proches. Il est important de noter, que cette construction n'utilise pas le formalisme des dérivateurs algébriques. Par contre, on est obligé de travailler dans un 2-foncteur homotopique stable  $\mathbb{Q}$ -linéaire (vérifiant quelques conditions techniques supplémentaires).

### 3.1 Les systèmes de spécialisation : définition et propriétés de cohérence

Dans cette section, on introduit la notion de système de spécialisation entre deux 2-foncteurs homotopiques stables. On verra dans ce chapitre beaucoup d'exemples de systèmes de spécialisations. L'exemple des foncteurs cycles proches est probablement le plus intéressant. Toutefois, un grand nombre de résultats sur les cycles proches sont en fait des résultats généraux sur les systèmes de spécialisation. On verra à plusieurs reprises, comment cette généralité portera des fruits même en ce qui concerne des questions spéciales aux foncteurs cycles proches.

#### 3.1.1 Définition et premiers exemples

On suppose donné un diagramme de schémas noethériens admettant une famille ample de fibrés en droite :

$$(3.1) \quad \eta \xrightarrow{j} B \xleftarrow{i} \sigma$$

ainsi que deux 2-foncteurs homotopiques stables :

$$H_1 : \text{Sch}/\eta \longrightarrow \mathfrak{TR} \quad \text{et} \quad H_2 : \text{Sch}/\sigma \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible (et il n'y en aura jamais!) on notera par les mêmes symboles :  $f^*$ ,  $f_*$ ,  $f_!$  et  $f^!$  les quatre opérations relativement à  $H_1$  ou à  $H_2$ .

**DEFINITION 3.1.1** — Un système de spécialisation  $\text{sp}$  (au dessus de  $(B, j, i)$ ) de  $H_1$  vers  $H_2$  est l'ensemble des données suivantes :

(SPE1) pour chaque diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccccc} X_{\eta} & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_{\sigma} \\ f_{\eta} \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_{\sigma} \\ \eta & \xrightarrow{j} & B & \xleftarrow{i} & \sigma \end{array}$$

d'un foncteur triangulé  $\text{sp}_f : H_1(X_{\eta}) \longrightarrow H_2(X_{\sigma})$ ,

(SPE2) pour chaque diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccccc} X'_{\eta} & \xrightarrow{j} & X' & \xleftarrow{i} & X'_{\sigma} \\ g_{\eta} \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow g_{\sigma} \\ X_{\eta} & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_{\sigma} \\ f_{\eta} \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_{\sigma} \\ \eta & \xrightarrow{j} & B & \xleftarrow{i} & \sigma \end{array}$$



d'un 2-morphisme :

$$\begin{array}{ccc}
 H_1(X_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_f} & H_2(X_\sigma) \\
 g_\eta^* \downarrow & \alpha_g \swarrow & \downarrow g_\sigma^* \\
 H_1(X'_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_{f \circ g}} & H_2(X'_\sigma)
 \end{array}$$

tel que les conditions ci-dessous soient vérifiées.

1. La famille des 2-morphismes  $\alpha_g$  est compatible avec la composition verticale de diagrammes commutatifs à carrés cartésiens de base  $(B, j, i)$  de la manière évidente, i.e., pour tout diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 X''_\eta & \xrightarrow{j} & X'' & \xleftarrow{i} & X''_\sigma \\
 h_\eta \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow h_\sigma \\
 X'_\eta & \xrightarrow{j} & X' & \xleftarrow{i} & X'_\sigma \\
 g_\eta \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow g_\sigma \\
 X_\eta & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_\sigma \\
 f_\eta \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_\sigma \\
 \eta & \xrightarrow{j} & B & \xleftarrow{i} & \sigma
 \end{array}$$

les composées des deux diagrammes planaires :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 H_1(X_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_f} & H_2(X_\sigma) \\
 g_\eta^* \downarrow & \alpha_g \swarrow & \downarrow g_\sigma^* \\
 H_1(X'_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_{f \circ g}} & H_2(X'_\sigma) \\
 h_\eta^* \downarrow & \alpha_h \swarrow & \downarrow h_\sigma^* \\
 H_1(X''_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_{f \circ g \circ h}} & H_2(X''_\sigma)
 \end{array} & \text{et} & \begin{array}{ccc}
 H_1(X_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_f} & H_2(X_\sigma) \\
 \downarrow & \alpha_{g \circ h} \swarrow & \downarrow \\
 H_1(X''_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_{f \circ g \circ h}} & H_2(X''_\sigma)
 \end{array}
 \end{array}$$

sont égales.

2. Lorsque le  $B$ -morphisme  $g$  est lisse, le 2-morphisme  $\alpha_g$  est inversible.
3. Notons  $\beta_g$  le 2-morphisme obtenu par adjonction à partir de  $\alpha_g$  :

$$\begin{array}{ccc}
 H_1(X'_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_{f \circ g}} & H_2(X'_\sigma) \\
 g_{\eta^*} \downarrow & \beta_g \nearrow & \downarrow g_{\sigma^*} \\
 H_1(X_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_f} & H_2(X_\sigma)
 \end{array}$$

Lorsque  $g$  est projectif,  $\beta_g$  est inversible.

Un morphisme entre deux systèmes de spécialisation  $\text{sp}$  et  $\text{sp}'$  est la donnée pour tout digramme (3.2) d'un 2-morphisme :

$$\text{sp}_f \longrightarrow \text{sp}'_f$$

compatible au sens évident avec les 2-morphismes  $\alpha_g$ , i.e., tel que les carrés suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 g_\sigma^* \text{sp}_f & \xrightarrow{\alpha_g} & \text{sp}_{f \circ g} g_\eta^* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g_\sigma^* \text{sp}'_f & \xrightarrow{\alpha'_g} & \text{sp}'_{f \circ g} g_\eta^*
 \end{array}$$

**Remarque 3.1.2** — Il n'est pas nécessaire de supposer que  $j$  est une immersion ouverte et  $i$  l'immersion fermée complémentaire. Il existe en effet des systèmes de spécialisation très intéressants avec  $\sigma$  le fibré normal d'un sous-schéma de  $B$ .

**Remarque 3.1.3** — Souvent, mais pas toujours, les  $B$ -schémas  $\eta$  et  $\sigma$  sont quasi-projectifs et  $H_1$  et  $H_2$  sont les restrictions d'un même 2-foncteur homotopique stable :

$$H : \text{Sch}/B \longrightarrow \mathfrak{TA}$$

Dans ce cas, on dit simplement que  $\text{sp}$  est un système de spécialisation au dessus de  $(B, j, i)$  dans  $H$ .

Voici deux exemples de systèmes de spécialisations. Le premiers jouera un rôle important dans la suite. Le second, servira comme fil conducteur, pour la théorie développée :

**Exemple 3.1.4** — L'exemple le plus simple de systèmes de spécialisation est le suivant. On suppose que  $\eta$  et  $\sigma$  sont des  $B$ -schémas quasi-projectifs et que  $H_1$  et  $H_2$  sont la restriction d'un même 2-foncteur homotopique stable défini sur  $\text{Sch}/B$  (voir la remarque 3.1.3) . On définit alors un système de spécialisation  $\chi$  en associant à tout digramme (3.2), le foncteur triangulé  $\chi_f = i^*j_*$  et en prenant pour  $\alpha_g$  la composée de morphismes d'échange  $Ex_*^* \circ Ex^{*,*}$ . Ce système de spécialisation sera appelé le système de spécialisation canonique. Notons que pour vérifier les conditions de la définition 3.1.1, on utilise le théorème de changement de base pour un morphisme projectif.

**Exemple 3.1.5** — L'exemple qui nous motive vient de la cohomologie étale. On prend pour  $B = S$  un trait strictement hensélien,  $\eta$  son point générique et  $\sigma$  son point fermé ( $\sigma$  est le spectre d'un corps séparablement clos). On fixe une clôture séparable  $\bar{\eta} \longrightarrow \eta$  et on note  $\bar{S}$  le normalisé de  $S$  dans  $\bar{\eta}$ . On forme à partir du diagramme (3.2) le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{X} & \xleftarrow{\bar{i}} & X_{\sigma} \\ f_{\bar{\eta}} \downarrow & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow f_{\sigma} \\ \bar{\eta} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{S} & \xleftarrow{\bar{i}} & \sigma \end{array}$$

Pour tout objet  $A$  de  $D_c^b(X_{\eta}, \Lambda)$  (où  $\Lambda$  est un anneau fini de torsion première à la caractéristique du corps résiduel de  $S$ ) on pose :

$$\Psi_f(A) = \bar{i}^* \bar{R}j_* (A|_{X_{\bar{\eta}}})$$

Les foncteurs  $\Psi_f$  sont connus sous le nom de *foncteur cycles proches*. Ils définissent un système de spécialisation sur le foncteur croisé homotopique stable  $D_c^b(-, \Lambda)$ . On verra dans la suite comment on pourra définir un système de spécialisation sur **SH** (et **DM**) qui jouira de la plupart des bonnes propriétés des cycles proches du formalisme étale.

Notons le résultat utile suivant qui permet de construire un système de spécialisation donné à partir d'un autre :

**PROPOSITION 3.1.6** — *Gardons les notations de la définition 3.1.1. On fixe un  $B$ -schéma quasi-projectif  $b : B' \longrightarrow B$  et on définit deux 2-foncteurs homotopiques stables :*

$$H'_1 : \text{Sch}/\eta \longrightarrow \mathfrak{TA} \quad \text{et} \quad H'_2 : \text{Sch}/\sigma \longrightarrow \mathfrak{TA}$$

tels que :

- pour un  $\eta$ -schéma quasi-projectif  $X_1$ , on a  $H'_1(X_1) = H_1(X_1 \times_B B')$  avec  $X_1 \times_B B'$  muni de la structure évidente de  $\eta$ -schémas,
- pour un  $\sigma$ -schéma quasi-projectif  $X_2$ , on a  $H'_2(X_2) = H_2(X_2 \times_B B')$  avec  $X_2 \times_B B'$  muni de la structure évidente de  $\sigma$ -schémas,

Pour tout diagramme (3.2), posons  $\text{sp}'_f = \text{sp}_{b \circ f'} \circ b^*_\eta$  avec  $f'$  le pull-back de  $f$  par  $b$ . Alors  $\text{sp}'$  est naturellement un système de spécialisation au dessus de  $B'$  de  $H'_1$  vers  $H'_2$ .

### 3.1.2 Propriétés de cohérence

Les résultats de ce paragraphe peuvent être vus comme cas particuliers de résultats concernant les morphismes de 2-foncteurs homotopiques stables. En effet, on peut voir un système de spécialisation  $\text{sp}$  comme un morphisme entre deux 2-foncteurs sur  $\text{Sch}/B$ . Ces deux 2-foncteurs associent à  $X/B$  les catégories  $H_1(X_\eta)$  et  $H_2(X_\sigma)$ .

On fixe un système de spécialisation  $\text{sp}$  au dessus de  $(B, j, i)$ , de  $H_1$  vers  $H_2$ . On garde les notations de la définition 3.1.1. Il est clair que la famille  $(\beta_\gamma)$  est compatible au sens évident avec les compositions verticales. On dispose également de cubes commutatifs ayant pour faces  $\alpha_\gamma, \beta_\gamma$  et les morphismes d'échange  $Ex_*^*$ . On laissera aux lecteurs le soin de les écrire.

Lorsque le morphisme  $g$  est lisse, on obtient par adjonction à partir de  $\alpha_g^{-1}$  un 2-morphisme :

$$(3.4) \quad \begin{array}{ccc} H_1(X'_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_{f \circ g}} & H_2(X'_\sigma) \\ g_{\eta\#} \downarrow & \gamma_g \swarrow & \downarrow g_{\sigma\#} \\ H_1(X_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_f} & H_2(X_\sigma) \end{array}$$

La famille  $(\gamma_\gamma)$  est également compatible au sens évident avec les compositions verticales et on dispose de cubes commutatifs décrivant la compatibilité avec les morphismes d'échange  $Ex_{\#}^*$ .

Lorsqu'à la place du morphisme  $g$ , on a une immersion fermée  $s : Y \longrightarrow X$ , on obtient à partir de  $\beta_s^{-1}$  un 2-morphisme  $\nu_s$  :

$$(3.5) \quad \begin{array}{ccc} H_1(X_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_f} & H_2(X_\sigma) \\ s'_\eta \downarrow & \nu_s \swarrow & \downarrow s'_\sigma \\ H_1(Y_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_{f \circ s}} & H_2(Y_\sigma) \end{array}$$

Bien entendu, on a les compatibilités évidentes avec la composition verticale ainsi que les morphismes d'échange  $Ex_*^!$  et  $Ex^{!,*}$ .

Étant donné un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de type fini  $\mathcal{M}$  sur le  $B$ -schéma  $X$ , on définit par les formules habituelles des morphismes de commutation avec les équivalences de Thom :

$$(3.6) \quad \omega_f : \text{sp}_f \circ \text{Th}^{-1}(\mathcal{M}_\eta) \longrightarrow \text{Th}^{-1}(\mathcal{M}_\sigma) \circ \text{sp}_f \quad \text{et} \quad \omega_f : \text{Th}(\mathcal{M}_\sigma) \circ \text{sp}_f \longrightarrow \text{sp}_f \circ \text{Th}(\mathcal{M}_\eta)$$

On vérifie sans peine que ces morphismes sont compatibles aux isomorphismes de commutation avec les opérations  $f^*$  et  $s^!$  (pour  $s$  une immersion fermée). On en déduit en particulier une compatibilité avec les isomorphismes de composition.

Sans savoir que ces morphismes sont inversibles, on peut déjà définir pour  $g$  lisse une face carrée (dans le mauvais sens) :

$$(3.7) \quad \begin{array}{ccc} H_1(X_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_f} & H_2(X_\sigma) \\ g'_\eta \downarrow & \alpha'_g \swarrow & \downarrow g'_\sigma \\ H_1(X'_\eta) & \xrightarrow{\text{sp}_{f \circ g}} & H_2(X'_\sigma) \end{array}$$

en prenant la composée :

$$g'_\sigma \text{sp}_f \xrightarrow{\sim} \text{Th}((\Omega_g)_\sigma) g'_\sigma \text{sp}_f \xrightarrow{\alpha_g} \text{Th}((\Omega_g)_\sigma) \text{sp}_{f \circ g} g'_\eta \xrightarrow{\omega_{f \circ g}} \text{sp}_{f \circ g} \text{Th}((\Omega_g)_\sigma) g'_\eta \xrightarrow{\sim} \text{sp}_{f \circ g} g'_\sigma$$

On vérifie par la méthode habituelle que ces faces sont compatibles avec la composition verticale et les morphismes d'échange de type  $Ex^{!,*}$ .

**PROPOSITION 3.1.7** — *Les 2-morphismes  $\omega_\gamma$  de (3.6) sont inversibles.*

DEMONSTRATION Il suffit de traiter le cas de l'équivalence de Thom inverse  $\text{Th}^{-1}(-)$ . Le cas de l'équivalence de Thom  $\text{Th}(-)$  découle alors par adjonction. On se ramène au cas où  $\mathcal{M}$  est libre en prenant un recouvrement Zariski suffisamment fin  $u : U \longrightarrow X$  et en utilisant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} u_\sigma^* \text{sp}_f \text{Th}^{-1}(\mathcal{M}_\eta) & \xrightarrow{\sim} & \text{sp}_{f \circ u} u_\eta^* \text{Th}^{-1}(\mathcal{M}_\eta) & \xrightarrow{\sim} & \text{sp}_{f \circ u} \text{Th}^{-1}((u^* \mathcal{M})_\eta) u_\eta^* \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ u_\sigma^* \text{Th}^{-1}(\mathcal{M}_\sigma) \text{sp}_f & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}((u^* \mathcal{M})_\sigma) u_\sigma^* \text{sp}_f & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}((u^* \mathcal{M})_\sigma) \text{sp}_{f \circ u} u_\sigma^* \end{array}$$

ainsi que la conservation du foncteur  $u_\eta^*$ . On se ramène ensuite au cas  $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$  en utilisant la compatibilité avec l'isomorphisme de composition des équivalences de Thom. Pour traiter ce cas particulier, on procède de la manière suivante.

On appelle  $p : \mathbb{P}_X^1 \longrightarrow X$  la projection de la droite projective relative sur  $X$ . Notons que  $p$  est lisse et projectif.

On déduit alors un isomorphisme  $\mathrm{sp}_f p_{\eta^*} p_\eta^* \xrightarrow{\sim} p_{\sigma^*} p_\sigma^* \mathrm{sp}_f$  en prenant la composée suivante :

$$\mathrm{sp}_f p_{\eta^*} p_\eta^* \xrightarrow[\sim]{\beta_p} p_{\sigma^*} \mathrm{sp}_{f \circ p} p_\eta^* \xrightarrow[\sim]{\alpha_p^{-1}} p_{\sigma^*} p_\sigma^* \mathrm{sp}_f$$

L'idée est de déduire que le 2-morphisme de commutation  $\mathrm{sp}_f \circ (-1)[-2] \longrightarrow (-1)[-1] \circ \mathrm{sp}_f$  est inversible du fait que  $p_* p^* \simeq \mathrm{id} \oplus (-1)[-2]$ . On note pour cela  $s$  l'immersion de la section nulle de  $\mathbb{P}_X^1$  et on considère les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{sp}_f & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \mathrm{sp}_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{sp}_f p_{\eta^*} p_\eta^* & \xrightarrow{\beta_p} p_{\sigma^*} \mathrm{sp}_{f \circ p} p_\eta^* \xleftarrow{\alpha_p} & p_{\sigma^*} p_\sigma^* \mathrm{sp}_f \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{sp}_f \circ (-1)[-2] & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \mathrm{sp}_f \circ (-1)[-2] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (-1)[-2] \circ \mathrm{sp}_f & & \\ \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{sp}_f p_{\eta^*} s_{\eta^*} s_\eta^! p_\eta^* & \longrightarrow & p_{\sigma^*} \mathrm{sp}_{f \circ p} s_{\eta^*} s_\eta^! p_\eta^* & \longrightarrow & p_{\sigma^*} s_{\sigma^*} s_\sigma^! \mathrm{sp}_{f \circ p} p_\eta^* & \longleftarrow & p_{\sigma^*} s_{\sigma^*} s_\sigma^! p_\sigma^* \mathrm{sp}_f \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{sp}_f p_{\eta^*} p_\eta^* & \longrightarrow & p_{\sigma^*} \mathrm{sp}_f p_\eta^* & \xlongequal{\quad\quad\quad} & p_{\sigma^*} \mathrm{sp}_f p_\eta^* & \longleftarrow & p_{\sigma^*} p_\sigma^* \mathrm{sp}_f \end{array}$$

On en déduit immédiatement un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{sp}_f \oplus \mathrm{sp}_f \circ (-1)[-2] & \xrightarrow{\mathrm{id} \oplus c_f} & \mathrm{sp}_f \oplus (-1)[-2] \circ \mathrm{sp}_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{sp}_f p_{\eta^*} p_\eta^* & \xrightarrow{\sim} & p_{\sigma^*} p_\sigma^* \mathrm{sp}_f \end{array}$$

montrant ainsi que notre morphisme  $\omega_f$  est rétraction d'un isomorphisme. Ceci prouve la proposition. C.Q.F.D

En particulier la face (3.7) est inversible. On notera  $\nu_g$  son inverse :

$$(3.8) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{H}_1(X_\eta) & \xrightarrow{\mathrm{sp}_f} & \mathrm{H}_2(X_\sigma) \\ g_\eta^! \downarrow & \nu_g \nearrow & \downarrow g_\sigma^! \\ \mathrm{H}_1(X'_\eta) & \xrightarrow{\mathrm{sp}_{f \circ g}} & \mathrm{H}_2(X'_\sigma) \end{array}$$

L'étape suivante, consiste à recoller les faces (3.5) et (3.8) pour obtenir les transformations naturelles  $\nu_g$  avec  $g$  quasi-projectif quelconque. On factorise alors  $g$  par une immersion fermée  $s$  suivie d'une projection lisse  $p$ . On prend alors pour  $\nu_g$  la composée de  $\nu_s$  et  $\nu_p$  modulo les isomorphismes de connexion de  $\mathbf{H}^1$ . Le point est de prouver l'indépendance du choix de la factorisation. On se ramène alors à prouver le résultat suivant :

**LEMME 3.1.8** — (Compatibilité avec l'isomorphisme de pureté) On suppose donné un triangle commutatif de  $B$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{t} & W \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

avec  $t$  une immersion fermée et  $g$  et  $h$  lisses. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{sp}_{f \circ h} t_{\eta}^! g_{\eta}^* & \longrightarrow & t_{\sigma}^! \mathrm{sp}_{f \circ g} g_{\eta}^* & \xrightarrow{\sim} & t_{\sigma}^! g_{\sigma}^* \mathrm{sp}_f \\
 \Pi \downarrow & & & & \downarrow \Pi \\
 \mathrm{sp}_{f \circ h} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{t_{\sigma}}) h_{\eta}^* & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{t_{\eta}}) \mathrm{sp}_{f \circ h} h_{\eta}^* & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{t_{\eta}}) h_{\sigma}^* \mathrm{sp}_f
 \end{array}$$

DEMONSTRATION La preuve de ce lemme est complètement analogue à celle de la proposition 1.6.22. On se ramène à prouver la compatibilité correspondante avec le 2-morphisme  $\pi$ . Les détails sont laissés aux lecteurs. C.Q.F.D

On a ainsi le résultat suivant :

**PROPOSITION 3.1.9** — *Il existe une unique famille de faces carrées :*

$$(3.9) \quad \begin{array}{ccc}
 \mathrm{H}_1(X_{\eta}) & \xrightarrow{\mathrm{sp}_f} & \mathrm{H}_2(X_{\sigma}) \\
 g_{\eta}^! \downarrow & \nu_g \swarrow & \downarrow g_{\sigma}^! \\
 \mathrm{H}_1(X'_{\eta}) & \xrightarrow{\mathrm{sp}_{f \circ g}} & \mathrm{H}_2(X'_{\sigma})
 \end{array}$$

prolongeant les faces (3.5) et (3.8) et compatible à la composition verticale. De plus, les  $\nu_g$  et les  $\alpha_g$  sont compatibles à la structures d'échange  $Ex^{*,!}$  dans le sens évident.

On déduit par adjonction de (3.9) des faces carrées :

$$(3.10) \quad \begin{array}{ccc}
 \mathrm{H}_1(X'_{\eta}) & \xrightarrow{\mathrm{sp}_{f \circ g}} & \mathrm{H}_2(X'_{\sigma}) \\
 g_{\eta}^! \downarrow & \mu_g \swarrow & \downarrow g_{\sigma}^! \\
 \mathrm{H}_1(X_{\eta}) & \xrightarrow{\mathrm{sp}_f} & \mathrm{H}_2(X_{\sigma})
 \end{array}$$

De la compatibilité avec la structure d'échange  $Ex^{!,*}$ , on déduit en revenant à la définition du 2-morphisme  $g_! \longrightarrow g_*$  le résultat suivant :

**PROPOSITION 3.1.10** — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
 g_{\sigma}^! \mathrm{sp}_{f \circ g} & \longrightarrow & \mathrm{sp}_f g_{\eta}^! \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g_{\sigma}^* \mathrm{sp}_{f \circ g} & \longleftarrow & \mathrm{sp}_f g_{\eta}^*
 \end{array}$$

En particulier, pour  $g$  projectif la face  $\mu_g$  est inversible.

Retenons, la conséquence suivante :

**COROLLAIRE 3.1.11** — *Le système de spécialisation  $\mathrm{sp}$  est également un système de spécialisation  $\mathrm{sp}^{\mathrm{op}}$  du 2-foncteur homotopique stable  $\mathrm{H}_1^{\mathrm{op}} = (\mathrm{G}_1^*, \mathrm{G}_{1\star}, \mathrm{G}_{1\nabla}, \mathrm{G}_1^{\nabla})$  opposé à  $\mathrm{H}_1$  vers le 2-foncteur homotopique stable  $\mathrm{H}_2^{\mathrm{op}} = (\mathrm{G}_2^*, \mathrm{G}_{2\star}, \mathrm{G}_{2\nabla}, \mathrm{G}_2^{\nabla})$  opposé à  $\mathrm{H}_2$  (voir la page 157 pour la définition du 2-foncteur homotopique stable opposé).*

### 3.1.3 Systèmes de spécialisation monoïdaux

Dans ce numéro, on suppose que  $\mathrm{H}_1$  et  $\mathrm{H}_2$  sont des 2-foncteurs monoïdaux homotopiques et stables. Faisons la définition suivante :

**DEFINITION 3.1.12** — *Un système de spécialisation pseudo-monoïdal de  $\mathrm{H}_1$  vers  $\mathrm{H}_2$  est la donnée :*

1. d'un système de spécialisation  $\mathrm{sp}$  de  $\mathrm{H}_1$  vers  $\mathrm{H}_2$  au sens de la définition 3.1.1,
2. pour chaque diagramme à carrés cartésiens (3.2), d'un accouplement  $\alpha$  sur le foncteur  $\mathrm{sp}_f$  faisant de lui un foncteur pseudo-monoïdal et tel que les  $\alpha_g$  soient des transformations naturelles de foncteurs pseudo-monoïdaux.

Les deux résultats simples suivants seront utiles :

**PROPOSITION 3.1.13** — *On suppose donné un système de spécialisation pseudo-monoïdal  $\mathrm{sp}$  de  $\mathbf{H}_1$  vers  $\mathbf{H}_2$  et on garde les notations de la définition 3.1.1.*

1- Soit  $A_1$  un objet de  $\mathbf{H}_1(\eta)$ . On obtient un système de spécialisation  $\mathrm{sp}^{A_1}$  en posant :

$$\mathrm{sp}_f^{A_1}(-) = \mathrm{sp}_f(f_\eta^*(A_1) \otimes_{X_\eta} -)$$

2- Soit  $A_2$  un objet de  $\mathbf{H}_2(\sigma)$ . On obtient un système de spécialisation  ${}^{A_2}\mathrm{sp}$  en posant :

$${}^{A_2}\mathrm{sp}_f(-) = f_\sigma^* A_2 \otimes_{X_\sigma} \mathrm{sp}_f(-)$$

DEMONSTRATION On prendra pour  $\alpha_g$  les composées suivantes :

$$g_\sigma^* \mathrm{sp}_f(f_\eta^*(A_1) \otimes -) \longrightarrow \mathrm{sp}_{f \circ g}(g_\eta^*(f_\eta^* A_1) \otimes -) \longrightarrow \mathrm{sp}_{f \circ g}(g_\eta^* f_\eta^* A_1 \otimes g_\eta^*(-)) \simeq \mathrm{sp}_{f \circ g}((f \circ g)_\eta^* A_1 \otimes g_\eta^*(-))$$

$$g_\sigma^*(f_\sigma^* A_2 \otimes \mathrm{sp}_f(-)) \longrightarrow g_\sigma^* f_\sigma^* A_2 \otimes g_\sigma^* \mathrm{sp}_f(-) \longrightarrow g_\sigma^* f_\sigma^* A_2 \otimes \mathrm{sp}_{f \circ g} g_\eta^*(-) \simeq (f \circ g)_\sigma^* A_1 \otimes \mathrm{sp}_{f \circ g} g_\eta^*(-)$$

La preuve de la compatibilité avec la composition verticale est laissée en exercice. Lorsque  $g$  est lisse, on voit immédiatement que ces composées sont inversibles. Pour vérifier le troisième axiome, on remarque d'abord que  $\beta_g$  est donné par les composées :

$$\mathrm{sp}_f(f_\eta^* A_1 \otimes g_{\eta^*}(-)) \longrightarrow \mathrm{sp}_f(g_{\eta^*}(g_\eta^* f_\eta^* A_1 \otimes -)) \longrightarrow g_{\sigma^*} \mathrm{sp}_{f \circ g}(g_\eta^* f_\eta^* A_1 \otimes -) \simeq g_{\sigma^*} \mathrm{sp}_{f \circ g}((f \circ g)_\eta^* A_1 \otimes -)$$

$$f_\sigma^* A_2 \otimes \mathrm{sp}_f g_{\eta^*}(-) \longrightarrow f_\sigma^* A_2 \otimes g_{\sigma^*} \mathrm{sp}_{f \circ g}(-) \longrightarrow g_{\sigma^*}(g_\sigma^* f_\sigma^* A_2 \otimes \mathrm{sp}_{f \circ g}(-)) \simeq g_{\sigma^*}((f \circ g)_\eta^* A_2 \otimes \mathrm{sp}_{f \circ g}(-))$$

Pour vérifier que ces composées sont bien inversibles pour  $g$  projectifs, il suffira de montrer que les morphismes structuraux des coprojecteurs  $[g_\eta^*, g_{\eta^*}]$  et  $[g_\sigma^*, g_{\sigma^*}]$  sont inversibles. C'est effectivement le cas et les projecteurs inverses sont donnés par  $[g_\eta^*, g_{\eta^*}]$  et  $[g_\sigma^*, g_{\sigma^*}]$  modulo les isomorphismes  $g_{\eta^*} \simeq g_{\eta^*}$  et  $g_{\sigma^*} \simeq g_{\sigma^*}$ . C.Q.F.D

On a également le résultat facile suivant dont la preuve est laissée en exercice :

**PROPOSITION 3.1.14** — *On garde les notations de la proposition 3.1.13. Soit  $A$  un objet de  $\mathbf{H}_1(\eta)$ . Les transformations naturelles :*

$$f_\sigma^* \mathrm{sp}_{\mathrm{id}} A \otimes_{X_\sigma} \mathrm{sp}_f(-) \longrightarrow \mathrm{sp}_f f_\eta^* A \otimes \mathrm{sp}_f(-) \longrightarrow \mathrm{sp}_f(f_\eta^* A \otimes -)$$

définissent un morphisme de systèmes de spécialisation  ${}^{\mathrm{sp}_{\mathrm{id}} A} \mathrm{sp} \longrightarrow \mathrm{sp}^A$ .

Notons le résultat suivant :

**PROPOSITION 3.1.15** — *On suppose donné un système de spécialisation  $\mathrm{sp}$  au dessus de  $B$  de  $\mathbf{H}_1$  vers  $\mathbf{H}_2$ . Avec les notations de la définition 3.1.1, le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccccc} g_\sigma^* \mathrm{sp}_f A \otimes \mathrm{sp}_{f \circ g} g_\eta^! B & \longrightarrow & g_\sigma^* \mathrm{sp}_f A \otimes g_\sigma^! \mathrm{sp}_f B & \longrightarrow & g_\sigma^! (\mathrm{sp}_f A \otimes \mathrm{sp}_f B) & \longrightarrow & g_\sigma^! \mathrm{sp}_f(A \otimes B) \\ \downarrow & & & & & & \parallel \\ \mathrm{sp}_{f \circ g} g_\eta^* A \otimes \mathrm{sp}_{f \circ g} g_\eta^! B & \longrightarrow & \mathrm{sp}_{f \circ g}(g_\eta^* A \otimes g_\eta^! B) & \longrightarrow & \mathrm{sp}_{f \circ g} g_\eta^!(A \otimes B) & \longrightarrow & g_\sigma^! \mathrm{sp}_f(A \otimes B) \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION On se ramène immédiatement au cas où  $g$  est lisse ou une immersion fermée.

Pour une immersion fermée  $s$ , on se ramène par adjonction à la commutation de :

$$\begin{array}{ccccccc} s_{\sigma^*}(s_\sigma^* \mathrm{sp}_f A \otimes \mathrm{sp}_{f \circ s} B) & \longrightarrow & \mathrm{sp}_f A \otimes s_{\sigma^*} \mathrm{sp}_{f \circ s} B & \longrightarrow & \mathrm{sp}_f A \otimes \mathrm{sp}_f s_{\eta^*} B & \longrightarrow & \mathrm{sp}_f(A \otimes s_{\eta^*} B) \\ \downarrow & & & & & & \parallel \\ s_{\sigma^*}(\mathrm{sp}_{f \circ s} s_\eta^* A \otimes \mathrm{sp}_{f \circ s} B) & \longrightarrow & s_{\sigma^*} \mathrm{sp}_{f \circ s}(s_\eta^* A \otimes B) & \longrightarrow & \mathrm{sp}_f(s_{\eta^*}(s_\eta^* A \otimes B)) & \longrightarrow & \mathrm{sp}_f(A \otimes s_{\eta^*} B) \end{array}$$

Cela découle immédiatement du lemme 2.1.110.

Pour  $g$  lisse, on a la formule  $g^! = \text{Th}(\Omega_g)g^*$ . En utilisant la commutation du diagramme analogue obtenu en remplaçant  $g^!$  par  $g^*$  dans le diagramme de l'énoncé, on se ramène à une question qui concerne des équivalences de Thom. En passant aux équivalences de Thom inverses on voit qu'il faut prouver la commutation des diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} \text{sp}_f A \otimes \text{sp}_f \text{Th}^{-1}(\mathcal{M}_\eta)A & \longrightarrow & \text{sp}_f A \otimes \text{Th}^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)\text{sp}_f B & \longrightarrow & \text{Th}^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)(\text{sp}_f A \otimes \text{sp}_f B) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \text{sp}_f(A \otimes \text{Th}^{-1}(\mathcal{M}_\eta)B) & \longrightarrow & \text{sp}_f \text{Th}^{-1}(\mathcal{M}_\eta)(A \otimes B) & \longrightarrow & \text{Th}^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)\text{sp}_f(A \otimes B) \end{array}$$

En revenant à la définition de  $\text{Th}^{-1}(-)$ , on voit qu'il suffit de prouver la commutation du diagramme de l'énoncé dans lequel on a remplacé  $g^!$  par  $s^!$  (avec  $s$  une immersion fermée) et  $p^*$ . Mais on a déjà traité le cas des immersions fermées. D'où le résultat annoncé. C.Q.F.D

On supposera dans la suite que  $H_1$  et  $H_2$  sont tous les deux fermés à droite. On notera  $\underline{\text{Hom}}$  sans décorations les foncteurs homomorphismes internes. Par la définition 2.1.140, on a des transformations naturelles :

$$\text{sp}_f \underline{\text{Hom}}(A, B) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\text{sp}_f A, \text{sp}_f B)$$

Étant donné un objet  $R_1$  de  $H_1(\eta)$  et  $R_2$  de  $H_2(\sigma)$  on pose :

- $D_f^{R_1}(-) = \underline{\text{Hom}}(-, f_\eta^! R_1)$ ,
- $D_f^{R_2}(-) = \underline{\text{Hom}}(-, f_\sigma^! R_2)$ .

**PROPOSITION 3.1.16** — *Les foncteurs :*

- $\text{sp}_f \circ D_f^{R_1} : H_1(X_\eta) \longrightarrow H_2(X_\sigma)^{\text{op}}$
- $D_f^{R_2} \circ \text{sp}_f : H_1(X_\eta) \longrightarrow H_2(X_\sigma)^{\text{op}}$

définissent deux systèmes de spécialisation de  $H_1$  vers  $H_2^{\text{op}}$ .

DEMONSTRATION En effet, on peut les voir comme des composées :

$$H_1 \xrightarrow{D_f^{R_1}} H_1^{\text{op}} \xrightarrow{\text{sp}^{\text{op}}} H_2^{\text{op}} \quad \text{et} \quad H_1 \xrightarrow{\text{sp}} H_2 \xrightarrow{D_f^{R_2}} H_2^{\text{op}}$$

Les détails seront laissés aux lecteurs. C.Q.F.D

Fixons un objet  $R$  de  $H_1(\eta)$ . On dispose ainsi d'une transformation naturelle  $\text{sp}_f \circ D_f^R \longrightarrow D_f^{\text{sp}_{\text{id}} R} \circ \text{sp}_f$  en prenant la composée :

$$(3.11) \quad \text{sp}_f \underline{\text{Hom}}(-, f_\eta^! A) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\text{sp}_f(-), \text{sp}_f f_\eta^! R) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\text{sp}_f(-), f_\sigma^! \text{sp}_{\text{id}} R)$$

On a le résultat de cohérence suivant :

**PROPOSITION 3.1.17** — *Le diagramme suivant<sup>1</sup> :*

$$\begin{array}{ccccc} \text{sp}_{f \circ g} D_{f \circ g}^R g_\eta^* & \xrightarrow{\sim} & \text{sp}_{f \circ g} g_\eta^! D_f^R & \longrightarrow & g_\sigma^! \text{sp}_f D_f^R \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ D_{f \circ g}^{\text{sp}_{\text{id}} R} \text{sp}_{f \circ g} g_\eta^* & \longrightarrow & D_{f \circ g}^{\text{sp}_{\text{id}} R} g_\sigma^* \text{sp}_f & \longrightarrow & g_\sigma^! D_f^{\text{sp}_{\text{id}} R} \text{sp}_f \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION En dégagant les isomorphismes de connexion, on se ramène immédiatement à montrer que le

<sup>1</sup>Noter bien que la première flèche de la ligne inférieure n'est pas dans le mauvais sens comme on peut le croire à première vue. En effet, les foncteurs de dualité sont contravariants.

diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{sp}_{f \circ g} \underline{\mathrm{Hom}}(g_{\eta}^*(-), g_{\eta}^! f_{\eta}^! R) & \longrightarrow & \mathrm{sp}_{f \circ g} g_{\eta}^! \underline{\mathrm{Hom}}(-, f_{\eta}^! R) & \longrightarrow & g_{\sigma}^! \mathrm{sp}_f \underline{\mathrm{Hom}}(-, f_{\eta}^! R) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{sp}_{f \circ g} g_{\eta}^*(-), \mathrm{sp}_{f \circ g} g_{\eta}^! f_{\eta}^! R) & & & & \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{sp}_{f \circ g} g_{\eta}^*(-), g_{\sigma}^! \mathrm{sp}_f f_{\eta}^! R) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(g_{\sigma}^! \mathrm{sp}_f(-), g_{\sigma}^! \mathrm{sp}_f f_{\eta}^! R) & \longrightarrow & g_{\sigma}^! \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{sp}_f(-), \mathrm{sp}_f f_{\eta}^! R) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{sp}_{f \circ g} g_{\eta}^*(-), g_{\sigma}^! f_{\sigma}^! \mathrm{sp}_{\mathrm{id}} R) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(g_{\sigma}^! \mathrm{sp}_f(-), g_{\sigma}^! f_{\sigma}^! \mathrm{sp}_{\mathrm{id}} R) & \longrightarrow & g_{\sigma}^! \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{sp}_f(-), f_{\sigma}^! \mathrm{sp}_{\mathrm{id}} R)
 \end{array}$$

est commutatif. La commutation des petits carrés en bas est triviale. La commutation du gros rectangle se démontre en utilisant la méthode de la preuve de 2.3.57 C.Q.F.D

On a le corollaire intéressant suivant :

**COROLLAIRE 3.1.18** — *Les transformations naturelles (3.11) définissent un morphisme de systèmes de spécialisations :*

$$\mathrm{sp} \circ D^R \longrightarrow D^{\mathrm{sp}_{\mathrm{id}} R} \circ \mathrm{sp}$$

### 3.2 Une technique de construction de structures de spécialisation

Dans cette section, on décrira une méthode générale pour construire des systèmes de spécialisation. Cette méthode utilise le formalisme des dérivateurs algébriques homotopiques et stables. Comme application de cette construction, on obtiendra les foncteurs cycles proches à partir du système de spécialisation canonique. On suppose donné un diagramme de schémas noethériens admettant une famille ample de fibrés en droite :

$$\eta \longrightarrow B \longleftarrow \sigma$$

et deux dérivateurs algébriques :

$$\mathbb{H}_1 : \mathrm{DiaSch}/\eta \longrightarrow \mathfrak{IA} \quad \text{et} \quad \mathbb{H}_2 : \mathrm{DiaSch}/\sigma \longrightarrow \mathfrak{IA}$$

La définition suivante est une extension évidente de la définition 3.1.1 :

**DEFINITION 3.2.1** — *Un système de spécialisation  $\mathrm{sp}$  (au dessus de  $(B, j, i)$ ) de  $\mathbb{H}_1$  vers  $\mathbb{H}_2$  est l'ensemble des données suivantes :*

**(SPE1)** pour chaque diagramme commutatif de  $\mathrm{DiaSch}/B$  à carrés cartésiens :

$$(3.12) \quad \begin{array}{ccccc}
 (\mathcal{X}_{\eta}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{j} & (\mathcal{X}, \mathcal{J}) & \xleftarrow{i} & (\mathcal{X}_{\sigma}, \mathcal{J}) \\
 \downarrow (f_{\eta}, p_{\mathcal{J}}) & & \downarrow (f, p_{\mathcal{J}}) & & \downarrow (f_{\sigma}, p_{\mathcal{J}}) \\
 \eta & \xrightarrow{j} & B & \xleftarrow{i} & \sigma
 \end{array}$$

d'un foncteur triangulé  $\mathrm{sp}_{(f, \mathcal{J})} : \mathbb{H}_1(\mathcal{X}_{\eta}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{H}_2(\mathcal{X}_{\sigma}, \mathcal{J})$ ,

**(SPE2)** pour chaque diagramme commutatif de  $\mathrm{DiaSch}/B$  à carrés cartésiens :

$$(3.13) \quad \begin{array}{ccccc}
 (\mathcal{X}'_{\eta}, \mathcal{J}') & \xrightarrow{j} & (\mathcal{X}', \mathcal{J}') & \xleftarrow{i} & (\mathcal{X}'_{\sigma}, \mathcal{J}') \\
 \downarrow (g_{\eta}, \tau) & & \downarrow (g, \tau) & & \downarrow (g_{\sigma}, \tau) \\
 (\mathcal{X}_{\eta}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{j} & (\mathcal{X}, \mathcal{J}) & \xleftarrow{i} & (\mathcal{X}_{\sigma}, \mathcal{J}) \\
 \downarrow (f_{\eta}, p_{\mathcal{J}}) & & \downarrow (f, p_{\mathcal{J}}) & & \downarrow (f_{\sigma}, p_{\mathcal{J}}) \\
 \eta & \xrightarrow{j} & B & \xleftarrow{i} & \sigma
 \end{array}$$



d'un 2-morphisme :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{H}_1(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\text{sp}(f, p_{\mathcal{J}})} & \mathbb{H}_2(\mathcal{X}_\sigma, \mathcal{J}) \\
 (g_\eta, \tau)^* \downarrow & \alpha_{(g, \tau)} \swarrow & \downarrow (g_\sigma, \tau)^* \\
 \mathbb{H}_1(\mathcal{X}'_\eta, \mathcal{J}') & \xrightarrow{\text{sp}(f \circ g, p_{\mathcal{J}'})} & \mathbb{H}_2(\mathcal{X}'_\sigma, \mathcal{J}')
 \end{array}$$

tel que les conditions ci-dessous soient vérifiées.

1. La famille des 2-morphismes  $\alpha_{(g, \tau)}$  est compatible avec la composition verticale des diagrammes commutatifs à carrés cartésiens de base  $(B, j, i)$  de la manière évidente.
2. Lorsque le  $B$ -morphisme  $(g, \tau)$  est lisse argument par argument, le 2-morphisme  $\alpha_{(g, \tau)}$  est inversible.
3. Notons  $\beta_{(g, \tau)}$  le 2-morphisme obtenu par adjonction à partir de  $\alpha_{(g, \tau)}$ . Lorsque  $(g, \tau)$  est projectif argument par argument, ce 2-morphisme est inversible.

**Exemple 3.2.2** — Lorsque  $\eta$ , et  $\sigma$  sont de type fini et que  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$  proviennent d'un même dérivateur algébrique homotopique et stable  $\mathbb{H}$  défini sur  $\text{DiaSch}/B$ , on définit un système de spécialisation canonique  $\chi$  par la formule  $\chi_f = i^* j_*$ .

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on note  $H_i(-)$  le 2-foncteur homotopique et stable  $\mathbb{H}_i(-, \mathbf{e})$ . Dans la suite, on fixe un système de spécialisation  $\text{sp}$  de  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$ . On construira à partir de  $\text{sp}$  de nouveaux systèmes de spécialisation de  $H_1$  vers  $H_2$ .

### 3.2.1 La construction. Vérification des axiomes

On se donne un diagramme de  $\eta$ -schémas quasi-projectifs  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ . On va définir un système de spécialisation qu'on notera  $\mathcal{F} \bullet \text{sp}$  (lorsqu'il y a pas d'ambiguïté sur la catégorie d'indice  $\mathcal{J}$ ) de  $H_1$  vers  $H_2$ .

Notons  $(\pi, p_{\mathcal{J}}) : (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\eta, \mathbf{e})$  la projection structurale de notre diagramme de  $\eta$ -schémas. On a ainsi la factorisation évidente (voir remarque 2.4.7) :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{(\pi, p_{\mathcal{J}})} & \\
 (\mathcal{F}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\pi} & (\eta, \mathcal{J}) \xrightarrow{p_{\mathcal{J}}} \eta
 \end{array}$$

Pour tout  $B$ -schéma quasi-projectif  $f : X \longrightarrow B$ , on considère le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 X_\eta & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_\sigma \\
 f_\eta \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_\sigma \\
 \eta & \xrightarrow{j} & B & \xleftarrow{i} & \sigma
 \end{array}$$

Le foncteur  $\mathcal{F} \bullet \text{sp}_f$  à définir est un foncteur de  $H_1(X_\eta)$  dans  $H_2(X_s)$ . On commence par considérer le diagramme commutatif de 1-morphismes de diagrammes de schémas :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathcal{F} \times_\eta X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\pi_f} & (X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{j} & (X, \mathcal{J}) & \xleftarrow{i} & (X_s, \mathcal{J}) \\
 f_\eta \downarrow & & \downarrow f_\eta & \searrow p_{\mathcal{J}} & \searrow p_{\mathcal{J}} & & \searrow p_{\mathcal{J}} \\
 (\mathcal{F}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\pi} & (\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{j} & X_\eta & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_s \\
 & & \searrow p_{\mathcal{J}} & \downarrow f_\eta & \downarrow f & & \downarrow f_s \\
 & & \eta & \xrightarrow{j} & B & \xleftarrow{i} & \sigma
 \end{array}$$

Dans lesquels tous les carrés (et losanges) sont cartésiens. Suivant notre convention de noter les 1-morphismes de diagramme de schémas, la composée  $p_{\mathcal{J}} \circ \pi_f$  sera notée  $(\pi_f, p_{\mathcal{J}}) : (\mathcal{F} \times_\eta X_\eta, \mathcal{J}) \longrightarrow X_\eta$ .

**DEFINITION 3.2.3** — Le 1-morphisme  $\mathcal{F} \bullet \text{sp}_f : H_1(X_\eta) \longrightarrow H_2(X_s)$  est la composée suivante :

$$H_1(X_\eta) \xrightarrow{(\pi_f, p_{\mathcal{J}})^*} \mathbb{H}_1(\mathcal{F} \times_\eta X, \mathcal{J}) \xrightarrow{(\pi_f)_*} \mathbb{H}_1(X_\eta, \mathcal{J}) \xrightarrow{\text{sp}(f, p_{\mathcal{J}})} \mathbb{H}_2(X_s, \mathcal{J}) \xrightarrow{(p_{\mathcal{J}})_\#} H_2(X_s)$$

**Remarque 3.2.4** — Il est clair que si l'on prend à la place d'un  $B$ -schéma  $X$  un diagramme de  $B$ -schémas  $\mathcal{X}$ , la définition précédente garde son sens. Le lecteur vérifiera même que  $\mathcal{F} \bullet \mathbf{sp}$  s'étend de cette manière en un système de spécialisation entre dérivateurs algébriques homotopiques stables. On a quand même préféré se restreindre à  $H_1$  et  $H_2$  pour éviter les complications au niveau des notations.

**Remarque 3.2.5** — La définition de  $\mathcal{F} \bullet \mathbf{sp}_f$  peut paraître arbitraire. C'est peut-être bien le cas, puisqu'à la place de  $p_{\mathcal{J}\#}$  on aurait pu prendre  $p_{\mathcal{J}*}$  ou même tout simplement le 1-morphisme :  $\mathbf{sp}_f(\pi_f, p_{\mathcal{J}})_*(\pi_f, p_{\mathcal{J}})^*$ . Notons quand même que la définition choisie a la propriété de commuter aux petites sommes (du moins pour  $\mathbb{S}\mathbb{H}$ ) ce qui n'est pas le cas (sauf pour  $\mathcal{J}$  particulier) pour les deux autres définitions. De plus, la définition choisie est celle qui donne la bonne formule dans le cas des foncteurs cycles proches.

**Remarque 3.2.6** — Le lecteur attentif a sûrement remarqué qu'on s'est donné plus de structures que nécessaire. En effet, pour définir les foncteurs  $\mathcal{F} \bullet \mathbf{sp}_f$  on utilise uniquement la restriction de  $\mathbf{sp}$  au 2-foncteur

$$\mathbb{H}_1 : \text{Sch}/\eta \times \text{Dia} \longrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{R}$$

i.e., le système de spécialisation induit sur le 2-foncteur homotopique stable  $\mathbb{H}_1(-, \mathcal{J})$  à valeurs dans  $\mathbb{H}_2(-, \mathcal{J})$ . En effet, le lecteur vérifiera facilement que pour ce qui sera fait dans cette section, on aurait bien pu partir d'un système de spécialisation  $\mathbf{sp}$  entre 2-foncteurs homotopiques stable en dérivateurs<sup>2</sup>. Notons que le cas qui nous motive est celui du système de spécialisation canonique  $\chi$  qui lui est défini sur  $\mathbb{H}_1$  tout entier.

Le reste de la sous-section sera consacré à étendre la famille des foncteurs  $\mathcal{F} \bullet \mathbf{sp}_{\mathcal{J}}$  en une structure de spécialisation. Il s'agit donc de définir les faces carrées  $\alpha_{\mathcal{J}}$  et de vérifier les axiomes de la définition 3.1.1. Supposons donné un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} Y_{\eta} & \xrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & Y_{\sigma} \\ g_{\eta} \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow g_{\sigma} \\ X_{\eta} & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_{\sigma} \\ f_{\eta} \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_{\sigma} \\ \eta & \xrightarrow{j} & B & \xleftarrow{i} & \sigma \end{array}$$

Pour définir le 2-morphisme  $\alpha_g : g_{\sigma}^* \mathcal{F} \bullet \mathbf{sp}_f \longrightarrow \mathcal{F} \bullet \mathbf{sp}_{f \circ g} g_{\eta}^*$ , on forme d'abord le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccccccc} Y_{\eta} & \xleftarrow{(\pi_{f \circ g}, p_{\mathcal{J}})} & (\mathcal{F} \times_{\eta} Y_{\eta}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\pi_{f \circ g}} & (Y_{\eta}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{j} & (Y, \mathcal{J}) & \xleftarrow{i} & (Y_{\sigma}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{p_{\mathcal{J}}} & Y_{\sigma} \\ g_{\eta} \downarrow & & \downarrow g_{\eta} & & \downarrow g_{\eta} & & \downarrow g & & \downarrow g_{\sigma} & & \downarrow g_{\sigma} \\ X_{\eta} & \xleftarrow{(\pi_f, p_{\mathcal{J}})} & (\mathcal{F} \times_{\eta} X_{\eta}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\pi_f} & (X_{\eta}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{j} & (X, \mathcal{J}) & \xleftarrow{i} & (X_{\sigma}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{p_{\mathcal{J}}} & X_{\sigma} \end{array}$$

On prend alors pour  $\alpha_g$  la composée du diagramme planaire :

$$(3.14) \quad \begin{array}{ccccccccccc} H_1(X_{\eta}) & \xrightarrow{(\pi_f, p_{\mathcal{J}})^*} & H_1(\mathcal{F} \times_{\eta} X_{\eta}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(\pi_f)^*} & H_1(X_{\eta}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\mathbf{sp}(f, p_{\mathcal{J}})} & H_2(X_{\sigma}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(p_{\mathcal{J}})\#} & H_2(X_{\sigma}) \\ g_{\eta}^* \downarrow & \swarrow Ex_{\#}^{**} & \downarrow g_{\eta}^* & \swarrow Ex_{\#}^* & \downarrow g_{\eta}^* & \swarrow \alpha_g & \downarrow g_{\sigma}^* & \swarrow (Ex_{\#}^*)^{-1} & \downarrow g_{\sigma}^* \\ H_1(Y_{\eta}) & \xrightarrow{(\pi_{f \circ g}, p_{\mathcal{J}})^*} & H_1(\mathcal{F} \times_{\eta} Y_{\eta}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(\pi_{f \circ g})^*} & H_1(Y_{\eta}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\mathbf{sp}(f \circ g, p_{\mathcal{J}})} & H_2(Y_{\sigma}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(p_{\mathcal{J}})\#} & H_2(Y_{\sigma}) \end{array}$$

Notons que le 2-morphisme d'échange  $Ex_{\#}^*$  est inversible par le corollaire 2.4.24 appliqué au 1-morphisme  $p_{\mathcal{J}}$  lisse argument par argument et au morphisme de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de schémas  $g_{\sigma}$ . Les deux premières conditions de la définition 3.1.1 sont vérifiées :

**LEMME 3.2.7** — 1- La famille des 2-morphismes  $\alpha_{\mathcal{J}}$  est compatible à la composition verticale au sens de la définition 3.1.1.

<sup>2</sup>La notion de 2-foncteur homotopique stable en dérivateurs est la notion évidente qui se trouve à mi-chemin entre les 2-foncteurs homotopiques stables et les dérivateurs algébriques homotopiques et stables. Ainsi un tel 2-foncteur prendra ses valeurs dans une certaine 2-catégorie de dérivateurs triangulés ou d'une façon équivalente sera défini sur des couples  $(X, \mathcal{J})$ .

2- Lorsque le morphisme  $g$  est lisse, le 2-morphisme  $\alpha_g$  est inversible.

DEMONSTRATION Pour montrer la compatibilité à la composition des carrés, on considère un troisième morphisme de  $S$ -schémas  $h : Z \longrightarrow Y$ . On forme alors le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 Z_\eta & \xleftarrow{(\pi_{fgh}, p_J)} & (\mathcal{F} \times_\eta Z_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\pi_{fgh}} & (Z_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{j} & (Z, \mathcal{J}) & \xleftarrow{i} & (Z_\sigma, \mathcal{J}) & \xrightarrow{p_J} & Z_\sigma \\
 h_\eta \downarrow & & \downarrow h_\eta & & \downarrow h_\eta & & \downarrow h & & \downarrow h_\sigma & & \downarrow h_\sigma \\
 Y_\eta & \xleftarrow{(\pi_{f \circ g}, p_J)} & (\mathcal{F} \times_\eta Y_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\pi_{f \circ g}} & (Y_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{j} & (Y, \mathcal{J}) & \xleftarrow{i} & (Y_\sigma, \mathcal{J}) & \xrightarrow{p_J} & Y_\sigma \\
 g_\eta \downarrow & & \downarrow g_\eta & & \downarrow g_\eta & & \downarrow g & & \downarrow g_\sigma & & \downarrow g_\sigma \\
 X_\eta & \xleftarrow{(\pi_f, p_J)} & (\mathcal{F} \times_\eta X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\pi_f} & (X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{j} & (X, \mathcal{J}) & \xleftarrow{i} & (X_\sigma, \mathcal{J}) & \xrightarrow{p_J} & X_\sigma
 \end{array}$$

Il s'agit de montrer que la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathbb{H}_1(X_\eta) & \xrightarrow{(\pi_f, p_J)^*} & \mathbb{H}_1(\mathcal{F} \times_\eta X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(\pi_f)_*} & \mathbb{H}_1(X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\text{sp}(f, p_J)} & \mathbb{H}_2(X_\sigma, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(p_J)\#} & \mathbb{H}_2(X_\sigma) \\
 (gh)_\eta^* \downarrow & \sim \swarrow & \downarrow (gh)_\eta^* & \text{Ex}_*^* \swarrow & \downarrow (gh)_\eta^* & \alpha_{gh} \swarrow & \downarrow (gh)_\sigma^* & \sim \swarrow & \downarrow (gh)_\sigma^* \\
 \mathbb{H}_1(Z_\eta) & \xrightarrow{(\pi_{fgh}, p_J)^*} & \mathbb{H}_1(\mathcal{F} \times_\eta Z_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(\pi_{fgh})_*} & \mathbb{H}_1(Z_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\text{sp}(fgh, p_J)} & \mathbb{H}_2(Z_\sigma, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(p_J)\#} & \mathbb{H}_2(Z_\sigma)
 \end{array}$$

coïncide avec la composée de :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathbb{H}_1(X_\eta) & \xrightarrow{(\pi_f, p_J)^*} & \mathbb{H}_1(\mathcal{F} \times_\eta X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(\pi_f)_*} & \mathbb{H}_1(X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\text{sp}(f, p_J)} & \mathbb{H}_2(X_\sigma, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(p_J)\#} & \mathbb{H}_2(X_\sigma) \\
 g_\eta^* \downarrow & \sim \swarrow & \downarrow g_\eta^* & \text{Ex}_*^* \swarrow & \downarrow g_\eta^* & \alpha_g \swarrow & \downarrow g_\sigma^* & \sim \swarrow & \downarrow g_\sigma^* \\
 \mathbb{H}_1(Y_\eta) & \xrightarrow{(\pi_{fg}, p_J)^*} & \mathbb{H}_1(\mathcal{F} \times_\eta Y_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(\pi_{fg})_*} & \mathbb{H}_1(Y_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\text{sp}(fg, p_J)} & \mathbb{H}_2(Y_\sigma, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(p_J)\#} & \mathbb{H}_2(Y_\sigma) \\
 h_\eta^* \downarrow & \sim \swarrow & \downarrow h_\eta^* & \text{Ex}_*^* \swarrow & \downarrow h_\eta^* & \alpha_h \swarrow & \downarrow h_\sigma^* & \sim \swarrow & \downarrow h_\sigma^* \\
 \mathbb{H}_1(Z_\eta) & \xrightarrow{(\pi_{fgh}, p_J)^*} & \mathbb{H}_1(\mathcal{F} \times_\eta Z_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(\pi_{fgh})_*} & \mathbb{H}_1(Z_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\text{sp}(fgh, p_J)} & \mathbb{H}_2(Z_\sigma, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(p_J)\#} & \mathbb{H}_2(Z_\sigma)
 \end{array}$$

modulo les 2-isomorphismes de connexions que l'on pense. Ceci est clair étant donné que chacune des faces carrées qui composent le 2-morphisme  $\alpha_g$  est compatible à la composition verticale. Le premier point du lemme est donc vrai.

Pour établir la seconde assertion, il suffit de montrer que la face du type  $\text{Ex}_*^*$  est inversible lorsque  $g$  est lisse. Ceci découle immédiatement du théorème de changement de base par un morphisme lisse. C.Q.F.D

Il nous reste à vérifier la troisième propriété de la définition 3.1.1. Le 2-morphisme  $\beta_g : \mathcal{F} \bullet \text{sp}_f g_{\eta^*} \longrightarrow g_{s^*} \mathcal{F} \bullet \text{sp}_{f \circ g}$  obtenu à partir de  $\alpha_g$  par adjonction est la composée :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathbb{H}_1(Y_\eta) & \xrightarrow{(\pi_{f \circ g}, p_J)^*} & \mathbb{H}_1(\mathcal{F} \times_\eta Y_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(\pi_{f \circ g})_*} & \mathbb{H}_1(Y_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\text{sp}(f \circ g, p_J)} & \mathbb{H}_2(Y_\sigma, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(p_J)\#} & \mathbb{H}_2(Y_\sigma) \\
 g_{\eta^*} \downarrow & \text{Ex}_{\#, *}^* \swarrow & \downarrow g_{\eta^*} & \text{Ex}_{\#, *}^* \swarrow & \downarrow g_{\eta^*} & \beta_g \swarrow & \downarrow g_{\sigma^*} & \text{Ex}_{\#, *}^* \swarrow & \downarrow g_{\sigma^*} \\
 \mathbb{H}_1(X_\eta) & \xrightarrow{(\pi_f, p_J)^*} & \mathbb{H}_1(\mathcal{F} \times_\eta X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(\pi_f)_*} & \mathbb{H}_1(X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\text{sp}(f, p_J)} & \mathbb{H}_2(X_\sigma, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(p_J)\#} & \mathbb{H}_2(X_\sigma)
 \end{array}$$

Le morphisme d'échange  $\text{Ex}_{\#, *}$  ci-dessus est obtenu via les adjonctions  $(g_\sigma^*, g_{\sigma^*})$  de l'inverse de l'isoéchange  $\text{Ex}_{\#, *}$ . C'est donc aussi l'échange obtenu à partir de l'inverse de l'isoéchange  $\text{Ex}_*^*$  via les adjonctions  $(p_{J\#}, p_J^*)$ . On a :

**LEMME 3.2.8** — Lorsque le  $S$ -morphisme  $g$  est projectif, le 2-morphisme  $\beta_g$  est inversible.

DEMONSTRATION En effet, la face de type  $\text{Ex}_*^*$  est inversible par le théorème de changement de base pour un morphisme projectif argument par argument. La face  $\text{Ex}_{\#, *}$  est inversible puisqu'elle s'identifie à  $\text{Ex}_{\#, *}^{-1}$ . C.Q.F.D

Ainsi, on a démontré le résultat suivant :

**PROPOSITION 3.2.9** — *La famille des  $\mathcal{F} \bullet \text{sp}$  ainsi que celle des faces  $\alpha_\gamma$  données par la composée de (3.14), forment un système de spécialisation au dessus de  $(B, j, i)$  de  $H_1$  vers  $H_2$ .*

Notons au passage le lemme suivant :

**LEMME 3.2.10** — *On suppose que les catégories  $H_1(-)$  et  $H_2(-)$  admettent les petites sommes et que  $H_1$  est parfait pour les petites sommes. On suppose également que le foncteur  $\text{sp}_\gamma$  commute aux petites sommes pour tout  $B$ -morphisme quasi-projectif  $f$ . Alors, le foncteur  $(\mathcal{F} \bullet \text{sp})_f$  commute également aux petites sommes.*

**DEMONSTRATION** Rappelons que  $(\mathcal{F} \bullet \text{sp})_f = (p_J)_\# \text{sp}_{(f, p_J)} (\pi_f)_* (\pi_f, p_J)^*$ . Les foncteurs  $(p_J)_\#$  et  $(\pi_f, p_J)^*$  sont des adjoints à gauche. Ils commutent donc aux petites sommes. Pour prouver que les foncteurs  $\text{sp}_{(f, p_J)}$  et  $(\pi_f)_*$  commutent aux petites sommes, on peut le faire après application de  $i^*$  pour  $i \in \text{Ob}(J)$ . Ceci nous ramène immédiatement à montrer que  $\text{sp}_f$  et  $\pi_f(i)_*$  commutent aux petites sommes. Ceci découle de l'énoncé. C.Q.F.D

### 3.2.2 Functorialité par rapport aux diagrammes des schémas

Dans cette section, on étudie la functorialité du système de spécialisation  $\mathcal{F} \bullet \text{sp}$  par rapport au diagramme de  $\eta$ -schémas  $(\mathcal{F}, J)$ . L'utilisation d'une image directe cohomologique  $(\pi_f)_*$  et d'une image directe homologique  $(p_J)_\#$  dans la définition de  $\mathcal{F} \bullet \text{sp}_\gamma$ , nous force à distinguer deux cas :

1. celui d'un morphisme de  $J$ -diagrammes de  $\eta$ -schémas  $(\mathcal{G}, J) \longrightarrow (\mathcal{F}, J)$ ,
2. celui d'un morphisme de diagrammes de  $\eta$ -schémas  $(\mathcal{F} \circ \alpha, J) \longrightarrow (\mathcal{F}, J)$  induit par un foncteur  $\alpha : J \longrightarrow J$  de Dia.

En effet, l'association  $(\mathcal{F}, J) \rightsquigarrow \mathcal{F} \bullet \text{sp}$  sera contravariante par rapport aux morphismes du premier type et covariante par rapport à ceux du second type.

#### Contravariance par rapport aux morphismes de $J$ -diagrammes

On fixe la catégorie d'indices  $J$  et on garde les notations de la section précédente. On se donne un morphisme de  $J$ -diagrammes de  $\eta$ -schémas :

$$u : (\mathcal{G}, J) \longrightarrow (\mathcal{F}, J)$$

On notera  $(\pi^\mathcal{F}, p_J)$  et  $(\pi^\mathcal{G}, p_J)$  les projections structurales sur  $\eta$  de telle sorte que  $\pi^\mathcal{G} = \pi^\mathcal{F} \circ u$ . On fait la définition suivante :

**DEFINITION 3.2.11** — *Soit  $f : X \longrightarrow B$  un  $B$ -schémas quasi-projectif. On définit une transformation naturelle  $\gamma_f^u : \mathcal{F} \bullet \text{sp}_f \longrightarrow \mathcal{G} \bullet \text{sp}$  par la composée du diagramme planaire :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_1(X_\eta) & \xrightarrow{(\pi_f^\mathcal{G}, p_J)^*} & H_1(\mathcal{G} \times_\eta X_\eta, J) & \xrightarrow{(\pi_f^\mathcal{G})_*} & H_1(X_\eta, J) & \xrightarrow{\text{sp}_{(f, p_J)}} & H_2(X_\sigma, J) & \xrightarrow{(p_J)_\#} & H_2(X_\sigma) \\
 \parallel & \nearrow Ex_*^* & \downarrow u_* & \nearrow Ex_{**}^* & \parallel & \cong & \parallel & \cong & \parallel \\
 H_1(X_\eta) & \xrightarrow{(\pi_f^\mathcal{F}, p_J)^*} & H_1(\mathcal{F} \times_\eta X_\eta, J) & \xrightarrow{(\pi_f^\mathcal{F})_*} & H_1(X_\eta, J) & \xrightarrow{\text{sp}_{(f, p_J)}} & H_2(X_\sigma, J) & \xrightarrow{(p_J)_\#} & H_2(X_\sigma)
 \end{array}$$

La première face  $Ex_*^*$  étant essentiellement la counité de l'adjonction  $(u^*, u_*)$  puisqu'elle est égale à la composée :

$$(\pi_f^\mathcal{F}, p_J)^* \longrightarrow u_* u^* (\pi_f^\mathcal{F}, p_J)^* \simeq u_* (\pi_f^\mathcal{G}, p_J)^*$$

La proposition suivante est facile et sera laissée en exercice :

**PROPOSITION 3.2.12** — *La famille des  $\gamma_f^u$  définit un morphisme de systèmes de spécialisation :*

$$\gamma^u : \mathcal{F} \bullet \text{sp} \longrightarrow \mathcal{G} \bullet \text{sp}$$

De plus, les associations :

- $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F} \bullet \text{sp}$
- $(u : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}) \rightsquigarrow (\gamma^u : \mathcal{F} \bullet \text{sp} \rightarrow \mathcal{G} \bullet \text{sp})$

définissent un foncteur contravariant de la catégorie des  $J$ -diagrammes de  $\eta$ -schémas quasi-projectifs dans celle des systèmes de spécialisation de  $H_1$  vers  $H_2$ .

**Covariance par rapport au changement des catégories d'indices**

On se donne un  $\mathcal{J}$ -diagramme de  $\eta$ -schémas quasi-projectifs  $\mathcal{F}$  ainsi qu'un foncteur  $\iota : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$  de  $\text{Dia}$ . On a alors un 1-morphisme de diagrammes de  $\eta$ -schémas :

$$\iota : (\mathcal{F} \circ \iota, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$$

On fait la définition suivante :

**DEFINITION 3.2.13** — Soit  $f : X \longrightarrow B$  un  $B$ -schéma quasi-projectif. On définit un 2-morphisme  $\gamma_{\iota, f} : \mathcal{F}\iota \bullet \text{sp}_f \longrightarrow \mathcal{F} \bullet \text{sp}_f$  par la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{H}_1(X_\eta) & \xrightarrow{(\pi_f^\mathcal{F}, p_{\mathcal{J}})^*} & \mathbb{H}_1(\mathcal{F} \times_\eta X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(\pi_f^\mathcal{F})_*} & \mathbb{H}_1(X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\text{sp}(f, p_{\mathcal{J}})} & \mathbb{H}_2(X_\sigma, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(p_{\mathcal{J}})_\#} & \mathbb{H}_2(X_\sigma) \\ \parallel & \nearrow \text{Ex}^{*,*} \sim & \downarrow \iota^* & \nearrow \text{Ex}^* \sim & \downarrow \iota^* & \nearrow \alpha_\iota \sim & \downarrow \iota^* & \nearrow \text{Ex}_\#^* & \parallel \\ \mathbb{H}_1(X_\eta) & \xrightarrow{(\pi_f^{\mathcal{F}\iota}, p_{\mathcal{J}})^*} & \mathbb{H}_1(\mathcal{F}\iota \times_\eta X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(\pi_f^{\mathcal{F}\iota})_*} & \mathbb{H}_1(X_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\text{sp}(f, p_{\mathcal{J}})} & \mathbb{H}_2(X_\sigma, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(p_{\mathcal{J}})_\#} & \mathbb{H}_2(X_\sigma) \end{array}$$

Notons que  $\alpha_\iota$  est bien inversible puisque  $\iota$  est lisse argument par argument et que la dernière face carrée est simplement la composée :

$$p_{\mathcal{J}\#} \iota^* \longrightarrow p_{\mathcal{J}\#} \iota_\# \iota^* \longrightarrow p_{\mathcal{J}\#}$$

La proposition suivante est facile et laissée aux lecteurs :

**PROPOSITION 3.2.14** — La famille des  $\gamma_{\iota, ?}$  définit un morphisme de systèmes de spécialisation :

$$\gamma_\iota : \mathcal{F}\iota \bullet \text{sp} \longrightarrow \mathcal{F} \bullet \text{sp}$$

De plus, les associations :

- $(\iota : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}) \rightsquigarrow \mathcal{F}\iota \bullet \text{sp}$
- $(a : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}) \rightsquigarrow (\gamma_a : (\mathcal{F}\iota a) \bullet \text{sp} \rightarrow \mathcal{F}\iota \bullet \text{sp})$

définissent un foncteur covariant de  $\text{Dia}/\mathcal{J}$  dans la catégorie des systèmes de spécialisation de  $\mathbb{H}_1$  vers  $\mathbb{H}_2$ .

**3.2.3 Structures pseudo-monoïdales**

Dans ce paragraphe, on supposera que  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$  sont des dérivateurs algébriques monoïdaux homotopiques et stables au sens de la définition 2.4.48. On dispose donc d'une structure de catégories monoïdales sur chacune des catégories  $\mathbb{H}_i(-)$  telle que les foncteurs images inverses soient monoïdales et que certaines images directes homologiques vérifient la formule de projection.

On supposera dans la suite que le système de spécialisation  $\text{sp}$  est pseudo-monoïdal au sens analogue de celui de la définition 3.1.12. On donne alors une condition suffisante permettant de définir une structure pseudo-monoïdale sur le système de spécialisation  $\mathcal{F} \bullet \text{sp}$ . La condition est la suivante :

**HYPOTHÈSE 3.2.15** — Le foncteur pseudo-comonoïdal  $p_{\mathcal{J}\#}$  est comonoïdal. Plus précisément, pour tout  $\sigma$ -schéma quasi-projectif  $F$  et tout  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbb{H}(F, \mathcal{J}))^2$ , le coaccouplement :

$$p_{\mathcal{J}\#}(A \otimes B) \xrightarrow{\sim} p_{\mathcal{J}\#}A \otimes p_{\mathcal{J}\#}B$$

est inversible.

Notons que la structure pseudo-comonoïdale sur le foncteur  $p_{\mathcal{J}\#}$  provient par adjonction de celle sur le foncteur monoïdal (et donc aussi comonoïdal)  $p_{\mathcal{J}}^*$ .

**DEFINITION 3.2.16** — Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $\eta$ -schémas quasi-projectifs avec  $\mathcal{J}$  vérifiant l'hypothèse 3.2.15. Soient  $f : X \longrightarrow B$  un  $B$ -schéma quasi-projectif et  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbb{H}(X_\eta))^2$ .

On définit un accouplement naturel en  $A$  et  $B$  :

$$m_f : \mathcal{F} \bullet \text{sp}_f(A) \otimes_{X_\sigma} \mathcal{F} \bullet \text{sp}_f(B) \longrightarrow \mathcal{F} \bullet \text{sp}_f(A \otimes_{X_\eta} B)$$

en prenant la composée :

$$\begin{array}{c}
 [(p_{\mathcal{J}})_{\#} \mathbf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}(\pi_f^{\mathcal{F}})_*(\pi_f^{\mathcal{F}}, p_{\mathcal{J}})^* A] \otimes [(p_{\mathcal{J}})_{\#} \mathbf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}(\pi_f^{\mathcal{F}})_*(\pi_f^{\mathcal{F}}, p_{\mathcal{J}})^* B] \\
 \uparrow \sim \\
 (p_{\mathcal{J}})_{\#} [(\mathbf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}(\pi_f^{\mathcal{F}})_*(\pi_f^{\mathcal{F}}, p_{\mathcal{J}})^* A) \otimes (\mathbf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}(\pi_f^{\mathcal{F}})_*(\pi_f^{\mathcal{F}}, p_{\mathcal{J}})^* B)] \\
 \downarrow \\
 (p_{\mathcal{J}})_{\#} \mathbf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}([\pi_f^{\mathcal{F}})_*(\pi_f^{\mathcal{F}}, p_{\mathcal{J}})^* A] \otimes [(\pi_f^{\mathcal{F}})_*(\pi_f^{\mathcal{F}}, p_{\mathcal{J}})^* A] \\
 \downarrow \\
 (p_{\mathcal{J}})_{\#} \mathbf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}(\pi_f^{\mathcal{F}})_* [(\pi_f^{\mathcal{F}}, p_{\mathcal{J}})^* A] \otimes [(\pi_f^{\mathcal{F}}, p_{\mathcal{J}})^* A] \\
 \downarrow \sim \\
 (p_{\mathcal{J}})_{\#} \mathbf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}(\pi_f^{\mathcal{F}})_*(\pi_f^{\mathcal{F}}, p_{\mathcal{J}})^*(A \otimes B)
 \end{array}$$

Muni de cet accouplement,  $\mathcal{F} \bullet \mathbf{sp}_f$  est le foncteur pseudo-monoïdal composé des foncteurs pseudo-monoïdaux :  $(\pi_f^{\mathcal{F}}, p_{\mathcal{J}})^*$ ,  $(\pi_f^{\mathcal{F}})_*$ ,  $\mathbf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}$  et  $p_{\mathcal{J}\#}$ .

**PROPOSITION 3.2.17** — Les foncteurs pseudo-monoïdaux  $\mathcal{F} \bullet \mathbf{sp}_{\eta}$  définissent un système de spécialisation pseudo-monoïdal au sens de la définition 3.1.12.

DEMONSTRATION En effet, toutes les faces du diagramme planaire (3.14) définissant les 2-morphismes

$$\alpha_g : g_{\sigma}^* \mathcal{F} \bullet \mathbf{sp}_f \longrightarrow \mathcal{F} \bullet \mathbf{sp}_{f \circ g} g_{\eta}^*$$

sont des faces dans la 2-catégorie  $\mathbf{pMono}$ . Il vient que les  $\alpha_g$  sont bien des transformations naturelles de foncteurs pseudo-monoïdaux. C'est la seule propriété à vérifier. C.Q.F.D

**PROPOSITION 3.2.18** — On suppose que les catégories  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  vérifient l'hypothèse 3.2.15. Sous les hypothèses des définitions 3.2.11 et 3.2.13, les morphismes de systèmes de spécialisation :

$$\mathcal{F} \bullet \mathbf{sp} \longrightarrow \mathcal{G} \bullet \mathbf{sp} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_\iota \bullet \mathbf{sp} \longrightarrow \mathcal{F} \bullet \mathbf{sp}$$

sont des morphismes de systèmes de spécialisations pseudo-monoïdaux.

DEMONSTRATION Ceci découle du fait que les faces des diagrammes planaires des définitions 3.2.11 et 3.2.13 sont des faces de la 2-catégorie  $\mathbf{pMono}$ . C.Q.F.D

### 3.2.4 Autour de l'hypothèse 3.2.15

Dans cette section, on donne une condition simple sur la catégorie d'indice  $\mathcal{J}$  impliquant l'hypothèse 3.2.15. Notons que l'hypothèse en question est indépendante de la situation considérée dans le paragraphe précédent. Par soucis de généralité on se place donc dans un nouveau dérivateur algébrique monoïdal homotopique et stable  $\mathbb{H} : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{TA}$ . On profite de l'occasion pour introduire l'accouplement externe :

**DEFINITION 3.2.19** — 1- Supposons donné un diagramme dans  $\text{DiaSch}/S$  :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{G}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(f_2, \alpha_2)} & (\mathcal{F}_2, \mathcal{J}_2) \\
 (f_1, \alpha_1) \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{F}_1, \mathcal{J}_1) & & 
 \end{array}$$

Pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $A_i \in \mathbb{H}(\mathcal{F}_i, \mathcal{J}_i)$  on pose  $A_1 \boxtimes A_2 = (f_1, \alpha_1)^* A_1 \otimes_{\mathcal{G}, \mathcal{J}} (f_2, \alpha_2)^* A_2$ .

2- Étant donné un carré commutatif de  $\text{DiaSch}/S$  :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{G}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(f_2, \alpha_2)} & (\mathcal{F}_2, \mathcal{J}_2) \\
 (f_1, \alpha_1) \downarrow & & \downarrow (g_2, \beta_2) \\
 (\mathcal{F}_1, \mathcal{J}_1) & \xrightarrow{(g_1, \beta_1)} & (\mathcal{E}, \mathcal{H})
 \end{array}$$

on note  $(h, \gamma) = (g_1, \beta_1) \circ (f_1, \alpha_1) = (g_2, \beta_2) \circ (f_2, \alpha_2)$ . On définit un coaccouplement extérieur :

$$(h, \gamma)_{\#}(A_1 \boxtimes A_2) \longrightarrow (g_1, \beta_1)_{\#}(A_1) \otimes_{\mathcal{E}, \mathcal{H}} (g_2, \beta_2)_{\#}(A_2)$$

par la composée suivante :

$$\begin{array}{c} (h, \gamma)_{\#}((f_1, \alpha_1)^* A_1 \otimes_{\mathcal{G}, \mathcal{J}} (f_2, \alpha_2)^* A_2) \\ \downarrow \\ [(h, \gamma)_{\#}(f_1, \alpha_1)^* A_1] \otimes [(h, \gamma)_{\#}(f_2, \alpha_2)^* A_2] \\ \downarrow \\ [(g_1, \beta_1)_{\#}(f_1, \alpha_1)_{\#}(f_1, \alpha_1)^* A_1] \otimes [(g_1, \beta_2)_{\#}(f_2, \alpha_2)_{\#}(f_2, \alpha_2)^* A_2] \\ \downarrow \\ (g_1, \beta_1)_{\#}(A_1) \otimes (g_2, \beta_2)_{\#}(A_2) \end{array}$$

La relation du coaccouplement habituel avec le coaccouplement extérieur est donné par le lemme suivant :

**LEMME 3.2.20** — On suppose donné un 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$ . On forme le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G} \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G}, \mathcal{J} \times_{\mathcal{J}} \mathcal{J}) & \xrightarrow{(pr_2, pr_2)} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ (pr_1, pr_1) \downarrow & & \downarrow (f, \alpha) \\ (\mathcal{G}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(f, \alpha)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

et on appelle  $(\Delta, \Delta)$  l'inclusion de la diagonale  $(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{G} \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G}, \mathcal{J} \times_{\mathcal{J}} \mathcal{J})$  et  $(p, p) = (f, \alpha) \circ (pr_i, pr_i)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Pour  $A$  et  $B$  des objets de  $\mathbb{H}(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} (f, \alpha)_{\#}(\Delta, \Delta)^*(A \boxtimes B) & \xrightarrow{\sim} & (p, p)_{\#}(\Delta, \Delta)_{\#}(\Delta, \Delta)^*(A \boxtimes B) & \longrightarrow & (p, p)_{\#}(A \boxtimes B) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \\ (f, \alpha)_{\#}(A \otimes B) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & & & (f, \alpha)_{\#}(A \otimes B) \end{array}$$

La condition qui assurera la validité de l'hypothèse 3.2.15 est basée sur les deux lemmes suivants. D'une part on a :

**LEMME 3.2.21** — Sous les hypothèses de la définition précédente, le coaccouplement :

$$(h, \gamma)_{\#}(A_1 \boxtimes A_2) \longrightarrow (g_1, \beta_1)_{\#}(A_1) \otimes_{\mathcal{E}, \mathcal{H}} (g_2, \beta_2)_{\#}(A_2)$$

est inversible lorsque le 2-morphisme de changement de base :

$$Ex_{\#}^* : (f_1, \alpha_1)_{\#}(f_2, \alpha_2)^* \longrightarrow (g_1, \beta_1)^*(g_2, \beta_2)_{\#}$$

est inversible.

**DEMONSTRATION** En effet, on vérifie immédiatement que le coaccouplement qu'on a défini est donné par la composée

suivante :

$$\begin{array}{c}
 (h, \gamma)_{\#}((f_1, \alpha_1)^* A_1 \otimes_{\mathcal{G}, \mathcal{J}} (f_2, \alpha_2)^* A_2) \\
 \downarrow \sim \\
 (g_1, \beta_1)_{\#}(f_1, \alpha_1)_{\#}((f_1, \alpha_1)^* A_1 \otimes_{\mathcal{G}, \mathcal{J}} (f_2, \alpha_2)^* A_2) \\
 \downarrow \sim \\
 (g_1, \beta_1)_{\#}(A_1 \otimes (f_1, \alpha_1)_{\#}(f_2, \alpha_2)^* A_2) \\
 \downarrow Ex_{\#}^* \\
 (g_1, \beta_1)_{\#}(A_1 \otimes (g_1, \beta_1)^*(g_2, \beta_2)_{\#} A_2) \\
 \downarrow \sim \\
 (g_1, \beta_1)_{\#} A_1 \otimes (g_2, \beta_2)_{\#} A_2
 \end{array}$$

D'où le lemme.

C.Q.F.D

D'autre part on a le résultat général sur les dérivateurs triangulés :

**LEMME 3.2.22** — Soit  $\mathbb{D}$  un dérivateur (triangulé) de domaine  $\text{Dia}$ . Étant donnée deux catégories  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}$  de  $\text{Dia}$ , on forme le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{J} \times \mathcal{J} & \xrightarrow{pr_2} & \mathcal{J} \\
 pr_1 \downarrow & & \downarrow p_{\mathcal{J}} \\
 \mathcal{J} & \xrightarrow{p_{\mathcal{J}}} & \mathbf{e}
 \end{array}$$

Le morphisme de changement de base  $Ex_{\#}^* : pr_{1\#}pr_2^* \longrightarrow p_{\mathcal{J}}^*p_{\mathcal{J}\#}$  est inversible.

DEMONSTRATION On montrera que pour tout objet  $i$  de  $\mathcal{J}$  le 2-morphisme :

$$i^*pr_{1\#}pr_2^* \longrightarrow i^*p_{\mathcal{J}}^*p_{\mathcal{J}\#}$$

est inversible. En appliquant l'axiome 4 de la définition 2.1.34 à la face carrée :

$$\begin{array}{ccc}
 i \setminus \mathcal{J} \times \mathcal{J} & \xrightarrow{j_{i \setminus \mathcal{J} \times \mathcal{J}}} & \mathcal{J} \times \mathcal{J} \\
 p_{i \setminus \mathcal{J} \times \mathcal{J}} \downarrow & \not\cong & \downarrow pr_1 \\
 \mathbf{e} & \xrightarrow{i} & \mathcal{J}
 \end{array}$$

on obtient un isomorphisme d'échange  $Ex_{\#}^* : (p_{i \setminus \mathcal{J} \times \mathcal{J}})_{\#}(j_{i \setminus \mathcal{J} \times \mathcal{J}})^* \longrightarrow i^*pr_{1\#}$ . Ceci nous ramène à montrer que l'isomorphisme d'échange  $Ex_{\#}^*$  associé au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 i \setminus \mathcal{J} \times \mathcal{J} & \xrightarrow{pr_2 \circ j_{i \setminus \mathcal{J} \times \mathcal{J}}} & \mathcal{J} \\
 p_{i \setminus \mathcal{J} \times \mathcal{J}} \downarrow & & \downarrow p_{\mathcal{J}} \\
 \mathbf{e} & \xlongequal{\quad} & \mathbf{e}
 \end{array}$$

est inversible. En d'autres termes, il s'agit de montrer que le foncteur évident  $i \setminus \mathcal{J} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$  est filtrant au sens de la définition 2.1.50. Par la proposition 2.1.49, il suffit de montrer que pour tout  $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  la transformation naturelle évidente  $R_{\#}(i \setminus (\mathcal{J} \times \mathcal{J})/j) \longrightarrow \text{id}$  est inversible. Ceci est effectivement la cas puisque  $i \setminus (\mathcal{J} \times \mathcal{J})/j = (i \setminus \mathcal{J}) \times (\mathcal{J}/j)$  est un produit d'une catégorie admettant un objet initial par une autre admettant un objet final (on pourra par exemple utiliser la proposition 2.1.51 en remarquant que pour  $\mathcal{K}$  une petite catégorie,  $p_{\mathcal{K}}$  est filtrant ssi  $R_{\#}(\mathcal{K}) \simeq \text{id}$ ). C.Q.F.D

On en déduit le corollaire suivant :



**PROPOSITION 3.2.23** — Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. Étant données deux catégories  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}$  de  $\text{Dia}$ , on forme le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J} \times \mathcal{J} & \xrightarrow{pr_2} & \mathcal{J} \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow p_{\mathcal{J}} \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{p_{\mathcal{J}}} & \mathbf{e} \end{array}$$

Pour tout  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{H}(X, \mathcal{J})$  et  $\mathbb{H}(X, \mathcal{J})$  respectivement, le coaccouplement extérieur :

$$(p_{\mathcal{J} \times \mathcal{J}})_{\#}(A \boxtimes B) \xrightarrow{\sim} (p_{\mathcal{J}})_{\#}A \otimes (p_{\mathcal{J}})_{\#}B$$

est inversible.

En utilisant le lemme 3.2.20 et la proposition 3.2.23, on déduit le critère simple suivant :

**PROPOSITION 3.2.24** — Pour que  $\mathcal{J}$  vérifie l'hypothèse 3.2.15, il suffit que le foncteur diagonal  $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J} \times \mathcal{J}$  soit filtrant.

**Exemple 3.2.25** — Voici quelques exemples de catégories vérifiant la condition de la proposition précédente :

$$\Delta, \quad \mathbb{N}^{\times} \quad \text{et} \quad \mathbb{N}^{\times} \times \Delta$$

avec  $\mathbb{N}^{\times}$  l'ensemble des entiers non nuls ordonné par l'opposé de la relation de divisibilité. Ces catégories apparaîtront dans la construction des foncteurs cycles proches.

### 3.3 Le calcul des systèmes de spécialisation pour les schémas standards

Les axiomes imposés dans la définition d'un système de spécialisation  $\text{sp}$  permettent dans certains cas de "calculer" le foncteur  $\text{sp}_f$  en fonction de  $\text{sp}_{\text{id}_B}$  et les quatre opérations. Pour plus de précision sur ce qu'on entend par le mot "calcul" le lecteur pourra consulter l'énoncé du théorème 3.3.10. Comme conséquence de ce "calcul" on obtiendra deux résultats intéressants à savoir les théorèmes 3.3.4 et 3.3.6. Ces résultats acquièrent leur véritable importance lorsqu'on se place au dessus d'un trait (sous réserve de pouvoir résoudre les singularités).

#### 3.3.1 Les $B$ -schémas standards. Notations et énoncés des théorèmes

On se donne une base  $(B, j, i)$  comme dans 3.1.1 et deux 2-foncteurs homotopiques stables  $H_1 : \text{Sch}/\eta \longrightarrow \mathfrak{A}$  et  $H_2 : \text{Sch}/\sigma \longrightarrow \mathfrak{A}$ . On supposera qu'il existe une section globale  $\pi \in \Gamma(B, \mathcal{O}_B)$  qui soit nulle sur  $\sigma$  et inversible sur  $\eta$ . Ceci implique en particulier que le produit fibré  $\eta \times_B \sigma$  est vide (puisque le zéro est inversible sur ce schéma). Une telle section sera fixée une fois pour toutes. On notera  $B/(\pi)$  le sous-schéma fermé de  $B$  défini par l'annulation de  $\pi$ . Le morphisme  $i : \sigma \longrightarrow B$  se factorise par  $B/(\pi)$  :

$$(3.15) \quad \begin{array}{ccc} \sigma & \xrightarrow{i_0} & B/(\pi) \\ & \searrow i & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

et l'image de  $j : \eta \longrightarrow B$  ne rencontre pas  $B/(\pi)$ . Voici les schémas standards dont il sera question dans la suite :

**DEFINITION 3.3.1** — Soient  $k$  un entier naturel non nul et  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k)$  un  $k$ -uplet dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Le  $B$ -schéma  $\pi$ -standard à réduction semi-stable de type  $\underline{a}$  est le  $B$ -schéma noté  $St_{\underline{a}}^B$  et défini par :

$$st_{\underline{a}}^B : St_{\underline{a}}^B = B[T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} - \pi) \longrightarrow B$$

Lorsqu'il y a pas de confusion sur  $B$ , il nous arrivera de noter simplement  $st_{\underline{a}}$  et  $St_{\underline{a}}$  à la place de  $st_{\underline{a}}^B$  et  $St_{\underline{a}}^B$ .

Pour énoncer les théorèmes, on aura également besoin des  $B$ -schémas suivants :

**DEFINITION 3.3.2** — 1- Pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  on pose  $B_n = B[T]/(T^n - \pi)$  et on note  $b_n$  sa projection sur  $B$ . La classe de  $T$  dans  $\mathcal{O}_{B_n}$  sera notée  $\pi^{1/n}$ . Il est clair que  $B_n$  est isomorphe à  $St_{(n)}^B$ .

2- Pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $m \in \mathbb{Z}$  on pose  $B_n^m = B[U, U^{-1}][T]/(T^n - U^m \cdot \pi)$  et on note  $b_n^m$  sa projection sur  $B$ .

**Remarque 3.3.3** — Il est facile de voir que les morphismes  $st_{\underline{a}}^B$  sont plats. En effet  $st_{\underline{a}}^B$  peut être obtenu par changement de base de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_k, P]/(T_1^{a_1} \dots T_n^{a_n} - P)) \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[P])$  (qui est clairement plat) par le morphisme  $B \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[P])$  qui envoie  $P$  sur la section  $\pi$ . Par contre les  $B$ -schémas  $St_{\underline{a}}^B$  ne sont en général ni lisses ni réguliers. La même remarque s'applique également aux  $b_n$  et  $b_n^m$ .

Pour un schéma  $X$  notons  $\mathbb{N}^{n.i.}(X)$  l'ensemble des entiers naturels non nuls  $n$  tels que tout diviseur premier de  $n$  est *non inversible* sur  $X$ . En particulier si  $X$  est de caractéristique 0, l'ensemble  $\mathbb{N}^{n.i.}(X)$  est réduit à  $\{1\}$ . L'un des buts de la section est de prouver les deux théorèmes 3.3.4 et 3.3.6 :

**THEOREME 3.3.4** — Soit  $\text{sp} \longrightarrow \text{sp}'$  un morphisme de systèmes de spécialisation au dessus de  $B$  de  $H_1$  vers  $H_2$ . Soient  $\underline{a}$  un  $k$ -uplet d'entiers non nuls et  $A$  un objet de  $H_1(\eta)$ .

1- Supposons que le  $k$ -uplet  $\underline{a}$  est constant de valeur  $n$ . Si les morphismes :

$$\text{sp}_{b_n}(b_n)_{\eta}^* A \longrightarrow \text{sp}'_{b_n}(b_n)_{\eta}^* A$$

sont inversibles, alors le morphisme  $\text{sp}_{st_{\underline{a}}^B}(st_{\underline{a}}^B)_{\eta}^* A \longrightarrow \text{sp}'_{st_{\underline{a}}^B}(st_{\underline{a}}^B)_{\eta}^* A$  est également inversible.

2- Pour  $\underline{a}$  non forcément constant, notons  $d$  le p.g.c.d des entiers  $a_i$  et  $r$  le maximum des  $a_i/d$ . On suppose que les morphismes :

$$\text{sp}_{b_n}(b_n)_{\eta}^* A \longrightarrow \text{sp}'_{b_n}(b_n)_{\eta}^* A \quad \text{et} \quad \text{sp}_{b_n^m}(b_n^m)_{\eta}^* A \longrightarrow \text{sp}'_{b_n^m}(b_n^m)_{\eta}^* A$$

sont inversibles pour  $n = d.l$  avec  $1 \leq l \leq r$  et  $m = d_0.l_0$  avec  $d_0$  le plus grand diviseur de  $d$  appartenant à  $\mathbb{N}^{n.i.}(B)$  et  $1 \leq l_0 \leq r$  appartenant également à  $\mathbb{N}^{n.i.}(B)$ . Alors, le morphisme  $\text{sp}_{st_{\underline{a}}^B}(st_{\underline{a}}^B)_{\eta}^* A \longrightarrow \text{sp}'_{st_{\underline{a}}^B}(st_{\underline{a}}^B)_{\eta}^* A$  est également inversible.

On se donne pour tout  $\sigma$ -schéma quasi-projectif  $T$  une sous-catégorie (pleine)  $H_2(T)' \subset H_2(T)$  telle que l'hypothèse suivante est satisfaite :

**HYPOTHÈSE 3.3.5** — La sous-catégorie  $H_2(T)'$  est cosuspendue (voir la définition 2.1.1). Si  $f : R \longrightarrow T$  est un morphisme de  $\sigma$ -schémas quasi-projectifs, alors :

- $f_*$  envoie  $H_2(R)'$  dans  $H_2(T)'$ ,
- $f^*$  envoie  $H_2(T)'$  dans  $H_2(R)'$  lorsque  $f$  est lisse.

Enfin, pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$  les sous-catégories  $H_2(T)'$  sont stables par l'opération  $A \rightsquigarrow A(n)[n]$ .

Un cas important où l'hypothèse 3.3.5 est vérifiée est lorsque  $H_2(-)'$  est un sous-2-foncteur homotopique stable de  $H_2$ . Notons que dans ce cas, les sous-catégories en question sont triangulées (et non seulement cosuspendues).

**THEOREME 3.3.6** — Soit  $\text{sp}$  un système de spécialisation au dessus de  $B$  de  $H_1$  vers  $H_2$ . Soient  $\underline{a}$  un  $k$ -uplet et  $A$  un objet de  $H_1(\eta)$ .

1- On suppose que le  $k$ -uplet  $\underline{a}$  est constant de valeur  $n$ . Si les objets  $\text{sp}_{b_n}(b_n)_{\eta}^* A$  sont dans  $H_2((B_n)_{\sigma})'$ , alors l'objet  $\text{sp}_{st_{\underline{a}}^B}(st_{\underline{a}}^B)_{\eta}^* A$  est également dans  $H_2((St_{\underline{a}})_{\sigma})'$ .

2- Supposons en plus de l'hypothèse 3.3.5 que les sous-catégories  $H_2(-)'$  sont stables par facteurs directs. Pour  $\underline{a}$  non forcément constant, notons  $d$  le p.g.c.d des entiers  $a_i$  et  $r$  le maximum des  $a_i/d$ . On suppose que les objets :  $\text{sp}_{b_n}(b_n)_{\eta}^* A$  et  $\text{sp}_{b_n^m}(b_n^m)_{\eta}^* A$  sont respectivement dans  $H_2((B_n)_{\sigma})'$  et  $H_2((B_n^m)_{\sigma})'$ , pour  $n = d.l$  avec  $1 \leq l \leq r$  et  $m = d_0.l_0$  avec  $d_0$  le plus grand diviseur de  $d$  appartenant à  $\mathbb{N}^{n.i.}(B)$  et  $1 \leq l_0 \leq r$  appartenant également à  $\mathbb{N}^{n.i.}(B)$ . Alors, l'objet  $\text{sp}_{st_{\underline{a}}^B}(st_{\underline{a}}^B)_{\eta}^* A$  est également dans  $H_2((St_{\underline{a}})_{\sigma})'$ .

La version duale du théorème précédent est plus intéressante. On se donne pour tout  $\sigma$ -schéma quasi-projectif  $T$  une sous-catégorie (pleine)  $H_2(T)'' \subset H_2(T)$  satisfaisant l'hypothèse duale de 3.3.5, à savoir :

**HYPOTHÈSE 3.3.7** — La sous-catégorie  $H_2(T)''$  est suspendue (voir la définition 2.1.1). Si  $f : R \longrightarrow T$  est un morphisme de  $\sigma$ -schémas quasi-projectifs, alors :

- $f_!$  envoie  $H_2(R)''$  dans  $H_2(T)''$ ,
- $f^!$  envoie  $H_2(T)''$  dans  $H_2(R)''$  lorsque  $f$  est lisse.

Enfin, pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$  les sous-catégories  $H_2(T)''$  sont stables par l'opération  $A \rightsquigarrow A(n)[n]$ .

**Remarque 3.3.8** — 1- Étant donnée une classe d'objets  $\Lambda \subset H_2(\sigma)$  quasi-stable par twist de Tate (voir la définition 2.2.17), les catégories  $(H_2)_{\Lambda}^{\text{ct}}(-)$  vérifient les conditions de l'hypothèse 3.3.7.

2- Un autre exemple important où l'hypothèse 3.3.7 est satisfaite est le suivant. Soit  $\mathcal{G}$  un ensemble d'objets de  $H_2(\sigma)$ . On suppose que l'hypothèse 2.2.58 est vérifiée. Alors, les sous-catégories suspendues  ${}^p(H_2)_{\geq 0}(-)$  des objets  ${}^p t$ -positifs vérifient l'hypothèse 3.3.7 par la proposition 2.2.62.

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on note  $H_i^{\text{op}}$  le 2-foncteur homotopique stable opposé à  $H_i$ . On sait par le corollaire 3.1.11 que les foncteurs  $\text{sp}_f^{\text{op}}$  induisent un système de spécialisation de  $H_1^{\text{op}}$  vers  $H_2^{\text{op}}$ . On vérifie immédiatement que les sous-catégories  $(H_2(T)'' )^{\text{op}}$  vérifient l'hypothèse 3.3.5 relativement à  $H_2^{\text{op}}$ . Lorsqu'on applique le théorème 3.3.6 à cette situation, on obtient l'énoncé suivant :

**THEOREME 3.3.9** — Soit  $\text{sp}$  un système de spécialisation au dessus de  $B$  de  $H_1$  vers  $H_2$ . Soient  $\underline{a}$  un  $k$ -uplet et  $A$  un objet de  $H_1(\eta)$ .

1- On suppose que le  $k$ -uplet  $\underline{a}$  est constant de valeur  $n$ . Si les objets  $\text{sp}_{b_n}(b_n)_{\eta}^! A$  sont dans  $H_2((B_n)_{\sigma})''$ , alors l'objet  $\text{sp}_{st_{\underline{a}}^B}(st_{\underline{a}}^B)_{\eta}^! A$  est également dans  $H_2((St_{\underline{a}})_{\sigma})''$ .

2- Supposons en plus de l'hypothèse 3.3.7 que les sous-catégories  $H_2(-)'$  sont stables par facteurs directs. Pour  $\underline{a}$  non forcément constant, notons  $d$  le p.g.c.d des entiers  $a_i$  et  $r$  le maximum des  $a_i/d$ . On suppose que les objets :  $\text{sp}_{b_n}(b_n)_{\eta}^! A$  et  $\text{sp}_{b_n^m}(b_n^m)_{\eta}^! A$  sont respectivement dans  $H_2((B_n)_{\sigma})''$  et  $H_2((B_n^m)_{\sigma})''$ , pour  $n = d.l$  avec  $1 \leq l \leq r$  et  $m = d_0.l_0$  avec  $d_0$  le plus grand diviseur de  $d$  appartenant à  $\mathbb{N}^{n.i}(B)$  et  $1 \leq l_0 \leq r$  appartenant également à  $\mathbb{N}^{n.i}(B)$ . Alors, l'objet  $\text{sp}_{st_{\underline{a}}^B}(st_{\underline{a}}^B)_{\eta}^! A$  est également dans  $H_2((St_{\underline{a}})_{\sigma})''$ .

Les démonstrations des deux théorèmes 3.3.4 et 3.3.6 reposent sur le théorème 3.3.10. Pour l'énoncer on a besoin d'introduire des notations supplémentaires. Ces notations serviront également dans tout le reste de la section.

1- Pour tout  $B$ -schéma  $X$ , notons  $X/(\pi)$  (resp.  $X_{\sigma}$ ,  $X_{\eta}$ ) le schéma  $X \times_B B/(\pi)$  (resp.  $X \times_B \sigma$ ,  $X \times_B \eta$ ). Le  $\sigma$ -schéma  $X_{\sigma}$  est canoniquement un produit fibré :  $X/(\pi) \times_{B/(\pi)} \sigma$  via le morphisme  $\sigma \longrightarrow B/(\pi)$ . Ainsi  $(St_{\underline{a}}^B)/(\pi)$  est le sous-schéma de  $St_{\underline{a}}^B$  défini par l'idéal  $(\pi)$  et  $(St_{\underline{a}}^B)_{\sigma}$  le produit fibré  $St_{\underline{a}}^B \times_B \sigma$ .

2- Pour  $1 \leq i \leq k$ , on notera  $D_{\underline{a},i}^{\pi}$  le sous-schéma de  $St_{\underline{a}}^B$  d'équation  $(T_i = 0)$  qu'on appellera la  $i$ -ème branche de  $St_{\underline{a}}^B$ . Le  $B$ -schéma  $D_{\underline{a},i}^{\pi}$  est naturellement un  $B/\pi$ -schéma inclus dans  $(St_{\underline{a}}^B)/(\pi)$ . En effet,  $\pi$  est nul sur  $D_{\underline{a},i}^{\pi}$  puisque  $T_i = 0$  et  $\pi = \prod_{j=1}^k T_j^{a_j}$  (on utilise le fait que l'entier  $a_i$  est non nul (revoir la définition 3.3.1)). Le petit calcul :

$$B[T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} - \pi, T_i) = B[T_1, \dots, T_k]/(\pi, T_i) = B/(\pi)[T_1, \dots, T_{i-1}, T_{i+1}, \dots, T_k]$$

montre que  $D_{\underline{a},i}^{\pi}$  est isomorphe à l'espace affine de dimension  $k - 1$  sur  $B/(\pi)$ . On notera également  $D_{\underline{a},i}$  le produit fibré  $D_{\underline{a},i}^{\pi} \times_{B/(\pi)} \sigma$  (le morphisme  $\sigma \longrightarrow B/(\pi)$  utilisé est le  $i_0$  du triangle commutatif (3.15)). Le  $\sigma$ -schéma  $D_{\underline{a},i}$  est isomorphe à l'espace affine  $\mathbb{A}_{\sigma}^{k-1}$ . On appellera  $u_{\underline{a},i}^{\pi}$  et  $u_{\underline{a},i}$  les inclusions de  $D_{\underline{a},i}^{\pi}$  et  $D_{\underline{a},i}$  dans  $(St_{\underline{a}}^B)/(\pi)$  et  $(St_{\underline{a}}^B)_{\sigma}$  respectivement. On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} D_{\underline{a},i} & \xrightarrow{u_{\underline{a},i}} & (St_{\underline{a}}^B)_{\sigma} & \xrightarrow{(st_{\underline{a}}^B)_{\sigma}} & \sigma \\ i_0 \downarrow & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_0 \\ D_{\underline{a},i}^{\pi} & \xrightarrow{u_{\underline{a},i}^{\pi}} & (St_{\underline{a}}^B)/(\pi) & \longrightarrow & B/(\pi) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & St_{\underline{a}}^B & \xrightarrow{st_{\underline{a}}^B} & B \end{array}$$

3- Plus généralement, pour  $I \subset \{1, \dots, k\}$  non vide, on posera  $D_{\underline{a},I}^{\pi} = \bigcup_{i \in I} D_{\underline{a},i}^{\pi}$  et  $D_{\underline{a},I} = \bigcup_{i \in I} D_{\underline{a},i}$ . Évidemment,  $D_{\underline{a},I}^{\pi}$  est encore un  $B/(\pi)$ -schéma et  $D_{\underline{a},I} = D_{\underline{a},I}^{\pi} \times_{B/(\pi)} \sigma$ . En notant  $u_{\underline{a},I}^{\pi}$  et  $u_{\underline{a},I}$  comme tout à l'heure, on a le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} D_{\underline{a},I} & \xrightarrow{u_{\underline{a},I}} & (St_{\underline{a}}^B)_{\sigma} & \xrightarrow{(st_{\underline{a}}^B)_{\sigma}} & \sigma \\ i_0 \downarrow & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_0 \\ D_{\underline{a},I}^{\pi} & \xrightarrow{u_{\underline{a},I}^{\pi}} & (St_{\underline{a}}^B)/(\pi) & \longrightarrow & B/(\pi) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & St_{\underline{a}}^B & \xrightarrow{st_{\underline{a}}^B} & B \end{array}$$

On fera attention que  $u_{\underline{a},\{1, \dots, n\}}^{\pi}$  n'est pas en général un isomorphisme, mais seulement une immersion fermée d'idéal nilpotent.

4- On aura également besoin d'introduire pour  $i \in \{1, \dots, k\}$  les ouverts  $D_{\underline{a},i}^{\pi,0}$  et  $D_{\underline{a},i}^0$  de  $D_{\underline{a},i}^\pi$  et  $D_{\underline{a},i}$  qu'on définit par  $D_{\underline{a},i}^{\pi,0} = D_{\underline{a},i}^\pi \setminus D_{\underline{a},\{1,\dots,k\}-\{i\}}^\pi$  pour  $?\in \{\emptyset, \pi\}$ . On a toujours la formule  $D_{\underline{a},i}^0 = D_{\underline{a},i}^{\pi,0} \times_{B/(\pi)} \sigma$ .

Plus généralement si  $I \subset \{1, \dots, k\}$  et  $J$  son complémentaire, on notera  $D_{\underline{a},I}^{\pi,0}$  l'ouvert de  $D_{\underline{a},I}^\pi$  (et même de  $D_{\underline{a},\{1,\dots,k\}}^\pi$ ) égal à  $D_{\underline{a},I}^\pi \setminus D_{\underline{a},J}^\pi$  (ou encore à  $D_{\underline{a},\{1,\dots,k\}}^\pi \setminus D_{\underline{a},J}^\pi$ ). On notera également  $D_{\underline{a},I}^0$  l'ouvert de  $D_{\underline{a},I}$  (et même de  $D_{\underline{a},\{1,\dots,k\}}$ ) égal à  $D_{\underline{a},I} \setminus D_{\underline{a},J}$  (ou encore à  $D_{\underline{a},\{1,\dots,k\}} \setminus D_{\underline{a},J}$ ). Il est clair que dans  $D_{\underline{a},\{1,\dots,k\}}^\pi$  l'ouvert  $D_{\underline{a},I}^{\pi,0}$  et le fermé  $D_{\underline{a},J}^\pi$  sont complémentaires. On notera  $v_{\underline{a},I}^\pi$  et  $v_{\underline{a},I}$  les inclusions de  $D_{\underline{a},I}^{\pi,0}$  et  $D_{\underline{a},I}^0$  dans  $D_{\underline{a},I}^\pi$  et  $D_{\underline{a},I}$  respectivement. La situation se résume alors par le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc}
 D_{\underline{a},I}^0 & \xrightarrow{v_{\underline{a},I}} & D_{\underline{a},I} & \xrightarrow{u_{\underline{a},I}} & (St_{\underline{a}}^B)_\sigma & \xrightarrow{(st_{\underline{a}}^B)_\sigma} & \sigma \\
 i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow \\
 D_{\underline{a},I}^{\pi,0} & \xrightarrow{v_{\underline{a},I}^\pi} & D_{\underline{a},I}^\pi & \xrightarrow{u_{\underline{a},I}^\pi} & (St_{\underline{a}}^B)/(\pi) & \longrightarrow & B/(\pi) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & St_{\underline{a}}^B & \xrightarrow{st_{\underline{a}}^B} & B
 \end{array}$$

Voici l'énoncé du "calcul des systèmes de spécialisations pour les  $B$ -schémas standards" :

**THEOREME 3.3.10** — Soit  $\text{sp}$  une structure de spécialisation de base  $B$  de  $H_1$  vers  $H_2$ . On fixe des entiers naturels non nuls  $n$  et  $k$  et on notera  $\underline{n}_k$  le  $k$ -uplet constant de valeur  $n$ . Pour  $I \subset \{1, \dots, k\}$  une partie non vide, le 2-morphisme d'adjonction  $\text{id} \longrightarrow v_{\underline{n}_k, I}^* v_{\underline{n}_k, I}^*$  appliqué au 1-morphisme  $u_{\underline{n}_k, I}^* \text{sp}_{st_{\underline{n}_k}^B} (st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^*$  :

$$[u_{\underline{n}_k, I}^* \text{sp}_{st_{\underline{n}_k}^B} (st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^*] \xrightarrow{\sim} v_{\underline{n}_k, I}^* v_{\underline{n}_k, I}^* [u_{\underline{n}_k, I}^* \text{sp}_{st_{\underline{n}_k}^B} (st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^*]$$

est inversible.

On obtient l'énoncé dual de 3.3.10, en appliquant le corollaire 3.1.11. On en déduit :

**THEOREME 3.3.11** — On garde les notations et hypothèses du théorème 3.3.10. Le 2-morphisme  $v_{\underline{n}_k, I}^! v_{\underline{n}_k, I}^!$  appliqué au 1-morphisme  $u_{\underline{n}_k, I}^! \text{sp}_{st_{\underline{n}_k}^B} (st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^!$  :

$$v_{\underline{n}_k, I}^! v_{\underline{n}_k, I}^! [u_{\underline{n}_k, I}^! \text{sp}_{st_{\underline{n}_k}^B} (st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^!] \xrightarrow{\sim} [u_{\underline{n}_k, I}^! \text{sp}_{st_{\underline{n}_k}^B} (st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^!]$$

est inversible.

**Remarque 3.3.12** — Il n'est pas tout à fait clair comment l'énoncé de théorème 3.3.10 permet de "calculer" le foncteur  $\text{sp}_{st_{\underline{n}_k}^B}$ . Avant d'expliquer cela, précisons tout de suite qu'on ne "calculera" pas le foncteur  $\text{sp}_{st_{\underline{n}_k}^B}$  mais plutôt ses valeurs lorsqu'on l'applique sur des objets de  $H_1((St_{\underline{n}_k}^B)_\eta)$  constants (voire localement constant) relativement à  $\eta$ , i.e., des objets de la forme  $(st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^*(?)$ . De plus, on ne calculera pas ces valeurs mais seulement leurs restrictions aux branches  $D_{\underline{n}_k, i}$  pour  $i \in \{1, \dots, k\}$  qui recouvrent tout de même  $(St_{\underline{n}_k}^B)_\sigma$ .

Pour simplifier, on prendra dans la suite  $n = 1$  et  $I = \{i\} \subset \{1, \dots, k\}$ . Dans ce cas, le  $B$ -schéma  $St_{\underline{1}_k}^B$  est lisse en tout point de  $D_{\underline{1}_k, i}^0$ . Appelons  $w$  la projection structurale du  $B$ -schéma lisse  $(St_{\underline{1}_k}^B - \cup_{j \neq i} D_{\underline{1}_k, j}^\pi)$  et  $m$  son inclusion dans  $St_{\underline{1}_k}^B$ . On voit alors immédiatement que  $m_\sigma = u_{\underline{1}_k, i} \circ v_{\underline{1}_k, i}$  de sorte que :

$$v_{\underline{1}_k, i}^* u_{\underline{1}_k, i}^* \text{sp}_{st_{\underline{1}_k}^B} (st_{\underline{1}_k}^B)_\eta^* \simeq m_\sigma^* \text{sp}_{st_{\underline{1}_k}^B} (st_{\underline{1}_k}^B)_\eta^* \xrightarrow{\sim} \text{sp}_w m_\sigma^* (st_{\underline{1}_k}^B)_\eta^* \simeq \text{sp}_w w_\eta^* \xleftarrow{\sim} w_\sigma^* \text{sp}_{\text{id}_B}$$

En fin de compte le théorème 3.3.10 se traduit dans ce cas par un isomorphisme  $u_{\underline{1}_k, i}^* \text{sp}_{st_{\underline{1}_k}^B} (st_{\underline{1}_k}^B)_\eta^* \simeq v_{\underline{1}_k, i}^* w_\sigma^* \text{sp}_{\text{id}_B}$ .

Une bonne partie de cette section est consacrée à la preuve du théorème 3.3.10. La partie restante est consacrée aux applications de ce théorème. On y verra les preuves de 3.3.4 et 3.3.6 ainsi que des généralisations dans le cas où  $B$  est un trait (ou plus généralement de dimension 1).

### 3.3.2 Quelques préparations

Le lemme simple suivant, nous sera utile :

**LEMME 3.3.13** — Soit  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k)$  un  $k$ -uplet d'entiers strictement positifs. Soit  $d$  un diviseur commun à tout les  $a_i$ . Il existe alors un  $B$ -morphisme canonique :

$$st_{\underline{a},d}^B : St_{\underline{a}}^B \longrightarrow B_d$$

qui envoie la classe de  $T$  sur la classe de  $T_1^{a_1/d} \dots T_k^{a_k/d}$ . De plus, le  $B_d$ -schéma  $st_{\underline{a},d}^B$  est canoniquement isomorphe au  $B_d$ -schéma  $\pi^{1/n}$ -standard à réduction semi-stable de type  $\underline{a}/d$  :

$$St_{\underline{a}/d}^{B_d} = B_d[T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1/d} \dots T_k^{a_k/d} - \pi^{1/d}) \longrightarrow B_d$$

avec  $\underline{a}/d = (a_1/d, \dots, a_k/d)$ . (L'isomorphisme consiste à envoyer  $T_i$  sur  $T_i$ )

DEMONSTRATION En effet le morphisme :

$$St_{\underline{a}}^B \longrightarrow B[T]$$

qui envoie  $T$  sur le produit  $T_1^{a_1/d} \dots T_k^{a_k/d}$  se factorise par l'idéal  $(T^d - \pi)$  vu la relation :

$$(T_1^{a_1/d} \dots T_k^{a_k/d})^d = T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} = \pi$$

La seconde assertion du lemme résulte des identifications suivantes :

$$\begin{aligned} & B_n[T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1/d} \dots T_k^{a_k/d} - \pi^{1/d}) = B[T]/(T^d - \pi)[T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1/d} \dots T_k^{a_k/d} - T) \\ & = B[T, T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1/d} \dots T_k^{a_k/d} - T; T^d - \pi) = B[T, T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1/d} \dots T_k^{a_k/d} - T; T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} - \pi) \\ & = B[T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} - \pi). \end{aligned}$$

C.Q.F.D

On utilisera à plusieurs reprises le lemme facile suivant dont la preuve est laissée en exercice :

**LEMME 3.3.14** — Soit  $g : Y \longrightarrow X$  un  $B$ -morphisme entre deux  $B$ -schémas  $h : Y \longrightarrow B$  et  $f : X \longrightarrow B$ . Soit  $D$  un sous-schéma de  $X_\sigma$  et  $D^0 \subset D$  un ouvert de  $D$ . On notera  $u$  l'inclusion de  $D$  dans  $X_\sigma$  et  $v$  celle de  $D^0$  dans  $D$ . On appelle également  $D'$ ,  $D'^0$ ,  $u'$  et  $v'$  les pull-back par  $g_\sigma$ . On considère les deux 2-morphismes suivants :

$$(3.16) \quad u^* \text{sp}_f f_\eta^* \longrightarrow v_* v^* u^* \text{sp}_f f_\eta^*$$

$$(3.17) \quad u'^* \text{sp}_h h_\eta^* \longrightarrow v'_* v'^* u'^* \text{sp}_h h_\eta^*$$

On a les assertions suivantes :

1. Si  $g$  est lisse et si (3.16) est un 2-isomorphisme, alors il en est de même de (3.17).
2. Si  $g$  est un recouvrement pour la topologie de Nisnevich et si (3.17) est un 2-isomorphisme, alors il en est de même de (3.16).

Terminons ces préparations en introduisant quelques notations. Pour  $I$  une partie non vide de  $\{1, \dots, k\}$ , on notera  $\mathcal{U}_{\underline{a},I}^B$  l'ouvert  $St_{\underline{a}}^B \setminus D_{\underline{a},I}^\pi$  de  $St_{\underline{a}}^B$ . On pose de même,  $\mathcal{V}_{\underline{a}}^B = St_{\underline{a}}^B \setminus \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\}} D_{\underline{a},i}^\pi$ . L'ouvert  $\mathcal{V}_{\underline{a}}^B$  est ainsi recouvert par les  $\mathcal{U}_{\underline{a},i}$  pour  $1 \leq i \leq k$ . Dans la suite, on aura l'occasion d'appliquer le lemme 3.3.14 à ce recouvrement Zariski  $g : \coprod_i \mathcal{U}_{\underline{a},i}^B \longrightarrow \mathcal{V}_{\underline{a}}^B$ . Notons par ailleurs que :

$$\mathcal{U}_{\underline{a},I}^B = B[T_1, \dots, T_k][T_i^{-1}, i \in I]/(T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} - \pi) = B[T_i, T_i^{-1}, i \in I][T_j, j \notin I]/(\prod_{j \notin I} T_j^{a_j} - (\prod_{i \in I} T_i^{-a_i}).\pi)$$

ce qui prouve :

**LEMME 3.3.15** — Le  $B$ -schéma  $\mathcal{U}_{\underline{a},I}^B$  est canoniquement isomorphe à un  $B[T_i, T_i^{-1}, i \in I]$ -schéma  $(\prod_{i \in I} T_i^{-a_i}).\pi$ -standard à réduction semi-stable. De plus, le schéma standard en question est de type  $(a_j, j \notin I)$ , et ses branches sont les restrictions des branches  $D_{\underline{a},j}^\pi$  ( $j \notin I$ ) de  $St_{\underline{a}}^B$ .

### 3.3.3 La preuve du théorème 3.3.10 : le cas $I$ réduit à un élément

Rappelons que dans l'énoncé de 3.3.10, on a noté  $\underline{n}_k$  le  $k$ -uplet constant de valeur  $n$ . A partir du lemme ci-dessous, on ne considérera que le cas  $n = 1$ . En effet :

**LEMME 3.3.16** — *Il suffit de prouver le théorème 3.3.10 dans le cas où  $n = 1$ .*

DEMONSTRATION D'après le lemme 3.3.13, on a triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} St_{\underline{n}_k}^B & \xrightarrow{st_{\underline{n}_k}^{B_n}} & B_n \\ & \searrow^{st_{\underline{n}_k}^B} & \downarrow b_n \\ & & B \end{array}$$

Notons  $\mathbf{sp}^n$  le système de spécialisation de base  $B_n$  obtenu par restriction de  $\mathbf{sp}$ . Supposons que l'on sait résoudre le cas  $n = 1$  pour tout système de spécialisation (en particulier pour  $\mathbf{sp}^n$ ). Il vient alors que le 2-morphisme suivant :

$$(3.18) \quad u_{\underline{1}_k, I}^* \mathbf{sp}_{st_{\underline{1}_k}^{B_n}}^n (st_{\underline{1}_k}^{B_n})_\eta^* \longrightarrow v_{\underline{1}_k, I} v_{\underline{1}_k, I}^* u_{\underline{1}_k, I}^* \mathbf{sp}_{st_{k,1}^{B_n}}^n (st_{k,1}^{B_n})_\eta^*$$

est inversible. Mais  $\mathbf{sp}_{st_{\underline{1}_k}^{B_n}}^n = \mathbf{sp}_{st_{\underline{1}_k}^B}$  par définition. De même les inclusions  $u_{\underline{1}_k, I}$  et  $v_{\underline{1}_k, I}$  pour le  $B_n$ -schéma  $st_{\underline{1}_k}^{B_n}$  sont simplement les inclusions  $u_{\underline{n}_k, I}$  et  $v_{\underline{n}_k, I}$  pour le  $B$ -schéma  $st_{\underline{n}_k}^B$ . Enfin,  $(st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^* = (st_{\underline{1}_k}^{B_n})_\eta^* \circ (b_n)_\eta^*$ . On obtient ainsi le 2-morphisme  $u_{\underline{n}_k, I}^* \mathbf{sp}_{st_{\underline{n}_k}^B} (st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^* \longrightarrow v_{\underline{n}_k, I} v_{\underline{n}_k, I}^* u_{\underline{n}_k, I}^* \mathbf{sp}_{st_{\underline{n}_k}^B} (st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^*$  en appliquant le 2-isomorphisme (3.18) au 1-morphisme  $(b_n)_\eta^*$ . Ceci prouve le lemme. C.Q.F.D

Jusqu'à la fin de la preuve de 3.3.10,  $n$  sera toujours égal à 1 et on écrira alors simplement  $st_k, St_k, u_{k, I}, v_{k, I}, D_{k, I}^?$ , etc à la place de  $st_{\underline{1}_k}^B, St_{\underline{1}_k}^B, u_{\underline{1}_k, I}, v_{\underline{1}_k, I}, D_{\underline{1}_k, I}^?$ , etc. Lorsqu'on voudrait préciser la base  $B$  on la mettra en exposant.

Pour démontrer le théorème 3.3.10 dans le cas où  $I = \{i\}$  est un singleton, on raisonnera par récurrence sur l'entier non nul  $k$ . Il s'agit de montrer que le 2-morphisme :

$$(\star_{k,i}) \quad u_{k,i}^* \mathbf{sp}_{st_k} (st_k)_\eta^* \longrightarrow v_{k,i} v_{k,i}^* u_{k,i}^* \mathbf{sp}_{st_k} (st_k)_\eta^*$$

est inversible. Lorsque  $k = 1$ , le résultat est clair.

**Deux résultats préliminaires** On fixe l'entier  $k \geq 1$  et on supposera que  $(\star_{k',i})$  est inversible pour tout  $k' \leq k$  et  $1 \leq i \leq k'$ . On va prouver que  $(\star_{k+1,i})$  est inversible pour  $1 \leq i \leq k+1$ . Le lemme suivant est une évidence :

**LEMME 3.3.17** — *Il suffit de prouver que  $(\star_{k+1,i})$  est un 2-isomorphisme pour un seul  $i \in \{1, \dots, k+1\}$ .*

DEMONSTRATION En effet si  $\tau$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, \dots, k+1\}$ , on peut lui associer un automorphisme du  $B$ -schéma  $St_{k+1}^B$  qui consiste à envoyer  $T_i$  sur  $T_{\tau^{-1}i}$ . On obtient ainsi une représentation du groupe symétrique  $\Sigma_{k+1}$  sur  $St_{k+1}^B$ . On voit facilement que cette représentation permute transitivement les branches. Il suffit alors (par exemple) d'appliquer le lemme 3.3.14. C.Q.F.D

Soit  $O^\pi$  le sous-schéma de  $St_{k+1}$  égal à l'intersection des branches  $D_{k+1,1}^\pi \cap \dots \cap D_{k+1,k+1}^\pi$ . Rappelons qu'on avait posé  $\mathcal{V}_{\underline{1}_{k+1}}^B = \mathcal{V}_{k+1} = St_{k+1} \setminus O^\pi$ . Notons  $O$  le pull-back de  $O^\pi$  par  $i_0 : \sigma \longrightarrow B/(\pi)$ . Évidemment  $O$  est l'intersection  $D_{k+1,1} \cap \dots \cap D_{k+1,k+1}$ . L'ouvert  $(St_{k+1})_\sigma \setminus O$  de  $(St_{k+1})_\sigma$  s'identifie naturellement au  $\sigma$ -schéma  $(\mathcal{V}_{k+1})_\sigma$ . On a le lemme :

**LEMME 3.3.18** — *Soit  $A$  un objet de  $H_1(\eta)$ . Choisissons un triangle distingué :*

$$[u_{k+1,i}^* \mathbf{sp}_{st_{k+1}} (st_{k+1})_\eta^* A] \longrightarrow v_{k+1,i} v_{k+1,i}^* [u_{k+1,i}^* \mathbf{sp}_{st_{k+1}} (st_{k+1})_\eta^* A] \longrightarrow C_A \longrightarrow$$

L'objet  $C_A$  est à support dans  $O$ .

DEMONSTRATION Soit  $a$  l'inclusion de  $\mathcal{V}_{k+1}$  dans  $St_{k+1}$ . On forme le diagramme commutatif suivant à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} D_{k+1,i}^0 & \xrightarrow{v'_{k+1,i}} & D_{k+1,i} \setminus O & \xrightarrow{u'_{k+1,i}} & (\mathcal{V}_{k+1})_\sigma \\ \parallel & & \downarrow a_i & & \downarrow a_\sigma \\ D_{k+1,i}^0 & \xrightarrow{v_{k+1,i}} & D_{k+1,i} & \xrightarrow{u_{k+1,i}} & (St_{k+1})_\sigma \end{array}$$

Il s'agit de montrer que  $a_i^* C_A$  est nul, ou encore que le 2-morphisme :

$$a_i^* u_{k+1,i}^* \mathbf{sp}_{st_{k+1}}(st_{k+1})_\eta^* \longrightarrow a_i^* v_{k+1,i} u_{k+1,i}^* u_{k+1,i}^* \mathbf{sp}_{st_{k+1}}(st_{k+1})_\eta^*$$

est inversible. On voit facilement (en utilisant le théorème de changement de base par un morphisme lisse) que le 2-morphisme en question est isomorphe à :

$$(u'_{k+1,i})^* a_\sigma^* \mathbf{sp}_{st_{k+1}}(st_{k+1})_\eta^* \longrightarrow (v'_{k+1,i})_*(v'_{k+1,i})^*(u'_{k+1,i})^* a_\sigma^* \mathbf{sp}_{st_{k+1}}(st_{k+1})_\eta^*$$

Par la définition 3.1.1, il en aussi isomorphe à :

$$(u'_{k+1,i})^* \mathbf{sp}_{st_{k+1} \circ a}(st_{k+1} \circ a)_\eta^* \longrightarrow (v'_{k+1,i})_*(v'_{k+1,i})^*(u'_{k+1,i})^* \mathbf{sp}_{st_{k+1} \circ a}(st_{k+1} \circ a)_\eta^*$$

Maintenant l'ouvert  $\mathcal{V}_{k+1}$  est recouvert par les ouverts  $\mathcal{U}_{\underline{1}_{k+1},j}$ . Par le lemme 3.3.15, l'ouvert  $\mathcal{U}_{\underline{1}_{k+1},j}$  est à réduction semi-stable standard de type  $\underline{1}_k$  au dessus de  $B[T_j, T_j^{-1}]$  pour  $T_j^{-1} \cdot \pi$ . On conclut alors en utilisant l'hypothèse de récurrence et le lemme 3.3.14. C.Q.F.D

**Une construction géométrique** On considère :

$$X = \mathbb{A}^1 \times St_k^B = B[T_1, \dots, T_k]/(T_1 \dots T_k - \pi)[T_{k+1}]$$

On a une projection canonique  $pr_2 : X \longrightarrow St_k^B$ . On notera  $D_{X,I}^\pi$  et  $D_{X,I}^{\pi,0}$  les sous-schémas de  $X$  obtenus par pull-back suivant  $pr_2$  de  $D_{k,I}^\pi$  et  $D_{k,I}^{\pi,0}$ . On notera également  $D_{X,I}$  et  $D_{X,I}^0$  les sous-schémas de  $X_\sigma$  obtenus par pull-back suivant  $i : \sigma \longrightarrow B$ . On continue à avoir un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc} D_{X,I}^0 & \xrightarrow{v_{X,I}} & D_{X,I} & \xrightarrow{u_{X,I}} & X_\sigma & \xrightarrow{f_\sigma} & \sigma \\ i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow \\ D_{X,I}^{\pi,0} & \xrightarrow{v_{X,I}^\pi} & D_{X,I}^\pi & \xrightarrow{u_{X,I}^\pi} & X/(\pi) & \longrightarrow & B/(\pi) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

avec  $f = st_k^B \circ pr_2$  le morphisme structural du  $B$ -schéma  $X$ . En fait, on aura surtout besoin dans la suite des sous-schémas  $D_{X,i}$  et  $D_{X,i}^0$ . Remarquons que la seule différence de notations pour les branches de  $X$  et ceux de  $St_k$  est l'indice  $X$  ou  $k$  qui précède le numéro  $i$  de la branche  $D_{X,i}^\pi \subset X$  et  $D_{k,i}^\pi \subset St_k$ .

On note  $Z^\pi$  le sous-schéma de  $X = B[T_1, \dots, T_k, T_{k+1}]/(T_1 \dots T_k - \pi)$  défini par les équations  $T_k = T_{k+1} = 0$ . Le sous-schéma  $Z^\pi$  est de codimension 2 dans  $X$ , il est contenu dans  $D_{X,k}^\pi$  et coupe les branches  $D_{X,i}^\pi$  transversalement pour  $1 \leq i \leq k-1$ . Le projection  $pr_2 : X \longrightarrow St_k^B$  envoie  $Z$  isomorphiquement sur son image :  $D_{k,k}^\pi$ . On notera aussi  $Z$  le pull-back de  $Z^\pi$  suivant  $i_0 : \sigma \longrightarrow B/(\pi)$ . On a en particulier, le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \longrightarrow & D_{X,k} & \xrightarrow{u_{X,k}} & X_\sigma & \xrightarrow{f_\sigma} & \sigma \\ i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow \\ Z^\pi & \longrightarrow & D_{X,k}^\pi & \xrightarrow{u_{X,k}^\pi} & X/(\pi) & \longrightarrow & B/(\pi) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

On définit également les ouverts  $Z^{\pi,0}$  et  $Z^0$  de  $Z^\pi$  et  $Z$  respectivement comme étant les traces des ouverts  $D_{X,k}^{\pi,0}$  et  $D_{X,k}^0$ . On obtient ainsi un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} Z^0 & \xrightarrow{v_Z} & Z & \xrightarrow{u_Z} & X_\sigma \\ i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow \\ Z^{\pi,0} & \xrightarrow{v_Z^\pi} & Z^\pi & \xrightarrow{u_Z^\pi} & X/(\pi) \end{array}$$

On aimerait considérer l'éclaté de  $Z$  dans  $X$ . Afin d'éviter les problèmes qui peuvent intervenir pour  $B$  très général, on optera plutôt pour le  $B$ -schéma :

$$[E_{(T_k, T_{k+1})}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P][T_1, \dots, T_{k+1}]/(T_1 \dots T_k - P)))] \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P])} B$$

C'est à dire, le pull-back de l'éclaté de l'idéal  $(T_k, T_{k+1})$  dans le  $\mathbb{Z}[P]$ -schéma  $\mathbb{A}^1 \times St_{\frac{\mathbb{Z}[P]}{1-k}}$ , suivant le morphisme  $B \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P])$  qui envoie  $P$  sur  $\pi$ . Le  $B$ -schéma obtenu sera appelé  $\tilde{X}$ . On dispose d'un morphisme projectif

$$e : \tilde{X} \longrightarrow X$$

qui n'est autre que le pull-back de l'éclatement :

$$E_{(T_k, T_{k+1})}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P][T_1, \dots, T_{k+1}]/(T_1 \dots T_k - P))) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P][T_1, \dots, T_{k+1}]/(T_1 \dots T_k - P))$$

On abusera et on dira que  $e : \tilde{X} \longrightarrow X$  est l'éclaté de  $Z$  dans  $X$ . Remarquons que  $e$  induit un isomorphisme  $\tilde{X}_\eta \simeq X_\eta$  sur la fibre générique car le centre de l'éclatement est contenu dans  $X/(\pi)$  et  $\pi$  est inversible sur  $X_\eta$ . Le morphisme structural de  $B$ -schéma  $f \circ e$  sera noté  $\tilde{f}$ . Le lemme qui suit décrit précisément le  $B$ -schéma  $\tilde{X}$  :

**LEMME 3.3.19** — *Le  $B$ -schéma  $\tilde{X}$  est recouvert par deux ouverts  $U_1$  et  $U_2$  affines sur  $B$  avec :*

1.  $U_1 = B[T_1, \dots, T_{k+1}]/(T_1 \dots T_k - \pi)[T_{k+1}/T_k] \simeq B[T_1, \dots, T_k, T'_{k+1}]/(T_1 \dots T_k - \pi)$  l'isomorphisme consiste à envoyer  $T'_{k+1}$  sur  $T_{k+1}/T_k$ .
2.  $U_2 = B[T_1, \dots, T_{k+1}]/(T_1 \dots T_k - \pi)[T_k/T_{k+1}] \simeq B[T_1, \dots, T_{k-1}, T'_k, T_{k+1}]/(T_1 \dots T_{k-1} T'_k T_{k+1} - \pi)$  l'isomorphisme consiste à envoyer  $T'_k$  sur  $T_k/T_{k+1}$ .

En particulier,  $U_1$  est isomorphe<sup>3</sup> à  $X$  et  $U_2$  est isomorphe à  $St_{k+1}$  (en tant que  $B$ -schémas).

DEMONSTRATION Par construction, on se ramène à calculer l'éclatement de l'idéal  $(T_k, T_{k+1})$  dans le schéma :

$$\mathbb{Z}[P][T_1, \dots, T_{k+1}]/(T_1 \dots T_k - P)$$

Mais ce schéma est clairement isomorphe à  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_{k+1}])$ . Le calcul dans ce cas est classique. C.Q.F.D

Pour  $1 \leq i \leq k - 1$ , on notera  $\tilde{D}_i^\pi$  le sous-schéma de  $\tilde{X}$  transformé pur de  $D_{X,i}^\pi$ . La projection  $\tilde{D}_i^\pi \longrightarrow D_{X,i}^\pi$  est canoniquement isomorphe à l'éclatement de  $Z^\pi \cap D_{X,i}^\pi$  dans  $D_{X,i}^\pi$ . On notera également  $\tilde{D}_k^\pi$  le sous-schéma de  $\tilde{X}$  transformé pur du sous-schéma  $D_{X,k}^\pi$ . Il est facile de voir que  $e$  envoie isomorphiquement  $\tilde{D}_k^\pi$  sur  $D_{X,k}^\pi$ . On notera finalement  $E^\pi = e^{-1}(Z^\pi)$  le diviseur exceptionnel de  $e$ . On définit alors  $\tilde{D}_i$  et  $E$  en prenant le pull-back suivant  $i_0$ . On pose  $E^{\pi,0}$  l'ouvert de  $E^\pi$  égal à  $E^\pi \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k} \tilde{D}_i^\pi$ . De même, on pose  $E^0 = E \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k} \tilde{D}_i$ . On a alors le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc}
 E^0 & \xrightarrow{v_E} & E & \xrightarrow{u_E} & \tilde{X}_\sigma & \xrightarrow{\tilde{f}_\sigma} & \sigma \\
 i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow & & i_0 \downarrow \\
 E^{\pi,0} & \xrightarrow{v_E^\pi} & E^\pi & \xrightarrow{u_E^\pi} & \tilde{X}/(\pi) & \longrightarrow & B/(\pi) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & B
 \end{array}$$

**LEMME 3.3.20** — *Pour établir le cas  $k + 1$  de la récurrence, il suffit de prouver que le 2-morphisme :*

$$u_E^* \mathrm{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \longrightarrow v_{E^*} v_E^* u_E^* \mathrm{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^*$$

est inversible.

DEMONSTRATION Il suffit d'appliquer le lemme 3.3.14 à l'immersion ouverte  $U_2 \subset \tilde{X}$ . C.Q.F.D

<sup>3</sup>L'isomorphisme en question n'est pas induit par  $e$ .



Formons les deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc}
 E^{\pi,0} & \xrightarrow{v_E^\pi} & E^\pi & \xrightarrow{u_E^\pi} & \tilde{X}/(\pi) \\
 p_0^\pi \downarrow & & \downarrow p^\pi & & \downarrow e^\pi \\
 Z^{\pi,0} & \xrightarrow{v_Z^\pi} & Z^\pi & \xrightarrow{u_Z^\pi} & X/(\pi)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 E^0 & \xrightarrow{v_E} & E & \xrightarrow{u_E} & \tilde{X}_\sigma \\
 p_0 \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow e_\sigma \\
 Z^0 & \xrightarrow{v_Z} & Z & \xrightarrow{u_Z} & X_\sigma
 \end{array}$$

Le second carré dans chacun de ces deux diagrammes est cartésien. Par contre, il n'en est pas de même des premiers carrés. Le lecteur pourra facilement voir que  $p$  est la projection d'une droite projective, alors que  $p_0$  est la projection d'une droite affine. On a le lemme suivant :

**LEMME 3.3.21** — *Pour établir le cas  $k + 1$  de la récurrence, il suffit de prouver que le 2-morphisme :*

$$p_* u_E^* \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \longrightarrow p_* v_{E^*} v_E^* u_E^* \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^*$$

est inversible.

DEMONSTRATION On note  $O^\pi$  l'intersection  $E^\pi \cap (\bigcap_{1 \leq i \leq k} \tilde{D}_i^\pi)$  et  $O$  son pull-back. Il est clair que  $O^\pi$  est contenu dans l'ouvert  $U_2$  et qu'il coïncide avec l'intersection des branches  $D_{k+1,i}^\pi$  modulo l'isomorphisme  $U_2 \simeq St_{k+1}$ .

Soit  $A$  un objet de  $H(\eta)$ . On choisit un triangle distingué :

$$u_E^* \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* A \longrightarrow v_{E^*} v_E^* u_E^* \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* A \longrightarrow C \longrightarrow$$

Le lemme 3.3.14 appliqué à l'inclusion de  $U_1$  ainsi que l'hypothèse de récurrence montre que l'objet  $C$  de  $H_2(E)$  est à support dans  $\tilde{X} - U_1$ . D'autre part, le lemme 3.3.18 montre que la restriction de  $C$  à l'ouvert  $U_2$  est supportée dans  $O$ . Ceci prouve que  $C$  est lui même à support dans  $O$ .

Étant donné que  $e$  envoie isomorphiquement  $O$  sur son image, il suffira donc de prouver que  $p_* C$  est nul. En d'autres termes il suffira de prouver que le 2-morphisme :

$$p_* u_E^* \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \longrightarrow p_* v_{E^*} v_E^* u_E^* \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^*$$

est un 2-isomorphisme. C'est exactement ce qu'affirme le lemme.

C.Q.F.D

**La  $k + 1$ -ème étape de la récurrence** On est en mesure de déduire l'étape  $k + 1$  de la récurrence et donc de prouver le théorème 3.3.10 dans le cas où  $I$  est un singleton. Formons le diagramme de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 & & p_* v_{E^*} v_E^* u_E^* \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \\
 & \nearrow \eta & \uparrow \sim Ex_* \\
 p_* u_E^* \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* & & v_{Z^*} p_{0^*} v_E^* u_E^* \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \\
 & \searrow \eta & \uparrow (4) Ex_* \\
 & & v_{Z^*} v_Z^* p_* u_E^* \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \\
 & & \uparrow (1) Ex_* \\
 & & v_{Z^*} v_Z^* u_Z^* e_{\sigma^*} \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \\
 & & \uparrow (2) \\
 & & v_{Z^*} v_Z^* u_Z^* \text{sp}_f f_\eta^* \\
 & & \uparrow (3) \\
 & & v_{Z^*} v_Z^* u_Z^* \text{sp}_f f_\eta^* \\
 & & \uparrow (2) \\
 u_Z^* e_{\sigma^*} \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* & \xrightarrow{\eta} & v_{Z^*} v_Z^* u_Z^* e_{\sigma^*} \text{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \\
 \uparrow (1) Ex_* & & \uparrow (2) \\
 u_Z^* \text{sp}_f f_\eta^* & \xrightarrow{\eta} & v_{Z^*} v_Z^* u_Z^* \text{sp}_f f_\eta^*
 \end{array}$$

Tous les sous-diagrammes de ce diagramme sont commutatifs pour des raisons triviales. Il vient que notre diagramme est commutatif. Les 2-morphismes désignés par (1) sont inversibles par le théorème de changement de base pour un morphisme projectif appliqué au carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{u_E} & \tilde{X}_\sigma \\
 p \downarrow & & \downarrow e_\sigma \\
 Z & \xrightarrow{u_Z} & X_\sigma
 \end{array}$$

Les 2-morphismes désignés par (2) sont inversibles car  $e$  est projectif. On voit donc que pour terminer la preuve du cas  $k + 1$  de la récurrence il suffit de prouver que les 2-morphismes (3) et (4) sont des 2-isomorphismes. On démontrera d'abord :

**LEMME 3.3.22** — *Le 2-morphisme (3) est inversible.*

DEMONSTRATION Il suffit de prouver que  $u_Z^* \mathbf{sp}_f f_\eta^* A$  est isomorphe à un objet du type  $v_{Z^*} (?)$ . En effet le 2-morphisme d'unité  $\text{id} \longrightarrow v_{Z^*} v_Z^*$  appliqué sur un objet de ce type est un isomorphisme.

Notons que puisque  $n = 1$ , le morphisme  $f$  est lisse au voisinage de  $D_{X,i}^{\pi,0}$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ . On appelle  $w_Z$  la restriction de  $f_\sigma$  à  $Z^0$  et  $w_{X,k}$  la restriction de  $f$  à  $D_{X,k}^0$ . On montrera qu'il existe un isomorphisme :

$$u_Z^* \mathbf{sp}_f f_\eta^* A \simeq v_{Z^*} [w_Z^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} A]$$

Pour cela, on part de l'isomorphisme  $u_{X,k}^* \mathbf{sp}_f f_\eta^* A \simeq v_{X,k^*} [w_{X,k}^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} A]$  obtenu en composant le morphisme :

$$u_{X,k}^* \mathbf{sp}_f f_\eta^* A \longrightarrow v_{X,k^*} v_{X,k}^* u_{X,k}^* \mathbf{sp}_f f_\eta^* A$$

avec l'isomorphisme  $v_{X,k}^* u_{X,k}^* \mathbf{sp}_f f_\eta^* A \simeq w_{X,k}^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} A$  (voir remarque 3.3.12). Notons que l'inversibilité s'obtient en utilisant l'hypothèse de récurrence et en appliquant le lemme 3.3.14 au morphisme lisse  $pr_2 : X \longrightarrow St_k$ .

Appelons  $s$  l'inclusion  $Z \longrightarrow D_k$ . On déduit alors un isomorphisme :

$$s^* u_{X,k}^* \mathbf{sp}_f f_\eta^* \simeq s^* v_{X,k^*} [w_{X,k}^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} A]$$

On a clairement  $s^* u_{X,k}^* \mathbf{sp}_f f_\eta^* \simeq u_Z^* \mathbf{sp}_f f_\eta^* A$ .

Il reste donc à voir pourquoi  $s^* v_{k^*} [w_k^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} A]$  est isomorphe  $v_{Z^*} [w_Z^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} A]$ . Il suffira pour cela de construire un 2-isomorphisme entre  $s^* v_{k^*} w_k^*$  et  $v_{Z^*} w_Z^*$ . En revenant aux définitions, on voit que l'inclusion  $s : Z \longrightarrow D_{X,k}$  est isomorphe au dessus de  $\sigma$  à l'inclusion de la section nulle  $T_{k+1} = 0$  de  $Z$  dans  $\mathbb{A}_Z^1$ . De même pour l'inclusion  $s_0 : Z^0 \longrightarrow D_{X,k}^0$ . Il existe alors des rétractions  $r$  et  $r_0$  à  $s$  et  $s_0$  et un carré cartésien au dessus de  $\sigma$  :

$$\begin{array}{ccc} D_{X,k}^0 & \xrightarrow{v_{X,k}} & D_{X,k} \\ r_0 \downarrow & & \downarrow r \\ Z^0 & \xrightarrow{v_Z} & Z \end{array}$$

Ceci donne une chaîne de 2-isomorphismes :

$$v_{X,k^*} w_{X,k}^* \simeq v_{X,k^*} r_0^* w_Z^* \simeq r^* v_{Z^*} w_Z^*$$

Le dernier 2-isomorphisme étant donné par le théorème de changement de base par un morphisme lisse. On voit en fin de compte que  $s^* v_{X,k^*} w_{X,k}^*$  est 2-isomorphe à  $s^* r^* v_{Z^*} w_Z^* \simeq v_{Z^*} w_Z^*$ . Le lemme est prouvé. C.Q.F.D

Il nous reste donc à prouver que le 2-morphisme d'échange :

$$v_Z^* p_* u_E^* \mathbf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \xrightarrow{Ex_*^*} p_{0*} (u_E^* \mathbf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^*)$$

associé au carré commutatif (non cartésien) :

$$\begin{array}{ccc} E^0 & \xrightarrow{v_E} & E \\ p_0 \downarrow & & \downarrow p \\ Z_0 & \xrightarrow{v_Z} & Z \end{array}$$

est inversible. Étant donné le diagramme commutatif de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma^*} & \xrightarrow{Ex_*^*} & p_{0*} (u_E \circ v_E)^* \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ v_Z^* u_Z^* e_{\sigma^*} & \xrightarrow[Ex_*^*]{(1)} v_Z^* p_* u_E^* & \xrightarrow[Ex_*^*]{} p_{0*} v_E^* u_E^* \end{array}$$

et le fait que le 2-morphisme (1) est inversible par le théorème de changement de base pour un morphisme projectif, on voit qu'il suffit de prouver que le 2-morphisme d'échange :

$$Ex_*^* : (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma*} \mathbf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \longrightarrow p_{0*} (u_E \circ v_E)^* \mathbf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^*$$

associé au carré commutatif (non cartésien) :

$$\begin{array}{ccc} E^0 & \xrightarrow{u_E \circ v_E} & \tilde{X}_\sigma \\ p_0 \downarrow & & \downarrow e_\sigma \\ Z_0 & \xrightarrow{u_Z \circ v_Z} & X_\sigma \end{array}$$

est un 2-isomorphisme.

Formons le diagramme de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccccc} (u_Z \circ v_Z)^* \mathbf{sp}_f f_\eta^* & \xrightarrow{(2)} & (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma*} \mathbf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* & \xrightarrow{(?)} & p_{0*} (u_E \circ v_E)^* \mathbf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \\ \uparrow (1) & & \uparrow & & \uparrow (1) \\ (u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} & \xrightarrow{\eta} & (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma*} e_\sigma^* f_\sigma^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} & \xrightarrow{\sim} & (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma*} \tilde{f}_\sigma^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} & \longrightarrow & p_{0*} (u_E \circ v_E)^* \tilde{f}_\sigma^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} \end{array}$$

Le carré de droite est clairement commutatif. De même le rectangle de gauche est commutatif. En effet, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f_\sigma^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} & \longrightarrow & \mathbf{sp}_f^* f_\eta^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ e_{\sigma*} e_\sigma^* f_\sigma^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} & \longrightarrow & e_{\sigma*} \tilde{f}_\sigma^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} \longrightarrow e_{\sigma*} \mathbf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \end{array}$$

Notre diagramme est donc commutatif. D'après le lemme 3.3.14, les 2-morphismes désignés par (1) sont des 2-isomorphismes étant donné que  $f$  (resp.  $\tilde{f}$ ) est lisse au dessus de  $Z^{\pi,0}$  (resp.  $E^{\pi,0}$ ). Comme  $e$  est projectif, le 2-morphisme (2) est également inversible. Il vient que pour prouver que (?) est un 2-isomorphisme, il suffira de prouver que la composée :

$$(u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} \xrightarrow{\eta} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma*} e_\sigma^* f_\sigma^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} \xrightarrow{\sim} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma*} \tilde{f}_\sigma^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B} \longrightarrow p_{0*} (u_E \circ v_E)^* \tilde{f}_\sigma^* \mathbf{sp}_{\text{id}_B}$$

est un 2-isomorphisme. Il est bien sûr plus général de prouver que la composée :

$$(u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^* \xrightarrow{\eta} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma*} e_\sigma^* f_\sigma^* \xrightarrow{\sim} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma*} \tilde{f}_\sigma^* \longrightarrow p_{0*} (u_E \circ v_E)^* \tilde{f}_\sigma^*$$

est un 2-isomorphisme. Ceci est équivalent à prouver que la composée :

$$(u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^* \xrightarrow{\eta} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma*} e_\sigma^* f_\sigma^* \xrightarrow{Ex_*^*} p_{0*} (u_E \circ v_E)^* e_\sigma^* f_\sigma^*$$

est un 2-isomorphisme. En composant à droite par un 2-isomorphisme d'échange  $Ex_*^*$ , on se ramène au bout du compte à prouver que la composée :

$$(u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^* \xrightarrow{\eta} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma*} e_\sigma^* f_\sigma^* \xrightarrow{Ex_*^*} p_{0*} (u_E \circ v_E)^* e_\sigma^* f_\sigma^* \longrightarrow p_{0*} p_0^* (u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^*$$

est inversible. Cette composée n'est autre que le 2-morphisme d'unité associé à la paire  $(p_0^*, p_{0*})$  :

$$(u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^* \xrightarrow{\eta} p_{0*} p_0^* (u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^*$$

Mais on a vu que  $p_0$  était isomorphe à la projection  $\mathbb{A}_{Z^0}^1 \longrightarrow Z^0$ . On conclut alors en utilisant l'axiome d'homotopie. Le théorème 3.3.10 est prouvé dans le cas où  $I$  est un singleton.

### 3.3.4 La preuve du théorème 3.3.10 : le cas général

Dans ce numéro on termine la preuve du théorème 3.3.10 en établissant le cas où  $I$  une partie quelconque non vide de  $\{1, \dots, k\}$ .

On raisonnera par récurrence sur le cardinal  $\text{card}(I)$  de  $I$ . L'entier  $k$  ne jouera pas de rôle et sera fixé. Ceci nous permettra d'alléger les notations. Ainsi, on notera  $D_I^\pi$ ,  $D_I^{\pi,0}$ ,  $D_I$  et  $D_i^0$  à la place de  $D_{\perp_k, I}^\pi$ ,  $D_{\perp_k, I}^{\pi,0}$ ,  $D_{\perp_k, I}$  et  $D_{\perp_k, I}^0$ . De même, les immersions  $u_{\perp_k, I}$  et  $v_{\perp_k, I}$  seront simplement notées  $u_I$  et  $v_I$ . On continue à noter  $st_k : St_k \longrightarrow B$  le  $B$ -schéma standard de type  $\perp_k$ .

Au cours de la preuve, on verra apparaître le système de spécialisation canonique  $\chi$  (voir l'exemple 3.1.4) auquel on lui appliquera l'hypothèse de récurrence. Il serait donc important de ne pas se restreindre à un système de spécialisation particulier.

Pour  $\text{card}(I) = 1$  le résultat a été prouvé (pour tous les systèmes de spécialisation). On supposera donc  $\text{card}(I) \geq 2$ .

Soit  $i \in I$  et  $J = I \setminus \{i\}$ . La conclusion du théorème 3.3.10 est supposée vraie pour  $J$ . On dispose donc des 2-isomorphismes :

$$u_{J*} \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \xrightarrow{\sim} v_{J*} u_J^* u_J^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \quad \text{et} \quad u_i^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \xrightarrow{\sim} v_{i*} v_i^* u_i^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$$

Notons  $T = D_i \cap D_J = \cup_{j \in J} (D_i \cap D_j)$  et  $t$  son inclusion dans  $(St_k)_\sigma$  ainsi que  $t_i$  (resp.  $t_J$ ,  $t_I$ ) son inclusion dans  $D_i$  (resp.  $D_J$ ,  $D_I$ ). On a ainsi un carré cartésien d'immersions fermées :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t_J} & D_J \\ \downarrow t_i & \searrow t_I & \downarrow u_{J:I} \\ D_i & \xrightarrow{u_{i:I}} & D_I \end{array}$$

Par le triangle distingué de Mayer-Vietoris associé au recouvrement fermé de  $D_I$  par  $D_J$  et  $D_i$  on déduit pour tout  $A \in \mathbf{H}_1(\eta)$  un triangle distingué :

$$u_{I*} \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \longrightarrow u_{i:I*} u_i^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \oplus u_{J:I*} u_J^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \longrightarrow t_{I*} t^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \longrightarrow$$

En appliquant le foncteur triangulé  $v_{I*} v_I^*$  à ce triangle, on déduit un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} u_{I*} \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A & \longrightarrow & u_{i:I*} u_i^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \oplus u_{J:I*} u_J^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A & \longrightarrow & t_{I*} t^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ v_{I*} v_I^* u_{I*} \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A & \longrightarrow & v_{I*} v_I^* u_{i:I*} u_i^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \oplus v_{I*} v_I^* u_{J:I*} u_J^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A & \longrightarrow & v_{I*} v_I^* t_{I*} t^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A & \longrightarrow & \end{array}$$

Ainsi pour prouver que le 2-morphisme  $u_{I*} \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow v_{I*} v_I^* u_{I*} \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$  est inversible, il suffira de prouver que les trois 2-morphismes suivants :

$$(3.19) \quad u_{i:I*} u_i^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow v_{I*} v_I^* u_{i:I*} u_i^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \quad , \quad u_{J:I*} u_J^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow v_{I*} v_I^* u_{J:I*} u_J^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$$

$$(3.20) \quad t_{I*} t^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow v_{I*} v_I^* t_{I*} t^* \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$$

sont des 2-isomorphismes. On divise alors la tâche en deux étapes : une première qui traite les deux 2-morphismes (3.19) et une deuxième qui traite le 2-morphisme (3.20).

**Étape 1 : Les deux 2-morphismes (3.19)** Formons les carrés cartésiens suivants :

$$\begin{array}{ccc} D_{i:I}^0 & \xrightarrow{v_{i:I}} & D_i \\ u_{i:I}^0 \downarrow & & \downarrow u_{i:I} \\ D_I^0 & \xrightarrow{v_I} & D_I \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D_{J:I}^0 & \xrightarrow{v_{J:I}} & D_J \\ u_{J:I}^0 \downarrow & & \downarrow u_{J:I} \\ D_I^0 & \xrightarrow{v_I} & D_I \end{array}$$

Les 2-morphismes d'échange  $Ex_*^* : v_I^* u_{i:I^*} \longrightarrow u_{i:I^*}^0 v_{i:I}^*$  et  $Ex_*^* : v_I^* u_{J:I^*} \longrightarrow u_{J:I^*}^0 v_{J:I}^*$  sont inversibles (par le théorème de changement de base pour une immersion fermée). D'autre part, les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 u_{i:I^*} u_i^* & \xlongequal{\quad} & u_{i:I^*} u_i^* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 v_{I^*} v_I^* u_{i:I^*} u_i^* & \xrightarrow[\sim]{Ex_*^*} v_{I^*} u_{i:I^*}^0 v_{i:I}^* u_i^* & \xrightarrow[\sim]{Ex_{**}^*} u_{i:I^*} v_{i:I}^* v_{i:I}^* u_i^*
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 u_{J:I^*} u_J^* & \xlongequal{\quad} & u_{J:I^*} u_J^* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 v_{I^*} v_I^* u_{J:I^*} u_J^* & \xrightarrow[\sim]{Ex_*^*} v_{I^*} u_{J:I^*}^0 v_{J:I}^* u_J^* & \xrightarrow[\sim]{Ex_{**}^*} u_{J:I^*} v_{J:I}^* v_{J:I}^* u_J^*
 \end{array}$$

sont commutatifs. Ceci nous ramène à prouver que les deux 2-morphismes suivants :

$$u_{i:I^*} u_i^* \mathbf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow u_{i:I^*} v_{i:I^*} v_{i:I}^* u_i^* \mathbf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \quad \text{et} \quad u_{J:I^*} u_J^* \mathbf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow u_{J:I^*} v_{J:I^*} v_{J:I}^* u_J^* \mathbf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$$

sont inversibles. On montrera plus précisément que les 2-morphismes :

$$(3.21) \quad [u_i^* \mathbf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*] \longrightarrow v_{i:I^*} v_{i:I}^* [u_i^* \mathbf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*] \quad \text{et} \quad [u_J^* \mathbf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*] \longrightarrow v_{J:I^*} v_{J:I}^* [u_J^* \mathbf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*]$$

sont inversibles. Rappelons pour cela que  $v_{i:I}$  (resp.  $v_{J:I}$ ) est l'immersion de l'ouvert  $D_{i:I}^0 \subset D_i$  (resp.  $D_{J:I}^0 \subset D_J$ ) et que cet ouvert contient  $D_i^0$  (resp.  $D_J^0$ ). Or, on sait par l'hypothèse de récurrence que si on remplace dans (3.21)  $v_{i:I}$  (resp.  $v_{J:I}$ ) par l'inclusion  $v_i$  (resp.  $v_J$ ) de  $D_i^0$  (resp.  $D_J^0$ ) dans  $D_i$  (resp.  $D_J$ ) on obtient des isomorphismes. L'inversibilité des 2-morphismes (3.21) découle alors du lemme général (et facile) suivant :

**LEMME 3.3.23** — Soient  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{A}$  un 2-foncteur homotopique stable et  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. Supposons données des immersions ouvertes :

$$\begin{array}{ccc}
 U & \longrightarrow & V & \xrightarrow{j_V} & X \\
 & & \searrow & \nearrow & \\
 & & & & j_U
 \end{array}$$

Soit  $A$  est un objet de  $H(X)$  pour lequel le morphisme d'unité  $A \longrightarrow j_U^* j_U^* A$  est inversible. Alors, le morphisme d'unité  $A \longrightarrow j_V^* j_V^* A$  est également inversible.

DEMONSTRATION En effet, appelons  $a$  l'inclusion de  $U$  dans  $V$  de telle sorte que  $j_U = j_V \circ a$ . Par hypothèse, on sait que  $A$  est isomorphe à  $j_U^* j_U^* A$  et donc aussi à  $j_V^* a_* a^* j_V^* A$ . Ainsi pour montrer que  $A \longrightarrow j_V^* j_V^* A$  est également inversible, il suffira de prouver que :

$$[j_V^* a_* a^* j_V^* A] \longrightarrow j_V^* j_V^* [j_V^* a_* a^* j_V^* A]$$

est inversible. Ceci découle immédiatement du fait que  $j_V^* \xrightarrow{\sim} j_V^* j_V^* j_V^*$  est un 2-isomorphisme. C.Q.F.D

**Étape 2 : Le 2-morphisme (3.20)** Pour mettre la récurrence en marche et donc terminer la preuve du théorème 3.3.10 pour  $I$  quelconque, il nous reste à établir que le 2-morphisme :

$$t_{I^*} t^* \mathbf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow v_{I^*} v_I^* t_{I^*} t^* \mathbf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$$

est inversible. Considérons pour cela un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 T^0 & \xrightarrow{v_T} & T \\
 t_I^0 \downarrow & & \downarrow t_I \\
 D_I^0 & \xrightarrow{v_I} & D_I
 \end{array}$$

Le 2-morphisme d'échange  $Ex_*^* : v_I^* t_{I^*} \xrightarrow{\sim} t_{I^*}^0 v_I^*$  est inversible par le théorème de changement de base pour une immersion fermée. D'autre part, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 t_{I^*} t^* & \xlongequal{\quad} & t_{I^*} t^* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 v_{I^*} v_I^* t_{I^*} t^* & \xrightarrow[\sim]{Ex_*^*} v_{I^*} t_{I^*}^0 v_I^* t^* & \xrightarrow[\sim]{Ex_{**}^*} t_{I^*} v_{I^*} v_I^* t^*
 \end{array}$$

commute. Il est donc équivalent de prouver que le 2-morphisme  $t_{I*}t^*\mathrm{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow t_{I*}v_{T*}v_T^*t^*\mathrm{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$  est inversible. On prouvera plus précisément que le 2-morphisme :

$$t^*\mathrm{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow v_{T*}v_T^*t^*\mathrm{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$$

est inversible.

Pour prouver cela, on a besoin d'introduire quelques notations. On ne restreint pas la généralité en supposant  $i = k$ . Pour  $1 \leq j \leq k-1$ , on pose  $C_j = D_j \cap D_k$ . On pensera aux  $C_j$  comme à des branches de  $D_k$ . Plus généralement, pour toute partie non vide  $K \subset \{1, \dots, k-1\}$ , on posera  $C_K = \bigcup_{j \in K} C_j$  et  $C_K^0 = C_K \setminus C_{\{1, \dots, k-1\} \setminus K}$ . On a en particulier  $T = C_J$  et  $T^0 = C_J^0 = T \cap D_J^0$ . Factorisons l'immersion  $t$  de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} T = C_J & \xrightarrow{t_k} & D_k \\ & \searrow t & \downarrow u_k \\ & & (St_k)_\sigma \end{array}$$

Il vient que  $t^*\mathrm{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \simeq t_k^*u_k^*\mathrm{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \simeq t_k^*v_{k*}p_k^*\mathrm{sp}_{\mathrm{id}_B}$  avec  $p_k$  la projection de  $D_k^0$  sur  $\sigma$ . Le dernier isomorphisme n'est autre que celui de la remarque 3.3.12 à une notation près (à savoir  $p_k$  à la place de  $w_\sigma^*$ ). On voit donc qu'il est suffisant de prouver que le 2-morphisme :

$$t_k^*v_{k*}p_k^* \longrightarrow v_{T*}v_T^*t_k^*v_{k*}p_k^*$$

est inversible.

L'idée est de voir ce 2-morphisme comme un cas particulier du 2-morphisme du théorème 3.3.10 avec  $\mathrm{sp}$  remplacée par le système de spécialisation canonique.

On notera  $D$  le  $\sigma$ -schéma  $D_k$  jusqu'à la fin de la preuve. Par définition,  $D$  est l'espace affine de dimension  $k-1$  sur  $\sigma$ . L'ouvert  $D^0 = D_k^0$  est le complémentaire dans  $D = \sigma[T_1, \dots, T_{k-1}]$  des hyperplans  $C_i$  d'équation  $T_i = 0$ . On considère alors le  $\sigma$ -morphisme  $D \longrightarrow \mathbb{A}_\sigma^1 = \sigma[P]$  qui envoie  $P$  sur le produit  $T_1 \dots T_{k-1}$ . Ce morphisme fait de  $D$  un  $\sigma[P]$ -schéma standard de type  $\underline{1}_{k-1}$ . On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} D^0 & \xrightarrow{v} & D & \xleftarrow{s} & D_s \\ q_G \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow q_s \\ (\mathbb{G}m)_\sigma & \xrightarrow{v} & \mathbb{A}_\sigma^1 & \xleftarrow{s} & \sigma \end{array}$$

Ceci nous incite à poser  $\chi_q = s^*v_* : H_2(D^0) \longrightarrow H_2(D_s)$ .

Évidemment la projection  $p_k : D^0 = D_k^0 \longrightarrow \sigma$  se factorise par  $q_G$  se qui nous ramène à prouver que :

$$t_k^*v_{k*}q_G^* \longrightarrow v_{T*}v_T^*t_k^*v_{k*}q_G^*$$

est inversible. On a la factorisation suivante de  $t_k$  :

$$\begin{array}{ccc} C_J & \xrightarrow{a_J} & C_{\{1, \dots, k-1\}} = D_s \\ & \searrow t_k & \downarrow s \\ & & D \end{array}$$

En remarquant que  $v_k$  coïncide avec  $v$ , il devient clair que notre 2-morphisme est isomorphe à :

$$a_J^*[s^*v_*]q_G^* = a_J^*\chi_q \longrightarrow v_{T*}v_T^*a_J^*[s^*v_*]q_G^* = v_{T*}v_T^*a_J^*\chi_q$$

On voit alors apparaître naturellement la structure de spécialisation canonique  $\chi$ . De plus, aux notations près, le 2-morphisme qu'on considère est celui du théorème 3.3.10 dans le cas de  $\chi$  pour le schémas standard  $St_{k-1}^{\sigma[P]}$  et  $J \subset \{1, \dots, k-1\}$ . Il vient que ce 2-morphisme est inversible puisque  $\mathrm{card}(J) < \mathrm{card}(I)$ .

### 3.3.5 Complément au théorème 3.3.10 : cas où $H_1$ est $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé

Dans ce numéro on supposera que  $H_1$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. Sous cette hypothèse, il est possible d'étendre le théorème 3.3.10 aux  $k$ -uplets non constants :

**THEOREME 3.3.24** — *On suppose que  $H_1$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. On se donne un  $k$ -uplet  $\underline{a}$  (non nécessairement constant) d'entiers non nuls  $a_i$ . Soit  $\mathbf{sp}$  un système de spécialisation de base  $B$ . Pour tout  $I \subset \{1, \dots, k\}$ , le 2-morphisme d'adjonction  $\text{id} \longrightarrow v_{\underline{a}, I}^* v_{\underline{a}, I}^*$  appliqué au 1-morphisme  $u_{\underline{a}, I}^* \mathbf{SP}_{st_{\underline{a}}^B} (st_{\underline{a}}^B)_\eta^*$  :*

$$[u_{\underline{a}, I}^* \mathbf{SP}_{st_{\underline{a}}^B} (st_{\underline{a}}^B)_\eta^*] \longrightarrow v_{\underline{a}, I}^* v_{\underline{a}, I}^* [u_{\underline{a}, I}^* \mathbf{SP}_{st_{\underline{a}}^B} (st_{\underline{a}}^B)_\eta^*]$$

est inversible.

DEMONSTRATION Soit  $m$  le p.p.c.m. des entiers  $a_i$  et notons  $d_i = m/a_i$ . Considérons le  $B$ -morphisme :

$$r : St_{\underline{m}_k} = B[T'_1, \dots, T'_k] / ((T'_1 \dots T'_k)^m - \pi) \longrightarrow St_{\underline{a}} = B[T_1, \dots, T_k] / (T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} - \pi)$$

qui consiste à envoyer  $T_i$  sur  $(T'_i)^{d_i}$ . Ce morphisme est fini et surjectif et admet une action du groupe  $G = \prod_i \mathbb{Z}/d_i \mathbb{Z}$ . Cette action est transitive sur les fibres géométriques. On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} D_{\underline{m}_k, I}^0 & \xrightarrow{v_{\underline{m}_k, I}} & D_{\underline{m}_k, I} & \xrightarrow{u_{\underline{m}_k, I}} & (St_{\underline{m}_k})_\sigma \\ r_I^0 \downarrow & & r_I \downarrow & & \downarrow r_\sigma \\ D_{\underline{a}, I}^0 & \xrightarrow{v_{\underline{a}, I}} & D_{\underline{a}, I} & \xrightarrow{u_{\underline{a}, I}} & (St_{\underline{a}})_\sigma \end{array}$$

Considérons le carré commutatif de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} r_{I^*} [u_{\underline{m}_k, I}^* \mathbf{SP}_{st_{\underline{m}_k}^B} (st_{\underline{m}_k}^B)_\eta^*] & \xrightarrow{\sim} & r_{I^*} v_{\underline{m}_k, I}^* v_{\underline{m}_k, I}^* [u_{\underline{m}_k, I}^* \mathbf{SP}_{st_{\underline{m}_k}^B} (st_{\underline{m}_k}^B)_\eta^*] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ [u_{\underline{a}, I}^* \mathbf{SP}_{st_{\underline{a}}^B} r_{\eta^*} (st_{\underline{m}_k}^B)_\eta^*] & \xrightarrow{\star} & v_{\underline{a}, I}^* v_{\underline{a}, I}^* [u_{\underline{a}, I}^* \mathbf{SP}_{st_{\underline{a}}^B} r_{\eta^*} (st_{\underline{m}_k}^B)_\eta^*] \end{array}$$

Les 2-morphismes verticaux sont inversibles car  $r$  est projectif. Le 2-morphisme horizontal supérieur est un 2-isomorphisme par le théorème 3.3.10. Il vient que  $(\star)$  est un 2-isomorphisme. Pour terminer, il suffira de montrer que le 2-morphisme de l'énoncé est un rétracte de  $(\star)$ . Pour cela il suffit de montrer que  $\text{id}_{H((St_{\underline{a}})_\eta)}$  est un facteur direct de  $r_{\eta^*} r_{\eta^*}^*$ . Ceci est vrai par le corollaire 2.1.166. C.Q.F.D

**Remarque 3.3.25** — Nous ignorons si la conclusion du théorème 3.3.10 est vraie sans hypothèses sur  $H$  pour des  $k$ -uplets non constants. La méthode qui consiste à utiliser les éclatements  $e_{\underline{a}}^{i,j}$  (voir la preuve des théorèmes 3.3.4 et 3.3.6) pour modifier les  $k$ -uplets ne s'applique pas aussi facilement.

### 3.3.6 La preuve des théorèmes 3.3.4 et 3.3.6

Comme on l'a déjà annoncé, la preuve des théorèmes 3.3.4 et 3.3.6 repose d'une manière essentielle sur le théorème 3.3.10. Étant donné que le théorème 3.3.10 concerne les  $k$ -uplets constants, on divisera la preuve de ces théorèmes en deux parties. Dans la première, on traitera le cas des  $k$ -uplets constants en se basant sur 3.3.10. Dans la seconde, on ramènera par dévissage le cas des  $k$ -uplets généraux à celui des  $k$ -uplets constants. Notons tout de suite le lemme suivant :

**LEMME 3.3.26** — *Pour des entiers non nuls  $n$  et  $k$ , notons  $\underline{n}_k$  le  $k$ -uplet constant de valeur  $n$ . Le cas  $\underline{a} = \underline{n}_k$  du théorème 3.3.4 (resp. du théorème 3.3.6), découle du cas  $\underline{a} = \underline{1}_k$  du même théorème.*

DEMONSTRATION On suppose qu'on sait résoudre le cas  $\underline{a} = \underline{1}_k$  du théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) pour tout morphisme de systèmes de spécialisation (resp. pour tout système de spécialisation).

On se place alors dans la situation du théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) avec  $\underline{a} = \underline{n}_k$ . Par le lemme 3.3.13, on a un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} St_{\underline{n}_k}^B & \xrightarrow{st_{\underline{1}_k}^{B_n}} & B_n \\ & \searrow st_{\underline{n}_k}^B & \downarrow b_n \\ & & B \end{array}$$

Notons  $\mathbf{sp}^n$  et  $\mathbf{sp}'^n$  (resp.  $\mathbf{sp}^n$ ) les systèmes (resp. le système) de spécialisation de base  $B_n$  obtenus (resp. obtenu) par restriction de  $\mathbf{sp}$  et  $\mathbf{sp}'$  (resp.  $\mathbf{sp}$ ).

Appliquons le cas  $\underline{a} = \underline{1}_k$  du théorème 3.3.4 au morphisme de systèmes de spécialisation  $\mathbf{sp}^n \longrightarrow \mathbf{sp}'^n$  et à l'objet  $(b_n)_\eta^* A$ . Remarquons pour cela que la condition de théorème 3.3.4 est satisfaite, puisque  $\mathbf{sp}_{\text{id}_{B_n}}^n (b_n)_\eta^* \longrightarrow \mathbf{sp}'_{\text{id}_{B_n}}^n (b_n)_\eta^*$  est par définition égale à la flèche  $\mathbf{sp}_{b_n} (b_n)_\eta^* A \longrightarrow \mathbf{sp}'_{b_n} (b_n)_\eta^* A$  qu'on sait inversible. On obtient ainsi l'inversibilité de la flèche :

$$\mathbf{sp}_{st_{\underline{1}_k}}^n (st_{\underline{1}_k}^{B_n})_\eta^* (b_n)_\eta^* A \longrightarrow \mathbf{sp}'_{st_{\underline{1}_k}}^n (st_{\underline{1}_k}^{B_n})_\eta^* (b_n)_\eta^* A$$

Cette flèche s'identifie à celle de l'énoncé via les 2-isomorphismes de connexions  $(st_{\underline{1}_k}^{B_n})_\eta^* (b_n)_\eta^* \simeq (st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^*$ . Ceci établit le cas non respé du lemme.

Pour ce qui concerne le théorème 3.3.6, on procède de la même manière, en appliquant le cas  $\underline{1}_k$  à  $\mathbf{sp}^n$  et l'objet  $(b_n)_\eta$ . On déduit alors que l'objet  $\mathbf{sp}_{st_{\underline{1}_k}}^n (st_{\underline{1}_k}^{B_n})_\eta^* (b_n)_\eta^* A$  est dans  $\mathbf{H}_2(-)'$ . Mais cet objet s'identifie à  $\mathbf{sp}_{st_{\underline{n}_k}^B} (st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^* A$  via le 2-isomorphisme de connexion  $(st_{\underline{1}_k}^{B_n})_\eta^* (b_n)_\eta^* \simeq (st_{\underline{n}_k}^B)_\eta^*$ . Le lemme est prouvé. C.Q.F.D

Grâce au lemme précédent, on établira le cas des  $k$ -uplets constants en traitant uniquement le cas  $\underline{a} = \underline{1}_k$ . Ainsi dans les deux paragraphes qui suivent, on notera  $st_k, St_k, D_{k,I}, u_{k,I}$  et  $v_{k,I}$  à la place de  $st_{\underline{1}_k}^B, St_{\underline{1}_k}^B, D_{\underline{1}_k,I}, u_{\underline{1}_k,I}$  et  $v_{\underline{1}_k,I}$ .

**Le théorème 3.3.4 pour les  $k$ -uplets constants.** Pour  $i \in \{1, \dots, k\}$ , les  $D_{k,i}$  forment un recouvrement fermé de  $(St_k)_\sigma$ . On voit alors immédiatement que les foncteur  $u_{k,i}^*$  forment une famille conservative de foncteurs. On est donc ramené à montrer que pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , la flèche :

$$u_{k,i}^* \mathbf{sp}_{st_k} (st_k)_\eta^* A \longrightarrow u_{k,i}^* \mathbf{sp}'_{st_k} (st_k)_\eta^* A$$

est inversible. On considère pour cela le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} u_{k,i}^* \mathbf{sp}_{st_k} (st_k)_\eta^* A & \longrightarrow & u_{k,i}^* \mathbf{sp}'_{st_k} (st_k)_\eta^* A \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ v_{k,i*} v_{k,i}^* u_{k,i}^* \mathbf{sp}_{st_k} (st_k)_\eta^* A & \longrightarrow & v_{k,i*} v_{k,i}^* u_{k,i}^* \mathbf{sp}'_{st_k} (st_k)_\eta^* A \end{array}$$

Les flèches verticales sont inversibles par le théorème 3.3.10. On se ramène ainsi à montrer que la flèche :

$$v_{k,i}^* u_{k,i}^* \mathbf{sp}_{st_k} (st_k)_\eta^* A \longrightarrow v_{k,i}^* u_{k,i}^* \mathbf{sp}'_{st_k} (st_k)_\eta^* A$$

est inversible. En utilisant la remarque 3.3.12, on voit immédiatement que cette flèche est isomorphe à :

$$p_i^* \mathbf{sp}_{b_n} (b_n)_\eta^* A \longrightarrow p_i^* \mathbf{sp}'_{b_n} (b_n)_\eta^* A$$

avec  $p_i$  la projection de  $D_{k,i}^0$  sur  $\sigma$ . Cette flèche est inversible par hypothèse.

**Le théorème 3.3.6 pour les  $k$ -uplets constants** On aura à travailler un peu plus que pour le théorème 3.3.4. On commence par une courte digression. On considère le diagramme de  $\sigma$ -schémas :

$$(\mathbb{G}_m)_\sigma = G \xrightarrow{g} F = \mathbb{A}_\sigma^1 = \sigma[P] \xleftarrow{s} \sigma$$

et on note  $\chi$  le système de spécialisation canonique  $s^* g_*$  de base  $(\mathbb{A}_\sigma^1, g, s)$  dans  $\mathbf{H}_2$ . La projection de  $G = (\mathbb{G}_m)_\sigma$  sur  $\sigma$  sera notée  $p_G$ . L'hypothèse 3.3.5 implique :

**LEMME 3.3.27** — Soit  $E$  un objet dans  $\mathbf{H}_2(\sigma)'$ . L'objet  $\chi_{\text{id}} p_G^* E$  appartient à  $\mathbf{H}_2(\sigma)'$ .

**DEMONSTRATION** En effet, on montre facilement que  $\chi_{\text{id}} p_G^* E = E \oplus E(-1)[-1]$ . Mais  $\mathbf{H}_2(\sigma)'$  est additive, cosuspendue et stable par twist par  $(-1)[-1]$ . Le résultat est donc clair. C.Q.F.D

On raisonne par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 1$ , le résultat est donné par hypothèse. On suppose donc que le résultat est vrai pour  $\underline{a} = \underline{1}_{k-1}$  et tout système de spécialisation, et on le prouve pour  $\underline{1}_k$ . En particulier, par le lemme 3.3.27, la conclusion du théorème 3.3.6 est vraie pour  $\chi$  et l'objet  $p_G^* A$  (avec  $\underline{a} = \underline{1}_{k-1}$ ).



Fixons un entier  $i \in \{1, \dots, k\}$  et posons  $I = \{1, \dots, k\} - \{i\}$ . On note  $Z = D_{k,i} \cap D_{k,I}$  et on considère le carré cartésien d'immersions fermées :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{z_i} & D_{k,i} \\ \downarrow z_I & \searrow z & \downarrow u_{k,i} \\ D_{k,I} & \xrightarrow{u_{k,I}} & (St_k)_\sigma \end{array}$$

Rappelons que  $v_{k,i}$  (resp.  $v_{k,I}$ ) est l'inclusion de l'ouvert  $D_{k,i} - D_{k,I}$  (resp.  $D_{k,I} - D_i$ ) dans  $D_{k,i}$  (resp.  $D_{k,I}$ ). Notons  $K = \text{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A$ . On a un triangle distingué de Mayer-Vietoris dans  $H((St_k)_\sigma)$  :

$$K \longrightarrow u_{k,i*} u_{k,i}^* K \oplus u_{k,I*} u_{k,I}^* K \longrightarrow z_* z^* K \longrightarrow K[+1]$$

Les catégories  $H_2(-)'$  étant cosuspendues et stables par les images directes cohomologiques, on se ramène à montrer que les trois objets  $u_{k,i}^* K$ ,  $u_{k,I}^* K$  et  $z^* K$  sont dans  $H_2(-)'$ . On divise la tâche en deux parties :

*Étape 1 : Les objets  $u_{k,i}^* K$  et  $z^* K$ .* Par le théorème 3.3.10, on a un isomorphisme :

$$u_{k,i}^* K \xrightarrow{\sim} v_{k,i*} v_{k,i}^* u_{k,i}^* K$$

Il suffit donc de montrer que  $v_{k,i}^* u_{k,i}^* K$  est dans  $H_2(-)'$ . Si on note  $w$  la projection sur  $B$  de l'ouvert  $(St_k) - D_{k,I}^\pi$ , on a par la remarque 3.3.12 un isomorphisme :

$$v_{k,i}^* u_{k,i}^* K \simeq w^* \text{sp}_{\text{id}_B} A$$

Le problème de  $u_{k,i}^* K$  est alors réglé en invoquant la stabilité de  $H_2(-)'$  par les images inverses suivant des morphismes lisses.

Le théorème 3.3.10 fournit également un isomorphisme  $z^* K \simeq z_i^* v_{i*} w_\sigma E$  avec  $E = \text{sp}_{\text{id}_B} A$ . En remarquant que  $w_\sigma : ((St_k) - D_{k,I}^\pi)_\sigma \longrightarrow \sigma$  est canoniquement isomorphe à la fibre générique du  $\mathbb{A}_\sigma^1$ -standard de type  $\underline{1}_{k-1}$ , on déduit immédiatement que l'objet  $z^* K$  est isomorphe à  $\chi_{st_{k-1}^{\mathbb{A}_\sigma^1}} (st_{k-1}^{\mathbb{A}_\sigma^1})_\eta^* p_G^* E$ . On conclut alors à l'aide du lemme 3.3.27 et de l'hypothèse de récurrence appliquée à  $\chi$ .

*Étape 2 : L'objet  $u_{k,I}^* K$ .* Toujours par le théorème 3.3.10, on a un isomorphisme :

$$u_{k,I}^* K \xrightarrow{\sim} v_{k,I*} v_{k,I}^* u_{k,I}^* K$$

On montrera que  $v_{k,I}^* u_{k,I}^* K$  est dans  $H_2(-)'$ . Si on note  $Y = (St_k) - D_{k,I}^\pi$  et  $g$  sa projection sur  $B$ , on voit immédiatement que  $v_{k,I}^* u_{k,I}^* K$  est isomorphe à  $\text{sp}_g g_\eta^* A$ . On prouvera plutôt que  $\text{sp}_g g_\eta^* A$  est dans  $H_2(Y)_\sigma'$ .

On ne restreint pas la généralité si on suppose que  $i \neq 1$ . Le  $B$ -schéma  $Y$  est :

$$B[T_1, \dots, T_n][T_i^{-1}]/(T_1 \dots T_k - \pi) \simeq B[T_1, T_2, \dots, T_k][T_i^{-1}]/(\prod_{j \neq 1} T_j - \pi)$$

Le dernier isomorphisme étant donné par l'association  $T_l \rightsquigarrow T_l$  pour  $l \neq 1$  et  $T_1 \rightsquigarrow T_1 T_i$ . On obtient ainsi un isomorphisme entre  $Y$  et  $St_{k-1} \times \mathbb{G}_m$ . En particulier, on dispose d'un morphisme lisse :

$$q : Y \longrightarrow St_{k-1}$$

Il vient que  $\text{sp}_g g_\eta^* A \simeq q_\sigma^* \text{sp}_{st_{k-1}}(st_{k-1})_\eta^* A$ . On conclut à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

**Le cas des  $k$ -uplets généraux.** Dans ce paragraphe, on montre comment déduire le cas général des théorèmes 3.3.4 et 3.3.6 du cas particulier  $\underline{a}$  constant. Rappelons qu'on avait noté  $B_n^m$  le  $B$ -schéma  $B[U, U^{-1}][T]/(T^n - U^m \cdot \pi)$  et  $b_n^m$  sa projection structurale. On aura besoin du lemme suivant :

**LEMME 3.3.28** — Soit  $c$  un entier non nul. Notons  $l : Q \longrightarrow B$  le  $B$ -schéma  $B[R, R^{-1}]$  et  $\phi$  la section  $R^{-c} \cdot \pi$  de  $\mathcal{O}_Q$ . Soient  $\text{sp}$  et  $\text{sp}'$  deux systèmes de spécialisation de base  $B$  et  $A \in \text{Ob}(H_1(\eta))$ . On suppose que les hypothèses du théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) sont satisfaites pour  $A$ ,  $\text{sp}$  et  $\text{sp}'$  (resp. pour  $A$  et  $\text{sp}$ ). Alors les hypothèses du théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) sont également satisfaites pour  $l_\eta^* A$ ,  $\text{sp}|_Q$  et  $\text{sp}'|_Q$  (resp. pour  $l_\eta^* A$  et  $\text{sp}|_Q$ ) relativement à la section  $\phi$ .

DEMONSTRATION On se donne des entiers  $n$  et  $m$  avec  $m \in \mathbb{N}^{n.i.}(B)$  comme dans les énoncés des théorèmes 3.3.4 et 3.3.6. On considère les  $B$ -schémas :

$$q_n : Q_n = Q[T]/(T^n - \phi) \longrightarrow Q \longrightarrow B \quad \text{et} \quad q_n^m : Q_n^m = Q[U, U^{-1}][T]/(T^n - U^m \cdot \phi) \longrightarrow Q \longrightarrow B$$

On a  $Q_n = B[R, R^{-1}][T]/(T^n - \phi) = B[R, R^{-1}][T]/(T^n - R^{-c} \cdot \pi)$ . Écrivons  $c = c_1 \cdot c_2$  avec  $c_1$  inversible sur  $B$  et  $c_2 \in \mathbb{N}^{n.i.}(B)$ . On définit un  $B$ -morphisme  $f_n : Q_n \longrightarrow B_n^{c_2} = B[U, U^{-1}][T]/(T^n - U^{c_2} \cdot \pi)$  en envoyant  $T$  sur  $T$  et  $U$  sur  $R^{-c_1}$ . Le fait que  $c_1$  soit inversible sur  $B$  montre que ce morphisme est un revêtement étale.

D'autre part, on a  $Q_n^m = B[R, R^{-1}][U, U^{-1}][T]/(T^n - U^m \cdot \phi) = B[R, R^{-1}][U, U^{-1}][T]/(T^n - U^m \cdot R^{-c} \cdot \pi)$ . On note  $d$  le p.g.c.d. de  $m$  et  $c$ . Puisque  $d$  divise  $m$ , on déduit que  $d \in \mathbb{N}^{n.i.}(B)$ . On définit un  $B$ -morphisme  $f_n^m : Q_n^m \longrightarrow B_n^d = B[U, U^{-1}][T]/(T^n - U^d \cdot \pi)$  en envoyant  $T$  sur  $T$  et  $U$  sur  $U^{m/d} \cdot R^{-c/d}$ . Montrons que ce morphisme est lisse. Pour cela, remarquons qu'il est obtenu par pull-back suivant  $b_n^d$  du  $B$ -morphisme :

$$B[U, R, U^{-1}, R^{-1}] \longrightarrow B[U, U^{-1}]$$

qui envoie  $U$  sur  $U^{m_1} \cdot R^{-c_1}$  avec  $m_1 = m/d$  et  $c_1 = c/d$ . Ce morphisme n'est autre que le morphisme  $u : \mathbb{G}_m^2 \longrightarrow \mathbb{G}_m$  donné par  $(x, y) \rightsquigarrow x^{m_1} \cdot y^{-c_1}$ . Choisissons deux entiers  $a$  et  $b$  tels que  $a \cdot m_1 - b \cdot c_1 = 1$  et considérons le morphisme  $v : \mathbb{G}_m^2 \longrightarrow \mathbb{G}_m^2$  donné par la matrice  $\begin{pmatrix} a & c_1 \\ b & m_1 \end{pmatrix}$ . On voit facilement que  $v$  est un isomorphisme et que la composée  $u \circ v$  est la projection sur le second facteur de  $\mathbb{G}_m$ . D'où la lissité de  $u$ .

En utilisant les  $B$ -morphisms lisses  $f_n$  et  $f_n^m$  que l'on vient de construire, il est facile de prouver le lemme. En effet, pour le cas non respé, il s'agit de montrer que les deux flèches :

$$\text{sp}_{q_n}(q_n)^* A \longrightarrow \text{sp}'_{q_n}(q_n)^* A \quad \text{et} \quad \text{sp}_{q_n^m}(q_n^m)^* A \longrightarrow \text{sp}'_{q_n^m}(q_n^m)^* A$$

sont inversibles. Ceci est vrai puisqu'elles sont isomorphes à :

$$(f_n)_\sigma^* \text{sp}_{b_n^{c_2}}(b_n^{c_2})^* A \xrightarrow{\sim} (f_n)_\sigma^* \text{sp}'_{b_n^{c_2}}(b_n^{c_2})^* A \quad \text{et} \quad (f_n^m)_\sigma^* \text{sp}_{b_n^d}(b_n^d)^* A \xrightarrow{\sim} (f_n^m)_\sigma^* \text{sp}'_{b_n^d}(b_n^d)^* A$$

Pour le cas respé, il s'agit de montrer que  $\text{sp}_{q_n}(q_n)^* A$  et  $\text{sp}_{q_n^m}(q_n^m)^* A$  sont dans  $\text{H}_2((Q_n)_\sigma)'$  et  $\text{H}_2((Q_n^m)_\sigma)'$  respectivement. Ceci découle des isomorphismes  $\text{sp}_{q_n}(f_n)_\eta^* \simeq (f_n)_\sigma^* \text{sp}_{b_n^{c_2}}$  et  $\text{sp}_{q_n^m}(f_n^m)_\eta^* \simeq (f_n^m)_\sigma^* \text{sp}_{b_n^d}$  et le fait que les catégories  $\text{H}_2(-)'$  sont stables par les images inverses suivant des morphismes lisses. C.Q.F.D

Soit un  $k$ -uplet  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k)$ . Pour  $1 \leq i < j \leq k$ , on note  $St_{\underline{a}}^{i,j}$  le  $B$ -schéma :

$$E_{(T_i, T_j)}(\text{Spec}(\mathbb{Z}[P][T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} - P))) \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z}[P])} B$$

obtenu en prenant le pull-back de l'éclaté de l'idéal  $(T_i, T_j)$  dans  $St_{\underline{a}}^{\text{Spec}(\mathbb{Z}[P])}$  suivant le morphisme  $B \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[P])$  qui envoie  $P$  sur  $\pi$ . Sa projection sur  $B$  sera notée  $st_{\underline{a}}^{i,j}$  et le morphisme projectif  $St_{\underline{a}}^{i,j} \longrightarrow St_{\underline{a}}$  sera noté  $e_{\underline{a}}^{i,j}$ . On abusera et on dira que  $St_{\underline{a}}^{i,j}$  est l'éclaté de  $(T_i, T_j)$  dans  $St_{\underline{a}}$ .

**LEMME 3.3.29** — *Le  $B$ -schéma  $St_{\underline{a}}^{i,j}$  est recouvert par deux ouverts  $V_i$  et  $V_j$  affines sur  $B$  avec :*

1.  $V_i \simeq B[T_1, \dots, T_{i-1}, T'_i, T_{i+1}, \dots, T_k]/(T_1^{a_1} \dots T_{i-1}^{a_{i-1}} T_i'^{a_i} T_{i+1}^{a_{i+1}} \dots T_{j-1}^{a_{j-1}} T_j^{a_i+a_j} T_{j+1}^{a_{j+1}} \dots T_k^{a_k} - \pi)$ . L'isomorphisme est donné par  $T'_i \rightsquigarrow T_i/T_j$ .
2.  $V_j \simeq B[T_1, \dots, T_{j-1}, T'_j, T_{j+1}, \dots, T_k]/(T_1^{a_1} \dots T_{i-1}^{a_{i-1}} T_i^{a_i+a_j} T_{i+1}^{a_{i+1}} \dots T_{j-1}^{a_{j-1}} T_j'^{a_j} T_{j+1}^{a_{j+1}} \dots T_k^{a_k} - \pi)$ . L'isomorphisme est donné par  $T'_j \rightsquigarrow T_j/T_i$ .

En d'autres termes, il existe un recouvrement pour la topologie de Zariski :

$$St_{\underline{a}}^i \amalg St_{\underline{a}}^j \xrightarrow{v_i \amalg v_j} St_{\underline{a}}^{i,j}$$

avec  $\underline{a}_i^j$  (resp.  $\underline{a}_j^i$ ) le  $k$ -uplet obtenu en gardant tous les  $a_i$  inchangés sauf le  $a_j$  (resp.  $a_i$ ) que l'on remplace par  $a_i + a_j$ .

DEMONSTRATION Par construction, on est ramené à calculer l'éclaté de  $(T_i, T_j)$  dans le schéma

$$\text{Spec}(\mathbb{Z}[P][T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} - P))$$

Mais ce schéma est canoniquement isomorphe à l'espace affine  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_k])$ , puisque la variable  $P$  s'exprime en fonction des autres. Le calcul de l'éclaté dans ce cas est classique. C.Q.F.D

Muni des lemmes 3.3.28 et 3.3.29, on est en mesure de terminer la preuve de 3.3.4 et 3.3.6. Lorsque  $k = 1$  la validité des théorèmes 3.3.4 et 3.3.6 découle de leurs énoncés. On peut donc supposer  $k \geq 2$ . On raisonne par récurrence sur  $k$  en supposant le résultat vrai pour les schémas standards à moins de  $k - 1$  branches.

**PROPOSITION 3.3.30** — *Supposons que le théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) est vrai pour le  $k$ -uplet  $\underline{a}$ . Alors (sous-l'hypothèse de récurrence), le théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) est vrai pour les  $k$ -uplets  $\underline{a}_i^j$  et  $\underline{a}_j^i$  pour tout  $1 \leq i < j \leq k$ .*

DEMONSTRATION Remarquons d'abord que les  $k$ -uplets  $\underline{a}_i^j$  et  $\underline{a}_j^i$  ont même p.g.c.d et même valeur maximale. Il vient que les hypothèses de théorème 3.3.4 (resp. du théorème 3.3.6) sont les mêmes pour ces deux  $k$ -uplets. Ainsi, on supposera ces hypothèses vérifiées et on prouvera le théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) pour  $\underline{a}_i^j$  et  $\underline{a}_j^i$  d'un seul coup en se ramenant au cas de  $\underline{a}$ . L'outil principal pour cela est le  $B$ -schéma  $st_{\underline{a}}^{i,j}$ . En effet par le lemme 3.3.29, on voit qu'il suffit de montrer que :

1. le morphisme  $\text{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A \longrightarrow \text{sp}'_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A$  est inversible dans le cas non-respé,
2. l'objet  $\text{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A$  est dans  $H_2((St_{\underline{a}}^{i,j})_\sigma)'$  dans le cas respé.

Notons  $D_{\underline{a},l}^{i,j,\pi}$  le transformé pure de la branche  $D_{\underline{a},l}^\pi$  par  $e_{\underline{a}}^{i,j}$  et  $E_{\underline{a}}^{i,j,\pi}$  le diviseur exceptionnel de  $e_{\underline{a}}^{i,j}$ . On appelle également  $D_{\underline{a},l}^{i,j}$  et  $E_{\underline{a}}^{i,j}$  leur pull-back par  $i_0 : \sigma \longrightarrow B/(\pi)$ . Notons enfin pour  $t \in \{i, j\}$  et  $? \in \{\emptyset, \pi\}$ ,  $O^{t,?}$  l'intersection :

$$E_{\underline{a}}^{i,j,\pi} \cap \left[ \bigcap_{l \in (\{1, \dots, k\} - \{i, j\}) \cup \{t\}} D_{\underline{a},l}^{i,j,\pi} \right]$$

Le sous-schéma  $O^{t,\pi}$  est envoyé isomorphiquement par  $e_{\underline{a}}^{i,j}$  sur l'intersection  $O_{\underline{a}}^\pi = \bigcap_{l \in \{1, \dots, k\}} D_{\underline{a},l}^\pi$  des branches de  $St_{\underline{a}}$ . Il en est de même de  $O^t$ . On vérifie également que  $O^{i,\pi}$  (resp.  $O^{j,\pi}$ ) n'est autre que l'image de  $O_{\underline{a}_i^j}^\pi$  (resp.  $O_{\underline{a}_j^i}^\pi$ ) par  $v_i$  (resp.  $v_j$ ). On traite d'abord le cas non-respé :

*Le cas du théorème 3.3.4.* Formons un triangle distingué de  $H_2((St_{\underline{a}}^{i,j})_\sigma)$  :

$$\text{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A \longrightarrow \text{sp}'_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A \longrightarrow C \longrightarrow$$

L'objet  $C$  est à support dans  $O^i \amalg O^j$ . En effet, le complémentaire de  $O^{i,\pi} \amalg O^{j,\pi}$  dans  $St_{\underline{a}}^{i,j}$  est recouvert par deux ouverts Zariski isomorphes à  $St_{\underline{a}_i^j} - O_{\underline{a}_i^j}^\pi$  et  $St_{\underline{a}_j^i} - O_{\underline{a}_j^i}^\pi$ . Par le lemme 3.3.15, chacun de ces deux ouverts est à son tour recouvert par des  $B[U, U^{-1}]$ -schémas  $U^{-c} \cdot \pi$ -standard à  $k - 1$  branches de type un  $(k - 1)$ -uplet  $\underline{b}$  inclus dans  $\underline{a}_i^j$  ou  $\underline{a}_j^i$ . En utilisant le lemme 3.3.28, on vérifie immédiatement que les hypothèses du théorème 3.3.4 sont satisfaites pour  $l_\eta^*A$  et le  $k - 1$ -uplet  $\underline{b}$ . L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure que la restriction de  $C$  au complémentaire de  $O^i \amalg O^j$  est bien nulle.

On a ainsi montré que le défaut d'isomorphie est concentré sur deux sous-schémas fermés disjoints et envoyés isomorphiquement sur leur image (commune) par  $(e_{\underline{a}}^{i,j})_\sigma$ . Il suffit alors de voir que la flèche :

$$(e_{\underline{a}}^{i,j})_\sigma * \text{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A \longrightarrow (e_{\underline{a}}^{i,j})_\sigma * \text{sp}'_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A$$

est inversible. Mais puisque  $e_{\underline{a}}^{i,j}$  est projectif et induit un isomorphisme sur la fibre générique, cette flèche est isomorphe à :

$$\text{sp}_{st_{\underline{a}}} (st_{\underline{a}})^*_\eta A \xrightarrow{\sim} \text{sp}'_{st_{\underline{a}}} (st_{\underline{a}})^*_\eta A$$

D'où la conclusion de la proposition dans le cas non-respé.

*Le cas du théorème 3.3.6.* On considère l'inclusion  $w : W \longrightarrow St_{\underline{a}}^{i,j}$  de l'ouvert complémentaire à  $O^{\pi,i} \amalg O^{\pi,j}$ .

On montre d'abord que  $w_{\sigma*} w_\sigma^* \text{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A$  est dans  $H_2((St_{\underline{a}}^{i,j})_\sigma)'$ . Puisque  $H_0(-)$  est stable par images directes cohomologiques, il suffit de montrer que  $w_\sigma^* \text{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A$  est dans  $H_2(W_\sigma)'$ . Mais on a vu dans le paragraphe précédent que  $W$  était recouvert par des  $B[U, U^{-1}]$ -schémas  $U^{-c} \cdot \pi$ -standards à  $k - 1$  branches de type un  $(k - 1)$ -uplet  $\underline{b}$  inclus dans  $\underline{a}_i^j$  ou  $\underline{a}_j^i$ . En utilisant le lemme 3.3.28, on vérifie comme pour le cas non-respé que les hypothèses du théorème 3.3.6 sont vérifiées pour le  $(k - 1)$ -uplet  $\underline{b}$  et l'objet  $l_\eta^*A$ . En utilisant l'hypothèse de récurrence, on déduit alors que l'objet  $w_\sigma^* \text{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A$  est localement pour la topologie de Zariski dans  $H_2(-)'$ . On utilise alors le lemme 3.3.31 ci-dessous pour conclure.

Choisissons ensuite un triangle distingué :

$$(3.22) \quad N \longrightarrow \mathbf{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A \longrightarrow w_{\sigma*}w_{\sigma}^*\mathbf{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A \longrightarrow N[+1]$$

Il suffit de montrer que  $N$  est dans  $\mathbf{H}_2((St_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma})'$  (on utilise que  $\mathbf{H}_2(-)'$  est cosuspendue). Par construction  $N$  est à support dans  $O^i \amalg O^j$ . Si on appelle  $o^j$  et  $o^i$  les inclusions de  $O^j$  et  $O^i$  dans  $(St_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma}$ , il existe alors des objets  $N_i^j$  et  $N_j^i$  tels que :

$$N \simeq (o^i)_*N_i^j \oplus (o^j)_*N_j^i$$

On prouvera que les deux objets  $(o_{\underline{a}_i}^j)_*N_i^j$  et  $(o_{\underline{a}_j}^i)_*N_j^i$  sont dans  $\mathbf{H}_2(-)'$  (avec  $o_{\underline{a}_i}^j$  et  $o_{\underline{a}_j}^i$  l'inclusion de  $O_{\underline{a}_i}^j \simeq O^i$  et  $O_{\underline{a}_j}^i \simeq O^j$  dans  $St_{\underline{a}_i}^j$  et  $St_{\underline{a}_j}^i$  respectivement).

Considérons le triangle distingué :

$$(e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma*}N \longrightarrow (e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma*}\mathbf{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A \longrightarrow (e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma*}w_{\sigma*}w_{\sigma}^*\mathbf{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})^*A \longrightarrow (e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma*}N[+1]$$

obtenu en appliquant le foncteur  $(e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma*}$  à (3.22). Le troisième sommet de ce triangle est un objet de  $\mathbf{H}_2(-)'$  par le début de la discussion. Comme  $e_{\underline{a}}^{i,j}$  est projectif et qu'il induit un isomorphisme sur la fibre générique, le deuxième sommet du triangle est isomorphe à  $\mathbf{sp}_{st_{\underline{a}}}(st_{\underline{a}})^*A$ . C'est donc un objet de  $\mathbf{H}_2(-)'$ . On déduit ainsi que l'objet  $(e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma*}N$  est dans  $\mathbf{H}_2(-)'$  puisque cette catégorie est cosuspendue. L'objet  $(e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma*}N$  est la somme directe :

$$(e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma*}(o^i)_*N_i^j \oplus (e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma*}(o^j)_*N_j^i$$

La stabilité par facteurs directs des catégories  $\mathbf{H}_2(-)'$  (voir l'énoncé de théorème 3.3.6) implique alors que chacun des objets :

$$o_{\underline{a}*}N_i^j \simeq (e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma*}(o^i)_*N_i^j \quad \text{et} \quad o_{\underline{a}*}N_j^i \simeq (e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma*}(o^j)_*N_j^i$$

est dans  $\mathbf{H}_2(-)'$  (avec bien entendu  $o_{\underline{a}}$  l'inclusion de  $O_{\underline{a}}$  dans  $(St_{\underline{a}})_{\sigma}$ ). Enfin, il est facile de voir que l'objet  $(o_{\underline{a}_i}^j)_*N_i^j$  de  $\mathbf{H}_2((St_{\underline{a}_i}^j)_{\sigma})$  est isomorphe à  $s_*(o_{\underline{a}_i*}N_i^j)$  avec  $s : (St_{\underline{a}_i})_{\sigma} \longrightarrow (St_{\underline{a}_i}^j)_{\sigma}$  l'immersion fermée :

$$\sigma[T_1, \dots, T_k]/T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} \longrightarrow \sigma[T_1, \dots, T_k]/T_1^{a_1} \dots T_{j-1}^{a_{j-1}} T_j^{a_j+1} T_{j+1}^{a_{j+1}} \dots T_k^{a_k}$$

d'idéal nilpotent  $(T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k})$ . La même chose s'applique à  $(o_j^i)_*N_j^i$ . Ceci prouve le cas respé. C.Q.F.D

Le lemme suivant à été utilisé au cours de la preuve du cas respé de la proposition précédente :

**LEMME 3.3.31** — Soient  $T$  un  $\sigma$ -schéma quasi-projectif et  $(j_{\alpha} : T_{\alpha} \longrightarrow T)_{\alpha}$  un recouvrement fini Zariski de  $T$ . Soit  $A$  un objet de  $\mathbf{H}_2(T)$ . On suppose que pour tous les indices  $\alpha$ , l'objet  $j_{\alpha}^*A$  est dans  $\mathbf{H}_2(T_{\alpha})'$ . Alors l'objet  $A$  est dans  $\mathbf{H}_2(T)'$ .

DEMONSTRATION Une façon économique de prouver ce lemme est d'utiliser la version duale du lemme 2.2.13. On note  $j_I$  l'immersion de l'ouvert  $\cap_{\alpha \in I} T_{\alpha}$ . La version duale de 2.2.13 concerne les opérations  $j_{I*}$  et  $j_I^*$  au lieu de  $j_{I\#} = j_I!$  et  $j_I^* = j_I^!$ . On déduit ainsi que l'objet  $A$  appartient à la sous-catégorie cosuspendue :

$$\langle \{j_{I*}j_I^*A; I \text{ non vide} \} \rangle_{-}^{s-ct}$$

Le lemme découle alors de l'hypothèse 3.3.5. C.Q.F.D

La proposition 3.3.30 permet de mettre en marche la récurrence sur  $k$  et donc de prouver les théorèmes 3.3.4 et 3.3.6. En effet, tout  $k$ -uplet  $\underline{a}$  de p.g.c.d  $d$ , peut-être construit à partir de  $\underline{d}_k$  par applications successives du procédé :  $\underline{x} \rightsquigarrow \underline{x}_i^j$  (avec  $i$  et  $j$  bien choisis).

### 3.3.7 Réduction semi-stable

Dans ce paragraphe on supposera que le schéma de base  $B$  est régulier, connexe et de dimension 1. On fixe une section globale  $\pi$  du faisceau  $\mathcal{O}_B$ . On supposera que le sous-schéma  $B/(\pi)$  est réduit, non vide et de dimension 0. On notera  $p$  l'exposant caractéristique de  $B/(\pi)$  qu'on suppose constant pour simplifier. On commence par préciser ce que l'on entendra par la réduction semi-stable :

**DEFINITION 3.3.32** — 1- Soient  $f : X \longrightarrow B$  un  $B$ -schéma et  $x$  un point de  $X/(\pi)$ . On dit que  $f$  (ou  $X$ ) est à  $\pi$ -réduction semi-stable en  $x$  (à  $k$ -branches de type  $(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{N} - \{0\})^k$ ) s'il existe un voisinage pour la topologie Nisnevich  $x \longrightarrow U \longrightarrow X$  de  $x$  dans  $X$  tel que :

1.  $U$  est un schéma régulier.
2. Il existe  $k + 1$  sections globales  $t_1, \dots, t_k$  et  $u$  de  $\mathcal{O}_U$  vérifiant :
  - $u$  est inversible et  $\pi = u.t_1^{a_1} \dots t_k^{a_k} = u. \prod_{i=1}^k t_i^{a_i}$ ,
  - pour tout  $1 \leq i \leq k$ , le sous-schéma  $D_i$  de  $U$  défini par l'équation  $(t_i = 0)$  est un schéma lisse sur  $B/(\pi)$  et contient  $x$  (en particulier il est non vide),
  - la réunion des  $D_i$  forme un diviseur à croisements normaux dans le schéma  $U$ .
3. Soit  $m_0$  la borne supérieure dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  de l'ensemble des entiers  $m$  pour lesquels il existe un  $v \in \mathcal{O}_U$  avec  $v^{p^m} = u$ . Soit  $l_0 \in \mathbb{N}$  la borne supérieure des  $l$  tels que  $p^{m_0+l_0}$  divise tous les  $a_i$  pour  $i \in \{1, \dots, k\}$  (on conviendra exceptionnellement que 0 est la borne supérieure de l'ensemble vide). Désignons par  $O$  le sous-schéma de  $U$  d'équation  $t_1 = \dots = t_k = 0$ . Lorsque  $m_0 = \infty$  on posera  $v_0 = u$ , sinon on choisit<sup>4</sup>  $v_0 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  telles que  $v_0^{p^{m_0}} = u$ . Alors pour tout  $l \in \{0, \dots, l_0\}$ , le  $B/(\pi)$ -schéma  $O[v_0^{1/p^l}]$  est lisse.

On dira que le  $B$ -schéma  $X$  est à réduction semi-stable (à moins de  $k$ -branches) lorsque en tout point  $x$  de  $X/(\pi)$ , il est à réduction semi-stable (à  $k_x$  branches avec  $k_x \leq k$ ).

2- On dit que  $f$  (ou  $X$ ) est globalement à réduction semi-stable en  $x$  (à  $k$ -branches de type  $(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{N} - \{0\})^k$ ) lorsqu'il est possible de choisir  $U$  un voisinage Zariski ouvert de  $x$ . Dans ce cas, il y a  $k$  diviseurs de  $X$  qui passent par  $x$ . On a aussi la notion de  $B$ -schémas globalement à réduction semi-stable.

**Exemple 3.3.33** — D'après notre définition, un  $B$ -schéma  $X$  avec  $X/(\pi)$  vide est à  $\pi$ -réduction semi-stable.

**Remarque 3.3.34** — La troisième condition dans la définition précédente a été imposée dans le but d'avoir la proposition 3.3.38. Cette condition peut paraître compliquée, mais devient simple dans beaucoup de situations :

- Lorsque  $B/(\pi)$  est de caractéristique nulle, cette condition est automatique. En effet,  $m_0 = \infty$  et  $l_0 = 0$ . Il suffit donc de vérifier que  $O$  est lisse. On sait que  $O$  est régulier puisque  $X/(\pi)$  est un diviseur à croisements normaux. Mais sur un corps de caractéristique nulle tout schéma régulier est lisse.
- Supposons que  $p \geq 2$ . Lorsque les  $a_i$  sont premiers à  $p$  ou plus généralement lorsque  $u$  admet des racines  $p^m$ -ème pour  $m$  plus grand que la valuation  $p$ -adique des  $a_i$ , cette condition se réduit à la lissité de  $O$ . En effet, dans ce cas on a  $l_0 = 0$ .
- Supposons que  $p \geq 2$  et que  $B/(\pi)$  est somme de corps parfaits. Cette condition est vérifiée si  $O$  est de dimension 0. En effet dans ce cas, on a  $O[v_0^{1/p^l}] = O$  qui est étale sur  $B/(\pi)$ .

**Remarque 3.3.35** — Notre définition diffère de la définition classique. Classiquement un  $B$ -schéma  $X$  est à réduction semi-stable si localement pour la topologie étale,  $X$  est lisse au dessus d'un  $B$ -schéma de la forme :

$$B[T_1, \dots, T_k]/(T_1 \dots T_k - \pi)$$

Cette définition est suffisante en cohomologie étale pour les besoins de la théorie des cycles évanescents. Elle est insuffisante dans le contexte motivique où l'on dispose uniquement de la localité pour la topologie de Nisnevich.

Si  $X$  est un  $B$ -schéma globalement à réduction semi-stable, le diviseur libre  $X/(\pi)$  est sommes de diviseurs lisses irréductibles :

$$[X/(\pi)] = m_1.[D_1] + \dots + m_r.[D_r]$$

avec  $m_j$  des entiers strictement positifs. Les  $m_j$  sont en général différents des  $a_i$ , étant donné que les  $a_i$  décrivent une information locale dépendante d'un point  $x$  alors que les  $m_j$  décrivent une situation globale, mais il est facile de voir que la suite des  $a_i$  est toujours contenue dans celle des  $m_j$ . Les diviseurs  $D_i$  seront appelés les *branches connexes* (ou *irréductibles*) du  $S$ -schéma  $X$  et l'entier  $m_i$  sera appelé la *multiplicité* de  $D_i$ . Plus généralement on appellera *branche* de  $X$  tout diviseur lisse de  $X$  contenu dans  $X/(\pi)$ . Ainsi, une branche de  $X$  est forcément une réunion disjointe de branches irréductibles. Nous dirons qu'une branche  $D$  de  $X$  est de multiplicité constante  $m$  si toutes ses branches irréductibles sont de multiplicité  $m$ . Enfin, nous dirons que la branche  $D$  est simple si elle est de multiplicité 1. Notons le lemme :

**LEMME 3.3.36** — Soient  $f : X \longrightarrow B$  un  $B$ -schéma et  $x$  un point de  $X/(\pi)$ . On suppose que  $X$  est à  $\pi$ -réduction semi-stable de type  $(a_1, \dots, a_k)$  au point  $x$ . On se donne un point géométrique :  $\bar{x} \longrightarrow X$  au dessus de  $x$ . Lorsque  $B/(\pi)$  est de caractéristique positive, on supposera que  $p$  ne divise pas tous les  $a_i$ . Il existe alors un voisinage étale de  $\bar{x}$  dans  $X$  :

$$\bar{x} \longrightarrow U \longrightarrow X$$

et un  $B$ -morphisme lisse :

$$U \longrightarrow B[T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} - \pi)$$

<sup>4</sup>Le choix de  $v_0$  n'est pas important. En effet seul la restriction de  $v_0$  à  $O$  interviendra dans la suite. Cette restriction est indépendante de ce choix puisque sur  $O$  il n'y a pas de racines  $p$ -ème de l'unité non triviales (on utilise que  $O$  est réduit).

qui envoie  $\bar{x}$  sur le point  $o = (T_1 = \dots = T_k = 0)$ . De plus si les  $a_i$  sont premiers entre eux (resp. et si en plus  $f$  est globalement à réduction semi-stable), on peut choisir  $U$  un voisinage Nisnevich de  $x$  (resp. un voisinage ouvert de  $x$ ).

DEMONSTRATION Quitte à remplacer  $X$  par un voisinage Nisnevich (ou Zariski lorsque  $X$  est globalement à réduction semi-stable en  $x$ ) de  $x$  on peut supposer qu'il existe  $k+1$  sections globales  $t_1, \dots, t_k$  et  $u$  de  $\mathcal{O}_X$  vérifiant les hypothèses de la définition 3.3.32. En particulier,  $\pi = u.t_1^{a_1} \dots t_k^{a_k}$ . On note  $d$  le plus grand diviseur commun des entiers  $a_i$ , et on prend pour  $U$  le  $X$ -schéma :

$$U = X[\xi]/(\xi^d - u) \longrightarrow X$$

Comme  $u$  est inversible et que  $p$  ne divise pas  $d$ , il s'agit bien d'un morphisme étale (c'est même un revêtement étale). Remarquons également que lorsque les  $a_i$  sont premiers entre eux, on a  $U = X$ . Puisque  $\bar{x}$  est le spectre d'un corps séparablement clos il existe une factorisation de  $\bar{x} \longrightarrow X$  :

$$\bar{x} \longrightarrow U \longrightarrow X$$

Il nous reste à construire un morphisme lisse vers un schéma standard. Pour cela, on choisit un  $k$ -uplet d'entiers relatifs  $k_i$  tel que :

$$\sum_{i=1}^k k_i a_i = k_1 a_1 + \dots + k_k a_k = d$$

et on considère le  $B$ -morphisme :

$$p_0 : U \longrightarrow B[T_1, \dots, T_k]$$

défini au niveau des algèbres par l'association  $T_i \rightsquigarrow \xi^{k_i} . t_i$ . Puisque :

$$\pi = u.t_1^{a_1} \dots t_k^{a_k} = \xi^d . t_1^{a_1} \dots t_k^{a_k} = \prod_{i=1}^k (\xi^{k_i} . t_i)^{a_i}$$

on voit que  $p_0$  se factorise d'une manière unique par :

$$U \xrightarrow{p} B[T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} - \pi) \xrightarrow{p_0} B[T_1, \dots, T_k]$$

Le fait que  $p$  envoie  $\bar{x}$  sur le point  $o$  de coordonnées  $(0, \dots, 0)$  est évident. Il reste à prouver que  $p$  est lisse au voisinage de  $x$ . Le fait que l'équation  $t_1 \dots t_k = 0$  définit un diviseur à croisements normaux assure que la suite  $(\xi^{k_1} . t_1, \dots, \xi^{k_k} . t_k)$  est une suite régulière au voisinage de  $x$  et donc que  $p$  est plat au voisinage de  $x$ . D'autre part comme  $p^{-1}(o)$  est égal au sous-schéma  $t_1 = \dots t_k = 0$ . Ce dernier est lisse au voisinage de  $x$  par la troisième condition de la définition 3.3.32. Le lemme est prouvé. C.Q.F.D

Voici une réciproque partielle au lemme précédent :

**LEMME 3.3.37** — Soient  $f : X \longrightarrow B$  un  $B$ -schéma avec  $X$  régulier et  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X$  au dessus de  $x$ . On suppose qu'il existe un voisinage étale  $U$  de  $\bar{x}$  et un  $B$ -morphisme lisse :

$$U \longrightarrow B[T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} - \pi)$$

qui envoie  $\bar{x}$  sur le point  $o = (T_1 = \dots = T_k = 0)$ . On suppose également qu'il existe  $k$  diviseurs irréductibles de  $X$  contenus dans  $X_\sigma$  et passant par  $x$ . Le  $B$ -schéma  $X$  est alors globalement à réduction semi-stable au sens de la définition 3.3.32.

DEMONSTRATION Quitte à remplacer  $X$  par un voisinage ouvert assez petit de  $x$  on peut trouver  $k$  sections globales  $t_1, \dots, t_k$  de  $\mathcal{O}_X$  définissant les  $k$  diviseurs irréductibles passant par  $x$  de l'énoncé. Soit  $D_i$  le diviseur de  $X$  défini par l'équation  $t_i = 0$  et  $D'_i$  l'image inverse de  $D_i$  dans  $U$ . Les  $D_i$  sont distincts et passent par  $x$ . Quitte à remplacer  $U$  par un voisinage ouvert de  $\bar{x}$  on peut supposer que  $U_\sigma$  est la réunion des  $D'_i$  et que ces derniers sont irréductibles. Il vient que l'image inverse par :

$$p : U \longrightarrow B[T_1, \dots, T_k]/(T_1^{a_1} \dots T_k^{a_k} - \pi)$$

de  $(T_i = 0)$  est l'un des  $D'_j$ . Quitte à réindexer les  $t_i$ , on peut supposer que  $p^{-1}(T_i = 0) = D'_i$ . En d'autre termes  $T_i$  est envoyé sur  $t_i^{e_i} . u_i$  avec  $u_i$  inversible sur  $U$ . Comme  $p$  est lisse, les entiers  $e_i$  sont forcément égaux à 1. En particulier, on a la relation suivante dans  $\mathcal{O}_U$  :

$$\pi = \prod_i (t_i . u_i)^{a_i} = \left( \prod_i t_i^{a_i} \right) . \left( \prod_i u_i^{a_i} \right)$$

Avec  $u = (\prod_i u_i^{a_i})^{-1}$ , on obtient  $\prod_i t_i^{a_i} = u.\pi$ . De plus, quitte à remplacer  $X$  par un voisinage Zariski de  $x$  on peut supposer que les  $D_i$  sont lisses et que leur réunion est un diviseur à croisements normaux puisque c'est le cas dans  $U$ . Ainsi pour prouver la deuxième condition de la définition 3.3.32, il suffit de montrer que  $u \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  est en fait dans  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  (quitte peut-être à rétrécir  $X$ ). En effet si on rétrécit  $X$ , le morphisme  $U \longrightarrow X$  devient fidèlement plat. Mais l'image inverse du  $\mathcal{O}_X$ -module  $(\pi, \prod_i t_i^{a_i})/(\pi)$  est nulle sur  $U$ . Ce qui prouve que  $\mathcal{O}_X \cdot \prod_i t_i^{a_i} \subset \mathcal{O}_X \cdot \pi$ .

Enfin, la troisième condition de 3.3.32 est stable par morphisme lisse. On se ramène aussitôt à la vérifier pour un schéma standard au point de l'intersection des branches. C'est un cas particulier de la troisième situation considérée dans la remarque 3.3.34. C.Q.F.D

Le lemme 3.3.36 n'est pas très utile pour l'étude des systèmes de spécialisation au dessus des  $B$ -schémas  $\pi$ -standards puisqu'il donne une information locale pour la topologie étale. Heureusement, on dispose d'un résultat légèrement plus faible mais local pour la topologie de Nisnevich. Ce résultat ramènera beaucoup de questions sur les  $B$ -schémas à réduction semi-stable à des questions sur les  $B$ -schémas standards :

**PROPOSITION 3.3.38** — *Soit  $X$  un  $B$ -schéma à réduction semi-stable (resp. globalement à réduction semi-stable) de type  $\underline{a}$  en un point  $x$ . On peut trouver un voisinage Nisnevich (resp. Zariski)  $W$  de  $x[R, R^{-1}]$  dans  $X[R, R^{-1}]$  pour lequel il existe :*

- un  $B$ -morphisme lisse  $W \longrightarrow St_{\underline{b}}^B$ , avec  $\underline{b}$  l'uplet obtenu en rajoutant l'entier  $p^m$  à  $\underline{a}$ ,
  - un  $B$ -morphisme lisse  $W \longrightarrow St_{\underline{a}}^{B[V, V^{-1}]}$  avec  $St_{\underline{a}}^{B[V, V^{-1}]}$  le  $B[V, V^{-1}]$ -schéma  $V^{-p^m}.\pi$ -standard.
- où  $m$  est un certain entier plus petit que la valuation  $p$ -adique du p.g.c.d des  $a_i$ .

DEMONSTRATION La première propriété de  $W$  découle de la seconde. Pour cela, il suffit de remarquer l'existence d'une  $B$ -immersion ouverte :

$$St_{\underline{a}}^{B'} \longrightarrow St_{\underline{b}}^B$$

avec  $\underline{b}$  le  $(k + 1)$ -uplet obtenu à partir de  $\underline{a}$  en rajoutant la valeur  $p^m$  à la  $(k + 1)$ -ème place. Le morphisme étant bien entendu celui qui envoie  $T_i$  sur  $T_i$  pour  $i \in \{1, \dots, k\}$  et  $T_{k+1}$  sur  $V$ . On cherchera donc un voisinage  $W$  ayant la seconde propriété.

La question est évidemment locale pour la topologie de Nisnevich (resp. Zariski) en  $x \in X$ . Quitte à remplacer  $X$  par un voisinage Nisnevich (resp. Zariski) de  $x$ , on peut supposer qu'il existe  $k + 1$  sections globales  $t_1, \dots, t_k$  et  $u$  de  $\mathcal{O}_X$  vérifiant les conditions de la définition 3.3.32. On garde alors les notations de 3.3.32 et on notera  $D_i$  la branche d'équation  $t_i = 0$ .

Quitte à permuter les indices, on peut supposer que  $v_p(a_1)$  est minimal parmi les  $v_p(a_i)$ . On se donne un couple  $(m, v) \in \mathbb{N} \times \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  avec  $m$  maximal tel que  $u = v^{p^m}$  et  $m \leq v_p(a_1)$ . Appelons  $a'_1$  l'entier  $a_1/p^m$ . On notera  $O$  l'intersection des  $D_i$ . On montrera qu'un certain voisinage ouvert de  $O[R, R^{-1}]$  dans  $X[R, R^{-1}]$  est lisse au dessus d'un  $B[V, V^{-1}]$ -schéma standard de l'énoncé. On notera dans la suite  $X' = X[R, R^{-1}]$ . On définit les sections  $v', t'_1, \dots, t'_k$  de  $\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$  par :

- $v' = v.R^{a'_1}$  et  $t'_1 = R^{-1}.t_1$ ,
- $t'_i = t_i$  pour  $i \in \{2, \dots, k\}$ ,

de telle sorte qu'on a encore la relation  $\pi = v'^{p^m} \cdot \prod_{i=1}^k t_i^{a_i}$  avec  $v'$  inversible. Remarquons également que le sous-schéma  $D'_i$  défini par l'équation  $t'_i = 0$  est isomorphe à  $D_i[R, R^{-1}]$  et est en particulier lisse. L'intersection des  $D'_i$  sera notée  $O'$  et est isomorphe à  $O[R, R^{-1}]$ .

Notons également  $B'$  le  $B$ -schéma  $B[V, V^{-1}]$  muni de la section  $V^{-p^m}.\pi$ . On définit un  $B$ -morphisme de schémas  $f : X' \longrightarrow B'$  par l'association  $V \rightsquigarrow v'$ . Le morphisme  $f$  est plat. En effet, il se factorise de la manière suivante :

$$X[R, R^{-1}] \xrightarrow{(1)} X[U, U^{-1}] \xrightarrow{(2)} B[V, V^{-1}]$$

le morphisme (1) envoie  $U$  sur  $R^{a'_1}$  et le morphisme (2) envoie  $V$  sur  $U.v$ . Le morphisme (1) est clairement plat. Il suffit donc de prouver que (2) est plat. Mais ceci est clair, puisque en composant à gauche par l'automorphisme de  $X[U, U^{-1}]$  qui consiste à envoyer  $U$  sur  $U.v^{-1}$ , on obtient simplement la projection sur le second facteur de  $X \times_B (\mathbb{G}_{mB})$ .

Considérons d'autre part le  $B'$ -schéma  $(V^{-p^m}.\pi)$ -standard  $St_{\underline{a}'}^{B'} = B'[T_1, \dots, T_k]/(\prod_{i=1}^k T_i^{a_i} - V^{-p^m}.\pi)$ . On définit le  $B'$ -morphisme de l'énoncé :

$$g : X' \longrightarrow St_{\underline{a}'}^{B'}$$

en envoyant  $T_i$  sur  $t'_i$ . Il faut montrer que  $g$  est lisse au voisinage de  $O'$ . Remarquons d'abord que  $g$  est plat au voisinage de  $O'$ . Il suffit donc de prouver que le pull-back de  $g$  suivant l'inclusion de  $O_{\underline{a}'}^{B'} \subset St_{\underline{a}'}^{B'}$  est lisse. Le pull-back en question s'identifie simplement à :

$$g_0 : O[R, R^{-1}] \longrightarrow B/(\pi)[V, V^{-1}]$$

qui consiste à envoyer  $V$  sur  $R^{a'_1}.v$ . Ce morphisme étant à son tour plat, on se ramène à prouver que ses fibres sont lisses. Soit  $\bar{k}$  une clôture algébrique du corps résiduel d'un point de  $B/(\pi)$ . Si  $s$  est un point fermé de  $\text{Spec}(\bar{k}[V, V^{-1}]) = (\mathbb{G}_m)_{\bar{k}}$  correspondant à un élément non nul  $s$  de  $\bar{k}$ , la fibre de  $g_0$  en  $s$  est simplement le  $\bar{k}$ -schéma :

$$(O \times_{B/(\pi)} \bar{k})[R, R^{-1}]/(R^{a'_1}.v - s) = O_{\bar{k}}[R]/((R.s^{-1/a_1})^{a'_1} - v^{-1}) = O_{\bar{k}}[v^{1/a'_1}]$$

On utilise le fait que dans  $\bar{k}$ , l'élément  $s$  admet des racines quelconques. La lissité de  $g$  au voisinage de  $O'$  découlera donc de la lissité du  $\bar{k}$ -schéma  $O_{\bar{k}}[v^{1/a'_1}]$ . Écrivons  $a'_1 = p^l.b$  avec  $l = v_p(a'_1)$  (et  $b$  premier à  $p$ ). Étant donné que l'extraction d'une racine  $b$ -ème d'une section inversible induit un revêtement étale de  $\bar{k}$ -schémas, on se ramène à montrer que  $O_{\bar{k}}[v^{1/p^l}]$  est lisse sur  $\bar{k}$ . Ceci découle immédiatement de la troisième condition de la définition 3.3.32 affirmant que  $O[v^{1/p^l}]$  est lisse sur  $B/(\pi)$ . C.Q.F.D

Notons également la conséquence suivante de la résolution des singularités en caractéristique nulle :

**PROPOSITION 3.3.39** — *On suppose que  $B$  est un schéma d'égale caractéristique nulle. Soit  $X$  un  $B$ -schéma quasi-projectif. Il existe un éclatement  $e : X' \longrightarrow X$  avec  $X'$  un  $B$ -schéma semi-stable. De plus, si  $X_\eta$  est un schéma régulier, on peut choisir le centre de l'éclatement dans le sous-schéma  $X/(\pi)$ .*

DEMONSTRATION En effet, en égal caractéristique zéro, la troisième condition de la définition 3.3.32 découle automatiquement des deux premières. Pour les deux premières, il suffit d'appliquer la deuxième partie de 2.1.167 avec le diviseur  $X/(\pi)$ . C.Q.F.D

**Remarque 3.3.40** — En caractéristique positive, même en admettant la résolution des singularités, la conclusion de la proposition 3.3.39 est fautive déjà pour les  $B$ -schémas finis. Le problème vient de la troisième condition de la définition 3.3.32.

Pour des résultats à "coefficients rationnels" le résultat suivant dû à De Jong remplace efficacement la proposition 3.3.39 :

**PROPOSITION 3.3.41** — *Supposons pour simplifier que  $B/(\pi)$  est le spectre d'un corps. Soit  $X$  un  $B$ -schéma quasi-projectif. Il existe un carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{e} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

de schémas, vérifiant les propriétés suivantes :

- $e$  est une altération,
- $B'$  est un schéma normal, quasi-fini et plat sur  $B$  tel que  $B'/(\pi) \longrightarrow B/(\pi)$  est surjectif,
- $X'$  est un  $B'$ -schéma à réduction semi-stable de type  $(1, \dots, 1)$  en tout ses points (relativement à n'importe quel choix d'uniformisante  $\pi'$  de  $B'$ ).

### 3.3.8 Applications aux systèmes de spécialisation sur une base de dimension 1

On suppose donné un système de spécialisation  $\text{sp}$  de  $H_1$  vers  $H_2$  au dessus de :

$$\eta \xrightarrow{j} B \xleftarrow{i} \sigma$$

avec  $B$  un schéma régulier de dimension 1. On fixe  $\pi \in \Gamma(\mathcal{O}_B)$  une section globale telle que :

- $B/(\pi)$  est non vide, régulier et de dimension 0,
- $\pi$  est inversible sur  $\eta$  et nul sur  $\sigma$ .

En particulier, on dispose d'une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} \sigma & \xrightarrow{i_0} & B/(\pi) \\ & \searrow i & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

Le but de cette sous-section est d'étendre les théorèmes 3.3.10, 3.3.4 et 3.3.6 aux  $B$ -schémas semi-stables généraux voire à tous les  $B$ -schémas sous certaines hypothèses. Nous utiliserons le lemme trivial suivant :

**LEMME 3.3.42** — *Soit  $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$  un 2-foncteur homotopique stable. Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $A \in H(X)$ . Notons  $p$  la projection de  $X \times \mathbb{G}_m$  sur  $X$ . Le foncteur  $p^*$  est conservatif.*



DEMONSTRATION En effet si  $s : X \longrightarrow X \times \mathbb{G}_m$  est la section unité on a  $s^*p^* = \text{id}$ .

C.Q.F.D

On a la généralisation suivante des théorèmes 3.3.10 et 3.3.24 :

**THEOREME 3.3.43** — Soient  $f : X \longrightarrow B$  un  $B$ -schéma à  $\pi$ -réduction semi-stable et  $D$  une branche de  $X_s$  de multiplicité  $m$ . Appelons  $D^0$  l'ouvert de  $D$  complémentaire de la réunion des traces des autres branches de  $X$ . On note  $u$  l'inclusion de  $D$  dans  $X_s$  et  $v$  l'inclusion de  $D^0$  dans  $D$ . On suppose également l'une des deux conditions suivantes satisfaites :

- toute branche irréductible rencontrant  $D$  est de multiplicité  $m$ ,
- $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé.

Alors, le 2-morphisme d'adjonction  $\text{id} \longrightarrow v_*v^*$  évalué en  $u^*\text{sp}_f f_\eta^*$  :

$$[u^*\text{sp}_f f_\eta^*] \longrightarrow v_*v^*[u^*\text{sp}_f f_\eta^*]$$

est inversible.

DEMONSTRATION Montrons d'abord qu'il suffit de montrer le théorème pour  $f' : X' = X \times \mathbb{G}_m \longrightarrow B$  et la branche  $D' = D \times \mathbb{G}_m$ . Notons  $p$  la projection de  $Y \times \mathbb{G}_m$  sur  $Y$  pour un schéma  $Y$  quelconque. On a un carré commutatif de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} p^*[u^*\text{sp}_f f_\eta^*] & \longrightarrow & p^*v_*v^*[u^*\text{sp}_f f_\eta^*] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ [u^*\text{sp}_{f'} f_\eta'^*] & \longrightarrow & v'_*v'^*[u^*\text{sp}_{f'} f_\eta'^*] \end{array}$$

Les flèches verticales sont inversibles puisque  $p$  est lisse. Ainsi, si le 2-morphisme horizontal inférieur est inversible, il en est de même du 2-morphisme horizontal supérieur. On pourra alors conclure à l'aide du lemme 3.3.42.

Ceci dit, par la proposition 3.3.38 on sait qu'au voisinage de tout point de  $D'$ , le  $B$ -schéma  $X'$  est lisse au dessus d'un  $B$ -schéma standard. Lorsque  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé, ceci permet de conclure par le théorème 3.3.24.

Supposons que toutes les branches irréductibles qui rencontrent  $D$  sont de multiplicité  $m$ . Quitte à remplacer  $X$  par un voisinage de  $D$ , on peut supposer que  $X$  est semi-stable de type  $\underline{m}_k$  en tous ses points ( $k$  pouvant varier d'un point à l'autre). On sait par la proposition 3.3.38 que  $X'$  est localement lisse au dessus d'un  $B' = B[V, V^{-1}]$ -schéma  $(V^{-p^m}.\pi)$ -standard  $St_{\underline{m}_k}^{B'}$ . On déduit alors le résultat en appliquant le théorème 3.3.10 à  $\text{sp}_{|B'}$ . C.Q.F.D

On généralise de la même manière le théorème 3.3.4 :

**THEOREME 3.3.44** — Soit  $\text{sp} \longrightarrow \text{sp}'$  un morphisme de systèmes de spécialisation au dessus de  $B$ . Soient  $A$  un objet de  $H_1(\eta)$  et  $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . On suppose pour tout entiers naturels  $n$  et  $m$  inférieurs à  $N$  avec  $m$  une puissance de  $p$ , les morphismes :

$$\text{sp}_{b_n}(b_n)_\eta^* A \xrightarrow{\sim} \text{sp}'_{b_n}(b_n)_\eta^* A \quad \text{et} \quad \text{sp}_{b_n^m}(b_n^m)_\eta^* A \xrightarrow{\sim} \text{sp}'_{b_n^m}(b_n^m)_\eta^* A$$

sont inversibles.

Soit  $f : X \longrightarrow B$  un  $B$ -schéma semi-stable tel que localement pour la topologie de Nisnevich toute branche lisse de  $X$  est de multiplicité inférieure à  $N$ . Alors, le morphisme  $\text{sp}_f f_\eta^* A \longrightarrow \text{sp}'_f f_\eta^* A$  est aussi inversible.

DEMONSTRATION On se ramène immédiatement à démontrer le théorème pour le schéma  $X' = X[R, R^{-1}]$ . Par la proposition 3.3.38, ce schéma est localement lisse au dessus de  $B$ -schémas  $\pi$ -standards de type  $\underline{b}$  avec  $b_i \leq N$ . On conclut à l'aide de 3.3.4. C.Q.F.D

En égale caractéristique nulle, on déduit le résultat suivant :

**THEOREME 3.3.45** — On suppose que  $B$  est d'égale caractéristique nulle et que  $\eta$  est un ouvert de  $B$ . On suppose donnée une classe  $\Lambda_1 \subset \text{Ob}(H_1(\eta))$  quasi-stable par twist de Tate. Soit  $\text{sp} \longrightarrow \text{sp}'$  un morphisme de systèmes de spécialisation au dessus de  $B$ . On suppose que pour tout  $A \in \Lambda_1$  et  $n \in \mathbb{N}$ , les morphismes :

$$\text{sp}_{b_n}(b_n)_\eta^* A \xrightarrow{\sim} \text{sp}'_{b_n}(b_n)_\eta^* A \quad \text{et} \quad \text{sp}_{b_n^1}(b_n^1)_\eta^* A \xrightarrow{\sim} \text{sp}'_{b_n^1}(b_n^1)_\eta^* A$$

sont inversibles. Alors pour tout  $B$ -schéma quasi-projectif  $f : X \longrightarrow B$  et tout  $M \in H_{1, \Lambda_1}^{\text{ct}}(X_\eta)$ , le morphisme :

$$\text{sp}_f(M) \longrightarrow \text{sp}'_f(M)$$

est inversible.

DEMONSTRATION Il suffit bien sûr de traiter le cas où  $M$  est dans un système de générateurs de la sous-catégorie triangulée stable par facteurs directes  $H_{1,\Lambda_1}^{ct}(X_\eta)$ . Cette catégorie est engendrée par les objets de la forme  $g_{\eta*}A_{X'_\eta}(n)$  avec :

- $g : X' \longrightarrow X$  un morphisme projectif,
- $X'$  un  $B$ -schéma régulier à réduction semi-stable,
- $A \in \Lambda$  et  $n$  un entier naturel.

Ceci découle en effet de la proposition 2.2.27. Pour s'en convaincre, on peut poser  $H : \text{Sch}/B \longrightarrow \mathfrak{TA}$  le 2-foncteur qui à  $X/B$  associe  $H(X) = H_1(X_\eta)$ . On vérifie, en utilisant le fait que  $j$  est une immersion ouverte que  $H_{\Lambda_1}^{ct}(X) = H_{1,\Lambda_1}^{ct}(X_\eta)$  pour tout  $B$ -schéma  $X$ . Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.2.27 à  $X$  muni du sous-schéma  $T = X/(\pi)$  et d'utiliser le fait qu'en caractéristique nulle la troisième condition de la définition 3.3.32 est vide.

Ceci dit, il est alors facile de prouver le théorème. On fixe un des générateurs  $g_{\eta*}A_{X'_\eta}(n)$ . On a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{sp}_f g_{\eta*}A_{X'}(n) & \longrightarrow & \text{sp}'_f g_{\eta*}A_{X'}(n) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ g_{\sigma*} \text{sp}_{f \circ g} A_{X'}(n) & \longrightarrow & g_{\sigma*} \text{sp}'_{f \circ g} A_{X'}(n) \end{array}$$

Les flèches verticales sont des isomorphismes car  $g$  est projectif. On voit donc qu'il suffit de prouver que la flèche  $\text{sp}_{f \circ g} A_{X'}(n) \longrightarrow \text{sp}'_{f \circ g} A_{X'}(n)$  est inversible. Ceci découle du théorème 3.3.44. C.Q.F.D

Lorsque  $B$  n'est pas de caractéristique zéro, la preuve du théorème précédent ne s'adapte pas même en supposant la résolution des singularités. Le problème vient des branches ayant des multiplicités divisibles par  $p$ . Ceci suggère une version à coefficients rationnels du théorème précédent. En effet, on a :

**THEOREME 3.3.46** — *On suppose que  $\eta$  est un ouvert de  $B$  et que  $H_1$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. On suppose donnée une classe  $\Lambda_1 \subset \text{Ob}(H_1(\eta))$  quasi-stable par twist de Tate. Soit  $\text{sp} \longrightarrow \text{sp}'$  un morphisme de systèmes de spécialisation au dessus de  $B$ . On suppose que pour tout  $A \in \Lambda_1$  et tout  $B$ -schéma  $B'$  fini plat et régulier, le morphisme :*

$$\text{sp}_{B'}(A_{B'_\eta}) \xrightarrow{\sim} \text{sp}'_{B'}(A_{B'_\eta})$$

est inversible. Alors pour tout  $B$ -schéma quasi-projectif  $f : X \longrightarrow B$  et tout  $M \in H_{1,\Lambda_1}^{ct}(X_\eta)$ , le morphisme :

$$\text{sp}_f(M) \longrightarrow \text{sp}'_f(M)$$

est inversible.

DEMONSTRATION La sous-catégorie triangulée stable par facteurs directes  $H_{\Lambda}^{ct}(X)$  est engendrée par les objets de la forme  $g_{\eta*}A_{X'_\eta}(n)$  avec :

- $g : X' \longrightarrow X$  un morphisme projectif,
- $X'$  un  $B'$ -schéma régulier à réduction semi-stable de type  $(1, \dots, 1)$  avec  $B'/B$  fini, normal et plat.
- $A \in \Lambda$  et  $n$  un entier naturel.

Pour s'en convaincre, on peut utiliser la même astuce que dans la preuve de 3.3.45 qui consiste à introduire le 2-foncteur  $H$  défini sur les  $B$ -schémas par  $H(X) = H_1(X_\eta)$ . Il suffit ensuite de modifier légèrement la preuve du cas respé de la proposition 2.2.27. La modification consiste essentiellement à prendre  $e : \bar{X} \longrightarrow X$  avec en plus  $\bar{X}$  à réduction semi-stable de type  $(1, \dots, 1)$  au dessus d'un  $B$ -schéma  $B'$  fini, normal et plat. Ceci étant possible par le théorème de De Jong. Pour le reste de la démonstration, on raisonne exactement comme pour le théorème 3.3.45. C.Q.F.D

On a également des généralisations du théorème 3.3.6. On suppose donnée pour tout  $\sigma$ -schéma  $T$  une sous-catégorie  $H_2(T)' \subset H_2(T)$  vérifiant l'hypothèse 3.3.5 et stable par facteurs directs. On a :

**THEOREME 3.3.47** — *Soit  $\text{sp}$  une structure de spécialisation au dessus de  $B$  de  $H_1$  vers  $H_2$ . Soit  $A$  un objet de  $H_1(\eta)$  et  $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . On suppose que les objets  $\text{sp}_{b_n}(b_n)_\eta^* A$  et  $\text{sp}_{b_n^m}(b_n^m)_\eta^* A$  sont dans  $H_2(-)'$  pour tous les entiers naturels  $n$  et  $m$  plus petits que  $N$  avec  $m$  une puissance de  $p$ .*

*Soit  $f : X \longrightarrow B$  un  $B$ -schéma globalement à  $\pi$ -réduction semi-stable tel que localement pour la topologie Nisnevich la multiplicité de chaque branche lisse de  $X$  est plus petite que  $N$ . Alors, l'objet  $\text{sp}_f f_\eta^* A$  est dans  $H_2(X_\sigma)'$ .*

DEMONSTRATION Notons  $X'' = X \times_B \mathbb{P}_B^1$ . Le schéma  $X''$  peut-être recouvert par des  $X' = X \times_B \mathbb{G}_{mB}$ . On sait que  $X$  est globalement à réduction semi-stable. La proposition 3.3.38 nous dit alors que le  $B$ -schéma  $X'$  est

localement pour la topologie de Zariski lisse au dessus d'un schéma standard de type  $\underline{b}$  avec  $b_i \leq N$ . Mais la propriété d'appartenir à  $H_2(-)'$  est locale pour la topologie de Zariski (voir le lemme 3.3.31). On déduit que la conclusion du théorème est vraie pour le  $B$ -schéma  $X''$ .

Il s'agit donc de passer de  $X''$  à  $X$ . Notons  $p : X'' \longrightarrow X$  la projection sur le premier facteur. On sait que l'objet  $\mathrm{sp}_{f \circ p}(f \circ p)_\eta^* A$  est dans  $H_2(-)'$ . Par la stabilité de  $H_2(-)'$  par images directes cohomologiques, on déduit que l'objet  $p_{\sigma*} \mathrm{sp}_{f \circ p}(f \circ p)_\eta^* A$  est dans  $H_2(-)'$ . Comme  $p$  est projectif, on déduit la chaîne d'isomorphismes :

$$p_{\sigma*} \mathrm{sp}_{f \circ p}(f \circ p)_\eta^* A \simeq \mathrm{sp}_f p_{\eta*} p_\eta^* f_\eta^* A \simeq \mathrm{sp}_f f_\eta^* A \oplus \mathrm{sp}_f f_\eta^* A(-1)[-2]$$

On conclut en invoquant la stabilité de  $H_2(-)'$  par passage aux facteurs directs.

C.Q.F.D

On notera deux corollaires en égale caractéristique nulle :

**COROLLAIRE 3.3.48** — *On suppose que  $B$  est d'égale caractéristique nulle et que  $\eta$  est un ouvert de  $B$ . En plus de l'hypothèse 3.3.5 et la stabilité par facteurs directs, on supposera que les  $H_2(-)'$  sont des sous-catégories triangulées. Soit  $\Lambda_1 \subset H_1(\eta)$  une classe quasi-pure. On suppose finalement que les objets  $\mathrm{sp}_{b_n}(b_n)_\eta^* A$  et  $\mathrm{sp}_{b_n^1}(b_n^1)_\eta^* A$  sont dans  $H_2(-)'$  pour tout  $A \in \Lambda_1$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, pour tout  $B$ -schémas quasi-projectif  $f : X \longrightarrow B$  et tout objet  $M$  de  $H_{1,\Lambda_1}^{\mathrm{ct}}(X_\eta)$ , l'objet  $\mathrm{sp}_f(M)$  est dans  $H_2(X_\sigma)'$ .*

DEMONSTRATION Étant donné que  $H_2(X_\sigma)$  est une sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs, il suffira de vérifier l'assertion pour  $M$  variant dans un système de générateurs de la sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs  $H_{1,\Lambda_1}^{\mathrm{ct}}(X_\eta)$ . On peut donc supposer  $M$  de la forme  $g_{\eta*} A_{X'_\eta}(n)$  avec :

- $g : X' \longrightarrow X$  un morphisme projectif,
- $X'$  un  $B$ -schéma régulier globalement à réduction semi-stable<sup>5</sup>,
- $A \in \Lambda$  et  $n$  un entier naturel.

Comme  $g$  est projectif, on dispose d'un isomorphisme :

$$\mathrm{sp}_f g_{\eta*} A_{X'_\eta}(n) \simeq g_{\sigma*} \mathrm{sp}_{f \circ g}(f \circ g)_\eta^* A(n)$$

La stabilité des  $H_2(-)'$  par images directes cohomologiques et twist de Tate, nous ramène à montrer que  $\mathrm{sp}_{g \circ f}(g \circ f)_\eta^* A$  est dans  $H_2(X'_\sigma)'$ . Ceci découle du théorème 3.3.47 et du fait que  $X'$  est à réduction semi-stable.

C.Q.F.D

Pour le second corollaire, on utilisera plutôt la variante duale de 3.3.47. Ainsi, on supposera donné pour tout  $\sigma$ -schéma quasi-projectif  $T$  une sous-catégorie  $H_2(T)'' \subset H_2(T)$  vérifiant l'hypothèse 3.3.7. On a :

**COROLLAIRE 3.3.49** — *Soit  $\mathrm{sp}$  un système de spécialisation au dessus de  $B$  de  $H_1$  vers  $H_2$  et  $\mathcal{G}_1$  un ensemble d'objets  $H_1(\eta)$ . On suppose les conditions suivantes satisfaites :*

- $B$  est d'égale caractéristique nulle et  $\eta$  est un ouvert de  $B$ .
- Le 2-foncteur  $H_2$  admet des petites sommes et en plus de l'hypothèse 3.3.7, les sous-catégories  $H_2(-)''$  sont stables par petites sommes et par passage aux facteurs directs.
- Le 2-foncteur  $H_1$  et l'ensemble  $\mathcal{G}_1$  vérifient l'hypothèse 2.2.58. De plus, les foncteur  $\mathrm{sp}_?$  commutent aux petites sommes.
- L'ensemble  $\mathcal{G}_1$  est faiblement  ${}^p t$ -pure au sens de la définition 2.2.67.

Supposons que les objets  $\mathrm{sp}_{b_n}(b_n)_\eta^* A$  et  $\mathrm{sp}_{b_n^1}(b_n^1)_\eta^* A$  sont dans  $H_2(-)'$  pour tout entiers naturels  $n$ . Alors pour tout  $B$ -schéma quasi-projectif  $f : X \longrightarrow B$  le foncteur  $\mathrm{sp}_f$  envoie la sous-catégorie  ${}^p(H_1)_{\geq 0}(X_\eta)$  dans  $H_2(X_\sigma)''$ .

DEMONSTRATION La sous-catégorie  $H_2(X_\sigma)''$  étant suspendue et stable par petites sommes il suffira de prouver le corollaire pour un ensemble de générateurs de la sous-catégorie suspendue avec petites sommes  ${}^p(H_1)_{\geq 0}(X_\eta)$ . Par la proposition 2.2.69, un tel ensemble est donné par les objets de la forme  $g_{\eta!} g_\eta^! f_\eta^! A(n)[n]$  avec :

- $g : X' \longrightarrow X$  un morphisme projectif avec  $X'$  un  $B$ -schéma globalement à réduction semi-stable,
- $A \in \mathcal{G}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

Comme  $g$  est projectif, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{sp}_f g_{\eta!} g_\eta^! f_\eta^! A(n)[n] \simeq g_{\sigma!} \mathrm{sp}_{f \circ g}(f \circ g)_\eta^! A(n)[n]$$

La stabilité des  $H_2(-)''$  par les opérations images directes à supports compacts, nous ramène à prouver que  $\mathrm{sp}_{f \circ g}(f \circ g)_\eta^! A$  est dans  $H_2(X'_\sigma)''$ . Ceci découle du fait que  $X'$  est globalement à réduction semi-stable et la version duale de 3.3.47. Le corollaire est prouvé.

C.Q.F.D

**Remarque 3.3.50** — Le résultat précédent est particulièrement intéressant lorsque les catégories  $H_2(-)''$  sont les catégories d'objets  ${}^p t$ -positifs  ${}^p(H_2)_{\geq 0}(-)$  de la  $t$ -structure perverse engendrée par un ensemble  $\mathcal{G}_2$ . Le corollaire 3.3.49 fournit alors un critère simple de  ${}^p \bar{t}$ -positivité des foncteurs  $\mathrm{sp}_f$ .

<sup>5</sup>En effet la résolution des singularités utilisée dans la preuve de 2.2.27, fournit des  $B$ -schémas globalement à réduction semi-stable.

### 3.4 Le système de spécialisation $\Upsilon$

Soit  $S$  un schéma de base. On se donne un dérivateur algébrique homotopique et stable :

$$\mathbb{H} : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{IA}$$

On notera  $\mathbb{H}$  le 2-foncteur homotopique stable donné par  $\mathbb{H}(X) = \mathbb{H}(X, \mathbf{e})$  pour tout  $S$ -schémas quasi-projectif  $X$ .

Dans cette section, on va construire un système de spécialisation  $\Upsilon$  de base  $\mathbb{A}_S^1$  sur  $\mathbb{H}$ . Ce système de spécialisation est une variante du système de spécialisation des cycles proches  $\Psi$ . Cette variante présente parfois certains avantages du moins lorsqu'on travaille à coefficients rationnels.

#### 3.4.1 Le schéma cosimplicial $(\mathcal{A}, \Delta)$

Le système de spécialisation  $\Upsilon$  s'obtient à partir du système de spécialisation canonique  $\chi$  par application de la construction 3.2.3 à un certain diagramme de  $\mathbb{G}_m$ -schémas bien choisi. Ce paragraphe est consacré à l'introduction dudit diagramme.

Rappelons que  $\Delta$  désigne la catégorie des ordinaux finis. Les objets de  $\Delta$  sont les catégories directes :

$$\mathbf{n} = \{0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n\}$$

Les morphismes de  $\Delta$  sont les foncteurs. Si  $\mathcal{C}$  est un catégorie, on note  $\Delta^{\text{op}}\mathcal{C}$  la catégorie des foncteurs covariants  $\Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ . Les objets de  $\Delta^{\text{op}}\mathcal{C}$  sont appelés les objets simpliciaux de  $\mathcal{C}$ . De même, on note  $\Delta\mathcal{C}$  la catégorie des foncteurs covariants  $\Delta \longrightarrow \mathcal{C}$ . Les objets de  $\Delta\mathcal{C}$  sont appelés les objets cosimpliciaux de  $\mathcal{C}$ . Ainsi, un schéma cosimplicial est un diagramme de schémas dont la catégorie d'indices est  $\Delta$ .

La catégorie  $\Delta$  admet une présentation explicite en termes de générateurs et relations. En effet, elle est engendrée par deux types de flèches  $d^i$  et  $s^j$  :

- Pour  $0 \leq i \leq n + 1$ , le foncteur  $d^i : \mathbf{n} \longmapsto \mathbf{n} + \mathbf{1}$  est caractérisé par les propriétés d'être injectif sur les objets et d'éviter l'objet  $i$  de  $\mathbf{n} + \mathbf{1}$ .
- Pour  $0 \leq j \leq n - 1$ , le foncteur  $s^j : \mathbf{n} \longmapsto \mathbf{n} - \mathbf{1}$  est caractérisé par les propriétés d'être surjectif sur les objets et de confondre les objets  $j$  et  $j + 1$  de  $\mathbf{n}$ .

Ainsi, un objet simplicial ou cosimplicial est déterminé par l'action des  $d^i$  et  $s^j$ . La construction suivante est bien connue :

**LEMME 3.4.1** — **A-** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie admettant des produits directs finis. Supposons donné un diagramme dans  $\mathcal{C}$  :

$$(3.23) \quad \begin{array}{ccc} & & V \\ & & \downarrow g \\ U & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Il existe un objet cosimplicial  $U \tilde{\times}_B V : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}$  défini de la manière suivante :

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $U \tilde{\times}_B V(\mathbf{n}) = U \times B \times \dots \times B \times V$  (le nombre de facteurs  $B$  étant  $n$ ).
2. Fixons un entier  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $u \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, U)$ ,  $v \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, V)$  et  $b_1, \dots, b_n \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$  des  $X$ -points à valeurs dans  $U$ ,  $V$  et  $B$  respectivement. L'action des  $d^i$  et  $s^j$  sur les foncteurs de points est donnée par les formules :

- (a)  $d^0 : \mathbf{n} \longmapsto \mathbf{n} + \mathbf{1}$  agit par  $d^0(u, b_1, \dots, b_n, v) = (u, f(u), b_1, \dots, b_n, v)$ ,
- (b)  $d^i : \mathbf{n} \longmapsto \mathbf{n} + \mathbf{1}$  agit par  $d^i(u, b_1, \dots, b_n, v) = (u, b_1, \dots, b_i, b_i, \dots, b_n, v)$  pour  $1 \leq i \leq n$ ,
- (c)  $d^{n+1} : \mathbf{n} \longmapsto \mathbf{n} + \mathbf{1}$  agit par  $d^{n+1}(u, b_1, \dots, b_n, v) = (u, b_1, \dots, b_n, g(v), v)$ ,
- (d)  $s^j : \mathbf{n} \longmapsto \mathbf{n} - \mathbf{1}$  agit par  $s^j(u, b_1, \dots, b_n, v) = (u, b_1, \dots, \widehat{b_{j+1}}, \dots, b_n, v)$  pour  $0 \leq j \leq n - 1$ .

De plus, cette construction s'étend en un foncteur  $\downarrow\mathcal{C} \longrightarrow \Delta\mathcal{C}$  de la catégorie des diagrammes de type (3.23) de  $\mathcal{C}$  dans celle est objets cosimpliciaux de  $\mathcal{C}$ .

**B-** Gardons les notations ci-dessus. Supposons en plus que la flèche  $f$  est inversible. Le morphisme d'objets cosimpliciaux  $\text{pr}_2 : U \tilde{\times}_B V \longrightarrow V$  est une équivalence d'homotopie (cosimpliciale).

**DEMONSTRATION** La vérification du fait que les formules du **A** définissent bien un objet cosimplicial dans  $\mathcal{C}$  est classique. Le lecteur pourra consulter [BK72]. On démontre uniquement la partie **B**. L'inverse à homotopie près de  $\text{pr}_2 : U \tilde{\times}_B V \longrightarrow V$  est donné par un morphisme  $s : V \longrightarrow U \tilde{\times}_B V$  défini au niveau de  $\mathbf{n}$  par :

$$s(v) = (f^{-1}g(v), g(v), \dots, g(v), v)$$

pour tout  $X$ -point  $v$  de  $V$ . Il est en effet clair que  $pr_2 \circ s$  est l'identité. Montrons que  $s \circ pr_2$  est cohomotope à l'identité de  $U \tilde{\times}_B V$ . En termes explicites, il s'agit de définir pour toute flèche  $l : \underline{\mathbf{n}} \mapsto \underline{\mathbf{1}}$  un morphisme :

$$h_l : U \tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{n}}) \longrightarrow U \tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{1}})$$

tel que :

- $h_0 = s \circ pr_2(\underline{\mathbf{n}})$  et  $h_1 = \text{id}_{U \tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{n}})}$  (où l'on a noté 0 et 1 pour désigner les applications constantes vers  $\underline{\mathbf{1}}$  de valeurs respectives 0 et 1),
- pour toute suite :  $\underline{\mathbf{m}} \xrightarrow{a} \underline{\mathbf{n}} \xrightarrow{l} \underline{\mathbf{1}}$ , le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U \tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{m}}) & \xrightarrow{h_{l \circ a}} & U \tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{m}}) \\ a \downarrow & & \downarrow a \\ U \tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{n}}) & \xrightarrow{h_l} & U \tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{n}}) \end{array}$$

On définit notre homotopie sur les  $X$ -points par :

- Pour l'application constante  $0 : \underline{\mathbf{n}} \mapsto \underline{\mathbf{1}}$ , on prendra  $h_0(u, b_1, \dots, b_n, v) = (f^{-1}g(v), g(v), \dots, g(v), v)$ .
- Pour  $1 \leq i \leq n$ , notons  $l_i : \underline{\mathbf{n}} \mapsto \underline{\mathbf{1}}$  l'application croissante telle que  $l_i(i-1) = 0$  et  $l_i(i) = 1$ . On prendra  $h_{l_i}(u, b_1, \dots, b_n, v) = (f^{-1}(b_i), b_i, \dots, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n, v)$ .
- Pour l'application constante  $1 : \underline{\mathbf{n}} \mapsto \underline{\mathbf{1}}$ , on prendra  $h_1(u, b_1, \dots, b_n, v) = (u, b_1, \dots, b_n, v)$ .

Il est facile de vérifier que ces données définissent bien une cohomotopie entre  $s \circ pr_2$  et  $\text{id}_{U \tilde{\times}_B V}$ .

C.Q.F.D

**Remarque 3.4.2** — Comme pour le produit fibré habituel, on dispose de deux projections dans  $\Delta\mathcal{C}$  :

$$\begin{array}{ccc} U \tilde{\times}_B V & \xrightarrow{pr_2} & V \\ pr_1 \downarrow & & \\ U & & \end{array}$$

où les objets  $U$  et  $V$  sont considérés comme des objets cosimpliciaux constants. Par contre, le carré :

$$\begin{array}{ccc} U \tilde{\times}_B V & \xrightarrow{pr_2} & V \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow g \\ U & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

n'est pas commutatif en général.

**Remarque 3.4.3** — L'objet cosimplicial  $U \tilde{\times}_B V$  peut-être considéré comme le bon modèle du point de vue homotopique de l'espace des lacets de  $B$  ayant la première extrémité dans  $U$  et la deuxième dans  $V$ .

**DEFINITION 3.4.4** — On définit le  $S$ -schéma cosimplicial  $\mathcal{A}_S$ , en appliquant le lemme 3.4.1 au diagramme de  $S$ -schémas suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & S \\ & & \downarrow 1 \\ \mathbb{G}_{m_S} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{G}_{m_S} \end{array}$$

Ainsi, on a  $\mathcal{A}_S(\underline{\mathbf{n}}) = (\mathbb{G}_{m_S} \tilde{\times}_{\mathbb{G}_{m_S}} S)(\underline{\mathbf{n}}) = (\mathbb{G}_m)_S^{n+1}$ .

Le  $S$ -schéma cosimplicial  $\mathcal{A}_S$  sera des fois considéré comme un diagramme de  $S$ -schémas indicé par  $\Delta$ . Il sera alors noté  $(\mathcal{A}_S, \Delta)$ . La seconde partie du lemme 3.4.1 nous dit que :

**COROLLAIRE 3.4.5** — Le morphisme d'objets cosimpliciaux :

$$pr_2 : \mathcal{A}_S = \mathbb{G}_{m_S} \tilde{\times}_{\mathbb{G}_{m_S}} S \longrightarrow S$$

est une équivalence d'homotopie cosimpliciale.

Le corollaire 3.4.5 dit que du point de vue homotopique, l'espace cosimplicial  $(\mathcal{A}, \Delta)$  est contractile. Cet espace ne devient intéressant que lorsque qu'on considère la projection sur le premier facteur :

**DEFINITION 3.4.6** — La projection sur le premier facteur  $pr_1 : \mathbb{G}_{m_S} \tilde{\times}_{\mathbb{G}_{m_S}} S \longrightarrow \mathbb{G}_{m_S}$  induit un morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas :

$$\theta : (\mathcal{A}_S, \Delta) \longrightarrow (\mathbb{G}_{m_S}, \Delta)$$

Le 1-morphisme  $\theta$  sera appelé le revêtement universel unipotent de  $\mathbb{G}_{m_S}$ .

**Remarque 3.4.7** — En topologie, l'espace cosimplicial  $\mathbb{G}_{m_S} \tilde{\times}_{\mathbb{G}_{m_S}} S$  est un modèle pour l'espace des "chemins" sur  $\mathbb{G}_{m_S}$  dont la première extrémité est libre et la seconde égale à la section unité. Ceci donne une explication informelle du fait que  $\mathcal{A}_S$  est cosimplicialement contractile. De plus, la classe fondamentale  $\theta$  joue le rôle du morphisme "évaluation de la première extrémité d'un chemin". Ceci fait de  $\mathcal{A}_S$  une sorte de revêtement universel de  $\mathbb{G}_m$ . D'où notre terminologie.

Cette interprétation, qui nous a été expliquée par Markus Spitzweck, est venue après notre construction des foncteurs cycles proches qui à la base était inspirée par des travaux de Rapoport-Zink. Son intérêt, est de donner une justification topologique à notre définition des foncteurs  $\Upsilon$ .

### 3.4.2 Définition de $\Upsilon$ . Normalisation

Rappelons qu'on s'est donné un dérivateur algébrique homotopique stable  $\mathbb{H} : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{TA}$ . Cette donnée sera utilisée dans cette section et la suivante pour construire des systèmes de spécialisation dans le 2-foncteur homotopique stable  $\mathbb{H}(-) = \mathbb{H}(-, \mathbf{e})$ . Ces systèmes de spécialisation seront définis au dessus de la base  $(\mathbb{A}_S^1, j, i)$  :

$$(3.24) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{G}_{m_S} & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_S^1 \xleftarrow{i} S \\ & \searrow q & \downarrow p \\ & & S \end{array}$$

Ceci ne constitue pas une vraie restriction, puisque chaque fois qu'on se donne un  $S$ -schéma quasi-projectif  $T$  muni d'une section  $\pi \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ , on en déduit des systèmes de spécialisation au dessus de  $T$  par restriction suivant le morphisme  $T \longrightarrow \mathbb{A}_S^1$  qui envoie l'indéterminée sur  $\pi$ . Ainsi, nos systèmes de spécialisation se définissent au dessus des bases très générales. Ceci dit, la plupart des résultats importants seront prouvés sous l'hypothèse que  $S$  est le spectre d'un corps de caractéristique nulle. Dans la suite, il nous arrivera d'adopter les notations suivantes :

$$B = \mathbb{A}_S^1, \quad \eta = \mathbb{G}_{m_S}, \quad \sigma = i(S) \quad \text{et} \quad \eta \xrightarrow{j} B \xleftarrow{i} \sigma$$

Ceci aura l'avantage d'alléger les notations et de faciliter la traduction des résultats établis dans les sections précédentes.

Notre point de départ, sera le système de spécialisation canonique  $\chi$  dans  $\mathbb{H}$  :

**DEFINITION 3.4.8** — Avec les notations de la définition 3.2.3, on appellera  $\Upsilon$  le système de spécialisation  $\mathcal{A}_S \bullet \chi$  où  $\mathcal{A}_S$  est vu comme un diagramme de  $\mathbb{G}_{m_S}$ -schémas via le revêtement universel  $(\theta, p_\Delta) : (\mathcal{A}_S, \Delta) \longrightarrow (\mathbb{G}_{m_S}, \mathbf{e})$ . Les foncteurs  $\Upsilon_f$  seront appelés les foncteurs cycles proches unipotents. Lorsque  $\mathbb{H}$  est le 2-foncteur **SH**, on parlera alors de foncteurs motif proche unipotent.

Rappelons que pour un  $B$ -schéma  $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_S^1$ , on a noté  $\theta_f$  le pull-back de  $\theta$  suivant  $f_\eta$ . On a :

$$\Upsilon_f = (p_\Delta)_\# \chi_{(f, p_\Delta)}(\theta_f)_*(\theta_f, p_\Delta)^*$$

Remarquons que  $\mathcal{A}_S(\mathbf{e}) = \mathbb{G}_{m_S}$  et que  $\theta(\mathbf{e})$  est l'identité. Par la définition 3.2.13, le foncteur  $\underline{\mathbf{0}} : \mathbf{e} \longrightarrow \Delta$  induit un morphisme de systèmes de spécialisation  $\chi \longrightarrow \Upsilon$ . Rappelons qu'au niveau de  $f$ , ce morphisme est donné par la composée :

$$\chi_f \xrightarrow{\sim} \chi_f \underline{\mathbf{0}}^*(\theta_f, p_\Delta)^* \xrightarrow{\sim} \chi_f \underline{\mathbf{0}}^*(\theta_f)_*(\theta_f, p_\Delta)^* \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbf{0}}^* \chi_{(f, p_\Delta)}(\theta_f)_*(\theta_f, p_\Delta)^* \longrightarrow (p_\Delta)_\# \chi_{(f, p_\Delta)}(\theta_f)_*(\theta_f, p_\Delta)^*$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on notera  $e_n : \mathbb{A}_S^1 \longrightarrow \mathbb{A}_S^1$  le morphisme d'élévation à la puissance  $n$ -ème. Remarquons que  $e_n$  est isomorphe au  $B$ -schéma  $b_n : B_n \longrightarrow B$  (voir la définition 3.3.2). Le résultat suivant est à la base de toutes les propriétés spéciales aux systèmes de spécialisation  $\Upsilon$  et  $\Psi$  (voir la section suivante).

**PROPOSITION 3.4.9** — 1- Avec les notations du diagramme (3.24), la composée des 2-morphismes suivants :

$$\text{id} \xrightarrow{\sim} i^* p^* \longrightarrow i^* j_* j^* p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{\text{id}} q^* \longrightarrow \Upsilon_{\text{id}} q^*$$

est inversible.

2- Supposons que le 2-foncteur  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^\times$ , la composée des 2-morphismes suivants :

$$\text{id} \longrightarrow i^*(e_n)^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*(e_n)^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{e_n}(e_n)_\eta^*q^* \longrightarrow \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*$$

est inversible.

Pour prouver cette proposition, on aura besoin de quelques préliminaires. Soit  $(\pi, p_J) : (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathbb{G}_{mS}, \mathbf{e})$  un morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas quasi-projectifs. On suppose donné un objet  $o \in \mathcal{J}$  tel que  $\pi(o) : \mathcal{F}(o) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_{mS}$  est un isomorphisme. Ceci permet de définir un morphisme  $\chi \longrightarrow \mathcal{F} \bullet \chi$  de systèmes de spécialisation. On définit d'autre part une transformation naturelle  $q_* \longrightarrow \chi_{\text{id}}$  par la composée :

$$q_* \xrightarrow{\sim} p_*j_* \longrightarrow p_*i_*i^*j_* \xrightarrow{\sim} i^*j_* = \chi_{\text{id}}$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 i^*p^* & \longrightarrow & i^*j_*j^*p^* & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}q^* & \xleftarrow{\sim} & o^*\chi_{(\text{id}, p_J)}(\pi)_*(\pi, p_J)^*q^* & \longrightarrow & (p_J)_\# \chi_{(\text{id}, p_J)}(\pi)_*(\pi, p_J)^*q^* \\
 \uparrow & & \text{(1)} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{id} & \longrightarrow & q_*q^* & \xleftarrow{\sim} & o^*(q, \text{id}_J)_*(\pi)_*(\pi, p_J)^*q^* & \longrightarrow & (p_J)_\#(q, \text{id}_J)_*(\pi)_*(\pi, p_J)^*q^* & & \\
 & \searrow & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & o^*(q \circ \pi)_*(q \circ \pi)^*(p_J)^* & \longrightarrow & (p_J)_\#(q \circ \pi)_*(q \circ \pi)^*(p_J)^* & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & o^*(p_J)^* & \longrightarrow & (p_J)_\#(p_J)^* & & 
 \end{array}$$

Ce diagramme est commutatif. En effet, tous ses sous-diagrammes, à part (1), sont trivialement commutatifs. La commutation du sous-diagramme (1) est laissée en exercice. On a ainsi le lemme suivant :

**LEMME 3.4.10** — Pour que la composée :

$$\text{id} \longrightarrow i^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*p^* \longrightarrow \chi_{\text{id}}q^* \longrightarrow (\mathcal{F} \bullet \chi)_{\text{id}}q^*$$

soit inversible, il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

1. Le 2-morphisme de counité  $(p_J)_\#(p_J)^* \longrightarrow \text{id}$  est inversible.
2. Le 2-morphisme d'unité  $(p_J)^* \longrightarrow (q \circ \pi)_*(q \circ \pi)^*(p_J)^*$  devient inversible après application de  $(p_J)_\#$ .
3. Pour tout  $a \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ , le morphisme  $\pi(a) : \mathcal{F}(a) \longrightarrow \mathbb{G}_{mS}$  est isomorphe au pull-back d'un  $S$ -schéma via la projection  $q : \mathbb{G}_{mS} \longrightarrow S$ .

DEMONSTRATION En utilisant le diagramme commutatif ci-dessus, on se ramène à montrer que le composée :

$$\text{id} \simeq o^*(p_J)^* \longrightarrow (p_J)_\#(p_J)^* \longrightarrow (p_J)_\#(q\pi)_*(q\pi)^*(p_J)^* \simeq (p_J)_\#(q, \text{id}_J)_*(\pi, p_J)^*q^* \longrightarrow (p_J)_\#\chi_{(\text{id}, p_J)}(\pi, p_J)^*q^*$$

est inversible. Il suffit donc de prouver que les trois 2-morphismes suivants sont inversibles :

1. Le 2-morphisme  $\text{id} \simeq o^*(p_J)^* \longrightarrow (p_J)_\#(p_J)^*$ .
2. Le 2-morphisme  $(p_J)_\#(p_J)^* \longrightarrow (p_J)_\#(q\pi)_*(q\pi)^*(p_J)^*$ .
3. Le 2-morphisme  $(q, \text{id}_J)_*(\pi)_*(\pi, p_J)^*q^* \longrightarrow \chi_{(\text{id}, p_J)}(\pi)_*(\pi, p_J)^*q^*$ .

On prouvera que ces 2-morphismes sont inversibles en utilisant les conditions de l'énoncé. Il est clair que la seconde condition est simplement une reformulation du fait que le second 2-morphisme ci-dessus est inversible. Pour le premier 2-morphisme, il suffira de remarquer que la composée  $\text{id} \simeq o^*(p_J)^* \longrightarrow (p_J)_\#(p_J)^*$  est une section du morphisme de counité  $(p_J)_\#(p_J)^* \longrightarrow \text{id}$ . Pour terminer, il reste à prouver que :

$$a^*(q, \text{id}_J)_*(\pi)_*(\pi, p_J)^*q^* \longrightarrow a^*\chi_{(\text{id}, p_J)}(\pi)_*(\pi, p_J)^*q^*$$

est inversible pour tout  $a \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . On se ramène immédiatement à montrer que les 2-morphismes :

$$q_*\pi(a)_*\pi(a)^*q^* \longrightarrow \chi_{\text{id}}\pi(a)_*\pi(a)^*q^*$$

sont inversibles. On sait qu'il existe un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(a) & \xrightarrow{q'} & Y_a \\ \pi(a) \downarrow & & \downarrow f_a \\ \mathbb{G}_{mS} & \xrightarrow{q} & S \end{array}$$

En appliquant le théorème de changement de base par un morphisme lisse, on se ramène immédiatement à montrer que le 2-morphisme :

$$q_*q^*f_a^*f_a^* \longrightarrow \chi_{\text{id}}q^*f_a^*f_a^*$$

est inversible. Ceci découlera donc de l'inversibilité de :

$$q_*q^* \longrightarrow \chi_{\text{id}}q^*$$

Pour démontrer cela, le plus simple est de considérer le morphismes de 2-triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} p_*i_*i^!p^* & \xrightarrow{\sim} & p_*p^* & \longrightarrow & p_*j_*j^*p^* & \longrightarrow & p_*i_*i^!p^*[+1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ p_*i_*i^!p^* & \longrightarrow & p_*i_*i^*p^* & \longrightarrow & p_*i_*i^*j_*j^*p^* & \longrightarrow & p_*i_*i^!p^*[+1] \end{array}$$

avec  $p$  la projection de la droite affine (voir le diagramme (3.24)). Ceci nous ramène à montrer que  $p_*p^* \longrightarrow p_*i_*i^*p^* \simeq \text{id}$  est inversible. Il suffit alors de remarquer que ce 2-morphisme est une rétraction au 2-morphisme d'unité  $\text{id} \longrightarrow p_*p^*$  qui est inversible par l'axiome d'homotopie. C.Q.F.D

Le lemme ci-dessous et plus précisément son corollaire, jouera un rôle clef dans la preuve de la proposition 3.4.9 :

**LEMME 3.4.11** — *On suppose donnés deux morphismes de  $S$ -schémas cosimpliciaux :*

$$f_0, f_1 : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$$

*On notera  $(\pi^{\mathcal{F}}, p_{\Delta})$  et  $(\pi^{\mathcal{G}}, p_{\Delta})$  les projections respectives de  $(\mathcal{F}, \Delta)$  et  $(\mathcal{G}, \Delta)$  sur  $(S, \mathbf{e})$ . On suppose que  $f_0$  est cosimplicialement cohomotope à  $f_1$ . Alors pour tout objet  $A$  de  $\mathbb{H}(S, \Delta)$ , les deux composées :*

$$\begin{aligned} (\pi^{\mathcal{F}})_*(\pi^{\mathcal{F}})^*A &\longrightarrow (\pi^{\mathcal{F}})_*f_{0*}f_0^*(\pi^{\mathcal{F}})^*A \xrightarrow{\sim} (\pi^{\mathcal{G}})_*(\pi^{\mathcal{G}})^*A \\ (\pi^{\mathcal{F}})_*(\pi^{\mathcal{F}})^*A &\longrightarrow (\pi^{\mathcal{F}})_*f_{1*}f_1^*(\pi^{\mathcal{F}})^*A \xrightarrow{\sim} (\pi^{\mathcal{G}})_*(\pi^{\mathcal{G}})^*A \end{aligned}$$

*sont simplicialement homotopes dans  $\mathbb{H}(S, \Delta)$  au sens de la définition 2.1.56.*

**DEMONSTRATION** Notons  $q : \Delta/\underline{1} \longrightarrow \Delta$  la projection canonique et  $s_i : \Delta \longrightarrow \Delta/\underline{1}$  les sections habituelles. Dire que  $f_1$  et  $f_2$  sont cosimplicialement cohomotopes, équivaut à dire qu'il existe un morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas :

$$(h, \text{id}_{\Delta/\underline{1}}) : (\mathcal{G} \circ q, \Delta/\underline{1}) \longrightarrow (\mathcal{F} \circ q, \Delta/\underline{1})$$

qui se restreint à  $f_i$  suivant  $s_i$ .

Notons  $\pi'^{\mathcal{F}}$  et  $\pi'^{\mathcal{G}}$  les projections de  $\mathcal{F} \circ q$  et  $\mathcal{G} \circ q$  sur  $(S, \Delta/\underline{1})$ . On en déduit un 2-morphisme :

$$q^*(\pi^{\mathcal{F}})_*(\pi^{\mathcal{F}})^*A \xrightarrow{\sim} (\pi'^{\mathcal{F}})_*(\pi'^{\mathcal{F}})^*q^*A \longrightarrow (\pi'^{\mathcal{F}})_*h_*h^*(\pi'^{\mathcal{F}})^*q^*A \xrightarrow{\sim} (\pi'^{\mathcal{G}})_*(\pi'^{\mathcal{G}})^*q^*A \xleftarrow{\sim} q^*(\pi^{\mathcal{G}})_*(\pi^{\mathcal{G}})^*A$$

Par adjonction, ce 2-morphisme fournit une flèche :

$$q_{\#}q^*(\pi^{\mathcal{F}})_*(\pi^{\mathcal{F}})^*A \longrightarrow (\pi^{\mathcal{G}})_*(\pi^{\mathcal{G}})^*A$$

On vérifie aisément que cette flèche fournit bien une homotopie au sens de 2.1.56 entre les deux flèches de l'énoncé. Le lemme est démontré. C.Q.F.D



**COROLLAIRE 3.4.12** — Soit  $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$  un morphisme de  $S$ -schémas cosimpliciaux. On notera  $(\pi^{\mathcal{F}}, p_{\Delta})$  et  $(\pi^{\mathcal{G}}, p_{\Delta})$  les projections respectives de  $(\mathcal{F}, \Delta)$  et  $(\mathcal{G}, \Delta)$  sur  $(S, \mathbf{e})$ . Supposons que  $f$  est une équivalence d'homotopie cosimpliciale. Alors la composée :

$$(\pi^{\mathcal{F}})_*(\pi^{\mathcal{F}})^* \longrightarrow (\pi^{\mathcal{F}})_* f_* f^* (\pi^{\mathcal{F}})^* \xrightarrow{\sim} (\pi^{\mathcal{G}})_*(\pi^{\mathcal{G}})^*$$

devient inversible après application de  $(p_{\Delta})_{\#}$ .

DEMONSTRATION Soit  $g : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$  un inverse à homotopie près de  $f$ . La composée :

$$(\pi^{\mathcal{F}})_*(\pi^{\mathcal{F}})^* \longrightarrow (\pi^{\mathcal{F}})_* f_* f^* (\pi^{\mathcal{F}})^* \longrightarrow (\pi^{\mathcal{G}})_*(\pi^{\mathcal{G}})^* \longrightarrow (\pi^{\mathcal{G}})_* g_* g^* (\pi^{\mathcal{G}})^* \longrightarrow (\pi^{\mathcal{F}})_*(\pi^{\mathcal{F}})^*$$

est clairement égale à :

$$(\pi^{\mathcal{F}})_*(\pi^{\mathcal{F}})^* \longrightarrow (\pi^{\mathcal{F}})_*(f \circ g)_*(f \circ g)^*(\pi^{\mathcal{F}})^*$$

Mais  $(f \circ g)$  est cohomotope à l'identité de  $\mathcal{F}$ . Il vient par le lemme 3.4.11 et la proposition 2.1.57 que la composée :

$$(p_{\Delta})_{\#}(\pi^{\mathcal{F}})_*(\pi^{\mathcal{F}})^* \longrightarrow (p_{\Delta})_{\#}(\pi^{\mathcal{G}})_*(\pi^{\mathcal{G}})^* \longrightarrow (p_{\Delta})_{\#}(\pi^{\mathcal{F}})_*(\pi^{\mathcal{F}})^*$$

vaut l'identité. Pour prouver que l'autre composée, à savoir :

$$(p_{\Delta})_{\#}(\pi^{\mathcal{G}})_*(\pi^{\mathcal{G}})^* \longrightarrow (p_{\Delta})_{\#}(\pi^{\mathcal{F}})_*(\pi^{\mathcal{F}})^* \longrightarrow (p_{\Delta})_{\#}(\pi^{\mathcal{G}})_*(\pi^{\mathcal{G}})^*$$

vaut l'identité, il suffit d'inverser les rôles de  $f$  et  $g$  dans le raisonnement précédent.

C.Q.F.D

On est en mesure de prouver la proposition 3.4.9 :

DEMONSTRATION Rappelons que  $\Upsilon_{e_n} = (p_{\Delta})_{\#} \chi_{e_n} (\theta_{e_n})^* (\theta_{e_n}, p_{\Delta})^*$ . Le foncteur  $\chi_{e_n} : \mathbf{H}(\mathbb{G}_{mS}) \longrightarrow \mathbf{H}(S)$  est égal à  $\chi_{\text{id}} : \mathbf{H}(\mathbb{G}_{mS}) \longrightarrow \mathbf{H}(S)$ . Notons  $\mathcal{A}_n$  le  $\mathbb{G}_{mS}$ -schéma simplicial obtenu par pull-back de  $\mathcal{A}$  suivant  $e_n$ . Il vient que  $\Upsilon_{e_n} = (\mathcal{A}_n \bullet \chi)_{\text{id}}$ . De plus, le morphisme  $\chi_{e_n} \longrightarrow \Upsilon_{e_n}$  s'identifie au morphisme  $\chi_{\text{id}} \longrightarrow (\mathcal{A}_n \bullet \chi)_{\text{id}}$  induit par l'objet  $\mathbf{0}$ . En appliquant le lemme 3.4.10 à  $\mathcal{F} = \mathcal{A}_n$ , on voit que pour prouver la proposition 3.4.9, il suffit de vérifier les points :

1. Le 2-morphisme de counité  $(p_{\Delta})_{\#} (p_{\Delta})^* \longrightarrow \text{id}$  est inversible.
2. Le 2-morphisme d'unité  $(p_{\Delta})^* \longrightarrow (q \circ \theta_{e_n})_* (q \circ \theta_{e_n})^* (p_{\Delta})^*$  devient un isomorphisme après application de  $(p_{\Delta})_{\#}$ .
3. Pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , le morphisme  $\theta_{e_n}(\mathbf{r}) : \mathcal{A}_n(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbb{G}_{mS}$  est isomorphe au pull-back d'un  $S$ -schéma via la projection  $q : \mathbb{G}_{mS} \longrightarrow S$ .

La première condition découle de la proposition 2.1.41 et du fait que  $\Delta$  admet un objet final. La troisième condition est également vérifiée puisque  $\mathcal{A}_n(\mathbf{r}) = \mathbb{G}_{mS}^{r+1}$  et  $\theta_{e_n}(\mathbf{r})$  est simplement la projection sur le premier facteur. Il reste à vérifier la seconde condition.

Supposons d'abord que  $n = 1$ . Le morphisme d'unité  $\text{id} \longrightarrow (q \circ \theta)_* (q \circ \theta)^*$  coïncide avec celui du corollaire 3.4.12 appliqué au morphisme de  $S$ -schémas cosimpliciaux :

$$(q \circ \theta) : (\mathcal{A}, \Delta) \longrightarrow (S, \Delta)$$

Ce morphisme est une équivalence d'homotopie cosimpliciale par le corollaire 3.4.12. Il vient que  $\text{id} \longrightarrow (q \circ \theta)_* (q \circ \theta)^*$  devient un 2-isomorphisme après application de  $(p_{\Delta})_{\#}$ . La première partie de la proposition 3.4.9 est ainsi prouvée.

Dans la suite, on supposera que  $n$  est un entier non nul et que  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. Remarquons d'abord que le schéma cosimplicial  $\mathcal{A}_n$  est celui du lemme 3.4.1 appliqué au diagramme :

$$\mathbb{G}_{mS} \xrightarrow{(e_n)_{\eta}} \mathbb{G}_{mS} \xleftarrow{1} S$$

On dispose donc d'un morphisme de  $S$ -schémas cosimpliciaux  $r_n : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}$  déduit du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_{mS} & \xrightarrow{(e_n)_{\eta}} & \mathbb{G}_{mS} \xleftarrow{1} S \\ (e_n)_{\eta} \downarrow & & \parallel \quad \parallel \\ \mathbb{G}_{mS} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{G}_{mS} \xleftarrow{1} S \end{array}$$

Remarquons au passage que  $r_n(\underline{\mathbf{m}}) : \mathbb{G}_{m_S}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{G}_{m_S}^{m+1}$  est donné par  $(x_0, \dots, x_m) \rightsquigarrow (x_0^n, x_1, \dots, x_m)$ .

Revenons, à notre problème. L'égalité  $(\theta_n \circ q) = (\theta \circ q) \circ r_n$  induit une factorisation du 2-morphisme d'unité  $\text{id} \longrightarrow (\theta_n \circ q)_*(\theta_n \circ q)^*$  :

$$\text{id} \longrightarrow (\theta \circ q)_*(\theta \circ q)^* \xrightarrow{(1)} (\theta \circ q)_*r_n r_n^*(\theta \circ q)^* = (\theta_n \circ q)_*(\theta_n \circ q)^*$$

En utilisant le cas  $n = 1$ , on voit qu'il suffira de prouver que le 2-morphisme (1) est inversible. Ceci se vérifie objet par objet. Ainsi, on est finalement ramené à prouver que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , le 2-morphisme :

$$(\theta(\underline{\mathbf{m}}) \circ q)_*(\theta(\underline{\mathbf{m}}) \circ q)^* \xrightarrow{(1)} (\theta(\underline{\mathbf{m}}) \circ q)_*r_n(\underline{\mathbf{m}})_*r_n^*(\theta(\underline{\mathbf{m}}) \circ q)^*$$

est inversible. Il est facile de voir que ceci est un cas particulier du lemme ci-dessous.

C.Q.F.D

**LEMME 3.4.13** — *Soit  $X$  un  $S$ -schéma quasi-projectif. Notons  $q$  la projection évidente  $\mathbb{G}_{m_S} \times_S X \longrightarrow X$  et  $e_n$  (au lieu de  $(e_n)_\eta$ ) le  $X$ -morphisme  $\mathbb{G}_{m_S} \times_S X \longrightarrow \mathbb{G}_{m_S} \times_S X$  qui consiste à élever le premier facteur à la puissance  $n$ . Si  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé, le 2-morphisme :*

$$q_*q^* \longrightarrow q_*e_n e_n^*q^* \longrightarrow q_*q^*$$

est inversible.

DEMONSTRATION Il suffit bien évidemment de traiter le cas  $X = S$ . On continue à utiliser les notations du diagramme (3.24). Considérons le diagramme commutatif à carrés cartésiens (à nil-immersion près) :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_{m_S} & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_S^1 & \xleftarrow{i} & S \\ e_n \downarrow & & \downarrow e_n & & \parallel \\ \mathbb{G}_{m_S} & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_S^1 & \xleftarrow{i} & S \end{array}$$

Notons  $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  le groupe agissant sur le morphisme  $e_n : \mathbb{A}_S^1 \longrightarrow \mathbb{A}_S^1$  d'une façon transitive sur les fibres géométriques. On a un morphisme de 2-triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} p_*i_*i^!p^* & \longrightarrow & p_*p^* & \longrightarrow & p_*j_*j^*p^* & \longrightarrow & p_*i_*i^!p^*[+1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ p_*e_n i_*i^!e_n^*p^* & \longrightarrow & p_*e_n e_n^*p^* & \longrightarrow & p_*j_*e_n e_n^*j^*p^* & \longrightarrow & p_*e_n i_*i^!e_n^*p^*[+1] \end{array}$$

Le groupe  $G$  agit sur le triangle inférieur. Étant donné que  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé, on déduit que la deuxième et troisième flèche verticale identifient la source à la partie invariante sous  $G$  du but. On en déduit que c'est également le cas pour la première flèche.

Pour prouver le lemme, il suffit de prouver que les deux 2-morphismes :

$$i^!p^* \xrightarrow{Ex^{*,!}} i^!e_n^*p^* \quad \text{et} \quad p_*p^* \longrightarrow p_*e_n e_n^*p^*$$

sont inversibles. L'inversibilité du second 2-morphisme découle de l'axiome d'homotopie.

Pour prouver l'inversibilité de la première flèche, on doit passer par une méthode indirecte. On prouvera en effet que  $G$  agit trivialement sur  $i^!e_n^*p^* \simeq i^!e_n e_n^*p^*$ . On peut décrire cette action sur  $i^!e_n^*p^* \simeq i^!p^*$  de la manière suivante. Si  $\xi$  est un élément de  $G$ , on a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_S^1 \\ \parallel & & \downarrow \xi \\ S & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_S^1 \end{array}$$

L'action de  $\xi$  est donnée par la composée  $i^!p^* \xrightarrow{Ex^{*,!}} i^!\xi^*p^* \xrightarrow{\sim} i^!p^*$ . On prouvera que cette composée est l'identité. Pour cela on invoque le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 i^!p^! & \xrightarrow{\quad} & i^!\xi^!p^! & \xrightarrow{\quad} & i^!p^! \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 i^!\mathrm{Th}(\Omega_p)p^* & \longrightarrow & i^!\xi^*\mathrm{Th}(\Omega_p)p^* & \longrightarrow & i^!\mathrm{Th}(\Omega_p)p^* \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathrm{Th}(\mathcal{O}_S)i^!p^* & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathcal{O}_S)i^!\xi^*p^* & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathcal{O}_S)i^!p^*
 \end{array}$$

Le résultat est maintenant clair.

C.Q.F.D

**Remarque 3.4.14** — La conclusion de la seconde partie de la proposition 3.4.9 est fautive à coefficients entiers. En effet, soit  $\ell$  un nombre premier différent de la caractéristique du corps de base  $k$ . Supposons que  $H$  est le foncteur croisé qui à un  $k$ -schéma  $X$  associe la catégorie dérivée des faisceaux de  $\mathbb{Z}/\ell$ -modules sur le petit site étale de  $X$ . On va montrer que l'objet  $\Upsilon_{e_n}\mathbb{Z}/\ell$  est isomorphe à :

$$\bigoplus_{r \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}/\ell(-r)[-r] \oplus \mathbb{Z}/\ell(-r-1)[-r-1])$$

dès que  $\ell$  divise  $n$ . En effet, comme conséquence de la preuve de la proposition 3.4.9, le complexe  $\Upsilon_{e_n}(\mathbb{Z}/\ell)$  s'identifie au complexe total associé au complexe simplicial :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{A} \times_{e_n} \mathbb{G}_m, \mathbb{Z}/\ell)$$

La réalisation étale de  $(\mathbb{G}_m)^{r+1}$  est canoniquement isomorphe à :

$$(\mathbb{Z}/\ell \oplus \mathbb{Z}/\ell(1)[1])^{\otimes r}$$

De plus, la réalisation de la diagonale  $\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$  est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{Z}/\ell \oplus \mathbb{Z}/\ell(1)[1] \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell \oplus \mathbb{Z}/\ell(1)[1] \oplus \mathbb{Z}/\ell(1)[1] \oplus \mathbb{Z}/\ell(2)[2]$$

Tandis que la réalisation de  $(x, x^n) : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{Z}/\ell \oplus \mathbb{Z}/\ell(1)[1] \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell \oplus \mathbb{Z}/\ell(1)[1] \oplus \mathbb{Z}/\ell(1)[1] \oplus \mathbb{Z}/\ell(2)[2]$$

Avec ces formules, on voit que lorsqu'on passe au complexe normalisé de la réalisation de  $\mathcal{A} \times_{e_\ell} \mathbb{G}_m$  on trouve le complexe

$$[\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell \oplus \mathbb{Z}/\ell(1)[1] \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell(1)[1] \oplus \mathbb{Z}/\ell(2)[2] \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell(r)[r] \oplus \mathbb{Z}/\ell(r+1)[r+1] \longrightarrow \dots]$$

Avec  $\mathbb{Z}/\ell \oplus \mathbb{Z}/\ell(1)[1]$  placé en degré zéro et les différentielles données par :

$$\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{Z}/\ell(r)[r] \oplus \mathbb{Z}/\ell(r+1)[r+1] \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell(r+1)[r+1] \oplus \mathbb{Z}/\ell(r+2)[r+2]$$

Ainsi, pour  $n$  divisible par  $\ell$ , les différentielles deviennent nulles et on obtient la formule annoncée pour  $\Upsilon_{e_n}(\mathbb{Z}/\ell)$  après passage au dual.

Ce calcul montre que la structure de spécialisation  $\Upsilon$  ne donne pas toujours des motifs raisonnables. Ainsi,  $\Upsilon_f(A)$  peut ne pas être de type fini même si  $A$  l'était. Ce phénomène disparaît lorsqu'on passe aux coefficients rationnels du moins pour  $S$  le spectre d'un corps de caractéristique nulle (voir la sous-section suivante).

Notons  $e_n^m$  le  $\mathbb{A}_S^1$ -schéma  $B_n^m = \mathbb{A}_S^1[P][U, U^{-1}]/(P^n - U^m \cdot \pi) \longrightarrow \mathbb{A}_S^1 = B$ . Avec les notations de 3.3.2,  $b_n^m = e_n^m$ . On a dans le même esprit :

**COROLLAIRE 3.4.15** — *Supposons que le 2-foncteur  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}^\times$  la composée des 2-morphismes suivants :*

$$(e_n^m)_\sigma^* \longrightarrow i^*(e_n^m)^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*(e_n^m)^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^*q^* \longrightarrow \Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^*q^*$$

est inversible.

DEMONSTRATION Considérons le morphisme fini :

$$r : B_n[V, V^{-1}] \longrightarrow B_n^m$$

donné par  $U \rightsquigarrow V^n$  et  $P \rightsquigarrow V^m \cdot \pi^{1/n}$ . Le petit calcul :

$$B_n^m[V]/(V^n - U) \simeq B[P][U, U^{-1}][V]/(V^n - U, P^n - U^m \cdot \pi) \simeq B[P][V, V^{-1}]/((P \cdot V^{-m})^n - \pi) \simeq B_n[V, V^{-1}]$$

montre que  $r$  admet une action par un groupe  $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  qui est transitive sur les fibres géométriques.

On sait par le lemme 2.1.165 que le foncteur  $(b_n^m)_\eta^*$  est un facteur direct de  $r_{\eta^*}r_\eta^*(b_n^m)_\eta^*$ . Il suffit donc de montrer que la composée suivante :

$$i^*r_*r^*(e_n^m)^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*r_*r^*(e_n^m)^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{e_n^m}r_{\eta^*}r_\eta^*(e_n^m)_\eta^*q^* \longrightarrow \Upsilon_{e_n^m}r_{\eta^*}r_\eta^*(e_n^m)_\eta^*q^*$$

est inversible. Comme  $r$  est fini, on voit immédiatement que cette composée est isomorphe à :

$$r_{\sigma^*}i^*r^*(e_n^m)^*p^* \longrightarrow r_{\sigma^*}i^*j_*j^*r^*(e_n^m)^*p^* \xrightarrow{\sim} r_{\sigma^*}\chi_{e_n^m}r_\eta^*(e_n^m)_\eta^*q^* \longrightarrow r_{\sigma^*}\Upsilon_{e_n^m}r_\eta^*(e_n^m)_\eta^*q^*$$

Ceci nous ramène à traiter la question analogue pour le  $B$ -schéma  $B_n[V, V^{-1}]$ . Il est facile de conclure en utilisant la proposition 3.4.9 et le fait que le  $B$ -schéma  $B_n[V, V^{-1}]$  est lisse au dessus de  $B_n$ . C.Q.F.D

On termine cette sous-section par une discussion sur la structure monoïdale. Supposons que  $\mathbb{H}$  est un dérivateur algébrique monoïdal homotopique et stable. On sait par la proposition 3.2.17 que  $\Upsilon$  est naturellement un système de spécialisation pseudo-monoïdal. De plus, le morphisme  $\chi \longrightarrow \Upsilon$  est un morphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux. On note le résultat simple suivant :

**PROPOSITION 3.4.16** — *On garde les notations de la proposition 3.4.9 ainsi que du corollaire 3.4.15. Soient  $A$  et  $B$  des objets de  $H(S)$ . Alors :*

1- *L'accouplement  $\Upsilon_{\text{id}q^*}A \otimes_S \Upsilon_{\text{id}q^*}B \longrightarrow \Upsilon_{\text{id}q^*}(A \otimes_S B)$  est un isomorphisme.*

2- *Supposons que  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. Les accouplements :*

$$\Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*A \otimes_S \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*B \longrightarrow \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*(A \otimes_S B)$$

$$\Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^*q^*A \otimes_{(B_n^m)_\sigma} \Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^*q^*B \longrightarrow \Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^*q^*(A \otimes_S B)$$

sont des isomorphismes pour  $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$ .

DEMONSTRATION Ceci découle immédiatement du fait que les composées dans la proposition 3.4.9 et son corollaire 3.4.15 sont des transformations naturelles de foncteurs pseudo-monoïdaux. C.Q.F.D

### 3.4.3 Étude de $\Upsilon$ au dessus d'un corps de caractéristique nulle

On supposera dans ce paragraphe que la base  $S$  est le spectre d'un corps  $k$  de caractéristique nulle. L'hypothèse :  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparée sera essentielle dans la suite. On a un théorème de type finitude des cycles proches unipotents :

**THEOREME 3.4.17** — *On suppose que  $H$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. Soit  $\Lambda \subset \text{Ob}(H(k))$  une classe d'objets quasi-stable par twist de Tate. Alors pour tout  $\mathbb{A}_k^1$ -schéma quasi-projectif  $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$ , le foncteur  $\Upsilon_f$  envoie la sous-catégorie  $H_\Lambda^{\text{ct}}(X_\eta)$  dans  $H_\Lambda^{\text{ct}}(X_\sigma)$ .*

DEMONSTRATION On applique le corollaire 3.3.48 à  $H'_2 = (H_\Lambda^{\text{ct}})_{|\text{Sch}/\sigma}$  et à la classe d'objets de  $H(\eta)$  formée des  $q^*A$  avec  $A \in \Lambda$ . Ceci nous ramène immédiatement à vérifier que pour  $A \in \Lambda$  les objets  $\Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*A$  et  $\Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^*q^*A$  sont  $\Lambda$ -constructibles quelque soient les entiers non nuls  $n$  et  $m$ . Ceci découle immédiatement de la proposition 3.4.9 et son corollaire 3.4.15. C.Q.F.D

On a également un théorème de  $p$  $t$ -positivité :

**THEOREME 3.4.18** — *On suppose toujours de  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. On se donne un ensemble d'objets  $\mathcal{G} \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(k))$ . On suppose en plus que l'hypothèse 2.2.58 est vérifiée. Alors pour tout  $\mathbb{A}_k^1$ -schéma  $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$ , le foncteur  $\Upsilon_f[-1]$  est  ${}^p t$ -positif.*

**DEMONSTRATION** Par le lemme 3.2.10, les foncteurs  $\Upsilon_\gamma$  commutent aux petites sommes. On appliquera le corollaire 3.3.49 au système de spécialisation  $\Upsilon[-1]$ ,  $\mathbf{H}'' = ({}^p\mathbf{H}_{\geq 0})|_{\text{Sch}/\sigma}$  et à l'ensemble d'objets de  $\mathbf{H}(\eta)$  qui sont de la forme  $q^!A$  avec  $A \in \mathcal{G}$ .

Il suffit donc de vérifier que les objets  $\Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^!q^!A[-1]$  et  $\Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^!q^!A[-1]$  sont  ${}^p t$ -positifs pour tous les entiers non nuls  $n$  et  $m$ . En utilisant la proposition 3.4.9 et son corollaire 3.4.15 on obtient des isomorphismes :

$$\Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^!q^!A[-1] \simeq \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*A(1)[1] \simeq A(1)[1]$$

$$\Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^!q^!A[-1] \simeq \Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^*q^*A(2)[3] \simeq (e_n^m)_\sigma^*A(2)[3] \simeq (e_n^m)_\sigma^!A(1)[1]$$

étant donné que  $(e_n)_\eta$  et  $(e_n^m)_\eta$  sont lisses à fibrés normaux triviaux et que à nil-immersion près  $(e_n)_\sigma$  et  $(e_n^m)_\sigma$  sont également lisses à fibrés normaux triviaux. Le résultat découle alors du fait que l'objet  $A(1)[1]$  est bien  ${}^p t$ -positif dans  $\mathbf{H}(\sigma)$ . C.Q.F.D

Notons le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 3.4.19** — *Sous les hypothèses et conditions du théorème précédent, le foncteur  $\Upsilon_{\text{id}} : \mathbf{H}(\mathbb{G}_{m,k}) \longrightarrow \mathbf{H}(k)$  est  $t$ -positif.*

**DEMONSTRATION** En effet, par les théorèmes 2.2.82 et 2.2.86 on a l'inclusion  $\mathbf{H}_{\geq 1}(\mathbb{G}_{m,k}) \subset {}^p\mathbf{H}_{\geq 0}(\mathbb{G}_{m,k})$  et l'égalité  $\mathbf{H}_{\geq 0}(\sigma) = {}^p\mathbf{H}_{\geq 0}(\sigma)$ . Ainsi si  $E \in \text{Ob}(\mathbf{H}(\mathbb{G}_{m,k}))$  est  $t$ -positif, alors  $A[+1]$  est  ${}^p t$ -positif et  $\Upsilon_{\text{id}}(A[+1])[-1] \simeq \Upsilon_{\text{id}}A$  est  ${}^p t$ -positif (par le théorème 3.4.18) donc  $t$ -positif. C.Q.F.D

Supposons maintenant que  $\mathbb{H}$  est un dérivateur algébrique monoïdal homotopique et stable et que le 2-foncteur  $\mathbf{H}$  est fermé à droite. On notera simplement  $\underline{\text{Hom}}(-, -)$  à la place de  $\underline{\text{Hom}}_d(-, -)$  les bifoncteurs homomorphismes internes que l'on supposera triangulés en les deux variables. On a le théorème suivant :

**THEOREME 3.4.20** — *Soit  $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$  un  $\mathbb{A}_k^1$ -schéma quasi-projectif. On fixe un objet  $R$  de  $\mathbf{H}(k)$ . On définit les opérateurs de dualités  $D_\eta : \mathbf{H}(X_\eta) \longrightarrow \mathbf{H}(X_\eta)^{\text{op}}$  et  $D_\sigma : \mathbf{H}(X_\sigma) \longrightarrow \mathbf{H}(X_\sigma)^{\text{op}}$  par les formules :*

$$D_\eta(-) = \underline{\text{Hom}}(-, f_\eta^!q^*R) \quad \text{et} \quad D_\sigma(-) = \underline{\text{Hom}}(-, f_\sigma^!R)$$

On définit un morphisme de commutation à la dualité  $\Upsilon_f D_\eta \longrightarrow D_\sigma \Upsilon_f$  en prenant la composée :

$$\Upsilon_f D_\eta = \Upsilon_f D_f^{q^*R} \longrightarrow D_f^{\Upsilon_{\text{id}}q^*R} \Upsilon_f \xrightarrow{\sim} D_f^R \Upsilon_f = D_\sigma \Upsilon_f$$

avec les notations de la proposition 3.1.16 et du corollaire 3.1.18. Pour toute classe d'objets  $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(k))$  et tout objet  $E$  de  $\mathbf{H}_\Lambda^{\text{ct}}(X_\eta)$ , le morphisme :

$$\Upsilon_f D_\eta(E) \longrightarrow D_\sigma \Upsilon_f(E)$$

est inversible.

**DEMONSTRATION** Il suffit bien évidemment de considérer le cas  $\Lambda = \text{Ob}(\mathbf{H}(k))$ . On adopte les notations de 3.1.16 et 3.1.18. On montrera que le morphisme  $\Upsilon_f D_f^{q^*R}(E) \longrightarrow D_f^{\Upsilon_{\text{id}}q^*R} \Upsilon_f(E)$  est inversible. Par le corollaire 3.1.18, on sait que le morphisme en question est sous-jacent à un morphisme de systèmes de spécialisation :

$$\Upsilon D^{q^*R} \longrightarrow D^{\Upsilon_{\text{id}}q^*R} \Upsilon$$

Ainsi, en appliquant le théorème 3.3.45, on voit qu'il suffit de prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $A \in \text{Ob}(\mathbf{H}(k))$ , les morphismes :

$$\Upsilon_{e_n} D_{e_n}^{q^*R}((e_n)_\eta^*q^*A) \longrightarrow D_{e_n}^{\Upsilon_{\text{id}}q^*R} \Upsilon_{e_n}((e_n)_\eta^*q^*A) \quad \text{et} \quad \Upsilon_{e_n^1} D_{e_n^1}^{q^*R}((e_n^1)_\eta^*q^*A) \longrightarrow D_{e_n^1}^{\Upsilon_{\text{id}}q^*R} \Upsilon_{e_n^1}((e_n^1)_\eta^*q^*A)$$

sont inversibles. On considèrera uniquement le premier morphisme, le second se traite exactement de la même façon. Par définition, le morphisme en question est obtenu par adjonction de l'accouplement :

$$\Upsilon_{e_n} D_{e_n}^{q^*R}((e_n)_\eta^*q^*A) \otimes \Upsilon_{e_n}((e_n)_\eta^*q^*A) \longrightarrow \Upsilon_{e_n} D_{e_n}^{q^*R}((e_n)_\eta^*q^*A) \otimes ((e_n)_\eta^*q^*A) \longrightarrow \Upsilon_{e_n}((e_n)_\eta^*q^*R) \simeq \Upsilon_{\text{id}}q^*R$$

Remarquons que  $D_{e_n}^{q^*R}((e_n)_\eta^*q^*A) = \underline{\text{Hom}}((e_n)_\eta^*q^*A, (e_n)_\eta^!q^*R) \simeq \underline{\text{Hom}}((e_n)_\eta^*q^*A, (e_n)_\eta^*q^*R) \simeq (e_n)_\eta^*q^*\underline{\text{Hom}}(A, R)$  puisque  $(e_n)_\eta$  est étale et que  $q$  est lisse. On se ramène donc à étudier l'accouplement :

$$\Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*\underline{\text{Hom}}(A, R) \otimes \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*A \longrightarrow \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*(\underline{\text{Hom}}(A, R) \otimes A) \longrightarrow \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*R$$

Par la proposition 3.4.9, on dispose d'un isomorphisme de foncteurs pseudo-monoidaux  $\text{id} \simeq \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*$ . Il vient que l'accouplement ci-dessus est isomorphe à l'accouplement évident  $\underline{\text{Hom}}(A, R) \otimes A \longrightarrow R$ . Cet accouplement fournit par adjonction l'isomorphisme identité  $\underline{\text{Hom}}(A, R) \simeq \underline{\text{Hom}}(A, R)$ . Le théorème est prouvé. C.Q.F.D

### 3.5 Le système de spécialisation $\Psi$

Dans ce numéro, on donne la définition des foncteurs cycles proches dans le cadre d'un 2-foncteur homotopique stable. La définition des foncteurs  $\Psi$  est une variation de la définition de  $\Upsilon$  qui tient en compte le coté discret du groupe fondamental motivique de  $\mathbb{G}_m$  à savoir les revêtements étales finis. On se place de nouveau au dessus d'un schéma de base général  $S$ .

#### 3.5.1 Le diagramme de schémas $(\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times)$

Sauf mention du contraire le symbole  $\mathbb{N}^\times$  désignera la catégorie directe associée à l'ensemble des entiers naturels non nuls ordonné par l'opposée de la relation de divisibilité. Les objets de  $\mathbb{N}^\times$  seront simplement notés  $n, m, r, \dots$ . L'existence d'une flèche  $m \rightarrow n$  signifie donc que  $n$  divise  $m$ .

**DEFINITION 3.5.1** — *Le diagramme de  $S$ -schémas  $(\mathcal{E}, \mathbb{N}^\times)$  est donné par le foncteur  $\mathcal{E} : \mathbb{N}^\times \longrightarrow \text{Sch}/S$  qui :*

- à un entier  $n$  associe toujours le schéma  $\mathbb{G}_{mS}$ ,
- à une flèche  $m \rightarrow n$  associe le morphisme  $(\cdot)^{\frac{m}{n}} : \mathbb{G}_{mS} \longrightarrow \mathbb{G}_{nS}$  d'élévation à la puissance  $\frac{m}{n}$ .

**Remarque 3.5.2** — On dispose d'un morphisme évident de diagrammes de schémas  $e : (\mathcal{E}, \mathbb{N}^\times) \longrightarrow \mathbb{G}_{mS}$ . On peut penser à  $e$  comme étant le revêtement étale universel de  $\mathbb{G}_m$ .

Pour obtenir les foncteurs cycles proches totaux, il faut utiliser un revêtement de  $\mathbb{G}_m$  qui soit plus fin que le revêtement étale universel  $\mathcal{E}/\mathbb{G}_m$  ainsi que le revêtement universel unipotent  $\mathcal{A}/\mathbb{G}_m$  :

**DEFINITION 3.5.3** — *On définit un objet cosimplicial  $\mathcal{R}$  en  $\mathbb{N}^\times$ -diagrammes de  $S$ -schéma en appliquant le lemme 3.4.1 au diagramme de  $\text{DiaSch}/S$  :*

$$(\mathcal{E}, \mathbb{N}^\times) \simeq (\mathcal{E}, \mathbb{N}^\times) \xleftarrow{1} (S, \mathbb{N}^\times)$$

On peut voir  $\mathcal{R}$  comme un diagramme de  $S$ -schémas indicé par la catégorie  $\Delta \times \mathbb{N}^\times$ .

On définit un morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas :

$$(\theta^\mathcal{R}, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times}) : (\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \longrightarrow \mathbb{G}_{mS}$$

en prenant la composée  $(\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \longrightarrow (\mathcal{E}, \mathbb{N}^\times) \longrightarrow \mathbb{G}_{mS}$ . On notera dorénavant  $(\theta^\mathcal{A}, p_\Delta)$  le morphisme  $(\mathcal{A}, \Delta) \longrightarrow \mathbb{G}_m$ . Les deux lemmes ci-dessous résument quelques propriétés évidentes de  $\mathcal{R}$  :

**LEMME 3.5.4** — *Soit  $\tau_n : \Delta \longrightarrow \Delta \times \mathbb{N}^\times$  le foncteur qui envoie l'objet  $\underline{r}$  sur  $(\underline{r}, n)$ . On a :*

1. *Le diagramme de  $S$ -schémas  $(\mathcal{R} \circ \tau_n, \Delta)$  s'identifie canoniquement à  $(\mathcal{A}, \Delta)$ .*
2. *Le carré de morphismes de diagrammes de  $S$ -schémas :*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}, \Delta) & \xrightarrow{\tau_n} & (\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \\ \theta^\mathcal{A} \downarrow & & \downarrow \theta^\mathcal{R} \\ \mathbb{G}_{mS} & \xrightarrow{e_n} & \mathbb{G}_{mS} \end{array}$$

(où  $e_n$  désigne l'élévation à la puissance  $n$ ) est commutatif.

Dans le même esprit, on a :

**LEMME 3.5.5** — *Soit  $\kappa_n : (\Delta \times \mathbb{N}^\times) \longrightarrow (\Delta \times \mathbb{N}^\times)$  le foncteur qui envoie l'objet  $(\underline{r}, m)$  sur  $(\underline{r}, m.n)$ . On a :*

1. Le diagramme de  $S$ -schéma  $(\mathcal{R} \circ \kappa_n, \Delta \times \mathbb{N}^\times)$  s'identifie canoniquement à  $(\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times)$ .
2. Gardons les notations ci-dessus. Pour tout entier non nul  $l$ , le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathcal{A}, \Delta) & \xrightarrow{\tau_l} & (\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) & \xrightarrow{\theta^{\mathcal{R}}} & \mathbb{G}_{m,S} \\
 \parallel & & \downarrow \kappa_n & & \downarrow e_n \\
 (\mathcal{A}, \Delta) & \xrightarrow{\tau_{ln}} & (\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) & \xrightarrow{\theta^{\mathcal{R}}} & \mathbb{G}_{m,S}
 \end{array}$$

est commutatif.

### 3.5.2 Définition de $\Psi$ . Normalisation

Voici la définition des foncteurs cycles proches :

**DEFINITION 3.5.6** — 1- Avec les notations de 3.2.3, on appelle  $\Psi$  le système de spécialisation  $\mathcal{R} \bullet \chi$ . Les foncteurs  $\Psi_f$  seront appelés les foncteurs cycles proches (totaux). Lorsque  $\mathbb{H}$  est le 2-foncteur  $\mathbf{SH}$ , on parlera alors de foncteurs motif proche (total).

2- On appelle également  $\Upsilon^n$  le système de spécialisation  $(\mathcal{R} \circ \tau_n) \bullet \chi$ . On dispose de morphismes de systèmes de spécialisations :

$$\tau_n : \Upsilon^n \longrightarrow \Psi$$

3- On appelle finalement  $\Psi^n$  le système de spécialisation  $(\mathcal{R} \circ \kappa_n) \bullet \chi$ . Par la définition 3.2.13, on dispose d'un carré commutatif de systèmes de spécialisation :

$$\begin{array}{ccc}
 \Upsilon^{ln} & \xrightarrow{\tau_l} & \Psi^n \\
 \parallel & & \downarrow \kappa_n \\
 \Upsilon^{ln} & \longrightarrow & \Psi
 \end{array}$$

**Remarque 3.5.7** — Le système de spécialisation  $\Upsilon^1$  s'identifie canoniquement au système de spécialisation  $\Upsilon$  considéré dans la section 3.4. Par construction, on dispose de morphismes de systèmes de spécialisations  $\Upsilon^n \longrightarrow \Upsilon^{nl}$  et  $\Psi$  est la  $\mathbb{N}^\times$ -colimite des  $\Upsilon^n$  (en un sens que l'on peut facilement préciser).

**LEMME 3.5.8** — Pour tout entier non nul  $n$ , le morphisme de systèmes de spécialisation  $\Psi^n \longrightarrow \Psi$  est inversible.

DEMONSTRATION Ceci découle immédiatement de la définition et du fait que le foncteur  $- \times n : \mathbb{N}^\times \longrightarrow \mathbb{N}^\times$  est filtrant au sens de la définition 2.1.50. C.Q.F.D

Soit  $n$  un entier non nul. Étant donné un  $S$ -morphisme quasi-projectif  $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_S^1$ , on définit  $f_n : X_n \longrightarrow \mathbb{A}_S^1$  comme étant le pull-back de  $f$  suivant  $e_n : \mathbb{A}_S^1 \longrightarrow \mathbb{A}_S^1$ . On appellera alors  $e_n : X_n \longrightarrow X$  le  $B$ -morphisme évident. On dispose d'un isomorphisme canonique de diagrammes de  $X$ -schémas :

$$(\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \times_{\mathbb{G}_{m,S}} X_n \longrightarrow (\mathcal{R} \circ \kappa_n, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \times_{\mathbb{G}_{m,S}} X$$

On déduit alors immédiatement un isomorphisme  $\Psi_f^n \xrightarrow{\sim} \Psi_{f_n}(e_n)_\eta^*$ . Par la proposition 3.1.6, les 1-morphismes  $\Psi_{f_n}(e_n)_\eta^*$  s'organisent en un système de spécialisation qu'on notera  $e_n \bullet \Psi$ .

La même discussion s'applique à  $\Upsilon$ . Ainsi pour tout  $n$ , on a  $e_n \bullet \Upsilon \simeq \Upsilon^n$ . On déduit :

**PROPOSITION 3.5.9** — Il existe un isomorphisme de systèmes de spécialisation  $\Psi \xrightarrow{\sim} e_n \bullet \Psi$ .

Lorsque  $\mathbb{H}$  est un dérivateur algébrique monoïdal homotopique et stable, le système de spécialisation  $\Psi$  est également pseudo-monoïdal. On vérifie aisément que  $\Psi \xrightarrow{\sim} e_n \bullet \Psi$  est un isomorphisme de systèmes de spécialisations pseudo-monoïdaux.

On a le résultat de normalisation suivant :

**LEMME 3.5.10** — Avec les notations du diagramme (3.24), la composée des 2-morphismes suivants :

$$\text{id} \xrightarrow{\sim} i^* p^* \longrightarrow i^* j_* j^* p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{\text{id}q^*} \longrightarrow \Psi_{\text{id}q^*}$$

est inversible. En d'autres termes, le 2-morphisme  $\Upsilon_{\text{id}q^*} \longrightarrow \Psi_{\text{id}q^*}$  est inversible.

DEMONSTRATION Par la remarque 3.5.7,  $\Psi$  est la colimite des  $\Upsilon^n$ . Il suffira donc de prouver que les 2-morphismes :

$$\Upsilon_{\text{id}q^*} \longrightarrow \Upsilon_{\text{id}q^*}^n \simeq \Upsilon_{\text{id}(e_n)_\eta^*q^*}$$

sont inversibles. Remarquons pour cela, qu'on a un digramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{id} & \longrightarrow & \chi_{\text{id}q^*} & \longrightarrow & \Upsilon_{\text{id}q^*} \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{id} & \longrightarrow & \chi_{\text{id}(e_n)_\eta^*q^*} & \longrightarrow & \Upsilon_{\text{id}(e_n)_\eta^*q^*} \end{array}$$

On déduit alors le résultat recherché en utilisant la proposition 3.4.9 qui assure que les deux composées horizontales du diagramme ci-dessus sont inversibles. C.Q.F.D

**Remarque 3.5.11** — On fera attention que dans la preuve ci-dessus, on a utilisé le foncteur  $\Upsilon_{\text{id}(e_n)_\eta^*}$  et non  $\Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*$ . En effet, la composée :

$$\text{id} \longrightarrow \chi_{e_n}(e_n)_\eta^*q^* \longrightarrow \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*$$

n'est pas inversible en général (voir la remarque 3.4.14).

On peut alors déduire le résultat de normalisation suivant :

**PROPOSITION 3.5.12** — 1- Soit  $n$  un entier inversible sur  $S$ . On note  $c_n$  le  $S$ -schéma  $S[T]/(T^n - 1) \longrightarrow S$ .

Il existe un isomorphisme canonique  $\Psi_{e_n}(e_n)_\eta^*q^* \simeq c_n^*c_n^*$ .

2- Soient  $n$  et  $m$  des entiers inversibles sur  $S$ . On note  $c_n^m$  le morphisme étale de  $S$ -schémas :

$$S[U, U^{-1}]/(Q^n - U^m) \longrightarrow S[U, U^{-1}]$$

Il existe un isomorphisme canonique  $\Psi_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^*q^* \simeq (c_n^m)_*(c_n^m)^*(e_n^m)_\sigma^*$ .

DEMONSTRATION Notons  $f$  l'un des morphismes  $e_n$  ou  $e_n^m$ . Vu la proposition 3.5.9, on peut remplacer  $f$  par  $f_n$ . Remarquons alors les faits suivants :

– Le  $\mathbb{A}_S^1$ -schéma  $(e_n)_n$  est donné par :

$$(B_n)_n = S[P, \pi]/(P^n - \pi^n) \longrightarrow S[\pi]$$

On définit alors un morphisme de  $\mathbb{A}_S^1$ -schémas :

$$u : S[\pi, T]/(T^n - 1) \longrightarrow S[\pi, P]/(P^n - \pi^n)$$

qui consiste à envoyer  $P$  sur  $T.\pi$ . Il est clair que  $u$  est fini, qu'il induit un isomorphisme sur les fibres génériques et que sa fibre spéciale est égale à  $c_n$  (à une nil-immersion près). De plus, le  $\mathbb{A}_S^1$ -schéma  $S[\pi, T]/(T^n - 1)$  est lisse (en fait étale).

– Le  $\mathbb{A}_S^1$ -schémas  $(e_n^m)_n$  est donné par :

$$(B_n^m)_n = S[\pi, U, U^{-1}][P]/(P^n - U^m.\pi^n) \longrightarrow S[\pi]$$

On définit alors un morphisme de  $\mathbb{A}_S^1$ -schémas :

$$v : S[\pi, U, U^{-1}][Q]/(Q^n - U^m) \longrightarrow S[\pi, U, U^{-1}][P]/(P^n - U^m.\pi^n)$$

qui consiste à envoyer  $P$  sur  $Q^{-1}.\pi$ . Il est clair que  $v$  est fini, qu'il induit un isomorphisme sur les fibres génériques et que sa fibre spéciale est donnée par  $c_n^m$  à une nil-immersion près. De plus, le  $\mathbb{A}_S^1$ -schéma  $S[\pi, U, U^{-1}][Q]/(Q^n - U^m)$  est lisse.

On déduit alors que :

$$\Psi_{(e_n)_n \circ u}((e_n)_n \circ u)_\sigma^* \simeq ((e_n)_n \circ u)_\sigma^* \quad \text{et} \quad \Psi_{(e_n^m)_n \circ v}((e_n^m)_n \circ v)_\sigma^* \simeq ((e_n^m)_n \circ v)_\sigma^*$$

Le résultat découle immédiatement du fait que  $u_{\sigma^*}\Psi_{(e_n)_n \circ u} \simeq \Psi_{(e_n)_n}$  et  $v_{\sigma^*}\Psi_{(e_n^m)_n \circ v} \simeq \Psi_{(e_n^m)_n}$ . C.Q.F.D

**Remarque 3.5.13** — La technique utilisée dans la preuve ci-dessus sera utilisée plusieurs fois dans la suite. Par exemple, elle permettra de réduire les conditions à vérifier pour la validité du théorème 3.3.45 au seul cas du  $B$ -schéma identité.



### 3.5.3 Étude de $\Psi$ au dessus d'un corps de caractéristique nulle

Dans cette sous-section le schéma de base  $S$  sera le spectre d'un corps  $k$  de caractéristique nulle. On établira pour  $\Psi$  les analogues des théorèmes de constructibilité et de  ${}^p t$ -positivité pour  $\Upsilon$ . Contrairement au cas de  $\Upsilon$  ces analogues sont valables à coefficients entiers. C'est là, l'un des principaux avantages de  $\Psi$  sur  $\Upsilon$ .

**THEOREME 3.5.14** — *Soit  $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(k))$  une classe d'objets quasi-stable par twist de Tate. Alors pour tout  $\mathbb{A}_k^1$ -schéma quasi-projectif  $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$ , le foncteur  $\Psi_f$  envoie la sous-catégorie  $\mathbf{H}_\Lambda^{\text{ct}}(X_\eta)$  dans  $\mathbf{H}_\Lambda^{\text{ct}}(X_\sigma)$ .*

DEMONSTRATION On applique le corollaire 3.3.48 à  $\mathbf{H}'_2 = (\mathbf{H}_\Lambda^{\text{ct}})_{|\text{Sch}/\sigma}$  et à la classe d'objets de  $\mathbf{H}(\eta)$  formée des  $q^*A$  avec  $A \in \Lambda$ . Ceci nous ramène immédiatement à vérifier que pour  $A \in \Lambda$  les objets  $\Psi_{e_n}(e_n)_\eta^* q^* A$  et  $\Psi_{e_m}(e_m)_\eta^* q^* A$  sont  $\Lambda$ -constructibles pour tous les entiers non nuls  $n$  et  $m$ . Ceci découle de la proposition 3.5.12. C.Q.F.D

On a également un théorème de  ${}^p t$ -positivité :

**THEOREME 3.5.15** — *On se donne un ensemble d'objets  $\mathcal{G} \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(k))$ . On suppose que l'hypothèse 2.2.58 est vérifiée. Alors pour tout  $\mathbb{A}_k^1$ -schéma  $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$ , le foncteur  $\Psi_f[-1]$  est  ${}^p t$ -positif.*

DEMONSTRATION Par le lemme 3.2.10, les foncteurs  $\Psi_\gamma$  commutent aux petites sommes. On appliquera le corollaire 3.3.49 au système de spécialisation  $\Psi[-1]$ ,  $\mathbf{H}'_2 = ({}^p \mathbf{H}_{\geq 0})_{|\text{Sch}/\sigma}$  et à l'ensemble d'objets de  $\mathbf{H}(\eta)$  qui sont de la forme  $q^*A$  avec  $A \in \mathcal{G}$ .

Il suffit donc de vérifier que les objets  $\Psi_{e_n}(e_n)_\eta^! q^! A[-1]$  et  $\Psi_{e_m}(e_m)_\eta^! q^! A[-1]$  sont  ${}^p t$ -positifs pour tous les entiers non nuls  $n$  et  $m$ . En utilisant la proposition 3.5.12 on obtient des isomorphismes :

$$\Psi_{e_n}(e_n)_\eta^! q^! A[-1] \simeq \Psi_{e_n}(e_n)_\eta^* q^* A(1)[1] \simeq c_{n*} c_n^* A(1)[1] \simeq c_n! c_n^! A(1)[1]$$

$$\Psi_{e_m}(e_m)_\eta^! q^! A[-1] \simeq \Psi_{e_m}(e_m)_\eta^* q^* A(2)[3] \simeq (c_n^m)_* (c_n^m)^* (e_n^m)_\sigma^* A(2)[3] \simeq (c_n^m)! (c_n^m)^! (e_n^m)_\sigma^! A(1)[1]$$

étant donné que  $(e_n)_\eta$  et  $(e_m)_\eta$  sont lisses à fibrés normaux triviaux et que à nil-immersion près  $(e_n)_\sigma$  et  $(e_m)_\sigma$  sont également lisses à fibrés normaux triviaux. Le résultat découle alors du fait que l'objet  $A(1)[1]$  est bien  ${}^p t$ -positif dans  $\mathbf{H}(\sigma)$ . C.Q.F.D

Notons le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 3.5.16** — *Sous les hypothèses et conditions du théorème précédent, le foncteur  $\Psi_{\text{id}} : \mathbf{H}(\mathbb{G}_{m,k}) \longrightarrow \mathbf{H}(k)$  est  $t$ -positif.*

DEMONSTRATION En effet, par les théorèmes 2.2.82 et 2.2.86 on a l'inclusion  $\mathbf{H}_{\geq 1}(\mathbb{G}_{m,k}) \subset {}^p \mathbf{H}_{\geq 0}(\mathbb{G}_{m,k})$  et l'égalité  $\mathbf{H}_{\geq 0}(\sigma) = {}^p \mathbf{H}_{\geq 0}(\sigma)$ . Ainsi si  $E \in \text{Ob}(\mathbf{H}(\mathbb{G}_{m,k}))$  est  $t$ -positif, alors  $A[+1]$  est  ${}^p t$ -positif et  $\Psi_{\text{id}}(A[+1])[-1] \simeq \Psi_{\text{id}} A$  est  ${}^p t$ -positif (par le théorème ci-dessus) donc  $t$ -positif. C.Q.F.D

Supposons dans la suite que  $\mathbb{H}$  est un dérivateur algébrique monoïdal homotopique et stable. Le système de spécialisation  $\Psi$  est donc naturellement un système de spécialisation pseudo-monoïdal et le morphisme  $\Upsilon \longrightarrow \Psi$  respecte les accouplements. Une des propriétés qu'ont les foncteurs cycles proches totaux et que n'ont pas les foncteurs cycles proches unipotents (même à coefficients rationnels) est :

**THEOREME 3.5.17** — *(Commutation au produit extérieur) On se donne une classe d'objets  $\Lambda$  dans  $\mathbf{H}(k)$ . Soient  $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$  et  $g : Y \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$  deux  $\mathbb{A}_k^1$ -schémas. Soient  $A \in \mathbf{H}(X_\eta)$  et  $B \in \mathbf{H}(Y_\eta)$  deux objets  $\Lambda$ -constructibles. Le morphisme canonique de  $\mathbf{H}(X_\sigma \times_\sigma Y_\sigma)$  :*

$$\Psi_f(A) \boxtimes \Psi_g(B) \longrightarrow \Psi_{f \times_{\mathbb{A}_k^1} g}(A \boxtimes B)$$

est inversible.

DEMONSTRATION Il suffit de traiter le cas  $\Lambda = \text{Ob}(\mathbf{H}(k))$ . Fixons d'abord le  $k$ -schéma  $X$  et l'objet  $A$  et faisons varier  $Y$  et  $B$ . En combinant les propositions 3.1.6 3.1.13, on obtient deux systèmes de spécialisation  $\Psi^{X_\eta, A}$  et  $\Psi^{X_\sigma, \Psi_f(A)}$  de  $\mathbf{H}_{|\text{Sch}/\eta}$  vers le 2-foncteur homotopique stable  $\mathbf{H}_{X_\sigma}$  défini sur  $\text{Sch}/\sigma$  par  $\mathbf{H}_{X_\sigma}(T) = \mathbf{H}(X_\sigma \times_k T)$ . Ces systèmes de spécialisation sont donnés par :

- $\Psi_g^{X_\eta, A}(-) = \Psi_{f \times g}(A \boxtimes -)$ ,
- $\Psi_g^{X_\sigma, \Psi_f(A)}(-) = \Psi_f(A) \boxtimes \Psi_g(-)$ .

Le morphisme de l'énoncé définit un morphisme de systèmes de spécialisation. Ainsi par le théorème 3.3.45, il suffit de considérer les cas  $g = e_n$  et  $B = (e_n)_\eta^* q^* D$  ou  $g = e_n^m$  et  $B = (e_n^m)_\eta^* q^* D$  (avec  $D \in \text{Ob}(\mathbf{H}(k))$ ). Comme pour la preuve de la proposition 3.5.12, on a la liberté de remplacer  $g$  par  $g_n$ . Il est également facile (en utilisant la formule de projection pour les images directes projectives cohomologiques) de se ramener à  $g = e_n \circ u$  ou  $g = e_n^m \circ v$  (avec les

notations de la preuve de la proposition 3.5.12). Mais dans les deux cas,  $g$  est lisse. Ceci prouve qu'il suffit de prendre  $g = \text{id}$  et  $B = q^*D$ .

Par symétrie, on peut également supposer que  $f = \text{id}$  et  $A = q^*C$ . Il suffit donc de prouver que l'accouplement :

$$\Psi_{\text{id}q^*}C \otimes \Psi_{\text{id}q^*}D \longrightarrow \Psi_{\text{id}q^*}(C \otimes D)$$

est inversible. Ceci est vrai par la proposition 3.5.12 qui affirme que le foncteur pseudo-monoïdal  $\Psi_{\text{id}q^*}$  est isomorphe au foncteur pseudo-monoïdal identité. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 3.5.18** — *Gardons les notations du théorème précédent. On suppose que  $\mathbf{H}$  admet les petites sommes, qu'il est parfait pour elles et qu'il est engendré par la base. Alors l'accouplement extérieur :*

$$\Psi_f(A) \boxtimes \Psi_g(B) \longrightarrow \Psi_{f \times_B g}(A \boxtimes B)$$

est un isomorphisme pour tout  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X_\eta)) \times \text{Ob}(\mathbf{H}(Y_\eta))$ .

DEMONSTRATION En effet, sous ces conditions, les foncteur  $\Psi_f$  ainsi que le produit tensoriel commutent aux petites sommes. C.Q.F.D

Le cas  $f = g = \text{id}$  est particulièrement intéressant :

**COROLLAIRE 3.5.19** — *Sous les hypothèses du corollaire précédent, le foncteur  $\Psi_{\text{id}} : \mathbf{H}(\eta) \longrightarrow \mathbf{H}(s)$  est monoïdal.*

Supposons en plus que le 2-foncteur  $\mathbf{H}$  est fermé à droite. On notera simplement  $\underline{\text{Hom}}(-, -)$  à la place de  $\underline{\text{Hom}}_d(-, -)$  les bifoncteurs homomorphismes internes qu'on supposera triangulés en les deux variables. On a le théorème suivant :

**THEOREME 3.5.20** — *Soit  $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$  un  $\mathbb{A}_k^1$ -schéma quasi-projectif. On fixe un objet  $R$  de  $\mathbf{H}(k)$ . On définit les opérateurs de dualités  $D_\eta : \mathbf{H}(X_\eta) \longrightarrow \mathbf{H}(X_\eta)^{\text{op}}$  et  $D_\sigma : \mathbf{H}(X_\sigma) \longrightarrow \mathbf{H}(X_\sigma)^{\text{op}}$  par les formules :*

$$D_\eta(-) = \underline{\text{Hom}}(-, f_\eta^! q^* R) \quad \text{et} \quad D_\sigma(-) = \underline{\text{Hom}}(-, f_\sigma^! R)$$

On définit un morphisme de commutation à la dualité  $\Psi_f D_\eta \longrightarrow D_\sigma \Psi_f$  en prenant la composée :

$$\Psi_f D_\eta = \Psi_f D_f^{q^* R} \longrightarrow D_f^{\Psi_{\text{id}q^*} R} \Psi_f \xrightarrow{\sim} D_f^R \Psi_f = D_\sigma \Psi_f$$

avec les notations de la proposition 3.1.16 et du corollaire 3.1.18. Pour toute classe d'objets  $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(k))$  et tout objet  $E$  de  $\mathbf{H}_\Lambda^{\text{ct}}(X_\eta)$ , le morphisme :

$$\Psi_f D_\eta(E) \longrightarrow D_\sigma \Psi_f(E)$$

est inversible.

DEMONSTRATION Il suffit bien évidemment de considérer le cas  $\Lambda = \text{Ob}(\mathbf{H}(k))$ . On adopte les notations de la proposition 3.1.16. On montrera que le morphisme  $\Psi_f D_f^{q^* R}(E) \longrightarrow D_f^{\Psi_{\text{id}q^*} R} \Psi_f(E)$  est inversible. Par le corollaire 3.1.18, on sait que le morphisme en question est sous-jacent à un morphisme de systèmes de spécialisation :

$$\Psi D^{q^* R} \longrightarrow D^{\Psi_{\text{id}q^*} R} \Psi$$

En appliquant le théorème 3.3.45, on se ramène à traiter les cas  $f = e_n$  et  $E = q^*(e_n)_\eta^* q^* F$  ou  $f = e_n^m$  et  $E = q^*(e_n^m)_\eta^* q^* F$  (pour  $F \in \text{Ob}(\mathbf{H}(k))$ ). On dispose d'un diagramme commutatif de systèmes de spécialisation :

$$\begin{array}{ccc} \Psi \circ D^{q^* R} & \longrightarrow & D^{\Psi_{\text{id}q^*} R} \circ \Psi \\ \sim \downarrow & & \uparrow \sim \\ (e_n \bullet \Psi) \circ D^{q^* R} & \longrightarrow & D^{(e_n \bullet \Psi)_{\text{id}q^*} R} \circ (e_n \bullet \Psi) \end{array}$$

Ceci nous permettra de remplacer  $e_n$  et  $e_n^m$  par  $(e_n)_n$  et  $(e_n^m)_n$ . En utilisant la commutation avec la dualité des images directes cohomologiques par des morphismes projectifs, on se ramène même à supposer que  $f$  est égal à  $(e_n)_n \circ u$  ou  $(e_n^m)_n \circ v$  (avec les notations de la preuve de la proposition 3.5.12). Mais alors  $f$  est lisse, ce qui nous ramène en fin de compte à  $f = \text{id}$ . Pour traiter ce cas, on procède comme pour la preuve du théorème 3.4.20.

Par définition, le morphisme en question est obtenu par adjonction de l'accouplement :

$$\Psi_{\text{id}} D_{\text{id}}^{q^*R}(q^*A) \otimes \Psi_{\text{id}}(q^*A) \longrightarrow \Psi_{\text{id}} D_{\text{id}}^{q^*R}(q^*A) \otimes (q^*A) \longrightarrow \Psi_{\text{id}}(q^*R)$$

Remarquons que  $D_{\text{id}}^{q^*R}(q^*A) = \underline{\text{Hom}}(q^*A, q^*R) \simeq q^*\underline{\text{Hom}}(A, R)$  puisque  $q$  est lisse. On se ramène donc à étudier l'accouplement :

$$\Psi_{\text{id}} q^*\underline{\text{Hom}}(A, R) \otimes \Psi_{\text{id}} q^*A \longrightarrow \Psi_{\text{id}} q^*(\underline{\text{Hom}}(A, R) \otimes A) \longrightarrow \Psi_{\text{id}} q^*R$$

Par la proposition 3.5.12, on dispose d'un isomorphisme de foncteurs pseudo-monoïdaux  $\text{id} \simeq \Psi_{\text{id}} q^*$ . Il vient que l'accouplement ci-dessus est isomorphe à l'accouplement évident  $\underline{\text{Hom}}(A, R) \otimes A \longrightarrow R$ . Cet accouplement fournit par adjonction l'isomorphisme identité  $\underline{\text{Hom}}(A, R) = \underline{\text{Hom}}(A, R)$ . Le théorème est prouvé. C.Q.F.D

### 3.6 Le système de spécialisation logarithmique et le triangle de monodromie

Le but de cette section est de construire un 2-triangle de systèmes de spécialisation :

$$(3.25) \quad \Upsilon(-1)[-1] \longrightarrow \chi \longrightarrow \Upsilon \xrightarrow{N} \Upsilon(-1)$$

qu'on appellera le triangle de monodromie. La transformation naturelle  $N$  jouera le rôle de l'opérateur de monodromie, bien connu dans les contextes classiques. Pour mener à bien notre construction, on va devoir supposer que  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire, ainsi que d'autres conditions techniques. Toutefois, ces conditions sont vérifiées pour les 2-foncteurs homotopiques stables  $\mathbf{DM}_{\mathbb{Q}}$  et  $\mathbf{SH}_{\mathbb{Q}}$  (lorsque le corps de base n'est pas ordonnable). On aura besoin d'introduire un système de spécialisation auxiliaire  $\log$ . Pour le construire, quelques préliminaires sont nécessaires :

#### 3.6.1 Préliminaires

Le système de spécialisation  $\log$  sera construit à partir de  $\chi$  en prenant pour  $\log_f(-)$  le foncteur  $\chi_f(- \otimes f_{\eta}^* \mathcal{L}og)$  avec  $\mathcal{L}og$  un objet  $\mathbf{H}(\mathbb{G}_m)$  bien choisi qu'on appellera le logarithme. Cet objet, ou plutôt son dual considéré comme un pro-objet, est bien connu. Il intervient par exemple dans la construction des polylogarithmes (voir [BD94] et [Wil97]). Notons que classiquement, le logarithme a été considéré dans les catégories de réalisations (faisceaux  $\ell$ -adiques, modules de Hodge, etc) pour lesquels on dispose de  $t$ -structures motiviques. Ceci facilite la construction puisqu'on est ramené à raisonner dans le coeur motivique qui est une catégorie abélienne tensorielle. Étant donné que l'existence d'une  $t$ -structure motivique pour  $\mathbf{DM}_{\mathbb{Q}}$  est l'un des problèmes ouverts les plus difficiles dans la théorie des motifs, une construction directe basée sur des techniques triangulées s'impose. Le but de ces préliminaires est de formaliser la construction de l'objet  $\mathcal{L}og$  dans le cadre d'une catégorie triangulée (par opposition au cadre abélien).

On se donne une catégorie monoïdale triangulée  $(\mathcal{T}, \otimes)$  symétrique et unitaire au sens de 2.1.148. On supposera que  $\mathcal{T}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et pseudo-abélienne et on notera  $\mathbb{1}$  son objet unité. Étant donné un objet  $A$  de  $\mathcal{T}$ , on déduit des représentations de l'algèbre du groupe symétrique  $\mathbb{Q}[\Sigma_n]$  sur  $A^{\otimes n}$  par la méthode usuelle. Étant donné un projecteur  $p$  de  $\mathbb{Q}[\Sigma_n]$  on peut donc parler de l'image  $\text{Image}(p : A^{\otimes n})$  de  $p$  dans  $A^{\otimes n}$ . Lorsque  $p = \frac{1}{n!} \sum_{g \in \Sigma_n} g$  (resp.  $p = \frac{1}{n!} \sum_{g \in \Sigma_n} \text{sign}(g) \cdot g$ ) on notera cette image par  $\text{Sym}^n A$  (resp.  $\text{Alt}^n A$ ).

On supposera donné un triangle distingué de  $\mathcal{T}$  :

$$(3.26) \quad \nu \xrightarrow{a} \mathcal{E} \xrightarrow{b} \lambda \xrightarrow{c} \nu[+1]$$

tel que les conditions de l'hypothèse suivante sont vérifiées :

- HYPOTHÈSE 3.6.1** — **1-** Les objets  $\nu$  et  $\lambda$  sont inversibles et les objets  $\text{Alt}^2 \nu$  et  $\text{Alt}^2 \lambda$  sont nuls,  
**2-** Les groupes d'homomorphismes  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu^{\otimes n}, \lambda^{\otimes n}[k])$  sont nuls pour  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  et  $k \in \{-1, 0\}$ .  
**3-** Le groupe d'homomorphisme  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \nu)$  est nul. L'annulateur dans  $\text{end}_{\mathcal{T}}(\mathbb{1})$  de l'élément  $c \in \text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \nu[+1])$  est réduit à l'idéal nul.

**Remarque 3.6.2** — Les données ci-dessus sont autoduales. En effet, dans  $\mathcal{T}^{\text{op}}$ , le triangle distingué :

$$\nu' \xrightarrow{a'} \mathcal{E}' \xrightarrow{b'} \lambda' \xrightarrow{c'} \nu'[+1]$$

avec  $\nu' = \lambda$ ,  $\lambda' = \nu$ ,  $a' = b^{\text{op}}$ ,  $b' = a^{\text{op}}$  et  $c' = -(c[-1])^{\text{op}}$  vérifie bien les conditions de l'hypothèse 3.6.1. Ceci permettra d'effectuer des raisonnements par dualité dans la suite.

Les trois lemmes suivants seront utilisés au cours de la preuve de la proposition 3.6.6. Ils sont des conséquences directes de l'hypothèse 3.6.1 :

**LEMME 3.6.3** — *Le triangle distingué (3.26) n'admet pas d'endomorphismes non triviaux induisant l'identité sur  $\mathcal{E}$ . En particulier, une flèche  $\alpha : \nu \longrightarrow \nu$  rendant commutatif le carré :*

$$\begin{array}{ccc} \nu & \xrightarrow{a} & \mathcal{E} \\ \alpha \downarrow & & \parallel \\ \nu & \xrightarrow{a} & \mathcal{E} \end{array}$$

*est forcément l'identité de  $\nu$ . De même, une flèche  $\beta : \lambda \longrightarrow \lambda$  rendant commutatif le carré :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{b} & \lambda \\ \parallel & & \downarrow \beta \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{b} & \lambda \end{array}$$

*est forcément l'identité de  $\lambda$ .*

DEMONSTRATION On se donne un endomorphisme du triangle distingué (3.26) :

$$\begin{array}{ccccccc} \nu & \xrightarrow{a} & \mathcal{E} & \xrightarrow{b} & \lambda & \longrightarrow & \nu[+1] \\ \alpha \downarrow & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ \nu & \xrightarrow{a} & \mathcal{E} & \xrightarrow{b} & \lambda & \longrightarrow & \nu[+1] \end{array}$$

En retranchant à cet endomorphisme, l'automorphisme identité, on obtient l'endomorphisme :

$$\begin{array}{ccccccc} \nu & \xrightarrow{a} & \mathcal{E} & \xrightarrow{b} & \lambda & \longrightarrow & \nu[+1] \\ \alpha - \text{id} \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow \beta - \text{id} & & \downarrow \alpha - \text{id} \\ \nu & \xrightarrow{a} & \mathcal{E} & \xrightarrow{b} & \lambda & \longrightarrow & \nu[+1] \end{array}$$

On prouvera que  $\alpha - \text{id} = 0$  et  $\beta - \text{id} = 0$ . Par dualité (voir la remarque 3.6.2), il suffit de traiter uniquement la première égalité. En remarquant que la composée :

$$\nu \xrightarrow{\alpha - \text{id}} \nu \xrightarrow{a} \mathcal{E}$$

est nulle, on déduit une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} & & \nu \\ & \swarrow \text{dotted} & \downarrow \alpha - \text{id} \\ \lambda[-1] & \longrightarrow & \nu \end{array}$$

Mais par l'hypothèse  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \lambda[-1]) = 0$ . D'où le résultat. C.Q.F.D

**LEMME 3.6.4** — *On a les annulations  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathcal{E}) = 0$  et  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}, \nu) = 0$ . On a également les deux chaînes d'isomorphismes :*

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) &\xrightarrow{\sim} \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \mathcal{E}) \xleftarrow{\sim} \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \nu) \simeq \text{end}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}) \\ \text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) &\xrightarrow{\sim} \text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}, \lambda) \xleftarrow{\sim} \text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \lambda) \simeq \text{end}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}) \end{aligned}$$

DEMONSTRATION Montrons d'abord que  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathcal{E}) = 0$ . Pour cela, on écrit les premiers termes de la suite exacte longue associée au triangle (3.26) :

$$\text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \nu) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathcal{E}) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \lambda) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \nu[+1])$$

Par hypothèse, on a  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \nu) = 0$ . Il reste à prouver que  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \lambda) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \nu[+1])$  est injectif. Cet homomorphisme envoie l'identité de  $\lambda$  sur le morphisme connectant  $c$  du triangle (3.26). C'est également un morphisme de  $\text{end}(\mathbf{1})$ -module. Étant donné que  $\lambda$  est inversible,  $\text{end}(\lambda)$  est un  $\text{end}(\mathbf{1})$ -module libre de rang 1 engendré par  $\text{id}_{\lambda}$ . Il vient par la troisième condition de l'hypothèse 3.6.1 que l'homomorphisme qui nous préoccupe est bien injectif. Par dualité (voir la remarque 3.6.2) on obtient également l'annulation de  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}, \nu)$ .

Passons aux chaînes d'isomorphismes. Notons tout de suite que la seconde chaîne s'obtient à partir de la première par dualité (voir remarque 3.6.2). Considérons l'homomorphisme :

$$(3.27) \quad \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \nu) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \mathcal{E})$$

Écrivons les premiers termes de la suite exacte longue associée au triangle (3.26) :

$$\text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \lambda[-1]) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \nu) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \mathcal{E}) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \lambda)$$

Par hypothèse,  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \lambda) = \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \lambda[-1]) = 0$ . Il vient que l'homomorphisme (3.27) est bien inversible. En particulier,  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \mathcal{E})$  est un  $\text{end}(\mathbf{1})$ -module libre de rang 1 engendré par  $a$ .

Pour terminer, il nous reste à traiter l'homomorphisme :

$$(3.28) \quad \text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \mathcal{E})$$

Écrivons les premiers termes de la suite exacte longue associée au triangle (3.26) :

$$\text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathcal{E}) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \mathcal{E})$$

On a vu que  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathcal{E}) = 0$ . Ceci montre que (3.28) est injectif. Montrons qu'il est également surjectif. Remarquons pour cela, que l'identité de  $\mathcal{E}$  est envoyée sur  $a$  par cet homomorphisme. La surjectivité découle alors du fait que (3.28) est un morphisme de  $\text{end}(\mathbf{1})$ -modules et que  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \mathcal{E})$  est engendré par  $a$  en tant que  $\text{end}(\mathbf{1})$ -module. C.Q.F.D

**LEMME 3.6.5** — On a  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E} \otimes \nu[+1], \lambda \otimes \lambda) = 0$  et  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \nu[+1], \mathcal{E} \otimes \lambda) = 0$ .

DEMONSTRATION Pour  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E} \otimes \nu[+1], \lambda \otimes \lambda)$  il suffit de considérer la suite exacte :

$$\text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda \otimes \nu[+1], \lambda \otimes \lambda) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E} \otimes \nu[+1], \lambda \otimes \lambda) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \nu[+1], \lambda \otimes \lambda)$$

Par dualité, on a l'annulation de  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \nu[+1], \mathcal{E} \otimes \lambda)$ .

C.Q.F.D

La proposition suivante jouera un rôle important dans la suite, notamment dans la construction des triangles distingués du théorème 3.6.10 :

**PROPOSITION 3.6.6** — Il existe un unique morphisme  $l : \text{Alt}^2(\mathcal{E}) \longrightarrow \nu \otimes \lambda$  rendant commutatif le carré suivant :

$$(3.29) \quad \begin{array}{ccc} \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \xrightarrow{l} & \nu \otimes \lambda \\ \downarrow & & \downarrow a \otimes \text{id} \\ \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \mathcal{E} \otimes \lambda \end{array}$$

De même, il existe un unique morphisme  $k : \nu \otimes \lambda \longrightarrow \text{Alt}^2 \mathcal{E}$  rendant commutatif le carré suivant :

$$(3.30) \quad \begin{array}{ccc} \nu \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{a \otimes \text{id}} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \\ \text{id} \otimes b \downarrow & & \downarrow \\ \nu \otimes \lambda & \xrightarrow{k} & \text{Alt}^2 \mathcal{E} \end{array}$$

De plus, les morphismes  $l$  et  $k$  sont des isomorphismes tels que  $l \circ k = \frac{1}{2} \text{id}_{\nu \otimes \lambda}$  et  $k \circ l = \frac{1}{2} \text{id}_{\text{Alt}^2 \mathcal{E}}$ .

DEMONSTRATION On divise la preuve en plusieurs étapes. On montre d'abord l'existence de  $l$  et  $k$ . Ensuite, on prouve la relation  $2l \circ k = \text{id}$ . On utilisera ceci pour construire un triangle distingué de la forme :

$$(3.31) \quad \nu \otimes \nu \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow \nu \otimes \nu[+1]$$

pour lequel on explicitera l'action du groupe symétrique  $\Sigma_2 = \{+1, -1\}$ . On montrera que  $l$  est inversible en passant au facteur direct alterné de ce triangle distingué. La dernière étape est consacrée à l'unicité de  $l$  et  $k$ .

**Étape 1 :** *Construction de  $l$  et de  $k$ .* La composée :

$$\text{Alt}^2 \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\text{id} \otimes b} \mathcal{E} \otimes \lambda \xrightarrow{b \otimes \text{id}} \lambda \otimes \lambda$$

est nulle. En effet, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Alt}^2 \lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes \lambda \longrightarrow \lambda \otimes \lambda \end{array}$$

et l'objet  $\text{Alt}^2 \lambda$  est nul. En utilisant le triangle distingué  $\nu \otimes \lambda \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \lambda \longrightarrow \lambda \otimes \lambda \longrightarrow$ , on déduit une flèche  $l : \text{Alt}^2 \mathcal{E} \longrightarrow \nu \otimes \lambda$  faisant commuter le carré :

$$\begin{array}{ccc} \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \xrightarrow{\quad l \quad} & \nu \otimes \lambda \\ \downarrow & & \downarrow a \otimes \text{id} \\ \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \mathcal{E} \otimes \lambda \end{array}$$

On procède de même pour construire une flèche  $k$ . La composée :

$$\nu \otimes \nu \xrightarrow{\text{id} \otimes a} \nu \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{a \otimes \text{id}} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \text{Alt}^2 \mathcal{E}$$

est nulle. En effet, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \nu \otimes \nu & \longrightarrow & \nu \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Alt}^2 \nu & \longrightarrow & \text{Alt}^2 \mathcal{E} \end{array}$$

et l'objet  $\text{Alt}^2 \nu$  est nul. En utilisant le triangle distingué :  $\nu \otimes \lambda \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \lambda \longrightarrow \lambda \otimes \lambda \longrightarrow$ , on déduit une flèche  $k : \nu \otimes \lambda \longrightarrow \text{Alt}^2 \mathcal{E}$  faisant commuter le carré :

$$\begin{array}{ccc} \nu \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{a \otimes \text{id}} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \\ \text{id} \otimes b \downarrow & & \downarrow \\ \nu \otimes \lambda & \xrightarrow{\quad k \quad} & \text{Alt}^2 \mathcal{E} \end{array}$$

On a ainsi montré l'existence des flèches  $l$  et  $k$  de l'énoncé.

**Étape 2 :** *La relation  $2l \circ k = \text{id}_{\nu \otimes \lambda}$ .* Formons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \nu \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{a \otimes \text{id}} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & & \\ \text{id} \otimes b \downarrow & & \downarrow & & \\ \nu \otimes \lambda & \xrightarrow{k} & \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \xrightarrow{l} & \nu \otimes \lambda \\ & & \downarrow & & \downarrow a \otimes \text{id} \\ & & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \mathcal{E} \otimes \lambda \end{array}$$

On déduit que les deux composées suivantes sont égales :

$$(3.32) \quad \nu \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\text{id} \otimes b} \nu \otimes \lambda \xrightarrow{l \circ k} \nu \otimes \lambda \xrightarrow{a \otimes \text{id}} \mathcal{E} \circ \lambda$$

$$(3.33) \quad \nu \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{a \otimes \text{id}} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\frac{1}{2}(\text{id} - \tau)} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\text{id} \otimes b} \mathcal{E} \circ \lambda$$

Nous affirmons que la composée  $\nu \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{a \otimes \text{id}} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\tau} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\text{id} \otimes b} \mathcal{E} \circ \lambda$  est nulle. En effet, cette composée est clairement égale à celle de :

$$\nu \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\tau} \mathcal{E} \otimes \nu \xrightarrow{\text{id} \otimes a} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\text{id} \otimes b} \mathcal{E} \otimes \lambda$$

et la composée  $b \circ a$  est nulle puisque le triangle (3.26) est distingué. Nous déduisons de cela que la composée de (3.32) est égale à celle de :

$$\nu \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{a \otimes \text{id}} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\frac{1}{2} \text{id}} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\text{id} \otimes b} \mathcal{E} \otimes \lambda$$

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \nu \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \nu \otimes \lambda & \xrightarrow{2l \circ k} & \nu \otimes \lambda \\ a \otimes \text{id} \downarrow & & & & \downarrow a \otimes \text{id} \\ \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \mathcal{E} \otimes \lambda & & \mathcal{E} \otimes \lambda \end{array}$$

D'autre part, le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \nu \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \nu \otimes \lambda \\ a \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow a \otimes \text{id} \\ \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \mathcal{E} \otimes \lambda \end{array}$$

est trivialement commutatif. On en déduit que la composée suivante :

$$\nu \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\text{id} \otimes b} \nu \otimes \lambda \xrightarrow{2l \circ k - \text{id}} \nu \otimes \lambda \xrightarrow{a \otimes \text{id}} \mathcal{E} \otimes \lambda$$

est nulle. En utilisant le triangle distingué  $\nu \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \nu \otimes \lambda \longrightarrow \nu \otimes \nu[+1] \longrightarrow$ , on déduit l'existence d'une flèche  $\nu \otimes \nu[+1] \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \lambda$  rendant commutatif le carré :

$$\begin{array}{ccc} \nu \otimes \lambda & \xrightarrow{2l \circ k - \text{id}} & \nu \otimes \lambda \\ \downarrow & & \downarrow a \otimes \text{id} \\ \nu \otimes \nu[+1] & \cdots \cdots \cdots \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes \lambda \end{array}$$

Par le lemme 3.6.5, on a  $\text{hom}_{\mathcal{J}}(\nu \otimes \nu[+1], \mathcal{E} \otimes \lambda) = 0$ . Il vient immédiatement que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \nu \otimes \lambda & \xrightarrow{a \otimes \text{id}} & \mathcal{E} \otimes \lambda \\ 2l \circ k \downarrow & & \parallel \\ \nu \otimes \lambda & \xrightarrow{a \otimes \text{id}} & \mathcal{E} \otimes \lambda \end{array}$$

commute. Comme  $\lambda$  est un objet inversible, on peut appliquer le lemme 3.6.3 pour conclure que  $2l \circ k = \text{id}$ .

**Étape 3 :** *Le triangle distingué (3.31).* Dans cette étape on construit le triangle distingué annoncé au début de la démonstration. On introduit le morphisme  $m : \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \nu \otimes \lambda$  défini par la composée :

$$m : \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \text{Alt}^2 \mathcal{E} \xrightarrow{2l} \nu \otimes \lambda$$

Le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \nu \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \nu \otimes \lambda \\ a \otimes \text{id} \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{m} & \nu \otimes \lambda \end{array}$$

En effet, on peut le factoriser de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} \nu \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \nu \otimes \lambda \\ a \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow k \\ \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Alt}^2 \mathcal{E} \xrightarrow{2l} \nu \otimes \lambda \end{array}$$

En utilisant que  $b \circ a = 0$ , on déduit immédiatement un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \nu \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{a \otimes \text{id}} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \\ \text{id} \otimes b \downarrow & & \downarrow (b \otimes \text{id}) \\ \nu \otimes \lambda & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix}} & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) \end{array}$$

qu'on complète en un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} \nu \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{a \otimes \text{id}} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{b \otimes \text{id}} & \lambda \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{c \otimes \text{id}} & \nu \otimes \mathcal{E}[+1] \\ \text{id} \otimes b \downarrow & & \downarrow (b \otimes \text{id}) & & \downarrow \gamma & & \downarrow a \otimes \text{id} \\ \nu \otimes \lambda & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix}} & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) & \xrightarrow{(0, \text{id})} & \lambda \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{0} & \nu \otimes \lambda \end{array}$$

Nous affirmons que la flèche  $\gamma$  dans le diagramme ci-dessus est l'identité. En effet, on voit immédiatement que la composée suivante :

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{b \otimes \text{id}} \lambda \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\gamma - \text{id}_{\lambda \otimes \mathcal{E}}} \lambda \otimes \mathcal{E}$$

est nulle. En utilisant le triangle distingué  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \lambda \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \nu \otimes \mathcal{E}[+1] \longrightarrow$ , on voit que la flèche  $\gamma - \text{id}$  se factorise de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} \lambda \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\gamma - \text{id}} & \lambda \otimes \mathcal{E} \\ c \otimes \text{id} \downarrow & \nearrow d & \\ \nu \otimes \mathcal{E}[+1] & & \end{array}$$

On dispose d'une suite exacte :

$$\text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \mathcal{E}[+1], \lambda \otimes \nu) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \mathcal{E}[+1], \lambda \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \mathcal{E}[+1], \lambda \otimes \lambda)$$

Par le lemme 3.6.5, on sait que  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \mathcal{E}[+1], \lambda \otimes \lambda) = 0$ . Il vient que le premier homomorphisme est surjectif. Il existe donc une flèche  $e : \nu \otimes \mathcal{E}[+1] \longrightarrow \lambda \otimes \nu$  qui factorise  $d$ . On dispose ainsi d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \lambda \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\gamma - \text{id}} & \lambda \otimes \mathcal{E} \\ c \otimes \text{id} \downarrow & \nearrow d & \uparrow \text{id} \otimes a \\ \nu \otimes \mathcal{E}[+1] & \xrightarrow{e} & \lambda \otimes \nu \end{array}$$

La relation  $\gamma = \text{id}$  découle alors du fait que  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\lambda \otimes \mathcal{E}, \lambda \otimes \nu) \simeq \text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}, \nu) = 0$  (voir le lemme 3.6.4).

Ainsi, on dispose d'un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} \nu \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{a \otimes \text{id}} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{b \otimes \text{id}} & \lambda \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{c \otimes \text{id}} & \nu \otimes \mathcal{E}[+1] \\ \text{id} \otimes b \downarrow & & \downarrow (b \otimes \text{id}) & & \parallel & & \downarrow a \otimes \text{id} \\ \nu \otimes \lambda & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix}} & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) & \xrightarrow{(0, \text{id})} & \lambda \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{0} & \nu \otimes \lambda \end{array}$$

En appliquant l'axiome de l'octaèdre, on déduit l'existence d'un triangle distingué :

$$(3.34) \quad \nu \otimes \nu \xrightarrow{a \otimes a} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\begin{pmatrix} m \\ b \otimes \text{id} \end{pmatrix}} (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow \nu \otimes \nu[+1]$$

C'est le triangle distingué recherché.

**Étape 4 :** L'action de  $\Sigma_2$  sur (3.34). On cherche à utiliser le triangle distingué (3.34) pour mieux comprendre l'action de  $\Sigma_2$  sur  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$  afin de pouvoir identifier  $\text{Alt}^2 \mathcal{E}$  avec  $\nu \otimes \lambda$ . On notera  $\tau$  la permutation des facteurs. On peut compléter le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \lambda \otimes \lambda & \xrightarrow{a \otimes a} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \lambda \otimes \lambda & \xrightarrow{a \otimes a} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \end{array}$$



en un isomorphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \nu \otimes \nu & \xrightarrow{a \otimes a} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\binom{m}{b \otimes \text{id}}} & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) & \longrightarrow & \nu \otimes \nu[+1] \\
 \tau \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow u = \begin{pmatrix} xy \\ zt \end{pmatrix} & & \downarrow \tau \\
 \nu \otimes \nu & \xrightarrow{a \otimes a} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\binom{m}{b \otimes \text{id}}} & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) & \longrightarrow & \nu \otimes \nu[+1]
 \end{array}$$

On va calculer la matrice de l'isomorphisme  $u$ . Remarquons tout de suite que  $y = 0$  étant donné que  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}, \nu) = 0$  (voir le lemme 3.6.4) et que  $\lambda$  est inversible. Notre matrice est donc triangulée inférieure et on peut former le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\binom{m}{b \otimes \text{id}}} & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) & \xrightarrow{(\text{id}, 0)} & \nu \otimes \lambda \\
 \downarrow \tau & & \downarrow u = \begin{pmatrix} x^0 \\ zt \end{pmatrix} & & \downarrow x \\
 \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\binom{m}{b \otimes \text{id}}} & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) & \xrightarrow{(\text{id}, 0)} & \nu \otimes \lambda
 \end{array}$$

La composée des flèches horizontales est égale à  $m$  et donc à la composée  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \text{Alt}^2 \mathcal{E} \xrightarrow{2l} \nu \otimes \lambda$ . Étant donné que  $2l$  admet une section (donnée par  $k$ ) on déduit que  $x = -\text{id}_{\nu \otimes \lambda}$  du fait que  $\tau$  agit par  $-\text{id}$  sur  $\text{Alt}^2 \mathcal{E}$ .

Montrons que  $t = \text{id}_{\lambda \otimes \mathcal{E}}$ . Par le lemme 3.6.4 (et du fait que  $\lambda$  est inversible), il existe un unique  $t' : \lambda \otimes \lambda \longrightarrow \lambda \otimes \lambda$  tel que le carré suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \lambda \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \lambda \otimes \lambda \\
 t \downarrow & & \downarrow t' \\
 \lambda \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \lambda \otimes \lambda
 \end{array}$$

De plus, pour montrer que  $t = \text{id}$ , il suffit de montrer que  $t' = \text{id}$ , ce que l'on fera. Nous affirmons que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) & \longrightarrow & \lambda \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \lambda \otimes \lambda \\
 u \downarrow & & & & \downarrow t' \\
 (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) & \longrightarrow & \lambda \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \lambda \otimes \lambda
 \end{array}$$

En effet, il faut vérifier que la composée :

$$\nu \otimes \lambda \xrightarrow{z} \lambda \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \lambda \otimes \lambda$$

est nulle. Ceci est vrai étant donné que  $\lambda$  est inversible et que  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu, \lambda) = 0$ . Il vient que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \lambda \otimes \lambda \\
 \tau \downarrow & & \downarrow t' \\
 \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \lambda \otimes \lambda
 \end{array}$$

Comme  $\text{Alt}^2 \lambda = 0$ , le carré suivant est également commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \lambda \otimes \lambda \\
 \tau \downarrow & & \parallel \\
 \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \lambda \otimes \lambda
 \end{array}$$

Comme  $\tau$  est un isomorphisme, on déduit que la composée :

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \lambda \otimes \lambda \xrightarrow{\text{id} - t'} \lambda \otimes \lambda$$

est nulle. Par dualité, on dispose d'un triangle distingué analogue à (3.34), à savoir :

$$(\nu \otimes \lambda) \oplus \mathcal{E} \otimes \nu \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \lambda \otimes \lambda \longrightarrow$$

Il vient que  $\text{id} - t'$  se factorise par  $((\nu \otimes \lambda) \oplus (\mathcal{E} \otimes \nu))[+1]$ . Ainsi pour montrer que  $t' = \text{id}$ , il suffira de montrer que :  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu[+1], \lambda) = 0$  et  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E} \otimes \nu[+1], \lambda \otimes \lambda) = 0$ . Ceci est vrai par l'hypothèse 3.6.1 et le lemme 3.6.5.

Il reste à déterminer la flèche  $z : \nu \otimes \lambda \longrightarrow \lambda \otimes \mathcal{E}$ . Pour cela, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{v} & & \\
 \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) \\
 \downarrow -\text{id} & & \downarrow \tau & & \downarrow u \\
 \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E}) \\
 & & \xrightarrow{v} & & 
 \end{array}$$

Calculons la composée  $v$  des deux flèches horizontales du diagramme ci-dessus. Sur le facteur  $\nu \otimes \lambda$ , la flèche  $v$  est donnée par :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{2l} & \\
 \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Alt}^2 \mathcal{E} \xrightarrow{2l} \nu \otimes \lambda \\
 & & & \searrow m & 
 \end{array}$$

Elle est donc simplement égale à  $2l$ . Pour décrire la composante de  $v$  qui correspond au facteur  $\lambda \otimes \mathcal{E}$ , on considère de diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{b \otimes \text{id}} & \lambda \otimes \mathcal{E} \\
 \downarrow -\text{id} & & \uparrow \tau & & \uparrow \tau \\
 \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \mathcal{E} \otimes \lambda \\
 & \searrow l & & \nearrow a \otimes \text{id} & \\
 & & \nu \otimes \lambda & & 
 \end{array}$$

Ceci montre que cette composante est donnée par :  $-\tau \circ (a \otimes \text{id}) \circ l$ . On a ainsi montré que  $v$  est donné par la matrice :

$$v = \begin{pmatrix} 2l & \\ -\tau \circ (a \otimes \text{id}) \circ l & \end{pmatrix}$$

La relation  $u \circ v = -v$  se traduit alors par :

$$\begin{pmatrix} -\text{id} & 0 \\ z & \text{id} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2l & \\ -\tau \circ (a \otimes \text{id}) \circ l & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2l & \\ \tau \circ (a \otimes \text{id}) \circ l & \end{pmatrix}$$

Ce qui donne la relation  $2z \circ l - \tau \circ (a \otimes \text{id}) \circ l = \tau \circ (a \otimes \text{id}) \circ l$ , ou encore  $(z - \tau \circ (a \otimes \text{id})) \circ l = 0$ . La flèche  $l$  admettant une section (à savoir  $2k$ ), on déduit finalement que  $z = \tau \circ (a \otimes \text{id})$ .

En fin de compte, on a :

$$u = \begin{pmatrix} -\text{id} & 0 \\ \tau \circ (a \otimes \text{id}) & \text{id} \end{pmatrix}$$

**Étape 5 :** Les flèches  $l$  et  $k$  sont inversibles. Vu la relation  $2l \circ k = \text{id}$ , il suffit de montrer que  $l$  est inversible.

D'après l'étape précédente, on dispose d'une action de  $\Sigma_2$  sur le triangle distingué (3.34) donnée par l'involution qui sur les deux premiers sommets agit par  $\tau$  et sur le troisième sommet agit par  $u$  (vérifier que  $u^2 = \text{id}$ ).

On déduit alors un projecteur de (3.34), donné par  $\frac{1}{2}(\text{id} - \tau)$  sur les deux premiers sommets et par :

$$q = \frac{1}{2}(\text{id} - u) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ \frac{1}{2}\tau \circ (a \otimes \text{id}) & 0 \end{pmatrix}$$

sur le troisième sommet. En passant aux images de projecteurs, on obtient un triangle distingué :

$$0 \longrightarrow \text{Alt}^2 \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \text{Image}(q : (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E})) \longrightarrow 0[+1]$$

Ce qui montre en particulier que la composée :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{v} & & \\
 \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathcal{E})
 \end{array}$$

admet une rétraction. Mais on a vu que  $v$  se factorise par  $l : \text{Alt}^2 \mathcal{E} \longrightarrow \nu \otimes \lambda$ . Ceci montre que  $l$  admet une rétraction. Il vient que la flèche  $l$  est inversible puisqu'elle admet également une section (à savoir  $2k$ ).

**Étape 6 :** *Unicité de  $l$  et  $k$ .* Il est facile à ce stade de prouver l'unicité de  $l$  et  $k$ . En effet, soit  $l' : \text{Alt}^2 \mathcal{E} \longrightarrow \nu \otimes \lambda$  une autre flèche rendant commutatif le premier carré de l'énoncé. On a  $2l' \circ k = 2l \circ k = \text{id}$ . Comme  $k$  est inversible, on a forcément  $l' = \frac{1}{2}k^{-1} = l$ . Le même raisonnement s'applique pour montrer l'unicité de  $k$ . C.Q.F.D

Notons le corollaire suivant :

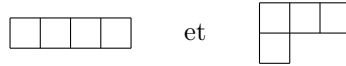
**COROLLAIRE 3.6.7** — *Supposons que la catégorie monoïdale  $\mathcal{T}$  est fermée et que le bifoncteur  $\underline{\text{Hom}}(-, -)$  est triangulé en les deux variables. On a alors  $\text{Alt}^3 \mathcal{E} = 0$ . En d'autres termes,  $\mathcal{E}$  est pair de dimension 2 au sens de Kimura (voir [Kim05] et [AK02]).*

DEMONSTRATION Montrons d'abord que  $\text{Alt}^2(\nu \otimes \lambda) = 0$ . Ceci équivaut à dire que la permutation des facteurs  $\tau$  agit par l'identité sur  $(\nu \otimes \lambda)^{\otimes 2}$ . Pour cela il suffit de remarquer que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} (\nu \otimes \lambda) \otimes (\nu \otimes \lambda) & \longrightarrow & \nu \otimes (\lambda \otimes \nu) \otimes \lambda & \xrightarrow{\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}} & \nu \otimes (\nu \otimes \lambda) \otimes \lambda & \longrightarrow & (\nu \otimes \nu) \otimes \lambda \otimes \lambda \\ \downarrow \tau & & & & & & \downarrow \tau \otimes \tau \\ (\nu \otimes \lambda) \otimes (\nu \otimes \lambda) & \longrightarrow & \nu \otimes (\lambda \otimes \nu) \otimes \lambda & \xrightarrow{\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}} & \nu \otimes (\nu \otimes \lambda) \otimes \lambda & \longrightarrow & (\nu \otimes \nu) \otimes \lambda \otimes \lambda \end{array}$$

est commutatif étant donné que  $\tau$  agit par l'identité sur  $\nu^{\otimes 2}$  et  $\lambda^{\otimes 2}$ .

On sait, par la proposition 3.6.6, que  $\text{Alt}^2 \mathcal{E} \simeq \nu \otimes \lambda$ . Il vient que  $\text{Alt}^2(\text{Alt}^2 \mathcal{E}) = 0$ . On déduit que  $\mathcal{E}$  est tué par les foncteurs de Schur correspondant au diagrammes de Young suivants :



Il vient immédiatement que  $(\text{Alt}^3 \mathcal{E})^{\otimes 2} = 0$ . Les objets  $\nu$  et  $\lambda$  étant inversibles, ils admettent des duals forts au sens de [AK02]. Comme  $\mathcal{T}$  est fermée, un objet  $A$  admet  $\underline{\text{Hom}}(A, \mathbb{1})$  pour dual fort si et seulement si le morphisme évident :

$$\underline{\text{Hom}}(A, \mathbb{1}) \otimes - \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, -)$$

est inversible. Ceci montre que la propriété d'avoir un dual fort est stable par extensions (au sens triangulé). On déduit alors que l'objet  $\text{Alt}^3 \mathcal{E}$  admet un dual fort. L'égalité  $(\text{Alt}^3 \mathcal{E})^{\otimes 2} = 0$  implique alors que  $\text{Alt}^3 \mathcal{E}$  est nul d'après Kimura (voir [Kim05] ou plutôt la généralisation du résultat de Kimura dans [AK02]). C.Q.F.D

Dans le reste de cette sous-section, supposera que  $\text{Alt}^3 \mathcal{E} = 0$  (ce qui est le cas si  $(\mathcal{T}, \otimes)$  est fermée et que le bifoncteur  $\underline{\text{Hom}}(-, -)$  est triangulé par rapport aux deux variables). On s'intéressera aux objets  $\text{Sym}^n \mathcal{E}$ . On a la conséquence suivante du corollaire 3.6.7 :

**COROLLAIRE 3.6.8** — *Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Les deux morphismes évidents :*

$$\begin{aligned} \text{Sym}^{n+1} \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E}^{\otimes n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{\otimes n} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \\ \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E}^{\otimes n-1} \otimes (\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{\otimes n} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \end{aligned}$$

induisent un isomorphisme  $\text{Sym}^{n+1} \mathcal{E} \oplus (\text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\text{Sym}^n \mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}$ .

Le carré commutatif (3.29) de la proposition 3.6.6 se généralise aux cas des  $\text{Sym}^n \mathcal{E}$  de la manière suivante :

**LEMME 3.6.9** — *Pour tout  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , le carré suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \xrightarrow[\sim]{\text{id} \otimes l} & \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes (\nu \otimes \lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{b} & \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \lambda \end{array}$$

où la flèche  $\text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes \nu \otimes \lambda \longrightarrow \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \lambda$  est la flèche évidente déduite de  $a : \nu \longrightarrow \mathcal{E}$ .

DEMONSTRATION En effet, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{\otimes n-1} \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}^{\otimes n-1}(\nu \otimes \lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}^{\otimes n} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}^{\otimes n} \otimes \lambda \end{array}$$

obtenu à partir du premier carré de la proposition 3.6.6 en tensorisant partout par  $\mathcal{E}^{\otimes n-1}$ . Le groupe symétrique  $\Sigma_{n-1}$  agit sur les objets de ce carré et les flèches sont  $\Sigma_{n-1}$ -équivariantes. Le groupe symétrique  $\Sigma_n$  agit sur les deux objets  $\mathcal{E}^n \otimes \mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}^n \otimes \lambda$  et la flèche horizontale inférieure est  $\Sigma_n$ -équivariante. Ainsi, en passant au plus gros quotient sur lequel  $\Sigma_{n-1}$  ou  $\Sigma_n$  agit trivialement, on obtient le carré de l'énoncé. C.Q.F.D

Soit  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ . On définit une flèche

$$a_{m,n} : \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \longrightarrow \text{Sym}^{m+n} \mathcal{E}$$

à partir de  $(\text{id}^{\otimes m} \otimes a^{\otimes n}) : \mathcal{E}^{\otimes m} \otimes \nu^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{E}^{m+n}$  en passant aux plus grands quotients invariants par l'action des groupes symétriques  $\Sigma_m$  et  $\Sigma_{n+m}$ . Dualemt, on définit une flèche :

$$b_{m,n} : \text{Sym}^{m+n} \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes n}$$

à partir de  $(\text{id}^{\otimes m} \otimes b^{\otimes n}) : \mathcal{E}^{\otimes m+n} \longrightarrow \mathcal{E}^{\otimes n} \otimes \lambda^{\otimes n}$  en passant aux plus grands sous-objets invariants par l'action des groupes symétriques  $\Sigma_m$  et  $\Sigma_{n+m}$ .

Le théorème suivant décrit la structure des objets  $\text{Sym}^m \mathcal{E}$  :

**THEOREME 3.6.10** — **1-** Soient  $(m, n) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2$ . Il existe un unique triangle distingué :

$$(3.35) \quad \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \xrightarrow{a_{m-1,n}} \text{Sym}^{m+n-1} \mathcal{E} \xrightarrow{b_{n-1,m}} \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m} \longrightarrow \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n}[+1]$$

**2-** Pour  $(m, n, r) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2 \times \mathbb{N}$ , les deux diagrammes suivants sont des morphismes de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} \nu^{\otimes r} \otimes \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} & \xrightarrow{\text{id} \otimes a_{m-1,n}} & \nu^{\otimes r} \otimes \text{Sym}^{m+n-1} \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b_{n-1,m}} & \nu^{\otimes r} \otimes \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m} & \longrightarrow & \\ \tau \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow (a_{m+n-1,r}) \circ \tau & & \downarrow ((a_{n-1,r}) \circ \tau) \otimes \text{id} & & \\ \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n+r} & \xrightarrow{a_{m-1,n+r}} & \text{Sym}^{m+n+r-1} \mathcal{E} & \xrightarrow{b_{n+r-1,m}} & \text{Sym}^{n+r-1} \mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m} & \longrightarrow & \\ \\ \text{Sym}^{m+r-1} \mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} & \xrightarrow{a_{m+r-1,n}} & \text{Sym}^{m+n+r-1} \mathcal{E} & \xrightarrow{b_{n-1,m+r}} & \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r} & \longrightarrow & \\ (\tau \circ b_{m-1,r}) \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow b_{m+n-1,r} & & \downarrow \tau \otimes \text{id} & & \\ \lambda^{\otimes r} \otimes \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} & \xrightarrow{\text{id} \otimes a_{m-1,n}} & \lambda^{\otimes r} \otimes \text{Sym}^{m+n-1} \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b_{n-1,m}} & \lambda^{\otimes r} \otimes \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m} & \longrightarrow & \end{array}$$

**3-** Pour  $(m, n, r) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2 \times \mathbb{N}$  et  $k \in \{-1, 0\}$ , on a l'annulation suivante :

$$\text{hom}_{\mathcal{T}}(\text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n+r}, \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r}[k]) = 0$$

**DEMONSTRATION** On divise la démonstration en plusieurs étapes. On commence par un cas particulier de la partie **1** du théorème. On l'utilise pour montrer le résultat d'annulation de la partie **3**. On reprend ensuite la partie **1** et on termine par une preuve de la partie **2**.

**Étape 1 :** On commence par construire les triangles distingués (3.35) lorsque l'un des deux entiers  $m$  et  $n$  est égal à 1. Par dualité (voir la remarque 3.6.2), il suffit de traiter le cas  $n = 1$ . Dans ce cas, le triangle (3.35) que l'on cherche à construire s'écrit :

$$\text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \nu \longrightarrow \text{Sym}^m \mathcal{E} \longrightarrow \lambda^{\otimes m} \longrightarrow \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E}[+1]$$

Lorsque  $m = 1$ , il s'agit du triangle distingué (3.26). Supposons le triangle distingué construit pour  $m \geq 1$  et construisons le pour  $m + 1$ .

On a un triangle distingué évident :

$$\text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \nu \longrightarrow \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \lambda \longrightarrow \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \nu[+1]$$

obtenu en tensorisant le triangle distingué (3.26) par  $\text{Sym}^m \mathcal{E}$ . En utilisant le lemme 3.6.9, on déduit facilement un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{E} & \xrightarrow{\sim} & \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \nu \otimes \lambda & \longrightarrow & 0[+1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \nu & \longrightarrow & \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \lambda & \longrightarrow & \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \nu[+1] \end{array}$$

Le cône de la première flèche verticale non nulle est  $\text{Sym}^{m+1}\mathcal{E}$ . Le cône de la seconde flèche verticale non nulle est  $\lambda^m \otimes \lambda$  par l'hypothèse de récurrence. En appliquant l'axiome de l'octaèdre, on déduit du corollaire 3.6.8 le triangle recherché.

**Étape 2 :** Montrons que le groupe  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\text{Sym}^{m-1}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n+r}, \text{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r}[k])$  est nul pour  $(m, n, r) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2 \times \mathbb{N}$  et  $k \in \{-1, 0\}$ . On raisonnera par récurrence sur  $(n, m)$ . Lorsque  $(n, m) = 1$ , l'annulation recherchée est donnée dans l'hypothèse 3.6.1. On supposera donc que l'un des entiers  $n$  et  $m$  est strictement supérieur à 1. Par dualité, on peut supposer que  $m > 1$ , ce que l'on fera dans la suite. Le cas  $(1, m)$  des triangles (3.35), fournit la suite exacte (que l'on écrit verticalement pour des raisons de place) :

$$\begin{array}{c} \text{hom}_{\mathcal{T}}(\text{Sym}^{m-2} \otimes \lambda \otimes \nu^{\otimes n+r}, \text{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r}[k]) \quad \text{=====} \quad \text{hom}_{\mathcal{T}}(\text{Sym}^{m-2} \otimes \nu^{\otimes n+r}, \text{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1+r}[k]) = 0 \\ \downarrow \\ \text{hom}_{\mathcal{T}}(\text{Sym}^{m-1}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n+r}, \text{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r}[k]) \\ \downarrow \\ \text{hom}_{\mathcal{T}}(\nu^{\otimes m+n+r}, \text{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r}[k]) \quad \text{=====} \quad \text{hom}_{\mathcal{T}}(\text{Sym}^{1-1}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n+(m+r)}, \text{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r}[k]) = 0 \end{array}$$

D'où l'annulation recherchée.

**Étape 3 :** On peut maintenant achever la preuve de la partie 1 du théorème. On suppose que le triangle distingué (3.35) est construit pour tous les couples strictement inférieurs à  $(m, n)$  et on le construira pour  $(m, n)$ . On peut supposer que  $m, n \geq 2$ . On adoptera la convention :  $\text{Sym}^{-1}\mathcal{E} = 0$ .

Considérons le diagramme suivant :

$$(3.36) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Sym}^{m-3}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \text{Alt}^2\mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{m+n-3}\mathcal{E} \otimes \text{Alt}^2\mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m-2} \otimes \nu \otimes \lambda \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sym}^{m-2}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{m+n-2}\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \mathcal{E} \end{array}$$

(i) (ii)

avec les carrés (i) et (ii) construits de la manière suivante. Le carré (i) est la composée verticale des carrés suivants :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^{m-3}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \text{Alt}^2\mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{m+n-3}\mathcal{E} \otimes \text{Alt}^2\mathcal{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sym}^{m-3}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{m+n-3}\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sym}^{m-2}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{m+n-2}\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \end{array}$$

En particulier, il est commutatif. Le carré (ii) est la composée horizontale des carrés suivants :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sym}^{m+n-3}\mathcal{E} \otimes \text{Alt}^2\mathcal{E} & \xrightarrow[\sim]{\text{id} \otimes l} & \text{Sym}^{m+n-3}\mathcal{E} \otimes \nu \otimes \lambda & \longrightarrow & \text{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m-2} \otimes \nu \otimes \lambda \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sym}^{m+n-2}\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{m+n-2}\mathcal{E} \otimes \lambda & \longrightarrow & \text{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \mathcal{E} \end{array}$$

Ainsi, le diagramme (3.36) est commutatif. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on voit que les lignes horizontales de (3.36) s'étendent naturellement en des triangles distingués. On va montrer que (3.36) définit alors un morphisme de triangles distingués. Pour cela, on part du carré commutatif (ii) de (3.36) qu'on complète en un morphisme de triangles distingués :

$$(3.37) \quad \begin{array}{ccccccc} \text{Sym}^{m-3}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \text{Alt}^2\mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{m+n-3}\mathcal{E} \otimes \text{Alt}^2\mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m-2} \otimes \nu \otimes \lambda & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Sym}^{m-2}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{m+n-2}\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \end{array}$$

(i') (ii)

On va montrer que le carré (i') est forcément égal à (i), ce qui revient à dire que les deux flèches :

$$\mathrm{Sym}^{m-3}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathrm{Alt}^2\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Sym}^{m-2}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathcal{E}$$

de (i) et (i') sont égales. On notera  $\epsilon$  la différence de ces deux flèches. En utilisant le triangle distingué inférieur de (3.37) on déduit que  $\epsilon$  se factorise par  $\mathrm{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \mathcal{E}[-1]$ . Mais le groupe :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Sym}^{m-3}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathrm{Alt}^2\mathcal{E}, \mathrm{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \mathcal{E}[-1])$$

est nul d'après la deuxième étape puisqu'il s'insère dans une suite exacte :

$$\begin{array}{c} \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Sym}^{m-3}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathrm{Alt}^2\mathcal{E}, \mathrm{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \nu[-1]) \\ \downarrow \\ \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Sym}^{m-3}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathrm{Alt}^2\mathcal{E}, \mathrm{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \mathcal{E}[-1]) \\ \downarrow \\ \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Sym}^{m-3}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathrm{Alt}^2\mathcal{E}, \mathrm{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \lambda[-1]) \end{array}$$

(on utilise que  $\mathrm{Alt}^2\mathcal{E} \simeq \nu \otimes \lambda$ ).

Enfin, les cônes des trois premières flèches verticales de (3.37) sont respectivement :  $\mathrm{Sym}^{m-1}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n}$ ,  $\mathrm{Sym}^{m+n-1}\mathcal{E}$  et  $\mathrm{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m}$ . Ainsi, en appliquant l'axiome de l'octaèdre à (3.37), on obtient un triangle distingué de la forme annoncée.

**Étape 4 :** Montrons la partie 2 de l'énoncé. Notons que cela prouvera l'unicité des triangles (en prenant  $r = 0$  et en l'appliquant à deux triangles distingués de la forme (3.35)). Il suffira par dualité de traiter le premier diagramme de 2.

On part du carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \nu^{\otimes r} \otimes \mathrm{Sym}^{m+n-1}\mathcal{E} & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes b_{n-1,m}} & \nu^{\otimes r} \otimes \mathrm{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m} \\ (a_{m+n-1,r}) \circ \tau \downarrow & & \downarrow ((a_{n-1,r}) \circ \tau) \otimes \mathrm{id} \\ \mathrm{Sym}^{n+m+r-1}\mathcal{E} & \xrightarrow{b_{n+r-1,m}} & \mathrm{Sym}^{n+r-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m} \end{array}$$

qu'on complète en un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} \nu^{\otimes r} \otimes \mathrm{Sym}^{m-1}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n} & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes a_{m-1,n}} & \nu^{\otimes r} \otimes \mathrm{Sym}^{m+n-1}\mathcal{E} & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes b_{n-1,m}} & \nu^{\otimes r} \otimes \mathrm{Sym}^{n-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m} & \longrightarrow & \\ \tau \otimes \mathrm{id} + \epsilon \downarrow & & \downarrow (a_{m+n-1,r}) \circ \tau & & \downarrow ((a_{n-1,r}) \circ \tau) \otimes \mathrm{id} & & \\ \mathrm{Sym}^{m-1}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n+r} & \xrightarrow{a_{m-1,n+r}} & \mathrm{Sym}^{n+m+r-1}\mathcal{E} & \xrightarrow{b_{n+r-1,m}} & \mathrm{Sym}^{n+r-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m} & \longrightarrow & \end{array}$$

avec  $\epsilon$  une flèche exprimant la différence avec la flèche canonique. Il s'agit de montrer que  $\epsilon = 0$ . Pour cela, on remarque que  $\epsilon$  se factorise par l'objet  $\mathrm{Sym}^{n+r-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m}[-1]$ . Mais le groupe :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(\nu^{\otimes r} \otimes \mathrm{Sym}^{m-1}\mathcal{E} \otimes \nu^{\otimes n}, \mathrm{Sym}^{n+r-1}\mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m}[-1])$$

est nul par la seconde étape de la démonstration. Le théorème est prouvé.

C.Q.F.D

On aurait également besoin de comprendre la structure de l'objet  $\mathrm{Sym}^m\mathcal{E} \otimes \mathrm{Sym}^n\mathcal{E}$ . Pour cela, on dispose du résultat suivant qui généralise le corollaire 3.6.8 :

**PROPOSITION 3.6.11** — Soient  $(m, n) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2$ . On définit des flèches

$$p_{m,n} : \mathrm{Sym}^m\mathcal{E} \otimes \mathrm{Sym}^n\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Sym}^{m+n}\mathcal{E} \quad \text{et} \quad q_{m,n} : \mathrm{Sym}^m\mathcal{E} \otimes \mathrm{Sym}^n\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Sym}^{m-1}\mathcal{E} \otimes \mathrm{Alt}^2\mathcal{E} \otimes \mathrm{Sym}^{n-1}\mathcal{E}$$

de la manière suivante. Pour  $p_{m,n}$  on prend simplement la composée :

$$\mathrm{Sym}^m\mathcal{E} \otimes \mathrm{Sym}^n\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{\otimes m} \otimes \mathcal{E}^{\otimes n} = \mathcal{E}^{m+n} \longrightarrow \mathrm{Sym}^{m+n}\mathcal{E}$$

Pour  $q_{m,n}$  on prend la composée :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}^{\otimes m} \otimes \mathcal{E}^{\otimes n} = (\mathcal{E}^{\otimes m-1} \otimes \mathcal{E}) \otimes (\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^{\otimes n-1}) \\ & & \parallel \\ & & \mathcal{E}^{\otimes m-1} \otimes (\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^{\otimes n-1} \longrightarrow \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \end{array}$$

Alors le morphisme :

$$\begin{pmatrix} p_{m,n} \\ q_{m,n} \end{pmatrix} : \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^{m+n} \mathcal{E} \oplus (\text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E})$$

est inversible.

DEMONSTRATION On raisonne par récurrence sur  $\min(n, m)$ . Lorsque ce minimum vaut 1, le résultat découle du corollaire 3.6.8. Supposons que le formule est vraie pour le couple  $(n, m)$ . On tensorise le tout par  $\mathcal{E}$  pour obtenir l'isomorphisme :

$$\text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (\text{Sym}^{m+n} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \oplus (\text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$$

Ce qui donne l'isomorphisme :

(3.38)

$$\begin{array}{c} \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes (\text{Sym}^{n+1} \mathcal{E} \oplus \text{Alt}^2 \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^{n-2} \mathcal{E}) \\ \downarrow \sim \\ (\text{Sym}^{m+n+1} \mathcal{E} \oplus \text{Alt}^2 \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^{m+n-1} \mathcal{E}) \oplus [(\text{Alt}^2 \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E}) \oplus ((\text{Alt}^2 \mathcal{E})^2 \otimes \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^{n-2} \mathcal{E})] \end{array}$$

On retrouve facilement le morphisme :

$$\text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^{n+1} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \text{Sym}^{m+n+1} \mathcal{E} \oplus \text{Alt}^2 \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E}$$

comme facteur direct de l'isomorphisme (3.38).

C.Q.F.D

**COROLLAIRE 3.6.12** — Soit  $(n, r) \in (\mathbb{N} - \{0\}) \otimes \mathbb{N}$ . On a un isomorphismes canonique :

$$\text{Sym}^{n+r} \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^n (\text{Alt}^2 \mathcal{E})^{\otimes i} \otimes \text{Sym}^{2(n-i)+r} \mathcal{E}$$

**LEMME 3.6.13** — Pour  $(m, n) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2$ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} & \xrightarrow[\sim]{l} & \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \nu \otimes \lambda \otimes \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \\ \downarrow & & \downarrow a \otimes \tau \\ \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} & \xrightarrow{\text{id} \otimes b} & \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes \lambda \end{array}$$

DEMONSTRATION On démontre ce lemme de la même manière que le lemme 3.6.9.

C.Q.F.D

D'ici la fin des préliminaires, on supposera  $\nu = \mathbb{1}$  (l'objet unité de  $\mathcal{T}$ ). On notera alors  $a_m : \text{Sym}^m \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^{m+1} \mathcal{E}$  la composée :

$$\text{Sym}^m \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{a_{m,1}} \text{Sym}^{m+1} \mathcal{E}$$

On considérera ainsi la suite  $(\text{Sym}^m \mathcal{E})_{m \in \mathbb{N}}$  comme un ind-objet de  $\mathcal{T}$  indicé par la catégorie  $\mathbb{N} = \{0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow n+1 \rightarrow \dots\}$ . Le théorème 3.6.10 fournit également un ind-triangle distingué :

(3.39)

$$\mathbb{1} \longrightarrow \text{Sym}^m \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \lambda \longrightarrow \mathbb{1}[+1]$$

où les flèches du système inductif sont données par les morphismes de triangles :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{1} & \longrightarrow & \text{Sym}^m \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \otimes \lambda & \longrightarrow & \mathbb{1}[+1] \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{1} & \longrightarrow & \text{Sym}^{m+1} \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \lambda & \longrightarrow & \mathbb{1}[+1] \end{array}$$

On est bien sûr tenté de considérer la colimite de ces systèmes inductifs. Pour cela, on supposera que  $\mathcal{T}$  admet les petites sommes et que le bifoncteur  $- \otimes -$  y commute. On fixe alors une colimite homotopique  $\mathcal{C}$  des  $\text{Sym}^k \mathcal{E}$ . On verra que cette colimite homotopique est définie à un unique isomorphisme près. On introduit la définition suivante :

**DEFINITION 3.6.14** — Soit  $B_n$  un système inductif d'objets de  $\mathcal{T}$  indicés par  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathcal{B}$  une colimite homotopique des  $B_n$ . Soit  $F$  un objet de  $\mathcal{T}$  et  $\epsilon \in \text{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{B}, F)$ . Nous dirons que  $\epsilon$  est une flèche fantôme (par rapport au système inductif  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la composée  $B_n \longrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{\epsilon} F$  est nulle.

On a le lemme facile suivant :

**LEMME 3.6.15** — Gardons les hypothèses et les notations de la définition 3.6.14. Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la flèche  $B_n \longrightarrow B_{n+1}$  admet une rétraction, alors toute flèche fantôme  $\epsilon$  est nulle.

**DEMONSTRATION** On pose  $C_0 = B_0$  et pour tout  $n \geq 1$ , on choisit un facteur direct  $C_n$  de  $B_n$  supplémentaire à  $B_{n-1}$ . Ainsi notre système inductif devient isomorphe au système inductif évident  $(\oplus_{i=0}^n C_i)_{n \in \mathbb{N}}$ . Une colimite homotopique de ce système est alors une colimite catégorique : elle est canoniquement isomorphe à  $\oplus_{i \in \mathbb{N}} C_i$ . Il est alors clair que les flèches fantômes sont nuls dans ce cas. C.Q.F.D

Nous allons donner un critère pour qu'une flèche fantôme de source  $\mathcal{C}$  soit nulle. Ce critère est basé sur le lemme suivant :

**LEMME 3.6.16** — 1- Pour tout  $(n, r) \in \mathbb{N}^2$  la flèche :

$$\text{Sym}^{n+r} \mathcal{E} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes r} \otimes \mathcal{C}$$

obtenue en tensorisant la flèche canonique par  $\mathcal{C}$  admet une section.

2- De même, la flèche :

$$\text{Sym}^r \mathcal{E} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sym}^{n+r} \mathcal{E} \otimes \mathcal{C}$$

obtenue en tensorisant la flèche canonique par  $\mathcal{C}$  admet une rétraction.

**DEMONSTRATION** Étant donnés les triangles distingués :

$$\text{Sym}^{m-1} \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^{m+n-1} \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^{n-1} \mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes m} \longrightarrow$$

on voit que les parties **1** et **2** sont équivalentes. On s'intéressera donc uniquement à la première partie. On raisonne par récurrence sur  $r$ . Pour  $r = 0$ , il n'y a rien à prouver. Supposons que  $r > 0$ . On a un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^{n+r} \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{n+1} \mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes r-1} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \lambda^{\otimes r} \end{array}$$

Par l'hypothèse de récurrence, on voit qu'il suffit de construire une section à :

$$\text{Sym}^{n+1} \mathcal{E} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \lambda \otimes \mathcal{C}$$

En d'autres termes, le cas général découle par récurrence du cas  $r = 1$ .

Pour traiter le cas  $r = 1$ , on utilise le triangle distingué :

$$\mathbb{1} \longrightarrow \text{Sym}^{n+1} \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \lambda \longrightarrow$$

qui nous ramène en fin de compte à la construction d'une rétraction à :

$$\mathbb{1} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \mathcal{C}$$

pour  $m \in \mathbb{N}$ . Pour faire cela, on considère les flèches canoniques :

$$\text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^{m+n} \mathcal{E}$$

En passant à la limite suivant  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient une flèche  $\text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ . En remarquant que la composée :

$$\mathbb{1} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^m \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^{m+n} \mathcal{E}$$



s'identifie au morphisme évident  $\text{Sym}^n \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^{m+n} \mathcal{E}$ , on déduit que la composée :

$$\mathbb{1} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sym}^m \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

n'est autre que l'isomorphisme canonique. Le lemme est ainsi démontré. C.Q.F.D

Pour énoncer notre critère, on a besoin d'introduire la terminologie suivante :

**DEFINITION 3.6.17** — Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$  une catégorie monoïdale unitaire.

1- On appellera objet unitaire (à ne pas confondre avec objet unité) de  $\mathcal{C}$ , un couple  $(X, x)$  avec  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $x : \mathbb{1} \longrightarrow X$  une flèche de  $\mathcal{C}$ .

2- Étant donné un objet unitaire  $(X, x)$ . On appelle  $X$ -module (resp.  $X$ -module faible) à droite un couple  $(M, p)$  formé d'un objet  $M$  de  $\mathcal{C}$  et d'une flèche  $p : M \otimes X \longrightarrow M$  tels que la composée :

$$M \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\text{id} \otimes x} M \otimes X \xrightarrow{p} M$$

est l'identité de  $M$  (resp. est un isomorphisme).

Pour  $r \in \mathbb{N}$ , l'objet  $\mathcal{C}^{\otimes r}$  est une colimite homotopique du système  $((\text{Sym}^n \mathcal{E})^{\otimes r})_{n \in \mathbb{N}}$ . Voici notre critère d'annulation des flèches fantômes relativement à cette colimite :

**PROPOSITION 3.6.18** — Soient  $(X, x)$  un objet unitaire de  $(\mathcal{J}, \otimes, \mathbb{1})$  et  $(M, p)$  un  $X$ -module faiblement unitaire à droite. On suppose qu'il existe une factorisation de l'unité de  $X$  de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{x} & X \\ u \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{C} & & \end{array}$$

avec  $u$  le morphisme évident. Alors, toute flèche fantôme (relativement à  $((\text{Sym}^n \mathcal{E})^{\otimes r})_{n \in \mathbb{N}}$ ) de  $\mathcal{C}^{\otimes r}$  vers  $M$  est nulle.

DEMONSTRATION En effet, soit  $\epsilon : \mathcal{C}^{\otimes r} \longrightarrow M$  une flèche fantôme. Considérons la flèche :

$$\epsilon \otimes \text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\otimes r} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow M \otimes \mathcal{C}$$

étant donné que les flèches  $(\text{Sym}^n \mathcal{E})^{\otimes r} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow (\text{Sym}^n \mathcal{E})^{\otimes r} \otimes \mathcal{C}$  admettent des rétractions (ce qui découle immédiatement du lemme 3.6.16), on déduit que  $\epsilon \otimes \text{id}_{\mathcal{C}}$  est nul.

Étant donné que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\otimes r} \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{(1)} & \mathcal{C}^{\otimes r} \otimes \mathcal{C} \\ \epsilon \otimes \text{id}_{\mathbb{1}} \downarrow & & \downarrow \epsilon \otimes \text{id}_{\mathcal{C}} \\ M \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{(2)} & M \otimes \mathcal{C} \end{array}$$

est commutatif, on voit qu'il suffit de montrer que les flèches horizontales admettent des rétractions. Une rétraction de (1) est donnée par la colimite des :

$$(\text{Sym}^n \mathcal{E})^{\otimes r} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} \longrightarrow (\text{Sym}^n \mathcal{E})^{\otimes r-1} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} \longrightarrow (\text{Sym}^n \mathcal{E})^{\otimes r} \otimes \text{Sym}^{2n} \mathcal{E}$$

Pour définir une rétraction de (2) on compose à droite par  $M \otimes \mathcal{C} \longrightarrow M \otimes X$ . On est ainsi ramené à trouver une rétraction à :

$$M \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\text{id} \otimes x} M \otimes X$$

Ceci est clairement possible étant donné que  $p \circ (\text{id} \otimes x)$  est un isomorphisme. La proposition est démontrée. C.Q.F.D

Étant donnée une catégorie monoïdale symétrique unitaire, on a les notions habituelles d'algèbres (associatives, commutatives, unitaires). Comme application de la proposition précédente, on obtient :

**COROLLAIRE 3.6.19** — La colimite  $\mathcal{C}$  des  $\text{Sym}^n \mathcal{E}$  est définie à un unique isomorphisme près. Elle est canoniquement munie d'une structure d'algèbre commutative et unitaire. De plus étant donnée une algèbre commutative unitaire  $\mathcal{U}$  et une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ \downarrow & \nearrow f_1 & \\ \mathcal{E} & & \end{array}$$

il existe un unique morphisme d'algèbres unitaires  $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{U}$  prolongeant  $f_1$ .

DEMONSTRATION Montrons d'abord que  $\mathcal{C}$  est défini à un unique isomorphisme près. Soit  $\mathcal{C}'$  une autre colimite homotopique de  $(\text{Sym}^n \mathcal{E})_{n \in \mathbb{N}}$ . Étant donné que la colimite est unique à un isomorphisme près, on dispose d'un isomorphisme  $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}'$  rendant commutatifs les carrés :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^n \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \parallel & & \downarrow \sim \\ \text{Sym}^n \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{C}' \end{array}$$

Soient  $i_1$  et  $i_2$  deux tels isomorphismes, et appelons  $\epsilon = i_2 - i_1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  leur différence. Il est clair que  $\epsilon$  est une flèche fantôme. Pour montrer que  $\epsilon$  est nulle, il suffit d'appliquer la proposition précédente avec :

- $(X, x) = (\mathcal{C}', u')$  où  $u' : \mathbb{1} \longrightarrow \mathcal{C}'$  est le morphisme canonique,
- $M = \mathcal{C}'$  et  $p : \mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}'$  la colimite des  $\text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^{2n} \mathcal{E}$ .

D'où l'unicité de  $\mathcal{C}$  à un unique isomorphisme près.

Pour définir une structure d'algèbre unitaire sur  $\mathcal{C}$ , on prend la colimite des  $\text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} \longrightarrow \text{Sym}^{2n} \mathcal{E}$  qu'on notera  $m : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  ainsi que le morphisme évident  $u : \mathbb{1} \longrightarrow \mathcal{C}$ . Pour montrer que  $m$  est associatif, on considère la différence  $\epsilon'$  des deux flèches possibles :

$$\mathcal{C}^{\otimes 3} \longrightarrow \mathcal{C}$$

auquel on applique la proposition précédente avec  $(X, x) = (\mathcal{C}, \mathbb{1})$  et  $(M, p) = (\mathcal{C}, m)$ . On est ainsi ramené à l'associativité du produit :

$$(\text{Sym}^n \mathcal{E})^{\otimes 3} \longrightarrow \text{Sym}^{3n} \mathcal{E}$$

Ce qui est clair. On fait de même pour prouver la commutativité et le fait que  $u$  est une unité pour  $m$ .

On s'intéresse maintenant à la dernière partie de l'énoncé. On construit d'abord l'extension  $f$ . Pour tout  $n \geq 1$ , la composée :

$$\mathcal{E}^{\otimes n} \xrightarrow{f_1^{\otimes n}} \mathcal{U}^{\otimes n} \xrightarrow{\text{multiplication}} \mathcal{U}$$

est  $\Sigma_n$ -équivariante. Elle passe ainsi au plus grand quotient  $\Sigma_n$ -invariant de  $\mathcal{E}^{\otimes n}$  et fournit des flèches :

$$f_n : \text{Sym}^n \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{U}$$

On vérifie immédiatement que les carrés suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Sym}^{2n} \mathcal{E} \\ f_n \otimes f_n \downarrow & & \downarrow f_{2n} \\ \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U} \end{array}$$

De plus la famille des  $f_n$  est l'unique extension de  $f_1$  ayant cette propriété et les triangles suivants :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^n \mathcal{E} & \xrightarrow{a_n} & \text{Sym}^{n+1} \mathcal{E} \\ & \searrow f_n & \downarrow f_{n+1} \\ & & \mathcal{U} \end{array}$$

sont commutatifs. En passant à la limite suivant  $n$ , on obtient alors un morphisme :

$$f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{U}$$

Soit  $f'$  un autre tel morphisme. On pose  $\epsilon'' = f - f'$ . C'est clairement une flèche fantôme par l'unicité des  $f_n$ . On voit alors qu'elle est nulle, en lui appliquant la proposition 3.6.18 avec  $X = \mathcal{U}$  et  $M = \mathcal{U}$ . D'où l'unicité de  $f$ . La preuve que  $f$  est un morphisme d'algèbres unitaires se fait de la même façon. C.Q.F.D

**DEFINITION 3.6.20** — La colimite homotopique de  $(\text{Sym}^n \mathcal{E})_{n \in \mathbb{N}}$  bien définie à un unique isomorphisme près sera noté  $\text{Sym}^\infty \mathcal{E}$ . C'est naturellement une algèbre commutative unitaire.

Notons également le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 3.6.21** — *Supposons que l'objet unité  $\mathbb{1}$  est compact. Il existe un unique triangle distingué :*

$$\mathbb{1} \longrightarrow \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} \otimes \lambda \longrightarrow \mathbb{1}[+1]$$

tel que les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{1} & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^{n+1} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \lambda & \longrightarrow & \mathbb{1}[+1] \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{1} & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} \otimes \lambda & \longrightarrow & \mathbb{1}[+1] \end{array}$$

commutent.

**DEMONSTRATION** L'existence s'obtient en prenant la colimite du ind-triangle distingué (3.39). Il s'agit de montrer l'unicité de ce triangle. On commence par l'unicité de  $\mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} \otimes \lambda$ .

Pour cela, on se donne deux tels morphismes et on note  $\epsilon$  leur différence. C'est bien une flèche fantôme. On montre qu'elle est nulle en lui appliquant la proposition 3.6.18 avec  $X = \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E}$  et  $M = \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} \otimes \lambda$ .

Montrons l'unicité du morphisme connectant  $\mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} \otimes \lambda \longrightarrow \mathbb{1}[+1]$ . Par construction de la colimite homotopique, on dispose d'une suite exacte :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}[+1], \oplus_n \mathrm{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \lambda) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}[+1], \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} \otimes \lambda) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}[+1], \oplus_n \mathrm{Sym}^n \mathcal{E} \otimes \lambda[+1])$$

Comme  $\mathbb{1}$  est compact, ceci montre que  $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}[+1], \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} \otimes \lambda) = 0$ .

Deux triangles distingués ayant la même forme que celui de l'énoncé sont isomorphes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{1} & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} \otimes \lambda & \longrightarrow & \mathbb{1}[+1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow u & & \parallel \\ \mathbb{1} & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} \otimes \lambda & \longrightarrow & \mathbb{1}[+1] \end{array}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que la flèche  $u$  est l'identité. Mais  $u - \mathrm{id}$  se factorise par une flèche de  $\mathbb{1}[+1]$  vers  $\mathrm{Sym}^\infty \mathcal{E} \otimes \lambda$ . C.Q.F.D

### 3.6.2 Le logarithme de $H(\mathbb{G}_m)$

Soit  $k$  un corps de base. On se donne un 2-foncteur homotopique stable  $H$  défini sur  $\mathrm{Sch}/k$ . Rappelons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_m & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_k^1 & \xleftarrow{i} & \sigma \\ & \searrow q & \downarrow p & & \parallel \\ & & \mathrm{Spec}(k) & & \end{array}$$

On fait la définition suivante :

**DEFINITION 3.6.22** — *Le 2-morphisme de Kummer  $e_K : \mathrm{id}_{H(\mathbb{G}_m)}(-1)[-1] \longrightarrow \mathrm{id}_{H(\mathbb{G}_m)}$  est la transformation naturelle entre les foncteurs identités de  $H(\mathbb{G}_m)$  (la source étant convenablement twistée et décalée) définie de la manière suivante. On considère le triangle commutatif :*

$$(3.40) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{G}_m \times_k \mathbb{G}_m \\ & \searrow & \downarrow pr_1 \\ & & \mathbb{G}_m \end{array}$$

avec  $pr_1$  la projection sur le premier facteur. On prend alors pour  $e_K$  la composée :

$$\mathrm{id}_{H(\mathbb{G}_m)}(-1)[-1] \longrightarrow pr_{1*} pr_1^* \longrightarrow pr_{1*} \Delta_* \Delta^* pr_1^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{H(\mathbb{G}_m)}$$

où la première flèche est déduite de l'identification canonique  $pr_{1*} pr_1^* \simeq \mathrm{id}_{H(\mathbb{G}_m)} \oplus \mathrm{id}_{H(\mathbb{G}_m)}(-1)[-1]$ .

On est surtout intéressé par le 2-morphisme  $e_K$  appliqué au foncteur  $q^*$  :

$$e_K q^* : q^*(-1)[-1] \longrightarrow pr_{1*} pr_1^* q^* \longrightarrow pr_{1*} \Delta_* \Delta^* pr_1^* q^* \xrightarrow{\sim} q^*$$

Les deux lemmes suivants décrivent l'image directe par  $q_*$  de ce 2-morphisme :

**LEMME 3.6.23** — *La composée suivante :*

$$q_* q^*(-1)[-1] \xrightarrow{q_* e_K q^*} q_* q^* \longrightarrow \text{id}_{\mathbb{H}(k)}$$

où la seconde flèche est déduite de l'identification canonique  $q_* q^* \simeq \text{id}_{\mathbb{H}(k)} \oplus \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1]$ , est nulle.

DEMONSTRATION Notons  $i_1 : \text{Spec}(k) \longrightarrow \mathbb{G}_m$  la section unité de  $\mathbb{G}_m$ . On a un diagramme commutatif de  $k$ -schémas :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(k) & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{G}_m \\ i_1 \downarrow & & \downarrow \text{id} \times i_1 \\ \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \end{array}$$

Le 2-morphisme  $q_* q^* \longrightarrow \text{id}_{\mathbb{H}(k)}$  de l'énoncé s'identifie à :

$$q_* q^* \longrightarrow q_* i_{1*} i_1^* q^* \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathbb{H}(k)}$$

D'autre part, il est clair que le morphisme canonique  $\text{id}_{\mathbb{H}(\mathbb{G}_m)}(-1)[-1] \longrightarrow pr_{1*} pr_1^*$  utilisé dans la définition de  $e_K$  est le noyau du 2-morphisme scinde :

$$pr_{1*} pr_1^* \longrightarrow pr_{1*} (\text{id} \times i_1)_* (\text{id} \times i_1)^* pr_1^* \simeq \text{id}_{\mathbb{H}(\mathbb{G}_m)}$$

Le résultat découle alors du diagramme commutatif de 2-morphismes suivant :

$$\begin{array}{ccccc} pr_{1*} pr_1^* & \longrightarrow & pr_{1*} \Delta_* \Delta^* pr_1^* & \longrightarrow & pr_{1*} \Delta_* i_{1*} i_1^* \Delta^* pr_1^* \\ \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ pr_{1*} (\text{id} \times i_1)_* (\text{id} \times i_1)^* pr_1^* & \longrightarrow & pr_{1*} (\text{id} \times i_1)_* i_{1*} i_1^* (\text{id} \times i_1)^* pr_1^* & \xrightarrow{\sim} & pr_{1*} (i_1 \times i_1)_* (i_1 \times i_1)^* pr_1^* \end{array}$$

auquel on applique  $q_*$  à gauche et  $q^*$  à droite.

C.Q.F.D

**LEMME 3.6.24** — *On a un carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1] & \xlongequal{\quad} & \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1] \\ (1) \downarrow & & \downarrow (2) \\ q_* q^*(-1)[-1] & \xrightarrow{q_* e_K q^*} & q_* q^* \end{array}$$

avec (1) le morphisme d'unité et (2) celui déduit de l'identification canonique  $q_* q^* \simeq \text{id}_{\mathbb{H}(k)} \oplus \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1]$ .

DEMONSTRATION Par le lemme précédent, on dispose d'une unique factorisation de  $q_* e_K q^*$  :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1] \\ & \nearrow & \downarrow \\ q_* q^*(-1)[-1] & \xrightarrow{q_* e_K q^*} & q_* q^* \end{array}$$

Ainsi pour prouver le lemme, il suffit de montrer que la composée :

$$\text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1] \longrightarrow q_* q^*(-1)[-1] \xrightarrow{q_* e_K q^*} q_* q^* \longrightarrow \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1]$$

est égale à l'identité. Considérons d'abord le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{G}_m \times_k \mathbb{G}_m & \xrightarrow{pr_1} & \mathbb{G}_m \\
 \parallel & & \downarrow j \times \text{id} & & \downarrow j \\
 \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\Delta'} & \mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{G}_m & \xrightarrow{pr'_1} & \mathbb{A}_k^1
 \end{array}$$

On déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1] & \longrightarrow & p_*p^*(-1)[-1] & \longrightarrow & p_*pr'_{1*}pr'^*_1p^* & \longrightarrow & p_*pr'_{1*}\Delta'_*\Delta'^*pr'^*_1p^* & \longrightarrow & q_*q^* & \longrightarrow & \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1] \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & & & \parallel & & \parallel \\
 \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1] & \longrightarrow & q_*q^*(-1)[-1] & \longrightarrow & q_*pr'_{1*}pr'^*_1q^* & \longrightarrow & q_*pr'_{1*}\Delta_*\Delta^*pr'^*_1q^* & \longrightarrow & q_*q^* & \longrightarrow & \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1]
 \end{array}$$

Ce qui nous ramène à démontrer que la composée de la ligne supérieure du diagramme précédent est égale à l'identité. Considérons maintenant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{G}_m & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_k^1 & \xleftarrow{i} & \text{Spec}(k) \\
 \Delta' \downarrow & & \downarrow \Delta'' & & \downarrow i \\
 \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\text{id} \times j} & \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_k^1 & \xleftarrow{\text{id} \times i} & \mathbb{A}^1 \\
 & \searrow pr'_1 & \downarrow pr''_1 & & \parallel \\
 & & \mathbb{A}^1 & & 
 \end{array}$$

La flèche canonique  $q_*q^* \longrightarrow \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1]$  est définie par la composée :

$$q_*q^* \xrightarrow{\sim} p_*j_*j^*p^* \longrightarrow p_*i_*i^!p^*[+1] \simeq i^!p^*[+1]$$

De même la flèche canonique  $p_*pr'_{1*}pr'^*_1p^* \longrightarrow p_*p^*(-1)[-1]$  est définie par la composée :

$$p_*pr'_{1*}pr'^*_1p^* \longrightarrow p_*pr''_{1*}(\text{id} \times j)_*(\text{id} \times j)^*pr''^*_1p^* \longrightarrow p_*pr''_{1*}(\text{id} \times i)_*(\text{id} \times i)^!pr''^*_1p^* \simeq p_*(\text{id} \times i)^!pr''^*_1p^*$$

Mais on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 p_*pr'_{1*}pr'^*_1p^* & \longrightarrow & p_*pr''_{1*}(\text{id} \times j)_*(\text{id} \times j)^*pr''^*_1p^* & \longrightarrow & p_*pr''_{1*}(\text{id} \times i)_*(\text{id} \times i)^!pr''^*_1p^* \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 q_*q^* & \xrightarrow{\sim} & p_*j_*j^*p^* & \longrightarrow & p_*i_*i^!p^*[+1]
 \end{array}$$

du fait de la compatibilité du morphisme connectant du triangle de localité avec les morphismes de changement de base (voir la sous-section 1.4.7). Ceci termine la preuve du lemme. C.Q.F.D

Le résultat suivant est un corollaire immédiat des lemmes 3.6.23 et 3.6.24 :

**COROLLAIRE 3.6.25** — La flèche  $q_*e_Kq^* : q_*q^*(-1)[-1] \longrightarrow q_*q^*$  est donnée, modulo les identifications canoniques, par une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \text{id} & t \end{pmatrix} : \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1] \oplus \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-2)[-2] \longrightarrow \text{id}_{\mathbb{H}(k)} \oplus \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1]$$

avec  $t : \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-2)[-2] \longrightarrow \text{id}_{\mathbb{H}(k)}(-1)[-1]$  une certaine transformation naturelle qu'on ne précisera pas.

Dans la suite, on supposera que le 2-foncteur homotopique stable  $\mathbb{H}$  est muni d'une structure monoïdale symétrique unitaire. Pour un  $k$ -schéma quasi-projectif  $X$ , on notera  $-\otimes_X -$  et  $\mathbb{1}_X$  le produit tensoriel et l'objet unité de  $\mathbb{H}(X)$ . Lorsqu'on supposera que  $(\mathbb{H}(X), \otimes_X)$  est fermée, on notera comme d'habitude  $\underline{\text{Hom}}_X(-, -)$  le bifoncteur homomorphismes internes. Sauf mention du contraire, on supposera les conditions de l'hypothèse suivante vérifiées :

**HYPOTHÈSE 3.6.26** — **1-** Le 2-foncteur homotopique stable admet les petites sommes et il est parfait pour elles. Il est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé. Les catégories monoïdals  $\mathbb{H}(-)$  sont fermées et leur objet unité est compact.

**2-** On a les annulations :

- $\text{hom}_{\mathbb{H}(k)}(\mathbb{1}(m), \mathbb{1}[n]) = 0$  pour  $n \in \{-2, -1, 0\}$  et  $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,
- $\text{hom}_{\mathbb{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1}(1)) = 0$ .

**3-** L'objet  $\text{Alt}^2(\mathbb{1}_k(1))$  est nul. En d'autres termes,  $\mathbb{1}_k(1)$  est pair de dimension 1 au sens de Kimura [Kim05].

En appliquant la transformation naturelle de Kummer à l'objet unité de  $\mathbb{H}(\mathbb{G}_m)$ , on obtient une flèche  $e_K : \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}$ . Notons le lemme suivant :

**LEMME 3.6.27** — *L'annulateur dans  $\text{end}_{\mathbb{H}(\mathbb{G}_m)}(\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m})$  de la flèche  $e_K$  est l'idéal nul.*

DEMONSTRATION En effet,  $\text{hom}_{\mathbb{H}(\mathbb{G}_m)}(\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}, \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}) = \text{hom}_{\mathbb{H}(k)}(\mathbb{1}, q_*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}) = \text{hom}_{\mathbb{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}(-1)[-1]) = \text{hom}_{\mathbb{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1})$ . Il suffit donc de prouver que l'annulateur de  $e_K$  dans  $\text{end}_{\mathbb{H}(k)}(\mathbb{1})$  est nul. Pour cela, il suffit de remarquer que  $q_*e_K$  contient comme facteur direct l'identité de  $\mathbb{1}(-1)[-1]$ . C.Q.F.D

Vu le lemme précédent, on voit que l'hypothèse 3.6.26 implique l'hypothèse 3.6.1 de la sous-section précédente avec  $\nu = \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}$  et  $\lambda = \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)$ . Dans la suite, on utilisera librement les résultats établis dans cette sous-section.

**LEMME 3.6.28** — *Il existe, à un unique isomorphisme près, un triangle distingué :*

$$(3.41) \quad \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] \xrightarrow{e_K} \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)$$

L'objet  $\mathcal{K}$  ainsi défini, est connu sous le nom du torseur de Kummer.

DEMONSTRATION Complétons la flèche  $e_K : \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}$  en un triangle distingué comme dans l'énoncé. Il s'agit de montrer que le triangle ainsi obtenu, n'admet pas d'endomorphismes non triviaux induisant l'identité sur  $\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1]$  et  $\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}$ .

Pour cela, on choisit un tel endomorphisme :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] & \xrightarrow{e_K} & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1) \\ & & \parallel & & \downarrow \text{id} + \epsilon & & \parallel \\ \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] & \xrightarrow{e_K} & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1) \end{array}$$

L'endomorphisme  $\epsilon$  se factorise par une flèche  $\mathbb{1}(-1) \longrightarrow \mathcal{K}$ . Mais par le lemme 3.6.4, on voit qu'une telle flèche est forcément nulle. D'où le résultat. C.Q.F.D

**DEFINITION 3.6.29** — *Le logarithme  $\mathcal{L}og^\vee = \text{Sym}^\infty \mathcal{K}$  est la colimite homotopique de l'ind-objet  $(\mathcal{L}og_n^\vee)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{H}(\mathbb{G}_m)$  donné par  $\mathcal{L}og_n^\vee = \text{Sym}^n(\mathcal{K})$ . Par le corollaire 3.6.19, le logarithme est unique à un unique isomorphisme près. De plus, il est naturellement muni d'une structure d'algèbre associative, commutative et unitaire.*

On dispose également d'un triangle distingué canonique :

$$(3.42) \quad \mathcal{L}og^\vee(-1)[-1] \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \longrightarrow \mathcal{L}og^\vee \longrightarrow \mathcal{L}og^\vee(-1)$$

Ce triangle est à la base du 2-triangle distingué de monodromie. On aura besoin du lemme clef suivant :

**LEMME 3.6.30** — *Rappelons que l'on note  $q$  la projection structurale du  $k$ -schéma  $\mathbb{G}_m$ . On a des triangles distingués canoniques dans  $\mathbb{H}(k)$  :*

$$(3.43) \quad \mathbb{1}(-n-1) \xrightarrow{0} \mathbb{1} \xrightarrow{a} q_*\mathcal{L}og_n^\vee \xrightarrow{b} \mathbb{1}(-n-1)[-1]$$

avec  $a$  et  $b$  donnés respectivement par les composées suivantes :

$$\mathbb{1} \longrightarrow q_*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \longrightarrow q_*\mathcal{L}og_n^\vee \quad \text{et} \quad q_*\mathcal{L}og_n^\vee \longrightarrow q_*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-n) \longrightarrow \mathbb{1}(-n-1)[-1]$$

De plus les diagrammes suivants :

$$(3.44) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{1}(-n-1) & \xrightarrow{0} & \mathbb{1} & \longrightarrow & q_*\mathcal{L}og_n^\vee & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n-1)[-1] \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow 0 \\ 0 \downarrow & & & & & & \\ \mathbb{1}(-n-2) & \xrightarrow{0} & \mathbb{1} & \longrightarrow & q_*\mathcal{L}og_{n+1}^\vee & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n-2)[-1] \end{array}$$

sont des morphismes de triangles distingués.

DEMONSTRATION Notons qu'une fois les triangles distingués (3.43) construits, il sera clair que le diagramme (3.44) est un morphisme de triangles distingués. En effet, il suffit de compléter le carré commutatif au centre et d'utiliser le fait que  $\text{hom}_{\mathbb{H}(k)}(\mathbb{1}(-n-1), \mathbb{1}(-n-2)) = \text{hom}_{\mathbb{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1}(-1)) = 0$ .

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on choisit deux triangles distingués :

$$\mathbb{1} \xrightarrow{a} q_* \mathcal{L}og_m^\vee \longrightarrow C_m \longrightarrow \quad \text{et} \quad N_m \longrightarrow q_* \mathcal{L}og_m^\vee \xrightarrow{b} \mathbb{1}(-m-1)[-1] \longrightarrow$$

Dans la suite, on raisonnera par récurrence sur  $n$ . Lorsque  $n = 0$ , le résultat découle de l'identification  $q_* \mathbb{1} \simeq \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}(-1)[-1]$ . On supposera alors  $n > 0$ . On divise l'argument en trois étapes. On commence par une réduction :

**Étape 1 :** *Une réduction.* Nous affirmons que pour prouver le lemme au rang  $n$ , il suffit de montrer que :

1.  $C_n$  est isomorphe à  $\mathbb{1}(-n-1)[-1]$ ,
2.  $N_n$  est isomorphe à  $\mathbb{1}$ .

Cette étape est consacrée à la preuve de cette affirmation. On dispose donc de deux triangles distingués :

$$\mathbb{1} \xrightarrow{a} q_* \mathcal{L}og_n^\vee \xrightarrow{b'} \mathbb{1}(-n-1)[-1] \longrightarrow \quad \text{et} \quad \mathbb{1} \xrightarrow{a'} q_* \mathcal{L}og_n^\vee \xrightarrow{b} \mathbb{1}(-n-1)[-1] \longrightarrow$$

Étant donné que  $\text{hom}_{\mathbb{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1}(-n-1)[-1]) = 0$ , on voit que les deux composées :

$$\mathbb{1} \xrightarrow{a} q_* \mathcal{L}og_n^\vee \xrightarrow{b} \mathbb{1}(-n-1)[-1] \quad \text{et} \quad \mathbb{1} \xrightarrow{a'} q_* \mathcal{L}og_n^\vee \xrightarrow{b'} \mathbb{1}(-n-1)[-1]$$

sont nulles. Il existe alors des flèches rendant commutatifs les carrés :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{a} & q_* \mathcal{L}og_n^\vee \\ \downarrow u & & \parallel \\ \mathbb{1} & \xrightarrow{a'} & q_* \mathcal{L}og_n^\vee \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{a'} & q_* \mathcal{L}og_n^\vee \\ \downarrow u' & & \parallel \\ \mathbb{1} & \xrightarrow{a} & q_* \mathcal{L}og_n^\vee \end{array}$$

En composant verticalement, on déduit deux carrés commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{a} & q_* \mathcal{L}og_n^\vee \\ \downarrow u' \circ u & & \parallel \\ \mathbb{1} & \xrightarrow{a} & q_* \mathcal{L}og_n^\vee \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{a'} & q_* \mathcal{L}og_n^\vee \\ \downarrow u \circ u' & & \parallel \\ \mathbb{1} & \xrightarrow{a'} & q_* \mathcal{L}og_n^\vee \end{array}$$

On voit alors que les flèches  $\text{id} - u' \circ u$  et  $\text{id} - u \circ u'$  se factorisent à travers l'objet  $\mathbb{1}(-n-1)[-2]$ . Ils sont donc nuls vu que  $\text{hom}_{\mathbb{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1}(-n-1)[-2]) = 0$  (par l'hypothèse 3.6.26). Ceci montre que  $u$  et  $u'$  sont inversibles. On déduit alors l'existence d'un triangle distingué :

$$\mathbb{1}(-n-1) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{1} \xrightarrow{a} q_* \mathcal{L}og_n^\vee \xrightarrow{b} \mathbb{1}(-n-1)[-1]$$

Il reste à montrer que  $\epsilon$  est nul. On prouvera en fait que  $b$  admet une section.

Pour cela, on considère le morphisme  $\mathbb{1}(-n-1)[-1] \longrightarrow \mathcal{L}og_n^\vee$  qui apparaît dans le triangle distingué :

$$\mathbb{1}(-n-1)[-1] \longrightarrow \mathcal{L}og_n^\vee \longrightarrow \mathcal{L}og_{n+1}^\vee \longrightarrow \mathbb{1}(-n-1)$$

On va montrer que la composée :

$$\mathbb{1}(-n-1)[-1] \longrightarrow q_* \mathbb{1}(-n-1)[-1] \longrightarrow q_* \mathcal{L}og_n^\vee \xrightarrow{a} \mathbb{1}(-n-1)[-1]$$

est l'identité. On remarque alors qu'on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{1}(-n-1)[-1] & \longrightarrow & q_* \mathbb{1}(-n-1)[-1] & \longrightarrow & q_* \mathcal{L}og_n^\vee & \xrightarrow{a} & \mathbb{1}(-n-1)[-1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{1}(-n-1)[-1] & \longrightarrow & q_* \mathbb{1}(-n-1)[-1] & \xrightarrow{e_K(-n)} & q_* \mathbb{1}(-n) & \xrightarrow{a} & \mathbb{1}(-n-1)[-1] \end{array}$$

déduit du morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}og_n^\vee & \longrightarrow & \mathcal{L}og_{n+1}^\vee & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\mathbb{G}m}(-n-1) & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ \mathbf{1}_{\mathbb{G}m}(-n) & \longrightarrow & \mathcal{K}(-n) & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\mathbb{G}m}(-n-1) & \longrightarrow & \end{array}$$

Le résultat découle alors immédiatement du corollaire 3.6.25.

**Étape 2 :** *Un isomorphisme  $C_n \simeq \mathbf{1}(-n-1)[-1]$ . On utilisera l'hypothèse de récurrence pour construire un tel isomorphisme. On dispose d'un morphisme de triangles distingués :*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{1}(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbf{1} & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathbf{1}(-1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}og_{n-1}^\vee(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbf{1} & \longrightarrow & \mathcal{L}og_n^\vee & \longrightarrow & \mathcal{L}og_{n-1}^\vee(-1) \end{array}$$

En appliquant  $q_*$  et en utilisant le corollaire 3.6.25, on obtient une suite de deux morphismes de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} 0[-1] & \longrightarrow & \mathbf{1} & \xlongequal{\quad} & \mathbf{1} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{1}(-1)[-1] \oplus \mathbf{1}(-2)[-2] & \longrightarrow & \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}(-1)[-1] & \longrightarrow & q_*\mathcal{K} & \longrightarrow & \mathbf{1}(-1) \oplus \mathbf{1}(-2)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}(-1)[-1] & \longrightarrow & q_*\mathcal{L}og_n^\vee & \longrightarrow & q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee(-1) \end{array}$$

En appliquant l'axiome de l'octaèdre aux deux carrés commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} \xlongequal{\quad} \mathbf{1} & & \mathbf{1} \xlongequal{\quad} \mathbf{1} \\ \downarrow & \searrow^a & \downarrow & \searrow^a \\ \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}(-1)[-1] & \longrightarrow & q_*\mathcal{L}og_n^\vee & & \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}(-1)[-1] & \longrightarrow & q_*\mathcal{K} \end{array}$$

on obtient un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{1}(-1)[-1] \oplus \mathbf{1}(-2)[-2] & \longrightarrow & \mathbf{1}(-1)[-1] & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & \mathbf{1}(-1) \oplus \mathbf{1}(-2)[-1] \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbf{1}(-1)[-1] & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee(-1) \end{array}$$

Formons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{1}(-1)[-1] \xlongequal{\quad} \mathbf{1}(-1)[-1] & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{1}(-1) \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{1}(-1)[-1] \oplus \mathbf{1}(-2)[-2] & \longrightarrow & \mathbf{1}(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbf{1}(-2)[-1] & \longrightarrow & \mathbf{1}(-1) \oplus \mathbf{1}(-2)[-1] \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbf{1}(-1)[-1] & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee(-1) \end{array}$$

En composant, on obtient un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{1}(-1)[-1] \xlongequal{\quad} \mathbf{1}(-1)[-1] & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{1}(-1) \\ \downarrow^{a''} & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbf{1}(-1)[-1] & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee(-1) \end{array}$$



Il est facile de se convaincre que  $a''$  est isomorphe (mais pas forcément égale) à  $a(-1)[-1]$ . Ainsi un cône de  $a''$  est isomorphe à  $C_{n-1}(-1)[-1] \simeq \mathbb{1}(-n-1)[-2]$ . L'isomorphisme recherché s'obtient alors en appliquant encore une fois l'axiome de l'octaèdre.

**Étape 3 :** *Un isomorphisme  $N_n \simeq \mathbb{1}$ .* On procède de la même manière que l'étape précédente. On a un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}og_{n-1}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{L}og_n^\vee & \longrightarrow & \mathbb{1}_{\mathbb{G}m}(-n) & \longrightarrow & \mathcal{L}og_{n-1}^\vee[+1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{1}_{\mathbb{G}m}(-n-1) & \longrightarrow & \mathcal{K}(-n+1) & \longrightarrow & \mathbb{1}_{\mathbb{G}m}(-n) & \longrightarrow & \mathbb{1}_{\mathbb{G}m}(-n-1)[+1] \end{array}$$

En appliquant  $q_*$  et en utilisant le corollaire 3.6.25, on voit qu'on dispose d'une suite de deux morphismes de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee & \longrightarrow & q_*\mathcal{L}og_n^\vee & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n) \oplus \mathbb{1}(-n-1)[-1] & \longrightarrow & q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee[+1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ \mathbb{1}(-n+1) \oplus \mathbb{1}(-n)[-1] & \longrightarrow & q_*\mathcal{K}(-n+1) & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n+1)[+1] \oplus \mathbb{1}(-n) & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n) \oplus \mathbb{1}(-n-1)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n-1)[-1] & \xlongequal{\quad} & \mathbb{1}(-n-1)[-1] & \longrightarrow & 0[+1] \end{array}$$

On applique ensuite l'axiome de l'octaèdre aux carrés commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} q_*\mathcal{L}og_n^\vee & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n) \oplus \mathbb{1}(-n-1)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{1}(-n-1)[-1] & \xlongequal{\quad} & \mathbb{1}(-n-1)[-1] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} q_*\mathcal{K} & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n) \oplus \mathbb{1}(-n-1)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{1}(-n-1)[-1] & \xlongequal{\quad} & \mathbb{1}(-n-1)[-1] \end{array}$$

On obtient ainsi un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee & \longrightarrow & N_n & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n) & \longrightarrow & q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee[+1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ \mathbb{1}(-n+1) \oplus \mathbb{1}(-n)[-1] & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n) & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n+1)[+1] \oplus \mathbb{1}(-n) \end{array}$$

Et de là le morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee & \longrightarrow & N_n & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n) & \longrightarrow & q_*\mathcal{L}og_{n-1}^\vee[+1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ \mathbb{1}(-n)[-1] & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{1}(-n) & \xlongequal{\quad} & \mathbb{1}(-n) \end{array}$$

L'axiome de l'octaèdre fournit alors un isomorphisme  $\mathbb{1} \simeq N_{n-1} \simeq N_n$ . Le lemme est démontré. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 3.6.31** — *Le morphisme canonique  $\mathbb{1}_{\mathbb{G}m} \longrightarrow \mathcal{L}og^\vee$  induit un isomorphisme  $\mathbb{1} \simeq q_*\mathcal{L}og^\vee$  via la composée :*

$$\mathbb{1} \longrightarrow q_*\mathbb{1}_{\mathbb{G}m} \longrightarrow q_*\mathcal{L}og^\vee$$

DEMONSTRATION Étant donné que  $p_*$  commute aux colimites homotopiques ( $\mathbf{H}$  étant supposé parfait pour les petites sommes), on déduit par passage à la colimite des triangles (3.43) un triangle distingué :

$$\mathrm{HoColim}_n \mathbb{1}(-n-1)[-2] \longrightarrow \mathrm{HoColim}_n \mathbb{1} \longrightarrow p_*\mathcal{L}og^\vee \longrightarrow \mathrm{HoColim}_n \mathbb{1}(-n-1)[-1]$$

La première colimite homotopique est nulle étant donné que les morphismes de transition du système inductif correspondant sont nuls. La deuxième colimite vaut  $\mathbb{1}$  puisque le système inductif correspondant est stationnaire. Le corollaire est démontré. C.Q.F.D

**Remarque 3.6.32** — Les analogues ( $\ell$ -adique, Hodge, etc) du résultat précédent sont bien connus. La preuve classique repose sur un calcul de suite spectral. A ce propos, le lecteur peut consulter [HW98].

### 3.6.3 Le système de spécialisation logarithmique

Rappelons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{G}_m & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_k^1 \\
 & \searrow q & \downarrow p \\
 & & k
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & \leftarrow i \\
 & & s \\
 & & \parallel \\
 & & \text{---}
 \end{array}$$

On introduit un nouveau système de spécialisation de base  $(\mathbb{A}_k^1, j, i)$  :

**DEFINITION 3.6.33** — *Le système de spécialisation logarithmique est le système de spécialisation noté  $\log$  défini par :*

$$\log_f(A) = \chi_f(A \otimes \mathcal{L}og^\vee)$$

pour tout  $k$ -morphisme  $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$  et  $A \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X_\eta))$ .

Dans cette section, on étudiera les propriétés de  $\log$  comme on l'a déjà fait pour  $\Upsilon$ . Remarquons tout de suite, que le morphisme évident  $\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \longrightarrow \mathcal{L}og^\vee$  induit un morphisme de systèmes de spécialisation :

$$\chi \longrightarrow \log$$

On a l'analogie de la proposition 3.4.9 pour  $\log$  :

**PROPOSITION 3.6.34** — *Gardons les notations du diagramme (3.24). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^\times$ , la composée des 2-morphismes suivants :*

$$\text{id} \longrightarrow i^*(e_n)^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*(e_n)^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{e_n}(e_n)_\eta^*q^* \longrightarrow \log_{e_n}(e_n)_\eta^*q^*$$

est inversible.

**DEMONSTRATION** Avant d'entamer la preuve de 3.6.34, montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , l'objet  $(e_n)_\eta^*\mathcal{L}og_N^\vee$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{L}og_N^\vee$ . Le foncteur  $(e_n)_\eta^*$  étant monoïdal, il suffit d'exhiber un isomorphisme entre  $(e_n)_\eta^*\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}$ . Pour cela, on étudie l'action de  $(e_n)_\eta^*$  sur la classe de Kummer. En utilisant les morphismes de changement de base, on voit immédiatement que

$$(e_n)_\eta^*e_K : \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] \longrightarrow \mathbb{1}$$

est la composée :

$$\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] \longrightarrow pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \longrightarrow pr_{1*}P_n^*P_n^*pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \xrightarrow{\sim} pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \longrightarrow pr_{1*}\Delta_*\Delta^*pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}$$

avec  $P_n : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$  le morphisme de schémas donné par l'association  $(x, y) \rightsquigarrow (x, y^n)$ . Puisque  $\mathbf{H}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et séparé, le lemme 3.4.13 affirme que la composée :

$$pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \longrightarrow pr_{1*}P_n^*P_n^*pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \xrightarrow{\sim} pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}$$

est un isomorphisme. Il est facile de voir qu'il respecte la décomposition  $pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1]$ . Cet isomorphisme induit donc un isomorphisme  $\alpha : \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1]$  rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & (e_n)_\eta^*e_K \\
 & & & & & & \nearrow \\
 \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] & \longrightarrow & pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} & \longrightarrow & pr_{1*}P_n^*P_n^*pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} & \xrightarrow{\sim} & pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} & \longrightarrow & pr_{1*}\Delta_*\Delta^*pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} & \simeq & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \\
 & & & & & & \uparrow & & \nearrow e_K \\
 & & & & & & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] & & & & \\
 & & & & & & \searrow \alpha & & & & 
 \end{array}$$

On obtient alors un isomorphisme (dans la catégorie des flèches)  $(e_n)_\eta^*e_K \simeq e_K$  induisant un isomorphisme  $\mathcal{K} \simeq (e_n)_\eta^*\mathcal{K}$ .

Passons à la preuve de la proposition 3.6.34. Par ce qui précède, il suffit de traiter le cas  $n = 1$ . Il faut donc prouver que la composée des 2-morphismes suivants :

$$\text{id} \xrightarrow{\sim} i^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{\text{id}}q^* \longrightarrow \log_{\text{id}}q^*$$

est inversible. Rappelons que l'on dispose d'une transformation naturelle  $q_* \longrightarrow \chi_{\text{id}}$  définie par la composée :

$$q_* \xrightarrow{\sim} p_*j_* \longrightarrow p_*i_*i^*j_* \xrightarrow{\sim} i^*j_* = \chi_{\text{id}}$$

Cette transformation naturelle a été utilisée dans la preuve de la proposition 3.4.9. On sait que cette transformation naturelle est inversible lorsqu'elle est évaluée sur des objets de la forme  $q^*(?)$  (ainsi que des extensions de tels objets).

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}q^* \longrightarrow \chi_{\text{id}}(q^*(-) \otimes \mathcal{L}og^\vee) \\ & \searrow & \uparrow \sim \qquad \qquad \qquad \uparrow (?) \\ & & q_*q^* \longrightarrow q_*(q^*(-) \otimes \mathcal{L}og^\vee) \end{array}$$

On voit alors que la flèche (?) est inversible (on utilise que  $H$  est parfait pour les petites sommes). D'autre part, la composée :

$$1 \longrightarrow q_*q^* \longrightarrow q_*(q^*(-) \otimes \mathcal{L}og^\vee)$$

s'identifie à :

$$(-) \otimes \mathbb{1} \longrightarrow (-) \otimes q_*q^*\mathbb{1} \longrightarrow (-) \otimes q_*\mathcal{L}og^\vee$$

Par le corollaire 3.6.31, on sait que cette composée est inversible. La proposition est prouvée.

C.Q.F.D

Le corollaire suivant s'obtient à partir de la proposition 3.6.34 de la même manière que le corollaire 3.4.15 s'obtient de la proposition 3.4.9.

**COROLLAIRE 3.6.35** — *On reprend les notations du corollaire 3.4.15. Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}^\times$ , la composée des 2-morphismes suivants :*

$$(e_n^m)_\sigma^* \longrightarrow i^*(e_n^m)_p^* \longrightarrow i^*j_*j^*(e_n^m)_p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^*q^* \longrightarrow \log_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^*q^*$$

est inversible.

On dispose également d'une structure pseudo-monoïdale sur les foncteurs  $\log_{\mathcal{L}}$  obtenue en prenant les accouplements suivants :

$$\log_f A \otimes \log_f B \longrightarrow \chi_f((A \otimes \mathcal{L}og^\vee) \otimes (B \otimes \mathcal{L}og^\vee)) \longrightarrow \chi_f((A \otimes B) \otimes (\mathcal{L}og^\vee)^{\otimes 2}) \longrightarrow \chi_f((A \otimes B) \otimes \mathcal{L}og^\vee)$$

La dernière flèche étant la multiplication de l'algèbre  $\mathcal{L}og^\vee$ . En utilisant le fait que cette algèbre est associative, commutative et unitaire, on déduit que  $\log_f$  est un foncteur pseudo-monoïdal symétrique et que la transformation naturelle  $\chi \longrightarrow \log$  est un morphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux.

Supposons que le 2-foncteur monoïdal homotopique et stable  $H$  est fermé. Soit  $R$  un objet de  $H(k)$ . On définit les opérateurs de dualité  $D_\eta$  et  $D_s$  par :

$$D_\eta(-) = \underline{\text{Hom}}(-, f_\eta^!q^*R) \quad \text{et} \quad D_s(-) = \underline{\text{Hom}}(-, f_\sigma^!R)$$

On définit un morphisme de commutation à la dualité :

$$(3.45) \quad \text{sp}_f^{\mathcal{L}og} \circ D_\eta \longrightarrow D_s \circ \text{sp}_f^{\mathcal{L}og}$$

par la même recette que celle du théorème 3.4.20. On a alors :

**THEOREME 3.6.36** — *On suppose que le corps  $k$  est de caractéristique nulle. Pour toute classe d'objets  $\Lambda \subset \text{Ob}(H(k))$  et tout objet  $E$  de  $H_\Lambda^{\text{ct}}(X_\eta)$ , le morphisme  $\text{sp}_f^{\mathcal{L}og} \circ D_\eta(E) \longrightarrow D_s \circ \text{sp}_f^{\mathcal{L}og}(E)$  est inversible.*

On fait la définition suivante :

**DEFINITION 3.6.37** — *Le triangle de monodromie pour log est le 2-triangle distingué :*

$$\log_f(-1)[-1] \longrightarrow \chi_f \longrightarrow \log_f \xrightarrow{N} \log_f(-1)$$

obtenu à partir du triangle distingué (3.42). La transformation naturelle  $N$  est appelée l'opérateur de monodromie.

On termine notre étude du système de spécialisation logarithmique en prouvant une compatibilité du triangle de monodromie avec la dualité. On note d'abord la proposition suivante :

**PROPOSITION 3.6.38** — *Soit  $R$  un objet de  $H(k)$ . Soit  $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$  un  $k$ -morphisme. Il existe un accouplement naturel :*

$$\chi_f D_\eta A \otimes \chi_f A \longrightarrow f_s^! R(-1)[-1]$$

induisant un morphisme de commutation à la dualité :

$$\chi_f D_\eta A \longrightarrow D_s \chi_f A(-1)[-1]$$

Lorsque le corps  $k$  est de caractéristique nulle, alors pour toute classe d'objets  $\Lambda \subset \text{Ob}(H(k))$ , ce morphisme est inversible pour  $A$  dans  $H_\Lambda^{\text{ct}}(X_\eta)$ .

**DEMONSTRATION** L'accouplement naturel est celui obtenu en prenant la composée :

$$\chi_f D_\eta A \otimes \chi_f A \longrightarrow \chi_f D_\eta A \otimes A \longrightarrow \chi_f f_\eta^! R \longrightarrow f_s^! \chi_{\text{id}} R \longrightarrow f_s^! R(-1)[-1]$$

où le dernière flèche est celle déduite de l'isomorphisme canonique  $\chi_{\text{id}} R = R \oplus R(-1)[-1]$ .

Montrons que le morphisme de commutation à la dualité est bien inversible. On se ramène par la méthode habituelle à traiter le cas  $A = \mathbf{1}$  et  $f = e_n$  où  $f = e_n^n$ . On se ramène immédiatement à montrer que l'accouplement hyperbolique :

$$(R \oplus R(-1)) \otimes (\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}(-1)) \longrightarrow R(-1)$$

est non-dégénéré. Ceci est vrai.

C.Q.F.D

Soit  $A$  un objet de  $H(X_\eta)$ . En appliquant l'opérateur de dualité  $D_s$  au triangle de monodromie, on obtient le triangle suivant :

$$D_s(\log_f A(-1)) \xrightarrow{D_s(N)} D_s(\log_f A) \longrightarrow D_s(\chi_f A) \longrightarrow D_s(\log_f(-1)[-1])$$

qui s'identifie au triangle distingué :

$$D_s(\log_f A)(1) \longrightarrow D_s(\log_f A) \longrightarrow D_s(\chi_f(A)) \longrightarrow D_s(\log_f(A))(1)[+1]$$

On a le théorème suivant :

**THEOREME 3.6.39** — *On a un morphisme de triangles distingués :*

$$\begin{array}{ccccccc} \log_f D_\eta(A)(1) & \xrightarrow{-N(1)} & \log_f D_\eta(A) & \longrightarrow & \chi_f D_\eta(A)(1)[1] & \longrightarrow & \log_f D_\eta(A)(1)[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D_s(\log_f A)(1) & \xrightarrow{D_s N} & D_s(\log_f A) & \longrightarrow & D_s(\chi_f(A)) & \longrightarrow & D_s(\log_f(A))(1)[1] \end{array}$$

où les flèches verticales sont les morphismes de commutation à la dualité et le triangle supérieur est le triangle de monodromie décalé et twisté. Lorsque le corps  $k$  est de caractéristique nulle, alors pour toute classe  $\Lambda \subset \text{Ob}(H(k))$ , ce morphisme est un isomorphisme de triangles dès que  $A \in \text{Ob}(H_\Lambda^{\text{ct}}(X_\eta))$ .

**DEMONSTRATION** La dernière assertion est mise pour mémoire. Il s'agit simplement de prouver que le diagramme de l'énoncé est commutatif. Ainsi on divisera la preuve en trois parties, chacune consacrée à la commutation d'un des trois carrés constituant le diagramme.

Étape 1 : *L'anti-commutation du carré :*

$$\begin{array}{ccc} \log_f D_\eta(A)(1) & \xrightarrow{N(1)} & \log_f D_\eta(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_s(\log_f A)(1) & \xrightarrow{D_s N} & D_s(\log_f A) \end{array}$$

On se ramène immédiatement par adjonction à montrer l'anti-commutation du carré :

$$(3.46) \quad \begin{array}{ccc} \log_f D_\eta(A) \otimes \log_f A & \longrightarrow & \log_f D_\eta(A)(-1) \otimes \log_f A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \log_f D_\eta(A) \otimes \log_f(A)(-1) & \longrightarrow & f_s^! R(-1) \end{array}$$

En revenant aux définitions, on voit immédiatement que les deux composées possibles du carré (3.46) sont égales aux deux composées possibles du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \chi_f(D_\eta(A) \otimes \mathcal{L}og^\vee) \otimes \chi_f(A \otimes \mathcal{L}og^\vee) & & \\ \downarrow & & \\ \chi_f(D_\eta(A) \otimes A \otimes \mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee) & & \\ \downarrow & & \\ \chi_f(f_s^! R \otimes \mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee) & & \\ \downarrow & & \\ R \otimes \chi_f(f_s^! (\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee)) & & \\ \downarrow & & \\ R \otimes f_s^! \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee) & \longrightarrow & R \otimes f_s^! \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1) \otimes \mathcal{L}og^\vee) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R \otimes f_s^! \chi_{\text{id}}((\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee(-1))) & \longrightarrow & R \otimes f_s^! \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1)) \simeq f_s^! \mathbb{1}(-1) \end{array}$$

Ainsi, il suffira de montrer l'anti-commutation du carré :

$$\begin{array}{ccc} \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee) & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1) \otimes \mathcal{L}og^\vee) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \chi_{\text{id}}((\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee(-1))) & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1)) \simeq \mathbb{1}(-1) \end{array}$$

D'après la proposition 3.6.11, on dispose d'une décomposition en somme directe :

$$\mathcal{L}og^\vee \oplus (\mathcal{L}og^\vee \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}og^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee$$

Vue que  $\text{hom}_{\mathbb{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1}(-1)[-1]) = 0$ , on déduit immédiatement que les deux composées du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee) & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee) & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1) \otimes \mathcal{L}og^\vee) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \chi_{\text{id}}((\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee(-1))) & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1)) \simeq \mathbb{1}(-1) \end{array}$$

sont nulles. Ceci nous ramène à montrer que les deux composées possibles de diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}og^\vee) & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee) & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1) \otimes \mathcal{L}og^\vee) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \chi_{\text{id}}((\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee(-1))) & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1)) \simeq \mathbb{1}(-1) \end{array}$$

sont égales à un facteur  $(-1)$  près. Par le lemme 3.6.13, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}og^\vee \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}og^\vee & \xrightarrow[\sim]{l} & \mathcal{L}og^\vee \otimes \mathbf{1}(-1) \otimes \mathcal{L}og^\vee \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee & \longrightarrow & \mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee(-1) \longrightarrow \mathcal{L}og^\vee(-1) \end{array}$$

On déduit que la première composée, à savoir :

(3.47)

$$\chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}og^\vee) \longrightarrow \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee) \longrightarrow \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee(-1)) \longrightarrow \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1))$$

est égale à la composée suivante :

$$\chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}og^\vee) \xrightarrow{l} \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathbf{1}(-1) \otimes \mathcal{L}og^\vee) = \chi_f(\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee)(-1) \longrightarrow \chi_f(\mathcal{L}og^\vee)(-1)$$

Remarquons d'autre part que la seconde composée, à savoir :

(3.48)

$$\chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee \otimes \text{Alt}^2 \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}og^\vee) \longrightarrow \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee) \longrightarrow \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1) \otimes \mathcal{L}og^\vee) \longrightarrow \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1))$$

s'obtient de la première en faisant agir la permutation des facteurs sur la source contenue dans  $\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee$ . Cette permutation agit par  $-\text{id}$  sur  $\text{Alt}^2 \mathcal{K}$ . D'autre part, la multiplication  $\mathcal{L}og^\vee \otimes \mathcal{L}og^\vee \longrightarrow \mathcal{L}og^\vee$  est commutative. Il vient de tout cela que les composées (3.47) et (3.48) s'obtiennent l'une de l'autre par multiplication par  $(-1)$ . D'où l'anti-commutation de notre carré.

**Étape 2 :** *La commutation du carré :*

$$\begin{array}{ccc} \log_f D_\eta(A) & \longrightarrow & \chi_f(D_\eta A)(1)[1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_s(\log_f A) & \longrightarrow & D_s(\chi_f(A)) \end{array}$$

On se ramène par adjonction à montrer la commutation du carré :

(3.49)

$$\begin{array}{ccc} \log_f(D_\eta(A))(-1)[-1] \otimes \chi_f(A) & \longrightarrow & \chi_f(D_\eta(A)) \otimes \chi_f(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \log_f(D_\eta(A))(-1)[-1] \otimes \log_f(A) & \longrightarrow & f_s^! R(-1)[-1] \end{array}$$

En revenant aux définitions, on voit immédiatement que les deux composées possibles du carré (3.49) sont égales aux deux composées possibles du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \chi_f(D_\eta(A) \otimes \mathcal{L}og^\vee(-1)[-1]) \otimes \chi_f(A) & & \\ \downarrow & & \\ \chi_f(D_\eta(A) \otimes A \otimes \mathcal{L}og^\vee(-1)[-1]) & & \\ \downarrow & & \\ \chi_f(f_\eta^! R \otimes \mathcal{L}og^\vee(-1)[-1]) & & \\ \downarrow & & \\ R \otimes f_s^! \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1)[-1] \otimes \mathbf{1}) & \longrightarrow & R \otimes f_s^! \chi_{\text{id}}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \\ \downarrow & & \searrow \\ R \otimes f_s^! \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1)[-1] \otimes \mathcal{L}og^\vee) & \longrightarrow & R \otimes f_s^! \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^\vee(-1)[-1]) \xrightarrow{\sim} R \otimes f_s^! \mathbf{1}(-1)[-1] \end{array}$$

Il vient qu'il suffit de prouver la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}(\mathbf{1}) \\ \downarrow & & \searrow \\ \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1] \otimes \mathcal{L}og^{\vee}) & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}(-1)[-1] \end{array}$$

Remarquons pour cela que  $\chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) \simeq \mathbf{1}(-1)[-1]$ . De plus, modulo cette identification, la composée :

$$\chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) \longrightarrow \chi_{\text{id}}(\mathbf{1}) \longrightarrow \mathbf{1}(-1)[-1]$$

est l'identité. Il reste donc à montrer que la composée :

$$\mathbf{1}(-1)[-1] = \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) \longrightarrow \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1] \otimes \mathcal{L}og^{\vee}) \longrightarrow \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}(-1)[-1]$$

vaut l'identité. Pour cela, il suffit de remarquer que la composée en question est égale à la composée de :

$$\mathbf{1}(-1)[-1] \longrightarrow \chi_{\text{id}}(\mathbf{1}(-1)[-1]) \longrightarrow \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}(-1)[-1]$$

Cette dernière vaut l'identité.

**Étape 3 :** *La commutation du carré :*

$$\begin{array}{ccc} \chi_f(D_{\eta}A)(1)[1] & \longrightarrow & \log_f(D_{\eta}A)(1)[1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_s(\chi_f(A)) & \longrightarrow & D_s(\log_f(A))(1)[1] \end{array}$$

Par adjonction, on se ramène immédiatement à la commutation du carré :

$$(3.50) \quad \begin{array}{ccc} \chi_f D_{\eta}(A) \otimes \log_f A(-1)[-1] & \longrightarrow & \log_f D_{\eta}(A) \otimes \log_f A(-1)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \chi_f D_{\eta}(A) \otimes \chi_f(A) & \longrightarrow & f_s^! R(-1)[-1] \end{array}$$

En revenant aux définitions, on voit immédiatement que les deux composées possibles du carré (3.50) sont égales aux deux composées possibles du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \chi_f D_{\eta}(A) \otimes \chi_f(A \otimes \mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) & & \\ \downarrow & & \\ \chi_f(D_{\eta}(A) \otimes A \otimes \mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) & \longrightarrow & \chi_f(f_s^! R \otimes \mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) \\ & & \downarrow \\ & & R \otimes f_s^! \chi_{\text{id}}(\mathbf{1} \otimes \mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) \longrightarrow R \otimes f_s^! \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1] \otimes \mathcal{L}og^{\vee}) \\ & & \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ & & R \otimes f_s^! \chi_{\text{id}}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \qquad \qquad \qquad R \otimes f_s^! \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) \\ & & \searrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \sim \\ & & R \otimes f_s^! \mathbf{1}(-1)[-1] \end{array}$$

Ce qui nous ramène encore une fois à la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}(\mathbf{1}) \\ \downarrow & & \searrow \\ \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1] \otimes \mathcal{L}og^{\vee}) & \longrightarrow & \chi_{\text{id}}(\mathcal{L}og^{\vee}(-1)[-1]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}(-1)[-1] \end{array}$$

Ce diagramme a été traité dans l'étape précédente.

### 3.6.4 Retour au système de spécialisation cycles proches unipotents

On termine ce paragraphe par la construction d'un isomorphisme entre le système de spécialisation  $\Upsilon$  construit dans la section 3.4 et le système de spécialisation logarithmique. Une fois cet isomorphisme construit, on déduit le triangle de monodromie (3.25) annoncé au début de la section. Pour construire cet isomorphisme, on a besoin d'une hypothèse technique souvent vérifiée, à savoir la commutation de images directes cohomologiques suivant un morphisme de schéma avec les  $\Delta$ -colimites homotopiques. Ainsi, tout au long de ce paragraphe, on supposera en plus de l'hypothèse 3.6.26 que la condition suivante est vérifiée :

**HYPOTHÈSE 3.6.40** — **1-** Le 2-foncteur homotopique stable  $\mathbf{H}$  est sous-jacent à un dérivateur algébrique monoïdal, homotopique et stable. De plus pour tout morphisme de  $k$ -schéma  $f$ , le foncteur  $f_*$  commute aux  $\Delta$ -colimites, dans le sens que le morphisme évident  $(p_\Delta)_\# f_* \longrightarrow f_*(p_\Delta)_\#$  est inversible.

**2-** Le 2-foncteur homotopique stable  $\mathbf{H}$  est engendré par sa base.

Sous ces conditions, on va définir un morphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux  $\log \longrightarrow \Upsilon$  qui fournira l'isomorphisme recherché. Pour cela, on reprend les notations de la section 3.4. On posera  $\mathcal{U} = (p_\Delta)_\# \theta_* \mathbf{1} \in \text{Ob}(\mathbf{H}(\mathbb{G}_m))$ . On a le lemme suivant :

**LEMME 3.6.41** — *L'objet  $\mathcal{U}$  est naturellement une algèbre commutative de  $\mathbf{H}(\mathbb{G}_{m_k})$ . De plus, sous la première partie de l'hypothèse 3.6.40, on a un isomorphisme canonique de systèmes de spécialisation monoïdaux  $\Upsilon \simeq \chi(- \otimes \mathcal{U})$ .*

**DEMONSTRATION** Le foncteur  $\theta_*$  étant pseudo-monoïdal symétrique, il est clair que  $\theta_* \mathbf{1}$  est une algèbre commutative unitaire. De même, le foncteur  $(p_\Delta)_\#$  est pseudo-monoïdal symétrique. Il vient que  $\mathcal{U}$  est bien une algèbre commutative de  $\mathbf{H}(\mathbb{G}_m)$ .

On obtient un morphisme  $\Upsilon_f \longrightarrow \chi_f(- \otimes f_\eta^* \mathcal{U})$  en prenant la composée :

$$(p_\Delta)_\# \chi_f(\theta_f)_*(\theta_f, p_\Delta)^* \xrightarrow{\sim} (p_\Delta)_\# \chi_f((\theta_f)_* \mathbf{1}) \otimes (p_\Delta)^*(-) \xrightarrow{\sim} \chi_f((p_\Delta)_\#((\theta_f)_* \mathbf{1}) \otimes (-))$$

Sous la partie **1** de l'hypothèse 3.6.40, il s'agit bien d'un isomorphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux. C.Q.F.D

On va définir un morphisme canonique  $\ell_1 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{U}$  dans  $\mathbf{H}(\mathbb{G}_m)$ . Rappelons que  $\square$  désigne la catégorie  $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$  :

$$\begin{array}{ccc} (1, 1) & \longleftarrow & (0, 1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (1, 0) & \longleftarrow & (0, 0) \end{array}$$

et que  $i_\Gamma : \Gamma \longrightarrow \square$  désigne l'inclusion de la sous-catégorie pleine ayant pour objets  $\text{Ob}(\square) - \{(0, 0)\}$ . On appelle  $\delta_\Gamma : \Gamma \longrightarrow \Delta$  le foncteur qui :

- envoie l'objet  $(1, 1) \in \text{Ob}(\Gamma)$  sur  $\mathbf{1} \in \text{Ob}(\Delta)$  et les objets  $(1, 0) \in \text{Ob}(\Gamma)$  et  $(0, 1) \in \text{Ob}(\Gamma)$  sur  $\mathbf{0} \in \text{Ob}(\Delta)$ ,
- envoie la flèche  $(0, 1) \rightarrow (1, 1)$  sur l'application  $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1}$  qui pointe  $0 \in \mathbf{1}$ ,
- envoie la flèche  $(1, 0) \rightarrow (1, 1)$  sur l'application  $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1}$  qui pointe  $1 \in \mathbf{1}$ .

Etant donné un dérivateur triangulé de domaine  $\text{Dia}$  contenant la catégorie  $\Delta$ , on déduit immédiatement une transformation naturelle  $(p_\Gamma)_\#(\delta_\Gamma)^* \longrightarrow (p_\Delta)_\#$  en prenant la composée :

$$(p_\Gamma)_\#(\delta_\Gamma)^* \simeq (p_\Delta)_\#(\delta_\Gamma)_\#(\delta_\Gamma)^* \longrightarrow (p_\Delta)_\#$$

En appliquant ceci à l'objet  $\theta_* \mathbf{1} \in \text{Ob}(\mathbb{H}(\mathbb{G}_m, \Delta))$ , on déduit un morphisme dans  $\mathbf{H}(\mathbb{G}_m)$  :

$$(p_\Gamma)_\#(\delta_\Gamma)^* \theta_* \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{U}$$

Pour obtenir le morphisme  $\ell_1$  recherché, on va identifier  $(p_\Gamma)_\#(\delta_\Gamma)^* \theta_* \mathbf{1}$  à  $\mathcal{H}$ . Calculons d'abord le squelette de  $(\delta_\Gamma)^* \theta_* \mathbf{1}$ . Remarquons pour cela que le diagramme de schémas  $\mathcal{A} \circ \delta_\Gamma$  est donné par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m \times_k \mathbb{G}_m & \xleftarrow{\Delta} & \mathbb{G}_m \\ \uparrow \text{id} \times 1 & & \\ \mathbb{G}_m & & \end{array}$$



Il vient immédiatement que le squelette de  $(\delta_\Gamma)^*\theta_*\mathbb{1}$  est donné par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] & \xrightarrow{(id, e_K)} & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \\ \downarrow id, 0 & & \\ \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} & & \end{array}$$

avec  $e_K$  la flèche de Kummer. Il existe alors une unique (à isomorphisme près) flèche  $a : Q \longrightarrow (\delta_\Gamma)^*\theta_*\mathbb{1}$  de  $\mathbb{H}(\mathbb{G}_m, \Gamma)$  ayant pour squelette :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] & \xrightarrow{e_K} & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \\ \downarrow & \searrow (0, id) & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] & \xrightarrow{(id, e)} & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \\ & \searrow & \downarrow (id, 0) & & \\ & & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} & & \end{array}$$

Le morphisme  $\mathbb{1} \longrightarrow (\delta_\Gamma)^*\theta_*\mathbb{1}$  induit un isomorphisme après passage à  $(p_\Gamma)_\#$  étant donné que la colimite du cône de  $a$  admet pour squelette :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \\ \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} & & \end{array}$$

Enfin de compte, par l'axiome 6 de la définition 2.1.34, on dispose d'un triangle distingué :

$$\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] \xrightarrow{e} \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \longrightarrow (p_\Gamma)_\#Q \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)$$

Il vient par le lemme 3.6.28 que  $(p_\Gamma)_\#Q$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{K}$ .

Muni du morphisme  $\ell_1 : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{U}$ , on applique le corollaire 3.6.19 pour obtenir un morphisme canonique d'algèbres associatives, commutatives et unitaires  $\ell : \mathcal{L}og^\vee \longrightarrow \mathcal{U}$

**DEFINITION 3.6.42** — On définit un morphisme de systèmes de spécialisation  $\ell : \log \longrightarrow \Upsilon$  en prenant la composée :

$$\log = \chi(- \otimes \mathcal{L}og^\vee) \xrightarrow{\ell} \chi(- \otimes \mathcal{U}) \xleftarrow{\sim} \Upsilon$$

C'est un morphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux.

**LEMME 3.6.43** — On a un triangle commutatif de systèmes de spécialisation :

$$\begin{array}{ccc} \chi & \longrightarrow & \Upsilon \\ \downarrow & \nearrow & \\ \log & & \end{array}$$

**THEOREME 3.6.44** — Lorsque le corps  $k$  est de caractéristique nulle,  $\ell$  est un isomorphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux.

**DEMONSTRATION** Les deux systèmes de spécialisations  $\log$  et  $\Upsilon$  commutent aux petites sommes. Étant donné que  $\mathbb{H}$  est engendré par la base, on peut alors appliquer le critère 3.3.45. Le résultat découle alors des propositions 3.4.9 et 3.6.34 et des corollaires 3.4.15 et 3.6.35 (ainsi que le lemme précédent). C.Q.F.D

**Remarque 3.6.45** — Lorsque  $\mathbb{H}$  est le 2-foncteur homotopique stable  $\mathbf{DM}_{\mathbb{Q}}$ , M. Levine [Lev05] a apporté une simplification notable à la preuve du théorème précédent. En effet, il démontre directement que le morphisme  $\ell : \mathcal{L}og^\vee \longrightarrow \mathcal{U}$  est un isomorphisme. Pour cela, il utilise un modèle particulièrement simple du dual de  $\mathcal{L}og$  qu'il arrive à identifier avec le complexe normalisé associé au schéma cosimplicial  $\mathcal{A}$ . En particulier, le théorème précédent est valable sans hypothèse sur le corps de base (du moins lorsqu'on travaille dans  $\mathbf{DM}_{\mathbb{Q}}$ ).

On obtient donc le résultat suivant :

**THEOREME 3.6.46** — *Supposons que le corps  $k$  est de caractéristique nulle et que les hypothèses 3.6.26 et 3.6.40 sont vérifiées. Il existe un 2-triangle distingué canonique :*

$$\Upsilon_f(-1)[-1] \longrightarrow \chi_f \longrightarrow \Upsilon_f \xrightarrow{N} \Upsilon(-1)$$

appelé triangle de monodromie. De plus, ce triangle est compatible à la dualité dans le sens que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \Upsilon_f \circ D_\eta(-1)[-1] & \longrightarrow & \chi_f \circ D_\eta & \longrightarrow & \Upsilon_f D_\eta & \longrightarrow & \Upsilon D_\eta(-1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D_s(\Upsilon_f(1)[1]) & \longrightarrow & D_s(\chi_f(1)[1]) & \longrightarrow & D_s(\Upsilon_f) & \xrightarrow{-D_s(N(1))} & D_s(\Upsilon_f(1)) \end{array}$$

est un morphisme de triangles distingués qui devient un isomorphisme lorsqu'il est évalué en des objets de  $H_\Lambda^{\text{ct}}(X_\eta)$  pour toute classe  $\Lambda \subset \text{Ob}(H(k))$ .

On termine avec quelques conditions assurant la nilpotence des opérateurs de monodromie. Ces conditions sont vraies pour le 2-foncteur homotopique stable **DM** et sont conséquences du théorème de simplification de Voevodsky (voir pour cela [VSF00] et [Voe02]).

**HYPOTHÈSE 3.6.47** — Pour tout  $k$ -schéma lisse  $U$ , le groupe abélien  $\text{hom}_{H(U)}(\mathbb{1}_U, \mathbb{1}_U(n)[m])$  est nul dès que  $n$  est strictement négatif.

On a le lemme suivant :

**LEMME 3.6.48** — *Supposons l'hypothèse 3.6.47 satisfaite. Soit  $\mathbb{1}(\mathbb{Z}) \subset \text{Ob}(H(k))$  l'ensemble des objets de la forme  $\mathbb{1}(r)$  avec  $r \in \mathbb{Z}$ . Soit  $X$  un  $k$ -schéma de type fini et  $A$  et  $B$  deux objets de  $H_{\mathbb{1}(\mathbb{Z})}(X)$ . Il existe alors un entier  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tel que les groupes  $\text{hom}_{H(X)}(A, B(n)[m])$  sont nuls pour  $n < n_0$ .*

DEMONSTRATION On a un isomorphisme canonique :

$$\text{hom}_{H(X)}(A, B(n)[m]) \simeq \text{hom}_{H(X)}(\mathbb{1}, \underline{\text{Hom}}(A, B)(n)[m])$$

Comme  $A$  et  $B$  sont  $\mathbb{1}(\mathbb{Z})$ -constructibles, il en est de même de  $\underline{\text{Hom}}(A, B)$ . Il vient qu'on peut supposer que  $A = \mathbb{1}$ . La conclusion de lemme étant clairement stable par extensions, suspensions et cosuspensions, on se ramène facilement à supposer que  $B$  varie dans un ensemble de générateurs de  $H_\Lambda^{\text{ct}}(X)$ . On peut donc supposer que  $B$  est de la forme  $f_*\mathbb{1}_Y(-n_0)$  pour un certain  $f : Y \longrightarrow X$  projectif et lisse. Mais alors, par adjonction on a :

$$\text{hom}_{H(X)}(\mathbb{1}, B(n)[m]) = \text{hom}_{H(X)}(\mathbb{1}, f_*\mathbb{1}(-n_0 + n)[m]) = \text{hom}_{H(Y)}(\mathbb{1}, \mathbb{1}(-n_0 + n)[m])$$

Comme  $Y$  est lisse, on voit que pour  $n < n_0$ , les groupes ci-dessus sont bien nuls.

C.Q.F.D

**COROLLAIRE 3.6.49** — *Gardons les hypothèses du théorème 3.6.46. Lorsque l'hypothèse 3.6.47 est vérifiée, l'opérateur de monodromie :*

$$N : \Upsilon_f(A) \longrightarrow \Upsilon_f(A)(-1)$$

est nilpotent pour  $A$  dans  $H_{\mathbb{1}(\mathbb{Z})}^{\text{ct}}(X)$ .

## Chapitre 4

# La construction de 2-foncteurs homotopiques stables

**Introduction.** Dans ce chapitre nous construisons le 2-foncteur homotopique stable **SH** dont il était question à plusieurs reprises dans les chapitres précédents. Ceci est bien entendu l'aboutissement des travaux de plusieurs mathématiciens : Morel et Voevodsky [MV90], Jardine [Jar87, Jar99], Hovey [Hov01], Riou [Rio02, Rio06], Røndigs [Rön05] et d'autres. En reproduisant ici la construction de **SH** nous espérons faciliter la tâche au lecteur désirant apprendre cette théorie. Le lecteur déjà familier avec la théorie remarquera à plusieurs reprises des divergences avec le traitement suivi dans les papiers originaux. Toutefois, il est clair que l'essentiel des résultats de ce chapitre sont dus aux auteurs déjà mentionnés et ont été directement puisés dans leurs papiers. Faisons un bref aperçu de ce chapitre :

**1-** La section 4.1 est une introduction à la théorie des catégories de modèles selon Quillen. On expose rapidement les conséquences immédiates de la définition. On définit ensuite la notion d'homotopie et on démontre le théorème fondamental de l'algèbre homotopique. On étudie également les foncteurs entre les catégories de modèles et notamment les adjonctions de Quillen. On passe ensuite aux 2-homotopies ce qui nous amène naturellement à la notion de catégories de modèles stables. On démontre alors un cas particulier du théorème de Hovey [Hov99] affirmant que la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles stable est naturellement triangulée.

**2-** La section 4.2 est probablement la plus technique de ce chapitre. Le but est d'établir le théorème de localisation de Hirschhorn [Hir03] (en fait un cas particulier dudit théorème). On commence par la notion d'accessibilité qui permet de mesurer la taille des objets dans une catégorie de modèles. On expose ensuite l'argument du petit objet et la notion connexe de complexes cellulaires (formalisée par Hirschhorn [Hir03]). On introduit dans la sous-section 4.2.3 la classe des catégories de modèles présentables par cofibrations. On s'efforce alors de filtrer les cofibrations de ces catégories par des sous-cofibrations de taille bornée. Les techniques obtenues serviront dans la preuve du théorème de localisation mais également dans d'autres endroits tout au long du chapitre. Dans la sous-section 4.2.4, on présente une preuve du théorème de localisation de Hirschhorn. Ce théorème sera systématiquement utilisé dans la suite.

**3-** La section 4.3 est consacrée à la technique de stabilisation des catégories de modèles comme développée par Hovey [Hov01]. Le but est d'inverser, d'une manière convenable, un endofoncteur de Quillen à gauche  $F$  fixé. La technique de stabilisation est basée sur la notion de  $F$ -spectres (non-symétriques, symétriques etc). On commence par l'étude des spectres dans des catégories abstraites. On présente alors les constructions bien connues des foncteurs de suspension infinie et de délaçage. On étudie aussi la functorialité de la catégorie des spectres relativement aux différentes données (l'endofoncteur  $F$ , le monoïde de symétrisation, la catégorie ambiante, etc). On passe ensuite aux spectres dans les catégories de modèles. On définit les structures stables et on décrit les objets stablements fibrants via la notion de  $\Omega$ -spectres. On démontre aussi des théorèmes de comparaisons entre différents types de spectres. Dans la sous-section 4.3.5, on spécialise la théorie au cas où le foncteur à inverser est le produit tensoriel par un objet cofibrant dans une catégorie de modèles monoïdale symétrique. On définit en particulier le produit tensoriel entre spectres symétriques et on montre que la structure de modèles stable est encore monoïdale symétrique (sous certaines hypothèses techniques).

**4-** Dans la section 4.4 on présente les travaux de Jardine [Jar87]. Étant donné un site de Grothendieck  $(\mathcal{S}, top)$ , notre but est de définir des structures de modèles  $top$ -locales sur les catégories des préfaisceaux  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  à valeurs dans certaines catégories de modèles  $\mathfrak{M}$  appelées les catégories de coefficients. Notre traitement exclu le cas fondamental de  $\mathfrak{M} = \Delta^{op}Ens$  considéré dans [Jar87] puisque nos catégories de coefficients seront supposées stables. Une bonne partie de la section est consacrée aux questions de functorialité. On établit ainsi un critère pour qu'un foncteur continu entre deux sites induise une adjonction de Quillen relativement aux structures projectives  $top$ -locales.

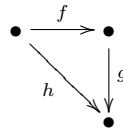
5- Dans la dernière section, on exploite les techniques développées précédemment pour parvenir à notre but, à savoir, la construction du dérivateur algébrique  $\mathbb{S}\mathbb{H}$ . On localise d’abord la structure Nis-locale de  $\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$  suivant les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles (voir [MV90]). On stabilise ensuite relativement au foncteur  $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m) \otimes -$  (voir [Jar99]). Une bonne partie est consacrée à la construction des foncteurs images inverses et de leurs adjoints ainsi qu’aux questions de cohérence. On vérifie ensuite les différents axiomes que doit satisfaire un dérivateur algébrique homotopique stable. En particulier, on présente dans la sous-section 4.5.3 la preuve du théorème de localité de Morel et Voevodsky [MV90]. Cette sous-section est sans doute le cœur géométrique de ce chapitre. On termine la section par quelques compléments. On démontre notamment que les catégories  $\mathbf{SH}(-)$  sont compactement engendrées.

### 4.1 Catégories de modèles I : la théorie générale

La notion de catégories de modèles qu’on utilisera est légèrement plus restrictive que celle de [Qui67] du fait que les catégories sous-jacentes seront supposées complètes et cocomplètes :

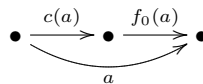
**DEFINITION 4.1.1** — Une catégorie  $\mathfrak{M}$  munie de trois classes de flèches  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{Cof}$  et  $\mathbf{Fib}$  (appelées respectivement la classe des équivalences faibles, des cofibrations et des fibrations) est une catégorie de modèles si les cinq axiomes suivants sont vérifiés.

- (MC1) Les petites limites et colimites sont représentables dans  $\mathfrak{M}$ .
- (MC2) Supposons donné un triangle commutatif :

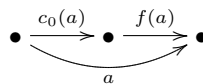


Si deux des trois flèches  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont dans  $\mathbf{W}$ , il en est de même de la flèche restante.

- (MC3) Si la flèche  $f$  est rétracte de  $g$  et si  $g$  est une équivalence faible, une cofibration ou une fibration, il en est de même de  $f$ .
- (MC4) Toute cofibration admet la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales (i.e., fibrations qui sont des équivalences faibles). De même toute fibration admet la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales (i.e., cofibrations qui sont des équivalences faibles).
- (MC5) Toute flèche  $a : \bullet \longrightarrow \bullet$  admet une factorisation :



avec  $c(a)$  une cofibration et  $f_0(a)$  une fibration triviale, ainsi qu’une factorisation :



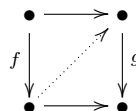
avec  $c_0(a)$  une cofibration triviale et  $f(a)$  une fibration.

**Remarque 4.1.2** — Un triplet  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ , formé de trois classes de flèches dans une catégorie complète et cocomplète  $\mathfrak{M}$ , vérifiant les axiomes (MC2) à (MC5) de la définition 4.1.1 est appelé une *structure de modèles* sur  $\mathfrak{M}$ .

Les catégories de modèles rencontrées sont souvent propres au sens ci-dessous :

**DEFINITION 4.1.3** — Une catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est dite propre à gauche (resp. propre à droite) lorsque les équivalences faibles de  $\mathfrak{M}$  sont stables par push-out suivant les cofibrations (resp. stables par pull-back suivant les fibrations). On dit qu’elle est propre si elle est propre à gauche et à droite.

Rappelons qu’une flèche  $f$  admet la propriété de relèvement à gauche par rapport à une flèche  $g$  si pour tout carré commutatif (à flèches pleines) :



il existe une flèche en pointillé, appelée *relèvement*, rendant commutatif le diagramme ci-dessus. Dualement, nous disons que  $g$  admet la *propriété de relèvement à droite par rapport* à  $f$  lorsque  $f$  admet la propriété de relèvement à gauche par rapport à  $g$ . Il sera pratique d'introduire les notations suivantes :

**DEFINITION 4.1.4** — Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $F \subset \text{Fl}(\mathcal{C})$  une classe de flèches de  $\mathcal{C}$ . On note  $\text{LLP}(F)$  la classe des flèches ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux éléments de  $F$ . Dualement, on note  $\text{RLP}(F)$  la classe des flèches ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux éléments de  $F$ .

La proposition ci-dessous montre que dans une catégorie de modèles, la connaissance de deux des trois classes  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{Cof}$  et  $\mathbf{Fib}$  suffit pour déterminer la classe restante :

**PROPOSITION 4.1.5** — On a les égalités suivantes :

$$\mathbf{Fib} = \text{RLP}(\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}), \quad \mathbf{Fib} \cap \mathbf{W} = \text{RLP}(\mathbf{Cof}), \quad \mathbf{Cof} = \text{LLP}(\mathbf{Fib} \cap \mathbf{W}) \quad \text{et} \quad \mathbf{Cof} \cap \mathbf{W} = \text{LLP}(\mathbf{Fib})$$

De plus, la classe  $\mathbf{W}$  coïncide avec celle des composées  $g \circ f$  avec  $f \in \mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}$  et  $g \in \mathbf{W} \cap \mathbf{Fib}$ .

DEMONSTRATION On démontre uniquement la première égalité. Soit  $f : X \longrightarrow Y$  une flèche de  $\text{RLP}(\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W})$ . Par la seconde partie de l'axiome **(MC5)**, il existe une factorisation de  $f$  :

$$X \xrightarrow{i} X' \xrightarrow{f'} Y$$

avec  $i$  une cofibration triviale et  $f'$  une fibration. Comme  $f \in \text{RLP}(\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W})$ , un relèvement existe dans le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xlongequal{\quad} & X \\ \downarrow i & \nearrow \text{---} & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y \end{array}$$

Ceci montre que  $f$  est rétracte de  $f'$ . Par l'axiome **(MC3)**,  $f$  est une fibration.

C.Q.F.D

On a le corollaire immédiat suivant :

**COROLLAIRE 4.1.6** — Les classes  $\mathbf{Cof}$  et  $\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}$  sont stables par *push-out* et *coproduits directs*. Dualement, les classes  $\mathbf{Fib}$  et  $\mathbf{W} \cap \mathbf{Fib}$  sont stables par *pull-back* et *produits directs*.

Voici quelques exemples de catégories de modèles :

**Exemple 4.1.7** — 1- Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie admettant les petites limites et colimites, alors  $(\mathcal{C}, \mathbf{Isom}(\mathcal{C}), \text{Fl}(\mathcal{C}), \text{Fl}(\mathcal{C}))$  est une catégorie de modèles.

2- La notion de catégories de modèles est clairement autoduale dans le sens que lorsque  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$  est une catégorie de modèles, il en est de même de  $(\mathfrak{M}^{\text{op}}, \mathbf{W}, \mathbf{Fib}, \mathbf{Cof})$ .

3- Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne de Grothendieck. La catégorie  $\mathbf{Compl}(\mathcal{A})$  des complexes (homologiques) d'objets de  $\mathcal{A}$  est naturellement une catégorie de modèles propre (voir [Joy84]). Un morphisme de complexes  $f : A_{\bullet} \longrightarrow B_{\bullet}$  est une cofibration lorsque les  $f_n$  sont des monomorphismes pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . C'est une équivalence faibles lorsque  $H_n(f)$  est un isomorphisme pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Enfin,  $f$  est une fibration s'il admet la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales.

**Exemple 4.1.8** — La catégorie  $\Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns$  des ensembles simpliciaux est naturellement une catégorie de modèles propre (voir par exemple [GJ99]). Les cofibrations sont les monomorphismes. Un morphisme d'ensembles simpliciaux  $f : A_{\bullet} \longrightarrow B_{\bullet}$  est une équivalence faible si sa réalisation topologique  $|f| : |A_{\bullet}| \longrightarrow |B_{\bullet}|$  est une équivalence d'homotopie. Les fibrations sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales. La catégorie  $\Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns$  est à la base de beaucoup de constructions de catégories de modèles.

La preuve du lemme ci-dessous est un exercice facile :

**LEMME 4.1.9** — 1- Soient  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles et  $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ . La catégorie  $A \setminus \mathfrak{M}$ , des flèches de source  $A$ , est une catégorie de modèles lorsqu'elle est munie des trois classes  $\text{Oub}^{-1}(\mathbf{W})$ ,  $\text{Oub}^{-1}(\mathbf{Cof})$  et  $\text{Oub}^{-1}(\mathbf{Fib})$  où  $\text{Oub} : A \setminus \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$  désigne le foncteur d'oubli qui associe à une flèche de source  $A$  son but.

2- On a également l'énoncé dual concernant la catégorie  $\mathfrak{M}/A$  des flèches de but  $A$ .

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant un objet initial  $\emptyset$  et un objet final  $*$ . Rappelons que  $\mathcal{C}$  est dite pointée lorsque l'unique morphisme  $\emptyset \longrightarrow *$  est inversible. Il existe au moins deux façons d'associer à une catégorie  $\mathcal{C}$  (ayant un objet initial et un objet final) une catégorie pointée. La première consiste à prendre la catégorie  $\mathcal{C}_{\emptyset} = \mathcal{C}/\emptyset$ . La seconde consiste à

prendre la construction duale, à savoir  $\mathcal{C}_* = *\backslash\mathcal{C}$ . Les catégories  $\mathcal{C}_\emptyset$  et  $\mathcal{C}_*$  sont pointées et la catégorie  $\mathcal{C}$  est pointée si et seulement si l'un des deux foncteurs d'oubli :  $\mathcal{C}_\emptyset \longrightarrow \mathcal{C}$  ou  $\mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}$  est un isomorphisme.

Les deux catégories  $\mathcal{C}_*$  et  $\mathcal{C}_\emptyset$  peuvent être tout à fait différentes. C'est le cas par exemple pour la catégorie des ensembles *Ens*. Dans la suite nous utiliserons exclusivement la construction  $\mathcal{C}_*$  qu'on appellera la catégorie pointée associée à  $\mathcal{C}$ .

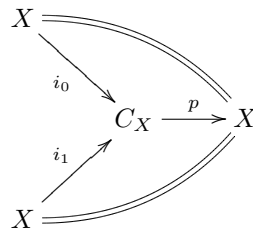
Étant donnée une catégorie de modèles  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ , le lemme 4.1.9 nous dit que  $\mathfrak{M}_*$  munie des classes  $\mathbf{W}_* = \text{Oub}^{-1}(\mathbf{W})$ ,  $\mathbf{Cof}_* = \text{Oub}^{-1}(\mathbf{Cof})$  et  $\mathbf{Fib}_* = \text{Oub}^{-1}(\mathbf{Fib})$  est une catégorie de modèles pointée.

### 4.1.1 Quelques points d'algèbre homotopique

Soit  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$  une catégorie de modèles. Dans ce paragraphe nous expliquons, suivant Quillen [Qui67], comment faire de l'homotopie dans  $\mathfrak{M}$ . Notre référence principale sera le second chapitre de [GJ99].

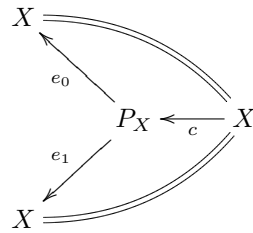
**DEFINITION 4.1.10** — Soit  $X$  un objet de  $\mathfrak{M}$ .

1- Un cylindre  $(C_X, p, i_0, i_1)$  sur  $X$  est un diagramme commutatif dans  $\mathfrak{M}$  :



tel que  $p$  est une équivalence faible et  $i_0 \amalg i_1 : X \amalg X \longrightarrow C_X$  une cofibration.

2- Dualement, un espace de chemins  $(P_X, c, e_0, e_1)$  sur  $X$  est un diagramme commutatif dans  $\mathfrak{M}$  :



tel que  $c$  est une équivalence faible et  $e_0 \times e_1 : P_X \longrightarrow X \times X$  une fibration.

Soit  $(C_X, p, i_0, i_1)$  un cylindre sur  $X$ . Par l'axiome (MC2), les flèches  $i_0$  et  $i_1$  sont des équivalences faibles. Lorsque  $X$  est cofibrant, c'est même des cofibrations triviales (voir [GJ99]).

**DEFINITION 4.1.11** — 1- Soient  $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$  deux flèches de  $\mathfrak{M}$ . Nous disons que  $f_0$  est homotope à gauche à  $f_1$  relativement au cylindre  $(C_X, p, i_0, i_1)$  s'il existe une flèche  $h : C_X \longrightarrow Y$  telle que  $f_0 = h \circ i_0$  et  $f_1 = h \circ i_1$ . La flèche  $h$  est appelée une homotopie de  $f_0$  à  $f_1$  relativement au cylindre  $C_X$ . Nous dirons que  $f_0$  est homotope à gauche à  $f_1$  s'il existe un cylindre relativement auquel  $f_0$  est homotope à gauche à  $f_1$ .

2- Dualement, on a la notion d'homotopie à droite obtenue à l'aide des espaces de chemins.

On démontre suivant [GJ99] que la relation d'homotopie à gauche (resp. à droite) est une relation d'équivalence lorsque  $X$  est cofibrant (resp.  $Y$  est fibrant). On a également :

**PROPOSITION 4.1.12** — Soient  $f, g : X \longrightarrow Y$  deux flèches de  $\mathfrak{M}$  avec  $X$  cofibrant et  $Y$  fibrant. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $f$  et  $g$  sont homotopes à gauche,
- $f$  et  $g$  sont homotopes à gauche relativement à un cylindre fixé,
- $f$  et  $g$  sont homotopes à droite,
- $f$  et  $g$  sont homotopes à droite relativement à un espace de chemin fixé.

On notera  $\pi_0(X, Y)$  le quotient de  $\text{hom}_{\mathfrak{M}}(X, Y)$  par la relation d'homotopie.

**DEMONSTRATION** On prouvera seulement que la première assertion implique la dernière. Les autres implications s'en déduisent facilement (en utilisant, entre autre, un argument de dualité). Pour cette implication, nous n'aurons pas besoin de l'hypothèse que  $Y$  est fibrant.

Soit  $(P_Y, c, e_0, e_1)$  l'espace de chemins sur  $Y$  qu'on s'est fixé. Par hypothèse, il existe un cylindre  $(C_X, p, i_0, i_1)$  sur  $X$  et une homotopie à gauche  $h : C_X \longrightarrow Y$  de  $f$  à  $g$ . Comme  $X$  est cofibrant,  $i_1 : X \longrightarrow C_X$  est une cofibration triviale. Considérons le carré solide commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{cog} & P_Y \\ i_1 \downarrow & \nearrow t & \downarrow (e_0, e_1) \\ C_X & \xrightarrow{h, g \circ p} & Y \times Y \end{array}$$

Par l'axiome (MC4), on a un relèvement  $t : C_X \longrightarrow P_Y$ . L'homotopie à droite recherchée est donnée par la composée  $t \circ i_0$ . C.Q.F.D

La preuve de la proposition 4.1.12 met en évidence la notion ci-dessous qui jouera un rôle important dans l'étude des homotopies à 2-homotopies près dans la section 4.1.3.

**DEFINITION 4.1.13** — Soient  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathfrak{M}$  et  $f, g : X \longrightarrow Y$  deux flèches. On suppose données :

- une homotopie à gauche  $h_g : C_X \longrightarrow Y$  de  $f$  à  $g$  relativement à un cylindre  $(C_X, p, i_0, i_1)$ ,
- une homotopie à droite  $h_d : X \longrightarrow P_Y$  de  $f$  à  $g$  relativement à un cylindre  $(P_Y, c, e_0, e_1)$ .

Une correspondance entre  $h_g$  et  $h_d$  est une flèche  $t : C_X \longrightarrow P_Y$  rendant commutatif le carré :

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{h_d \cup cog} & P_Y \\ i_0 \cup i_1 \downarrow & \nearrow t & \downarrow (e_0, e_1) \\ C_X & \xrightarrow{(h_g, g \circ p)} & Y \times Y \end{array}$$

On dit que  $h_g$  et  $h_d$  sont correspondantes si une correspondance  $t$  existe.

**Remarque 4.1.14** — Soient  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathfrak{M}$  et  $f, g : X \longrightarrow Y$  deux flèches. Supposons que  $X$  est cofibrant et soit  $h_g : C_X \longrightarrow Y$  une homotopie à gauche de  $f$  à  $g$ . La preuve de la proposition 4.1.12, montre qu'il existe une homotopie à droite  $h_d : X \longrightarrow P_Y$  de  $f$  à  $g$  et une correspondance  $t : C_X \longrightarrow P_Y$  entre  $h_g$  et  $h_d$ .

On note  $\mathfrak{M}_c$  (resp.  $\mathfrak{M}_f$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{M}$  formée des objets cofibrants (resp. fibrants). On note  $\mathfrak{M}_{cf}$  la sous-catégorie des objets cofibrants et fibrants et  $\pi_0 \mathfrak{M}_{cf}$  la catégorie obtenue en quotientant l'ensemble des flèche par la relation d'homotopie. Nous dirons qu'une flèche de  $\mathfrak{M}_{cf}$  est une équivalence d'homotopie si son image dans  $\pi_0 \mathfrak{M}_{cf}$  est un isomorphisme. On a alors le théorème de Whitehead :

**PROPOSITION 4.1.15** — Soient  $X$  et  $Y$  deux objets cofibrants et fibrants de  $\mathfrak{M}$ . Soit  $f : X \longrightarrow Y$  une flèche. Les deux assertions suivantes :

- $f$  est une équivalence faible,
- $f$  est une équivalence d'homotopie,

sont équivalentes.

**DEMONSTRATION** On suppose que  $f \in \mathbf{W}$  et on démontre que  $f$  est une équivalence d'homotopie (l'autre implication est claire). On utilisant l'axiome (MC5), on peut supposer que  $f$  est une cofibration triviale ou une fibration triviale. Ces deux cas sont duaux l'un de l'autre : on traitera uniquement le cas où  $f$  est une cofibration triviale. En appliquant l'axiome (MC4) au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{=} & X \\ f \downarrow & \nearrow g & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & * \end{array}$$

on obtient une rétraction  $g$  à  $f$ . Il reste à montrer que  $f \circ g$  est homotope à l'identité. Pour cela, on se donne un espace de chemins  $(P_Y, c, e_0, e_1)$  sur  $Y$  et on applique une deuxième fois l'axiome (MC4) au carré :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{cof} & P_Y \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow e_0, e_1 \\ Y & \xrightarrow{(id, f \circ g)} & Y \times Y \end{array}$$

ce qui fournit une homotopie à droite  $h$  de  $\text{id}_Y$  à  $f \circ g$ .

C.Q.F.D

**Remarque 4.1.16** — La preuve de la proposition précédente montre en fait qu’une cofibration triviale  $f : X \longrightarrow Y$  de source un objet fibrant admet une rétraction  $g$  telle que  $f \circ g$  est homotope à droite à l’identité.

Dualement, si  $f$  est une fibration triviale et que  $Y$  est cofibrant, il existe une section  $s$  à  $f$  telle que  $s \circ f$  soit homotope à gauche à l’identité.

Le théorème suivant est connu sous le nom du théorème fondamental de l’algèbre homotopique :

**THEOREME 4.1.17** — *La catégorie  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}[\mathbf{W}^{-1}]$  existe et est équivalente à  $\pi_0\mathfrak{M}_{cf}$ . Elle est appelée la catégorie homotopique associée à la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$ . De plus, pour  $A$  cofibrant et  $X$  fibrant on a un isomorphisme canonique  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, X) \simeq \pi_0(A, X)$ .*

DEMONSTRATION Pour tout  $X \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$  on choisit (en se servant de l’axiome **(MC5)**) deux factorisations :

$$(4.1) \quad \emptyset \longrightarrow Q(X) \xrightarrow{p_X} X \quad \text{et} \quad X \xrightarrow{i_X} R(X) \longrightarrow *$$

avec  $Q(X)$  (resp.  $R(X)$ ) cofibrant (resp. fibrant) et  $p_X$  (resp.  $i_X$ ) une fibration triviale (resp. cofibration triviale). Pour toute flèche  $f : X \longrightarrow Y$  de  $\mathfrak{M}$  on choisit également des flèches  $Q(f)$  et  $R(f)$  faisant commuter les carrés :

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccc} Q(X) & \xrightarrow{Q(f)} & Q(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ R(X) & \xrightarrow{R(f)} & R(Y) \end{array}$$

L’existence des flèches  $Q(f)$  et  $R(f)$  est une conséquence de l’axiome **(MC4)**.

Remarquons que  $Q(f)$  (resp.  $R(f)$ ) est unique à une homotopie à gauche (resp. à droite) près. En effet, soient  $f_1, f_2 : Q(X) \longrightarrow Q(Y)$  deux flèches rendant commutatif le premier carré de (4.2). Choisissons un cylindre  $(C_{Q(X)}, i_0, i_1, p)$  sur  $Q(X)$ . L’axiome **(MC4)** appliqué au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Q(X) \amalg Q(X) & \xrightarrow{f_1 \cup f_2} & Q(Y) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p_Y \\ C_{Q(X)} & \xrightarrow{f \circ p \circ \rho_X} & Y \end{array}$$

fournit une homotopie à gauche de  $f_1$  à  $f_2$ . On déduit de là que  $Q(\text{id})$  est homotope à gauche à  $\text{id}$ . De même, pour une paire de flèches composables  $\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$  les flèches  $Q(g \circ f)$  et  $Q(g) \circ Q(f)$  sont homotopes à gauche.

Supposons maintenant que  $X$  et  $Y$  soient cofibrants et soient  $f, g : X \longrightarrow Y$  deux flèches homotopes à gauche. On veut montrer que  $R(f)$  et  $R(g)$  sont homotopes à droite. Remarquons d’abord que  $f \circ i_Y$  et  $g \circ i_Y$  sont encore homotopes à gauche. Par la proposition 4.1.12, ils sont également homotopes à droite. Fixons une homotopie  $h : X \longrightarrow P_{R(Y)}$  entre  $f \circ i_Y$  et  $g \circ i_Y$  relativement à un espace de chemins  $(P_{R(Y)}, c, e_0, e_1)$  sur  $R(Y)$ . Par l’axiome **(MC4)**, il existe un relèvement dans le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & P_{R(Y)} \\ i_X \downarrow & \nearrow h' & \downarrow (e_0, e_1) \\ R(X) & \xrightarrow{(R(f), R(g))} & R(Y) \times R(Y) \end{array}$$

Il est clair que  $h'$  est une homotopie à droite entre  $R(f)$  et  $R(g)$ .

Il est facile de déduire de là que  $R(Q(\text{id}))$  est homotope à  $\text{id}$  et que pour une paire de flèches composables  $\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$ , on a  $R(Q(g \circ f))$  homotope à  $R(Q(g)) \circ R(Q(f))$ . On obtient ainsi un foncteur bien défini :

$$RQ : \mathfrak{M} \longrightarrow \pi_0\mathfrak{M}_{cf}$$

On définit une catégorie  $\mathfrak{H}$  ayant les mêmes objets que ceux de  $\mathfrak{M}$  et telle que pour  $X, Y \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$  on a  $\text{hom}_{\mathfrak{H}}(X, Y) = \pi_0(R(Q(X)), R(Q(Y)))$ . On a une factorisation évidente de  $RQ$  :

$$\mathfrak{M} \xrightarrow{L} \mathfrak{H} \longrightarrow \pi_0\mathfrak{M}_{cf}$$



Si  $f$  est une équivalence faible, il en est de même de  $R(Q(f))$  qui est donc une équivalence d'homotopie par la proposition 4.1.15. Il vient que le foncteur  $L$  envoie les équivalences faibles de  $\mathfrak{M}$  sur des isomorphismes de  $\mathfrak{H}$ . On va montrer que ce foncteur  $L : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{H}$  répond au problème universel de la localisation. On se donne ainsi un foncteur  $F : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{C}$  envoyant les équivalences faibles sur des isomorphismes. On va montrer que  $F$  se factorise uniquement à travers  $\mathfrak{H}$ .

On construit  $F_0 : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathcal{C}$  en posant  $F_0(X) = F(X)$ . Pour  $\gamma \in \pi_0(R(Q(X)), R(Q(Y)))$ , choisissons  $u : R(Q(X)) \longrightarrow R(Q(Y))$  une flèche de  $\mathfrak{M}$  ayant la classe de  $\gamma$ . On pose alors  $F_0(\gamma)$  l'unique flèche rendant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{\sim} & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 F(X) & \xleftarrow{\sim} & F(Q(X)) & \xrightarrow{\sim} & F(R(Q(X))) \\
 \downarrow F_0(\gamma) & & & & \downarrow F(u) \\
 F(Y) & \xleftarrow{\sim} & F(Q(Y)) & \xrightarrow{\sim} & F(R(Q(Y))) \\
 & & \curvearrowleft & & \\
 & & \xrightarrow{\sim} & & 
 \end{array}$$

On vérifie immédiatement que  $F_0(\gamma)$  ne dépend pas du choix de  $u$ . Ceci fournit le foncteur  $F_0$  dont l'unicité est claire.

Il reste à montrer l'égalité  $\text{hom}_{\mathfrak{H}}(A, X) = \pi_0(A, X)$  pour  $A$  cofibrant et  $X$  fibrant. Étant donné que  $A$  est cofibrant, on peut supposer que  $Q(A) = A$ . De même, puisque  $X$  est fibrant,  $Q(X)$  est encore fibrant et l'on peut supposer que  $R(Q(X)) = Q(X)$ . On est donc ramené à montrer que la flèche évidente  $\pi_0(R(A), Q(X)) \longrightarrow \pi_0(A, X)$  est bijective. Ceci découle immédiatement de la remarque 4.1.16 appliquée à  $p_A$  et  $i_X$ . C.Q.F.D

**Remarque 4.1.18** — La preuve du théorème précédent montre que les catégories  $\mathfrak{M}_c[\mathbf{W}^{-1}]$  et  $\mathfrak{M}_f[\mathbf{W}^{-1}]$  existent et qu'elles sont équivalentes à  $\pi_0\mathfrak{M}_{cf}$  et donc à  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . Plus précisément, les choix  $R(X)$ ,  $Q(X)$ ,  $R(f)$  et  $Q(f)$  définissent des foncteurs :

$$R : \mathfrak{M}_c \longrightarrow \pi_0\mathfrak{M}_{cf} \quad \text{et} \quad Q : \mathfrak{M}_f \longrightarrow \pi_0\mathfrak{M}_{cf}$$

qui envoient les équivalences faibles sur des isomorphismes. Ceci induit des foncteurs :

$$\mathfrak{M}_c[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \pi_0\mathfrak{M}_{cf} \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_f[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \pi_0\mathfrak{M}_{cf}$$

qui sont des équivalences de catégories.

Notons les deux lemmes faciles :

**LEMME 4.1.19** — Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles. Le foncteur  $\mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  commute aux coproduits directs entre objets cofibrants ainsi qu'aux produits directs entre objets fibrants. En particulier, les produits et coproduits directs existent dans la catégorie  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ .

DEMONSTRATION On traite uniquement le produit d'une famille  $(X_i)_{i \in I}$  d'objets fibrants. Étant donné que tout objet de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  est isomorphe à un objet cofibrant il suffit de voir que pour  $A$  cofibrant :

$$\prod_i \pi_0(A, X_i) \simeq \pi_0(A, \prod_i X_i)$$

Ceci est clair si l'on définit  $\pi_0(-, -)$  en utilisant les homotopies à gauche (voir la proposition 4.1.12). C.Q.F.D

**LEMME 4.1.20** — Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles. Si la catégorie  $\mathfrak{M}$  est additive, il en est de même de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . De plus, le foncteur  $\mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  est additif.

DEMONSTRATION Si  $\mathfrak{M}$  est additive, il en est de même de  $\mathfrak{M}_{cf}$  (qui est alors stable par sommes directes finies). On vérifie immédiatement que la relation d'homotopie est compatible à l'addition des flèches. Il vient que  $\pi_0\mathfrak{M}_{cf}$  est aussi additive (puisque'elle admet des produits et des coproduits).

Pour terminer, il reste à montrer que le foncteur  $RQ : \mathfrak{M} \longrightarrow \pi_0\mathfrak{M}_{cf}$  est additif, i.e., qu'il commute aux sommes directes finies. Il suffit pour cela de prouver que les flèches :

$$Q(X) \oplus Q(Y) \longrightarrow X \oplus Y \quad \text{et} \quad X \oplus Y \longrightarrow R(X) \oplus R(Y)$$

sont des équivalences faibles pour  $X, Y \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ . Ceci découle du fait que les fibrations triviales sont stables par produits directs et que les cofibrations triviales sont stables par coproduits directs (voir le corollaire 4.1.6). C.Q.F.D

### 4.1.2 Adjonctions de Quillen et adjonctions de Morel-Voevodsky

Dans ce paragraphe, on se donne deux catégories de modèles  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$ .

**DEFINITION 4.1.21** — 1- Soit  $F : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  un foncteur. On dit que  $F$  est dérivable à droite s'il existe un couple  $(RF, \gamma)$  formé

- d'un foncteur  $RF : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$ ,
- d'une face carrée :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M} & \longrightarrow & \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \\ F \downarrow & \nearrow_{\gamma} & \downarrow RF \\ \mathfrak{N} & \longrightarrow & \mathbf{Ho}(\mathfrak{N}) \end{array}$$

qui soit universel dans le sens suivant. Pour tout couple  $(T, \beta)$  formé d'un foncteur au niveau des catégories homotopiques et d'une face carrée comme ci-dessus, il existe une unique transformation naturelle  $\alpha : RF \longrightarrow T$  telle que  $\beta = \alpha \circ \gamma$ . Le foncteur  $RF$  sera appelé le foncteur dérivé à droite de  $F$ .

2- On obtient la notion de foncteur dérivable à gauche par dualité. On désignera par  $LF$  le foncteur dérivé à gauche (lorsqu'il existe) de  $F$ .

On a le critère suivant de dérivabilité :

**PROPOSITION 4.1.22** — Soit  $F : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  un foncteur qui préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants (resp. fibrants). Alors  $F$  est dérivable à gauche (resp. à droite).

**DEMONSTRATION** Remarquons d'abord que pour  $A$  un objet cofibrant de  $\mathfrak{M}$  et  $(C_A, p, i_0, i_1)$  un cylindre sur  $A$ , le morphisme  $F(p)$  est une équivalence faible. Il vient que si  $f, g : A \longrightarrow X$  sont homotopes à gauche, les flèches  $F(f)$  et  $F(g)$  ont même classe dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$ .

Pour tout objet  $X$  de  $\mathfrak{M}$ , on fixe une fibration triviale  $p_X : Q(X) \longrightarrow X$  avec  $Q(X)$  un objet cofibrant. Pour toute flèche  $f : X \longrightarrow Y$ , on fixe une flèche  $Q(f) : Q(X) \longrightarrow Q(Y)$  rendant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Q(X) & \xrightarrow{Q(f)} & Q(Y) \\ p_X \downarrow & & \downarrow p_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

La flèche  $Q(f)$  est unique à une homotopie à gauche près (voir la preuve du théorème 4.1.17). Il vient que l'image de  $F(Q(f))$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$  ne dépend que de  $f$ . On obtient ainsi un foncteur bien défini  $FQ : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$ . D'autre part, si  $f$  est une équivalence faible, il en est de même de  $Q(f)$  et donc aussi de  $F(Q(f))$ . Ainsi, notre foncteur envoie les équivalences faibles de  $\mathfrak{M}$  sur des isomorphismes de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$ . Il se factorise alors uniquement par un foncteur :

$$LF : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$$

Pour montrer que  $LF$  est le foncteur dérivé à gauche de  $F$ , remarquons que les flèches  $F(p_X) : FQ(X) \longrightarrow F(X)$  définissent une face carrée :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M} & \longrightarrow & \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \\ F \downarrow & \searrow_{\gamma} & \downarrow LF \\ \mathfrak{N} & \longrightarrow & \mathbf{Ho}(\mathfrak{N}) \end{array}$$

Le couple  $(LF, \gamma)$  ainsi obtenu est universel. En effet, soit  $(T, \beta)$  un autre couple. Pour  $X \in \mathfrak{M}$  on a alors un carré commutatif dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$  :

$$\begin{array}{ccc} T(Q(X)) & \xrightarrow{T(p_X)} & T(X) \\ \beta_{Q(X)} \downarrow & & \downarrow \beta_X \\ F(Q(X)) & \xrightarrow{F(p_X)=\gamma_X} & F(X) \end{array}$$

Comme  $p_X$  est inversible dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ , la flèche horizontale supérieure du carré précédent est inversible. Ainsi, la famille des flèches de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$  :

$$T(X) \xrightarrow{T(p_X)^{-1}} T(Q(X)) \xrightarrow{\beta_{Q(X)}} F(Q(X)) = LF(X)$$

définit une transformation naturelle  $\alpha : T \longrightarrow \mathbf{LF}$  telle que  $\beta = \gamma \circ \alpha$ . De plus, un tel  $\alpha$  est unique. C.Q.F.D

Le résultat suivant se déduit par un jeu d'adjonction de la proposition 4.1.5 :

**PROPOSITION 4.1.23** — *Soit  $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  un couple de foncteurs adjoints. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $F$  préserve les cofibrations et les cofibrations triviales.
- $G$  préserve les fibrations et les fibrations triviales.
- $F$  préserve les cofibrations et  $G$  préserve les fibrations.
- $F$  préserve les cofibrations triviales et  $G$  préserve les fibrations triviales.

**DEFINITION 4.1.24** — *Un couple de foncteurs adjoints  $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  vérifiant l'une des conditions équivalentes de la proposition 4.1.23 est appelé une adjonction de Quillen. Nous dirons également que  $F$  (resp.  $G$ ) est un foncteur de Quillen à gauche (resp. à droite).*

**LEMME 4.1.25** — *Soit  $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  une adjonction de Quillen. Alors  $F$  préserve les cylindres sur les objets cofibrants. Dualement,  $G$  préserve les espaces de chemins sur les objets fibrants.*

**DEMONSTRATION** On traite uniquement le cas de  $F$ . Soit  $(C_A, p, i_0, i_1)$  un cylindre sur un objet cofibrant  $A$ . La flèche  $F(A \amalg A) \longrightarrow F(C_A)$  est une cofibration. Comme  $F$  est un adjoint à gauche, il commute aux coproduits. Il vient que  $F(i_0) \amalg F(i_1)$  est aussi une cofibration.

Il reste à vérifier que  $F(p)$  est une équivalence faible. Comme  $A$  est cofibrant,  $i_0$  est une cofibration triviale. Il vient que  $F(i_0)$  est une cofibration triviale. On conclut alors par l'axiome **(MC2)** et le fait que  $F(p) \circ F(i_0) = \text{id}$ . C.Q.F.D

On déduit immédiatement que  $F$  (resp.  $G$ ) préserve la relation d'homotopie à gauche (resp. à droite) sur les flèches de  $A$  vers  $B$  lorsque  $A$  (resp.  $B$ ) est cofibrant (resp. fibrant).

**LEMME 4.1.26** — *Soit  $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  une adjonction de Quillen. Alors  $F$  préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants. Dualement,  $G$  préserve les équivalences faibles entre objets fibrants.*

**DEMONSTRATION** On traite uniquement le cas de  $F$ . Soit  $f : A \longrightarrow B$  une équivalence faible entre objets cofibrants. On peut factoriser  $f$  en une composée :

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B$$

avec  $i$  une cofibration triviale et  $p$  une fibration triviale. On sait que  $F(i)$  est encore une cofibration triviale. Il reste à montrer que  $F(p)$  est une équivalence faible.

Étant donné que  $B$  est cofibrant, on sait par la remarque 4.1.16 que  $p$  admet une section  $s : B \longrightarrow X$  telle que  $s \circ p$  est homotope à gauche à l'identité. Comme  $X$  est cofibrant, le lemme précédent nous dit que  $F(s) \circ F(p)$  est aussi homotope à gauche à  $\text{id}$ . Il vient que  $F(p)$  est une équivalence faible. C.Q.F.D

**PROPOSITION 4.1.27** — *Soit  $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  une adjonction de Quillen. Alors  $F$  admet un foncteur dérivé à gauche  $\mathbf{LF} : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$ . Dualement,  $G$  admet un foncteur dérivé à droite  $\mathbf{RG} : \mathbf{Ho}(\mathfrak{N}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . De plus, le foncteur  $\mathbf{LF}$  est naturellement un adjoint à gauche de  $\mathbf{RG}$ .*

**DEMONSTRATION** L'existence de  $\mathbf{LF}$  et  $\mathbf{RG}$  découle du lemme 4.1.26 et de la proposition 4.1.22. Il reste à montrer que  $\mathbf{LF}$  est adjoint à gauche à  $\mathbf{RG}$ . Il suffit de vérifier qu'on a un isomorphisme :  $\pi_0(F(A), X) \simeq \pi_0(A, G(X))$  pour  $A$  cofibrant et  $X$  fibrant. Ceci découle facilement du lemme 4.1.25. C.Q.F.D

**DEFINITION 4.1.28** — *Une adjonction de Quillen  $(F, G)$  est dite une équivalence de Quillen lorsque  $\mathbf{LF}$  (ou  $\mathbf{RG}$ ) est une équivalence de catégories.*

On suppose donné un couple de foncteurs adjoints  $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  tel que  $G$  envoie les équivalences faibles entre objets fibrants sur des équivalences faibles. On cherche des conditions assurant l'existence de l'adjoint à gauche de  $\mathbf{RG}$ .

Soit  $A$  est un objet de  $\mathfrak{M}$  tel que  $F(A)$  est cofibrant. Pour  $X$  un objet fibrant de  $\mathfrak{N}$ , la composée :

$$\text{hom}_{\mathfrak{N}}(F(A), X) \longrightarrow \text{hom}_{\mathfrak{M}}(A, G(X)) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(X))$$

se factorise par  $\pi_0(F(A), X)$ . En effet, si  $(P_X, c, e_0, e_1)$  est un espace de chemins sur  $X$ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_{\mathfrak{N}}(F(A), P_X) & \xrightleftharpoons[e_1]{e_0} & \text{hom}_{\mathfrak{N}}(F(A), X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(P_X)) & \xrightleftharpoons[e_1]{e_0} & \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(X)) \end{array}$$

et les deux flèches  $e_0$  et  $e_1$  inférieures sont égales puisqu'ils sont deux rétractions à l'isomorphisme :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(X)) \xrightarrow{c} \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(P_X))$$

induit par l'équivalence faible  $G(c) : G(X) \longrightarrow G(P_X)$ .

**DEFINITION 4.1.29** — *Un objet  $A$  de  $\mathfrak{M}$  est dit  $F$ -admissible si  $F(A)$  est cofibrant et que pour tout objet fibrant  $X$  de  $\mathfrak{N}$  le morphisme canonique :*

$$\pi_0(F(A), X) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(X))$$

*est inversible.*

**DEFINITION 4.1.30** — *Une adjonction  $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  est dite une adjonction de Morel-Voevodsky lorsque les conditions suivantes sont satisfaites.*

1.  *$G$  envoie les équivalences faibles entre objets fibrants sur des équivalences faibles.*
2. *Pour tout objet  $A$  de  $\mathfrak{M}$ , il existe une équivalence faible  $B \longrightarrow A$  avec  $B$  un objet  $F$ -admissible. On dit dans ce cas, qu'il existe suffisamment de  $F$ -admissibles.*

**PROPOSITION 4.1.31** — *Soit  $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  une adjonction de Morel-Voevodsky. Alors  $F$  admet un foncteur dérivé à gauche  $LF$  qui est naturellement un adjoint à gauche au foncteur  $RG$ .*

**DEMONSTRATION** Pour montrer l'existence d'un adjoint à gauche à  $RG$ , il suffit de montrer que, pour tout objet  $A$  de  $\mathfrak{M}$ , le foncteur :

$$\text{hom}(A, RG(-)) : \mathbf{Ho}(\mathfrak{N}) \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

est représentable. On prouvera qu'il est représentable par  $F(\text{ad}(A))$  pour une équivalence faible  $q_A : \text{ad}(A) \longrightarrow A$  avec  $\text{ad}(A)$  un objet  $F$ -admissible.

Pour cela, reprenons les choix de  $R(X)$  et  $R(f)$  comme dans la preuve de la proposition 4.1.22 de sorte que  $RG(X) = G(R(X))$ . On a alors des isomorphismes :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(R(X))) \simeq \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(\text{ad}(A), G(R(X))) \simeq \pi_0(F(\text{ad}(A)), R(X)) \simeq \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})}(F(\text{ad}(A)), X)$$

Ces isomorphismes sont bien-entendu naturels en  $X$ .

Pour terminer, il reste à prouver que l'adjoint à droite  $F\text{ad}$  de  $RG$  est bien le foncteur dérivé à gauche de  $F$ . On dispose d'une transformation naturelle  $F(q_A) : F\text{ad}(A) \longrightarrow F(A)$ . On vérifie qu'elle est universelle au sens de la définition 4.1.21 en suivant la méthode utilisée dans la preuve de la proposition 4.1.22. C.Q.F.D

### 4.1.3 La notion du $\pi_1$ dans une catégorie de modèles

On définit suivant Quillen [Qui67] la notion de 2-homotopies entre homotopies dans une catégorie de modèles  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$  :

**DEFINITION 4.1.32** — *Soient  $f, g : A \longrightarrow X$  deux flèches de  $\mathfrak{M}$  avec  $A$  cofibrant et  $X$  fibrant.*

1- *Soient  $(C_A, p, i_0, i_1)$  et  $(C'_A, p', i'_0, i'_1)$  deux cylindres sur  $A$ . Deux homotopies à gauche  $h : C_A \longrightarrow X$  et  $h' : C'_A \longrightarrow X$  de  $f$  à  $g$  sont dites 2-homotopes à gauche s'il existe un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \left( C_A \amalg_{A \amalg A} C'_A \right) & \xrightarrow{h \cup h'} & X \\ \downarrow p \cup p' & \searrow a & \nearrow l \\ A & \xleftarrow{q} & D \end{array}$$

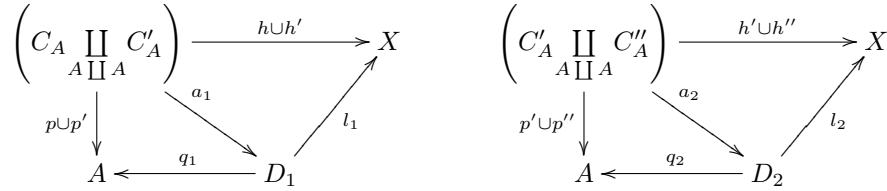
avec  $a$  une cofibration et  $q$  une équivalence faible. La flèche  $l$  est appelée une 2-homotopie.

2- On a la notion duale de 2-homotopies à droite entre les homotopies à droite de  $f$  à  $g$ .

On vérifie facilement, comme pour la relation d'homotopie :

**LEMME 4.1.33** — *La relation de 2-homotopie à gauche est une relation d'équivalence.*

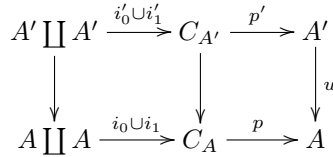
DEMONSTRATION On traite uniquement la question de transitivité. Soient trois cylindres :  $(C_A, p, i_0, i_1)$ ,  $(C'_A, p', i'_0, i'_1)$  et  $(C''_A, p'', i''_0, i''_1)$  sur  $A$ . On suppose données trois homotopies à gauche  $h : C_A \longrightarrow X$ ,  $h' : C'_A \longrightarrow X$  et  $h'' : C''_A \longrightarrow X$  de  $f$  à  $g$ . Soient  $l_1$  et  $l_2$  deux 2-homotopies à gauche de  $h$  à  $h'$  et de  $h'$  à  $h''$  respectivement :



On pose alors  $D = D_1 \amalg_{C_A} D_2$ . Alors  $l = l_1 \cup l_2 : D \longrightarrow X$  est clairement une 2-homotopie de  $h$  à  $h''$ . C.Q.F.D

**DEFINITION 4.1.34** — On garde les notations de la définition 4.1.32. On note  $\pi_1^g(A, X, f, g)$  (resp.  $\pi_1^d(A, X, f, g)$ ) la classe des homotopies à gauche (resp. à droite) modulo la relation de 2-homotopie. Étant donné un cylindre  $(C_A, p, i_0, i_1)$  sur  $A$  (resp. un espace de chemins  $(P_X, c, e_0, e_1)$  sur  $X$ ), on note  $\pi_1(A, X, f, g, C_A) \subset \pi_1^g(A, X, f, g)$  (resp.  $\pi_1(A, X, f, g, P_X) \subset \pi_1^d(A, X, f, g)$ ) le sous-ensemble des homotopies à gauche (resp. à droite) relativement à  $C_A$  (resp.  $P_X$ ) à 2-homotopie près.

Les classes  $\pi_1^g(A, X, f, g)$  (resp. les ensembles  $\pi_1(A, X, f, g, C_A)$ ) sont covariants en  $X$  de la manière évidente. Supposons donné un diagramme commutatif :



avec  $A$  et  $A'$  cofibrants et  $(C_A, p, i_1, i_2)$  et  $(C'_A, p', i'_1, i'_2)$  des cylindres sur  $A$  et  $A'$  respectivement. On a alors un morphisme évident  $\pi_1(A, X, f, g, C_A) \longrightarrow \pi_1(A', X, f \circ u, g \circ u, C'_A)$ . On vérifie immédiatement que  $\pi_1(A, X, f, g, C_A)$  sont bifonctoriels en les couples  $((A, C_A), X)$ .

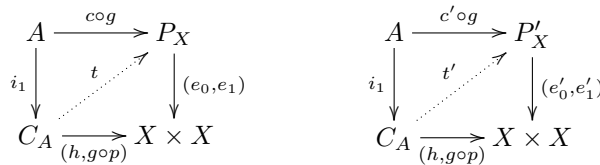
**LEMME 4.1.35** — On garde les hypothèses et les notations des définitions 4.1.32 et 4.1.34.

1- Il existe un isomorphisme canonique  $\pi_1^g(A, X, f, g) \simeq \pi_1^d(A, X, f, g)$  qui à une homotopie à gauche  $h : C_A \longrightarrow X$  associe une homotopie à droite  $k : A \longrightarrow P_X$  telle que  $h$  et  $k$  sont correspondantes au sens de la définition 4.1.13.

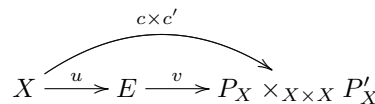
2- L' inclusion  $\pi_1(A, X, f, g, C_A) \subset \pi_1^g(A, X, f, g)$  est bijective. En particulier, les classes  $\pi_1^g(A, X, f, g)$  sont des ensembles.

DEMONSTRATION En effet, par la remarque 4.1.14, à une homotopie à gauche correspond une homotopie à droite et vice versa. Il s'agit de vérifier que cette correspondance est bien définie à 2-homotopie près.

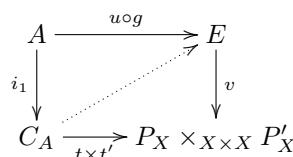
Soit donc  $h : C_A \longrightarrow X$  une homotopie à gauche de  $f$  à  $g$ . Soient  $(P_X, c, e_0, e_1)$  et  $(P'_X, c', e'_0, e'_1)$  deux espaces de chemins sur  $X$ . Considérons des relèvements  $t$  et  $t'$  dans les deux carrés commutatifs :



dont l'existence est assurée par l'axiome (MC4). On veut montrer que  $t \circ i_0$  est 2-homotopie à droite à  $t' \circ i'_0$ . On choisit par l'axiome (MC5) une factorisation :



avec  $u$  une cofibration triviale et  $v$  une fibration. Considérons le carré commutatif :



Par l'axiome **(MC4)**, on obtient un relèvement  $w : C_A \longrightarrow E$ . On vérifie immédiatement que  $w \circ i_0$  est une 2-homotopie de  $t \circ i_0$  à  $t' \circ i'_0$ .

Pour terminer la démonstration du **1-**, il reste à vérifier que deux homotopies  $h : C_A \longrightarrow X$  et  $h' : C'_A \longrightarrow X$  qui sont 2-homotopes, correspondent à la même homotopie à droite. Choisissons une factorisation :

$$C_A \coprod_{A \amalg A} C'_A \xrightarrow{a} D \xrightarrow{q} A$$

avec  $a = b \cup b'$  une cofibration et  $q$  une équivalence faible ainsi qu'une 2-homotopie  $l : D \longrightarrow X$  entre  $h$  et  $h'$ . L'objet  $D$ , muni de la cofibration évidente  $u_0 \amalg u_1 : A \amalg A \longrightarrow D$  déduite de  $a$ , est un cylindre. De plus,  $l$  est une homotopie à gauche de  $f$  à  $g$  relativement à  $D$ . Il existe donc une correspondance  $t : D \longrightarrow P_X$  entre  $l$  et  $t \circ u_0$ . Il est alors clair que l'homotopie à droite  $t \circ u_0 : A \longrightarrow P_X$  correspond aux homotopies à gauche  $h = l \circ b$  et  $h' = l \circ b'$  via les correspondances respectives  $t \circ b$  et  $t \circ b'$ .

L'assertion du **2-** est maintenant claire. En effet, la construction précédente fournit également des isomorphismes  $\pi_1^g(A, X, f, g) \simeq \pi_1(A, X, f, g, P_X)$  pour  $(P_X, c, e_0, e_1)$  un espace de chemins fixé. C.Q.F.D

On note  $\pi_1(A, X, f, g)$  l'un des deux ensembles canoniquement isomorphes  $\pi_1^g(A, X, f, g)$  ou  $\pi_1^d(A, X, f, g)$ . Le lemme ci-dessus montre que l'ensemble  $\pi_1(A, X, f, g)$  est bifonctoriel en  $A$  et  $X$ .

**LEMME 4.1.36** — Soit  $u : A' \longrightarrow A$  une flèche entre objets cofibrants de  $\mathfrak{M}$ . La composée :

$$\pi_1^g(A, X, f, g) \xleftarrow{\sim} \pi_1(A, X, f, g, C_A) \longrightarrow \pi_1(A', X, f \circ u, g \circ u, C'_A) \xrightarrow{\sim} \pi_1^g(A', X, f \circ u, g \circ u)$$

ne dépend pas du choix d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A' \amalg A' & \xrightarrow{i'_0 \cup i'_1} & C_{A'} & \xrightarrow{p'} & A' \\ \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow u \\ A \amalg A & \xrightarrow{i_0 \cup i_1} & C_A & \xrightarrow{p} & A \end{array}$$

De plus, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^g(A, X, f, g) & \longrightarrow & \pi_1^g(A', X, f \circ u, g \circ u) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \pi_1^d(A, X, f, g) & \longrightarrow & \pi_1^d(A', X, f \circ u, g \circ u) \end{array}$$

**DEMONSTRATION** Il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^g(A, X, f, g) \xleftarrow{\sim} \pi_1(A, X, f, g, C_A) \longrightarrow \pi_1(A', X, f \circ u, g \circ u, C'_A) \xrightarrow{\sim} \pi_1^g(A', X, f \circ u, g \circ u) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \pi_1^d(A, X, f, g) \longrightarrow \pi_1^d(A', X, f \circ u, g \circ u) \end{array}$$

Ceci revient à montrer que pour un espace de chemin  $(P_X, c, e_0, e_1)$  sur  $X$ , le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A, X, f, g, C_A) & \longrightarrow & \pi_1(A', X, f \circ u, g \circ u, C'_A) \\ \sim \updownarrow & & \updownarrow \sim \\ \pi_1(A, X, f, g, P_X) & \longrightarrow & \pi_1(A', X, f \circ u, g \circ u, P_X) \end{array}$$

est commutatif. Ceci découle de la remarque suivante. Soit  $k : A \longrightarrow P_X$  une homotopie à droite de  $f$  à  $g$ . Si  $h : C_A \longrightarrow X$  correspond à  $k$  via la correspondance  $t : C_A \longrightarrow P_X$  alors  $h \circ v$  correspond à  $k \circ u$  via la correspondance  $t \circ v$ . C.Q.F.D

**DEFINITION 4.1.37** — Lorsque la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est pointée, on notera simplement  $\pi_1(A, X)$  le groupe  $\pi_1(A, X, *, *)$ . On a ainsi un foncteur :

$$(4.3) \quad \pi_1(-, -) : \mathfrak{M}_c^{\text{op}} \times \mathfrak{M}_f \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

**THEOREME 4.1.38** — Supposons que la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est pointée. Le bifoncteur (4.3) se relève en un bifoncteur :

$$(4.4) \quad \pi_1(-, -) : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})^{\text{op}} \times \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

De plus, il existe un couple de foncteurs adjoints  $(\Sigma^1, \Omega^1) : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  et des isomorphismes fonctoriels en  $A$  cofibrant et  $X$  fibrant :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(\Sigma^1 A, X) \simeq \pi_1(A, X) \simeq \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, \Omega^1 X)$$

Enfin, pour  $A$  cofibrant, l'objet  $\Sigma^1 A$  est canoniquement isomorphe (dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ ) au push-out du diagramme :

$$(4.5) \quad \begin{array}{ccc} A \amalg A & \longrightarrow & C_A \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$$

L'énoncé dual est bien entendu vrai pour  $\Omega^1 X$ .

**DEMONSTRATION** Pour  $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$  cofibrant, notons  $S_A^1$  le push-out de (4.5). Le foncteur  $\pi_1(A, -) : \mathfrak{M}_f \longrightarrow \mathcal{E}ns$  s'identifie canoniquement à  $\pi_0(S_A^1, -) : \mathfrak{M}_f \longrightarrow \mathcal{E}ns$ . En effet, une homotopie  $C_A \longrightarrow X$  de  $*$  à  $*$  est simplement une flèche de  $S_A^1$  vers  $X$ . De même une 2-homotopie correspond simplement à une homotopie entre flèches de  $S_A^1$  vers  $X$ .

On en déduit que  $\pi_1(A, -) : \mathfrak{M}_f \longrightarrow \mathcal{E}ns$  envoie les équivalences faibles entre objets fibrants sur des isomorphismes. Duale,  $\pi_1(-, X)$  envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des isomorphismes. Ainsi,  $\pi_1(-, -)$  se relève en un bifoncteur :

$$\mathfrak{M}_c^{\text{op}}[\mathbf{W}^{-1}] \times \mathfrak{M}_f[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

Comme les foncteurs  $\mathfrak{M}_c[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  et  $\mathfrak{M}_f[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  sont des équivalences de catégories (voir remarque 4.1.18), nous avons prouvé la première partie du théorème. Le reste découle formellement du lemme de Yoneda et de l'isomorphisme  $\pi_1(A, X) \simeq \pi_0(S_A^1, X) \simeq \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(S_A^1, X)$  pour  $A$  cofibrant et  $X$  fibrant. C.Q.F.D

**DEFINITION 4.1.39** — Pour une catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  pointée, l'endofoncteur  $\Sigma^1$  de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  est appelé le foncteur de suspension. Son adjoint  $\Omega^1$  est appelé le foncteur de cosuspension (ou encore de délaçage).

**PROPOSITION 4.1.40** — Soient  $e, f, g : A \longrightarrow X$  trois flèches de  $\mathfrak{M}$  avec  $A$  cofibrant et  $X$  fibrant. On a un morphisme de composition fonctoriel et associatif :

$$\pi_1(A, X, e, f) \times \pi_1(A, X, f, g) \longrightarrow \pi_1(A, X, e, g)$$

De plus, les monoïdes  $\pi_1(A, X, f, f)$  sont des groupes.

En particulier, si la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est pointée le foncteur  $\pi_1(-, -)$  s'enrichit en un foncteur :

$$\pi_1(-, -) : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})^{\text{op}} \times \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathcal{G}rp$$

avec  $\mathcal{G}rp$  la catégorie des groupes.

**DEMONSTRATION** Soient  $(C_A, p, i_0, i_1)$  et  $(C'_A, p', i'_0, i'_1)$  deux cylindres sur  $A$  et  $(C''_A, p'', i''_0, i''_1)$  le cylindre composé où  $C''_A$  est le push-out de :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i'_0} & C'_A \\ \downarrow i_1 & & \\ & & C_A \end{array}$$

Étant donné une homotopie  $h : C_A \longrightarrow X$  de  $e$  à  $f$  et une homotopie  $h' : C'_A \longrightarrow X$  de  $f$  à  $g$ , on définit l'homotopie  $h'' : C''_A \longrightarrow X$  par  $h'' = h \cup h'$ . On vérifie facilement que cette construction fournit un accouplement associatif et fonctoriel :

$$\pi_1^g(A, X, e, f) \times \pi_1^g(A, X, f, g) \longrightarrow \pi_1^g(A, X, e, g)$$

dont les éléments neutres sont donnés par les classes des homotopies constantes  $f \circ p : C_A \longrightarrow X$  dans  $\pi_0(A, X, f, f)$ .

Pour montrer que  $\pi_1(A, X, f, f)$  est un groupe, il reste à construire des inverses. Si  $(C_A, p, i_0, i_1)$  est un cylindre sur  $A$ , on notera  $(C_A^\circ, p, i_1, i_0)$  le cylindre symétrique avec  $C_A^\circ = C_A$ . On montrera que l'inverse d'une homotopie  $h : C_A \longrightarrow X$  dans  $\pi_1(A, X, f, f, C_A)$  est donné par  $h$  mais vue dans  $\pi_1(A, X, f, f, C_A^\circ)$ . Il s'agit donc de voir que l'homotopie de  $f$  vers  $f$  :

$$C_A \amalg_{i_1(A)} C_A \xrightarrow{h \cup h} X$$

est 2-homotopie à l'homotopie constante.

Pour cela, considérons l'objet  $D$  obtenu par push-out du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{i_0 \cup i_0} & C_A \amalg_{i_1(A)} C_A \\ \downarrow i_0 \cup i_1 & \searrow d_0 \cup d_1 & \downarrow \text{dotted} \\ C_A & \xrightarrow{\text{dotted}} & D \end{array}$$

Le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{i_0 \cup i_0} & C_A \amalg_{i_1(A)} C_A \\ \downarrow i_0 \amalg i_1 & & \downarrow \\ C_A & \xrightarrow{i_0 \circ p} & C_A \end{array}$$

fournit un morphisme  $D \longrightarrow C_A$  qu'on factorise par :

$$D \xrightarrow{u} R \xrightarrow{v} C_A$$

avec  $u$  une cofibration et  $v$  une fibration triviale. Si l'on compose la cofibration  $d_0 \cup d_1$  par  $u$ , on obtient la cofibration :

$$r_0 \cup r_1 : A \amalg A \longrightarrow R$$

faisant de  $R$  un cylindre sur  $A$ .

On obtient alors deux morphismes de cylindres :  $C_A \longrightarrow R$  et  $C_A \amalg_{i_1(A)} C_A \longrightarrow R$ . L'homotopie  $h \circ v$  induit par restriction suivant ces deux morphismes l'homotopie constante et l'homotopie composée  $h \cup h$ . Le résultat découle alors du lemme 4.1.36. C.Q.F.D

On note trois corollaires de la proposition 4.1.40 :

**COROLLAIRE 4.1.41** — *Supposons que la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est pointée. Pour tout objet  $X$  de  $\mathfrak{M}$ , l'objet  $\Sigma^1 X$  (resp.  $\Omega^1 X$ ) est un cogroupe (resp. un groupe) de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . L'objet  $\Sigma^2 X$  (resp.  $\Omega^2 X$ ) est un cogroupe commutatif (resp. un groupe commutatif) de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ .*

DEMONSTRATION L'assertion concernant  $\Sigma^1$  est claire. Montrons que le cogroupe  $G = \Sigma^2(X)$  est commutatif. Remarquons pour cela que cet objet admet en fait deux structures de cogroupes. La première  $u : G \longrightarrow G \amalg G$  étant la structure sur  $\Sigma^1 Z$  pour  $Z = \Sigma^1 X$ . La seconde  $v : G \longrightarrow G \amalg G$  étant la structure déduite de celle de  $\Sigma^1 X$  par application de  $\Sigma^1$ .

Il est clair que  $v$  est un morphisme de cogroupes pour la structure  $u$ . Ainsi pour tout objet  $B$  de  $\mathfrak{M}$ , les deux lois de groupes  $*_u$  et  $*_v$  sur l'ensemble  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(G, B)$ , déduites de  $u$  et  $v$  respectivement, vérifient l'identité :

$$(f_1 *_u f_2) *_v (g_1 *_u g_2) = (f_1 *_v g_1) *_u (f_2 *_v g_2)$$

Il est bien connu que cette identité implique que  $*_u$  et  $*_v$  sont égales et commutatives. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.1.42** — *Supposons que la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est pointée. Si l'endofoncteur  $\Sigma^1$  est une autoéquivalence de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ , la catégorie  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  est additive.*



DEMONSTRATION Lorsque  $\Sigma^1$  est une autoéquivalence de catégories, tout objet de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  est un groupe et un cogroupe commutatif et toute flèche est compatible à cette structure. Il reste à montrer que  $X \amalg Y \longrightarrow X \times Y$  est un isomorphisme pour  $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}))$ .

On définit une flèche  $X \times Y \longrightarrow X \amalg Y$  en prenant la somme des deux flèches évidentes :

$$X \times Y \longrightarrow X \longrightarrow X \amalg Y \quad \text{et} \quad X \times Y \longrightarrow Y \longrightarrow X \amalg Y$$

On vérifie facilement que les composées :

$$X \amalg Y \longrightarrow X \times Y \longrightarrow X \amalg Y \quad \text{et} \quad X \times X \longrightarrow X \amalg X \longrightarrow X \times X$$

sont des identités.

C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.1.43** — *Supposons que la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est pointée. Soit  $(C_A, p, i_0, i_1)$  un cylindre sur  $A$  et  $\tau : C_A \longrightarrow C_A$  une flèche au dessus de  $A$  permutant les extrémités. On a alors un diagramme commutatif dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  :*

$$\begin{array}{ccc} C_A \amalg_A \amalg_A * & \xrightarrow{\tau} & C_A \amalg_A \amalg_A * \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \Sigma^1 A & \xrightarrow{(-)^{-1}} & \Sigma^1 A \end{array}$$

où la flèche horizontale inférieure est l'inverse du cogroupe  $\Sigma^1 A$  et les flèches verticales sont l'identification canonique du théorème 4.1.38 associée au choix du cylindre  $(C_A, p, i_0, i_1)$ .

DEMONSTRATION En effet, on peut voir  $\tau$  comme un morphisme de cylindres :

$$\tau : (C_A, p, i_0, i_1) \longrightarrow (C_A, p, i_1, i_0)$$

Le résultat découle alors du lemme 4.1.36 et de la construction de l'inverse dans le groupe  $\pi_1(-, -)$  (voir la preuve de la proposition 4.1.40).

C.Q.F.D

### 4.1.4 Triangulation de la catégorie homotopique

On fait la définition suivante :

**DEFINITION 4.1.44** — *Une catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est dite stable si la catégorie  $\mathfrak{M}$  est pointée et si le foncteur de suspension  $\Sigma^1$  est une autoéquivalence de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ .*

Le but ce paragraphe est de montrer que la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles stable admet naturellement une structure de catégorie triangulée au sens de Verdier. On se contente ici de traiter le cas où  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche. La condition de propreté n'est nullement nécessaire si l'on suit la méthode de Hovey dans [Hov99].

Soit  $f : A \longrightarrow B$  une flèche de  $\mathfrak{M}$ . On appelle cofibre de  $f$  et l'on note  $\mathbf{Cof}(f)$  le push-out :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \dashrightarrow & \mathbf{Cof}(f) \end{array}$$

Lorsque  $f$  est une cofibration, l'objet  $\mathbf{Cof}(f)$  est cofibrant.

**DEFINITION 4.1.45** — *Supposons que la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est pointée.*

1- Soit  $f : A \longrightarrow B$  une flèche de  $\mathfrak{M}$ . Le cône de  $f$  relativement au cylindre  $(C_A, p, i_0, i_1)$  est le push-out du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f \amalg * } & B \\ \downarrow & & \downarrow \alpha(f) \\ C_A & \dashrightarrow & \mathbf{Cone}(f) \end{array}$$

2- La cofibre de la cofibration  $B \xrightarrow{\alpha(f)} \mathbf{Cone}(f)$  est canoniquement isomorphe à la cofibre de  $A \amalg A \longrightarrow C_A$ . Ainsi, lorsque  $A$  est cofibrant, le cylindre  $C_A$  induit un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  entre  $\mathbf{Cof}(\alpha(f))$  et  $\Sigma^1 A$  (voir le théorème 4.1.38). On note alors  $\partial(f) : \mathbf{Cone}(f) \longrightarrow \Sigma^1(A)$  la flèche (de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ ) ainsi obtenue.

3- On appelle vrai triangle de cofibrations (de base  $f$ ) un diagramme dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  de la forme :

$$\Delta(f, C_A) : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha(f)} \mathbf{Cone}(f) \xrightarrow{\partial(f)} \Sigma^1(A)$$

avec  $f$  une cofibration de source cofibrante. On appelle triangle de cofibrations tout triangle

$$U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow \Sigma^1 U$$

dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  isomorphe à un vrai triangle de cofibration.

**Remarque 4.1.46** — Rappelons qu'un morphisme de triangles et un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & \Sigma^1 U \\ u \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow \Sigma^1 u \\ U' & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & \Sigma^1 U' \end{array}$$

**LEMME 4.1.47** — Soit  $f : A \longrightarrow B$  une cofibration de  $\mathfrak{M}$  avec  $A$  cofibrant. On se donne deux cylindres  $(C_A, p, i_0, i_1)$  et  $(C'_A, p', i'_0, i'_1)$  sur  $A$ . Les triangles  $\Delta(f, C_A)$  et  $\Delta(f, C'_A)$  sont isomorphes dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ .

DEMONSTRATION En factorisant la flèche :

$$C_A \coprod_{A \amalg A} C'_A \longrightarrow A$$

en une cofibration suivie d'une fibration triviale, on obtient un nouveau cylindre qui est le but de deux cofibrations triviales de source  $C_A$  et  $C'_A$ . On se ramène donc aux cas où il existe un morphisme de cylindres  $u : C_A \longrightarrow C'_A$  avec  $u$  une cofibration (forcément triviale).

On obtient dans ce cas une cofibration triviale  $\mathbf{Cone}(f) \longrightarrow \mathbf{Cone}'(f)$  avec  $\mathbf{Cone}'(f)$  le cône de  $f$  relativement à  $C'_A$ . La conclusion du lemme est maintenant claire. C.Q.F.D

Avec les notations de la définition 4.1.45, on dispose d'un morphisme  $\delta(f) : \mathbf{Cone}(f) \longrightarrow \mathbf{Cof}(f)$  qui s'insère dans le diagramme à carrés cocartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_0} & \mathbf{Cof}(i_1) & \longrightarrow & * \\ f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \mathbf{Cone}(f) & \xrightarrow{\delta(f)} & \mathbf{Cof}(f) \end{array}$$

On a le lemme suivant :

**LEMME 4.1.48** — Supposons que la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est pointée et propre à gauche. Si  $A$  est cofibrant et  $f$  une cofibration, alors  $\delta(f)$  est une équivalence faible.

DEMONSTRATION Comme  $i_1 : A \longrightarrow C_A$  est une cofibration triviale, il en est de même de  $* \longrightarrow C_A \coprod_{i_1(A)} *$ .

Il vient que  $\mathbf{Cof}(i_1) \longrightarrow *$  est une équivalence faible entre objets cofibrants. Le résultat découle de la propriété à gauche appliquée à la cofibration  $\mathbf{Cof}(i_1) \longrightarrow \mathbf{Cone}(f)$ . C.Q.F.D

**THEOREME 4.1.49** — On suppose que la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est stable et propre à gauche. Alors  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  est naturellement une catégorie triangulée, où le foncteur de suspension est donné par  $\Sigma^1$  et les triangles distingués par les triangles de cofibrations.

DEMONSTRATION Il s'agit d'une vérification facile mais longue. Le lecteur pourra consulter [Hov99] pour plus de détails. Les triangles  $X \rightrightarrows X \longrightarrow * \longrightarrow \Sigma^1(X)$  sont des triangles de cofibrations. En effet,  $\mathbf{Cone}(\text{id}_X)$  est la cofibre de  $i_1 : X \longrightarrow C_X$  qui est contractile (i.e., équivalente à  $*$ ) pour  $X$  cofibrant.

Soit  $f$  une flèche de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . Quitte à la remplacer par une flèche isomorphe, on peut supposer qu'elle est l'image d'une cofibration  $\tilde{f}$  de source cofibrante. Le triangle de cofibrations associée à  $\tilde{f}$  fournit un triangle de cofibrations ayant  $f$  comme première arête.

Soit un diagramme commutatif dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & \Sigma^1 A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \Sigma^1(f) \\ A' & \xrightarrow{a'} & B' & \xrightarrow{b'} & C' & \xrightarrow{c'} & \Sigma^1 A' \end{array}$$

dont les lignes sont des triangles de cofibrations. Le carré de gauche est isomorphe à un carré provenant d'un carré commutatif de cofibrations de  $\mathfrak{M}$  avec tous les sommets cofibrants. On peut alors supposer que notre diagramme est l'image de :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & \text{Cone}(a) & \xrightarrow{c} & \Sigma^1 A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \Sigma^1(f) \\ A' & \xrightarrow{a'} & B' & \xrightarrow{b'} & \text{Cone}(a') & \xrightarrow{c'} & \Sigma^1 A' \end{array}$$

où les cônes sont pris relativement à des cylindres  $(C_A, p, i_0, i_1)$  et  $(C'_A, p', i'_0, i'_1)$  munis d'une flèche  $u : C_A \longrightarrow C'_A$  telle que  $f \circ p = p' \circ u$ ,  $i'_0 \circ f = u \circ i_0$  et  $i'_1 \circ f = u \circ i_1$ . Il est alors clair que la flèche  $u \cup g : \text{Cone}(a) \longrightarrow \text{Cone}(a')$  convient.

De même, pour vérifier que la classe des triangles de cofibrations est stable par rotation à droite, on peut considérer le cas d'un vrai triangle de cofibrations :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha(f)} \text{Cone}(f) \xrightarrow{\partial(f)} \Sigma^1 A$$

avec  $f$  une cofibration entre objets cofibrants. Il suffit alors de vérifier que le diagramme de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  :

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{\alpha(f)} & \text{Cone}(f) & \xrightarrow{\alpha(\alpha(f))} & \text{Cone}(\alpha(f)) & \xrightarrow{\partial(\alpha(f))} & \Sigma^1 B \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \delta(\alpha(f)) & & \parallel \\ B & \xrightarrow{\alpha(f)} & \text{Cone}(f) & \xrightarrow{\partial(f)} & \Sigma^1 A & \xrightarrow{-\Sigma^1(f)} & \Sigma^1 B \end{array}$$

est commutatif puisque  $\delta(\alpha(f))$  est inversible par le lemme 4.1.48. Seul la commutation du carré de droite est non évidente. En choisissant convenablement les cylindres, on obtient la factorisation suivante qui nous ramène au cas où  $f = \text{id}$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Cone}(\alpha(f)) & \longrightarrow & \text{Cone}(\alpha(\text{id}_B)) & \xrightarrow{\partial(\alpha(\text{id}_B))} & \Sigma^1 B \\ \delta(\alpha(f)) \downarrow & & \downarrow \delta(\alpha(\text{id}_B)) & & \parallel \\ \Sigma^1 A & \xrightarrow{\Sigma^1(f)} & \Sigma^1 B & \xrightarrow{-\text{id}} & \Sigma^1 B \end{array}$$

Ce cas sera traité dans le lemme 4.1.50 ci-dessous.

L'axiome de l'octaèdre est également facile. Soit  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$  une paire de flèches de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . On peut supposer qu'il s'agit d'une paire de cofibrations de  $\mathfrak{M}$  avec  $X$  cofibrant. En choisissant convenablement les cylindres, on obtient un diagramme commutatif dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & \text{Cone}(u) & \longrightarrow & \Sigma^1(X) \\ \parallel & & \downarrow v & & \downarrow r & & \parallel \\ X & \xrightarrow{vu} & Z & \longrightarrow & \text{Cone}(vu) & \longrightarrow & \Sigma^1(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cone}(\text{id}_X) & \longrightarrow & \text{Cone}(v) & \longrightarrow & \text{Cone}(r) & \longrightarrow & \text{Cone}(\text{id}_{\Sigma^1 X}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^1 X & \longrightarrow & \Sigma^1 Y & \longrightarrow & \Sigma^1 \text{Cone}(u) & \longrightarrow & \Sigma^1 \Sigma^1 X \end{array}$$

Il suffit de vérifier que la flèche  $\text{Cone}(v) \longrightarrow \text{Cone}(r)$  est une équivalence faible. Par le lemme 4.1.48, cette flèche est isomorphe dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  à  $\text{Cof}(v) \longrightarrow \text{Cof}(r)$ . Cette dernière est un isomorphisme dans  $\mathfrak{M}$ . C.Q.F.D

**LEMME 4.1.50** — *On suppose que la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est stable et propre à gauche. Soit  $X$  un objet cofibrant de  $\mathfrak{M}$ . Le triangle suivant est commutatif dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Cone}(\alpha(\text{id}_X)) & & \\ \delta(\alpha(\text{id}_X)) \downarrow & \searrow \partial(\alpha(\text{id}_X)) & \\ \Sigma^1 X & \xrightarrow{-\text{id}} & \Sigma^1 X \end{array}$$

DEMONSTRATION Soit  $(C_X, p, i_0, i_1)$  un cylindre sur  $X$ . L'objet  $\text{Cone}(\alpha(\text{id}_X))$  s'identifie canoniquement à :

$$\left( C_X \coprod_{i_1(X)} * \right) \coprod_{i_0(X)} \left( C_X \coprod_{i_1(X)} * \right)$$

Notons  $F_1$  et  $F_2$  les deux inclusions évidentes :

$$\left( C_X \coprod_{i_1(X)} * \right) \subset \left( C_X \coprod_{i_1(X)} * \right) \coprod_{i_0(X)} \left( C_X \coprod_{i_1(X)} * \right)$$

Les deux flèches  $\partial(\alpha(\text{id}_X))$  et  $\delta(\alpha(\text{id}_X))$  s'identifient donc à :

$$\text{Cone}(\alpha(\text{id}_X)) \longrightarrow \text{Cone}(\alpha(\text{id}_X)) \coprod_{F_i} * \simeq \Sigma^1(X)$$

Si l'on note  $\tau$  l'automorphisme de  $\text{Cone}(\alpha(\text{id}_X))$  qui permute les facteurs  $F_1$  et  $F_2$  on obtient alors un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Cone}(\alpha(\text{id}_X)) & \xrightarrow{\tau} & \text{Cone}(\alpha(\text{id}_X)) \\ & \searrow \delta(\alpha(\text{id}_X)) & \downarrow \partial(\alpha(\text{id}_X)) \\ & & \Sigma^1 X \end{array}$$

Ainsi pour conclure, il suffit de montrer que l'image de  $\tau$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  est égale à  $-\text{id}$ .

Pour cela, on peut remarquer que  $\text{Cone}(\alpha(\text{id}_X))$  est un modèle de  $\Sigma^1 X$  obtenue via le théorème 4.1.38 à l'aide du cylindre :

$$C'_X = C_X \coprod_{i_1(X)} C_X$$

L'automorphisme  $\tau$  permute les cofibrations triviales structurales  $X \longrightarrow C'_X$ . Ainsi l'image de  $\tau$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  correspond bien à l'inverse du cogroupe  $\Sigma^1 X$  par le corollaire 4.1.43. Comme  $\mathfrak{M}$  est stable, l'inverse du cogroupe  $\Sigma^1 X$  est donné par  $-\text{id}$ . C.Q.F.D

**LEMME 4.1.51** — *Soit une adjonction de Quillen  $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  entre deux catégories de modèles stables et propres à gauche. Alors,  $LF$  et  $RG$  sont des foncteurs triangulés.*

DEMONSTRATION En vue du lemme 2.1.23, il suffit de traiter  $LF$ . Mais il est clair que  $F$  commute à  $\text{Cone}$  et  $\Sigma^1$  puisqu'il préserve les cylindres sur les objets cofibrants (voir le lemme 4.1.25). C.Q.F.D

**Remarque 4.1.52** — Si la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est stable et propre à droite, notre construction fournit une structure de catégorie triangulée sur  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}^{\text{op}})$ . En passant à la catégorie triangulée opposée, on obtient une structure de catégorie triangulée sur  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  dont les triangles distingués sont donnés par les triangles de fibrations (notion duale de celle de triangles de cofibrations).

Ainsi, si  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche et à droite, on a à priori deux structures de catégories triangulées sur  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . On peut montrer (voir Hovey [Hov99]) que ces deux structures coïncident.

En vue des vérifications des axiomes des dérivateurs triangulés, on est ramené à étudier les carrés cartésiens et cocartésiens dans une catégorie de modèles pointée et stable. Pour cela, nous aurons besoin d'introduire les structures de modèles de Reedy sur certains diagrammes à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ . On traitera uniquement le cas des diagrammes indexés par des ensembles ordonnés finis. Pour le cas général, le lecteur pourra consulter [Hir03].

**PROPOSITION 4.1.53** — *Soient  $(\mathcal{J}, \leq)$  un ensemble ordonné fini et  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles. On note  $\underline{\text{HOM}}(\mathcal{J}, \mathfrak{M})$  la catégorie des  $\mathcal{J}$ -diagrammes dans  $\mathfrak{M}$ . On définit une structure de catégorie de modèles sur  $\underline{\text{HOM}}(\mathcal{J}, \mathfrak{M})$  en appelant un morphisme de  $\mathcal{J}$ -diagrammes  $(f_i)_{i \in \mathcal{J}} : (A_i)_{i \in \mathcal{J}} \longrightarrow (B_i)_{i \in \mathcal{J}}$  :*

- une équivalence faible lorsque chaque  $f_i$  est une équivalence faible,
- une cofibration lorsque pour tout  $i$  la flèche :

$$A_i \coprod_{\text{Colim}_{e<i} A_e} \text{Colim}_{e<i} B_e \longrightarrow B_i$$

est une cofibration,

- une fibration lorsque pour tout  $i$  la flèche  $f_i$  est une fibration.

DEMONSTRATION On raisonne par récurrence sur le cardinal de l'ensemble  $J$ . Ceci est utile pour l'étape 1 de la preuve :

Étape 1 : On montre dans cette étape qu'une flèche  $(f_i)_{i \in J}$  est une cofibration triviale si et seulement si :

$$A_i \coprod_{\text{Colim}_{e<i} A_e} \text{Colim}_{e<i} B_e \longrightarrow B_i$$

est une cofibration triviale pour tout  $i$ .

La condition est nécessaire. En effet, comme  $J_{<i} = \{e \in J; e < i\}$  est un ensemble ordonné de cardinal strictement plus petit que celui de  $J$ , le foncteur

$$\text{Colim}_{e<i} : \underline{\text{HOM}}(J_{<i}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{M}$$

est un foncteur de Quillen à gauche. Il vient que  $\text{Colim}_{e<i} A_e \longrightarrow \text{Colim}_{e<i} B_e$  est une cofibration triviale. Il en est de même de son push-out (par le corollaire 4.1.6) :

$$A_i \longrightarrow A_i \coprod_{\text{Colim}_{e<i} A_e} \text{Colim}_{e<i} B_e$$

On conclut à l'aide de l'axiome **(MC2)**.

La condition est suffisante. On raisonne par récurrence sur  $i \in J$ . Si  $A_e \longrightarrow B_e$  est une équivalence faible pour tout  $e < i$  alors  $(f_e)_{e<i}$  est une cofibration triviale. Il en est de même de  $\text{Colim}_{e<i} A_e \longrightarrow \text{Colim}_{e<i} B_e$  ainsi que ses push-out. On conclut encore une fois à l'aide de l'axiome **(MC2)**.

Étape 2 : Vérifions l'axiome **(MC4)**. En le fera uniquement pour les cofibrations et fibrations triviales. L'autre cas se traite par la même méthode en présence du résultat de l'étape 1.

On suppose donné un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (A_i)_{i \in J} & \longrightarrow & (X_i)_{i \in J} \\ (a_i) \downarrow & & \downarrow (f_i) \\ (B_i)_{i \in J} & \longrightarrow & (Y_i)_{i \in J} \end{array}$$

Soit  $\mathcal{J} \subset J$  un sous-ensemble maximal tel que :

- un relèvement partiel  $r : (B_j)_{j \in \mathcal{J}} \longrightarrow (X_j)_{j \in \mathcal{J}}$  existe,
- si  $i \leq j$  avec  $j \in \mathcal{J}$  alors  $i \in \mathcal{J}$ .

On va montrer que  $\mathcal{J} = J$ . Supposons le contraire. Soit  $i \in J \setminus \mathcal{J}$  un élément minimal. On va montrer que l'on peut étendre  $r$  à  $\mathcal{J} \cup \{i\}$ . Pour cela, on considère le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \left( A_i \coprod_{\text{Colim}_{e<i} A_e} \text{Colim}_{e<i} X_e \right) & \longrightarrow & X_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left( B_i \coprod_{\text{Colim}_{e<i} B_e} \text{Colim}_{e<i} X_e \right) & \longrightarrow & Y_i \end{array}$$

La flèche verticale de droite est bien une cofibration puisque c'est le push-out de la cofibration :

$$A_i \coprod_{\text{Colim}_{e<i} A_e} \text{Colim}_{e<i} B_e \longrightarrow B_i$$

suivant la flèche :

$$A_i \coprod_{\text{Colim}_{e<i} A_e} \text{Colim}_{e<i} B_e \xrightarrow{\text{id} \cup \text{Colim}_{e<i} r} A_i \coprod_{\text{Colim}_{e<i} A_e} \text{Colim}_{e<i} X_e$$

On déduit donc un relèvement qui fournit un morphisme  $r_i : B_i \longrightarrow X_i$ . On vérifie facilement qu'il est compatible aux  $r_j$  pour  $j \in \mathcal{J}$ . Ceci contredit la maximalité de  $\mathcal{J}$ .

*Étape 3 :* On considère maintenant l'axiome **(MC5)**. On traite uniquement la première partie (la seconde partie se traite par la même méthode en présence du résultat de l'étape 1). Soit  $(f_i)_{i \in \mathcal{J}} : (A_i)_{i \in \mathcal{J}} \longrightarrow (B_i)_{i \in \mathcal{J}}$  une flèche dans  $\underline{\text{HOM}}(\mathcal{J}, \mathfrak{M})$ . On procède comme pour l'étape 2. Soit  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$  un sous-ensemble maximal vérifiant :

- il existe une factorisation partielle  $f_j = c_j \circ p_j$  avec  $(c_j)_{j \in \mathcal{J}}$  une cofibration et  $(p_j)_{j \in \mathcal{J}}$  une fibration triviale,
- si  $i \leq j$  avec  $j \in \mathcal{J}$  alors  $i \in \mathcal{J}$ .

Supposons que  $\mathcal{J} \neq \mathcal{J}$ . Soit  $i \in \mathcal{J} - \mathcal{J}$  minimal. Notons  $C_e$  le but de  $c_e$  pour  $e < i$ . On choisit par **(MC5)** une factorisation de la flèche évidente :

$$A_i \quad \coprod_{\text{Colim}_{e < i} A_e} \quad \text{Colim}_{e < i} C_e \quad \longrightarrow \quad C_i \quad \longrightarrow \quad B_i$$

en une cofibration suivie d'une fibration triviale. Il est alors facile de voir que les flèches  $c_i : A_i \longrightarrow C_i$  et  $p_i : C_i \longrightarrow B_i$  permettent d'étendre la factorisation partielle à  $\mathcal{J} \cup \{i\}$ . Ceci contredit la maximalité de  $\mathcal{J}$ . C.Q.F.D

**Remarque 4.1.54** — La preuve de la proposition 4.1.53 s'étend facilement au cas où l'ensemble ordonné  $\mathcal{J}$  est remplacé par un ordinal. Il suffit en effet de remplacer la récurrence sur le cardinal de  $\mathcal{J}$  par la récurrence transfinie sur les ordinaux.

Rappelons que  $\Gamma$  (resp.  $\lrcorner$ ) désigne la sous-catégorie pleine de  $\square = \mathbf{1} \times \mathbf{1}$  dont les objets sont  $\text{Ob}(\square) - \{(0, 0)\}$  (resp.  $\text{Ob}(\square) - \{(1, 1)\}$ ).

Pour une catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$ , on notera  $\Gamma(\mathfrak{M})$  la catégorie  $\underline{\text{HOM}}((\Gamma)^{\text{op}}, \mathfrak{M})$  munie de sa structure de Reedy (voir la proposition 4.1.53) associée à l'ensemble ordonné  $(\Gamma)^{\text{op}}$ . Ainsi, les objets de  $\Gamma(\mathfrak{M})$  sont les diagrammes de la forme :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

que l'on notera pour abrégier  $(A \rightarrow B|C)$ . Une flèche  $(A \rightarrow B|C) \longrightarrow (A' \rightarrow B'|C')$  est donc une cofibration lorsque les flèches suivantes :

$$A \longrightarrow A', \quad B \coprod_A A' \longrightarrow B' \quad \text{et} \quad C \coprod_A A' \longrightarrow C'$$

sont des cofibrations de  $\mathfrak{M}$ .

On notera également  $\lrcorner(\mathfrak{M})$  la catégorie  $\underline{\text{HOM}}((\lrcorner)^{\text{op}}, \mathfrak{M})$ . Cette catégorie sera munie de la structure de modèles opposée de la structure de modèles de Reedy (voir la proposition 4.1.53) sur  $(\underline{\text{HOM}}((\lrcorner)^{\text{op}}, \mathfrak{M}))^{\text{op}} = \underline{\text{HOM}}(\lrcorner, \mathfrak{M}^{\text{op}})$  associée à l'ensemble ordonné  $\lrcorner$ . Ainsi, les objets de  $\lrcorner(\mathfrak{M})$  sont les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & A \end{array}$$

que l'on notera pour abrégier  $(B|C \rightarrow A)$ . Une flèche  $(B|C \rightarrow A) \longrightarrow (B'|C' \rightarrow A')$  est donc une fibration lorsque les flèches suivantes :

$$A \longrightarrow A', \quad B' \longrightarrow B \times_A A' \quad \text{et} \quad C' \longrightarrow C \times_A A'$$

sont des fibrations de  $\mathfrak{M}$ .

Remarquons que si  $\mathfrak{M}$  est stable (resp. propre à gauche) il en est de même de  $\Gamma(\mathfrak{M})$  et  $\lrcorner(\mathfrak{M})$ .

On dispose d'une adjonction de Quillen :

$$(F, G) : \Gamma(\mathfrak{M}) \longrightarrow \lrcorner(\mathfrak{M})$$

avec  $F$  (resp.  $G$ ) le foncteur qui à un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A \longrightarrow C & \text{(resp.} & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & & B \longrightarrow A \end{array}$$

associe le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \text{(resp. } B \times_A C \longrightarrow C \text{)} \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 B \longrightarrow & B \coprod_A C & B
 \end{array}$$

On déduit alors un couple de foncteurs adjoints :

$$(LF, RG) : \mathbf{Ho}(\Gamma(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\lrcorner(\mathfrak{M}))$$

qui sont triangulés lorsque  $\mathfrak{M}$  est stable et propre à gauche.

**PROPOSITION 4.1.55** — *Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles stable et propre à gauche. Alors l'adjonction  $(F, G)$  est une équivalence de Quillen.*

DEMONSTRATION On montre uniquement que l'unité  $\text{id} \longrightarrow RG \circ LF$  est inversible. Le fait que la counité est inversible se démontre par la même méthode.

On utilisera le fait que  $\mathbf{Ho}(\Gamma \mathfrak{M})$  est triangulée. Un objet  $(A \rightarrow B|C)$  :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \\
 C & & 
 \end{array}$$

s'inscrit dans un triangle distingué :

$$(* \rightarrow B|*) \oplus (* \rightarrow *|C) \longrightarrow (A \rightarrow B|C) \longrightarrow (A \rightarrow *|*) \longrightarrow$$

Il suffit donc de traiter les cas où seulement l'un des trois objets  $A, B$  et  $C$  est non-nul.

*Premier cas* :  $B = C = *$ . Soit  $a$  le foncteur qui à un objet  $A$  de  $\mathfrak{M}$  associe le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & * \\
 \downarrow & & \\
 * & & 
 \end{array}$$

et  $b$  le foncteur qui à un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 & \downarrow & \\
 C & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

associe  $D$ . Comme  $a$  et  $b$  préservent les équivalences faibles, ils se dérivent trivialement. La composée :

$$\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \xrightarrow{a} \mathbf{Ho}(\Gamma \mathfrak{M}) \xrightarrow{LF} \mathbf{Ho}(\lrcorner \mathfrak{M}) \xrightarrow{b} \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$$

coïncide avec  $\Sigma^1$  qui est une équivalence. Il est immédiat à partir de là, de voir que l'unité de  $(LF, RG)$  appliquée à  $(A \rightarrow *|*)$  coïncide avec :

$$(A \rightarrow *|*) \longrightarrow (\Omega^1 \Sigma^1(A) \rightarrow *|*)$$

qui est bien inversible.

*Second cas* :  $A = B = 0$ . Il s'agit de voir pour  $C$  cofibrant que la limite homotopique du digramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 & \parallel & \\
 * & \longrightarrow & C
 \end{array}$$

est contractile. Ceci est évident.

C.Q.F.D

Le résultat suivant est maintenant clair :

**THEOREME 4.1.56** — Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles stable et propre à gauche. Alors, un carré :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien si et seulement si il est homotopiquement cartésien.

Pour terminer, nous vérifions que la catégorie homotopique associée à une catégorie de modèles monoïdale, stable et propre à gauche est une catégorie triangulée monoïdale au sens de la définition 2.1.148. Ceci découlera du lemme 4.1.58. Rappelons d’abord la définition d’une catégorie de modèles monoïdale (voir [Hov99]) :

**DEFINITION 4.1.57** — Une catégorie de modèles monoïdale  $(\mathfrak{M}, \otimes)$  est une catégorie de modèles munie d’une structure monoïdale fermée à droite et à gauche (au sens de la définition 2.1.119) vérifiant l’axiome suivant :

(MMC) Soient  $f : A \longrightarrow B$  et  $g : U \longrightarrow V$  deux cofibrations de  $\mathfrak{M}$ . Alors le morphisme évident :

$$f \square g : A \otimes V \coprod_{A \otimes U} B \otimes U \longrightarrow B \otimes V$$

est une cofibration qui est une équivalence faible lorsque  $f$  ou  $g$  est une équivalence faible.

On dit que  $\mathfrak{M}$  est symétrique lorsque la catégorie monoïdale sous-jacente est également munie d’un isomorphisme de symétrie. On dit que  $\mathfrak{M}$  est unitaire si la catégorie monoïdale sous-jacente est munie d’un objet unité qui est cofibrant.

Pour  $A$  un objet cofibrant, les foncteurs  $A \otimes -$  et  $-\otimes A$  sont des foncteurs de Quillen à gauche. On déduit du lemme 4.1.26 que le bifoncteur  $-\otimes -$  préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants. Il admet par la proposition 4.1.22 un foncteur dérivé à gauche  $-\overset{L}{\otimes}-$  qui fait de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  une catégorie monoïdale fermée à gauche et à droite (voir [Hov99] pour plus de détails).

**LEMME 4.1.58** — Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles monoïdale symétrique et unitaire. On note  $\mathbf{1}$  l’objet unité de  $\mathfrak{M}$ . Supposons que  $\mathfrak{M}$  est pointée. Alors le foncteur  $\Sigma^1$  est canoniquement isomorphe à  $(\Sigma^1 \mathbf{1}) \overset{L}{\otimes} -$ . De plus, la permutation des facteurs :

$$(4.6) \quad \tau : (\Sigma^1 \mathbf{1}) \overset{L}{\otimes} (\Sigma^1 \mathbf{1}) \longrightarrow (\Sigma^1 \mathbf{1}) \overset{L}{\otimes} (\Sigma^1 \mathbf{1})$$

est égale à l’inverse du cogroupe commutatif  $\Sigma^2 \mathbf{1}$  modulo l’identification  $\Sigma^1(\Sigma^1 \mathbf{1}) \simeq \Sigma^1 \mathbf{1} \overset{L}{\otimes} \Sigma^1 \mathbf{1}$ .

Si en plus  $\mathfrak{M}$  est stable et propre à gauche, alors  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  est une catégorie monoïdale triangulée au sens de la définition 2.1.148.

**DEMONSTRATION** Si  $(C, p, i_0, i_1)$  est un cylindre sur  $\mathbf{1}$ , alors pour tout objet cofibrant  $A$  de  $\mathfrak{M}$ , le quadruplet  $(C \otimes A, p \otimes \text{id}, i_0 \otimes \text{id}, i_1 \otimes \text{id})$  est un cylindre sur  $\mathbf{1} \otimes A \simeq A$ . L’isomorphisme  $\Sigma^1 \simeq \Sigma^1 \mathbf{1} \overset{L}{\otimes} -$  découle alors du théorème 4.1.38 appliqué à ce cylindre. Par  $\otimes$ -dualité, on a également un isomorphisme  $\Sigma^1 \simeq - \overset{L}{\otimes} \Sigma^1 \mathbf{1}$ . Il est clair que la composée :

$$\Sigma^1 \simeq \Sigma^1 \mathbf{1} \overset{L}{\otimes} - \longrightarrow - \overset{L}{\otimes} \Sigma^1 \mathbf{1} \simeq \Sigma^1$$

est l’identité. En effet, elle correspond à l’isomorphisme de cylindres  $C \otimes A \simeq A \otimes C$  pour  $A$  cofibrant dans  $\mathfrak{M}$ .

Montrons que la flèche (4.6) est égale à  $-\text{id}$ . On fixe un cylindre  $(C, p, i_0, i_1)$  sur  $\mathbf{1}$ . On dispose alors de quatre cylindres isomorphes :

$$C \otimes i_0(\mathbf{1}), \quad C \otimes i_1(\mathbf{1}), \quad i_0(\mathbf{1}) \otimes C \quad \text{et} \quad i_1(\mathbf{1}) \otimes C$$

ainsi que des morphismes évident vers  $C \otimes C$ . La permutation  $\tau$  envoie  $C \otimes i_0(\mathbf{1})$  sur  $i_0(\mathbf{1}) \otimes C$  et  $C \otimes i_1(\mathbf{1})$  sur  $i_1(\mathbf{1}) \otimes C$ .

On définit deux cylindres  $C_{01}$  et  $C_{01}$  par :

$$C_{01} = (i_0(\mathbf{1}) \otimes C) \coprod_{i_0(\mathbf{1}) \otimes i_1(\mathbf{1})} (C \otimes i_1(\mathbf{1})) \quad \text{et} \quad C_{01} = (i_1(\mathbf{1}) \otimes C) \coprod_{i_1(\mathbf{1}) \otimes i_0(\mathbf{1})} (C \otimes i_0(\mathbf{1}))$$

Par l’axiome (MMC), on dispose de deux cofibrations triviales :

$$a_{01} : C_{01} \longrightarrow C \otimes C \quad \text{et} \quad a_{10} : C_{10} \longrightarrow C \otimes C$$

permutées par  $\tau$ .



Notons  $D = C_{01} \coprod_{i_0(\mathbb{1}) \otimes i_0(\mathbb{1})} C_{10}$ . C'est naturellement un cylindre sur  $\mathbb{1}$ . On a encore une cofibration :

$$d : D \coprod_{i_1(\mathbb{1}) \otimes i_1(\mathbb{1})} \coprod_{i_1(\mathbb{1}) \otimes i_1(\mathbb{1})} * \longrightarrow C \otimes C \coprod_{i_1(\mathbb{1}) \otimes i_1(\mathbb{1})} *$$

dont le but est contractile. De plus, la cofibre de  $d$  est égale à  $\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes \Sigma^1 \mathbb{1}$ . On dispose donc d'un isomorphisme naturel entre  $\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes \Sigma^1 \mathbb{1}$  et :

$$\text{Cone}(D \coprod_{i_1(\mathbb{1}) \otimes i_1(\mathbb{1})} \coprod_{i_1(\mathbb{1}) \otimes i_1(\mathbb{1})} * \longrightarrow *)$$

On est ainsi ramené à montrer que  $\tau$  opère (à homotopie près) par  $-\text{id}$  sur  $D \coprod_{\mathbb{1}} \coprod_{\mathbb{1}} * = \Sigma^1 \mathbb{1}$ . Ceci découle du corollaire 4.1.43 et le fait que  $\tau$  permute les extrémités du cylindre  $D$ .

Montrons finalement que lorsque  $\mathfrak{M}$  est stable,  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  est bien une catégorie monoïdale symétrique. Pour  $A$  un objet cofibrant de  $\mathfrak{M}$ , les foncteurs  $-\otimes A$  et  $A \otimes -$  sont des foncteurs de Quillen à gauche. Il vient que leurs foncteurs dérivés  $-\overset{\mathbb{L}}{\otimes} A$  et  $A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} -$  sont des foncteurs triangulés. Ceci fournit les isomorphismes  $s_g$  et  $s_d$  de la définition 2.1.148 et prouve la première propriété.

D'autre part, modulo l'identification  $\Sigma^1 \simeq \Sigma^1 \mathbb{1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} -$ , l'isomorphisme  $s_g : \Sigma^1 A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} B \simeq \Sigma^1(A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} B)$  est simplement l'isomorphisme d'associativité :  $(\Sigma^1 \mathbb{1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} B \xrightarrow{\sim} \Sigma^1 \mathbb{1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} B)$ . Dualement, modulo l'identification  $\Sigma^1 \simeq - \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \Sigma^1 \mathbb{1}$ , l'isomorphisme  $s_d : A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \Sigma^1 B \simeq \Sigma^1(A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} B)$  est l'isomorphisme d'associativité :  $A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (B \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \Sigma^1 \mathbb{1}) \xrightarrow{\sim} (A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} B) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \Sigma^1 \mathbb{1}$ . Étant donné que les deux identifications  $\Sigma^1 \simeq \Sigma^1 \mathbb{1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} -$  et  $\Sigma^1 \simeq - \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \Sigma^1 \mathbb{1}$  diffèrent par l'isomorphisme de commutation, on voit que modulo  $\Sigma^1 \simeq (\Sigma^1 \mathbb{1}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} -$ , l'isomorphisme  $s_d$  est la composée :

$$A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (\Sigma^1 \mathbb{1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} B) \xrightarrow{\sim} (A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \Sigma^1 \mathbb{1}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} B \xrightarrow{\sim} (\Sigma^1 \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} B \xrightarrow{\sim} \Sigma^1 \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} B)$$

Ainsi, si l'on utilise l'identification  $\Sigma^1 \simeq \Sigma^1 \mathbb{1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} -$ , on voit que l'anticommutativité du carré :

$$\begin{array}{ccc} \left( \Sigma^1 A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \Sigma^1 B \right) & \longrightarrow & \Sigma^1 \left( \Sigma^1 A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} B \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^1 \left( A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \Sigma^1 B \right) & \longrightarrow & \Sigma^1 \Sigma^1 \left( A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} B \right) \end{array}$$

équivalait à l'anticommutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} (\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes A) \otimes (\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes B) & \xrightarrow{\sim} & ((\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes A) \otimes \Sigma^1 \mathbb{1}) \otimes B & \xrightarrow{\tau} & (\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes (\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes A)) \otimes B & \xrightarrow{\sim} & (\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes \Sigma^1 \mathbb{1}) \otimes (A \otimes B) \\ \sim \downarrow & & & & & & \parallel \\ \Sigma^1 \mathbb{1} \otimes (A \otimes (\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes B)) & \xrightarrow{\sim} & \Sigma^1 \mathbb{1} \otimes ((A \otimes \Sigma^1 \mathbb{1}) \otimes B) & \xrightarrow{\tau} & \Sigma^1 \mathbb{1} \otimes ((\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes A) \otimes B) & \xrightarrow{\sim} & (\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes \Sigma^1 \mathbb{1}) \otimes (A \otimes B) \end{array}$$

Étant donné que les deux composées possibles de ce diagramme diffèrent par l'isomorphisme de commutation :

$$(\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes \Sigma^1 \mathbb{1}) \otimes (A \otimes B) \xrightarrow{\tau \otimes \text{id}_{A \otimes B}} (\Sigma^1 \mathbb{1} \otimes \Sigma^1 \mathbb{1}) \otimes (A \otimes B)$$

le résultat est maintenant clair.

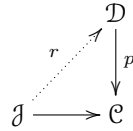
C.Q.F.D

## 4.2 Catégories de modèles II : accessibilité et localisation

On introduit ici la classe des catégories de modèles *présentables par cofibrations*. Cette classe contient tous les exemples que l'on rencontrera. On démontre ensuite un théorème de localisation pour ces catégories de modèles qui sera plus ou moins un cas particulier du théorème de localisation de Hirschhorn [Hir03]. On commence par la notion clef d'accessibilité.

### 4.2.1 Accessibilité

Nous dirons qu'une catégorie  $\mathcal{J}$  est *pseudo-discrète* s'il existe deux sous-catégories pleines et discrètes  $\mathcal{J}_0$  et  $\mathcal{J}_1$  avec  $\text{Ob}(\mathcal{J}) = \text{Ob}(\mathcal{J}_0) \cup \text{Ob}(\mathcal{J}_1)$  et telles que  $\text{hom}(j_1, j_0) = \emptyset$  pour tout  $(j_0, j_1) \in \text{Ob}(\mathcal{J}_0) \times \text{Ob}(\mathcal{J}_1)$ . Notons qu'une telle catégorie est un objet projectif dans la catégorie des petites catégories dans le sens qu'un relèvement  $r$  existe :



si le foncteur  $p$  est surjectif sur les objets et induit des surjections  $\text{hom}_{\mathcal{D}}(A, B) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{C}}(p(A), p(B))$  pour tout  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{D}$ .

Par le cardinal d'une petite catégorie  $\mathcal{K}$ , on entend le cardinal de l'ensemble  $\text{Fl}(\mathcal{K})$ . On fait la définition suivante :

**DEFINITION 4.2.1** — Soit  $\alpha$  un cardinal (non nécessairement infini). Une catégorie  $\mathcal{J}$  est dite  $\alpha$ -filtrante si elle est non vide et si pour tout foncteur  $P : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$  avec  $\mathcal{J}$  pseudo-discrète et de cardinal inférieur ou égal à  $\alpha$ , il existe  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  tel que l'ensemble :

$$\text{Lim}_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \text{hom}_{\mathcal{J}}(P(j), i)$$

est non vide. Si  $\mathcal{E}$  est un ensemble ordonné dont la catégorie associée est  $\alpha$ -filtrante, on parlera alors d'ensemble ordonné  $\alpha$ -filtrant.

**Remarque 4.2.2** — Une catégorie  $\alpha$ -filtrante est  $\beta$ -filtrante pour tout cardinal  $\beta \leq \alpha$ . Toute catégorie non vide est clairement 0-filtrante et 1-filtrante. Une catégorie non vide  $\mathcal{J}$  est 2-filtrante si et seulement si pour tout couple d'objets  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{J})^2$ , il existe un troisième objet  $C$  tel que les ensembles  $\text{hom}_{\mathcal{J}}(A, C)$  et  $\text{hom}_{\mathcal{J}}(B, C)$  soient non vides. En faisant la liste des catégories pseudo-discrètes de cardinal 3 et 4, on voit immédiatement les équivalences entre les notions :

$$2\text{-filtrante} \iff 3\text{-filtrante} \iff 4\text{-filtrante}$$

Une catégorie est 5-filtrante si et seulement si elle est *filtrante* au sens de [SGA 4]. On vérifie également que pour tout entier naturel  $n \geq 5$  la notion de  $n$ -filtrante est équivalente à 5-filtrante et donc aussi à filtrante.

Remarquons enfin que pour les ensembles ordonnés la situation se simplifie. En effet, un ensemble ordonné est filtrant si et seulement si il est 2-filtrant.

Voici quelques exemples de catégories  $\alpha$ -filtrantes :

**Exemple 4.2.3** — 1- Une catégorie admettant un objet final est  $\alpha$ -filtrante pour tout cardinal  $\alpha$ .

2- Soit  $\mathcal{J}$  une catégorie admettant des colimites suivant les catégories pseudo-discrètes  $\mathcal{J}$  avec  $\text{card}(\text{Fl}(\mathcal{J})) \leq \alpha$ . Alors  $\mathcal{J}$  est  $\alpha$ -filtrante.

3- Soit un foncteur  $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{K}$  induisant des surjections sur les objets et les flèches entre objets. Si  $\mathcal{J}$  est  $\alpha$ -filtrante, il en est de même de  $\mathcal{K}$ . Ceci découle immédiatement du fait que les catégories pseudo-discrètes sont des objets "projectifs" dans la catégorie des catégories.

4- Soit  $\alpha$  un cardinal. Alors tout cardinal  $\gamma > \alpha$  vu comme ordinal<sup>1</sup> est  $\alpha$ -filtrant.

On a le lemme fort utile suivant :

**LEMME 4.2.4** — On fixe un cardinal  $\alpha$  et un ordinal limite  $\lambda$  plus petit ou égal au cardinal infini successeur de  $\alpha$ . Soient  $\mathcal{K}$  une petite catégorie de cardinal inférieur ou égal à  $\alpha$  et un foncteur :

$$\mathcal{E} : \mathcal{K} \longrightarrow \text{OrdEns}$$

avec  $\text{OrdEns}$  la catégorie des ensembles ordonnés et des applications croissantes. On suppose les propriétés suivantes satisfaites :

- pour tout  $k \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ , l'ensemble ordonné  $\mathcal{E}(k)$  est  $\alpha$ -filtrant et admet les colimites indexées par  $\lambda$ ,
- pour tout  $k_1 \rightarrow k_2 \in \text{Fl}(\mathcal{K})$ , l'application  $\mathcal{E}(k_1) \longrightarrow \mathcal{E}(k_2)$  est cofinale et commute aux  $\lambda$ -colimites.

Alors l'inclusion évidente  $\text{Lim}_{\mathcal{K}} \mathcal{E} \longrightarrow \prod_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})} \mathcal{E}(k)$  est cofinale. En particulier, l'ensemble  $\text{Lim}_{\mathcal{K}} \mathcal{E}$  est non vide.

**DEMONSTRATION** Lorsque  $\alpha = 0$  ou 1, il n'y a rien à démontrer. On supposera dans la suite que  $\alpha \geq 2$ . Les ensembles ordonnés  $\mathcal{E}(-)$  sont donc filtrants au sens de [SGA 4].

<sup>1</sup>Rappelons qu'un cardinal est, par définition, le plus petit ordinal  $\lambda$  dans une classe d'équipotence.

On se donne une famille  $(e_k)_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})} \in \prod_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})} \mathcal{E}(k)$  que l'on majorera par un élément de  $\text{Lim}_{\mathcal{K}} \mathcal{E}$ . On pose pour cela  $e_{0,k} = e_k$  pour  $k \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  et on construit par récurrence transfinie une suite croissante de familles  $(e_{\nu,k})_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})} \in \prod_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})} \mathcal{E}(k)$  pour  $\nu \in \lambda$  de la manière suivante.

Soit  $\nu \in \lambda$  et supposons que pour tout  $\mu \in \nu$ , les éléments  $e_{\mu,k}$  sont construits. Comme  $\mu \in \lambda$ , son cardinal est strictement inférieur à celui du cardinal infini successeur de  $\alpha$ . Il vient que le cardinal de  $\mu$  est inférieur ou égal à  $\alpha$  (resp. est fini) si  $\alpha$  est infini (resp.  $\alpha$  est fini).

Soit  $k \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ . Les éléments de la forme  $\mathcal{E}(k' \rightarrow k)(e_{\mu,k'})$  forment une partie de cardinal inférieur à  $\alpha$  (resp. de cardinal fini). Comme  $\mathcal{E}(k)$  est  $\alpha$ -filtrant, on peut choisir un élément  $m_{\nu,k} \in \mathcal{E}(k)$  qui majore tous les  $\mathcal{E}(k' \rightarrow k)(e_{\mu,k'})$ .

D'autre part, pour tout  $k \rightarrow k'' \in \text{Fl}(\mathcal{K})$  et  $\mu \in \nu$ , on peut trouver, par cofinalité du foncteur  $\mathcal{E}(k \rightarrow k'')$ , un élément  $n_{\mu,k \rightarrow k''} \in \mathcal{E}(k)$  tel que  $e_{\mu,k''} \leq \mathcal{E}(k \rightarrow k'')(n_{\mu,k \rightarrow k''})$ . La famille des  $n_{\mu,k \rightarrow k''}$  étant de cardinal inférieur à  $\alpha$  (resp. de cardinal fini), on peut trouver  $p_{\nu,k} \in \mathcal{E}(k)$  qui majore tous les  $n_{\mu,k \rightarrow k''}$ . On prendra pour  $e_{\nu,k}$  un majorant commun à  $m_{\nu,k}$  et  $p_{\nu,k}$ .

Ainsi par construction, la propriété suivante est vérifiée :

(A) Pour tout  $k_1 \rightarrow k_2 \in \text{Fl}(\mathcal{K})$  et  $\mu \in \nu \in \lambda$  on a  $e_{\nu,k_2} \geq \mathcal{E}(k_1 \rightarrow k_2)(e_{\mu,k_1})$  et  $\mathcal{E}(k_1 \rightarrow k_2)(e_{\nu,k_1}) \geq e_{\mu,k_2}$ .

On pose alors  $e'_k = \text{Colim}_{\nu \in \lambda} e_{\nu,k}$ . Pour  $k_1 \rightarrow k_2 \in \text{Fl}(\mathcal{K})$ , on déduit de (A) les inégalités suivantes :

$$e'_{k_2} = \text{Colim}_{\nu \in \lambda} e_{\nu,k_2} \leq \text{Colim}_{\nu \in \lambda} \mathcal{E}(k_1 \rightarrow k_2)(e_{\nu,k_1}) \leq \text{Colim}_{\nu \in \lambda} e_{\nu,k_2} = e'_{k_2}$$

$$\parallel$$

$$\mathcal{E}(k_1 \rightarrow k_2)e'_{k_1}$$

Ceci montre que  $e'_{k_2} = \mathcal{E}(k_1 \rightarrow k_2)(e'_{k_1})$ . En d'autres termes, la famille  $(e'_k)_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})}$  est un élément de  $\text{Lim}_{\mathcal{K}} \mathcal{E}$ . C.Q.F.D

**DEFINITION 4.2.5** — 1- Un foncteur  $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  entre catégories admettant des petites colimites est dit  $\alpha$ -accessible s'il commute aux colimites suivant les petites catégories  $\alpha$ -filtrantes.

2- Un objet  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  est dit  $\alpha$ -accessible si le foncteur  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(A, -)$  est  $\alpha$ -accessible.

Lorsque le cardinal  $\alpha$  dans la définition 4.2.5 est fini et plus grand que 5, nous dirons *finiment accessible* au lieu de  $\alpha$ -accessible (ceci étant indépendant de  $\alpha$  par la remarque 4.2.2). Nous réserverons l'adjectif *accessible* pour les foncteurs ou objets qui sont  $\alpha$ -accessibles pour un certain cardinal  $\alpha$ . On a le lemme bien-connu (voir [SGA 4]) :

**LEMME 4.2.6** — On suppose le cardinal  $\alpha$  supérieur ou égal à 5. Soit  $\mathcal{K}$  une catégorie de cardinal inférieur ou égal à  $\alpha$ . Alors le foncteur :

$$\text{Lim}_{\mathcal{K}} : \underline{\text{HOM}}(\mathcal{K}, \mathcal{E}ns) \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

est  $\alpha$ -accessible.

DEMONSTRATION Pour tout foncteur  $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ , on a une suite exacte d'ensembles :

$$\text{Lim}_{\mathcal{K}} F \longrightarrow \left( \prod_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})} F(k) \right) \rightrightarrows \left( \prod_{k_1 \rightarrow k_2 \in \text{Fl}(\mathcal{K})} F(k_2) \right)$$

Puisque  $\alpha \geq 5$ , une catégorie  $\alpha$ -filtrante est filtrante au sens de [SGA 4]. Comme les colimites filtrantes commutent aux limites finies dans  $\mathcal{E}ns$ , on est ramené à montrer que le produit direct suivant un ensemble de cardinal inférieur ou égal à  $\alpha$  est  $\alpha$ -accessible.

Soient  $E$  un ensemble de cardinal inférieur ou égal à  $\alpha$  et  $(D_e)_{e \in E} : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{E}ns$  une famille de foncteurs avec  $\mathcal{J}$  une petite catégorie  $\alpha$ -filtrante. Il s'agit de montrer que l'application canonique :

$$\text{Colim}_{i \in \mathcal{J}} \prod_{e \in E} D_e(i) \longrightarrow \prod_{e \in E} \text{Colim}_{i \in \mathcal{J}} D_e(i)$$

est bijective.

Pour la surjectivité, on se donne une famille d'éléments  $b_e \in \text{Colim}_{i \in \mathcal{J}} D_e(i)$ . Pour chaque  $e$ , il existe  $i_e \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  tel que  $b_e$  est représenté par un élément  $b'_e \in D_e(i_e)$ . Comme  $\mathcal{J}$  est  $\alpha$ -filtrante, on peut choisir  $k \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  et des flèches  $i_e \rightarrow k$ . Les éléments  $b_e$  sont également représentés par  $b''_e = D_e(i_e \rightarrow k)(b'_e) \in D_e(k)$ . Ainsi, la famille  $(b''_e)_{e \in E} \in \prod_{e \in E} D_e(k)$  fournit un antécédent de  $(b_e)_{e \in E}$ .

L'injectivité se traite de manière similaire. Soient  $(u_e)_{e \in E} \in \prod_{e \in E} D_e(i)$  et  $(v_e)_{e \in E} \in \prod_{e \in E} D_e(j)$  deux familles ayant la même classe dans  $\prod_{e \in E} \text{Colim}_{i \in \mathcal{J}} D_e$ . Pour tout  $e \in E$ , il existe des flèches  $i \rightarrow k_e$  et  $j \rightarrow k_e$  telles que :

$$D_e(i \rightarrow k_e)(u_e) = D_e(j \rightarrow k_e)(v_e)$$

Comme  $\mathcal{J}$  est  $\alpha$ -filtrante, il existe  $l \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  et des flèches  $k_e \rightarrow l$ . On peut donc supposer que  $k_e = l$ . Ainsi, pour tout  $e \in E$ , on a des flèches  $f_e : i \rightarrow l$  et  $g_e : j \rightarrow l$  telles que  $D_e(f_e)(u_e) = D_e(g_e)(v_e)$ . Comme  $\alpha \geq 5$ , la catégorie  $\mathcal{J}$  est également  $(2\alpha + 3)$ -filtrante. On peut donc trouver une flèche  $h : l \rightarrow l'$  qui égalise les  $f_e$  et les  $g_e$ . On note  $f' = h \circ f_e$  et  $g' = h \circ g_e$ . On a alors  $D_e(f')(u_e) = D_e(g')(v_e)$ . Ceci montre que les classes de  $(u_e)_{e \in E}$  et  $(v_e)_{e \in E}$  coïncident dans  $\text{Colim}_{\mathcal{J}} \prod_{e \in E} D_e$ . L'injectivité est prouvée. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.2.7** — *On suppose le cardinal  $\alpha$  supérieur ou égal à 5. On se donne une catégorie  $\mathcal{C}$  admettant les petites colimites. Soient  $\mathcal{K}$  une catégorie de cardinal inférieur ou égal à  $\alpha$  et  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur tel que  $F(k)$  est un objet  $\alpha$ -accessible pour tout  $k \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ . Alors, l'objet  $\text{Colim}_{\mathcal{K}} F$  est encore  $\alpha$ -accessible.*

DEMONSTRATION En effet, pour toute petite catégorie  $\mathcal{J}$   $\alpha$ -filtrante on a des isomorphismes :

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(\text{Colim}_{\mathcal{K}} F, \text{Colim}_{\mathcal{J}} G) \simeq \text{Lim}_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(F(k), \text{Colim}_{\mathcal{J}} G) \simeq \text{Lim}_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})} \text{Colim}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(F(k), G(i))$$

Or par le lemme 4.2.6, le membre de droite est isomorphe à :

$$\text{Colim}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \text{Lim}_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(F(k), G(i)) \simeq \text{Colim}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(\text{Colim}_{\mathcal{K}} F, G(i))$$

Le corollaire est prouvé. C.Q.F.D

On peut utiliser le corollaire 4.2.7 pour fournir un premier exemple d'objets  $\alpha$ -accessibles :

**Exemple 4.2.8** — On suppose que  $\alpha$  est infini. Soit  $E$  un ensemble. Alors  $E$  est un objet  $\alpha$ -accessible de  $\mathcal{E}ns$  si et seulement si, son cardinal est inférieur ou égal à  $\alpha$ . La condition est suffisante d'après le corollaire 4.2.7 puisque  $E \simeq \prod_{e \in E} \{e\}$  et que les singletons sont évidemment 0-accessibles.

Pour voir qu'elle est nécessaire, considérons l'ensemble  $\mathcal{P}_{\alpha}(E)$  des parties de  $E$  de cardinal inférieur ou égal à  $\alpha$ . Cet ensemble ordonné par l'inclusion est  $\alpha$ -filtrant (on utilise ici que  $\alpha \times \alpha$  est équipotent à  $\alpha$ ) et l'on a  $E = \text{Colim}_{A \in \mathcal{P}_{\alpha}(E)} A$ . Lorsque  $E$  est  $\alpha$ -accessible, l'identité de  $E$  se factorise à travers un élément de  $\mathcal{P}_{\alpha}(E)$ . Ceci montre que  $E \in \mathcal{P}_{\alpha}(E)$ .

On montre de même que l'ensemble  $E$  est finiment accessible si et seulement si son cardinal est fini.

**PROPOSITION 4.2.9** — *Soit  $(F, G) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  une adjonction entre deux catégories admettant les petites colimites. On suppose que  $G$  est  $\alpha$ -accessible. Alors le foncteur  $F$  envoie les objets  $\alpha$ -accessibles sur des objets  $\alpha$ -accessibles.*

DEMONSTRATION En effet, soit  $A$  un objet  $\alpha$ -accessible de  $\mathcal{C}$ . Pour vérifier que  $F(A)$  est encore  $\alpha$ -accessible, on se donne un foncteur  $B : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$  avec  $\mathcal{J}$  une petite catégorie  $\alpha$ -filtrante. On a alors des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathcal{D}}(F(A), \text{Colim}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} B(i)) &\simeq \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, G(\text{Colim}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} B(i))) \simeq \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{Colim}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} G(B(i))) \\ &\simeq \text{Colim}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, G(B(i))) \simeq \text{Colim}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \text{hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B(i)) \end{aligned}$$

D'où le résultat. C.Q.F.D

Rappelons qu'un *monomorphisme* dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est une flèche  $a$  telle que l'application  $\text{hom}(X, a)$  est injective pour tout objet  $X$ . Supposons que  $\mathcal{C}$  admet les coproduits finis. Une flèche dont tous les push-out sont des monomorphismes est appelée un *monomorphisme universel*. Le lemme suivant nous sera utile dans la suite :

**LEMME 4.2.10** — *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie admettant les petites colimites. On suppose que les limites finies existent dans  $\mathcal{C}$  et qu'elles commutent aux colimites filtrantes.*

*Soient  $\mathcal{J}$  une catégorie filtrante et  $t : F \rightarrow G$  une transformation naturelle entre deux foncteurs  $F, G : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ . On suppose que pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ , la flèche  $t(i) : F(i) \rightarrow G(i)$  est un monomorphisme universel. Alors la flèche :*

$$t : \text{Colim}_{\mathcal{J}} F \rightarrow \text{Colim}_{\mathcal{J}} G$$

*est encore un monomorphisme universel.*

DEMONSTRATION Notons  $A = \text{Colim}_{\mathcal{J}} F$ . Soient  $F' : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  le foncteur constant de valeur  $A$  et  $G' : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  le foncteur donné par  $G'(i) = A \amalg_{F(i)} G(i)$ . On a alors un isomorphisme canonique  $\text{Colim}_{\mathcal{J}} G = \text{Colim}_{\mathcal{J}} G'$ . De plus, pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  la flèche  $A \rightarrow G'(i)$  est un monomorphisme universel. Il suffit donc de traiter le cas des foncteurs  $F'$  et  $G'$ .

En d'autres termes, on peut supposer que le foncteur  $F$  est constant de valeur  $A$ . On notera  $B$  la colimite de  $G$ . Étant donné qu'un co-changement de base suivant  $A \rightarrow A'$  ne changera pas nos hypothèses, on se contentera montrer que  $A \rightarrow B$  est un monomorphisme sans se soucier de l'universalité.

Soient  $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  et  $f, g : U \rightrightarrows A$  deux flèches telles que  $t \circ f = t \circ g$ . On veut montrer que  $f = g$ . On considère les égalisateurs :

$$E = \text{Eq} \left( U \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} A \right) \quad \text{et} \quad E(i) = \text{Eq} \left( U \begin{array}{c} \xrightarrow{f \circ t(i)} \\ \xrightarrow{g \circ t(i)} \end{array} B(i) \right)$$

Comme les limites commutent aux colimites filtrantes, on déduit que  $\text{Colim}_{\mathcal{J}} E(i) = U$ . Mais puisque les flèches  $t(i)$  sont des monomorphismes, la flèche canonique  $E \longrightarrow E(i)$  est inversible. Ceci montre que  $E = U$ . On a donc l'égalité  $f = g$ . C.Q.F.D

**DEFINITION 4.2.11** — Soit  $B$  un objet d'une catégorie  $\mathcal{C}$ . On note  $\mathbf{Sub}(B) \subset \mathcal{C}/B$  la sous-catégorie pleine dont les objets sont les monomorphismes  $a : A \longrightarrow B$ . Nous abuserons parfois et dirons que  $A$  est un sous-objet de  $B$ .

Supposons que  $\mathcal{C}$  admet les petites colimites et soit  $\alpha$  un cardinal. On notera  $\mathbf{Sub}_{\alpha}(B)$  la sous-catégorie pleine formée des monomorphismes de sources  $\alpha$ -accessibles.

**Remarque 4.2.12** — Supposons que la catégorie  $\mathcal{C}$  admet les petites colimites et que tous les monomorphismes de  $\mathcal{C}$  sont universels. Si en plus, les limites finies existent dans  $\mathcal{C}$  et commutent aux colimites filtrantes, la catégorie  $\mathbf{Sub}(B)$  admet les colimites suivant les petites catégories filtrantes (par le lemme 4.2.10). De même, si  $\alpha \geq 5$ , la catégorie  $\mathbf{Sub}_{\alpha}(B)$  admet les colimites suivant les petites catégories filtrantes de cardinal inférieur ou égal à  $\alpha$  (par le corollaire 4.2.7). De plus, ces colimites commutent au foncteur "oubli" qui à un monomorphisme associe sa source.

Il est clair que la catégorie  $\mathbf{Sub}(X)$  est directe. Étant donné deux sous-objets  $A$  et  $B$  de  $X$ , nous dirons que  $B$  majore  $A$  s'il existe une flèche de  $A$  vers  $B$  dans  $\mathbf{Sub}(X)$ .

Soit  $u : U \longrightarrow V$  une flèche d'une catégorie  $\mathcal{C}$ . On a deux sous-catégories pleines  $\mathbf{Sub}_{\alpha}(u)$  et  $\mathbf{Sub}(u)$  de  $\text{Hom}(\underline{1}, \mathcal{C})/u$ . On parlera alors de sous-flèches de  $u$ . Une sous-flèche  $u_0$  est majorée par  $u_1$  si et seulement si, le but et la source de  $u_0$  sont respectivement majorés par le but et la source de  $u_1$ .

**DEFINITION 4.2.13** — Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie admettant les petites colimites. On dit qu'un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  est la colimite  $\alpha$ -filtrante de ses sous-objets  $\alpha$ -accessibles si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- la catégorie  $\mathbf{Sub}_{\alpha}(X)$  est essentiellement petite et  $\alpha$ -filtrante,
- la flèche canonique  $(\text{Colim}_{A \rightarrow X \in \mathbf{Sub}_{\alpha}(X)} A) \longrightarrow X$  est inversible.

Le résultat suivant permet dans certain cas d'estimer le cardinal de l'ensemble des flèches partantes d'un objet  $\alpha$ -accessible :

**PROPOSITION 4.2.14** — Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie admettant les petites colimites et  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  des cardinaux infinis. On suppose que la sous-catégorie pleine  $\mathcal{C}_{\alpha}$  des objets  $\alpha$ -accessibles est essentiellement petite et équivalente à une catégorie de cardinal inférieur<sup>2</sup> ou égal à  $\gamma$ . Soit  $X$  un objet  $\beta$ -accessible de  $\mathcal{C}$  qui est la colimite  $\alpha$ -filtrante de ses sous-objets  $\alpha$ -accessibles. Alors, le cardinal de  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$  est majoré par  $\gamma \cdot \beta^{\alpha}$  pour tout  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C}_{\alpha})$ . En particulier, si  $\beta = 2^{\nu} \geq \gamma$  pour  $\nu \geq \alpha$ , le cardinal de  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$  est majoré par  $\beta$ .

**DEMONSTRATION** On montrera la conclusion de la proposition dans une situation plus générale. On supposera simplement l'existence d'un isomorphisme  $X \simeq \text{Colim}_{\mathcal{J}} F$ , avec  $\mathcal{J}$  un ensemble ordonné  $\alpha$ -filtrant et  $F$  un foncteur  $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$  tel que  $F(i)$  est  $\alpha$ -accessible pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ .

On veut se ramener au cas où le cardinal de  $\mathcal{J}$  est majoré par  $\beta^{\alpha}$ . Il suffit pour cela de montrer qu'il existe un sous-ensemble  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$  de cardinal inférieur ou égal à  $\beta^{\alpha}$  qui soit encore  $\alpha$ -filtrant et tel que  $\text{Colim}_{j \in \mathcal{J}} F(j) \longrightarrow X$  admet une section. Considérons l'ensemble  $\mathcal{S}_{\beta}^{\alpha}(\mathcal{J})$  formé des parties  $\mathcal{J}$  de cardinal inférieur à  $\beta^{\alpha}$  et qui sont  $\alpha$ -filtrantes. Cet ensemble est ordonné par l'inclusion. En utilisant le lemme 4.2.15 ci-dessous, on voit qu'il est  $\beta^{\alpha}$ -filtrant et donc en particulier  $\beta$ -filtrant. On définit un foncteur :

$$G : \mathcal{S}_{\beta}^{\alpha}(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

qui à  $\mathcal{J}$  associe  $\text{Colim}_{\mathcal{J}} F$ . Les flèches évidentes  $\text{Colim}_{\mathcal{J}} F \longrightarrow \text{Colim}_{\mathcal{J}} F = X$  sont compatibles avec les inclusions. Ils fournissent donc un morphisme évident :

$$(4.7) \quad \text{Colim}_{\mathcal{S}_{\beta}^{\alpha}(\mathcal{J})} G \longrightarrow X$$

D'autre part, pour  $i \in \mathcal{J}$  le singleton  $\{i\}$  est un élément de  $\mathcal{S}_{\beta}^{\alpha}(\mathcal{J})$ . Ceci fournit des morphismes évidents :

$$F(i) \longrightarrow \text{Colim}_{\mathcal{S}_{\beta}^{\alpha}(\mathcal{J})} G$$

<sup>2</sup>En fait, nous aurions seulement besoin que  $\gamma$  majore le cardinal de chaque ensemble  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  pour  $A$  et  $B$  des objets  $\alpha$ -accessibles.

compatibles avec les morphismes de transitions  $F(i) \longrightarrow F(j)$  pour  $i \leq j$  et donc, par passage à la colimite, un morphisme

$$s : X \longrightarrow \text{Colim}_{\mathcal{S}_\beta^\alpha(\mathcal{J})} G$$

qui est une section à la flèche (4.7). Comme  $X$  est  $\beta$ -accessible, le morphisme  $s$  provient d'un morphisme  $X \longrightarrow G(\mathcal{J})$  pour  $\mathcal{J} \in \mathcal{S}_\beta^\alpha(\mathcal{J})$ . On voit alors que  $X$  est un retract de  $G(\mathcal{J}) = \text{Colim}_{j \in \mathcal{J}} F(j)$ .

On peut donc bien supposer que  $\mathcal{J}$  est de cardinal inférieur à  $\beta^\alpha$ . Si  $A$  est  $\alpha$ -accessible, on a  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, X) = \text{Colim}_{\mathcal{J}} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, F(i))$ . Le cardinal de cet ensemble est majoré par  $\gamma \cdot \beta^\alpha$ . C.Q.F.D

**LEMME 4.2.15** — *Soient  $\alpha$  et  $\delta$  des cardinaux tels que  $\alpha \geq 2$  et  $\delta$  infini. Soient  $\mathcal{J}$  un ensemble ordonné  $\alpha$ -filtrant et  $A \subset \mathcal{J}$  une partie de cardinal  $\delta$ . Il existe alors un sous-ensemble  $\alpha$ -filtrant  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$  contenant  $A$  et de cardinal inférieur à  $\delta^\alpha$ . En particulier, si  $\delta$  est de la forme  $\beta^\alpha$ , l'ensemble des parties  $\alpha$ -filtrantes de cardinal inférieur à  $\delta$  est  $\delta$ -filtrant pour la relation d'inclusion.*

**DEMONSTRATION** On note  $\mathcal{P}_\alpha(\mathcal{J})$  l'ensemble des parties de  $\mathcal{J}$  de cardinal inférieur à  $\alpha$ . On fixe une application  $M : \mathcal{P}_\alpha(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathcal{J}$  qui à une partie  $U \subset \mathcal{J}$  associe un majorant  $M(U) \in \mathcal{J}$  de  $U$ . On construit par induction transfinie des parties  $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_\nu \subset \dots$  avec :

- $A_0 = A$ ,
- $A_{\nu+1} = A_\nu \cup \{M(U); U \in \mathcal{P}_\alpha(A_\nu)\}$ ,
- $A_\nu = \cup_{\lambda \in \nu} A_\lambda$  si  $\nu$  est un ordinal limite.

Il est clair que  $\text{card}(A_{\nu+1}) \leq \text{card}(A_\nu)^\alpha$  étant donné que  $\text{card}(\mathcal{P}_\alpha(A)) \leq \text{card}(A)^\alpha$ . En utilisant que  $(\delta^\alpha)^\alpha = \delta^{\alpha \times \alpha} = \delta^\alpha$  (si  $\delta$  est infini et  $\alpha$  fini, c'est clair; c'est également vrai lorsque  $\alpha$  est infini), on montre par induction transfinie que  $\text{card}(A_\nu) \leq \delta^\alpha$  pour  $\text{card}(\nu) \leq \delta^\alpha$ . En particulier si  $\nu$  est le cardinal infini successeur de  $\alpha$ ,  $\mathcal{J} = A_\nu$  est de cardinal inférieur à  $\delta^\alpha$ . Il est immédiat de voir que  $\mathcal{J}$  est  $\alpha$ -filtrant. C.Q.F.D

On termine ce paragraphe en introduisant la classe de catégories  $\alpha$ -présentables :

**DEFINITION 4.2.16** — *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On dit que  $\mathcal{C}$  est  $\alpha$ -présentable si les conditions suivantes sont vérifiées avec  $\beta$  n'importe quel cardinal supérieur ou égal à  $\alpha$  :*

1. *Les petites limites et colimites sont représentables dans  $\mathcal{C}$ . Les colimites filtrantes commutent aux limites finies. De plus, les colimites  $\beta$ -filtrantes commutent aux limites suivant des catégories de cardinal inférieur ou égal à  $\beta$ .*
2. *Les monomorphismes de  $\mathcal{C}$  sont universels.*
3. *Tout objet de  $\mathcal{C}$  est accessible. Un sous-objet d'un objet  $\beta$ -accessible est encore  $\beta$ -accessible.*
4. *Tout objet de  $\mathcal{C}$  est la colimite  $\beta$ -filtrante de ses sous-objets  $\beta$ -accessibles.*
5. *La sous-catégorie  $\mathcal{C}_\beta$  formée des objets  $\beta$ -accessibles est essentiellement petite.*

Lorsque  $\mathcal{C}$  est  $\alpha$ -présentable avec  $\alpha$  fini et plus grand ou égal à 5, nous dirons que  $\mathcal{C}$  est finiment présentable. Nous dirons que  $\mathcal{C}$  est présentable, lorsqu'elle est présentable pour un certain cardinal  $\alpha$ .

**Remarque 4.2.17** — La première condition de la définition précédente, affirme que pour toute petite catégorie  $\mathcal{K}$  de cardinal inférieur ou égal à  $\beta$ , le foncteur :

$$\text{Lim}_{\mathcal{K}} : \underline{\text{HOM}}(\mathcal{K}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

est  $\beta$ -accessible. Nous avons démontré cette propriété pour la catégorie des ensembles dans le lemme 4.2.6. Notons toutefois, que dans une catégorie présentable, cette propriété est supposée vraie seulement pour  $\beta$  suffisamment grand.

**Remarque 4.2.18** — Il existe déjà dans la littérature une notion de catégories *localement présentables* (voir par exemple [AR94]). Il s'agit d'une notion beaucoup plus naturelle que celle que l'on vient d'introduire dans la définition 4.2.16. Notons simplement que notre classe des catégories  $\alpha$ -présentables est contenue dans celle des catégories localement  $\alpha$ -présentables. Nous n'avons pas cherché à savoir si cette inclusion est stricte.

Notons aussi que la définition 4.2.16 comporte des redondances. En effet, on peut montrer, en suivant les arguments de [AR94], que la propriété 4 implique la propriété 5 ainsi que la commutation des colimites  $\beta$ -filtrantes avec les limites suivant les catégories  $\mathcal{K}$  avec  $\text{card}(\text{Fl}(\mathcal{K})) \leq \beta$ .

**Exemple 4.2.19** — La catégorie des ensembles *Ens* est finiment présentable. En effet, les deux premières conditions sont claires. La troisième et cinquième condition découlent de l'exemple 4.2.8. La quatrième condition découle du fait que si  $\beta$  est infini (resp.  $\beta$  est fini)  $\text{Sub}_\beta(E)$  est équivalente à l'ensemble des parties de  $E$  de cardinal inférieur ou égal à  $\beta$  (resp. de cardinal fini). Cet ensemble est bien  $\beta$ -filtrant et sa réunion vaut l'ensemble  $E$ .

On présente deux constructions permettant d'obtenir des catégories présentables :

**PROPOSITION 4.2.20** — Soient  $\mathcal{J}$  une petite catégorie et  $\mathcal{C}$  une catégorie présentable. Alors  $\underline{\mathbf{HOM}}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$  est encore présentable.

**DEMONSTRATION** Pour tout  $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})$  on dispose d'un foncteur évident  $i^* : \underline{\mathbf{HOM}}(\mathcal{J}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$  qui à un foncteur  $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{D}$  associe l'objet  $F(i)$ . Les foncteurs  $i^*$  commutent aux colimites et aux limites et forment une famille conservative de foncteurs. D'où la première condition de 4.2.16.

Comme  $\mathcal{C}$  est cocomplète et complète, le foncteur  $i^*$  admet un adjoint à gauche  $i_{\#}$  ainsi qu'un adjoint à droite  $i_*$ . Rappelons que la construction du foncteur  $i_*$ , fait apparaître des limites suivant des sous-catégories de  $\mathcal{J}$ . On en déduit que  $i_*$  est  $\beta$ -accessible pour tout  $\beta$  majorant le cardinal<sup>3</sup> de  $\mathcal{J}$  et tel que  $\mathcal{C}$  est  $\beta$ -accessible.

Soit  $t : F \longrightarrow F'$  un morphisme de  $\underline{\mathbf{HOM}}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ . Si chaque  $t(i)$  est un monomorphisme,  $t$  est clairement un monomorphisme. Réciproquement, si  $t$  est un monomorphisme, en considérant des flèches de source  $i_{\#}A$  pour  $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})$  et  $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ , on voit que tous les  $t(i)$  sont des monomorphismes. En particulier, les monomorphismes de  $\underline{\mathbf{HOM}}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$  sont universels.

Soit  $\beta$  un cardinal majorant le cardinal de  $\mathcal{J}$  et tel que  $\mathcal{C}$  est  $\beta$ -présentable. On va montrer que  $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$  est  $\beta$ -accessible si et seulement si, tous les  $F(i)$  le sont. Ceci démontrera la troisième et dernière propriété de 4.2.16.

Étant donné un deuxième objet  $F'$  de  $\underline{\mathbf{HOM}}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ , on a une suite exacte :

$$\mathrm{hom}(F, F') \longrightarrow \left( \prod_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(F(i), F'(i)) \right) \rightrightarrows \left( \prod_{j \rightarrow k \in \mathbf{Fl}(\mathcal{J})} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(F(j), F'(k)) \right)$$

En utilisant que :

- les limites finies d'ensembles commutent aux colimites filtrantes,
- les produits indexés par  $\mathbf{Ob}(\mathcal{J})$  et  $\mathbf{Fl}(\mathcal{J})$  commutent aux colimites  $\beta$ -filtrantes d'ensembles,

on déduit que lorsque tous les  $F(i)$  sont  $\beta$ -accessibles, il en est de même de  $F$ .

Réciproquement, supposons que  $F$  est  $\beta$ -accessible. Pour montrer que  $F(i)$  est  $\beta$ -accessible, il suffit d'évaluer  $\mathrm{hom}(F, -)$  en des colimites  $\beta$ -filtrantes d'objets de la forme  $i_*(A)$  avec  $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})$  et  $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$  et d'utiliser le fait que  $i_*$  est  $\beta$ -accessible.

Pour terminer, il nous reste à établir la quatrième propriété. Étant donné un objet  $F$  de  $\underline{\mathbf{HOM}}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ , il suffira de montrer que le foncteur (qui est une inclusion) :

$$(4.8) \quad \mathbf{Sub}_{\beta}(F) \longrightarrow \prod_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})} \mathbf{Sub}_{\beta}(F(i))$$

est cofinal<sup>4</sup>. On se donne une famille de sous-objets  $(A_i \in \mathbf{Sub}_{\beta}(F(i)))_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})}$ . On va construire par récurrence une suite croissante de familles de sous-objets  $(A_i^n \in \mathbf{Sub}_{\beta}(F(i)))_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour  $n = 0$ , on prend  $A_i^0 = A_i$ . Supposons la famille construite au rang  $n$ . Pour chaque  $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})$ , on considère la flèche composée :

$$(4.9) \quad \prod_{j \rightarrow i} A_j^n \longrightarrow \prod_{j \rightarrow i} F(j) \longrightarrow F(i)$$

Comme les  $A_j^n$  sont  $\beta$ -accessibles, il en est de même de  $\prod_{j \rightarrow i} A_j^n$ . Puisque  $F(j)$  est une colimite  $\beta$ -filtrante de ses sous-objets  $\beta$ -accessibles, on peut trouver un sous-objet  $\beta$ -accessible qui factorise la composée (4.9). On prend pour  $A_i^{n+1}$  un tel objet.

On pose  $A_i^{\infty} = \mathrm{Colim}_n A_i^n$ . Par construction, si  $j \rightarrow i \in \mathbf{Fl}(\mathcal{J})$  la flèche composée  $A_j^{\infty} \longrightarrow F(j) \longrightarrow F(i)$  se factorise (uniquement) par  $A_i^{\infty}$ . On déduit donc des flèches  $A_j^{\infty} \longrightarrow A_i^{\infty}$ . On vérifie immédiatement qu'on a construit un foncteur  $A^{\infty} : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$  qui de plus est un sous-objet de  $F$  et dont l'image par (4.8) majore la famille  $(A_i)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})}$ . C.Q.F.D

**PROPOSITION 4.2.21** — Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\alpha$ -présentable et  $\mathcal{D}$  une catégorie complète et cocomplète. On suppose donnée une adjonction  $(F, G) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  telle que :

- $G$  est pleinement fidèle et  $\alpha$ -accessible,
- $F$  commute aux limites finies,

<sup>3</sup>Si  $\alpha$  est un cardinal infini majorant celui de  $\mathbf{Fl}(\mathcal{J})$ , il majore également les cardinaux des catégories  $\mathcal{J}/i$ . En effet, on dispose d'une application injective  $\mathbf{Fl}(\mathcal{J}/i) \longrightarrow \mathbf{Fl}(\mathcal{J})^3$  qui associe à un triangle commutatif ses arêtes.

<sup>4</sup>On aurait pu également appliquer le lemme 4.2.4 au foncteur  $\mathcal{J}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{OrdEns}$  qui à  $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})$  associe  $\mathbf{Sub}_{\beta}(F(i))$  et à  $i \rightarrow j \in \mathbf{Fl}(\mathcal{J})$  le foncteur  $- \times_{F(j)} F(i) : \mathbf{Sub}_{\beta}(F(j)) \longrightarrow \mathbf{Sub}_{\beta}(F(i))$ .

– le foncteur  $G \circ F$  préserve les objets  $\beta$ -accessibles pour  $\beta$  supérieur ou égal à  $\alpha$ .  
 Alors  $\mathcal{D}$  est  $\alpha$ -présentable.

DEMONSTRATION Comme  $G$  est pleinement fidèle, la counité de l'adjonction  $F \circ G \longrightarrow \text{id}$  est inversible. Ainsi, les colimites dans  $\mathcal{D}$  peuvent se calculer dans  $\mathcal{C}$  via la formule suivante. Soit un foncteur  $B : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{D}$ . On a :

$$(4.10) \quad \text{Colim}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} B(i) \simeq F(\text{Colim}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} G(B(i)))$$

Il est facile de déduire de cette formule et de la commutation de  $F$  aux limites finies que les colimites filtrantes dans  $\mathcal{D}$  commutent aux limites finies. D'autre part, en utilisant que  $G$  est  $\beta$ -accessible on montre que les colimites  $\beta$ -filtrantes dans  $\mathcal{D}$  commutent aux limites suivant des catégories de cardinal inférieur ou égal à  $\beta$ . Ceci démontre donc la première propriété de la définition 4.2.16.

Comme  $G$  est un adjoint à droite, il préserve les monomorphismes. Puisque  $F$  commute aux limites finies, il préserve également les monomorphismes. Ainsi, une flèche  $u$  de  $\mathcal{D}$  est un monomorphisme si et seulement si  $G(u)$  est un monomorphisme. On déduit alors (en utilisant la formule (4.10)) que les monomorphismes sont universels dans  $\mathcal{D}$ .

Montrons qu'un objet  $B$  de  $\mathcal{D}$  est  $\beta$ -accessible si et seulement si  $G(B)$  est  $\beta$ -accessible.

La condition est nécessaire. En effet,  $G(B)$  est la colimite  $\beta$ -filtrante  $\text{Colim}_{A \in \mathbf{Sub}_\beta(G(B))} A$ . Comme  $G \circ F$  est  $\beta$ -accessible, on voit que  $G(B)$  est également la colimite  $\beta$ -filtrante de  $\text{Colim}_{A \in \mathbf{Sub}_\beta(G(B))} G(F(A))$ . Il vient que  $B = FG(B)$  est la colimite  $\beta$ -filtrante  $\text{Colim}_{A \in \mathbf{Sub}_\beta(G(B))} F(A)$ . Étant donné que l'objet  $B$  est  $\beta$ -accessible, et que les  $F(A)$  sont des sous-objets de  $B$ , il existe  $A \in \mathbf{Sub}_\beta(G(B))$  tel que  $F(A) \simeq FG(B) = B$ . Il vient que  $G(B) = GF(A)$  est  $\beta$ -accessible.

La condition est suffisante. En effet, soit  $A(-) : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{D}$  un foncteur avec  $\mathcal{J}$  une petite catégorie  $\beta$ -filtrante. On a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathcal{D}}(B, \text{Colim}_{\mathcal{J}} A(-)) &\simeq \text{hom}_{\mathcal{C}}(G(B), G(\text{Colim}_{\mathcal{J}} A(-))) \simeq \text{hom}_{\mathcal{C}}(G(B), \text{Colim}_{\mathcal{J}} G(A(-))) \\ &\simeq \text{Colim}_{\mathcal{J}} \text{hom}_{\mathcal{C}}(G(B), G(A(-))) \simeq \text{Colim}_{\mathcal{J}} \text{hom}_{\mathcal{D}}(B, A(-)) \end{aligned}$$

En particulier, tout objet de  $\mathcal{D}$  est accessible, et la sous-catégorie des objets  $\beta$ -accessibles est essentiellement petite.

Il reste à vérifier la quatrième propriété de la définition 4.2.16. Soit  $B$  un objet de  $\mathcal{D}$ . La catégorie  $\mathbf{Sub}_\beta(B)$  est essentiellement petite. Pour montrer qu'elle est  $\beta$ -filtrante, il suffit de montrer que le foncteur :

$$G : \mathbf{Sub}_\beta(B) \longrightarrow \mathbf{Sub}_\beta(G(B))$$

est cofinal. Mais si  $A$  est un sous-objet de  $G(B)$ ,  $F(A)$  est un sous-objet de  $FG(B) = B$ , dont l'image par  $G$  majore  $A$  via le morphisme d'unité  $A \longrightarrow G(F(A))$ .

Pour montrer que  $B$  est isomorphe à  $\text{Colim}_{A \in \mathbf{Sub}_\beta(B)} A$ , on peut le faire après application de  $G$ . Il suffit donc de prouver (puisque  $G$  est  $\beta$ -accessible) que la flèche évidente :

$$(\text{Colim}_{A \in \mathbf{Sub}_\beta(B)} G(A)) \longrightarrow G(B)$$

est inversible. Mais on vient de voir que le foncteur  $G : \mathbf{Sub}_\beta(B) \longrightarrow \mathbf{Sub}_\beta(G(B))$  est filtrant. Le résultat est maintenant clair. C.Q.F.D

**Remarque 4.2.22** — La proposition 4.2.21 sera appliquée dans le cas où  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont respectivement la catégorie des préfaisceaux et la catégorie des faisceaux sur un site de Grothendieck. Le foncteur  $F$  est alors le foncteur de faisceautisation et  $G$  l'inclusion évidente.

### 4.2.2 L'argument du petit objet et complexes cellulaires

**DEFINITION 4.2.23** — Soit  $\lambda$  un ordinal. On appelle  $\lambda$ -suite un foncteur  $A : \lambda \longrightarrow \mathcal{C}$  que l'on schématise par :

$$A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_\nu \longrightarrow A_{\nu+1} \longrightarrow \dots$$

et qui commute aux colimites (lorsqu'elles existent), i.e., pour tout  $\nu \in \lambda$  un ordinal limite, on a  $A_\nu \simeq \text{Colim}_{\mu \in \nu} A_\mu$ . La flèche  $A_0 \longrightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda} A_\nu$  est appelée la composition transfinie de la  $\lambda$ -suite  $A$ .

**DEFINITION 4.2.24** — Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie admettant les petites colimites et  $F \subset \text{Fl}(\mathcal{C})$  une classe de flèches. On note  $\text{Cell}(F) \subset \text{Fl}(\mathcal{C})$  la plus petite classe contenant  $F$  et stable par pushout et composition transfinie.



**Remarque 4.2.25** — Toute flèche  $f$  de  $\text{Cell}(F)$  peut s'écrire comme la composée transfinie d'une  $\lambda$ -suite :

$$A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_\nu \longrightarrow A_{\nu+1} \longrightarrow \dots$$

telle que pour tout  $\nu$ , la flèche  $A_\nu \longrightarrow A_{\nu+1}$  est un push-out d'un élément de  $F$ . En effet, on vérifie facilement que la famille de telles flèches est stable par push-out et composition transfinie.

Le résultat ci-dessous est connu sous le nom de l'argument du petit objet. Le lecteur pourra également consulter [Hir03] et [Hov99].

**PROPOSITION 4.2.26** — Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie admettant les petites colimites. Soit  $F \subset \text{Fl}(\mathcal{C})$  un ensemble de flèches de sources et de buts  $\alpha$ -accessibles pour un cardinal  $\alpha$  fixé. Il existe alors un foncteur

$$\Phi_{F,\alpha} : \underline{\text{HOM}}(\mathbf{1}, \mathcal{C}) \longrightarrow \underline{\text{HOM}}(\mathbf{2}, \mathcal{C})$$

qui à une flèche  $f : U \longrightarrow V$  associe une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} & & f \\ & \curvearrowright & \\ U & \longrightarrow & \Phi_{F,\alpha}(f) \longrightarrow V \end{array}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

1. La flèche  $U \longrightarrow \Phi_{F,\alpha}(f)$  est dans  $\text{Cell}(F)$ .
2. La flèche  $\Phi_{F,\alpha}(f) \longrightarrow V$  est dans  $\text{RLP}(F)$ .
3. Le foncteur  $\Phi_{F,\alpha}$  est  $\alpha$ -accessible.
4. Soit  $\beta$  un cardinal infini vérifiant les deux conditions :
  - (a)  $\beta$  est strictement supérieur à  $\alpha$  et supérieur ou égal au cardinal de l'ensemble  $F$ ,
  - (b) pour tout objet  $\alpha$ -accessible  $A$  et tout objet  $\beta$ -accessible  $X$  de  $\mathcal{C}$ , l'ensemble  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$  est de cardinal inférieur ou égal à  $\beta$ .

Alors, l'objet  $\Phi_{F,\alpha}(f)$  est  $\beta$ -accessible lorsque  $U$  et  $V$  sont  $\beta$ -accessibles.

**DEMONSTRATION** Pour une flèche  $f = f_0 : U \longrightarrow V$  de  $\mathcal{C}$ , on note  $F/f$  l'ensemble des carrés commutatifs  $Q(a, i, j)$  :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & U \\ a \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & V \end{array}$$

avec  $a \in F$ . On a alors un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \left( \coprod_{Q(a,i,j) \in F/f} A \right) & \xrightarrow{\cup i} & U \\ \cup a \downarrow & & \downarrow f \\ \left( \coprod_{Q(a,i,j) \in F/f} B \right) & \xrightarrow{\cup j} & V \end{array}$$

On forme le push-out  $\tilde{\Phi}_{F,1}(f)$  du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \left( \coprod_{Q(a,i,j) \in F/f} A \right) & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \\ \left( \coprod_{Q(a,i,j) \in F/f} B \right) & & \end{array}$$

pour obtenir une factorisation de  $f$  :

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 U & \xrightarrow{\quad} & V \\
 & \tilde{\Phi}_{F,1}(f) \xrightarrow{f_1} & \\
 \end{array}$$

Cette factorisation est fonctorielle en  $f$  dans le sens évident. On définit alors par induction transfinie une suite fonctorielle en  $f$  :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & f_2 & & \\
 & & & & \curvearrowright & & \\
 U = \tilde{\Phi}_{F,0}(f) & \longrightarrow & \tilde{\Phi}_{F,1}(f) & \longrightarrow & \tilde{\Phi}_{F,2}(f) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \xrightarrow{f_\nu} \dots \longrightarrow V \\
 & & & & \curvearrowleft & & \\
 & & & & f_\nu & & 
 \end{array}$$

en posant :

- si  $\nu = \mu + 1$  alors  $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) = \tilde{\Phi}_{F,1}(f_\mu)$  et  $f_\nu$  le morphisme évident  $\tilde{\Phi}_{F,1}(f_\mu) \longrightarrow V$ ,
- si  $\nu$  est un ordinal limite, on pose  $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) = \text{Colim}_{\mu \in \nu} \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f)$  et  $f_\nu$  la limite des  $(f_\mu)_{\mu \in \nu}$ .

On définit alors  $\tilde{\Phi}_{F,\alpha} = \tilde{\Phi}_{F,\lambda}$  avec  $\lambda$  le cardinal infini successeur de  $\alpha$ . La première propriété est claire.

Soit  $a : A \longrightarrow B$  une flèche de  $F$ . On vérifie immédiatement, en utilisant que  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$  commute aux colimites indexées par  $\lambda$ , que  $\tilde{\Phi}_{F,\alpha}(f) \longrightarrow V$  admet la propriété de relèvement à droite par rapport à  $a$ .

Le foncteur  $\text{HOM}(\mathbf{1}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{E}ns$  qui à  $f$  associe l'ensemble  $F/f$  est clairement  $\alpha$ -accessible puisque les sources et buts des éléments de  $F$  sont  $\alpha$ -accessibles. Il vient immédiatement que le foncteur  $\tilde{\Phi}_{F,1}$  est  $\alpha$ -accessible. Par induction transfinie, on déduit que  $\tilde{\Phi}_{F,\nu}$  est également  $\alpha$ -accessible pour tout ordinal  $\nu$  (et donc en particulier pour  $\lambda$ ).

Pour la dernière propriété, il suffit de remarquer que si  $U$  et  $V$  sont  $\beta$ -accessibles, l'ensemble  $F/f$  est de cardinal inférieur à  $\beta$ . Par le corollaire 4.2.7, on voit que  $\tilde{\Phi}_{F,1}(f)$  est encore  $\beta$ -accessible. Par le même corollaire, on déduit par induction transfinie que pour tout ordinal  $\nu$  dont le cardinal est inférieur ou égal à  $\beta$ , l'objet  $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f)$  est  $\beta$ -accessible. C'est en particulier le cas pour le cardinal infini successeur de  $\alpha$  puisque  $\beta$  est infini et  $\beta > \alpha$ . La proposition est démontrée. C.Q.F.D

La définition suivante est tirée de [Hir03] :

**DEFINITION 4.2.27** — Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie admettant les petites colimites,  $F \subset \text{Fl}(\mathcal{C})$  une classe de flèches et  $\lambda$  un ordinal.

1- Un  $\lambda$ -complexe  $F$ -cellulaire  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}$  est la donnée :

- d'une  $\lambda$ -suite :  $U_0 \longrightarrow U_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow U_\nu \longrightarrow U_{\nu+1} \longrightarrow \dots$  à valeurs dans  $\mathcal{C}$ ,
- pour tout  $\nu \in \lambda$ , d'un ensemble  $E_\nu$  (appelé l'ensemble des cellules) tel que  $E_\nu$  est vide si  $\nu + 1 = \lambda$ ,
- pour tout  $\nu \in \lambda$  et  $e \in E_\nu$ , d'un carré commutatif de  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{array}{ccc}
 A_e & \xrightarrow{i_\nu(e)} & U_\nu \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B_e & \xrightarrow{j_\nu(e)} & U_{\nu+1}
 \end{array}$$

avec  $A_e \longrightarrow B_e$  dans  $F$  et tel que le carré :

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{e \in E_\nu} A_e & \xrightarrow{\cup i_\nu(e)} & U_\nu \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \coprod_{e \in E_\nu} B_e & \xrightarrow{\cup j_\nu(e)} & U_{\nu+1}
 \end{array}$$

est cocartésien (où l'on a posé  $U_{\nu+1} = U_\nu$  si  $\nu + 1 = \lambda$ ).

2- Un morphisme  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda} \longrightarrow (U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda}$  de  $\lambda$ -complexes  $F$ -cellulaires est la donnée :

- d'un morphisme de  $\lambda$ -suites  $(U_\nu)_{\nu \in \lambda} \longrightarrow (U'_\nu)_{\nu \in \lambda}$ ,

– pour tout  $\nu \in \lambda$ , d'une application  $m_\nu : E_\nu \longrightarrow E'_\nu$  telle que les deux carrés suivants :

$$\begin{array}{ccc} E_\nu & \xrightarrow{i_\nu} & \prod_{A \rightarrow B \in F} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, U_\nu) \\ m_\nu \downarrow & & \downarrow \\ E'_\nu & \xrightarrow{i'_\nu} & \prod_{A \rightarrow B \in F} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, U'_\nu) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E_\nu & \xrightarrow{j_\nu} & \prod_{A \rightarrow B \in F} \text{hom}_{\mathcal{C}}(B, U_{\nu+1}) \\ m_\nu \downarrow & & \downarrow \\ E'_\nu & \xrightarrow{j'_\nu} & \prod_{A \rightarrow B \in F} \text{hom}_{\mathcal{C}}(B, U'_{\nu+1}) \end{array}$$

sont commutatifs.

Nous dirons que le morphisme  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda} \longrightarrow (U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda}$  est une inclusion de cellules lorsque les applications  $m_\nu$  sont injectives.

On notera  $\mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})$  la catégorie dont les objets sont les  $\lambda$ -complexes  $F$ -cellulaires et les morphismes définis comme dans 4.2.27. On a un foncteur évident de composition  $Cp : \mathbf{CpCell}_{F,\alpha}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{HOM}(\mathbf{1}, \mathcal{C})$  qui à un  $\lambda$ -complexe  $F$ -cellulaire  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}$  associe la flèche  $U_0 \longrightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda} U_\nu$ , i.e., la composée transfinie de la  $\lambda$ -suite sous-jacente.

Étant donnée une flèche  $u : U \longrightarrow V$  de  $\mathcal{C}$ , nous appellerons *structure  $F$ -cellulaire* sur  $u$ , un antécédent à isomorphisme près du foncteur  $Cp$  (pour un certain ordinal  $\lambda$ ). On a le résultat suivant qui découle immédiatement de la preuve de la proposition 4.2.26 :

**COROLLAIRE 4.2.28** — On garde les hypothèses et les notations de la proposition 4.2.26 (et de sa démonstration). On note  $\lambda$  le cardinal infini successeur de  $\alpha$ . Il existe un foncteur :

$$(\tilde{\Phi}_{F,\nu})_{\nu \in \lambda} : \mathbf{HOM}(\mathbf{1}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})$$

qui à une flèche  $f : U \longrightarrow V$  de  $\mathcal{C}$  associe un  $\lambda$ -complexe  $F$ -cellulaire  $(\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f), E_\nu(f), i_{f,\nu}, j_{f,\nu})_{\nu \in \lambda}$ . De plus, la composée de la  $\lambda$ -suite  $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f)$  est la flèche  $U \longrightarrow \Phi_{F,\alpha}(f)$ . En d'autres termes,  $(\tilde{\Phi}_{F,\nu})_{\nu \in \lambda}$  est une structure  $F$ -cellulaire sur la flèche  $U \longrightarrow \Phi_{F,\alpha}(f)$ .

DEMONSTRATION C'est clair. Notons simplement que les ensembles de cellules  $E_\nu$  sont les  $F/f_\nu$ . Pour  $Q(a, i, j) \in F/f_\nu$ , la flèche  $i_{f,\nu}(Q(a, i, j))$  est donnée par  $i$ . On fera attention par contre que  $j_{f,\nu}(Q(a, i, j))$  est différente de  $j$ . En effet, ces deux flèches ont des buts différents en général. C.Q.F.D

Vu le résultat précédent, nous sommes amenés à étudier la catégorie  $\mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})$ . On regroupe quelques résultats dans le lemme suivant :

**LEMME 4.2.29** — Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie admettant les petites colimites et  $F \subset \text{Fl}(\mathcal{C})$  une classe de flèches.

1- La catégorie  $\mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})$  admet les petites colimites. De plus, le foncteur de composition

$$Cp : \mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{HOM}(\mathbf{1}, \mathcal{C})$$

y commute.

2- Soit  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu) \longrightarrow (U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)$  une inclusion de cellules. Alors, la flèche évidente :

$$U'_0 \prod_{U_0} \text{Colim}_{\nu \in \lambda} U_\nu \longrightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda} U'_\nu$$

est dans  $\text{Cell}(F)$ . De plus, elle est naturellement la composée d'un  $\lambda$ -complexe  $F$ -cellulaire dont les ensembles de cellules sont donnés par  $E'_\nu \setminus E_\nu$ .

DEMONSTRATION Soient  $\mathcal{K}$  une petite catégorie et  $\mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})$  un foncteur qui à  $k \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  associe un  $\lambda$ -complexe  $F$ -cellulaire  $(U_\nu(k), E_\nu(k), i_{k,\nu}, j_{k,\nu})$ .

On pose  $U_\nu = \text{Colim}_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})} U_\nu(k)$  et  $E_\nu = \text{Colim}_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})} E_\nu(k)$ . On définit  $i_\nu$  et  $j_\nu$  comme étant les limites respectives des applications :

$$\begin{array}{ccc} E_\nu(k) & \xrightarrow{i_{k,\nu}} & \prod_{A \rightarrow B} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, U_\nu(k)) \longrightarrow \prod_{A \rightarrow B} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, U_\nu) \\ E_\nu(k) & \xrightarrow{j_{k,\nu}} & \prod_{A \rightarrow B} \text{hom}_{\mathcal{C}}(B, U_{\nu+1}(k)) \longrightarrow \prod_{A \rightarrow B} \text{hom}_{\mathcal{C}}(B, U_{\nu+1}) \end{array}$$

Pour montrer que  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)$  est bien un  $\lambda$ -complexe  $F$ -cellulaire il suffit de remarquer que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{e \in E_\nu} A_e & \xrightarrow{\cup i_\nu(e)} & U_\nu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{e \in E_\nu} B_e & \xrightarrow{\cup j_\nu(e)} & U_{\nu+1} \end{array}$$

est la colimite des carrés cocartésiens :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{e \in E_\nu(k)} A_e & \xrightarrow{\cup i_{k,\nu}(e)} & U_\nu(k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{e \in E_\nu(k)} B_e & \xrightarrow{\cup j_{k,\nu}(e)} & U_{\nu+1}(k) \end{array}$$

On vérifie facilement que  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)$  est bien la colimite du foncteur  $\mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})$ . La commutation du foncteur  $Cp$  avec les colimites est claire par construction.

Passons à la seconde partie du lemme. On définit un  $\lambda$ -complexe  $F$ -cellulaire  $(V_\nu, E'_\nu \setminus E_\nu, i''_\nu, j''_\nu)$  de la manière suivante. On pose  $V_\nu = U'_\nu \coprod_{U_\nu} \text{Colim}_{\mu \in \lambda} U_\mu$ . On obtient ainsi une  $\lambda$ -suite  $(V_\nu)_{\nu \in \lambda}$  dont la composée est

$$U'_0 \coprod_{U_0} \text{Colim}_{\nu \in \lambda} U_\nu \longrightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda} U'_\nu$$

On va munir cette flèche d'une structure de  $\lambda$ -complexes  $F$ -cellulaires dont la  $\lambda$ -suite sous-jacente est  $(V_\nu)_{\nu \in \lambda}$ . Pour  $\nu \in \lambda$  et  $e' \in E'_\nu$  on définit  $i''_\nu(e')$  et  $j''_\nu(e')$  par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & i''_\nu(e') & & \\ & & \curvearrowright & & \\ A_{e'} & \xrightarrow{i''_\nu(e')} & U'_\nu & \longrightarrow & V_\nu \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_{e'} & \xrightarrow{j''_\nu(e')} & U'_{\nu+1} & \longrightarrow & V_{\nu+1} \\ & & \curvearrowleft & & \\ & & j''_\nu(e') & & \end{array}$$

On va montrer que les restrictions de  $i''_\nu$  et  $j''_\nu$  à  $E'_\nu \setminus E_\nu$  conviennent dans le sens que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{e' \in E'_\nu \setminus E_\nu} A_{e'} & \longrightarrow & U'_\nu \coprod_{U_\nu} \text{Colim}_{\mu \in \lambda} U_\mu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{e' \in E'_\nu \setminus E_\nu} B_{e'} & \longrightarrow & U'_{\nu+1} \coprod_{U_{\nu+1}} \text{Colim}_{\mu \in \lambda} U_\mu \end{array}$$

est cocartésien. En remarquant que la flèche verticale de droite est le push-out de  $U'_\nu \coprod_{U_\nu} U_{\nu+1} \longrightarrow U'_{\nu+1}$  suivant  $U'_\nu \coprod_{U_\nu} U_{\nu+1} \longrightarrow U'_\nu \coprod_{U_\nu} \text{Colim}_{\mu \in \lambda} U_\mu$ , on se ramène à montrer que le carré suivant est cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{e' \in E'_\nu \setminus E_\nu} A_{e'} & \longrightarrow & U'_\nu \coprod_{U_\nu} U_{\nu+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{e' \in E'_\nu \setminus E_\nu} B_{e'} & \longrightarrow & U'_{\nu+1} \end{array}$$

Ceci est découle immédiatement du fait que les carrés ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{e' \in E'_\nu} A_{e'} & \longrightarrow & U'_\nu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{e' \in E'_\nu} B_{e'} & \longrightarrow & U'_{\nu+1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \coprod_{e \in E_\nu} A_e & \longrightarrow & U_\nu & \longrightarrow & U'_\nu \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{e \in E_\nu} B_e & \longrightarrow & U_{\nu+1} & \longrightarrow & U'_\nu \coprod_{U_\nu} U_{\nu+1} \end{array}$$

sont cocartésiens.

C.Q.F.D

On obtient le complément suivant à la proposition 4.2.26.

**PROPOSITION 4.2.30** — *On garde les hypothèses et les notations de la proposition 4.2.26 et de son corollaire 4.2.28. On suppose en plus que les flèches de  $\text{Cell}(F)$  sont des monomorphismes. Supposons donné un carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ e \downarrow & & \downarrow e' \\ U' & \xrightarrow{f'} & V' \end{array}$$

avec  $e$  et  $e'$  des monomorphismes universels. Alors, le morphisme de  $\lambda$ -complexes  $F$ -cellulaires

$$(\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f), E_\nu(f), i_{f,\nu}, j_{f,\nu}) \longrightarrow (\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f'), E_\nu(f'), i_{f',\nu}, j_{f',\nu})$$

est une inclusion de cellules. En particulier, la flèche  $U' \coprod_U \tilde{\Phi}_{F,\alpha}(f) \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\alpha}(f')$  est dans  $\text{Cell}(F)$ .

**DEMONSTRATION** On garde les notations de la preuve de la proposition 4.2.26. Il s'agit de montrer que  $F/f_\nu \rightarrow F/f'_\nu$  est injective. Ceci serait le cas si les flèches  $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \rightarrow \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f')$  étaient des monomorphismes. Nous montrerons par récurrence transfinie que ces flèches sont des monomorphismes universels. Le résultat est vrai pour  $\nu = 0$  puisque la flèche en question n'est autre que la flèche  $e$ . Soit  $\nu \in \lambda$  et supposons que  $\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f) \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f')$  est un monomorphisme universel pour tout  $\mu \in \nu$ .

On traite d'abord le cas  $\nu = \mu + 1$ . Rappelons que  $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f)$  et  $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f')$  sont définis comme étant les push-out respectifs de :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{Q(a,i,j) \in F/f_\mu} A & \xrightarrow{\cup i} & \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f) \\ \cup a \downarrow & & \downarrow \cup a \\ \coprod_{Q(a,i,j) \in F/f_\mu} B & & \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f') \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \coprod_{Q(a,i,j) \in F/f'_\mu} A & \xrightarrow{\cup i} & \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f') \\ \cup a \downarrow & & \downarrow \cup a \\ \coprod_{Q(a,i,j) \in F/f'_\mu} B & & \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f') \end{array}$$

Il vient que  $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \coprod_{\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f)} \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f') \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f')$  est un push-out de  $\coprod_{Q(a,i,j) \in (F/f'_\mu) \setminus (F/f_\mu)} a$ . C'est donc un monomorphisme universel puisqu'il appartient à  $\text{Cell}(F)$ . Pour conclure, on factorise  $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f')$  :

$$\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \coprod_{\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f)} \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f') \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f')$$

et on utilise que la flèche de gauche est un push-out du monomorphisme universel  $\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f) \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f')$ .

Supposons maintenant que  $\nu$  est un ordinal limite. On dispose d'un morphisme de  $\nu$ -complexes  $F$ -cellulaires :  $(\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f), E_\mu(f), i_{f,\mu}, j_{f,\mu})_{\mu \in \nu} \longrightarrow (\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f'), E_\mu(f'), i_{f',\mu}, j_{f',\mu})_{\mu \in \nu}$  qui est une inclusion de cellules par l'hypothèse de récurrence. Il vient par la seconde partie du lemme 4.2.29 que le morphisme  $U' \coprod_U \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f')$  est dans  $\text{Cell}(F)$ . C'est donc un monomorphisme universel. D'autre part,  $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \longrightarrow U' \coprod_U \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f)$  est un push-out de  $e$ . La proposition est démontrée.

C.Q.F.D

**DEFINITION 4.2.31** — *On suppose que  $\mathcal{C}$  admet les petites colimites et que les flèches de  $\text{Cell}(F)$  sont des monomorphismes. Soit  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}$  un  $\lambda$ -complexe  $F$ -cellulaire.*

On note  $\mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C}) / (U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}$  dont les objets sont les inclusions de complexes  $(U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda} \longrightarrow (U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}$  avec  $U'_0 \longrightarrow U_0$  un monomorphisme universel. Les objets de  $\mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$  seront appelés les sous-complexes de  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}$ .

**LEMME 4.2.32** — *On garde les hypothèses de la définition 4.2.31. Soit  $(U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda} \longrightarrow (U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}$  un sous-complexe de  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}$ . Alors, pour tout  $\nu \in \lambda$ , la flèche  $U'_\nu \longrightarrow U_\nu$  est un monomorphisme universel. Il en est de même de  $\text{Colim}_{\nu \in \lambda} U'_\nu \longrightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda} U_\nu$ .*

En particulier, la catégorie  $\mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$  est directe et la composition transfinie des  $\lambda$ -suites sous-jacentes induit un foncteur :

$$(4.11) \quad C_p : \mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}) \longrightarrow \mathbf{Sub}(U_0 \rightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda}(U_\nu))$$

DEMONSTRATION Soit  $(U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda} \longrightarrow (U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}$  une inclusion de cellules. Par le lemme 4.2.29, on voit que pour tout  $\nu + 1 \in \lambda$  la flèche  $U'_{\nu+1} \coprod_{U'_\nu} U_\nu \longrightarrow U_{\nu+1}$  est dans  $\text{Cell}(F)$ . C'est donc un monomorphisme universel.

On peut donc raisonner comme dans la preuve de la proposition 4.2.30 pour prouver que les flèches  $U'_\nu \longrightarrow U_\nu$  et  $\text{Colim}_{\nu \in \lambda} U'_\nu \longrightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda} U_\nu$  sont des monomorphismes universels. C.Q.F.D

Nous allons construire un adjoint à droite au foncteur (4.11). En plus des hypothèses de 4.2.31, nous supposons pour simplifier que tous les monomorphismes de  $\mathcal{C}$  sont universels.

Soit  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}$  un  $\lambda$ -complexe  $F$ -cellulaire. On note  $u : U_0 = U \longrightarrow V = \text{Colim}_{\nu \in \lambda} U_\nu$  sa composition. On se donne une sous-flèche  $u' : U' \longrightarrow V'$  de  $u$ .

On définit un  $\lambda$ -complexe  $F$ -cellulaire  $(U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda}$  par récurrence transfinie sur  $\nu \in \lambda$ . On pose  $U'_0 = U'$ . Soit  $E'_0 \subset E_0$  le sous-ensemble des  $e \in E_0$  tels que la flèche  $i_0(e) : A_e \longrightarrow U_0$  se factorise par  $U'_0$  et la composée  $B_e \longrightarrow U_1 \longrightarrow V$  se factorise par  $V'$ . On définit  $i'_0(e) : A_e \longrightarrow U'_0$  comme étant l'unique flèche qui factorise  $i_0(e)$ .

Soit  $0 \neq \nu \in \lambda$  et supposons que les données  $U'_\mu, E'_\mu$  et  $i'_\mu$  sont définies pour  $\mu \in \nu$ . La flèche  $j'_\mu$  est supposée définie dès que  $\mu + 1 \in \nu$ . On supposera aussi que  $(U'_\mu, E'_\mu, i'_\mu, j'_\mu)_{\mu \in \nu} \longrightarrow (U_\mu, E_\mu, i_\mu, j_\mu)_{\mu \in \nu}$  est une inclusion de cellules.

Si  $\nu$  est un ordinal limite, on posera  $U'_\nu = \text{Colim}_{\mu \in \nu} U'_\mu$ . On sait par le lemme 4.2.32 que  $U'_\nu$  est un sous-objet de  $U_\nu$ . On prend pour  $E'_\nu$  l'ensemble des  $e \in E_\nu$  tel que  $A_e \longrightarrow U_\nu$  se factorise par  $U'_\nu$  et la composée  $B_e \longrightarrow U_{\nu+1} \longrightarrow V$  par  $V'$ . On prendra  $i'_\nu(e)$  l'unique flèche factorisant  $i_\nu(e)$ .

Si  $\nu = \mu + 1$ , on définit  $U'_\nu$  et  $j'_\mu$  par la condition que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{e \in E'_\mu} A_e & \xrightarrow{\cup i'_\mu(e)} & U'_\mu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{e \in E'_\nu} B_e & \xrightarrow{\cup j'_\nu(e)} & U'_\nu \end{array}$$

est un push-out. On vérifie facilement que  $U'_\nu$  est un sous-objet de  $V$ , majoré par  $U_1$  et  $V'$ . On définit alors l'ensemble  $E'_\nu$  et les flèches  $i'_\nu(e)$  de la même manière que dans le cas où  $\nu$  était limite.

**PROPOSITION 4.2.33** — *La construction ci-dessus, définit un foncteur :*

$$M : \mathbf{Sub}(u) \longrightarrow \mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$$

qui est naturellement l'adjoint à droite du foncteur (4.11). Si de plus, les sources et buts des flèches de  $F$  sont  $\alpha$ -accessibles, le foncteur  $M$  est  $\alpha$ -accessible.

DEMONSTRATION Il est clair par construction que le  $\lambda$ -complexe  $F$ -cellulaire  $(U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda}$  majore tous les objets de  $\mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$  dont la composée est majorée par  $u'$ . D'où la première assertion. La seconde découle immédiatement de la construction. C.Q.F.D

**DEFINITION 4.2.34** — *On garde les hypothèses et notations ci-dessus. Une sous-flèche  $u' : U' \longrightarrow V'$  de  $u$  est dite cellulaire si le morphisme de cunité  $Cp \circ M(u) \longrightarrow u$  est inversible. Ceci revient à dire que :*

$$\text{Colim}_{\nu \in \lambda} U'_\nu \longrightarrow U'$$

est un isomorphisme. On note  $\mathbf{SubCell}(u | (U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$  la sous-catégorie pleine des sous-flèches cellulaires de  $u$ .

**LEMME 4.2.35** — *La sous-catégorie  $\mathbf{SubCell}(u | (U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$  est exactement l'image pleine<sup>5</sup> du foncteur  $Cp : \mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}) \longrightarrow \mathbf{Sub}(u)$ .*

DEMONSTRATION Soit  $(U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda}$  un sous-complexe de  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}$ . La flèche évidente :

$$Cp \circ M \circ Cp((U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda}) \longrightarrow Cp((U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda})$$

<sup>5</sup>On appelle image pleine, d'un foncteur  $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ , la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}$  dont les objets sont les  $F(A)$  avec  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ .

admet une rétraction. Mais il s'agit d'un morphisme dans la catégorie directe  $\mathbf{Sub}(u)$ . C'est donc un isomorphisme. Ceci montre que l'image du foncteur  $Cp$  est contenue dans  $\mathbf{SubCell}(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$ . L'inclusion inverse est également facile et sera laissée en exercice. C.Q.F.D

On continue avec un critère pour l'existence des colimites dans la catégorie  $\mathbf{SubCell}(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$ .

**PROPOSITION 4.2.36** — *On suppose que  $\mathcal{C}$  admet les petites colimites, que les monomorphismes de  $\mathcal{C}$  sont universels et que les éléments de  $F$  sont des monomorphismes.*

*Soient  $\mathcal{K}$  une petite catégorie et  $u'(-) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{SubCell}(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$  un foncteur qui à  $k \in \mathbf{Ob}(\mathcal{K})$  associe une sous-flèche cellulaire  $u'(k) : U'(k) \longrightarrow V'(k)$ . On note  $u' : U' \longrightarrow V'$  la colimite  $\mathbf{Colim}_{\mathcal{K}} u'(-)$  dans la catégorie  $\mathbf{HOM}(\mathbf{1}, \mathcal{C})/u$ . Si la flèche  $u'$  est une sous-flèche de  $u$ , alors elle est automatiquement cellulaire.*

**DEMONSTRATION** On note  $(U'_\nu(k), E'_\nu(k), j'_{k,\nu}, i'_{\nu,k})$  le  $\lambda$ -complexe cellulaire  $M(u'(k))$  pour  $k \in \mathbf{Ob}(\mathcal{K})$ . La colimite  $\mathbf{Colim}_{k \in \mathbf{Ob}(\mathcal{K})} u'(k)$  est donc la composée transfinie de la  $\lambda$ -suite :

$$U'_0 \longrightarrow U'_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow U'_\nu \longrightarrow U'_{\nu+1} \longrightarrow \dots$$

avec  $U'_\nu = \mathbf{Colim}_{k \in \mathbf{Ob}(\mathcal{K})} U'_\nu(k)$  et  $U'_{\nu+1}$  le push-out du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \left( \coprod_{e \in \mathbf{Colim}_{\mathcal{K}} E'_\nu(-)} A_e \right) & \longrightarrow & U'_\nu \\ \downarrow & & \\ \left( \coprod_{e \in \mathbf{Colim}_{\mathcal{K}} E'_\nu(-)} B_e \right) & & \end{array}$$

Les flèches  $U'_\nu \longrightarrow \mathbf{Colim}_{\mu \in \lambda} U'_\mu = \mathbf{Colim}_{k \in \mathbf{Ob}(\mathcal{K})} V'(k)$  sont dans  $\mathbf{Cell}(F)$ . Ce sont donc des monomorphismes. Comme  $\mathbf{Colim}_{\mathcal{K}} u'(-)$  est supposée une sous-flèche de  $u$ , on voit que pour tout  $\nu \in \lambda$ , la flèche  $U'_\nu \longrightarrow U_\nu$  est un monomorphisme. En considérant le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Colim}_{\mathcal{K}} E'_\nu(-) & \xrightarrow{i'_\nu} & \coprod_{A \rightarrow B \in F} \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(A, U'_\nu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_\nu & \longrightarrow & \coprod_{A \rightarrow B \in F} \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(A, U_\nu) \end{array}$$

on voit que la flèche  $i'_\nu$  se factorise par l'image  $E''_\nu$  de l'application  $\mathbf{Colim}_{\mathcal{K}} E'_\nu(-) \longrightarrow E_\nu$ . On pose alors  $U''_{\nu+1}$  le push-out :

$$\begin{array}{ccc} \left( \coprod_{e \in E''_\nu} A_e \right) & \longrightarrow & U'_\nu \\ \downarrow & & \\ \left( \coprod_{e \in E''_\nu} B_e \right) & & \end{array}$$

On dispose ainsi d'un morphisme évident  $U'_{\nu+1} \longrightarrow U''_{\nu+1}$  qui admet une section puisque  $\mathbf{Colim}_{\mathcal{K}} E'_\nu(-) \rightarrow E''_\nu$  est surjective. Remarquons par ailleurs que  $U'_{\nu+1} \longrightarrow U''_{\nu+1}$  factorise le monomorphisme  $U'_\nu \longrightarrow U_\nu$ . Il vient que  $U'_{\nu+1} \longrightarrow U''_{\nu+1}$  est inversible, puisque c'est un monomorphisme admettant une section.

On définit ainsi un sous-complexe  $(U'_\nu, E''_\nu, i''_\nu, j''_\nu)$  de  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)$  en prenant pour  $e \in E''_\nu$  les carrés qui bordent le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A_e & \longrightarrow & U'_\nu \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_e & \longrightarrow & U''_{\nu+1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \sim \\ \longleftarrow \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} U'_{\nu+1} \\ \longleftarrow \\ U''_{\nu+1} \end{array}$$

Il est clair que  $(U'_\nu, E''_\nu, i''_\nu, j''_\nu)$  est un sous-complexe de  $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)$  dont la composition est  $u'$ . Le résultat recherché découle maintenant du lemme 4.2.35. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.2.37** — *On garde les hypothèses de la proposition 4.2.36. On suppose en plus que les colimites filtrantes de  $\mathcal{C}$  préservent les monomorphismes. Alors, la catégorie  $\mathbf{SubCell}(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$  admet les colimites filtrantes et le foncteur de composition  $y$  commutent.*

**COROLLAIRE 4.2.38** — *On suppose que  $\mathcal{C}$  est  $\alpha$ -présentable au sens de la définition 4.2.16. On suppose également que les buts des flèches de  $F$  sont  $\alpha$ -accessibles pour un même cardinal  $\alpha$ . Alors, l'inclusion :*

$$\mathbf{SubCell}_\alpha(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}) \subset \mathbf{Sub}_\alpha(u)$$

est cofinale (avec  $\mathbf{SubCell}_\alpha(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$  la sous-catégorie des sous-flèches cellulaires de buts  $\alpha$ -accessibles).

DEMONSTRATION Soit en effet  $u_0$  une sous flèche de  $u : U \longrightarrow V$  de but  $\alpha$ -accessible. On va la majorer par une sous-flèche cellulaire de but encore  $\alpha$ -accessible.

Pour cela, considérons l'inclusion  $inc : \mathbf{Sub}_\alpha(u) \longrightarrow \mathbf{Sub}(u)$ . La colimite de  $inc$  est égale à  $u$  et la catégorie  $\mathbf{Sub}_\alpha(u)$  est  $\alpha$ -filtrante.

Par la proposition 4.2.33 le foncteur  $M$  est  $\alpha$ -accessible. Il en est donc de même de l'endofoncteur  $Cp \circ M$  de  $\mathbf{Sub}(u)$ . On a donc :

$$u = \text{Colim}_{u' \in \mathbf{Sub}_\alpha(u)} Cp(M(u'))$$

Comme le but de  $u_0$  est  $\alpha$ -accessible, il existe donc une sous-flèche  $u' \in \mathbf{Sub}_\alpha(u)$  telle que  $Cp(M(u'))$  majore  $u_0$ . Pour terminer, il reste à voir que  $Cp(M(u'))$  est de but  $\alpha$ -accessible. Ceci est clair puisque  $Cp(M(u'))$  est majorée par la sous-flèche  $u'$ . C.Q.F.D

### 4.2.3 Catégories de modèles présentables par cofibrations

Dans ce paragraphe, on se donne une catégorie de modèles  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ . On fait la définition suivante :

**DEFINITION 4.2.39** — *On dit que  $\mathfrak{M}$  est  $\alpha$ -présentable par cofibrations si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1.  $\mathfrak{M}$  est  $\alpha$ -présentable, en tant que catégorie abstraite, au sens de la définition 4.2.16.
2. Les cofibrations de  $\mathfrak{M}$  sont des monomorphismes.
3. Notons  $\mathbf{Cof}_\alpha$  la classe des cofibrations de buts  $\alpha$ -accessibles. Alors  $\mathbf{Fib} = \text{RLP}(\mathbf{Cof}_\alpha \cap \mathbf{W})$  et  $\mathbf{Fib} \cap \mathbf{W} = \text{RLP}(\mathbf{Cof}_\alpha)$ .

Le cardinal  $\alpha$  est appelé la taille essentielle de  $\mathfrak{M}$ .

**Remarque 4.2.40** — Une catégorie de modèles présentable par cofibrations est cellulaire au sens de [Hir03] dès que les monomorphismes de  $\mathfrak{M}$  sont effectifs. Ainsi, le théorème 4.2.71 est essentiellement un cas particulier du théorème de localisation de Hirschhorn [Hir03].

**PROPOSITION 4.2.41** — *Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles  $\alpha$ -présentable par cofibrations. Il existe deux factorisations fonctorielles d'une flèche  $u : U \longrightarrow V$  de  $\mathfrak{M}$  :*

$$U \xrightarrow{c(u)} \Phi_{cf_0}(u) \xrightarrow{f_0(u)} V \quad \text{et} \quad U \xrightarrow{c_0(u)} \Phi_{c_0f}(u) \xrightarrow{f(u)} V$$

avec  $\Phi_{cf_0}(-)$  et  $\Phi_{c_0f}(-)$  des foncteurs  $\alpha$ -accessibles tels que :

- $c(u)$  est une cofibration et  $f_0(u)$  une fibration triviale,
- $c_0(u)$  est une cofibration triviale et  $f(u)$  une fibration.

Notons  $\gamma$  le cardinal d'une petite catégorie équivalente à la sous-catégorie des objets  $\alpha$ -accessibles de  $\mathfrak{M}$ . Soit  $\beta = 2^\nu$  un cardinal infini tel que  $\nu \geq \alpha$  et  $2^\nu \geq \gamma$ . Alors les objets  $\Phi_{cf_0}(u)$  et  $\Phi_{c_0f}(u)$  sont  $\beta$ -accessibles dès que  $U$  et  $V$  sont  $\beta$ -accessibles.

DEMONSTRATION On choisit une petite sous-catégorie pleine  $\mathcal{C} \subset \mathfrak{M}$  équivalente à la sous-catégorie des objets  $\alpha$ -accessibles de  $\mathfrak{M}$ . On supposera que le cardinal de  $\mathcal{C}$  est majoré par  $\gamma$ . L'existence des factorisations découle alors de l'argument du petit objet (voir la proposition 4.2.26) appliqué à l'ensemble des cofibrations et à l'ensemble des cofibrations triviales qui sont des flèches de  $\mathcal{C}$ .

La dernière assertion découle de la quatrième propriété de 4.2.26 et de l'estimation du cardinal de  $\text{hom}_{\mathfrak{M}}(A, X)$ , établie dans la proposition 4.2.14, avec  $A$  et  $X$  des objets  $\alpha$  et  $\beta$ -accessibles de  $\mathfrak{M}$ . C.Q.F.D

Par le corollaire 4.2.28, la flèche  $c(u)$  (resp.  $c_0(u)$ ) est munie d'une structure canonique de  $\lambda$ -complexes  $\mathbf{Cof}_\alpha$ -cellulaires (resp.  $\mathbf{Cof}_\alpha \cap \mathbf{W}$ -cellulaires). On notera  $(\tilde{\Phi}_{cf_0, \nu}(u), E_\nu(u), i_{u, \nu}, j_{u, \nu})_{\nu \in \lambda}$  (resp.  $(\tilde{\Phi}_{c_0f, \nu}(u), E_\nu(u), i_{u, \nu}, j_{u, \nu})_{\nu \in \lambda}$ ) cette structure.



**DEFINITION 4.2.42** — Soit  $u : U \longrightarrow V$  une flèche d'une catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  supposée  $\alpha$ -présentable par cofibrations. On pose :

$$\mathbf{SubCell}(c(u)) = \mathbf{SubCell}(c(u)|(\tilde{\Phi}_{c_{f_0}, \nu}(u), E_\nu(u), i_{u, \nu}, j_{u, \nu})_{\nu \in \lambda})$$

$$(\text{resp. } \mathbf{SubCell}(c_0(u)) = \mathbf{SubCell}(c_0(u)|(\tilde{\Phi}_{c_{0f}, \nu}(u), E_\nu(u), i_{u, \nu}, j_{u, \nu})_{\nu \in \lambda}))$$

la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Sub}(c(u))$  (resp.  $\mathbf{Sub}(c_0(u))$ ) formée des sous-flèches cellulaires.

On notera aussi  $\mathbf{SubCell}_\beta(c(u)) \subset \mathbf{SubCell}(c(u))$  (resp.  $\mathbf{SubCell}_\beta(c_0(u)) \subset \mathbf{SubCell}(c_0(u))$ ) les sous-catégories pleines formées des flèches de buts  $\beta$ -accessibles.

Étant donnée une sous-flèche cellulaire  $A \longrightarrow B$  de  $c(u) : U \longrightarrow \Phi_{c_{f_0}}(u)$ , on sait par le lemme 4.2.29 que  $U \coprod_A B \longrightarrow \Phi_{c_{f_0}}(u)$  est dans  $\text{Cell}(\mathbf{Cof}) = \mathbf{Cof}$ . Il sera pratique dans la suite d'isoler cette propriété :

**DEFINITION 4.2.43** — Soit  $c : A \longrightarrow B$  une cofibration de  $\mathfrak{M}$ .

1- Une sous-cofibration de  $c$  est une sous-flèche  $c_0$  de  $c$  :

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{c_0} & B_0 \\ a_0 \downarrow & & \downarrow b_0 \\ A & \xrightarrow{c} & B \end{array}$$

telle que  $A_0 \longrightarrow B_0$  et  $A \coprod_{A_0} B_0 \longrightarrow B$  sont des cofibrations.

2- On note  $\mathbf{SubCof}(c) \subset \mathbf{Sub}(c)$  la sous-catégorie (à priori non pleine) dont les objets sont les sous-cofibrations de  $c$  et les flèches sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{c_0} & B_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \xrightarrow{c_1} & B_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{c} & B \end{array}$$

avec  $c_0$  une sous-cofibration de  $c_1$ .

3- On note  $\mathbf{SubCof}_\beta(c) \subset \mathbf{SubCof}(c)$  la sous-catégorie pleine formée des sous-cofibrations de sources et buts  $\beta$ -accessibles.

On vérifie immédiatement que les inclusions  $\mathbf{SubCell}(c(u)) \subset \mathbf{Sub}(c(u))$  (resp.  $\mathbf{SubCell}(c_0(u)) \subset \mathbf{Sub}(c_0(u))$ ) se factorisent par des inclusions  $\mathbf{SubCell}(c(u)) \subset \mathbf{SubCof}(c(u))$  (resp.  $\mathbf{SubCell}(c_0(u)) \subset \mathbf{SubCof}(c_0(u))$ ).

**PROPOSITION 4.2.44** — Soient  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles  $\alpha$ -présentable par cofibrations et  $\beta$  un cardinal comme dans la proposition 4.2.41. Soit  $u : A \longrightarrow B$  une flèche de  $\mathfrak{M}$ . Alors la cofibration  $c(u) : A \longrightarrow \Phi_{c_{f_0}}(u)$  (resp. la cofibration triviale  $c_0(u) : A \longrightarrow \Phi_{c_{0f}}(u)$ ) est la colimite  $\beta$ -filtrante du foncteur :

$$\mathbf{Sub}_\beta(u) \xrightarrow{\Phi_{c_{f_0}}} \mathbf{SubCell}_\beta(c(u)) \subset \underline{\mathbf{HOM}}(\mathbf{1}, \mathfrak{M})/c(u)$$

$$(\text{resp. } \mathbf{Sub}_\beta(u) \xrightarrow{\Phi_{c_{0f}}} \mathbf{SubCell}_\beta(c_0(u)) \subset \underline{\mathbf{HOM}}(\mathbf{1}, \mathfrak{M})/c_0(u))$$

De plus, dans le cas respé, le foncteur envoie les sous-flèches de  $u$  sur des cofibrations triviales.

**DEMONSTRATION** Ceci découle immédiatement du fait que les foncteurs  $\Phi_{c_{f_0}}$  et  $\Phi_{c_{0f}}$  sont  $\alpha$ -accessibles et donc  $\beta$ -accessibles. C.Q.F.D

Ainsi, dans une catégorie de modèles  $\alpha$ -présentable par cofibrations, les cofibrations (resp. les cofibrations triviales) de la forme  $c(u)$  (resp.  $c_0(u)$ ) sont colimites  $\beta$ -filtrantes d'un diagramme de sous-cofibrations (resp. sous-cofibrations triviales) de buts  $\beta$ -accessibles. On voudrait généraliser cette propriété à toutes les cofibrations (resp. les cofibrations triviales). Remarquons pour cela que si  $u$  est une cofibration (resp. cofibration triviale) alors  $u$  est rétracte de  $c(u)$  (resp.  $c_0(u)$ ). On introduit la définition suivante :

**DEFINITION 4.2.45** — Soit  $u : A \longrightarrow B$  une cofibration (resp. une cofibration triviale) dans une catégorie de modèles  $\alpha$ -présentable par cofibrations. On fixe un relèvement  $r : B \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$  dans le carré :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{c(u)} & \Phi_{cf_0}(u) \\ u \downarrow & \nearrow r & \downarrow f_0(u) \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

(resp.  $r : B \longrightarrow \Phi_{c_0f}(u)$  dans le carré :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{c_0(u)} & \Phi_{c_0f}(u) \\ u \downarrow & \nearrow r & \downarrow f(u) \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

de telle sorte que  $u$  devient un retract de  $c(u)$  (resp.  $c_0(u)$ ).

Soit  $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$  une sous-flèche de  $u$ . On dit que  $u_0$  est  $r$ -spéciale lorsque le sous-objet  $B_0 \in \mathbf{Sub}(B)$  est isomorphe au sous-objet  $\Phi_{cf_0}(u_0) \times_{\Phi_{cf_0}(u), r} B \in \mathbf{Sub}(B)$  (resp.  $\Phi_{c_0f}(u_0) \times_{\Phi_{c_0f}(u), r} B \in \mathbf{Sub}(B)$ ). On notera  $\mathbf{SpSub}(u|r) \subset \mathbf{Sub}(u)$  et  $\mathbf{SpSub}_\beta(u|r) \subset \mathbf{Sub}_\beta(u)$  les sous-catégories (pleines) formées des sous-flèches  $r$ -spéciales de  $u$ .

On résume quelques propriétés des sous-flèches  $r$ -spéciales dans la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.2.46** — On garde les hypothèses et les notations de la définition 4.2.45. Soit  $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$  une sous-flèche  $r$ -spéciale de  $u$ . On a les propriétés suivantes :

- $u_0$  est une sous-cofibration (resp. une sous-cofibration triviale) de  $u$ ,
- $u_0$  est un retract de  $c(u_0)$  (resp.  $c_0(u_0)$ ). Plus précisément, la restriction de  $r$  à  $B_0$  se factorise par  $\Phi_{cf_0}(u_0)$  (resp.  $\Phi_{c_0f}(u_0)$ ).

**DEMONSTRATION** On traite uniquement le cas non respé. Montrons que la composée  $B_0 \longrightarrow B \xrightarrow{r} \Phi_{cf_0}(u)$  se factorise par le sous-objet  $\Phi_{cf_0}(u_0)$ . Comme  $u_0$  est  $r$ -spéciale,  $B_0$  est isomorphe au sous-objet  $\Phi_{cf_0}(u_0) \times_{\Phi_{cf_0}(u), r} B \in \mathbf{Sub}(B)$ . La propriété recherchée découle alors de la commutation du carré :

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{cf_0}(u_0) \times_{\Phi_{cf_0}(u), r} B & \longrightarrow & B \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow r \\ \Phi_{cf_0}(u_0) & \longrightarrow & \Phi_{cf_0}(u) \end{array}$$

On note  $r_0 : B_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0)$  la restriction de  $r$  à  $B_0$ . C'est une retraction à  $f_0(u_0)$ . Ceci découle immédiatement du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} B_0 & \xrightarrow{r_0} & \Phi_{cf_0}(u_0) & \xrightarrow{f_0(u_0)} & B_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{r} & \Phi_{cf_0}(u) & \xrightarrow{f_0(u)} & B \end{array}$$

et du fait que  $B_0$  est un sous-objet de  $B$ . Il vient que  $u_0$  est une cofibration par l'axiome **(MC3)**.

Il reste à montrer que  $u_0$  est une sous-cofibration de  $u$ . Pour cela, on peut remarquer que  $A \coprod_{A_0} B_0 \longrightarrow B$  est retracte de  $A \coprod_{A_0} \Phi_{cf_0}(u_0) \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ . Cette dernière est une cofibration puisque  $c(u_0)$  est une sous-cofibration de  $c(u)$  par la proposition 4.2.30. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.2.47** — On garde les hypothèses et les notations de la définition 4.2.45. Soient  $u_0$  et  $u_1$  deux sous-flèches  $r$ -spéciales d'une cofibration (resp. d'une cofibration triviale)  $u$ . Supposons que  $u_0$  est majorée par  $u_1$  en tant que sous-flèche. Alors,  $u_0$  est majorée par  $u_1$  en tant que sous-cofibration. En particulier, la sous-catégorie pleine  $\mathbf{SpSub}(u|r) \subset \mathbf{Sub}(u)$  est contenue dans  $\mathbf{SubCof}(u)$ .

**DEMONSTRATION** En effet, si  $u_0$  est une sous-flèche de  $u_1$ , alors  $c(u_0)$  (resp.  $c_0(u_0)$ ) est une sous-cofibration de  $c(u_1)$  (resp.  $c_0(u_1)$ ). Le résultat découle alors du fait que le morphisme de flèches  $u_0 \rightarrow u_1$  est un retract de  $c(u_0) \rightarrow c(u_1)$  (resp.  $c_0(u_0) \rightarrow c_0(u_1)$ ). C.Q.F.D

Dans la suite, on abusera parfois en appelant *sous-cofibration r-spéciale* une sous-flèche r-spéciale. Notons également le lemme suivant qui découle immédiatement de la définition 4.2.45 et du fait que le foncteur  $\Phi_{cf_0}$  (resp.  $\Phi_{c_0f}$ ) est  $\alpha$ -filtrant.

**LEMME 4.2.48** — *Une colimite  $\alpha$ -filtrante de sous-flèches r-spéciales est encore une sous-flèche r-spéciale.*

Le résultat suivant, montre qu'il y a suffisamment de sous-flèches r-spéciales de buts  $\beta$ -accessibles :

**PROPOSITION 4.2.49** — *On suppose que  $\mathfrak{M}$  est  $\alpha$ -présentable par cofibrations. Soit  $\beta$  un cardinal comme dans la proposition 4.2.41 et  $u : A \longrightarrow B$  une cofibration (resp. une cofibration triviale). On fixe un relèvement  $r : B \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$  (resp.  $r : B \longrightarrow \Phi_{c_0f}(u)$ ) comme dans la définition 4.2.45. Alors, l'inclusion  $\mathbf{SpSub}_\beta(u|r) \subset \mathbf{Sub}_\beta(u)$  est cofinale.*

DEMONSTRATION On traite uniquement le cas non-respé. Remarquons que  $\mathbf{SpSub}_\beta(u|r)$  est l'égalisateur d'une double flèche :

$$\mathbf{Sub}_\beta(u) \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{\text{id}} \end{array} \mathbf{Sub}_\beta(u)$$

avec  $F$  le foncteur qui à une sous-flèche  $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$  de  $u$  associe la sous-flèche  $A_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0) \times_{\Phi_{cf_0}(u), r} B$ .

Le foncteur  $F$  est cofinal. En effet, les limites finies et le foncteur  $\Phi_{cf_0}$  commutent aux colimites  $\alpha$ -filtrantes. Il vient que la flèche canonique :

$$\text{Colim}_{u_0 \in \mathbf{Sub}_\beta(u)} F(u_0) \longrightarrow u$$

est inversible. Ainsi, si  $u'$  est une sous-flèche de  $u$  de but  $\beta$ -accessible, la composée :

$$u' \longrightarrow u \simeq \text{Colim}_{u_0 \in \mathbf{Sub}_\beta(u)} F(u_0)$$

se factorise par l'une des  $F(u_0)$ . Cette dernière majore donc  $u'$ .

D'autre part, la catégorie  $\mathbf{Sub}_\beta(u)$  admet les colimites filtrantes indexées par des catégories de cardinal inférieur ou égal à  $\beta$ . Les foncteur  $F$  commute aux colimites  $\alpha$ -filtrantes indexées par des catégories de cardinal inférieur ou égal à  $\beta$ . Le lemme 4.2.4 s'applique pour montrer que l'inclusion  $\mathbf{SpSub}_\beta(u|r) \subset \mathbf{Sub}_\beta(u)$  est cofinale. C.Q.F.D

On déduit immédiatement le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 4.2.50** — *On suppose que  $\mathfrak{M}$  est  $\alpha$ -présentable par cofibrations. Soient  $\beta$  un cardinal comme dans la proposition 4.2.41 et  $u : A \longrightarrow B$  une cofibration (resp. une cofibration triviale). On fixe un relèvement  $r : B \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$  (resp.  $r : B \longrightarrow \Phi_{c_0f}(u)$ ) comme dans la définition 4.2.45. La cofibration  $u$  est la colimite  $\beta$ -filtrante de ses sous-cofibrations (resp. sous-cofibrations triviales) r-spéciales de buts  $\beta$ -accessibles.*

Soit  $u : A \longrightarrow B$  une cofibration. Les catégories  $\mathbf{SubCof}(u)$  et  $\mathbf{SpSub}(u|r)$  ne sont pas en général stables par colimites suivant les ordinaux. Ceci rend difficile l'application du lemme de Zorn qui est utile pour la construction des relèvements (voir par exemple la preuve du théorème de localisation 4.2.71). Pour cela, nous allons élargir la catégorie  $\mathbf{SpSub}(u|r)$  et plus précisément  $\text{id}_A \backslash \mathbf{SpSub}(u|r)$  :

**DEFINITION 4.2.51** — *On suppose que  $\mathfrak{M}$  est  $\alpha$ -présentable par cofibrations. Soit  $u : A \longrightarrow B$  une cofibration (resp. une cofibration triviale) et fixons une retraction  $r : B \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$  (resp.  $r : B \longrightarrow \Phi_{c_0f}(u)$ ) comme dans la définition 4.2.45.*

*Une sous-flèche de la forme  $v : A \longrightarrow T$  de  $c(u) : A \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$  (resp.  $c_0(u) : A \longrightarrow \Phi_{c_0f}(u)$ ) est dite r-normale lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *v est une sous-flèche cellulaire.*

2. *La composée :  $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u) \xrightarrow{f_0(u)} B$  (resp.  $T \longrightarrow \Phi_{c_0f}(u) \xrightarrow{f(u)} B$ ) se factorise par le sous-objet  $s(T) = T \times_{\Phi_{cf_0}(u), r} B$  (resp.  $s(T) = T \times_{\Phi_{c_0f}(u), r} B$ ) de  $B$ .*

Dans la suite, nous considérons uniquement le cas non-respé afin d'alléger la présentation. Le lecteur pourra facilement adapter les énoncés et les démonstrations au cas où  $u$  est supposée une cofibration triviale et  $r$  est une

rétraction à  $f(u)$ . On peut résumer la situation de la définition 4.2.51 par un diagramme commutatif :

$$(4.12) \quad \begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{s(v)} & s(T) & \longrightarrow & B \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow r \\ A & \xrightarrow{v} & T & \longrightarrow & \Phi_{cf_0}(u) \\ \parallel & & \vdots & & \downarrow f_0(u) \\ A & \xrightarrow{s(v)} & s(T) & \longrightarrow & B \end{array}$$

avec  $s(T) = T \times_{\Phi_{cf_0}(u), r} B$ . Comme  $v$  est cellulaire, on déduit aussitôt que  $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$  est une cofibration. Le diagramme (4.12) montre également que  $s(T)$  est rétracte de  $T$ . On déduit alors que  $s(v)$  et  $s(T) \longrightarrow B$  sont des cofibrations puisqu'elles sont retractes de  $v$  et  $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$  respectivement. Ainsi toutes les flèches horizontales du diagramme (4.12) sont des cofibrations. On parlera dorénavant de *sous-cofibrations  $r$ -normales de  $c(u)$* . Voici un exemple de sous-cofibrations  $r$ -normales :

**Exemple 4.2.52** — Si  $u_0 : A \longrightarrow B_0$  est une sous-flèche  $r$ -spéciale de  $u$ , alors  $c(u_0)$  est une sous-cofibration  $r$ -normale de  $c(u)$ .

**DEFINITION 4.2.53** — On note  $\mathbf{NormSub}(c(u)|r) \subset \mathbf{SubCell}(c(u))$  la sous-catégorie pleine dont les objets sont les sous-cofibrations  $r$ -normales.

L'association  $v \rightsquigarrow s(v)$  définit un foncteur  $s : \mathbf{NormSub}(c(u)|r) \longrightarrow \mathbf{SubCof}(u)$ . En effet, étant donnée une flèche  $(v_0 : A \rightarrow T_0) \longrightarrow (v_1 : A \rightarrow T_1)$  dans  $\mathbf{NormSub}(c(u)|r)$ , la flèche  $s(T_0) \longrightarrow s(T_1)$  est rétracte  $T_0 \longrightarrow T_1$ . Cette dernière est dans  $\mathbf{Cell}(\mathbf{Cof}) = \mathbf{Cof}$  par le lemme 4.2.29. Ceci montre que  $s(v_0)$  est bien une sous-cofibration de  $s(v_1)$ .

**PROPOSITION 4.2.54** — On suppose toujours que  $\mathfrak{M}$  est  $\alpha$ -présentable par cofibrations. Soit  $\mathcal{K}$  une petite catégorie filtrante et supposons donné un foncteur  $v(-) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{HOM}(\mathbf{1}, \mathfrak{M})/c(u)$  tel que pour  $k \in \mathbf{Ob}(\mathcal{K})$ ,  $v(k)$  est une sous-cofibration  $r$ -normale de  $c(u)$ . Alors  $\mathbf{Colim}_{\mathcal{K}} v(-)$  est encore une sous-cofibration  $r$ -normale de  $c(u)$ .

DEMONSTRATION Ceci découle immédiatement du corollaire 4.2.37. C.Q.F.D

**PROPOSITION 4.2.55** — On reprend les notations et les hypothèses de la définition 4.2.51. Soit  $v : A \longrightarrow T$  une sous-cofibration  $r$ -normale de  $c(u)$ . On suppose donnés une sous-flèche  $r$ -spéciale  $u_0$  dans  $\mathbf{SpSub}(u|r)$  et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A_0 & \xrightarrow{v_0} & T_0 & \xrightarrow{j_0} & \Phi_{cf_0}(u_0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{v} & T & \xrightarrow{j} & \Phi_{cf_0}(u) \end{array}$$

avec  $v_0$  une sous-cofibration  $r$ -normale de  $c(u_0)$ . Si en plus,  $j_0$  est une sous-cofibration de  $j$ , alors :

$$v' : A \longrightarrow T \coprod_{T_0} \Phi_{cf_0}(u_0)$$

est une sous-cofibration  $r$ -normale qui majore  $v$ .

DEMONSTRATION Notons  $T' = T \coprod_{T_0} \Phi_{cf_0}(u_0)$ . Il s'agit de montrer les points suivants :

- $v'$  est cellulaire.
- La composée  $T' \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u) \xrightarrow{f_0(u)} B$  se factorise par le sous-objet  $s(T') = T' \times_{\Phi_{cf_0}(u), r} B$ .

Le premier point découle de la proposition 4.2.36 et du fait que  $T'$  est un sous-objet de  $\Phi_{cf_0}(u)$ . Étant donné que  $T' = T \coprod_{T_0} \Phi_{cf_0}(u_0)$ , il suffit de voir que les flèches :

$$T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u) \longrightarrow B \quad \text{et} \quad \Phi_{cf_0}(u_0) \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u) \longrightarrow B$$

se factorisent par  $s(T')$ . La première composée se factorise par  $s(T)$  qui est majoré par  $s(T')$ . La seconde se factorise par  $B_0$ , qui est également majoré par  $s(T')$ . En effet,  $\Phi_{cf_0}(u_0) \times_{\Phi_{cf_0}(u), r} B = B_0$  puisque  $u_0$  est  $r$ -spéciale. C.Q.F.D

**DEFINITION 4.2.56** — Soit  $u : A \longrightarrow B$  une cofibration dans une catégorie de modèles  $\alpha$ -présentable par cofibrations. Supposons donnée une sous-flèche  $r$ -normale  $v : A \longrightarrow T$  de  $c(u)$ . Une sous-flèche  $r$ -spéciale  $u_0$  de  $u$  sera dite orthogonale à  $v$  lorsque la sous-flèche  $A_0 \longrightarrow T \times_{\Phi_{cf_0}(u)} \Phi_{cf_0}(u_0) = T_0$  est  $r$ -normale dans  $c(u_0)$  et la flèche  $T_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0)$  est une sous-cofibration de  $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ . On note  $\mathbf{SpSub}_?^{\perp v}(u|r)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{SpSub}_?(u|r)$  formées des sous-flèches  $r$ -spéciales orthogonale à  $v$  (avec  $? \in \{\emptyset, \beta\}$ ).

Ainsi, si la sous-flèche  $u_0$  est orthogonale à  $v$  on peut former, par la proposition 4.2.55, une nouvelle sous-cofibration  $r$ -normale  $A \longrightarrow T \coprod_{T_0} \Phi_{cf_0}(u_0)$ . On a le lemme suivant qui montre l'existence de beaucoup de sous-flèches  $r$ -spéciales et orthogonales à  $v$ .

**LEMME 4.2.57** — On garde les hypothèses de la définition 4.2.56. L'inclusion  $\mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v}(u|r) \subset \mathbf{SpSub}_\beta(u|r)$  est cofinale.

DEMONSTRATION Considérons le diagramme suivant dans  $\mathcal{OrdEns}$  :

$$(4.13) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{SubCell}_\beta(A \rightarrow T) & & \mathbf{SpSub}_\beta(T \rightarrow \Phi_{cf_0}(u)|r') \\ \text{inc} \downarrow & & \downarrow \text{inc} \\ \mathbf{Sub}_\beta(A \rightarrow T) & \xleftarrow{F} \mathbf{SpSub}_\beta(A \rightarrow B|r) \xrightarrow{G} & \mathbf{Sub}_\beta(T \rightarrow \Phi_{cf_0}(u)) \end{array}$$

tel que :

1.  $r' : \Phi_{cf_0}(u) \longrightarrow \Phi_{cf_0}(T \rightarrow \Phi_{cf_0}(u))$  est un relèvement quelconque,
2. les foncteurs  $inc$  sont les inclusions évidentes,
3. le foncteur  $F$  associe à une sous-flèche  $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$  de  $u$  la sous-flèche  $A_0 \longrightarrow T \times_{\Phi_{cf_0}(u)} \Phi_{cf_0}(u_0)$ ,
4. le foncteur  $G$  associe à une sous-flèche  $u_0$  de  $u$  la sous-flèche  $T \times_{\Phi_{cf_0}(u)} \Phi_{cf_0}(u_0) \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0)$ .

Le diagramme (4.13) vérifie les conditions du lemme 4.2.4. En effet, toutes les catégories de (4.13) sont  $\beta$ -filtrantes et admettent des colimites suivant les catégories  $\alpha$ -filtrantes de cardinal plus petit ou égal à  $\beta$ . Les foncteurs de (4.13) commutent à ces colimites. Les foncteurs  $inc$  sont cofinaux par le corollaire 4.2.38 et la proposition 4.2.49. Enfin, en utilisant le corollaire 4.2.50, on voit facilement que  $F$  et  $G$  sont aussi cofinaux.

Notons  $\mathcal{L}$  la limite du diagramme (4.13). Par le lemme 4.2.4, le foncteur  $c : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{Sub}_\beta(u|r)$  est cofinal. Un calcul immédiat montre que  $\mathcal{L}$  est la catégorie des sous-flèches  $r$ -spéciales  $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$  telles que :

- (i)  $A_0 \longrightarrow T_0 = T \times_{\Phi_{cf_0}(u)} \Phi_{cf_0}(u_0)$  est cellulaire,
- (ii)  $T_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0)$  est une sous-flèche  $r'$ -spéciale de  $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ .

La condition (ii) implique en particulier que  $T_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0)$  est une sous-cofibration de  $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ . Comme  $u_0$  est  $r$ -spéciale, on dispose d'un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B_0 & \xrightarrow{r_0} & \Phi_{cf_0}(u_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{r} & \Phi_{cf_0}(u) \end{array}$$

Il vient que  $T_0 \times_{\Phi_{cf_0}(u_0), r_0} B_0 = (T \times_{\Phi_{cf_0}(u)} \Phi_{cf_0}(u_0)) \times_{\Phi_{cf_0}(u_0), r_0} B_0 \simeq (T \times_{\Phi_{cf_0}(u), r} B) \times_B B_0$ . Comme la composée  $T_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u) \longrightarrow B$  se factorise par les sous-objets  $(T \times_{\Phi_{cf_0}(u), r} B)$  et  $B_0$ , elle se factorise également par leur intersection, à savoir  $(T \times_{\Phi_{cf_0}(u), r} B) \times_B B_0$ . Ceci montre que  $T_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0) \longrightarrow B_0$  se factorise par  $T_0 \times_{\Phi_{cf_0}(u_0), r_0} B_0$ . La sous-flèche  $A_0 \longrightarrow T_0$  est donc  $r$ -normale. Il est maintenant clair que  $\mathcal{L}$  est contenu dans  $\mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v}(u|r)$ . Le lemme est démontré. C.Q.F.D

### 4.2.4 Localisation des catégories de modèles

Dans ce paragraphe on démontre le théorème de localisation pour les catégories de modèles présentables par cofibrations. Il s'agit d'un cas particulier, mais amplement suffisant pour nos applications, du théorème de localisation de Hirschhorn [Hir03]. Dans la suite  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$  désignera une catégorie de modèles. La définition suivante est tirée de [Hir03] :

**DEFINITION 4.2.58** — Soit  $\mathcal{A}$  une sous-classe de  $\text{Fl}(\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}))$ . Une localisation de Bousfield (à gauche) de  $\mathfrak{M}$  suivant  $\mathcal{A}$  est une catégorie de modèles  $(\mathbf{L}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathcal{A}}, \mathbf{Cof}_{\mathcal{A}}, \mathbf{Fib}_{\mathcal{A}})$  munie d'une adjonction de Quillen

$$(U_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$$

telle que  $\mathbf{L}U_{\mathcal{A}}(f)$  est inversible pour tout  $f \in \mathcal{A}$  et vérifiant la propriété universelle suivante. Pour toute catégorie de modèles  $\mathfrak{N}$  munie d'une adjonction de Quillen  $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  telle que  $\mathbf{L}F(f)$  est inversible pour  $f \in \mathcal{A}$ , il existe une unique adjonction de Quillen  $(F_{\mathcal{A}}, G_{\mathcal{A}}) : \mathbf{L}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  rendant commutatif le triangle :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M} & \xrightarrow{F} & \mathfrak{N} \\ U_{\mathcal{A}} \downarrow & \nearrow F_{\mathcal{A}} & \\ \mathbf{L}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} & & \end{array}$$

**Remarque 4.2.59** — Soit  $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  une adjonction de Quillen. Soient  $\mathcal{A} \subset \text{Fl}(\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}))$  et  $\mathcal{B} \subset \text{Fl}(\mathbf{Ho}(\mathfrak{N}))$  deux classes de flèches. On suppose que  $\mathbf{L}F(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ . Alors, l'adjonction  $(F, G)$  induit naturellement une adjonction de Quillen  $(F, G) : \mathbf{L}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathfrak{N}$  lorsque les localisations de Bousfield existent.

L'objet de ce paragraphe est de donner des conditions sur  $\mathfrak{M}$  et  $\mathcal{A}$  qui assurent l'existence de la localisation de Bousfield. On commence par deux lemmes simples :

**LEMME 4.2.60** — Soient  $a : A \longrightarrow B$  une cofibration entre objets cofibrants de  $\mathfrak{M}$  et  $X$  un objet fibrant. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le morphisme  $\pi_0(a, X) : \pi_0(B, X) \longrightarrow \pi_0(A, X)$  est surjectif.
- (ii) La flèche  $X \longrightarrow *$  admet la propriété de relèvement à droite par rapport à  $a$ .

DEMONSTRATION Seule l'implication (i)  $\implies$  (ii) demande une preuve. Supposons donné un carré :

$$(4.14) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ a \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & * \end{array}$$

Il existe une flèche  $r_0 : B \longrightarrow X$  telle que  $r_0 \circ a$  est homotope à  $f$ . On se donne un cylindre  $(C_A, p, i_0, i_1)$  sur  $A$  et on construit, en utilisant l'axiome (MC5), un cylindre  $(C_B, p, i_0, i_1)$  sur  $B$  qui factorise la flèche :

$$\left( C_A \coprod_{(A \coprod A)} (B \coprod B) \right) \longrightarrow B$$

en une cofibration suivie d'une fibration triviale.

Soit  $h : C_A \longrightarrow X$  une homotopie de  $r_0 \circ a$  à  $f$  relativement au cylindre  $(C_A, p, i_0, i_1)$ . Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} C_A \coprod_{i_0(A)} B & \xrightarrow{h \cup r_0} & X \\ \downarrow & \nearrow k & \downarrow \\ C_B & \longrightarrow & * \end{array}$$

Étant donné que  $C_A \coprod_{i_0(A)} B \longrightarrow C_B$  est une cofibration triviale, un relèvement  $k$  existe par (MC4). Il est alors clair que  $r = k \circ i_1$  est un relèvement au carré (4.14). C.Q.F.D

**LEMME 4.2.61** — Soient  $a : A \longrightarrow B$  une cofibration entre objets cofibrants de  $\mathfrak{M}$  et  $X$  un objet fibrant. On se donne des cylindres  $(C_A, p, i_0, i_1)$  et  $(C_B, p, i_0, i_1)$  sur  $A$  et  $B$  ainsi qu'une flèche :

$$C_a : C_A \longrightarrow C_B$$

compatible avec les flèches  $p, i_0$  et  $i_1$ . Si la flèche  $X \longrightarrow *$  possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux deux flèches :

$$a : A \longrightarrow B \quad \text{et} \quad \left( C_A \coprod_{(A \amalg A)} (B \amalg B) \right) \longrightarrow C_B$$

alors le morphisme  $\pi_0(a, X) : \pi_0(B, X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(A, X)$  est inversible.

DEMONSTRATION La surjectivité est claire étant donné que  $X \longrightarrow *$  admet la propriété de relèvement à droite relativement à  $a$ . Pour montrer l'injectivité, on considère deux flèches  $f, g : B \longrightarrow X$  telles que  $f \circ a$  est homotope à  $g \circ a$ . Fixons une homotopie  $h : C_A \longrightarrow X$  et formons la flèche :

$$l = (f \cup g) \cup h : \left( C_A \coprod_{(A \amalg A)} (B \amalg B) \right) \longrightarrow X$$

La propriété de relèvement à droite fournit alors l'homotopie  $C_B \longrightarrow X$  recherchée.

C.Q.F.D

Nous aurons également besoin du lemme suivant :

**LEMME 4.2.62** — Pour  $e \in \{1, 2\}$ , on se donne une cofibration  $a_e : A_e \longrightarrow B_e$  entre objets cofibrants de  $\mathfrak{M}$ . On choisit des cylindres  $(C_{A_e}, p, i_0, i_1)$  et  $(C_{B_e}, p, i_0, i_1)$  sur  $A_e$  et  $B_e$  ainsi qu'une flèche :

$$C_{a_e} : C_{A_e} \longrightarrow C_{B_e}$$

compatible avec les flèches  $p, i_0$  et  $i_1$ . Supposons que  $a_1$  et  $a_2$  deviennent isomorphes dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . Alors, il en est de même des flèches :

$$\left( C_{A_1} \coprod_{(A_1 \amalg A_1)} (B_1 \amalg B_1) \right) \longrightarrow C_{B_1} \quad \text{et} \quad \left( C_{A_2} \coprod_{(A_2 \amalg A_2)} (B_2 \amalg B_2) \right) \longrightarrow C_{B_2}$$

DEMONSTRATION Comme les flèches  $C_{B_e} \longrightarrow B_e$  sont des équivalences faibles, il suffit de montrer que les deux flèches suivantes :

$$\left( C_{A_1} \coprod_{(A_1 \amalg A_1)} (B_1 \amalg B_1) \right) \longrightarrow B_1 \quad \text{et} \quad \left( C_{A_2} \coprod_{(A_2 \amalg A_2)} (B_2 \amalg B_2) \right) \longrightarrow B_2$$

ont même classe dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . Ainsi, les cylindres  $C_{B_1}$  et  $C_{B_2}$  ne joueront aucun rôle. On procède en plusieurs étapes. On montre d'abord l'indépendance par rapport aux choix des cylindres sur  $A$ .

Étape 1 : Soit  $a : A \longrightarrow B$  une cofibration entre objets cofibrants. On se donne deux cylindres  $(C_A, p, i_0, i_1)$  et  $(C'_A, p', i'_0, i'_1)$  sur  $A$ . En choisissant une factorisation de  $p \cup p'$  :

$$\left( C_A \coprod_{(A \amalg A)} C'_A \right) \longrightarrow C''_A \longrightarrow A$$

en une cofibration suivie d'une fibration triviale, on voit qu'il suffit de considérer le cas où il existe un morphisme de cylindres  $C_A \longrightarrow C'_A$  qui est en plus une cofibration. Dans ce cas, la flèche :

$$\left( C_A \coprod_{(A \amalg A)} (B \amalg B) \right) \longrightarrow \left( C'_A \coprod_{(A \amalg A)} (B \amalg B) \right)$$

est une cofibration triviale, puisque c'est un push-out de  $C_A \longrightarrow C'_A$ .

Étape 2 : On traite maintenant le cas où il existe un carré commutatif dans  $\mathfrak{M}$  :

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{a_1} & B_1 \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ A_2 & \xrightarrow{a_2} & B_2 \end{array}$$

à flèches verticaux des équivalences faibles. Ayant la liberté de modifier les cylindres sur  $A_1$  et  $A_2$ , on peut supposer qu'il existe une flèche  $C_u : C_{A_1} \longrightarrow C_{A_2}$  qui soit compatible avec  $p, i_0$  et  $i_1$ . Remarquons que les deux diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} A_1 \amalg A_1 & \longrightarrow & C_{A_1} \\ \downarrow & & \\ B_1 \amalg B_1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A_2 \amalg A_2 & \longrightarrow & C_{A_2} \\ \downarrow & & \\ B_2 \amalg B_2 & & \end{array}$$

sont des objets cofibrants de la catégorie de modèles  $\Gamma(\mathfrak{M})$  munie de sa structure de Reedy (voir la proposition 4.1.53). De plus les flèches  $u \amalg u, v \amalg v$  et  $C_u$  définissent une équivalence faible entre ces deux objets. Le foncteur  $\Gamma(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{M}$ , qui à un diagramme de type  $\Gamma$  associe sa colimite, est un foncteur de Quillen à gauche. Il vient qu'il preserve les équivalences faibles entre les objets cofibrants. D'où le résultat dans ce cas.

*Étape 3 :* On démontre maintenant le cas général. On peut supposer  $A_e$  et  $B_e$  fibrants (et cofibrants). En effet, par l'axiome de factorisation on peut trouver un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A'_e & \xrightarrow{a'_e} & B'_e \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_e & \longrightarrow & B_e \end{array}$$

avec  $a'_e$  une cofibration entre objets fibrants et cofibrants et tel que les flèches verticaux sont des équivalences faibles.

Choisissons  $\gamma : A_1 \longrightarrow A_2$  et  $\gamma' : B_1 \longrightarrow B_2$  des isomorphismes dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  réalisant l'isomorphisme de flèches entre  $a_1$  et  $a_2$ . Comme les objets  $A_e$  et  $B_e$  sont fibrants et cofibrants, on peut trouver des relèvements  $\bar{\gamma}$  et  $\bar{\gamma}'$  dans  $\mathfrak{M}$  de  $\gamma$  et  $\gamma'$ . On obtient ainsi un carré de  $\mathfrak{M}$  :

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{a_1} & B_1 \\ \bar{\gamma} \downarrow & & \downarrow \bar{\gamma}' \\ A_2 & \xrightarrow{a_2} & B_2 \end{array}$$

commutatif à homotopie près. Fixons une homotopie  $h : C_{A_1} \longrightarrow B_2$  de  $\bar{\gamma}' \circ a_1$  à  $a_2 \circ \bar{\gamma}$  relativement à un cylindre  $(C_{A_1}, p, i_0, i_1)$ .

On munit la catégorie  $\mathbf{HOM}(\underline{1}, \mathfrak{M})$  de sa structure de modèles de Reedy (voir la proposition 4.1.53) associée à l'ensemble ordonné  $\underline{1} = \{0 < 1\}$ . Remarquons alors que les deux flèches  $a_1$  et  $a_2$  sont isomorphes en tant qu'objets de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{HOM}(\underline{1}, \mathfrak{M}))$  via la chaîne d'isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{a_1} & B_1 & & A_1 & \xrightarrow{a_2 \circ \bar{\gamma}} & B_2 & & A_1 & \xrightarrow{a_2 \circ \bar{\gamma}} & B_2 \\ i_1 \downarrow & & \downarrow \bar{\gamma}' & & i_2 \downarrow & & \parallel & & \bar{\gamma} \downarrow & & \parallel \\ C_{A_1} & \xrightarrow{h} & B_2 & & C_{A_1} & \xrightarrow{h} & B_2 & & A_2 & \xrightarrow{a_2} & B_2 \end{array}$$

Comme  $a_1$  et  $a_2$  sont des objets fibrants et cofibrants pour la structure de Reedy sur  $\mathbf{HOM}(\underline{1}, \mathfrak{M})$ , il existe un carré commutatif dans  $\mathfrak{M}$  :

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{a_1} & B_1 \\ \vdots \downarrow & & \vdots \downarrow \\ A_2 & \xrightarrow{a_2} & B_2 \end{array}$$

qui relève cet isomorphisme, i.e., les flèches verticaux sont des équivalences faibles. On s'est encore une fois ramené à la seconde étape de la preuve. C.Q.F.D

**DEFINITION 4.2.63** — Pour toute cofibration  $a : A \longrightarrow B$  on choisit une cofibration  $\nabla(a) :$

$$\left[ \text{Cyl}_a(A) \amalg_{(A \amalg A)} (B \amalg B) \right] \longrightarrow \text{Cyl}_a(B)$$



avec  $\text{Cyl}_a(A)$  et  $\text{Cyl}_a(B)$  des cylindres sur  $A$  et  $B$ . Pour une classe  $F$  de cofibrations, on pose  $\nabla(F) = \{\nabla(a); a \in F\}$ . On définit par récurrence les classes  $\nabla_n(F)$  en posant  $\nabla_n(F) = \nabla(\nabla_{n-1}(F))$ . On notera  $\nabla_\infty(F) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \nabla_n(F)$  l'union de ces classes.

Dans la suite, on fixe une sous-classe  $\mathcal{A} \subset \text{Fl}(\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}))$ . Soit  $\underline{\mathcal{A}} \subset \text{Fl}(\mathfrak{M})$  un relèvement à isomorphisme près de  $\mathcal{A}$  constitué de cofibrations entre objets cofibrants. Lorsque  $\mathcal{A}$  est essentiellement petite, on supposera implicitement que  $\underline{\mathcal{A}}$  est un ensemble. On notera alors  $\nabla_\infty(\underline{\mathcal{A}})$  l'image dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  de la classe  $\nabla_\infty(\underline{\mathcal{A}})$ . D'après le lemme 4.2.62, la classe  $\nabla_\infty(\underline{\mathcal{A}})$  est indépendante, à isomorphisme près, du choix de  $\underline{\mathcal{A}}$  et des cylindres. Voici la définition clef :

**DEFINITION 4.2.64** — 1- Un objet  $X$  de  $\mathfrak{M}$  est appelé  $\mathcal{A}$ -local lorsque pour toute flèche  $a : A \longrightarrow B$  de  $\nabla_\infty(\underline{\mathcal{A}})$  le morphisme :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(B, X) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, X)$$

est inversible. On note  $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}\text{-loc}}$  (resp.  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{\mathcal{A}\text{-loc}}$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{M}$  (resp.  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ ) formée des objets  $\mathcal{A}$ -locaux.

2- Une flèche  $f : A \longrightarrow B$  est dite une  $\mathcal{A}$ -équivalence faible lorsque

$$\text{hom}(f, X) : \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(B, X) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, X)$$

est inversible pour tout objet  $\mathcal{A}$ -local. On note  $\mathbf{W}_{\mathcal{A}}$  la classe des  $\mathcal{A}$ -équivalences faibles et  $\mathbf{Fib}_{\mathcal{A}}$  celle des flèches ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations  $\mathcal{A}$ -triviales (i.e., qui sont des  $\mathcal{A}$ -équivalences faibles).

**LEMME 4.2.65** — 1- La notion d'objets  $\mathcal{A}$ -locaux ne dépend pas du choix de  $\underline{\mathcal{A}}$  ni du choix des cylindres dans la construction de  $\nabla_\infty(\underline{\mathcal{A}})$ .

2- Soit  $(\mathbf{W}', \mathbf{Cof}', \mathbf{Fib}')$  une deuxième structure de modèles sur la catégorie  $\mathfrak{M}$ . On suppose que  $\mathbf{W}' = \mathbf{W}$  et  $\mathbf{Cof} \subset \mathbf{Cof}'$ . Alors les objets  $\mathcal{A}$ -locaux et les  $\mathcal{A}$ -équivalences faibles définis relativement à  $(\mathbf{W}', \mathbf{Cof}', \mathbf{Fib}')$  sont les mêmes que ceux définis relativement à  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ .

DEMONSTRATION La première partie de l'énoncé découle du lemme 4.2.62. La seconde partie découle aussi de 4.2.62. En effet,  $\underline{\mathcal{A}}$  est encore un relèvement à isomorphisme près de  $\mathcal{A}$  formés de cofibrations entre objets cofibrants relativement à  $(\mathbf{W}', \mathbf{Cof}', \mathbf{Fib}')$ . De même, la formation des  $\nabla_n(\underline{\mathcal{A}})$  convient pour la structure  $(\mathbf{W}', \mathbf{Cof}', \mathbf{Fib}')$ . C.Q.F.D

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des lemmes 4.2.60 et 4.2.61 :

**PROPOSITION 4.2.66** — Soit  $X$  un objet fibrant de  $\mathfrak{M}$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $X$  est  $\mathcal{A}$ -local.

(ii) La projection  $X \longrightarrow *$  possède la propriété de relèvement à droite relativement aux flèches de  $\nabla_\infty(\underline{\mathcal{A}})$ .

DEMONSTRATION Comme  $X$  est fibrant, les applications  $\pi_0(a, X) : \pi_0(B, X) \longrightarrow \pi_0(A, X)$  sont inversibles et donc en particulier surjectives pour tout  $a \in \nabla_n(\underline{\mathcal{A}})$ . On en déduit ainsi l'implication (i)  $\implies$  (ii). L'implication réciproque est déduite du lemme 4.2.61. C.Q.F.D

**LEMME 4.2.67** — Supposons que  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche. Soit  $f$  un push-out d'un élément de  $\nabla_\infty(\underline{\mathcal{A}})$ . Alors,  $\nabla_n(f) \in \mathbf{W}_{\mathcal{A}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

DEMONSTRATION Soit un carré cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & X \\ a \downarrow & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & X \amalg_A B \end{array}$$

avec  $a \in \nabla_\infty(\underline{\mathcal{A}})$ . L'objet  $\text{Cyl}_f(X) \amalg_{\text{Cyl}_a(A)} \text{Cyl}_a(B)$  est naturellement un cylindre sur  $X \amalg_A B$ . D'autre part, on dispose d'un carré cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} \text{Cyl}_a(A) \amalg_{(A \amalg A)} (B \amalg B) & \xrightarrow{\nabla(a)} & \text{Cyl}_a(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cyl}_f(X) \amalg_{(X \amalg X)} ((X \amalg_A B) \amalg (X \amalg_A B)) & \longrightarrow & \text{Cyl}_f(X) \amalg_{\text{Cyl}_a(A)} \text{Cyl}_a(B) \end{array}$$

Il vient (par le lemme 4.2.62) que  $\nabla(f)$  est équivalent à un push-out de  $\nabla(a)$ . Il suffira donc de montrer que  $f \in \mathbf{W}_{\mathcal{A}}$ .

Montrons que l'on peut supposer  $X$  cofibrant. Choisissons une fibration triviale  $X' \longrightarrow X$  avec  $X'$  cofibrant. Comme  $A$  est cofibrant, la flèche  $u$  se relève alors en une flèche  $u' : A \longrightarrow X'$ . On obtient ainsi un diagramme commutatif à carrés cocartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & X' \amalg_A B & \longrightarrow & X \amalg_A B \end{array}$$

Comme  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche, on voit que la classe de  $f$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  est isomorphe à celle de  $f'$ . Ainsi, on peut remplacer  $X$  par l'objet cofibrant  $X'$ .

Dans le cas où  $X$  est cofibrant, il suffit par le lemme 4.2.61 de montrer que  $f$  et  $\nabla(f)$  possèdent la propriété de relèvement à gauche par rapport aux projections  $X \longrightarrow *$  avec  $X$  fibrant et  $\mathcal{A}$ -local. Ceci est bien le cas, puisque  $\text{LLP}(X \rightarrow *)$  contient  $a$  et  $\nabla(a)$  et est stable par push-out. C.Q.F.D

Plus généralement, on a le résultat suivant :

**PROPOSITION 4.2.68** — *Si  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche, on a l'inclusion  $\text{Cell}(\nabla_{\infty}(\mathcal{A}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof})) \subset \mathbf{W}_{\mathcal{A}}$ .*

**DEMONSTRATION** On peut supposer (voir remarque 4.2.25) que  $g \in \text{Cell}(\nabla_{\infty}(\mathcal{A}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}))$  est la composée transfinie d'une  $\lambda$ -suite :

$$A = A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} \dots \longrightarrow A_{\nu} \xrightarrow{f_{\nu}} A_{\nu+1} \longrightarrow \dots$$

avec  $f_{\nu}$  un push-out d'un élément de  $\nabla_{\infty}(\mathcal{A}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof})$ . On construit par induction transfinie et en utilisant l'axiome **(MC5)**, un morphisme de  $\lambda$ -suites :

$$\begin{array}{ccccccc} A'_0 & \xrightarrow{f'_0} & A'_1 & \xrightarrow{f'_1} & \dots & \longrightarrow & A'_{\nu} & \xrightarrow{f'_{\nu}} & A'_{\nu+1} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A_0 & \xrightarrow{f_0} & A_1 & \xrightarrow{f_1} & \dots & \longrightarrow & A_{\nu} & \xrightarrow{f_{\nu}} & A_{\nu+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

à flèches verticales des équivalences faibles et  $f'_{\nu}$  des cofibrations entre objets cofibrants. Notons  $g'$  la composition transfinie des  $f'_{\nu}$ . Par le lemme 4.2.69 ci-dessous, la flèche  $g'$  est isomorphe à  $g$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . Il suffit donc de montrer que  $g'$  est dans  $\mathbf{W}_{\mathcal{A}}$ .

Comme  $g'$  est une flèche entre objets cofibrants, il s'agit de vérifier que l'application  $\pi_0(g', X)$  est bijective pour  $X$  fibrant et  $\mathcal{A}$ -local. Par le lemme 4.2.61, il suffira de prouver que  $g'$  et  $\nabla(g')$  possèdent la propriété de relèvement à gauche par rapport à  $X \longrightarrow *$ . Cette propriété pour  $g'$  découle de la propriété correspondante pour chaque  $f'_{\nu}$ . Montrons qu'il en est de même pour  $\nabla(g')$ .

On construit, par induction transfinie sur  $\mu \in \nu \in \lambda$ , des cylindres  $(\text{Cyl}(A'_{\nu}), p, i_0, i_1)$  sur  $A'_{\nu}$  ainsi que des flèches  $\text{Cyl}(A'_{\mu}) \longrightarrow \text{Cyl}(A'_{\nu})$  compatibles à  $p, i_0$  et  $i_1$  et tels que :

- la famille  $(\text{Cyl}(A'_{\nu}))_{\nu \in \lambda}$  est une  $\lambda$ -suite, i.e.,  $\text{Cyl}(A'_{\nu}) = \text{Colim}_{\mu \in \nu} \text{Cyl}(A'_{\mu})$  pour  $\nu$  un ordinal limite,
- pour tout  $\nu + 1 \in \lambda$ , la flèche  $\text{Cyl}(A'_{\nu}) \amalg_{(A'_{\nu} \amalg A'_{\nu})} (A'_{\nu+1} \amalg A'_{\nu+1}) \longrightarrow \text{Cyl}(A'_{\nu+1})$  est une cofibration.

Il vient par le lemme 4.2.62, que la flèche  $\nabla(g')$  est (équivalente à) la colimite des flèches  $\nabla(\circ_{\mu \leq \nu} f'_{\mu})$  (où l'on note  $\circ_{\mu \leq \nu} f'_{\mu} : A'_0 \longrightarrow A'_{\nu}$  la composée transfinie de la suite  $(f'_{\mu})_{\mu \leq \nu}$ ) :

$$(4.15) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \text{Cyl}(A'_0) \amalg_{A'_0 \amalg A'_0} (A'_{\nu} \amalg A'_{\nu}) & \longrightarrow & \text{Cyl}(A'_0) \amalg_{A'_0 \amalg A'_0} (A'_{\nu+1} \amalg A'_{\nu+1}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \nabla\left(\circ_{\mu \leq \nu} f'_{\mu}\right) & & \downarrow \nabla\left(\left(\circ_{\mu \leq \nu} f'_{\mu}\right) \circ f'_{\nu}\right) & & \\ \dots & \longrightarrow & \text{Cyl}(A'_{\nu}) & \longrightarrow & \text{Cyl}(A'_{\nu+1}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Les lignes de (4.15) sont des  $\lambda$ -suites et pour tout  $\nu \in \lambda$  la flèche :

$$\text{Cyl}(A'_\nu) \coprod_{(\text{Cyl}(A'_0) \coprod_{A'_0} \coprod_{A'_0} (A'_\nu \coprod A'_\nu))} \left( \text{Cyl}(A'_0) \coprod_{A'_0 \coprod A'_0} (A'_{\nu+1} \coprod A'_{\nu+1}) \right) \longrightarrow \text{Cyl}(A'_{\nu+1})$$

s'identifie à la cofibration  $\nabla(f'_\nu) : \text{Cyl}(A'_\nu) \coprod_{(A'_\nu \coprod A'_\nu)} (A'_{\nu+1} \coprod A'_{\nu+1}) \longrightarrow \text{Cyl}(A'_{\nu+1})$ . Il vient, par le lemme 4.2.70 ci-dessous, que  $\nabla(g') \in \text{LLP}(X \rightarrow *)$  si les  $\nabla(f'_\nu) \in \text{LLP}(X \rightarrow *)$  pour tout  $\nu \in \lambda$ .

Ainsi pour terminer la preuve de la proposition, il reste à vérifier que les  $f'_\nu$  et  $\nabla(f'_\nu)$  sont dans  $\text{LLP}(X \rightarrow *)$  pour tout  $X$  fibrant et  $\mathcal{A}$ -local. Lorsque  $f_\nu \in \mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}$ , la propriété est claire. On se place donc dans le cas où  $f_\nu$  est un push-out d'un élément de  $\nabla_\infty(\mathcal{A})$ .

Par le lemme 4.2.60, il suffira de montrer que  $f'_\nu$ ,  $\nabla(f'_\nu)$  et  $\nabla^2(f'_\nu)$  sont des  $\mathcal{A}$ -équivalences faibles. Étant donné que les images dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  de  $f'_\nu$ ,  $\nabla(f'_\nu)$  et  $\nabla^2(f'_\nu)$  sont isomorphes à ceux de  $f_\nu$ ,  $\nabla(f_\nu)$  et  $\nabla_2(f_\nu)$ , le résultat découle du lemme 4.2.67. C.Q.F.D

**LEMME 4.2.69** — Soit un morphisme de  $\lambda$ -suites :

$$\begin{array}{ccccccc} A'_0 & \xrightarrow{f'_0} & A'_1 & \xrightarrow{f'_1} & \dots & \longrightarrow & A'_\nu & \xrightarrow{f'_\nu} & A'_{\nu+1} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A_0 & \xrightarrow{f_0} & A_1 & \xrightarrow{f_1} & \dots & \longrightarrow & A_\nu & \xrightarrow{f_\nu} & A_{\nu+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

dans une catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  propre à gauche. On suppose que les flèches verticales sont des équivalences faibles et que les flèches horizontales sont des cofibrations. Alors le morphisme évident  $\text{Colim}_{\nu \in \lambda} A'_\nu \longrightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda} A_\nu$  est une équivalence faible.

DEMONSTRATION On peut factoriser notre morphisme de  $\lambda$ -suites de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} A'_0 & \xrightarrow{f'_0} & A'_1 & \xrightarrow{f'_1} & \dots & \longrightarrow & A'_\nu & \xrightarrow{f'_\nu} & A'_{\nu+1} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A_0 & \longrightarrow & A_0 \coprod_{A'_0} A'_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_0 \coprod_{A'_0} A'_\nu & \longrightarrow & A_0 \coprod_{A'_0} A'_{\nu+1} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A_0 & \xrightarrow{f_0} & A_1 & \xrightarrow{f_1} & \dots & \longrightarrow & A_\nu & \xrightarrow{f_\nu} & A_{\nu+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Comme  $A'_0 \longrightarrow A_0$  est une équivalence faible et que  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche, il vient que toutes les flèches  $A'_\nu \longrightarrow A_0 \coprod_{A'_0} A'_\nu$  sont des équivalences faibles. On déduit que toutes les flèches verticales dans le diagramme ci-dessus sont des équivalences faibles.

Remarquons également que le morphisme canonique :

$$\text{Colim}_{\nu \in \lambda} A'_\nu \longrightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda} (A_0 \coprod_{A'_0} A'_\nu) \simeq A_0 \coprod_{A'_0} \text{Colim}_{\nu \in \lambda} A'_\nu$$

est une équivalence faible puisque c'est le push-out de  $A'_0 \longrightarrow A_0$  par une cofibration. Ainsi, pour montrer le lemme, il reste à montrer que la flèche :

$$\text{Colim}_{\nu \in \lambda} (A_0 \coprod_{A'_0} A'_\nu) \longrightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda} A_\nu$$

est une équivalence faible. En d'autres termes, on peut supposer dans l'énoncé que  $A_0 = A'_0$ .

En considérant notre problème dans la catégorie de modèles  $A_0 \backslash \mathfrak{M}$  (voir le lemme 4.1.9), on voit qu'il suffit de traiter le cas où tous les  $A_\nu$  et  $A'_\nu$  sont cofibrants. Pour traiter ce cas, rappelons que la catégorie  $\mathbf{HOM}(\lambda, \mathfrak{M})$  admet une structure de modèles de Reedy (voir la remarque 4.1.54) où les équivalences faibles et les fibrations sont données terme à terme. Pour cette structure de modèles,  $\text{Colim}_{\nu \in \lambda}$  est un foncteur de Quillen à gauche et le morphisme de

$\lambda$ -suites  $A'_{\nu \in \lambda} \longrightarrow A_{\nu \in \lambda}$  est une équivalence faible entre objets cofibrants. Le résultat découle maintenant du lemme 4.1.26. C.Q.F.D

**LEMME 4.2.70** — Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $G \subset \text{Fl}(\mathcal{C})$  une classe de flèches. Soit  $\lambda$  un ordinal et supposons donné un morphisme de  $\lambda$ -suites dans  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_\nu & \longrightarrow & A_{\nu+1} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A'_0 & \longrightarrow & A'_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A'_\nu & \longrightarrow & A'_{\nu+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

On suppose que  $A_0 \longrightarrow A'_0$  est dans  $\text{LLP}(G)$  ainsi que les flèches :

$$A'_\nu \amalg_{A_\nu} A_{\nu+1} \longrightarrow A'_{\nu+1}$$

pour  $\nu + 1 \in \lambda$ . Alors  $\text{Colim}_{\nu \in \lambda} A_\nu \longrightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda} A'_\nu$  est dans  $\text{LLP}(G)$ .

**DEMONSTRATION** On vérifie que  $\text{Colim}_{\nu \in \lambda} A_\nu \longrightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda} A'_\nu$  possède la propriété de relèvement à gauche par rapport aux éléments de  $G$ . On se donne donc un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Colim}_{\nu \in \lambda} A_\nu & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow & \nearrow r & \downarrow f \\ \text{Colim}_{\nu \in \lambda} A'_\nu & \xrightarrow{u'} & Y \end{array}$$

avec  $f \in G$ . Pour construire le relèvement  $r$ , il suffit de se donner des relèvements  $r_\nu$  dans :

$$\begin{array}{ccc} A_\nu & \xrightarrow{u_\nu} & X \\ \downarrow & \nearrow r_\nu & \downarrow f \\ A'_\nu & \xrightarrow{u'_\nu} & Y \end{array}$$

d'une manière compatible. On procède par induction transfinie. Lorsque  $\nu = 0$ , on prend un relèvement quelconque  $r_0$ . L'ensemble des choix étant non vide puisque  $A_0 \longrightarrow A'_0$  est dans  $\text{LLP}(G)$ . Si  $\nu$  est un ordinal limite, on prend  $r_\nu$  la colimite de  $(r_\mu)_{\mu \in \nu}$ . Enfin, pour construire  $r_{\nu+1}$  d'une manière compatible avec  $r_\nu$ , il suffit de choisir un relèvement dans le carré :

$$\begin{array}{ccc} A'_\nu \amalg_{A_\nu} A_{\nu+1} & \xrightarrow{r_\nu \cup u_{\nu+1}} & X \\ \downarrow & \nearrow r_{\nu+1} & \downarrow f \\ A'_{\nu+1} & \xrightarrow{u'_{\nu+1}} & Y \end{array}$$

L'ensemble des choix étant encore non vide puisque la flèche verticale de droite est dans  $\text{LLP}(G)$ . C.Q.F.D

Voici le théorème qu'on cherche à démontrer :

**THEOREME 4.2.71** — Supposons que la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche et présentable par cofibrations. Si la classe  $\mathcal{A}$  est essentiellement petite, alors le quadruplet  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathcal{A}}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathcal{A}})$  est une catégorie de modèles qui est encore propre à gauche et présentable par cofibrations. De plus, c'est la localisation de Bousfield à gauche de  $\mathfrak{M}$  par rapport à  $\mathcal{A}$ .

On garde les hypothèses de l'énoncé ci-dessus. Soit  $\alpha$  un cardinal qui majore le cardinal de  $\mathcal{A}$  et tel que  $\mathfrak{M}$  est  $\alpha$ -présentable par cofibrations et les buts des flèches de  $\mathcal{A}$  sont  $\alpha$ -accessibles. On commence par quelques résultats préliminaires :

**PROPOSITION 4.2.72** — Il existe un foncteur  $\text{Loc}_{\mathcal{A}} : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$  et une transformation naturelle  $\text{id} \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}$  tels que :

- (i) Pour tout  $X \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ , l'objet  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(X)$  est fibrant et possède la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\nabla_{\infty}(\underline{\mathcal{A}})$ . En particulier,  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(X)$  est un objet  $\mathcal{A}$ -local.
- (ii) Pour tout  $X \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ , la flèche  $X \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(X)$  est dans  $\text{Cell}(\nabla_{\infty}(\underline{\mathcal{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_{\alpha})) \subset \mathbf{W}_{\mathcal{A}}$ .
- (iii) Le foncteur  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}$  préserve les cofibrations.
- (iv) Une flèche  $f \in \text{Fl}(\mathfrak{M})$  est une  $\mathcal{A}$ -équivalence faible si et seulement si  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(f)$  est une équivalence faible.
- (v) Le foncteur  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}$  est  $\alpha$ -accessible. Si  $\beta$  est un cardinal comme dans la proposition 4.2.41, alors le foncteur  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}$  préserve les objets  $\beta$ -accessibles.

DEMONSTRATION Mise à part la quatrième assertion, le résultat découle du lemme précédent et de l'argument du petit objet (voir la proposition 4.2.26) appliqué à la classe essentiellement petite  $\nabla_{\infty}(\underline{\mathcal{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_{\alpha})$ .

Montrons la troisième assertion. Soit  $f : U \longrightarrow V$  une  $\mathcal{A}$ -équivalence faible. En considérant le carré :

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \text{Loc}_{\mathcal{A}}(U) \\ f \downarrow & & \downarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(f) \\ V & \longrightarrow & \text{Loc}_{\mathcal{A}}(V) \end{array}$$

et en utilisant la proposition 4.2.68, on voit que  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(f)$  est également une  $\mathcal{A}$ -équivalence faible. Ainsi, pour conclure, il suffira de montrer qu'une  $\mathcal{A}$ -équivalence faible entre objets  $\mathcal{A}$ -locaux est forcément une équivalence faible. Ceci découle immédiatement du lemme de Yoneda appliqué à la sous-catégorie des objets  $\mathcal{A}$ -locaux de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.2.73** — La classe  $\mathbf{Cof} \cup \mathbf{W}_{\mathcal{A}}$  est stable par push-out et composition transfinie.

DEMONSTRATION Pour tout objet  $X$  de  $\mathfrak{M}$  la flèche  $X \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(X)$  est naturellement munie d'une structure de  $\lambda$ -complexe  $(\nabla_{\infty}(\underline{\mathcal{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_{\alpha}))$ -cellulaire par le corollaire 4.2.28. De plus, pour tout monomorphisme  $X_0 \longrightarrow X_1$ , la sous-flèche  $X_0 \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(X_0)$  de  $X \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(X)$  est cellulaire au sens de la définition 4.2.34 (ceci étant conséquence du lemme 4.2.35).

Considérons une  $\lambda$ -suite :  $A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_{\nu} \longrightarrow A_{\nu+1} \longrightarrow \dots$  formée de cofibrations  $\mathcal{A}$ -triviales.

Formons le diagramme suivant :

$$(4.16) \quad \begin{array}{ccccc} A_0 & \longrightarrow & \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A_0) & & \\ \downarrow & & \downarrow (2) & \searrow & \\ \text{Colim}_{\nu \in \lambda} A_{\nu} & \longrightarrow & \text{Colim}_{\nu \in \lambda} \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A_{\nu}) & \xrightarrow{(1)} & \text{Loc}_{\mathcal{A}}(\text{Colim}_{\nu \in \lambda} A_{\nu}) \end{array}$$

La flèche  $\text{Colim}_{\nu \in \lambda} A_{\nu} \longrightarrow \text{Colim}_{\nu \in \lambda} \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A_{\nu})$  est colimite filtrante des sous-flèches cellulaires  $A_{\nu} \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A_{\nu})$  de  $\text{Colim}_{\nu \in \lambda} A_{\nu} \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(\text{Colim}_{\nu \in \lambda} A_{\nu})$ . Elle est donc elle-même une sous-flèche cellulaire par le corollaire 4.2.37. Ceci montre que la flèche (1) du diagramme (4.16) est dans  $\text{Cell}(\nabla_{\infty}(\underline{\mathcal{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_{\alpha}))$ . C'est donc une  $\mathcal{A}$ -équivalence faible par la proposition 4.2.68.

Pour conclure, il suffit de montrer que la flèche (2) de (4.16) est dans  $\text{Cell}(\nabla_{\infty}(\underline{\mathcal{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}))$ . On peut voir cette flèche comme la composée transfinie d'une  $\lambda + 1$ -suite :

$$U_0 \equiv U_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow U_{\nu} \longrightarrow U_{\nu+1} \longrightarrow \dots$$

avec  $U_{\nu} = \text{Colim}_{\mu \in \nu} \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A_{\mu})$  pour  $0 \neq \nu \in \lambda + 1$ . Il suffit donc de prouver que les flèches  $U_{\nu} \longrightarrow U_{\nu+1}$ , i.e. :

$$(4.17) \quad \text{Colim}_{\mu \in \nu} \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A_{\mu}) \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A_{\nu})$$

sont dans  $\text{Cell}(\nabla_{\infty}(\underline{\mathcal{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}))$ . Lorsque  $\nu = \mu + 1$ , la flèche (4.17) est simplement  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(A_{\mu}) \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A_{\nu})$  qui est une cofibration triviale, par la proposition 4.2.72, puisque  $A_{\mu} \longrightarrow A_{\nu}$  est une cofibration  $\mathcal{A}$ -triviale. Lorsque  $\nu$  est un ordinal limite, cette flèche s'écrit :

$$(4.18) \quad \text{Colim}_{\mu \in \nu} \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A_{\mu}) \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(\text{Colim}_{\mu \in \nu} A_{\mu})$$

L'argument utilisé au début de la preuve pour traiter le cas de la flèche (1) du diagramme (4.16) montre que (4.18) est dans  $\text{Cell}(\nabla_{\infty}(\underline{\mathcal{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_{\alpha}))$ .

Il nous reste à montrer la stabilité par co-changement de base. Considérons un carré cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ a \downarrow & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & X \amalg_A B \end{array}$$

avec  $a \in \mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}_{\mathcal{A}}$ . On forme alors le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \amalg_A \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \amalg_A B & \longrightarrow & X \amalg_A \text{Loc}_{\mathcal{A}}(B) \end{array}$$

Les flèches horizontales sont des push-out des flèches  $A \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A)$  et  $B \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(B)$ . Elles sont donc dans  $\text{Cell}(\nabla_{\infty}(\underline{\mathcal{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_{\alpha}))$ . D'autre part,  $X \amalg_A \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A) \longrightarrow X \amalg_A \text{Loc}_{\mathcal{A}}(B)$  est un push-out de la cofibration triviale  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(A) \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(B)$ . C.Q.F.D

On obtient la caractérisation suivante de la classe des  $\mathcal{A}$ -équivalences faibles :

**PROPOSITION 4.2.74** — *Sous les hypothèses du théorème 4.2.71, la classe  $\mathbf{W}_{\mathcal{A}}$  est la plus petite classe  $\mathcal{C}$  telle que :*

- $\mathcal{C}$  contient  $\mathbf{W}$  et  $\underline{\mathcal{A}}$ ,
- $\mathcal{C}$  vérifie la propriété 2 sur 3,
- $\mathcal{C} \cap \mathbf{Cof}$  est stable par push-out et composition transfinie.

**DEMONSTRATION** Nous avons vu que  $\mathbf{W}_{\mathcal{A}}$  vérifie les propriétés mentionnées. On montre réciproquement que si la classe  $\mathcal{C}$  vérifie les propriétés ci-dessus, elle contient  $\mathbf{W}_{\mathcal{A}}$ .

Remarquons d'abord que si  $f : X \longrightarrow Y \in \mathcal{C} \cap \mathbf{Cof}$  alors  $\nabla(f) \in \mathcal{C}$ . En effet,  $f \cup f : X \amalg X \longrightarrow Y \amalg Y$  est dans  $\mathcal{C}$  puisque c'est la composée de deux push-out de  $f$ . Il vient alors que :

$$\text{Cyl}(X) \longrightarrow \text{Cyl}(X) \amalg_{(X \amalg X)} (Y \amalg Y)$$

est également dans  $\mathcal{C}$ . Étant donné que  $\text{Cyl}(X) \longrightarrow \text{Cyl}(Y)$  est aussi dans  $\mathcal{C}$ , par la propriété 2 sur 3 nous déduisons que  $\nabla(f) \in \mathcal{C}$ . Ceci montre que  $\mathcal{C}$  contient  $\text{Cell}(\nabla_{\infty}(\underline{\mathcal{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}))$ .

Pour montrer l'inclusion  $\mathbf{W}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}$ , on forme pour une  $\mathcal{A}$ -équivalence faible  $f$  le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A) \\ f \downarrow & & \downarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(f) \\ B & \longrightarrow & \text{Loc}_{\mathcal{A}}(B) \end{array}$$

L'appartenance  $f \in \mathcal{C}$  découle alors de la propriété de 2 sur 3 de  $\mathcal{C}$ , le fait que les flèches horizontales sont dans  $\text{Cell}(\nabla_{\infty}(\underline{\mathcal{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}))$  et que  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(f)$  est une équivalence faible (voir la proposition 4.2.72). C.Q.F.D

L'étape suivante consiste à montrer :

**PROPOSITION 4.2.75** — *Un morphisme dans  $\text{RLP}(\mathbf{Cof}_{\beta} \cap \mathbf{W}_{\mathcal{A}})$  est une  $\mathcal{A}$ -fibration, i.e., appartient à  $\mathbf{Fib}_{\mathcal{A}}$  (voir la définition 4.2.64).*

**DEMONSTRATION** Soit  $f : X \longrightarrow Y$  une flèche dans  $\text{RLP}(\mathbf{Cof}_{\beta} \cap \mathbf{W}_{\mathcal{A}})$ . On veut montrer que  $f$  admet aussi la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les cofibrations  $\mathcal{A}$ -triviales  $u : A \longrightarrow B$ . Comme  $u$  est un rétract de  $c(u)$ , il suffit de vérifier la propriété de relèvement à droite par rapport à  $c(u)$ . On se donne donc un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ c(u) \downarrow & & \downarrow f \\ \Phi_{cf_0}(u) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

On considère l'ensemble  $\mathcal{E}$  formé des classes d'isomorphismes de couples  $(v, a)$  avec  $v : A \longrightarrow T$  une sous-cofibration  $r$ -normale de  $c(u)$  (voir la définition 4.2.51) qui est de plus  $\mathcal{A}$ -triviale et  $a$  un relèvement partiel :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & X \\ v \downarrow & \nearrow a & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\quad} \Phi_{cf_0}(u) \longrightarrow & Y \end{array}$$

Cet ensemble est non vide puisqu'il contient  $(\text{id}_A, A \rightarrow X)$ . Il est naturellement ordonné de la manière suivante :  $(v, a) \leq (v', a')$  si la sous-flèche  $v : A \longrightarrow T$  est majorée par  $v' : A \longrightarrow T'$  et si la restriction de  $a' : T' \longrightarrow X$  à  $T$  est égale à  $a$ . Par la proposition 4.2.54 et le corollaire 4.2.73, on voit que toutes les chaînes de l'ensemble  $\mathcal{E}$  sont majorées par leur colimite. Ainsi, par le lemme de Zorn, il existe des éléments maximaux dans  $\mathcal{E}$ .

Dans la suite, on fixe un élément de  $\mathcal{E}$  :

$$(v : A \longrightarrow T, a : T \longrightarrow X)$$

que l'on supposera maximal et on montrera que  $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$  est inversible. Considérons le diagramme de catégories directes :

$$(4.19) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{SpSub}_\beta(\text{Loc}_{\mathcal{A}}(v)|r'') & & & & \mathbf{SpSub}_\beta(\text{Loc}_{\mathcal{A}}(u)|r') \\ \text{inc} \downarrow & & & & \downarrow \text{inc} \\ \mathbf{Sub}_\beta(\text{Loc}_{\mathcal{A}}(v)) & \xleftarrow{E} & \mathbf{Sub}_\beta(v) & \xleftarrow{F} & \mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v}(u|r) \xrightarrow{G} \mathbf{Sub}_\beta(\text{Loc}_{\mathcal{A}}(u)) \end{array}$$

Les notations sont expliquées ci-dessous :

1.  $r' : \text{Loc}_{\mathcal{A}}(B) \longrightarrow \Phi_{c_0f}(\text{Loc}_{\mathcal{A}}(u))$  et  $r'' : \text{Loc}_{\mathcal{A}}(T) \longrightarrow \Phi_{c_0f}(\text{Loc}_{\mathcal{A}}(v))$  sont des relèvements comme dans le cas respé de la définition 4.2.51. Ces relèvements existent puisque  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(u)$  et  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(v)$  sont des cofibrations triviales par la proposition 4.2.72.
2. Les foncteurs *inc* sont les inclusions évidentes.
3. Le foncteur *E* associe à une sous-flèche  $v_0$  de  $v$ , la sous-flèche  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(v_0)$  de  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(v)$ .
4. Le foncteur *F* associe à une sous-flèche  $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$  de  $u$ , la sous-flèche  $v_0 : A_0 \longrightarrow T_0 = T \times_{\Phi_{cf_0}(u)} \Phi_{cf_0}(u_0)$  de  $v$ .
5. Le foncteur *G* associe à une sous-flèche  $u_0$  de  $u$ , la sous-flèche  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(u_0)$  de  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(u)$ .

Toutes les catégories du diagramme (4.19) sont  $\beta$ -filtrantes et admettent les colimites suivant les catégories  $\alpha$ -filtrantes de cardinal plus petit ou égal à  $\alpha$ . De plus, les foncteurs *inc*, *E*, *F* et *G* commutent à ces colimites. Ces foncteurs sont également cofinaux. Le lemme 4.2.4 affirme donc que la limite  $\mathcal{L}$  de (4.19) est cofinale dans  $\mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v}(u|r)$ .

Par construction,  $\mathcal{L}$  est formée des sous-cofibrations  $r$ -spéciales  $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$  de  $u$  qui sont orthogonales à  $v$  et telles que :

- $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(u_0)$  est une sous-flèche  $r'$ -spéciale de  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(u)$ . En particulier, c'est une équivalence faible,
- $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(v_0)$  est une sous-flèche  $r''$ -spéciale de  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(v)$ . En particulier, c'est une équivalence faible.

Ainsi, par la proposition 4.2.72, les cofibrations  $u_0$  et  $v_0$  sont  $\mathcal{A}$ -triviales.

Comme  $u_0$  est orthogonale à  $v$ , on peut former par la proposition 4.2.55 la sous-cofibration  $r$ -normale  $v' : A \longrightarrow T' = T \coprod_{T_0} \Phi_{cf_0}(u_0)$ . Comme  $u_0$  et  $v_0$  sont des  $\mathcal{A}$ -équivalences faibles, on déduit que  $v'$  est encore  $\mathcal{A}$ -triviale.

Notons  $a_0$  la restriction de  $a$  à  $T_0$ . Comme  $\Phi_{cf_0}(u_0)$  est  $\beta$ -accessible, et que  $f \in \text{RLP}(\mathbf{Cof}_\beta \cap \mathbf{W}_{\mathcal{A}})$ , on peut trouver un relèvement dans le carré :

$$\begin{array}{ccc} T_0 & \xrightarrow{a_0} & X \\ \downarrow & \nearrow l & \downarrow f \\ \Phi_{cf_0}(u_0) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Ainsi, en posant  $a' = a \cup l : T \coprod_{T_0} \Phi_{cf_0}(u_0) \longrightarrow X$ , on obtient un élément  $(v', a')$  de  $\mathcal{E}$  qui majore  $(v, a)$ . Par maximalité de  $(v, a)$ , le sous-objet  $\Phi_{cf_0}(u_0)$  de  $\Phi_{cf_0}(u)$  est majoré par  $T$ . Ainsi, le foncteur  $\mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{Sub}(c(u))$  qui à  $u_0$  associe  $c(u_0) : A_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0)$  se factorise par  $\mathbf{Sub}(v)$ . Comme  $\mathcal{L}$  est cofinal dans  $\mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v}(u|r)$  qui est cofinal

dans  $\mathbf{Sub}_\beta(u)$  et que le foncteur  $\Phi_{c_{f_0}}$  est  $\alpha$ -accessible, on voit que  $v \geq \text{Colim}_{\mathcal{L}}(c(-) : \mathcal{L} \rightarrow \mathbf{Sub}(c(u))) = c(u)$ . Ceci prouve que  $T \simeq \Phi_{c_{f_0}}(u)$ . C.Q.F.D

On peut maintenant achever la preuve du théorème 4.2.71. Les axiomes **(MC1)**, **(MC2)**, **(MC3)** sont triviaux. La deuxième partie de l'axiome **(MC5)** est triviale elle aussi. La première partie, découle de la proposition précédente et de l'argument du petit objet appliqué à un ensemble essentiellement équivalent à  $\mathbf{Cof}_\beta \cap \mathbf{W}_{\mathcal{A}}$ .

Par construction, la première partie de l'axiome **(MC4)** est claire. La seconde partie du même axiome, découle alors par l'astuce de Joyal (voir **[Hir03]** ou **[Hov99]**).

Enfin, pour voir que  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathcal{A}}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathcal{A}})$  est la localisation de Bousfield de  $\mathfrak{M}$ , on se donne une adjonction de Quillen  $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$  telle que la classe  $LF(\mathcal{A})$  est formée d'isomorphismes. On va montrer que le couple de foncteur adjoints  $(F, G)$  forment un adjonction de Quillen relativement à la structure  $\mathcal{A}$ -localisée de  $\mathfrak{M}$ . Il suffit de montrer que  $F$  préserve les cofibrations  $\mathcal{A}$ -triviales puisque  $F$  préserve déjà les cofibrations. Soit donc  $u : A \longrightarrow B$  une cofibrations  $\mathcal{A}$ -triviale. On forme le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \text{Loc}_{\mathcal{A}}(A) \\ u \downarrow & & \downarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(u) \\ B & \longrightarrow & \text{Loc}_{\mathcal{A}}(B) \end{array}$$

Comme  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(u)$  est une cofibration triviale, son image par  $F$  est une équivalence faible. Il suffira donc de montrer que  $F(\text{Cell}(\nabla_\infty(\mathcal{A}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}))) \subset \mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}$ . Comme  $F$  commute aux colimites et que  $\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}$  est stable par push-out et compositions transfinies, il nous reste à montrer que  $F(\nabla_\infty(\mathcal{A})) \subset \mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}$ . Ceci découle du fait que la classe  $F(\nabla_\infty(\mathcal{A}))$  est équivalente dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  à  $\nabla_\infty(F(\mathcal{A}))$  et que la construction  $a \rightsquigarrow \nabla(a)$  préserve les cofibrations triviales.

### 4.2.5 Quelques compléments

Dans cette dernière sous-section, on se donne une catégorie de modèles monoïdale  $(\mathfrak{M}, \otimes)$  au sens de la définition 4.1.57. On suppose que  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche et présentable par cofibrations. On cherche un critère pour que la localisation de Bousfield suivant la classe essentiellement petite  $\mathcal{A} \subset \text{Fl}(\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}))$  soit encore une catégorie de modèles monoïdale. Dans cette direction, nous avons obtenu le critère peu satisfaisant :

**PROPOSITION 4.2.76** — *La catégorie de modèles  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathcal{A}}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathcal{A}})$  est une catégorie de modèles monoïdale lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) pour  $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$  cofibrant et  $f \in \mathcal{A}$ , les flèches  $A \otimes f$  et  $f \otimes A$  sont des  $\mathcal{A}$ -équivalences faibles,
- (ii) la catégorie de modèles  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathcal{A}}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathcal{A}})$  est stable.

On rappelle le lecteur que  $\mathcal{A}$  est un ensemble de cofibrations entre objets cofibrants de  $\mathfrak{M}$  qui relève à équivalences faibles près la classe  $\mathcal{A}$ . La condition (i) du critère ci-dessus est nécessaire. C'est la condition (ii) qui rend ce critère peu applicable.

**LEMME 4.2.77** — *On suppose vérifiée la condition (i) de la proposition 4.2.76. Pour  $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$  cofibrant, les foncteurs  $(A \otimes -)$  et  $(- \otimes A) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$  sont des foncteurs de Quillen à gauche relativement à la structure  $\mathcal{A}$ -localisée.*

**DEMONSTRATION** Le foncteur  $A \otimes - : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$  est un foncteur de Quillen à gauche. Étant donné que  $(A \otimes -)$  envoie  $\mathcal{A}$  sur des  $\mathcal{A}$ -équivalences faibles, on voit que  $A \otimes -$  est encore un foncteur de Quillen à gauche relativement à la structure  $\mathcal{A}$ -localisée. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.2.78** — *La condition (i) de la proposition 4.2.76 est équivalente à :*

- (i') pour toute cofibration  $\mathcal{A}$ -triviale  $f$  et tout objet cofibrant  $A \in \mathfrak{M}$ , les flèches  $A \otimes f$  et  $f \otimes A$  sont des cofibrations  $\mathcal{A}$ -triviales.

Dans la suite, nous supposons que les conditions (i) et (ii) de la proposition 4.2.76 sont satisfaites. Soit  $a : A \longrightarrow B$  une cofibration de  $\mathfrak{M}$ . On note  $\mathcal{C}_a$  la classe des cofibrations  $\mathcal{A}$ -triviales  $u : U \longrightarrow V$  telles que  $a \square u : A \otimes V \amalg_{A \otimes U} B \otimes U \longrightarrow B \otimes V$  est une  $\mathcal{A}$ -équivalence faible (et donc une cofibration  $\mathcal{A}$ -triviale). Notre but est donc de prouver que l'inclusion  $\mathcal{C}_a \subset \mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}_{\mathcal{A}}$  est une égalité. Notons le lemme simple suivant :

**LEMME 4.2.79** — *La classe  $\mathcal{C}_a$  est stable par retract, composition transfinie et push-out.*

**DEMONSTRATION** En effet, si  $u'$  est un push-out de  $u$  alors  $a \square u'$  est un push-out de  $a \square u$ . La stabilité par composition transfinie découle immédiatement du lemme 4.2.69. C.Q.F.D

Le lemme suivant est le seul endroit où l'on a besoin de l'hypothèse que  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathcal{A}}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathcal{A}})$  est stable :



**LEMME 4.2.80** — *Supposons donnée une suite composable de cofibrations  $\mathcal{A}$ -triviales :  $U \xrightarrow{u} V \xrightarrow{v} W$ . Si  $v$  et  $v \circ u$  sont dans  $\mathcal{C}_a$ , il en est de même de  $u$ .*

DEMONSTRATION La flèche  $a\Box(v \circ u)$  se factorise de la manière suivante :

$$A \otimes W \coprod_{A \otimes U} B \otimes U \xrightarrow{r} A \otimes W \coprod_{A \otimes V} B \otimes V \xrightarrow{a \otimes v} B \otimes W$$

Il vient que la flèche  $r$  est une  $\mathcal{A}$ -équivalence faible.

Remarquons alors que  $r$  est le push-out de  $a\Box u$  suivant la flèche  $A \otimes V \coprod_{A \otimes U} B \otimes U \longrightarrow A \otimes W \coprod_{A \otimes U} B \otimes U$ . Ceci montre que la cofibration  $* \longrightarrow \mathbf{Cof}(a\Box u)$  est une  $\mathcal{A}$ -équivalence faible. Comme  $\mathbf{Ho}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{M})$  est triangulée, on déduit que  $a\Box u$  est inversible dans  $\mathbf{Ho}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{M})$ . C.Q.F.D

Soit  $u : U \longrightarrow V$  une cofibration  $\mathcal{A}$ -triviale. Par la proposition 4.2.66, on dispose d'un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \text{Loc}_{\mathcal{A}}(U) \\ u \downarrow & & \downarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}(u) \\ V & \longrightarrow & \text{Loc}_{\mathcal{A}}(V) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont dans  $\text{Cell}(\nabla_{\infty}(\mathcal{A}) \cup (\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}))$  et la flèche  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(u)$  dans  $\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}$ . Ainsi, par le lemme 4.2.80, pour montrer que  $u \in \mathcal{C}_a$ , il suffit de montrer que  $\nabla_{\infty}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}_a$ . Remarquons alors que les flèches de  $\nabla_{\infty}(\mathcal{A})$  sont des cofibrations  $\mathcal{A}$ -triviales de source un objet cofibrant. Il suffit donc de prouver le lemme :

**LEMME 4.2.81** — *Soit  $u : U \longrightarrow V$  une cofibration  $\mathcal{A}$ -triviale avec  $U$  cofibrant. Alors pour toute cofibration  $a : A \longrightarrow B$ , la cofibration  $a\Box u : A \otimes V \coprod_{A \otimes U} B \otimes U \longrightarrow B \otimes V$  est  $\mathcal{A}$ -triviale.*

DEMONSTRATION On fixe un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{a'} & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{a} & B \end{array}$$

à flèches verticales des équivalences faibles et tel que  $a'$  est une cofibration entre objets cofibrants. On notera  $C = A \coprod_{A'} B'$  et  $c$  la cofibration  $A \longrightarrow C$ . Comme  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche, la flèche évidente  $C \longrightarrow B$  est une équivalence faible.

Remarquons d'abord que  $a'\Box u$  est une cofibration  $\mathcal{A}$ -triviale. En effet, les flèches verticales du carré :

$$\begin{array}{ccc} A' \otimes U & \longrightarrow & B' \otimes U \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' \otimes V & \longrightarrow & B' \otimes U \end{array}$$

sont des  $\mathcal{A}$ -équivalences faibles puisque  $A'$  et  $B'$  sont cofibrants. Il vient que  $c\Box u$  est aussi une  $\mathcal{A}$ -équivalence faible. Pour conclure, nous allons montrer que les flèches verticales du carré commutatif :

$$(4.20) \quad \begin{array}{ccc} A \otimes V \coprod_{A \otimes U} C \otimes U & \xrightarrow{c\Box u} & C \otimes V \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes V \coprod_{A \otimes U} B \otimes U & \xrightarrow{a\Box u} & B \otimes V \end{array}$$

sont des équivalences faibles. Pour voir que la flèche  $C \otimes V \longrightarrow B \otimes V$  est une équivalence faible, il suffit de remarquer que  $- \otimes V$  induit un foncteur de Quillen à gauche :  $A \setminus \mathfrak{M} \longrightarrow A \otimes V \setminus \mathfrak{M}$  et que  $C \longrightarrow B$  est une équivalence faible entre les deux objets cofibrants  $A \rightarrow C$  et  $A \rightarrow B$  de  $A \setminus \mathfrak{M}$ .

Le même raisonnement montre que  $C \otimes U \longrightarrow B \otimes U$  est une équivalence faible. Pour conclure, on considère la flèche verticale de gauche du carré (4.20) comme étant l'image par le foncteur de Quillen à gauche  $A \otimes V \coprod_{A \otimes U} - : A \otimes U \setminus \mathfrak{M} \longrightarrow A \otimes V \setminus \mathfrak{M}$  de l'équivalence faible  $C \otimes U \longrightarrow B \otimes U$  entre les objets cofibrants  $A \otimes U \rightarrow C \otimes U$  et  $A \otimes U \rightarrow B \otimes U$  de  $A \otimes U \setminus \mathfrak{M}$ . C.Q.F.D

Notons enfin le critère suivant de stabilité de la structure  $\mathcal{A}$ -localisée :

**PROPOSITION 4.2.82** — Soient  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles présentable par cofibrations et  $\mathcal{A}$  une classe essentiellement petite de flèches dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . On suppose que  $\mathfrak{M}$  est stable. Pour que la structure  $\mathcal{A}$ -localisée de  $\mathfrak{M}$  soit encore stable, il faut et il suffit que l'une des deux conditions équivalentes soient satisfaites :

- (i) le foncteur  $\Omega^1 : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  envoie les flèches de  $\nabla_\infty(\mathcal{A})$  sur des  $\mathcal{A}$ -équivalences faibles,
- (ii) le foncteur  $\Sigma^1$  preserve les objets  $\mathcal{A}$ -locaux de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ .

DEMONSTRATION Le fait que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes est un simple exercice d'adjonction (vue que  $\Sigma^1$  et  $\Omega^1$  sont des équivalences inverses l'une de l'autre). La condition (i) est nécessaire. En effet, si  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathcal{A}}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathcal{A}})$  est stable, le foncteur évident  $L : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{M})$  est triangulé. Ainsi, si  $f \in \nabla_\infty(\mathcal{A})$ , la flèche  $L(f)$  est inversible et donc aussi  $\Omega^1(L(f)) \simeq L(\Omega^1(f))$ .

La condition (ii) est suffisante. En effet, elle montre que  $\Omega^1$  preserve les  $\mathcal{A}$ -équivalences faibles dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . Ceci est également le cas pour  $\Sigma^1$ . L'équivalence  $(\Sigma^1, \Omega^1)$  passe alors à la localisation  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \rightsquigarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})[\mathbf{W}_{\mathcal{A}}^{-1}]$  et induit donc une équivalence  $(\Sigma^1, \Omega^1)$  sur  $\mathbf{Ho}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{M})$ . C.Q.F.D

### 4.3 Catégories de modèles III : les spectres symétriques

On présente ici la technique de stabilisation des catégories de modèles par rapport à un endofoncteur. On suit les grandes lignes de l'article de Hovey [**Hov01**].

Dans cette section,  $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désignera un *monoïde gradué et unitaire* dans la catégorie des groupes. C'est donc la donnée pour tout entier naturel  $n$  d'un groupe  $\Phi_n$  et pour tout couple  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  d'un morphisme de groupes :

$$(4.21) \quad \phi_{m,n} : \Phi_m \times \Phi_n \longrightarrow \Phi_{m+n}$$

tel que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Pour tout triplet  $(m, n, r) \in \mathbb{N}^3$ , le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Phi_m \times \Phi_n \times \Phi_r & \xrightarrow{\phi_{m,n}} & \Phi_{m+n} \times \Phi_r \\ \phi_{n,r} \downarrow & & \downarrow \phi_{m+n,r} \\ \Phi_m \times \Phi_{n+r} & \xrightarrow{\phi_{m,n+r}} & \Phi_{m+n+r} \end{array}$$

est commutatif.

- (ii) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les deux composées :

$$\Phi_n \simeq \{1\} \times \Phi_n \xrightarrow{\phi_{0,n}} \Phi_0 \times \Phi_n \xrightarrow{\phi_{0,n}} \Phi_n \quad \text{et} \quad \Phi_n \simeq \Phi_n \times \{1\} \xrightarrow{\phi_{n,0}} \Phi_n \times \Phi_0 \xrightarrow{\phi_{n,0}} \Phi_n$$

sont l'identité (avec 1 l'élément neutre de  $\Phi_0$ ).

On est particulièrement intéressé par les deux exemples suivants :

**Exemple 4.3.1** — 1- Le monoïde trivial  $\{1\}$  donné en chaque degré par le groupe à un élément  $\{1\}$ .

2- Le monoïde des groupes symétriques  $\Sigma = (\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\Sigma_n$  est le groupe des permutations de l'ensemble  $\{i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$  (qui est donc vide pour  $n = 0$ ). Le morphisme de groupes  $\phi_{m,n} : \Sigma_m \times \Sigma_n \longrightarrow \Sigma_{m+n}$  associée à un couple de permutations  $(f, g)$  la permutation  $f \bullet g$  définie par :

$$f \bullet g(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si } 1 \leq i \leq m, \\ g(i - m) + m & \text{si } m + 1 \leq i \leq m + n. \end{cases}$$

pour  $i \in \{1, \dots, m + n\}$ .

**Remarque 4.3.2** — Pour  $(a, g) \in \Phi_0 \times \Phi_m$ , on a :

$$\phi_{0,m}(a, g) = \begin{cases} \phi_{0,m}((a, 1)(1, g)) = \phi_{0,m}(a, 1)\phi_{0,m}(1, g) = \phi_{0,m}(a, 1) \cdot g \\ \phi_{0,m}((1, g)(a, 1)) = \phi_{0,m}(1, g)\phi_{0,m}(a, 1) = g \cdot \phi_{0,m}(a, 1) \end{cases}$$

Ceci montre que le morphisme  $\phi_{0,m}(-, 1) : \Phi_0 \longrightarrow \Phi_m$  est central (en particulier,  $\Phi_0$  est abélien et  $\phi_{0,0}$  et l'application produit). Il en est de même de  $\phi_{m,0}(1, -)$ . Notons toutefois que les deux morphismes de groupes  $\phi_{0,m}(-, 1)$  et  $\phi_{m,0}(1, -)$  sont en général différents lorsque  $m \geq 1$ .

### 4.3.1 Les $(F, \Phi)$ -spectres dans une catégorie abstraite

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On commence par une série de définitions :

**DEFINITION 4.3.3** — 1- Pour un groupe  $G$ , on note  $\mathbf{Rep}(G, \mathcal{C})$  la catégorie des  $G$ -représentations dans  $\mathcal{C}$ , i.e., des foncteurs  $\bullet\{G\} \longrightarrow \mathcal{C}$  où  $\bullet\{G\}$  est la catégorie à un objet  $\bullet$  et  $\text{end}(\bullet) = G$ .

2- On note  $\mathbf{Suite}(\Phi, \mathcal{C})$  la catégorie  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Rep}(\Phi_n, \mathcal{C})$ . Les objets de cette catégorie sont appelés les suites  $\Phi$ -symétriques de  $\mathcal{C}$ . Ce sont les familles d'objets  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{C}$  munies d'actions  $\Phi_n \longrightarrow \text{Aut}(X_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**DEFINITION 4.3.4** — Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Un endofoncteur  $\Phi$ -symétrique de  $\mathcal{C}$  est un foncteur  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  muni pour tout  $n \in \mathbb{N}$  d'une action  $\alpha_F : \Phi_n \longrightarrow \text{Aut}(F^{\circ n})$ , telle que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Phi_m \times \Phi_n & \longrightarrow & \text{Aut} \left( \overbrace{F \circ \dots \circ F}^m \right) \times \text{Aut} \left( \overbrace{F \circ \dots \circ F}^n \right) \\ \downarrow \phi_{m,n} & & \downarrow \\ \Phi_{m+n} & \longrightarrow & \text{Aut} \left( \underbrace{F \circ \dots \circ F}_m \circ \underbrace{F \circ \dots \circ F}_n \right) \end{array}$$

est commutatif pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

**Remarque 4.3.5** — À un endofoncteur  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  on peut associer un monoïde gradué et unitaire dans la catégorie des groupes (non nécessairement petits) en posant  $\Phi_n(F) = \text{Aut}(F^{\circ n})$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Il est alors clair qu'un endofoncteur  $\Phi$ -symétrique est simplement un endofoncteur  $F$  muni d'un morphisme de monoïdes gradués  $\alpha_F : (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (\Phi_n(F))_{n \in \mathbb{N}}$ .

**DEFINITION 4.3.6** — Soit  $F$  un endofoncteur  $\Phi$ -symétrique de  $\mathcal{C}$ .

1- Un  $F$ -spectre  $\Phi$ -symétrique  $\mathbf{X}$  (ou simplement un  $(F, \Phi)$ -spectre) est une suite  $\Phi$ -symétrique  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{C}$  munie de morphismes d'assemblage  $\gamma_n : F(\mathbf{X}_n) \longrightarrow \mathbf{X}_{n+1}$  tels que pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  la composée :

$$F^{\circ m}(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{F^{\circ m-1}(\gamma_n)} F^{\circ m-1} \mathbf{X}_{1+n} \longrightarrow \dots \longrightarrow F(\mathbf{X}_{m-1+n}) \xrightarrow{\gamma_{m-1+n}} \mathbf{X}_{m+n}$$

est  $\Phi_m \times \Phi_n$ -équivariante relativement à :

- l'action sur  $F^{\circ m}(\mathbf{X}_n)$  induite par l'action de  $\Phi_m$  sur  $F^{\circ m}$  et l'action de  $\Phi_n$  sur  $\mathbf{X}_n$ ,
- l'action sur  $\mathbf{X}_{m+n}$  obtenue par restriction de l'action de  $\Phi_{m+n}$  suivant le morphisme  $\phi_{m,n}$ .

2- Un morphisme de  $(F, \Phi)$ -spectres de  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un morphisme de suites  $\Phi$ -symétriques  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (\mathbf{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que le carré :

$$\begin{array}{ccc} F\mathbf{X}_n & \longrightarrow & \mathbf{X}_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F\mathbf{Y}_n & \longrightarrow & \mathbf{Y}_{n+1} \end{array}$$

est commutatif pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C})$  la catégorie des  $F$ -spectres  $\Phi$ -symétriques.

3- Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbf{Ev}_n : \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Rep}(\Phi_n, \mathcal{C})$  le foncteur qui à un  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{X}$  associe la  $\Phi_n$ -représentation sur  $\mathbf{X}_n$ . On notera  $\mathbf{Ev}_n : \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$  le foncteur qui à  $\mathbf{X}$  associe l'objet  $\mathbf{X}_n$  de  $\mathcal{C}$ .

**Remarque 4.3.7** — Pour  $m = 0$ , la condition de la première partie de la définition 4.3.6 est non vide. Elle affirme en effet que l'identité de  $\mathbf{X}_n$  est  $\Phi_0 \times \Phi_n$ -équivariante pour deux actions différentes. Ceci est le cas si et seulement si l'action de  $\Phi_0$  sur  $\mathbf{X}_n$ , déduite par restriction suivant le morphisme  $\phi_{0,n}(-, 1)$ , coïncide avec celle obtenue par le biais de l'action de  $\Phi_0$  sur le foncteur identité. On appellera  $\mathbf{Rep}_{\Phi_0}(\Phi_n, \mathcal{C})$  la catégorie de telles représentations. C'est donc la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Rep}(\Phi_n, \mathcal{C})$  formée des  $\Phi_n$ -représentations  $X$  telles que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \Phi_0 & \xrightarrow{\alpha_F} & \text{Aut}(\text{id}_{\mathcal{C}}) \\ \phi_{0,n}(-,1) \downarrow & & \downarrow \\ \Phi_n & \longrightarrow & \text{Aut}(X) \end{array}$$

est commutatif.

**Exemple 4.3.8** — Supposons que la catégorie  $\mathcal{C}$  admet un objet initial  $\emptyset$ . Notons  $F_\emptyset$  le foncteur qui à tout  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  associe  $\emptyset$ . Se donner une structure d'endofoncteur  $\Phi$ -symétrique sur  $F_\emptyset$  équivaut à se donner une action  $a : \Phi_0 \longrightarrow \text{Aut}(\text{id}_{\mathcal{C}})$  sur le foncteur identité de  $\mathcal{C}$ . On vérifie alors immédiatement que la catégorie  $\mathbf{Spect}_{F_\emptyset}^\Phi(\mathcal{C})$  est identique à  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Rep}_{\Phi_0}(\Phi_n, \mathcal{C})$ .

Supposons que la catégorie  $\mathcal{C}$  admet les colimites pertinentes. Soit  $\alpha : H \longrightarrow G$  un morphisme de groupes. On dispose d'un foncteur évident  $\alpha_* : \mathbf{Rep}(G, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Rep}(H, \mathcal{C})$  qui à une  $G$ -représentation dans  $\mathcal{C}$  associe la  $H$ -représentation obtenue par restriction suivant  $\alpha$ . Ce foncteur, que l'on notera  $\text{Oub}_H^G$ , admet un adjoint à gauche  $\alpha^*$  connu sous le nom du foncteur *représentation induite*. Pour une  $H$ -représentation  $X$  de  $\mathcal{C}$  nous noterons  $\text{Ind}_H^G(X)$  la  $G$ -représentation  $\alpha^*X$ . On vérifie facilement que lorsque  $\alpha$  est injectif, l'objet de  $\mathcal{C}$  sous-jacent à  $\text{Ind}_H^G(X)$  est isomorphe (non canoniquement) au coproduit de  $G/H$ -copies de  $X$ .

**LEMME 4.3.9** — Soit  $F$  un endofoncteur  $\Phi$ -symétrique de  $\mathcal{C}$  qui commute aux colimites pertinentes. Pour  $p \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $\underline{\text{Ev}}_p$  admet un adjoint à gauche  $\underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p : \mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C})$ . Pour  $X \in \text{Ob}(\mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathcal{C}))$  le  $(F, \Phi)$ -spectre  $\underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p(X)$  est tel que :

- (i) La  $\Phi_n$ -représentation  $\underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p(X)_n$  est donnée par  $\text{Ind}_{\Phi_{n-p} \times \Phi_p}^{\Phi_n}(F^{\circ n-p}(X))$  lorsque  $n \geq p$ . Elle est égale à  $\emptyset$  sinon.
- (ii) Pour  $n \geq p$ , le morphisme d'assemblage  $F[\underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p(X)_n] \longrightarrow \underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p(X)_{n+1}$  est la composée :

$$(4.22) \quad F\left(\text{Ind}_{\Phi_{n-p} \times \Phi_p}^{\Phi_n}(F^{\circ n-p}(X))\right) \simeq \left(\text{Ind}_{\{1\} \times \Phi_{n-p} \times \Phi_p}^{\{1\} \times \Phi_n}(F^{\circ 1+n-p}(X))\right) \longrightarrow \left(\text{Ind}_{\Phi_{1+n-p} \times \Phi_p}^{\Phi_{1+n}}(F^{\circ 1+n-p}(X))\right)$$

DEMONSTRATION La composée de  $m$  morphismes de type (4.22) est égale à :

$$(4.23) \quad F^{\circ m}\left(\text{Ind}_{\Phi_{n-p} \times \Phi_p}^{\Phi_n}(F^{\circ n-p}(X))\right) \simeq \left(\text{Ind}_{\{1\} \times \Phi_{n-p} \times \Phi_p}^{\{1\} \times \Phi_n}(F^{\circ m+n-p}(X))\right) \longrightarrow \left(\text{Ind}_{\Phi_{m+n-p} \times \Phi_p}^{\Phi_{m+n}}(F^{\circ m+n-p}(X))\right)$$

Modulo l'isomorphisme canonique  $\text{Ind}_{\{1\} \times \Phi_{n-p} \times \Phi_p}^{\{1\} \times \Phi_n}(F^{\circ m+n-p}(X)) \simeq \text{Ind}_{\Phi_m \times \Phi_{n-p} \times \Phi_p}^{\Phi_m \times \Phi_n}(F^{\circ m+n-p}(X))$ , la flèche (4.23) correspond à la transformation naturelle évidente  $\text{Ind}_{\Phi_m \times \Phi_{n-p} \times \Phi_p}^{\Phi_m \times \Phi_n} \longrightarrow \text{Ind}_{\Phi_{m+n-p} \times \Phi_p}^{\Phi_{m+n}}$ . Ceci prouve que (4.23) est  $\Phi_m \times \Phi_n$ -équivariante. Les données (i) et (ii) de l'énoncé définissent donc un  $(F, \Phi)$ -spectre.

Pour un  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on construit un isomorphisme naturel :

$$\text{hom}_{\mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathcal{C})}(X, \mathbf{Y}_p) \simeq \text{hom}_{\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C})}(\underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p(X), \mathbf{Y})$$

de la manière suivante. À un morphisme de  $(F, \Phi)$ -spectres  $f : \underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p(X) \longrightarrow \mathbf{Y}$  on associe la composée :

$$X \longrightarrow \text{Ind}_{\Phi_0 \times \Phi_p}^{\Phi_p}(X) \simeq \underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p(X)_p \xrightarrow{f_p} \mathbf{Y}_p$$

Réciproquement, soit un morphisme de  $\Phi_p$ -représentations  $u : X \longrightarrow \mathbf{Y}_p$ . Pour  $n \geq p$ , la composée :

$$F^{\circ n-p}(X) \longrightarrow F^{\circ n-p}\mathbf{Y}_p \longrightarrow \mathbf{Y}_n$$

est  $\Phi_{n-p} \times \Phi_p$ -équivariante. On en déduit par adjonction une flèche :

$$u_n : \underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p(X)_n = \text{Ind}_{\Phi_{n-p} \times \Phi_p}^{\Phi_n} F^{\circ n-p}(X) \longrightarrow \mathbf{Y}_n$$

La famille des  $u_n$  définit bien un morphisme de  $(F, \Phi)$ -spectres.

C.Q.F.D

**DEFINITION 4.3.10** — On garde les hypothèses du lemme 4.3.9. On pose  $\text{Sus}_{F, \Phi}^p = \underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p \circ \text{Ind}_1^{\Phi_p}$ . Comme  $\text{Ev}_p = \text{Oub}_1^{\Phi_p} \circ \underline{\text{Ev}}_p$ , on a une adjonction  $(\text{Sus}_{F, \Phi}^p, \text{Ev}_p)$ .

Pour  $X \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ , le  $(F, \Phi)$ -spectre  $\text{Sus}_{F, \Phi}^p(X)$  est appelé le  $p$ -ième  $(F, \Phi)$ -spectre de suspension sur  $X$ . Au niveau  $n \geq p$ , ce  $(F, \Phi)$ -spectre est donné par  $\text{Ind}_{\Phi_{n-p}}^{\Phi_n} F^{\circ n-p}X$ , où l'induction est prise suivant le morphisme de groupes  $\phi_{n-p,p}(-, 1)$ .

Soit  $\Phi'$  un deuxième monoïde gradué unitaire et  $F'$  un endofoncteur  $\Phi'$ -symétrique. Supposons donnés un morphisme de monoïdes gradués  $\Phi \longrightarrow \Phi'$  ainsi qu'une transformation naturelle  $\Phi$ -équivariante  $F \longrightarrow F'$  (i.e., pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la transformation naturelle  $F^{\circ n} \longrightarrow F'^{\circ n}$  est  $\Phi_n$ -équivariante). On dispose alors d'un foncteur d'oubli :

$$(4.24) \quad \text{Oub}_{F, \Phi}^{F', \Phi'} : \mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C})$$

**PROPOSITION 4.3.11** — *Supposons que  $\mathcal{C}$  admet les colimites pertinentes et que  $F$  et  $F'$  y commutent. Alors, le foncteur  $\text{Oub}_{F, \Phi}^{F', \Phi'}$  admet un adjoint à gauche :*

$$(4.25) \quad (F', \Phi') \otimes_{F, \Phi} - : \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C})$$

DEMONSTRATION Soit  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un  $(F, \Phi)$ -spectre. On définit une suite  $\Phi'$ -symétrique  $(\mathbf{X}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$(4.26) \quad \mathbf{X}'_n = \text{Coeq} \left( \coprod_{i+j+k=n} \text{Ind}_{\Phi'_i \times \Phi_j \times \Phi_k}^{\Phi'_n} F'^{\circ i} F^{\circ j} \mathbf{X}_k \rightrightarrows \coprod_{l+m=n} \text{Ind}_{\Phi'_l \times \Phi_m}^{\Phi'_n} F'^{\circ l} \mathbf{X}_m \right)$$

La première flèche étant celle induite par la transformation naturelle  $F \longrightarrow F'$  et la seconde est celle induite par les morphismes d'assemblage du  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{X}$ . Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F'^{\circ h} \left( \coprod_{i+j+k=n} \text{Ind}_{\Phi'_i \times \Phi_j \times \Phi_k}^{\Phi'_n} F'^{\circ i} F^{\circ j} \mathbf{X}_k \right) & \longrightarrow & \left( \coprod_{i'+j'+k'=n+h} \text{Ind}_{\Phi'_{i'} \times \Phi_{j'} \times \Phi_{k'}}^{\Phi'_{n+h}} F'^{\circ i'} F^{\circ j'} \mathbf{X}_{k'} \right) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ F'^{\circ h} \left( \coprod_{l+m=n} \text{Ind}_{\Phi'_l \times \Phi_m}^{\Phi'_n} F'^{\circ l} \mathbf{X}_m \right) & \longrightarrow & \left( \coprod_{l'+m'=n+h} \text{Ind}_{\Phi'_{l'} \times \Phi_{m'}}^{\Phi'_{n+h}} F'^{\circ l'} \mathbf{X}_{m'} \right) \end{array}$$

est un morphisme de doubles flèches qui est de plus  $\Phi'_h \times \Phi'_n$ -équivariant. En passant aux coégalisateurs et en utilisant la commutation de  $F$  aux colimites, on obtient une structure de  $(F', \Phi')$ -spectre  $\mathbf{X}'$  sur la suite  $(\mathbf{X}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Montrons que le foncteur qui à  $\mathbf{X}$  associe  $\mathbf{X}'$  est adjoint à gauche du foncteur oubli. Soit  $\mathbf{Y}'$  un  $(F', \Phi')$ -spectre. Un morphisme de  $(F', \Phi')$ -spectres  $\mathbf{X}' \longrightarrow \mathbf{Y}'$  est une famille de morphismes  $f_{l,m} : F'^{\circ l} \mathbf{X}_m \longrightarrow \mathbf{Y}'_n$  qui sont  $\Phi'_l \times \Phi_m$ -équivariants et tels que :

(i) Pour  $i + j + k = n$  le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} F'^{\circ i} F^{\circ j} \mathbf{X}_k & \longrightarrow & F'^{\circ i+j} \mathbf{X}_k \\ \downarrow & & \downarrow f_{i+j,k} \\ F'^{\circ i} \mathbf{X}_{j+k} & \xrightarrow{f_{i,j+k}} & \mathbf{Y}'_n \end{array}$$

est commutatif.

(ii) Pour  $l + m = n$  le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} F' \circ F'^{\circ l} \mathbf{X}_m & \xrightarrow{F'(f_{l,m})} & F' \mathbf{Y}'_n \\ \parallel & & \downarrow \\ F'^{\circ l+1} \mathbf{X}_m & \xrightarrow{f_{l+1,m}} & \mathbf{Y}'_{n+1} \end{array}$$

est commutatif.

La condition (ii) équivaut à dire que  $f_{l,m}$  est égale à la composée :

$$F'^{\circ l} \mathbf{X}_m \xrightarrow{f_{0,m}} F'^{\circ l} \mathbf{Y}'_m \longrightarrow \mathbf{Y}'_n$$

De plus, la flèche  $f_{0,m} : \mathbf{X}_m \longrightarrow \mathbf{Y}'_m$  est  $\Phi_m$ -équivariante si et seulement si elle est  $\Phi'_0 \times \Phi_m$ -équivariante (puisque  $\Phi'_0$  opère via l'action  $\Phi'_0 \longrightarrow \text{Aut}(\text{id}_{\mathcal{C}})$ ). En présence de (ii), la condition (i) fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 F\mathbf{X}_k & \xrightarrow{F(f_{0,k})} & F\mathbf{Y}'_k & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & F'\mathbf{X}_k & \xrightarrow{F'(f_{0,k})} & F'\mathbf{Y}'_k \\
 & & \downarrow f_{1,k} & \swarrow & \\
 \mathbf{X}_{k+1} & \xrightarrow{f_{0,k+1}} & \mathbf{Y}'_{k+1} & & 
 \end{array}$$

Ceci montre que les  $f_{0,m} : \mathbf{X}_m \longrightarrow \mathbf{Y}'_m$  définissent un morphisme de  $(F, \Phi)$ -spectres.

Réciproquement, étant donné un morphisme  $(f_n) : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}'$  de  $(F, \Phi)$ -spectres, on prend pour  $f_{l,m}$  la composée :

$$F'^{\circ l} \mathbf{X}_m \xrightarrow{f_m} F'^{\circ l} \mathbf{Y}'_m \longrightarrow \mathbf{Y}'_{m+l}$$

Il est immédiat de vérifier les conditions (i) et (ii) pour cette famille de morphismes.

En d'autres termes se donner un morphisme de  $(F', \Phi')$ -spectres  $\mathbf{X}' \longrightarrow \mathbf{Y}'$  équivaut à se donner un morphisme de  $(F, \Phi)$ -spectres  $\mathbf{X} \longrightarrow \text{Oub}_{F, \Phi}^{F', \Phi'}(\mathbf{Y}')$ . C.Q.F.D

**Remarque 4.3.12** — Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on dispose d'un carré et d'un triangle commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\text{Oub}_{F', \Phi'}^{F', \Phi'}} & \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \\
 \text{Ev}_p \downarrow & & \downarrow \text{Ev}_p \\
 \text{Rep}(\Phi'_p, \mathcal{C}) & \xrightarrow{\text{Oub}_{\Phi'_p}^{\Phi'_p}} & \text{Rep}(\Phi_p, \mathcal{C})
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\text{Oub}_{F', \Phi'}^{F', \Phi'}} & \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \\
 \text{Ev}_p \searrow & & \swarrow \text{Ev}_p \\
 & \mathcal{C} & 
 \end{array}$$

En passant aux adjoints à gauche, on obtient deux isomorphismes de foncteurs :

$$(F', \Phi') \otimes_{F, \Phi} (\text{Sus}_{F, \Phi}^p(-)) \simeq \text{Sus}_{F', \Phi'}^p(\text{Ind}_{\Phi_p}^{\Phi'_p}(-)) \quad \text{et} \quad (F', \Phi') \otimes_{F, \Phi} (\text{Sus}_{F, \Phi}^p(-)) \simeq \text{Sus}_{F', \Phi'}^p(-)$$

On a également des opérations de décalage sur les  $(F, \Phi)$ -spectres :

**DEFINITION 4.3.13** — **1-** On note  $s_- : \text{Suite}(\Phi, \mathcal{C}) \longrightarrow \text{Suite}(\Phi, \mathcal{C})$  le foncteur qui à une suite  $\Phi$ -symétrique  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe la suite  $\Phi$ -symétrique  $s_-(X)$  définie par  $(s_-(X))_n = X_{n+1}$  muni de l'action de  $\Phi_n$  obtenue par restriction suivant le morphisme  $\phi_{n,1}(-, 1) : \Phi_n \longrightarrow \Phi_{n+1}$ .

**2-** Supposons que  $\mathcal{C}$  admet les colimites pertinentes. Le foncteur  $s_-$  admet un adjoint à gauche  $s_+$ . Ce dernier, associé à la suite  $\Phi$ -symétrique  $X$  la suite  $\Phi$ -symétrique  $s_+(X)$  définie par :

$$(s_+(X))_n = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n = 0, \\ \text{Ind}_{\Phi_{n-1} \times 1}^{\Phi_n} X_{n-1} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

**3-** Supposons que le foncteur  $F$  commute aux colimites pertinentes. Les foncteurs  $s_+$  et  $s_-$  s'étendent naturellement en un couple de foncteurs adjoints sur les  $(F, \Phi)$ -spectres :

$$(s_+, s_-) : \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C})$$

tels que les carrés suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{s_-} & \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \\
 \Pi_n \text{Ev}_n \downarrow & & \downarrow \Pi_n \text{Ev}_n \\
 \text{Suite}(\Phi, \mathcal{C}) & \xrightarrow{s_-} & \text{Suite}(\Phi, \mathcal{C})
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{s_+} & \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \\
 \Pi_n \text{Ev}_n \downarrow & & \downarrow \Pi_n \text{Ev}_n \\
 \text{Suite}(\Phi, \mathcal{C}) & \xrightarrow{s_+} & \text{Suite}(\Phi, \mathcal{C})
 \end{array}$$

sont commutatifs.

Soit un  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{X}$ . Le morphisme d'assemblage  $F[(s_-(\mathbf{X}))_n] \longrightarrow (s_-(\mathbf{X}))_{n+1}$  est  $F\mathbf{X}_{n+1} \longrightarrow \mathbf{X}_{n+2}$ . Pour  $n \geq 1$ , le morphisme d'assemblage  $F[(s_+(\mathbf{X}))_n] \longrightarrow (s_+(\mathbf{X}))_{n+1}$  est la composée :

$$F\left(\text{Ind}_{\Phi_{n-1}}^{\Phi_n} \mathbf{X}_{n-1}\right) \simeq \left(\text{Ind}_{\Phi_{n-1}}^{\Phi_n} F\mathbf{X}_{n-1}\right) \longrightarrow \left(\text{Ind}_{\{1\} \times \Phi_{n-1}}^{\{1\} \times \Phi_n} \mathbf{X}_n\right) \longrightarrow \left(\text{Ind}_{\Phi_n}^{\Phi_{1+n}} \mathbf{X}_n\right)$$

**Remarque 4.3.14** — Du carré et triangle commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{s_-} & \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \\ \text{Ev}_n \downarrow & & \downarrow \text{Ev}_{n-1} \\ \text{Rep}(\Phi_n, \mathcal{C}) & \xrightarrow{\text{Oub}_{\Phi_{n-1} \times 1}^{\Phi_n}} & \text{Rep}(\Phi_{n-1}, \mathcal{C}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{s_-} & \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \\ & \searrow \text{Ev}_n & \swarrow \text{Ev}_{n-1} \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

on déduit, par passage aux adjoints à gauche, deux isomorphismes de foncteurs  $\underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^n(\text{Ind}_{\Phi_{n-1}}^{\Phi_n}(-)) \simeq s_+ \underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^{n-1}(-)$  et  $\text{Sus}_{F, \Phi}^n(-) \simeq s_+ \text{Sus}_{F, \Phi}^{n-1}(-)$ .

Dans le même esprit, on a également :

**Remarque 4.3.15** — Reprenons les notations et hypothèses de la proposition 4.3.11. Les deux carrés suivants :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{s_-} & \text{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) \\ \text{Oub}_{F, \Phi}^{F', \Phi'} \downarrow & & \downarrow \text{Oub}_{F, \Phi}^{F', \Phi'} \\ \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{s_-} & \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{s_+} & \text{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) \\ \text{Oub}_{F, \Phi}^{F', \Phi'} \downarrow & & \downarrow \text{Oub}_{F, \Phi}^{F', \Phi'} \\ \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{s_+} & \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \end{array}$$

commutent. Du premier carré ci-dessus, on obtient en passant aux adjoints à gauche un isomorphisme de foncteurs  $(F', \Phi') \otimes_{F, \Phi} s_+(-) \simeq s_+((F', \Phi') \otimes_{F, \Phi} -)$ .

On aura besoin d'une dernière construction :

**DEFINITION 4.3.16** — Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux catégories munies chacune d'un foncteur  $\Phi$ -symétrique  $F$  et  $F'$ .

1- Soient  $K : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur et  $\tau : F' \circ K \longrightarrow K \circ F$  une transformation naturelle. On dit que  $\tau$  est  $\Phi$ -symétrique lorsque la composée :

$$F'^{\circ n} \circ K \xrightarrow{\tau} F'^{\circ n-1} \circ K \circ F \xrightarrow{\tau} \dots \xrightarrow{\tau} K \circ F^{\circ n}$$

est  $\Phi_n$ -équivariante.

2- Si  $\tau$  est symétrique, le prolongement de  $K$  (suivant  $\tau$ ) est le foncteur  $K_\tau : \text{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}')$  qui à un  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{X}$  associe le  $(F', \Phi')$ -spectre  $K_\tau(\mathbf{X})$  avec  $(K_\tau(\mathbf{X}))_n = K(\mathbf{X}_n)$  et ayant pour morphismes d'assemblage les composées :

$$F'(K(\mathbf{X}_n)) \xrightarrow{\tau} K(F(\mathbf{X}_n)) \longrightarrow K(\mathbf{X}_{n+1})$$

Il est clair que l'association  $(K, \tau) \rightsquigarrow K_\tau$  est compatible à la composition des foncteurs et est fonctorielle en les transformations naturelles qui commutent à  $\tau$ .

**LEMME 4.3.17** — On garde les notations de la définition 4.3.16. Supposons que  $\tau$  est  $\Phi$ -symétrique et que  $K$  admet un adjoint à droite  $L$ . Si  $\tau$  est inversible, la composée :

$$\tau' = {}^a\tau^{-1} : F \circ L \longrightarrow L \circ K \circ F \circ L \xrightarrow{\tau^{-1}} L \circ F' \circ K \circ L \longrightarrow L \circ F'$$

est encore  $\Phi$ -symétrique. De plus, le foncteur  $L_{\tau'}$  est naturellement l'adjoint à droite de  $K_\tau$ .

**DEMONSTRATION** Le fait que  $\tau'$  est  $\Phi$ -symétrique découle immédiatement de la proposition 1.1.12. Pour montrer que  $L_{\tau'}$  est l'adjoint à droite de  $K_\tau$ , remarquons que les foncteurs  $L_{\tau'} \circ K_\tau$  et  $K_\tau \circ L_{\tau'}$  sont les prolongements de  $L \circ K$  et  $K \circ L$  suivant les transformations  $\Phi$ -symétriques  $\tau' \circ \tau$  et  $\tau \circ \tau'$ . Étant donné que les 2-morphismes d'unité et de counité  $\text{id} \longrightarrow L \circ K$  et  $K \circ L \longrightarrow \text{id}$  sont compatibles avec ces transformations, on déduit des transformations

naturelles  $\text{id} \longrightarrow L_{\tau'} \circ K_{\tau}$  et  $K_{\tau} \circ L_{\tau'} \longrightarrow \text{id}$ . Ces transformations naturelles définissent une adjonction entre  $K_{\tau}$  et  $L_{\tau'}$ . C.Q.F.D

**Remarque 4.3.18** — Gardons les hypothèses du lemme 4.3.17. Pour  $p \in \mathbb{N}$ , les carrés suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi}(\mathcal{C}') & \xrightarrow{L_{\tau'}} & \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \\ \text{Ev}_p \downarrow & & \downarrow \text{Ev}_p \\ \mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathcal{C}') & \xrightarrow{L} & \mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathcal{C}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi}(\mathcal{C}') & \xrightarrow{L_{\tau'}} & \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \\ \text{Ev}_p \downarrow & & \downarrow \text{Ev}_p \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{L} & \Phi_p, \mathcal{C} \end{array}$$

commutent. En passant aux adjoints à gauche, on obtient deux isomorphismes canoniques :  $K_{\tau} \circ \underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p \simeq \underline{\text{Sus}}_{F', \Phi}^p \circ K$  et  $K_{\tau} \circ \text{Sus}_{F, \Phi}^p \simeq \text{Sus}_{F', \Phi}^p \circ K$ .

On termine les généralités sur les spectres abstraits par la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.3.19** — Soit  $\alpha$  un cardinal majorant le cardinal du monoïde  $\Phi$ . On suppose que  $\mathcal{C}$  est  $\alpha$ -présentable au sens de la définition 4.2.16 et que le foncteur  $F$  admet un adjoint à droite  $G$  qui est  $\alpha$ -accessible. Alors, la catégorie  $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C})$  est également  $\alpha$ -présentable.

DEMONSTRATION La catégorie  $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C})$  est complète et cocomplète. De plus, les limites et colimites commutent aux foncteurs d'évaluations  $\text{Ev}_n : \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ . La première et deuxième condition de la définition 4.2.16 sont donc vérifiées.

Montrons qu'un  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{X}$  est  $\beta$ -accessible si et seulement si tous les  $\mathbf{X}_n$  sont des objets  $\beta$ -accessibles de  $\mathcal{C}$ . Le foncteur  $\text{hom}(\mathbf{X}, -)$  s'insère dans une suite exacte :

$$\text{hom}(\mathbf{X}, -) \longrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \text{hom}_{\mathbf{Rep}(\Phi_n, \mathcal{C})}(\mathbf{X}_n, \text{Ev}_n(-)) \rightrightarrows \prod_{n \in \mathbb{N}} \text{hom}_{\mathcal{C}}(F\mathbf{X}_n, \text{Ev}_{n+1}(-))$$

Les foncteurs  $F$ ,  $\underline{\text{Ev}}_n$  et  $\text{Ev}_n$  commutent aux colimites. D'autre part, une  $\Phi_n$ -représentation est  $\alpha$ -accessible dès que l'objet de  $\mathcal{C}$  sous-jacent l'est (voir la preuve de la proposition 4.2.20). Il vient que  $\mathbf{X}$  est  $\alpha$ -accessible lorsque les  $\mathbf{X}_n$  le sont.

Pour la réciproque, on remarque que le foncteur  $\underline{\text{Ev}}_n$  admet un adjoint à droite qui à une  $\Phi_n$ -représentation  $A$  associe le  $(F, \Phi)$ -spectre  $d_n(A)$  défini par :

$$(d_n(A))_p = \begin{cases} * & \text{si } p > n, \\ \text{Fix}(\Phi_{n-p}, G^{\circ n-p}A) & \text{si } p \leq n. \end{cases}$$

où  $\text{Fix}(\Phi_{n-p}, G^{\circ n-p}A)$  désigne l'objet invariant relativement à l'action de  $\Phi_{n-p}$  via la diagonale :

$$\Phi_n \simeq \{(g, g), g \in \Phi_{n-p}\} \subset \Phi_{n-p} \times \Phi_{n-p} \xrightarrow{\text{id} \times \phi_{n-p, p}(-, 1)} \Phi_{n-p} \times \Phi_n$$

avec  $\Phi_{n-p}$  opérant sur  $G^{\circ n-p}$  par  $g \in \Phi_{n-p} \rightsquigarrow a(a_F(g^{-1}))$ . En effet, soient un  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{X}$  et une flèche équivariante  $\mathbf{X}_n \longrightarrow A$ . La composée :

$$\mathbf{X}_p \longrightarrow G^{\circ n-p}F^{\circ n-p}\mathbf{X}_p \longrightarrow G^{\circ n-p}\mathbf{X}_n \longrightarrow G^{\circ n-p}A$$

se factorise par le sous-objet  $\text{Fix}(\Phi_{n-p}, G^{\circ n-p}A)$ , étant donné que pour  $g \in \Phi_{n-p}$  le triangle :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\eta} & G^{\circ n-p} \circ F^{\circ n-p} \\ & \searrow \eta & \downarrow a g^{-1} \circ g \\ & & G^{\circ n-p} F^{\circ n-p} \end{array}$$

commute. Les flèches  $\mathbf{X}_p \longrightarrow (d_n(A))_p$  définissent un morphisme de  $(F, \Phi)$ -spectres  $\mathbf{X} \longrightarrow d_n(A)$ . L'application  $\text{hom}_{\mathbf{Rep}(\Phi_n, \mathcal{C})}(\mathbf{X}_n, A) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C})}(\mathbf{X}, d_n(A))$  ainsi obtenue est l'inverse de l'application évidente.

Le foncteur  $d_n$  est  $\alpha$ -accessible, puisque c'est le cas des foncteurs  $G$  et  $\text{Fix}(\Phi_{n-p}, -)$ . Si  $\mathbf{X}$  est un  $(F, \Phi)$ -spectre  $\beta$ -accessible, on montre que l'objet  $\mathbf{X}_n$  est  $\beta$ -accessible en évaluant en une colimite  $\beta$ -filtrante d'objets de la forme  $d_n(-)$ .



Il reste à prouver la quatrième propriété. Elle découle du fait que le foncteur

$$(4.27) \quad \mathbf{Sub}_\beta(\mathbf{X}) \longrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Sub}_\beta(\mathbf{X}_n)$$

est cofinal pour tout  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{X}$ . On peut obtenir la cofinalité de (4.27) en appliquant le lemme 4.2.4 au foncteur  $\mathcal{E} : \mathbb{N}^{\text{op}} \longrightarrow \text{OrdEns}$  qui à  $n \in \mathbb{N}$  associe  $\mathbf{Sub}_\beta(\mathbf{X}_n)$  (où les sous-objets sont considérés dans  $\mathbf{Rep}(\Phi_n, \mathbb{C})$ ) et à  $m \leq n$  associe le foncteur  $\mathbf{X}_m \times_{G^{o_{n-m}} \mathbf{X}_n} G^{o_{n-m}}(-)$ . Les détails sont laissés aux lecteurs. C.Q.F.D

### 4.3.2 Les $(F, \Phi)$ -spectres dans une catégorie de modèles

Dans cette sous-section, on se donne une catégorie de modèles  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ . On suppose alors que  $F$  est un endofoncteur de Quillen à gauche de  $\mathfrak{M}$  qui est  $\Phi$ -symétrique au sens de la définition 4.3.4. On note  $G$  l'adjoint à droite de  $F$ .

**DEFINITION 4.3.20** — Soit  $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$  une flèche de  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ .

1- On dit que  $f$  est une équivalence faible (resp. cofibration, fibration) niveau par niveau si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la flèche  $f_n : \mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{Y}_n$  est une équivalence faible (resp. une cofibration, fibration) de la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$ . On note  $\mathbf{W}_{niv}$  (resp.  $\mathbf{Cof}_{niv}$ ,  $\mathbf{Fib}_{niv}$ ) la classe des équivalences faibles (resp. cofibrations, fibrations) niveau par niveau.

2- On dit que  $f$  est une cofibration projective (resp. une fibration injective) lorsqu'elle possède la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) relativement aux fibrations triviales (resp. cofibrations triviales) niveau par niveau. On note  $\mathbf{Cof}_{proj}$  (resp.  $\mathbf{Fib}_{inj}$ ) la classe des cofibrations projectives (resp. fibrations injectives).

On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.3.21** — Supposons que la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est présentable par cofibrations (voir la définition 4.2.39) et que le foncteur  $G$  est accessible. Supposons également que pour  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , les morphismes de groupes  $\phi_{m,n}(-, 1) : \Phi_m \longrightarrow \Phi_{m+n}$  sont injectifs. Alors, les deux quadruplets :

$$(4.28) \quad (\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{niv}) \quad \text{et} \quad (\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{niv}, \mathbf{Fib}_{inj})$$

sont des catégories de modèles qui sont encore présentables par cofibrations.

**DEMONSTRATION** Soit  $\alpha$  un cardinal majorant celui de  $\Phi$  tel que  $G$  est  $\alpha$ -accessible et  $\mathfrak{M}$   $\alpha$ -présentable par cofibrations. On sait par la proposition 4.3.19 que  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$  est  $\alpha$ -présentable en tant que catégorie abstraite.

Les axiomes **(MC1)**, **(MC2)** et **(MC3)** sont vérifiés pour les deux quadruplets (4.28). Pour montrer les axiomes restants, on aura besoin de distinguer les deux cas :

Le cas de  $(\mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{niv})$  : Les classes  $\mathbf{Fib}_{niv}$  et  $\mathbf{Fib}_{niv} \cap \mathbf{W}_{niv}$  coïncident respectivement avec :

$$\text{RLP}\{\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u_0); p \in \mathbb{N} \text{ et } u_0 \in \mathbf{Cof}_\alpha \cap \mathbf{W}\} \quad \text{et} \quad \text{RLP}\{\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u); p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathbf{Cof}_\alpha\}$$

On peut donc appliquer l'argument du petit objet (voir la proposition 4.2.26) pour factoriser une flèche  $f$  de  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$  en une flèche dans  $\text{Cell}\{\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u_0); p \in \mathbb{N} \text{ et } u_0 \in \mathbf{Cof}_\alpha \cap \mathbf{W}\}$  suivie d'une fibration niveau par niveau. De même, on peut factoriser  $f$  en une flèche dans  $\text{Cell}\{\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u); p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathbf{Cof}_\alpha\}$  suivie d'une fibration triviale niveau par niveau. Ainsi, pour montrer l'axiome **(MC5)**, il reste à voir que  $\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u)$  (resp.  $\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u_0)$ ) est une cofibration projective (resp. une cofibration projective triviale) lorsque  $u$  (resp.  $u_0$ ) est une cofibration (resp. une cofibration triviale) de  $\mathfrak{M}$ . Le cas non-respé est clair puisque l'on a défini les cofibrations projectives par la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales niveau par niveau.

Pour montrer le cas respé, il suffit de vérifier que  $\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u_0)$  est une cofibration triviale niveau par niveau lorsque  $u_0$  est une cofibration triviale. En effet, cette propriété est stable par push-out et composition transfinie. Au niveau  $n \geq p$ , la flèche  $\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u_0)$  est donnée par  $\text{Ind}_{\Phi_{n-p}}^{\Phi_n} F^{o_{n-p}}(u_0)$ . Cette flèche est bien une cofibration triviale puisque  $F^{o_{n-p}}$  est un foncteur de Quillen à gauche et que  $\phi_{n-p,p}(-, 1)$  est injectif.

L'axiome **(MC4)** (et plus précisément sa seconde moitié) s'obtient en appliquant l'astuce de Joyal. Nous avons donc montré que le triplet  $(\mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{niv})$  est une structure de modèles sur  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ .

Le foncteur  $F$  preserve les objets  $\alpha$ -accessibles (voir la proposition 4.2.9). Il en est donc de même des foncteurs  $\text{Sus}_{F,\Phi}^p$ . Il vient que les cofibrations projectives  $\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u)$  et  $\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u_0)$  sont de buts  $\alpha$ -accessibles lorsque  $u$  et  $u_0$  le sont. Ceci montre la troisième propriété de la définition 4.2.39.

La seconde propriété de la définition 4.2.39 découle du fait que les cofibrations projectives sont des cofibrations niveau par niveau. En effet, une cofibration projective est un retract d'une flèche dans  $\text{Cell}\{\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u); p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathbf{Cof}_\alpha\}$ . Il suffit donc de voir que les  $\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u)$  sont des cofibrations niveau par niveau. Au niveau  $n \geq p$ , cette flèche

est donnée par  $\text{Ind}_{\Phi_{n-p}}^{\Phi_n} F^{\circ n-p}(u_0)$ . Il s'agit bien d'une cofibration triviale puisque  $F^{\circ n-p}$  est un foncteur de Quillen à gauche et que  $\phi_{n-p,p}(-, 1)$  est injectif.

Le cas de  $(\mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{niv}, \mathbf{Fib}_{inj})$  : Il suffit de montrer l'égalité :

$$(4.29) \quad \mathbf{Fib}_{inj} = \text{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_{\beta} \cap \mathbf{W}_{niv})$$

pour un certain cardinal  $\beta$ . En effet, l'argument du petit objet fournit pour  $f \in \text{Fl}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}))$  une factorisation en une flèche dans  $\text{Cell}((\mathbf{Cof}_{niv})_{\beta} \cap \mathbf{W}_{niv})$  (resp.  $\text{Cell}((\mathbf{Cof}_{niv})_{\beta})$ ) suivie par une flèche dans  $\text{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_{\beta} \cap \mathbf{W}_{niv})$  (resp.  $\text{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_{\beta})$ ). L'axiome **(MC5)** sera satisfait si l'on sait que  $\text{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_{\beta}) \subset \mathbf{W}_{niv} \cap \mathbf{Fib}_{inj}$ . L'inclusion  $\text{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_{\beta}) \subset \mathbf{Fib}_{inj}$  découle de (4.29). L'inclusion  $\text{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_{\beta}) \subset \mathbf{W}_{niv}$  est vraie dès que  $\beta \geq \alpha$ . En effet, on a vu dans la première partie de la preuve que  $\mathbf{Cof}_{proj} \subset \mathbf{Cof}_{niv}$  et que  $\text{LLP}((\mathbf{Cof}_{proj})_{\alpha}) = \mathbf{Fib}_{niv} \cap \mathbf{W}_{niv} \subset \mathbf{W}_{niv}$ . On applique encore une fois l'astuce de Joyal pour obtenir l'axiome **(MC4)**.

Dans la suite, on supposera que  $\beta$  majore le cardinal d'une petite catégorie équivalente à  $\mathfrak{M}_{\alpha}$  et qu'il est de la forme  $2^{\nu}$  pour  $\nu \geq \alpha$  (comme dans la proposition 4.2.41). Pour montrer (4.29), on utilisera les techniques développées dans la sous-section 4.2.3. Soit donc  $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$  une flèche dans  $\text{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_{\beta} \cap \mathbf{W}_{niv})$ . On montrera que  $f$  possède la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les cofibrations triviales niveau par niveau.

Soit un carré commutatif dans  $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{X} \\ u \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbf{B} & \longrightarrow & \mathbf{Y} \end{array}$$

avec  $u$  une cofibration triviale niveau par niveau. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on fixe un relèvement  $r_n : \mathbf{B}_n \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u_n)$  comme dans le cas respé de la définition 4.2.45. On considère l'ensemble  $\mathcal{E}$  des classes d'isomorphismes de familles  $(v_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec :

- $v_n : \mathbf{A}_n \longrightarrow T_n$  une sous-flèche  $r_n$ -normale de  $c_0(u_n)$  (voir la définition 4.2.51),
- $a_n : s(T_n) \longrightarrow \mathbf{X}_n$  un relèvement partiel :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}_n & \longrightarrow & \mathbf{X}_n & & \\ s(v_n) \downarrow & \nearrow a_n & \downarrow f_n & & \\ s(T_n) & \longrightarrow & \mathbf{B}_n & \longrightarrow & \mathbf{Y}_n \end{array}$$

(où  $s(T_n)$  est le sous-objet  $T_n \times_{\Phi_{c_0 f}(u_n), r_n} \mathbf{B}_n$ ),

et vérifiant les conditions suivantes :

- (i) La famille  $(s(T_n))_{n \in \mathbb{N}}$  définit naturellement un sous- $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{s}((T_n)_{n \in \mathbb{N}})$  de  $\mathbf{B}$ . En d'autres termes, l'action de  $\Phi_n$  sur  $\mathbf{B}_n$  préserve  $s(T_n)$  et la composée  $F(s(T_n)) \longrightarrow F\mathbf{B}_n \longrightarrow \mathbf{B}_{n+1}$  se factorise à travers  $s(T_{n+1})$ .
- (ii) La famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définit un morphisme de  $(F, \Phi)$ -spectres  $\mathbf{s}((T_n)_{n \in \mathbb{N}}) \longrightarrow \mathbf{B}$ .

Cet ensemble est naturellement ordonné par la relation suivante :  $(v_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq (v'_n, a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la sous-flèche  $v_n$  est majorée par  $v'_n$  et si la restriction de  $a'_n$  à  $s(T_n)$  est égale à  $a_n$ . De plus, toute chaîne de  $\mathcal{E}$  est majorée par sa colimite (par la proposition 4.2.54). Par le lemme de Zorn, cet ensemble admet des éléments maximaux. Dans la suite, nous fixons un élément maximal  $(v_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{E}$ . On montrera que  $T_n \simeq \Phi_{c_0 f}(u_n)$ . Ceci terminera la preuve de la proposition.

On considère le diagramme suivant dans  $\text{OrdEns}$  (voir la définition 4.2.56) :

$$(4.30) \quad \begin{array}{ccc} \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{SpSub}_{\beta}^{\perp v_n}(u_n | r_n) & \xrightarrow[\text{P}]{\text{id}} & \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Sub}_{\beta}(u_n) \\ Q \downarrow \downarrow R & & \\ \prod_{n \in \mathbb{N}, g \in \Phi_n} \mathbf{Sub}_{\beta}(u_n) & & \end{array}$$

avec :

- $P$  le foncteur qui à une famille de sous-flèches  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe la famille  $(u_n \times_{G(u_{n+1})} G(u'_{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ ,
- $Q$  le foncteur qui à une famille  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe la famille  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}, g \in \Phi_n}$ ,
- $R$  le foncteur qui à une famille  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe la famille  $(g \circ u'_n)_{n \in \mathbb{N}, g \in \Phi_n}$ .

Le lecteur vérifiera facilement que les hypothèses du lemme 4.2.4 sont satisfaites (il faut bien entendu utiliser le lemme 4.2.57). Il vient que la limite  $\mathcal{L}$  du diagramme (4.30) est cofinale dans  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{SpSub}_{\beta}^{\perp v_n}(u_n | r_n)$ . Un calcul immédiat montre que  $\mathcal{L}$  est formée des familles  $(u'_n : \mathbf{A}'_n \longrightarrow \mathbf{B}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que :

1.  $u'_n$  est une sous-flèche  $r_n$ -spéciale de  $u_n$  qui est orthogonale à  $v_n$ ,
2. les sous-objets  $\mathbf{A}'_n$  et  $\mathbf{B}'_n$  sont stables par l'action de  $\Phi_n$  sur  $\mathbf{A}_n$  et  $\mathbf{B}_n$  respectivement,
3. on a des isomorphismes  $\mathbf{A}'_n \simeq \mathbf{A}_n \times_{G(\mathbf{A}_{n+1})} G(\mathbf{A}'_{n+1})$  et  $\mathbf{B}'_n \simeq \mathbf{B}_n \times_{G(\mathbf{B}_{n+1})} G(\mathbf{B}'_{n+1})$ .

Il vient en particulier, que les familles  $(\mathbf{A}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathbf{B}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définissent des sous- $(F, \Phi)$ -spectres  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{B}'$  de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ .

Considérons les sous-flèches  $v'_n : \mathbf{A}'_n \longrightarrow T'_n$  avec  $T'_n = T_n \times_{\Phi_{c_0 f}(u_n)} \Phi_{c_0 f}(u'_n)$ . Comme  $u'_n$  est orthogonale à  $v_n$ , la sous-flèche  $v'_n$  de  $c_0(u'_n)$  est normale. En particulier,  $s(T'_n) \longrightarrow \mathbf{B}'_n$  est une cofibration triviale. D'autre part, la famille  $s(T'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forme un sous- $(F, \Phi)$ -spectre de  $\mathbf{B}'$  que l'on notera  $\mathbf{s}((T'_n)_{n \in \mathbb{N}})$ . On a évidemment  $\mathbf{s}((T'_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \mathbf{s}((T_n)_{n \in \mathbb{N}}) \times_{\mathbf{B}} \mathbf{B}'$ .

Étant donné que  $\mathbf{s}((T'_n)_{n \in \mathbb{N}}) \longrightarrow \mathbf{B}'$  est une cofibration triviale niveau par niveau et de but  $\beta$ -accessible, on peut trouver un relèvement dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{s}((T'_n)_{n \in \mathbb{N}}) & \longrightarrow & \mathbf{s}((T_n)_{n \in \mathbb{N}}) & \xrightarrow{a} & \mathbf{X} \\
 \downarrow & & \nearrow^{l=(l_n)_n} & & \downarrow \\
 \mathbf{B}' & \longrightarrow & \mathbf{B} & \longrightarrow & \mathbf{Y}
 \end{array}$$

Par la proposition 4.2.55, la famille  $(\mathbf{A}_n \rightarrow T_n \prod_{T'_n} \Phi_{c_0 f}(u'_n), a_n \cup l_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fournit un majorant de  $(v_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Par maximalité, on voit alors que  $\Phi_{c_0 f}(u'_n)$  est un sous-objet de  $T_n$ . Comme  $\mathcal{L}$  est cofinale dans  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Sub}_{\beta}(u_n)$  on déduit immédiatement que  $T = \Phi_{c_0 f}(u)$ . C.Q.F.D

**DEFINITION 4.3.22** — Gardons les hypothèses de la proposition 4.3.21. Le triplet  $(\mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{niv})$  est appelé la structure de modèles projective instable sur  $\mathbf{Spect}_{F}^{\Phi}(\mathfrak{M})$ . Le triplet  $(\mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{niv}, \mathbf{Fib}_{inj})$  est appelée la structure de modèles injective instable sur  $\mathbf{Spect}_{F}^{\Phi}(\mathfrak{M})$ . On notera  $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_{F}^{\Phi}(\mathfrak{M})) = \mathbf{Spect}_{F}^{\Phi}(\mathfrak{M})[\mathbf{W}_{niv}^{-1}]$ .

À partir de maintenant, la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  sera supposée présentable par cofibrations et le foncteur  $G$  accessible. Sauf mention explicite du contraire, tous les monoïdes  $\Phi, \Phi'$ , etc auront les morphismes  $\phi_{m,n}(1, -), \phi'_{m,n}(1, -)$ , etc injectifs. On se concentrera surtout sur la structure projective de  $\mathbf{Spect}_{F}^{\Phi}(\mathfrak{M})$ . Notons le résultat suivant qui a été établi au cours de la preuve de la proposition 4.3.21.

**COROLLAIRE 4.3.23** — Les cofibrations projectives de  $\mathfrak{M}$  sont des cofibrations niveau par niveau. En particulier, si  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche, il en est de même de  $\mathbf{Spect}_{F}^{\Phi}(\mathfrak{M})$  munie de sa structure projective instable ou de sa structure injective instable.

Notons les lemmes suivants :

**LEMME 4.3.24** — Pour  $p \in \mathbb{N}$ , l'adjonction  $(\text{Sus}_{F, \Phi}^p, \text{Ev}_p) : \mathbf{Spect}_{F}^{\Phi}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{M}$  est une adjonction de Quillen relativement à la structure projective instable sur  $\mathbf{Spect}_{F}^{\Phi}(\mathfrak{M})$ .

DEMONSTRATION En effet, le foncteur  $\text{Ev}_p$  envoie les fibrations et les équivalences faibles niveau par niveau sur des fibrations et équivalences faibles de  $\mathfrak{M}$ . C.Q.F.D

**LEMME 4.3.25** — Soient  $\Phi'$  un monoïde gradué dans la catégorie des groupes et  $F'$  un endofoncteur de Quillen à gauche  $\Phi'$ -symétrique et tel que son adjoint à droite  $G'$  est accessible. On suppose donné un morphisme de monoïdes gradués  $\Phi \longrightarrow \Phi'$  ainsi qu'une transformation naturelle  $F \longrightarrow F'$  qui est  $\Phi$ -équivariante. Alors, le couple  $(\text{Oub}_{F, \Phi}^{F', \Phi'}, (F', \Phi') \otimes_{F, \Phi} -)$  est une adjonction de Quillen relativement aux structures projectives instables sur  $\mathbf{Spect}_{F}^{\Phi}(\mathfrak{M})$  et  $\mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathfrak{M})$ .

DEMONSTRATION En effet, le foncteur  $\text{Oub}_{F, \Phi}^{F', \Phi'}$  préserve les équivalences faibles et les fibrations niveau par niveau. C.Q.F.D

**LEMME 4.3.26** — L'adjonction  $(s_+, s_-) : \mathbf{Spect}_{F}^{\Phi}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{F}^{\Phi}(\mathfrak{M})$  est une adjonction de Quillen relativement à la structure projective instable sur  $\mathbf{Spect}_{F}^{\Phi}(\mathfrak{M})$ .

DEMONSTRATION En effet,  $s_-$  préserve les équivalences faibles et les fibrations niveau par niveau. C.Q.F.D

**LEMME 4.3.27** — On suppose donné deux catégories de modèles  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{M}'$  présentables par cofibrations ainsi que des endofoncteurs  $\Phi$ -symétriques  $F$  et  $F'$  qui sont des foncteurs de Quillen à gauche ayant des adjoints à

droite accessibles. Soit  $K : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$  un foncteur de Quillen à gauche muni d'une transformation naturelle  $\tau : F' \circ K \xrightarrow{\sim} K \circ F$  inversible et  $\Phi$ -symétrique (au sens de la définition 4.3.16). Alors le foncteur :

$$K_\tau : \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}')$$

est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures projectives instables.

DEMONSTRATION Soit  $L$  l'adjoint à droite de  $K$  et  $\tau'$  comme dans le lemme 4.3.17. Le prolongement  $K_\tau$  admet pour adjoint à droite le prolongement  $L_{\tau'}$ . Il est immédiat que  $L_{\tau'}$  préserve les fibrations et les fibrations triviales niveau par niveau. D'où le résultat. C.Q.F.D

Soit  $X$  un objet de  $\mathfrak{M}$  et  $p$  un entier naturel. On a  $\text{Ev}_{p+1}[\text{Sus}_{F,\Phi}^p(X)] = \text{Oub}_1^{\Phi_{p+1}}(\text{Ind}_{\Phi_1}^{\Phi_{p+1}} F(X))$ . Le morphisme évident  $F(X) \longrightarrow \text{Oub}_1^{\Phi_{p+1}}(\text{Ind}_{\Phi_1}^{\Phi_{p+1}} F(X))$  correspond par adjonction à un morphisme :

$$(4.31) \quad \omega_X^p : \text{Sus}_{F,\Phi}^{p+1}(F(X)) \longrightarrow \text{Sus}_{F,\Phi}^p(X)$$

On note  $\mathcal{R}$  (resp.  $\mathcal{R}_\beta$ ) la classe des flèches  $\omega_X^p$  avec  $p \in \mathbb{N}$  et  $X$  un objet cofibrant (resp. et  $\beta$ -accessible) de  $\mathfrak{M}$ . On notera  $\mathbf{W}_{\mathcal{R}}$  (resp.  $\mathbf{W}_{\mathcal{R}_\beta}$ ) la classe des  $\mathcal{R}$ -équivalences faibles (resp.  $\mathcal{R}_\beta$ -équivalences faibles) (voir la définition 4.2.64). Par le lemme 4.2.65, ces classes peuvent être définies relativement à la structure projective ou injective instable.

**LEMME 4.3.28** — *On suppose que  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche, présentable par cofibrations et que  $G$  est accessible. Pour  $\beta$  suffisamment grand, on a  $\mathbf{W}_{\mathcal{R}_\beta} = \mathbf{W}_{\mathcal{R}}$ .*

DEMONSTRATION On utilisera librement l'existence de la localisation de Bousfield (voir le théorème 4.2.71) de la structure projective (ou injective) instable sur  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$  suivant la classe essentiellement petite  $\mathcal{R}_\beta$ . Il suffit de montrer que  $\omega_X^p \in \mathbf{W}_{\mathcal{R}_\beta}$  pour  $X$  un objet cofibrant de  $\mathfrak{M}$ . Dans la suite, le cardinal  $\beta$  sera pris comme dans la proposition 4.2.41.

Soit  $r : X \longrightarrow \Phi_{cf_0}(\emptyset \rightarrow X)$  une retraction comme dans la définition 4.2.45. Rappelons que  $\mathbf{NormSub}(c(\emptyset \rightarrow X)|r)$  est la catégorie des sous-cofibrations  $r$ -normale  $\emptyset \longrightarrow T$  de  $\emptyset \longrightarrow \Phi_{cf_0}(\emptyset \rightarrow X)$  (voir la définition 4.2.51).

On considère l'ensemble ordonné formé des classes d'isomorphismes de sous-cofibrations  $r$ -normales  $\emptyset \longrightarrow T$  de  $\emptyset \longrightarrow \Phi_{cf_0}(\emptyset \rightarrow X)$  telles que  $\omega_T^p \in \mathbf{W}_{\mathcal{R}_\beta}$ . Toutes les chaînes totalement ordonnées de cet ensemble sont majorées par leurs colimite (par la proposition 4.2.54). Par le lemme de Zorn, cet ensemble admet des éléments maximaux.

On fixe un élément maximal  $\emptyset \longrightarrow T$ . On va prouver que  $T \simeq \Phi_{cf_0}(\emptyset \rightarrow X)$ . En effet, dans le cas contraire, on peut trouver par le lemme 4.2.57 une sous-cofibration :

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & \Phi_{cf_0}(\emptyset \rightarrow X) \end{array}$$

avec  $U$  et  $V$  cofibrants et  $\beta$ -accessibles et telle que  $\emptyset \rightarrow T \coprod_U V = T'$  est encore une sous-cofibration  $r$ -normale majorant strictement  $\emptyset \rightarrow T$ . Comme  $\omega_U^p$  et  $\omega_V^p$  sont dans  $\mathbf{W}_{\mathcal{R}_\beta}$  on déduit que  $\omega_{T'}^p$  est encore dans  $\mathbf{W}_{\mathcal{R}_\beta}$ . En effet, on peut regarder les triplet  $(\omega_U^p, \omega_V^p, \omega_{T'}^p)$  comme une équivalence faible entre deux objets cofibrants de la catégorie de modèles  $\Gamma(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}))$  munie de sa structure de Reedy déduite de la structure  $\mathcal{R}_\beta$ -localisée. Le résultat découle alors du fait que la colimite de  $\Gamma$ -diagrammes est un foncteur de Quillen à gauche. Ceci contredit la maximalité de  $\emptyset \rightarrow T$ . C.Q.F.D

Le lemme 4.3.28 et le théorème 4.2.71 montrent l'existence des  $\mathcal{R}$ -localisations de Bousfield des structures instables sur  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ .

**DEFINITION 4.3.29** — *On suppose que  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche, présentable par cofibrations et que  $G$  est accessible. La structure projective (resp. injective) stable sur  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$  est la localisation de Bousfield de la structure projective (resp. injective) instable de la définition 4.3.22 suivant la classe  $\mathcal{R}$ . On note  $\mathbf{W}_{st}$  la classe des  $\mathcal{R}$ -équivalences faibles qui seront alors appelées les équivalences stables. On note également  $\mathbf{Fib}_{proj-st}$  (resp.  $\mathbf{Fib}_{inj-st}$ ) la classe des  $\mathcal{R}$ -fibrations projectives (resp. injectives) qui seront appellées les fibrations stables projectives (resp. injectives). On pose finalement  $\mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})) = \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})[\mathbf{W}_{st}^{-1}]$ .*

On a une description simple des objets  $\mathcal{R}$ -locaux de  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$  :

**PROPOSITION 4.3.30** — *Un objet fibrant niveau par niveau  $\mathbf{X}$  de  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$  est  $\mathcal{R}$ -local si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le morphisme obtenu par adjonction du morphisme d'assemblage :*

$$(4.32) \quad \mathbf{X}_n \longrightarrow G\mathbf{X}_{n+1}$$

est une équivalence faible.

DEMONSTRATION La condition est nécessaire. En effet pour tout  $A$  cofibrant de  $\mathfrak{M}$ , on a :

$$\pi_0(\text{Sus}_{F,\Phi}^p(A), \mathbf{X}) = \pi_0(A, \mathbf{X}_p)$$

Ainsi, pour  $\mathbf{X}$  un  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathcal{R}$ -local  $\pi_0(A, \mathbf{X}_n) \simeq \pi_0(F(A), \mathbf{X}_{n+1}) \simeq \pi_0(A, G\mathbf{X}_{n+1})$ . Par le lemme de Yoneda appliqué dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ , on déduit que (4.32) est une équivalence faible.

Montrons que la condition est suffisante. Soit  $\mathbf{X}$  un  $(F, \Phi)$ -spectre fibrant niveau par niveau tel que (4.32) est une équivalence faible pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Il s'agit de montrer, pour  $f \in \nabla_\infty(\mathcal{R})$ , que l'application  $\pi_0(f, X)$  est bijective.

Étant donné une flèche  $u : A \longrightarrow B$ , on notera  $\omega_u^p$  la flèche :

$$\left( \text{Sus}_{F,\Phi}^{p+1}(F(B)) \prod_{\text{Sus}_{F,\Phi}^{p+1}(F(A))} \text{Sus}_{F,\Phi}^p(A) \right) \longrightarrow \text{Sus}_{F,\Phi}^p(B)$$

On vérifie immédiatement que  $\nabla(\omega_u^p) = \omega_{\nabla(u)}^p$  quitte à choisir convenablement les objets cylindres. Étant donné que  $\omega_X^p = \omega_{\emptyset \rightarrow X}^p$ , on voit que  $f$  est de la forme  $\omega_u^p$  avec  $u : A \longrightarrow B$  une cofibration entre objets cofibrants.

Se donner une flèche :

$$\gamma : \left( \text{Sus}_{F,\Phi}^{p+1}(F(B)) \prod_{\text{Sus}_{F,\Phi}^{p+1}(F(A))} \text{Sus}_{F,\Phi}^p(A) \right) \longrightarrow \mathbf{X}$$

équivalent à se donner un couple de flèches  $(\gamma_B : F(B) \rightarrow \mathbf{X}_{n+1}, \gamma_A : A \rightarrow \mathbf{X}_n)$  tel que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\gamma_A} & F\mathbf{X}_n \\ F(u) \downarrow & & \downarrow \\ F(B) & \xrightarrow{\gamma_B} & \mathbf{X}_{p+1} \end{array}$$

commute. Ceci, équivaut à se donner un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{X}_n \\ u \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\gamma} & G\mathbf{X}_{n+1} \end{array}$$

De même, se donner une homotopie à droite entre deux telles flèches  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  revient à se donner une homotopie à droite dans la catégorie de modèles  $\mathbf{HOM}(\mathbf{1}, \mathfrak{M})$  (pour la structure de Reedy de la proposition 4.1.53 associée à l'ensemble ordonné  $\mathbf{1} = \{0 < 1\}$ ) entre les deux flèches :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma_1} & \mathbf{X}_n \\ u \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\gamma_1} & G\mathbf{X}_{n+1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma_2} & \mathbf{X}_n \\ u \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\gamma_2} & G\mathbf{X}_{n+1} \end{array}$$

On a donc un isomorphisme canonique :

$$\pi_0 \left( \left( \text{Sus}_{F,\Phi}^{p+1}(F(B)) \prod_{\text{Sus}_{F,\Phi}^{p+1}(F(A))} \text{Sus}_{F,\Phi}^p(A) \right), \mathbf{X} \right) \simeq \pi_0(A \rightarrow B, \mathbf{X}_n \rightarrow G\mathbf{X}_{n+1})$$

Il suffit alors de montrer que le morphisme canonique :

$$\pi_0(B, \mathbf{X}_n) \longrightarrow \pi_0(A \rightarrow B, \mathbf{X}_n \rightarrow G\mathbf{X}_{n+1})$$

est inversible. Ceci est vrai, étant donné que la flèche évidente  $(\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_n) \longrightarrow (\mathbf{X}_n \rightarrow G\mathbf{X}_{n+1})$  est une équivalence faible dans  $\mathbf{HOM}(\mathbf{1}, \mathfrak{M})$ . C.Q.F.D

**DEFINITION 4.3.31** — *Un  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{X}$  est appelé un  $\Omega_{F, \Phi}$ -spectre (ou simplement  $\Omega$ -spectre) si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la flèche  $\mathbf{X}_n \longrightarrow RG\mathbf{X}_{n+1}$  est inversible dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ .*

Ainsi, les objets fibrants de  $(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$  sont les  $\Omega$ -spectres fibrants niveau par niveau.

**LEMME 4.3.32** — *Soient  $\Phi'$  un monoïde gradué dans la catégorie des groupes et  $F'$  un endofoncteur de Quillen à gauche  $\Phi'$ -symétrique et tel que son adjoint à droite  $G'$  est accessible. On suppose donné un morphisme de monoïdes gradués  $\Phi \longrightarrow \Phi'$  ainsi qu'une transformation naturelle  $\Phi$ -équivariante  $F \longrightarrow F'$  telle que  $F(X) \longrightarrow F'(X)$  est une équivalence faible pour tout  $X$  cofibrant de  $\mathfrak{M}$ . Alors, le couple  $(\text{Oub}_{F, \Phi}^{F', \Phi'}, (F', \Phi') \otimes_{F, \Phi} -)$  est une adjonction de Quillen relativement aux structures projectives stables sur  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$  et  $\mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathfrak{M})$ .*

DEMONSTRATION Par la remarque 4.2.59, il suffit de montrer que les flèches  $(F', \Phi') \otimes_{F, \Phi} \omega_X^p$  sont des équivalences stables pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $X \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$  cofibrant. Par la remarque 4.3.12 on a des isomorphismes de foncteurs  $(F', \Phi') \otimes_{F, \Phi} (\text{Sus}_{F, \Phi}^n(-)) \simeq \text{Sus}_{F', \Phi'}^n(-)$ . Modulo ces identifications, la flèche  $(F', \Phi') \otimes_{F, \Phi} \omega_X^p$  se factorise de la manière suivante :

$$\text{Sus}_{F', \Phi'}^{p+1}(F(X)) \longrightarrow \text{Sus}_{F', \Phi'}^{p+1}(F'(X)) \xrightarrow{\omega_X^p} \text{Sus}_{F', \Phi'}^p(X)$$

Il suffit donc de prouver que la première flèche ci-dessus est une équivalence faible niveau par niveau. Ceci est bien le cas puisque  $\text{Sus}_{F', \Phi'}^{p+1}$  est un foncteur de Quillen à gauche et que  $F(X) \longrightarrow F'(X)$  est une équivalence faible entre objets cofibrants. C.Q.F.D

**LEMME 4.3.33** — *L'adjonction  $(s_+, s_-) : \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathfrak{M})$  est une adjonction de Quillen relativement à la structure projective stable sur  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ .*

DEMONSTRATION On sait que  $(s_+, s_-)$  est une adjonction de Quillen pour les structures projectives instables. Le résultat découle alors de la remarque 4.2.59 et du fait que  $s_+(\omega_X^p) = \omega_X^{p+1}$  pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $X \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ . C.Q.F.D

**LEMME 4.3.34** — *On suppose donné deux catégories de modèles  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{M}'$  présentables par cofibrations ainsi que des endofoncteurs  $\Phi$ -symétriques  $F$  et  $F'$  qui sont des foncteurs de Quillen à gauche ayant des adjoints à droite accessibles. Soit  $K : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$  un foncteur de Quillen à gauche muni d'une transformation naturelle  $\tau : F' \circ K \xrightarrow{\sim} K \circ F$  inversible et  $\Phi$ -symétrique (au sens de la définition 4.3.16). Alors, le foncteur :*

$$K_\tau : \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathfrak{M}')$$

est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures projectives stables.

DEMONSTRATION En utilisant la remarque 4.3.18 on voit que  $K_\tau(\omega_X^p) \simeq \omega_{K(X)}^p$  pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $X \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ . Le résultat découle alors du lemme 4.3.27 et de la remarque 4.2.59. C.Q.F.D

Notons également le résultat suivant :

**PROPOSITION 4.3.35** — *Si  $(F, G)$  est une équivalence de Quillen alors l'adjonction :*

$$(\text{Sus}_{F, \Phi}^0, \text{Ev}_0) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$$

est une équivalence de Quillen lorsque  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$  est munie de sa structure projective stable.

DEMONSTRATION Le couple  $(\text{Sus}_{F, \Phi}^0, \text{Ev}_0)$  est une adjonction de Quillen par 4.3.24 Montrons que le morphisme d'unité :

$$(4.33) \quad \text{id} \longrightarrow \text{REv}_0 \circ \text{LSus}_{F, \Phi}^0$$

est inversible. Soit donc  $X_0$  un objet cofibrant de  $\mathfrak{M}$ . Comme  $F^{\circ n} X_0$  est cofibrant et que  $(F, G)$  est une équivalence de Quillen, le morphisme d'unité :

$$F^{\circ n} X_0 \longrightarrow RGF^{\circ n+1} X_0$$

est inversible dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . Il vient que le  $(F, \Phi)$ -spectre  $\text{Sus}_{F, \Phi}^0(X_0)$  est un  $\Omega$ -spectre au sens de la définition 4.3.31. Choisissons une cofibration triviale niveau par niveau  $\text{Sus}_{F, \Phi}^0(X_0) \longrightarrow \mathbf{R}$  avec  $\mathbf{R}$  fibrant niveau par niveau. Le

spectre  $\mathbf{R}$  est alors fibrant relativement à la structure  $(\mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$ . Le résultat est maintenant clair puisque l'évaluation de (4.33) en  $X_0$  est donnée par  $X_0 \longrightarrow \mathbf{R}_0$ .

Il reste encore à démontrer que la counité :

$$(4.34) \quad \mathbf{LSus}_{F,\Phi}^0 \circ \mathbf{REv}_0 \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$$

est inversible. On peut supposer que  $\mathbf{X}$  est fibrant relativement à  $(\mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$ . Il suffit de montrer que le morphisme  $\mathbf{LF}^{on} \mathbf{X}_0 \longrightarrow \mathbf{X}_n$  est inversible dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Ce morphisme se factorise de la manière suivante :

$$(4.35) \quad \mathbf{LF}^{on} \mathbf{X}_0 \longrightarrow \mathbf{LF}^{on} G^{on} \mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{X}_n$$

La flèche de droite de (4.35) est inversible. En effet, il s'agit de la counité de l'équivalence de Quillen  $(F, G)$ . D'autre part, la flèche  $\mathbf{X}_0 \longrightarrow G^{on} \mathbf{X}_n$  est une équivalence faible. Comme  $\mathbf{LF}^{on}$  envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes, la flèche de gauche de (4.35) est également inversible. La proposition est démontrée. C.Q.F.D

Pour  $\tau \in \Phi_2$ , on note  $\tau_{(n)} \in \Phi_{n+1}$  l'élément  $\tau_1 \dots \tau_n$  avec  $\tau_i = \phi_{i-1,2,n-i}(1, \tau, 1)$  l'image de  $\tau$  par le morphisme :

$$\phi_{i-1,2,n-i}(1, -, 1) : \Phi_2 = 1 \times \Phi_2 \times 1 \longrightarrow \Phi_{i-1} \times \Phi_2 \times \Phi_{n-i} \longrightarrow \Phi_{n+1}$$

**DEFINITION 4.3.36** — L'élément  $\tau \in \Phi_2$  est dit symétrique lorsque pour tout  $g \in \Phi_n$  on a :

$$(4.36) \quad \tau_{(n)} \cdot \phi_{n,1}(g, 1) = \phi_{1,n}(1, g) \cdot \tau_{(n)}$$

où  $\phi_{n,m} : \Phi_m \times \Phi_n \longrightarrow \Phi_{m+n}$  désigne le morphisme structural du monoïde  $\Phi$ .

**Exemple 4.3.37** — La transposition  $\tau = (12) \in \Sigma_2$  est un élément symétrique du monoïde des groupes symétriques  $\Sigma$  (voir l'exemple 4.3.1). En effet, la permutation  $\tau_{(n)}$  est égale au produit des transpositions :

$$(12)(23) \dots (n-1, n)(n, n+1) = (1, 2, 3, \dots, n, n+1)$$

En particulier, sa restriction à  $\{1, \dots, n\}$  est donnée par  $i \rightsquigarrow i+1$ . Il vient que pour  $g \in \Sigma_n$ , on a  $\tau_{(n)}(g \bullet 1) = (1 \bullet g)\tau_{(n)}$ .

Si  $\tau \in \Phi_2$  est un élément symétrique, la transformation naturelle  $a_F(\tau) : F \circ F \longrightarrow F \circ F$  est  $\Phi$ -symétrique au sens de la définition 4.3.16. En effet, la relation (4.36) se traduit par la commutation du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \left( \overbrace{F \circ \dots \circ F}^n \right) \circ F & \xrightarrow{\tau_n} & \left( \overbrace{F \circ \dots \circ F}^{n-1} \right) \circ F \circ & \xrightarrow{\tau_{n-1}} \dots \xrightarrow{\tau_1} & F \circ \left( \overbrace{F \circ \dots \circ F}^n \right) \\ \downarrow \phi_{n,1}(g,1) & & & & \downarrow \phi_{1,n}(1,g) \\ \left( \overbrace{F \circ \dots \circ F}^n \right) \circ F & \xrightarrow{\tau_n} & \left( \overbrace{F \circ \dots \circ F}^{n-1} \right) \circ F \circ & \xrightarrow{\tau_{n-1}} \dots \xrightarrow{\tau_1} & F \circ \left( \overbrace{F \circ \dots \circ F}^n \right) \end{array}$$

On en déduit un foncteur  $F_\tau : \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ . Comme  $\tau$  est un automorphisme,  $F_\tau$  est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures projectives instable et stable (par le lemme 4.3.17). L'adjoint à droite de  $F_\tau$  est donné par  $G_{\tau'}$  avec  $\tau' = a_\tau^{-1} : F \circ G \longrightarrow G \circ F$ .

Soit  $\mathbf{X}$  un  $(F, \Phi)$ -spectre. Le  $(F, \Phi)$ -spectre  $F_\tau \mathbf{X}$  est donné au niveau  $n$  par  $(F_\tau \mathbf{X})_n = F \mathbf{X}_n$ . Montrons que les flèches composées de :

$$(4.37) \quad F \mathbf{X}_n \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{X}}} \mathbf{X}_{n+1} \xrightarrow{\tau_{(n)}^{-1}} \mathbf{X}_{n+1}$$

définissent un morphisme de  $(F, \Phi)$ -spectres  $F_\tau \mathbf{X} \longrightarrow s_- \mathbf{X}$ . Remarquons d'abord que la composée (4.37) est  $\Phi_n$ -équivariante. En effet, pour  $g \in \Phi_n$  on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} F \mathbf{X}_n & \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{X}}} & \mathbf{X}_{n+1} & \xrightarrow{\tau_{(n)}^{-1}} & \mathbf{X}_{n+1} \\ (1,g) \downarrow & & \downarrow \phi_{1,n}(1,g) & & \downarrow \phi_{n,1}(g,1) \\ F \mathbf{X}_n & \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{X}}} & \mathbf{X}_{n+1} & \xrightarrow{\tau_{(n)}^{-1}} & \mathbf{X}_{n+1} \end{array}$$

Il reste à montrer que (4.37) commutent aux morphismes d'assemblages. Ceci se traduit par la commutation du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 F(F(\mathbf{X}_n)) & \xrightarrow{F(\gamma_{\mathbf{X}})} & F(\mathbf{X}_{n+1}) & \xrightarrow{F((\tau_{(n)})^{-1})} & F(\mathbf{X}_{n+1}) \\
 \parallel & & & & \downarrow \gamma_{\mathbf{X}} \\
 F \circ F(\mathbf{X}_n) & & & & \\
 \downarrow \tau & & & & \\
 F \circ F(\mathbf{X}_n) & \xrightarrow{F(\gamma_{\mathbf{X}})} & F(\mathbf{X}_{n+1}) & \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{X}}} & \mathbf{X}_{n+2} \xrightarrow{\tau_{(n+1)}^{-1}} & \mathbf{X}_{n+2}
 \end{array}$$

Il est facile de voir que  $\phi_{1,n+1}(1, \tau_i) = \tau_{i+1}$  avec  $\tau_{i+1}$  considéré dans  $\Phi_{n+2}$ . On déduit immédiatement la relation  $\tau_{(n+1)} = \phi_{2,n}(\tau, 1) \cdot \phi_{1,n+1}(1, \tau_{(n)})$ . Ceci permet de diviser notre diagramme en deux parties :

$$\begin{array}{ccccccc}
 F(F(\mathbf{X}_n)) & \xrightarrow{F(\gamma_{\mathbf{X}})} & F(\mathbf{X}_{n+1}) & \xrightarrow{F((\tau_{(n)})^{-1})} & & & F(\mathbf{X}_{n+1}) \\
 \parallel & & & \searrow \gamma_{\mathbf{X}} & & & \downarrow \gamma_{\mathbf{X}} \\
 F \circ F(\mathbf{X}_n) & & (1) & & & (2) & \\
 \downarrow \tau & & & & & & \\
 F \circ F(\mathbf{X}_n) & \xrightarrow{F(\gamma_{\mathbf{X}})} & F(\mathbf{X}_{n+1}) & \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{X}}} & \mathbf{X}_{n+2} & \xleftarrow{\phi_{2,n}(\tau, 1)} & \mathbf{X}_{n+2} \xrightarrow{\phi_{1,n+1}(1, \tau_{(n)}^{-1})} & \mathbf{X}_{n+2}
 \end{array}$$

La partie (2) est commutative puisque les morphismes d'assemblages sont équivariants. De même, la partie (1) commute puisque la composée  $F \circ F\mathbf{X}_n \longrightarrow F\mathbf{X}_{n+1} \longrightarrow \mathbf{X}_{n+2}$  est  $\Phi_2 \times \Phi_n$ -équivariante. On notera  $t_\tau : F_\tau \longrightarrow s_-$  la transformation naturelle définie par (4.37).

**THEOREME 4.3.38** — On suppose l'existence d'un élément symétrique  $\tau \in \Phi_2$ . On a relativement à la catégorie de modèles  $(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$  :

- 1- L'adjonction  $(s_+, s_-) : \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$  est une équivalence de Quillen.
- 2- L'adjonction  $(F_\tau, G_{\tau'}) : \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$  est une équivalence de Quillen.
- 3- La transformation naturelle  $t_\tau : F_\tau \longrightarrow s_-$  induit un isomorphisme :  $\mathbf{L}F_\tau \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}s_-$ .

DEMONSTRATION Il est clair que les deux foncteurs  $s_-$  et  $G_{\tau'}$  commutent. On note  $\Lambda = s_- \circ G_{\tau'} = G_{\tau'} \circ s_-$  leur composition. On dispose d'une transformation naturelle  $\lambda : \text{id} \longrightarrow \Lambda$  obtenue en prenant la composée :

$$\text{id} \xrightarrow{\eta} G_{\tau'} \circ F_\tau \xrightarrow{t_\tau} G_{\tau'} \circ s_-$$

Pour un  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{X}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , la flèche  $\mathbf{X}_n \xrightarrow{\eta} \Lambda(\mathbf{X})_n$  est la composée :

$$(4.38) \quad \mathbf{X}_n \longrightarrow G(F\mathbf{X}_n) \xrightarrow{G(\gamma_{\mathbf{X}})} G\mathbf{X}_{n+1} \xrightarrow{G(\tau_{(n)}^{-1})} G\mathbf{X}_{n+1}$$

Comme la flèche  $G(\tau_{(n)}^{-1})$  de (4.38) est inversible, les deux conditions suivantes sont équivalentes pour un  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{X}$  fibrant niveau par niveau :

- $\mathbf{X}$  est un  $\Omega$ -spectre, i.e., fibrant pour la structure  $(\mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$ ,
- Le morphisme  $\mathbf{X} \longrightarrow \Lambda(\mathbf{X})$  est une équivalence faible niveau par niveau.

On en déduit que la transformation naturelle  $\lambda : \text{id} \longrightarrow \mathbf{R}\Lambda$  est inversible puisqu'elle se calcule sur les spectres fibrants pour la structure  $(\mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$ . Comme  $\Lambda = G_{\tau'} \circ s_- = s_- \circ G_{\tau'}$ , on obtient ainsi deux isomorphismes de foncteurs :

$$\text{id} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}G_{\tau'} \circ \mathbf{R}s_- \quad \text{et} \quad \text{id} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}s_- \circ \mathbf{R}G_{\tau'}$$

Ceci montre que  $\mathbf{R}G_{\tau'}$  et  $\mathbf{R}s_-$  sont des équivalences de catégories. Les autres assertions sont alors immédiates. C.Q.F.D



### 4.3.3 Comparaison des spectres

Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles propre à gauche et présentable par cofibrations. Soient  $\Phi$  et  $\Phi'$  deux monoïdes gradués dans la catégorie des groupes. On supposera ici que les morphismes structuraux

$$\phi_{m,n}(-, -) : \Phi_m \times \Phi_n \longrightarrow \Phi_{m+n} \quad \text{et} \quad \phi'_{m,n}(-, -) : \Phi'_m \times \Phi'_n \longrightarrow \Phi'_{m+n}$$

sont injectifs pour  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ . Notons que cela implique en particulier que  $\Phi_0 \simeq \Phi'_0 \simeq \{1\}$ . On généralise la définition 4.3.36 de la manière suivante :

**DEFINITION 4.3.39** — *Supposons donné un morphisme de monoïdes gradués  $\alpha : \Phi \longrightarrow \Phi'$ . Un élément  $\sigma \in \Phi'_2$  sera dit symétrique relativement à  $\Phi$  lorsque pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $g \in \Phi_n$  la relation suivante est satisfaite :*

$$\sigma_{(n)} \cdot \phi'_{n,1}(\alpha(g), 1) = \phi'_{1,n}(1, \alpha(g)) \cdot \sigma_{(n)}$$

avec  $\sigma_{(n)} = \sigma_1 \dots \sigma_n$  pour  $\sigma_i = \phi_{i-1,2,n-i}(1, \sigma, 1)$ .

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

**THEOREME 4.3.40** — *Soient  $F$  et  $F'$  deux endofoncteurs  $\Phi$  et  $\Phi'$ -symétriques de  $\mathfrak{M}$  qui sont des foncteurs de Quillen à gauche admettant des adjoints à droite accessibles. On suppose donné un morphisme de monoïdes gradués  $\alpha : \Phi \longrightarrow \Phi'$  et une transformation naturelle  $\Phi$ -équivariante  $F \longrightarrow F'$ . Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) *il existe un élément symétrique  $\tau' \in \Phi'_2$  tel que  $\sigma = (\tau')^{-1}$  est symétrique relativement à  $\Phi$ .*
- (ii) *pour  $X$  un objet cofibrant de  $\mathfrak{M}$ , le morphisme  $F(X) \longrightarrow F'(X)$  est une équivalence faible,*
- (iii) *le foncteur  $F'_\sigma : \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M})$  est une équivalence de Quillen à gauche,*

alors l'adjonction  $((F', \Phi') \otimes_{F, \Phi} -, \text{Oub}^{F', \Phi'}) : \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi'}_{F'}(\mathfrak{M})$  est une équivalence de Quillen relativement aux structures projectives stables.

**Remarque 4.3.41** — La condition (i) ci-dessus est automatiquement satisfaite pour l'élément symétrique  $\tau = (1, 2) \in \Sigma_2$  puisque  $\tau^{-1} = \tau$ .

L'adjonction  $((F', \Phi') \otimes_{F, \Phi} -, \text{Oub}^{F', \Phi'})$  est bien une adjonction de Quillen relativement aux structures stables par le lemme 4.3.32. De plus, cette adjonction de Quillen se décompose :

$$\mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M}) \xrightarrow{F' \otimes_F -} \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M}) \xrightarrow{\Phi' \otimes_{\Phi} -} \mathbf{Spect}^{\Phi'}_{F'}(\mathfrak{M})$$

Ainsi, la preuve du théorème 4.3.40 se divise en deux parties. On traite d'abord le foncteur  $- \otimes_F F'$ . On montre plus précisément le résultat suivant :

**PROPOSITION 4.3.42** — *Soit  $F \longrightarrow F'$  une transformation naturelle  $\Phi$ -équivariante entre endofoncteurs de Quillen à gauche  $\Phi$ -symétriques de  $\mathfrak{M}$  qui admettent des adjoints à droite accessibles. On suppose que la flèche  $F(X) \longrightarrow F'(X)$  est une équivalence faible pour  $X \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$  cofibrant. Alors l'adjonction :*

$$(F' \otimes_F -, \text{Oub}^{F'}) : \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M})$$

est une équivalence de Quillen pour les structures projectives niveau par niveau et les structures projectives stables.

Nous aurons besoin de quelques lemmes préliminaires. Soit  $G$  un groupe. Une flèche  $f$  de  $\mathbf{Rep}(G, \mathfrak{M})$  est appelée une équivalence faible lorsque  $\text{Oub}_1^G(f)$  est une équivalence faible de  $\mathfrak{M}$ . Si  $\text{Oub}_1^G(f)$  est une cofibration (resp. fibration), nous dirons que  $f$  est une cofibration injective (resp. fibration projective). On définit alors les fibrations injectives (resp. cofibrations projectives) par la propriété de relèvement à droite (resp. à gauche) par rapport aux cofibrations injectives (resp. fibrations projectives) triviales. On obtient ainsi deux structure de catégories de modèles  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$  et  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj})$  sur  $\mathbf{Rep}(G, \mathfrak{M})$ . Le lecteur pourra consulter la sous-section 4.4.2 pour une preuve (dans le cas plus général des préfaisceaux). Il est clair que les adjonctions :

$$(\text{Ind}_1^G, \text{Oub}_1^G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Rep}(G, \mathfrak{M}) \quad \text{et} \quad (\underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p, \underline{\text{Ev}}_p) : \mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M})$$

sont de Quillen relativement aux structures projectives sur  $\mathbf{Rep}(G, \mathfrak{M})$ ,  $\mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathfrak{M})$  et  $\mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M})$ .

**LEMME 4.3.43** — *Soit  $v : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$  une cofibration projective de  $\mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M})$  de source projectivement cofibrante. Alors,  $u$  est retracte d'une flèche de :*

$$\text{Cell}\{\underline{\text{Sus}}_{F, \Phi}^p(u); p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathcal{C}\}$$

où  $\mathcal{C} \subset \mathbf{Cof}_{proj}$  est la classe des cofibrations projectives de sources injectivement cofibrantes.

DEMONSTRATION On sait que  $v$  est retracte d'une flèche de source  $\mathbf{A}$  et qui est dans  $\text{Cell}\{\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u); p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathbf{Cof}\}$ . On peut donc supposer que  $v$  est la composée transfinie d'une  $\lambda$ -suite :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(0) \longrightarrow \mathbf{A}(1) \dots \longrightarrow \mathbf{A}(\nu) \longrightarrow \mathbf{A}(\nu + 1) \longrightarrow \dots$$

telle que pour tout  $\nu + 1 \in \lambda$ , la flèche  $\mathbf{A}(\nu) \longrightarrow \mathbf{A}(\nu + 1)$  est un push-out d'une flèche de  $\{\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u); p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathbf{Cof}\}$ . En particulier, tous les  $\mathbf{A}(\nu)$  sont projectivement cofibrants. Il suffit donc de traiter le cas où  $v : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$  est le push-out d'une flèche  $\text{Sus}_{F,\Phi}^p(u)$  avec  $u : C \longrightarrow D$  une cofibration de  $\mathfrak{M}$ . On dispose donc d'un carré cocartésien :

$$(4.39) \quad \begin{array}{ccc} \underline{\text{Sus}}_{F,\Phi}^p(\text{Ind}_1^{\Phi^p} C) & \xlongequal{\quad} & \text{Sus}_{F,\Phi}^p(C) \xrightarrow{a} \mathbf{A} \\ & & \downarrow \text{Sus}_{F,\Phi}^p(u) \quad \downarrow v \\ \underline{\text{Sus}}_{F,\Phi}^p(\text{Ind}_1^{\Phi^p} D) & \xlongequal{\quad} & \text{Sus}_{F,\Phi}^p(D) \xrightarrow{b} \mathbf{B} \end{array}$$

Les flèches  $a$  et  $b$  correspondent par adjonction à  $a : \text{Ind}_1^{\Phi^p}(C) \longrightarrow \mathbf{A}_p$  et  $b : \text{Ind}_1^{\Phi^p}(D) \longrightarrow \mathbf{B}_p$ . Étant donné que  $\underline{\text{Ev}}_p \circ \underline{\text{Sus}}_{F,\Phi}^p = \text{Ind}_{\Phi_0 \times \Phi_p}^{\Phi^p} = \text{id}$ , on déduit de (4.39) que le carré :

$$(4.40) \quad \begin{array}{ccc} \text{Ind}_1^{\Phi^p}(C) & \xrightarrow{a} & \mathbf{A}_p \\ \downarrow & & \downarrow v_p \\ \text{Ind}_1^{\Phi^p}(D) & \xrightarrow{b} & \mathbf{B}_p \end{array}$$

est cocartésien. En particulier,  $v_p$  est une cofibration projective de  $\mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathfrak{M})$ . Notons également que  $\mathbf{A}_p$  est injectivement cofibrant. En effet, par le corollaire 4.3.23, le  $(F, \Phi)$ -spectre  $\mathbf{A}$  est injectivement cofibrant. Ceci montre que  $v_p \in \mathcal{C}$ . On factorise le carré (4.39) de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{Sus}}_{F,\Phi}^p(\text{Ind}_1^{\Phi^p} C) & \xrightarrow{\underline{\text{Sus}}_{F,\Phi}^p(a)} & \underline{\text{Sus}}_{F,\Phi}^p \mathbf{A}_p & \longrightarrow & \mathbf{A} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\text{Sus}}_{F,\Phi}^p(\text{Ind}_1^{\Phi^p} D) & \xrightarrow{\underline{\text{Sus}}_{F,\Phi}^p(b)} & \underline{\text{Sus}}_{F,\Phi}^p \mathbf{B}_p & \longrightarrow & \mathbf{B} \end{array} \quad \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array}$$

Le carré (1) est cocartésien puisqu'il est l'image par le foncteur (commutant aux colimites)  $\underline{\text{Sus}}_{F,\Phi}^p$  du carré cocartésien (4.40). Ceci montre que (2) est cocartésien, i.e.,  $v$  est un push-out de  $\underline{\text{Sus}}_{F,\Phi}^p(v_p)$ . Le lemme est démontré. C.Q.F.D

**LEMME 4.3.44** — On garde les hypothèses de la proposition 4.3.42. Pour  $\mathbf{X}$  un  $(F, \Phi)$ -spectre projectivement cofibrant, la flèche  $\mathbf{X} \longrightarrow \text{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{X})$  est une équivalence faible niveau par niveau.

DEMONSTRATION En appliquant le lemme 4.3.43 à la cofibration projective  $\emptyset \rightarrow \mathbf{X}$ , on voit que l'on peut supposer  $\mathbf{X} = \text{Colim}_{\nu \in \lambda} \mathbf{A}(\nu)$  où :

$$\mathbf{A}(0) = \emptyset \longrightarrow \mathbf{A}(1) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbf{A}(\nu) \longrightarrow \mathbf{A}(\nu + 1) \longrightarrow \dots$$

est une  $\lambda$ -suite avec  $\mathbf{A}(\nu) \longrightarrow \mathbf{A}(\nu + 1)$  un push-out d'une flèche de  $\{\underline{\text{Sus}}_{F,\Phi}^p(u); p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathcal{C}\}$ . On forme alors le morphisme de  $\lambda$ -suites :

$$(4.41) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbf{A}(0) = \emptyset & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathbf{A}(\nu) & \longrightarrow & \mathbf{A}(\nu + 1) \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{A}(0)) = \emptyset & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \text{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{A}(\nu)) & \longrightarrow & \text{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{A}(\nu + 1)) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Étant donné que  $\mathcal{C} \subset \mathbf{Cof}_{proj}$ , les flèches  $\mathbf{A}(\nu) \longrightarrow \mathbf{A}(\nu + 1)$  sont des cofibrations projectives de  $(F, \Phi)$ -spectres. Le foncteur  $F' \otimes_F -$  preserve les cofibrations projectives et le foncteur  $\text{Oub}_F^{F'}$  preserve les cofibrations niveau par niveau. Il vient que les flèches  $\text{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{A}(\nu)) \longrightarrow \text{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{A}(\nu + 1))$  sont des cofibrations niveau par niveau. Ainsi, toutes les flèches horizontales de (4.41) sont des cofibrations niveau par niveau. Par le lemme 4.2.69, il suffira de prouver que les flèches verticales sont des équivalences faibles niveau par niveau.

On raisonne par récurrence transfinie sur  $\nu \in \lambda$ . Lorsque  $\nu = 0$ , il n'y a rien à montrer. Lorsque  $\nu$  est limite, le résultat découle du lemme 4.2.69. Supposons donc que  $\nu = \mu + 1$ . On fixe un carré cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sus}_{F, \Phi}^p(C) & \longrightarrow & \mathbf{A}(\nu) \\ \text{Sus}_{F, \Phi}^p(u) \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sus}_{F, \Phi}^p(D) & \longrightarrow & \mathbf{A}(\nu + 1) \end{array}$$

avec  $u \in \mathcal{C}$ . En utilisant l'isomorphisme  $F' \otimes_F \text{Sus}_{F, \Phi}^p \simeq \text{Sus}_{F', \Phi}^p$  (voir la remarque 4.3.12) on déduit un carré cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} \text{Oub}_F^{F'} \text{Sus}_{F', \Phi}^p(C) & \longrightarrow & \text{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{A}(\nu)) \\ \text{Sus}_{F', \Phi}^p(u) \downarrow & & \downarrow \\ \text{Oub}_F^{F'} \text{Sus}_{F', \Phi}^p(D) & \longrightarrow & \text{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{A}(\nu + 1)) \end{array}$$

Étant donné que  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche, il suffit par le lemme 4.3.45 de montrer que la flèche :

$$(4.42) \quad \text{Sus}_{F, \Phi}^p(U) \longrightarrow \text{Oub}_F^{F'} \text{Sus}_{F', \Phi}^p(U)$$

est une équivalence faible niveau par niveau pour  $U \in \{C, D\}$  ou plus généralement pour  $U$  un objet injectivement cofibrant de  $\mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathfrak{M})$ . Au niveau  $n \geq p$ , le morphisme (4.42) est donné par :

$$\text{Ind}_{\Phi_{n-p} \times \Phi_p}^{\Phi_n} F^{\circ n-p} U \longrightarrow \text{Ind}_{\Phi_{n-p} \times \Phi_p}^{\Phi_n} F'^{\circ n-p} U$$

Comme le morphisme de groupes  $\phi_{n-p,p}$  est injectif, et que les objets  $F^{\circ n-p} U$  et  $F'^{\circ n-p} U$  sont cofibrants, il suffira de prouver que  $F^{\circ n-p} U \longrightarrow F'^{\circ n-p} U$  est une équivalence faible. Cette flèche se factorise de la manière suivante :

$$F^{\circ n-p} U \longrightarrow F' \circ F^{\circ n-p-1} U \longrightarrow \dots \longrightarrow F'^{\circ n-p-1} F U \longrightarrow F'^{\circ n-p} U$$

Le résultat découle du fait que  $F(V) \longrightarrow F'(V)$  est une équivalence faible pour  $V$  cofibrant, et que  $F'$  est un foncteur de Quillen à gauche (et donc preserve les équivalences faibles entre objets cofibrants). C.Q.F.D

**LEMME 4.3.45** — *On suppose donné un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} B & \xleftarrow{b} & A & \xrightarrow{c} & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xleftarrow{b'} & A' & \xrightarrow{c'} & C' \end{array}$$

dans une catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  propre à gauche. On suppose que les flèches verticales sont des équivalences faibles et que  $b$  et  $b'$  sont des cofibrations. Alors, la flèche  $B \amalg_A C \longrightarrow B' \amalg_{A'} C'$  est une équivalence faible.

DEMONSTRATION On peut former un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & c & & \\ & & & & \curvearrowright & & \\ B & \xleftarrow{b} & A & \xrightarrow{d} & D & \xrightarrow{e} & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xleftarrow{b'} & A' & \xrightarrow{d'} & D' & \xrightarrow{e'} & C' \\ & & & & \curvearrowleft & & \\ & & & & c' & & \end{array}$$

avec  $d$  et  $d'$  des cofibrations et  $e$  et  $e'$  des équivalences faibles. Comme  $\mathfrak{M}$  est propre, les flèches horizontales du carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B \amalg_A D & \longrightarrow & B \amalg_A C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' \amalg_{A'} D' & \longrightarrow & B' \amalg_{A'} C' \end{array}$$

sont des équivalences faibles. Il suffit donc de prouver le lemme pour  $D$  et  $D'$  à la place de  $C$  et  $C'$ . Le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} B & \xleftarrow{b} & A & \xrightarrow{d} & D \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xleftarrow{b'} & A' & \xrightarrow{d'} & D' \end{array}$$

définit une équivalence faible entre deux objets cofibrants de  $\Gamma(\mathfrak{M})$  pour la structure de Reedy (voir la proposition 4.1.53). Le résultat découle alors du fait que la colimite est un foncteur de Quillen à gauche. C.Q.F.D

On peut maintenant prouver la proposition 4.3.42 :

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.3.42. Montrons d'abord que le foncteur  $\text{ROub}_F^{F'}$  est conservatif (i.e., détecte les isomorphismes). Soit  $f' : \mathbf{X}' \longrightarrow \mathbf{Y}'$  un morphisme de  $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}))$  (resp.  $\mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}))$ ) tel que  $\text{ROub}_F^{F'}(f')$  est inversible. On peut alors supposer que  $f'$  est l'image d'une flèche entre objets fibrants niveau par niveau (resp. stablement fibrant). Dans les deux cas (instable et stable),  $\text{Oub}_F^{F'}(f')$  est une équivalence niveau par niveau. Ceci montre que  $f'$  est aussi une équivalence niveau par niveau de  $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ .

Sachant que  $\text{ROub}_F^{F'}$  est conservatif, il suffit de prouver que le morphisme d'unité :

$$(4.43) \quad \text{id} \xrightarrow{\eta} \text{ROub}_F^{F'} \circ \mathbf{L}(F' \otimes_F -)$$

est inversible. En effet, étant donné que la composée :

$$\text{ROub}_F^{F'} \xrightarrow{\eta} \text{ROub}_F^{F'} \circ \mathbf{L}(F' \otimes_F -) \circ \text{ROub}_F^{F'} \xrightarrow{\delta} \text{ROub}_F^{F'}$$

est l'identité, on déduit que  $\text{ROub}_F^{F'}(\delta) : \text{ROub}_F^{F'} \circ \mathbf{L}(F' \otimes_F -) \circ \text{ROub}_F^{F'} \xrightarrow{\delta} \text{ROub}_F^{F'}$  est un isomorphisme. Comme  $\text{ROub}_F^{F'}$  est conservatif, on obtient que le morphisme de counité  $\mathbf{L}(F' \otimes_F -) \circ \text{ROub}_F^{F'} \xrightarrow{\delta} \text{id}$  est aussi inversible.

Le cas instable de la proposition 4.3.42 est maintenant facile. En effet, le foncteur  $\text{Oub}_F^{F'}$  préserve les équivalences faibles niveau par niveau. Il se dérive donc trivialement. Ainsi, l'inversibilité de (4.43) découle directement du lemme 4.3.44.

Le cas stable demande encore un peu de travail. Étant donné que tout objet de  $\mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}))$  est isomorphe à un  $\Omega$ -spectre, il suffit de prouver que :

$$(4.44) \quad \mathbf{X} \xrightarrow{\eta} \text{ROub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{X})$$

est inversible avec  $\mathbf{X}$  un  $\Omega$ -spectre projectivement cofibrant. Le lemme 4.3.46 ci-dessous affirme alors que  $F' \otimes_F \mathbf{X}$  est un  $\Omega_{F',\Phi}$ -spectre étant donné que  $\text{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{X})$  est un  $\Omega_{F,\Phi}$ -spectre puisque isomorphe dans  $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}))$  à  $\mathbf{X}$  (par le lemme 4.3.44).

Il vient qu'une équivalence stable  $F' \otimes_F \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{R}$  avec  $\mathbf{R}$  un  $(F', \Phi)$ -spectre stablement fibrant est une équivalence niveau par niveau. Ceci montre que  $\text{ROub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{X}) \simeq \text{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{X})$  et (4.44) est inversible par le lemme 4.3.44. C.Q.F.D

**LEMME 4.3.46** — *On garde les hypothèses de la proposition 4.3.42. Soit  $\mathbf{X}'$  un  $(F', \Phi)$ -spectre. Alors  $\mathbf{X}'$  est un  $\Omega_{F',\Phi}$ -spectre si et seulement si  $\text{Oub}_F^{F'} \mathbf{X}'$  est  $\Omega_{F,\Phi}$ -spectre.*

DÉMONSTRATION Comme  $\text{Oub}_F^{F'}$  préserve les équivalences faibles niveau par niveau, on peut supposer que  $\mathbf{X}'$  est fibrant niveau par niveau. Dire que  $\text{Oub}_F^{F'} \mathbf{X}'$  est un  $\Omega$ -spectre, équivaut à dire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la composée :

$$\mathbf{X}'_n \longrightarrow G' \mathbf{X}'_{n+1} \longrightarrow G \mathbf{X}'_{n+1}$$

est inversible. L'assertion du lemme serait vraie si l'on savait que  $G'(Y) \longrightarrow G(Y)$  était une équivalence faible pour tout  $Y$  fibrant de  $\mathfrak{M}$ . En d'autres termes, il nous faut montrer que la transformation naturelle  $RG' \longrightarrow RG$  est inversible. Cette dernière est l'adjointe de  $LF \longrightarrow LF'$  qui est bien inversible puisque  $F(A) \longrightarrow F'(A)$  est une équivalence faible pour  $A$  cofibrant de  $\mathfrak{M}$ . C.Q.F.D

On traite maintenant la seconde partie du théorème 4.3.40, i.e., le foncteur  $\Phi' \otimes_{\Phi} -$ . Nous montrerons plus précisément :

**PROPOSITION 4.3.47** — *Soit  $\alpha : \Phi \longrightarrow \Phi'$  un morphisme de monoïdes. Soit  $F : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$  un foncteur de Quillen à gauche  $\Phi'$ -symétrique et admettant un adjoint à droite accessible. On suppose que :*

- *Il existe un élément symétrique  $\tau' \in \Phi'_2$  tel que  $\sigma = (\tau')^{-1}$  est symétrique relativement à  $\Phi$ ,*
- *Le foncteur  $F_{\sigma} : \mathbf{Spect}_{\Phi}^{\Phi}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{\Phi'}^{\Phi}(\mathfrak{M})$  est une équivalence de Quillen.*

Alors, l'adjonction  $(\Phi' \otimes_{\Phi} -, \text{Oub}_{\Phi}^{\Phi'}) : \mathbf{Spect}_{\Phi}^{\Phi}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{\Phi'}^{\Phi}(\mathfrak{M})$  est une équivalence de Quillen.

Pour montrer la proposition, nous avons besoin de faire une digression pour introduire les bispectres. Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie abstraite admettant les colimites pertinentes. On suppose donnés deux monoïdes gradués et unitaires  $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\Psi = (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans la catégorie des groupes ainsi que des endofoncteurs  $F$  et  $P$  de  $\mathcal{C}$  qui sont respectivement  $\Phi$  et  $\Psi$ -symétriques.

**DEFINITION 4.3.48** — *Une transformation naturelle  $\sigma : F \circ P \longrightarrow P \circ F$  est dite  $(\Psi, \Phi)$ -bisymétrique lorsque la transformation naturelle :*

$$F^{\circ n} \circ P^{\circ m} \longrightarrow P^{\circ m} \circ F^{\circ n}$$

déduite de  $\sigma$ , est  $\Psi_m$ -équivariante et  $\Phi_n$ -équivariante pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ . Ceci revient à dire qu'elle est  $\Psi_m \times \Phi_n$ -équivariante.

La condition de la définition 4.3.48 est vide pour  $n = 0$  ou  $r = 0$ . Notons la remarque suivante :

**Remarque 4.3.49** — Pour que la transformation naturelle  $\sigma : F \circ P \longrightarrow P \circ F$  soit  $(\Psi, \Phi)$ -bisymétrique, il suffit que les deux transformations naturelles :

$$F^{\circ n} \circ P \longrightarrow P \circ F^{\circ n} \quad \text{et} \quad F \circ P^{\circ m} \longrightarrow P^{\circ m} \circ F$$

soient respectivement  $\Phi_n$  et  $\Psi_m$ -équivariantes. En particulier,  $\sigma$  est  $\Phi$ -symétrique au sens de la définition 4.3.16. Lorsque  $\sigma$  est inversible, la transformation  $\sigma^{-1}$  est  $(\Phi, \Psi)$ -symétrique. Il vient que  $\sigma^{-1}$  est  $\Psi$ -symétrique au sens de la définition 4.3.16.

Le lemme suivant est une évidence :

**LEMME 4.3.50** — *Supposons que  $\sigma : F \circ P \longrightarrow P \circ F$  est  $(\Psi, \Phi)$ -bisymétrique. Alors, le prolongement  $P_{\sigma} : \mathbf{Spect}_{\Phi}^{\Phi}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{\Phi'}^{\Phi}(\mathcal{C})$  est naturellement un endofoncteur  $\Psi$ -symétrique.*

On se donne une transformation naturelle  $(\Psi, \Phi)$ -symétrique  $\sigma : F \circ P \longrightarrow P \circ F$ . Par le lemme 4.3.50, on peut considérer la catégorie  $\mathbf{Spect}_{P_{\sigma}}^{\Psi}(\mathbf{Spect}_{\Phi}^{\Phi}(\mathcal{C}))$ . Un objet  $\mathbf{X}$  de cette catégorie, correspond aux données suivantes :

1. pour tout couple  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , d'une  $\Psi_m$ -représentation et une  $\Phi_n$ -représentation sur  $\mathbf{X}_{m,n}$ ,
2. pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , d'un morphisme d'assemblage  $\gamma_{\mathbf{X}} : F\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m,n+1}$ ,
3. pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , d'un morphisme d'assemblage  $\gamma'_{\mathbf{X}} : P\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m+1,n}$ ,

tels que les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la suite  $\Phi$ -symétrique  $(\mathbf{X}_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$  est un  $(F, \Phi)$ -spectre (que l'on note  $\mathbf{X}_{m,\bullet}$ ) pour les morphismes  $\gamma_{\mathbf{X}}$ .
- (ii) Les morphismes d'assemblage  $\gamma'_{\mathbf{X}}$  définissent un morphisme de  $(F, \Phi)$ -spectres  $P_{\sigma}\mathbf{X}_{m,\bullet} \longrightarrow \mathbf{X}_{m+1,\bullet}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .
- (iii) L'action des  $\Psi_m$  sur les  $\mathbf{X}_{m,n}$  définit une suite  $\Psi$ -symétrique de  $(F, \Phi)$ -spectres  $(\mathbf{X}_{m,\bullet})_{m \in \mathbb{N}}$ .
- (iv) La suite  $\Psi$ -symétrique  $(\mathbf{X}_{m,\bullet})_{m \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbf{Spect}_{\Phi}^{\Phi}(\mathcal{C})$  est un  $(P_{\sigma}, \Psi)$ -spectre pour les morphismes d'assemblage définis par les  $\gamma'_{\mathbf{X}}$ .

La condition (i) dit simplement que les flèches  $F^{\circ r}\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m,n+r}$  sont  $\Phi_r \times \Phi_n$ -équivariantes. La condition (ii) affirme que la flèche  $P\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m+1,n}$  est  $\Phi_n$ -équivariante et que le diagramme suivant :

$$(4.45) \quad \begin{array}{ccccc} F \circ P\mathbf{X}_{m,n} & \longrightarrow & F\mathbf{X}_{m+1,n} & \longrightarrow & \mathbf{X}_{m+1,n+1} \\ \sigma \downarrow & & & & \parallel \\ P \circ F\mathbf{X}_{m,n} & \longrightarrow & P\mathbf{X}_{m,n+1} & \longrightarrow & \mathbf{X}_{m+1,n+1} \end{array}$$

est commutatif. La condition (iii) affirme que l'action de  $\Psi_m$  sur  $\mathbf{X}_{m,n}$  commute avec l'action de  $\Psi_n$  et que les flèches  $\gamma_{\mathbf{X}} : F\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m,n+1}$  sont  $\Psi_m$ -équivariantes. La condition (iv) affirme que les flèches  $P^{or}\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m,r+n}$  sont  $\Psi_r \times \Psi_n$ -équivariantes. Ainsi, les quatre conditions (i) à (iv) sont équivalentes aux quatre conditions (plus symétriques) suivantes :

- (i') Les actions de  $\Psi_m$  et  $\Phi_n$  commutent.
- (ii') Les morphismes  $F^{or}\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m,n+r}$  sont  $\Phi_r \times \Phi_n$ -équivariants et  $\Psi_m$ -équivariants,
- (iii') Les morphismes  $P^{or}\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m+r,n}$  sont  $\Psi_r \times \Psi_m$ -équivariants et  $\Phi_n$ -équivariants,
- (iv') Le diagramme (4.45) est commutatif.

Le résultat suivant est maintenant clair :

**PROPOSITION 4.3.51** — *Supposons que la transformation  $(\Psi, \Phi)$ -symétrique  $\sigma : F \circ P \longrightarrow P \circ F$  est inversible. Alors, les catégories  $\mathbf{Spect}_{P_\sigma}^\Psi(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C}))$  et  $\mathbf{Spect}_{F_{\sigma^{-1}}}^\Phi(\mathbf{Spect}_P^\Psi(\mathcal{C}))$  sont canoniquement isomorphes.*

DEMONSTRATION À un objet  $\mathbf{X}$  de  $\mathbf{Spect}_{P_\sigma}^\Psi(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C}))$  on associe un objet  $\mathbf{X}'$  de  $\mathbf{Spect}_{F_{\sigma^{-1}}}^\Phi(\mathbf{Spect}_P^\Psi(\mathcal{C}))$  en posant  $\mathbf{X}'_{m,n} = \mathbf{X}_{n,m}$  et en prenant les mêmes actions de  $\Psi_m$  et  $\Phi_n$  et les mêmes morphismes d'assemblage. C.Q.F.D

On revient au cas où  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  propre à gauche et présentable par cofibrations. On suppose alors que  $F$  et  $P$  sont des foncteurs de Quillen à gauche ayant des adjoints à droite accessibles. On dispose alors d'une structure de modèles *bi-projective bi-stable* sur  $\mathbf{Spect}_{P_\sigma}^\Psi(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}))$  obtenue en prenant deux fois les structures projectives stables.

**PROPOSITION 4.3.52** — *On garde les notations et les hypothèses précédentes. On suppose que  $\sigma$  est inversible. L'isomorphisme de catégories*

$$(4.46) \quad \mathbf{Spect}_{P_\sigma}^\Psi(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})) \simeq \mathbf{Spect}_{F_{\sigma^{-1}}}^\Phi(\mathbf{Spect}_P^\Psi(\mathfrak{M}))$$

de la proposition 4.3.51 est un isomorphisme de catégories de modèles pour les structures bi-projectives bi-stables.

DEMONSTRATION On dispose sur  $\mathbf{Spect}_{P_\sigma}^\Psi(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}))$  (resp.  $\mathbf{Spect}_{F_{\sigma^{-1}}}^\Phi(\mathbf{Spect}_P^\Psi(\mathfrak{M}))$ ) d'une structure de modèles bi-projective bi-instable obtenue en prenant deux fois la structure projective instable. Les fibrations et les équivalences faibles sont alors détectées (bi-)niveau par (bi-)niveau. Il est alors clair que l'isomorphisme (4.46) est un isomorphisme de catégories de modèles pour les structures bi-projectives bi-instables.

Revenons au cas des structures bi-projectives bi-stables. Étant donné que les cofibrations des structures bi-projectives et bi-stables sont les mêmes que ceux des structures bi-projectives bi-instables, il nous reste à montrer que (4.46) est un isomorphisme sur les classes des équivalences bi-stables. Par le lemme 4.3.53 ci-dessous, il suffira de vérifier que (4.46) est un isomorphisme sur les classes d'objets bi-stablement fibrants. Presque par définition, un objet  $\mathbf{X}$  de  $\mathbf{Spect}_{P_\sigma}^\Psi(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}))$  est bi-stablement fibrant si et seulement si pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  :

- l'objet  $\mathbf{X}_{m,n}$  est fibrant dans  $\mathfrak{M}$ ,
- les morphismes  $\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow Q\mathbf{X}_{m+1,n}$  et  $\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow G\mathbf{X}_{m,n+1}$  sont des équivalences faibles,

avec  $Q$  l'adjoint à droite de  $P$ . Le résultat est maintenant clair. C.Q.F.D

**LEMME 4.3.53** — *Soit  $\mathfrak{N}$  une catégorie munie de trois structures de modèles  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ ,  $(\mathbf{W}_1, \mathbf{Cof}_1, \mathbf{Fib}_1)$  et  $(\mathbf{W}_2, \mathbf{Cof}_2, \mathbf{Fib}_2)$ . On suppose que :*

- $\mathbf{Cof} = \mathbf{Cof}_1 = \mathbf{Cof}_2$ ,
- $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ .

*Pour que  $\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2$ , il suffit que les objets fibrants pour  $(\mathbf{W}_1, \mathbf{Cof}_1, \mathbf{Fib}_1)$  et  $(\mathbf{W}_2, \mathbf{Cof}_2, \mathbf{Fib}_2)$  soient les mêmes.*

DEMONSTRATION Montrons que  $f \in \mathbf{W}_1$  si et seulement si pour tout  $X$  fibrant pour la structure  $(\mathbf{W}_1, \mathbf{Cof}_1, \mathbf{Fib}_1)$  l'application

$$\mathrm{hom}_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]}(f, X)$$

est inversible. Ceci démontrera le lemme. Comme  $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}_1$ , on peut supposer que  $f : A \longrightarrow B$  est une cofibration entre objets cofibrants. Choisissons des cylindres  $(C_A, p, i_0, i_1)$  et  $(C_B, p, i_0, i_1)$  pour la structure  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ . L'objet  $X$  fibrant pour  $(\mathbf{W}_1, \mathbf{Cof}_1, \mathbf{Fib}_1)$  est aussi fibrant pour  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ . Il vient que l'ensemble  $\pi_0(A, X)$  (resp.  $\pi_0(B, X)$ ) calculé à l'aide du cylindre  $C_A$  (resp.  $C_B$ ) est isomorphe à  $\mathrm{hom}_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]}(A, X)$  et  $\mathrm{hom}_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]}(A, X)$  (resp.  $\mathrm{hom}_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]}(B, X)$  et  $\mathrm{hom}_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]}(B, X)$ ). Ceci montre que la condition  $\mathrm{hom}_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]}(f, X)$  inversible est équivalente à  $\mathrm{hom}_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]}(f, X)$  inversible. Étant donné que tout objet de  $\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]$  est isomorphe à un objet fibrant pour  $(\mathbf{W}_1, \mathbf{Cof}_1, \mathbf{Fib}_1)$ , cette dernière condition est équivalente à dire que le foncteur  $\mathrm{hom}_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]}(f, -)$  est inversible. Par le lemme de Yoneda, ceci est équivalent à  $f \in \mathbf{W}_1$ . C.Q.F.D

Revenons à la proposition 4.3.47. On spécialisera la construction et les résultats précédents à la situation suivante :  $P = F$ ,  $\Psi = \Phi'$  et  $\sigma = a_F(\sigma) : F \circ F \longrightarrow F \circ F$ . Étant donné que  $\tau' \in \Phi'_2$  est un élément symétrique et que  $\sigma = (\tau')^{-1}$  est symétrique relativement à  $\Phi$ , on déduit que  $\sigma : F \circ F \longrightarrow F \circ F$  est  $(\Phi', \Phi)$ -bisymétrique.

**LEMME 4.3.54** — *Sous les hypothèses de la proposition 4.3.47, on a deux équivalences de Quillen :*

$$(4.47) \quad \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{F_\sigma}^{\Phi'}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})) \quad \text{et} \quad \mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{F_r'}^{\Phi'}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M}))$$

relativement aux structures projectives stables et bi-projectives bi-stables. Ces équivalences sont données par les adjonctions  $(\text{Sus}_{F_\sigma}^0, \Phi', \text{Ev}_0)$  et  $(\text{Sus}_{F_{\sigma^{-1}}}^0, \Phi, \text{Ev}_0)$ . De plus,  $\mathbf{Spect}_{F_\sigma}^{\Phi'}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}))$  et  $\mathbf{Spect}_{F_r'}^{\Phi'}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M}))$  sont canoniquement isomorphes en tant que catégories de modèles.

**DEMONSTRATION** La dernière assertion est mise pour mémoire. Par hypothèse, l'endofoncteur  $F_\sigma$  de  $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})$  est une équivalence de Quillen à gauche. Par la proposition 4.3.35, la première adjonction de (4.47) est une équivalence de Quillen.

Étant donné que  $\tau'$  est un élément symétrique de  $\Phi'$ , on sait par le théorème 4.3.38 que  $F_{\tau'}$  est une équivalence de Quillen à gauche. On applique une deuxième fois la proposition 4.3.35 pour conclure. C.Q.F.D

Soit un  $(F, \Phi)$ -spectre  $(\mathbf{X}_n)$ . On définira un bi-spectre  $\mathbf{Y}$  dans  $\mathbf{Spect}_{F_r'}^{\Phi'}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M}))$  de la manière suivante :

- $\mathbf{Y}_{m,n} = \mathbf{X}_{m+n}$  muni de l'action déduite par la restriction suivant  $\phi_{m,n}(\alpha(-), -) : \Phi_m \times \Phi'_n \longrightarrow \Phi'_{m+n}$ .
- $\gamma'_Y : F\mathbf{Y}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{Y}_{m+1,n}$  est le morphisme d'assemblage  $F\mathbf{X}_{m+n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m+n+1}$  de  $\mathbf{X}$ ,
- $\gamma_Y : F\mathbf{Y}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{Y}_{m,n+1}$  est la composée :  $F\mathbf{X}_{m+n} \longrightarrow \mathbf{X}_{1+m+n} \xrightarrow{\phi'_{m+1,n}(\sigma(m),1)^{-1}} \mathbf{X}_{m+1+n}$ .

Pour montrer que  $\mathbf{Y}_{m,n}$  est un bi-spectre, nous allons vérifier les conditions (i') à (iv') de la page 494. On fera attention que  $\Phi$  joue le rôle de  $\Psi$  et  $\Phi'$  celui de  $\Phi$ . Seules les conditions (ii') et (iv') sont non triviales. Pour (ii'), remarquons que la composée de  $r$  flèches  $\gamma_Y$  est égale à :

$$(4.48) \quad F^{or} \mathbf{X}_{m+n} \longrightarrow \mathbf{X}_{r+m+n} \xrightarrow{\phi'_{0,m+1,r-1+n}(1,\sigma(m),1)^{-1} \dots \phi'_{r-1,m+1,n}(1,\sigma(m),1)^{-1}} \mathbf{X}_{m+r+n}$$

Ainsi, pour montrer que (4.48) est  $\Phi'_r \times \Phi_m \times \Phi'_n$ -équivariante, il suffit de montrer pour  $(g', g) \in \Phi'_r \times \Phi_m$  la commutation du diagramme :

$$(4.49) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{X}_{r+m+n} & \xrightarrow{\phi'_{0,m+1,r-1+n}(1,\sigma(m),1)^{-1} \dots \phi'_{r-1,m+1,n}(1,\sigma(m),1)^{-1}} & \mathbf{X}_{m+r+n} \\ \phi'_{r,m,n}(1,\alpha(g),1) \downarrow & & \downarrow \phi'_{m,r,n}(\alpha(g),1,1) \\ \mathbf{X}_{r+m+n} & \xrightarrow{\phi'_{0,m+1,r-1+n}(1,\sigma(m),1)^{-1} \dots \phi'_{r-1,m+1,n}(1,\sigma(m),1)^{-1}} & \mathbf{X}_{m+r+n} \\ \phi'_{r,m,n}(g',1,1) \downarrow & & \downarrow \phi'_{m,r,n}(1,g',1) \\ \mathbf{X}_{r+m+n} & \xrightarrow{\phi'_{0,m+1,r-1+n}(1,\sigma(m),1)^{-1} \dots \phi'_{r-1,m+1,n}(1,\sigma(m),1)^{-1}} & \mathbf{X}_{m+r+n} \end{array}$$

La commutation du carré supérieur de (4.49) est facile. En effet, ce carré se décompose en des petits carrés :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\phi'_{r-i-1,m+1,n-r+i}(1,\sigma(n),1)^{-1}} & \bullet \\ \phi'_{r-i,m,n+i}(1,\alpha(g),1) \downarrow & & \downarrow \phi'_{r-i-1,m,n+i+1}(1,\alpha(g),1) \\ \bullet & \xrightarrow{\phi'_{r-i-1,m+1,n-r+i}(1,\sigma(n),1)^{-1}} & \bullet \end{array}$$

pour  $0 \leq i \leq r-1$ . La commutation de ces petits carrés découle immédiatement de la relation  $\sigma(m)\phi'_{m,1}(\alpha(g),1) = \phi'_{1,m}(1,\alpha(g))\sigma(m)$ . Pour montrer la commutation du carré inférieur, nous avons besoin du lemme suivant :

**LEMME 4.3.55** — *On a l'égalité suivante dans  $\Phi'_{m+n}$  :*

$$(4.50) \quad \phi'_{0,m+1,r-1+n}(1,\sigma(m),1)^{-1} \dots \phi'_{r-1,m+1,n}(1,\sigma(m),1)^{-1} = \phi'_{m-1,r+1,n}(1,\tau'_{(r)},1) \dots \phi'_{0,r+1,m-1+n}(1,\tau'_{(r)},1)$$

**DEMONSTRATION** En reprenant la définition de  $\tau'_{(r)}$  et  $\sigma(m)$  on peut réécrire (4.50) de la manière suivante :

$$(4.51) \quad (\sigma_1 \dots \sigma_m)^{-1} \dots (\sigma_r \dots \sigma_{r+m-1})^{-1} = (\tau'_m \dots \tau'_{m+r-1}) \dots (\tau'_1 \dots \tau'_r)$$

Comme  $\sigma_i = \tau_i'^{-1}$ , l'égalité (4.51) est équivalente à :

$$(4.52) \quad (\tau'_m \dots \tau'_1) \dots (\tau'_{m+r-1} \dots \tau'_r) = (\tau'_m \dots \tau'_{m+r-1}) \dots (\tau'_1 \dots \tau'_r)$$

Il est clair que  $\tau'_i$  et  $\tau'_j$  commutent dès que  $|i - j| \neq 1$ . On peut alors faire les manipulations suivantes sur le premier membre de (4.52) :

$$\begin{aligned} & (\tau'_m \cdots \tau'_1)(\tau'_{m+1} \cdots \tau'_2) \cdots (\tau'_{m+i} \cdots \tau'_{i+1}) \cdots (\tau'_{m+r-1} \cdots \tau'_r) \\ &= \tau'_m(\tau'_{m-1} \cdots \tau'_1)\tau'_{m+1}(\tau'_m \cdots \tau'_2) \cdots \tau'_{m+i}(\tau'_{m+i-1} \cdots \tau'_{i+1}) \cdots \tau'_{m+r-1}(\tau'_{m+r-2} \cdots \tau'_r) \\ &= \tau'_m \cdot \tau'_{m+1} \cdots \tau'_{m+i} \cdots \tau'_{m+r-1} \cdot (\tau'_{m-1} \cdots \tau'_1)(\tau'_m \cdots \tau'_2) \cdots (\tau'_{m+i-1} \cdots \tau'_{i+1}) \cdots (\tau'_{m+r-2} \cdots \tau'_r) \end{aligned}$$

En simplifiant l'expression  $(\tau'_m \cdots \tau'_{m+r-1})$ , on voit que l'égalité (4.52) est équivalente à :

$$(\tau'_{m-1} \cdots \tau'_1) \cdots (\tau'_{m+r-2} \cdots \tau'_r) = (\tau'_{m-1} \cdots \tau'_{m+r-2}) \cdots (\tau'_1 \cdots \tau'_r)$$

Ainsi, le cas  $(m, r)$  découle du cas  $(m - 1, r)$ . On se ramène alors par récurrence du cas trivial  $(1, r)$ . C.Q.F.D

Par le lemme 4.3.55 ci-dessus, on peut décomposer le carré inférieur de 4.49 en des petits carrés :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\phi'_{m-i,r+1,n-i-1}(1,\tau_{(r)},1)} & \bullet \\ \phi'_{m-i,r,n-i}(1,g',1) \downarrow & & \downarrow \phi'_{m-i+1,r,n-i-1}(1,g',1) \\ \bullet & \xrightarrow{\phi'_{m-i,r+1,n-i-1}(1,\tau_{(r)},1)} & \bullet \end{array}$$

qui commutent en vue de la relation  $\tau_{(r)} \cdot \phi'_{r,1}(g', 1) = \phi'_{1,r}(1, g')\tau_{(r)}$ . On a donc montré que (4.48) est  $\Phi'_r \times \Phi_m \times \Phi'_n$  équivariante. Il reste à vérifier la condition (iv') pour  $\mathbf{Y}_{m,n}$ . Il faut donc montrer que le digramme :

$$\begin{array}{ccccccc} F \circ F\mathbf{X}_{m+n} & \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{x}}} & F\mathbf{X}_{m+n+1} & \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{x}}} & \mathbf{X}_{n+m+2} & \xrightarrow{\phi'_{m+2,n}(\sigma_{(m+1)},1)^{-1}} & \mathbf{X}_{n+m+2} \\ \tau' \downarrow & & & & & & \parallel \\ F \circ F\mathbf{X}_{m+n} & \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{x}}} & F\mathbf{X}_{m+n+1} & \xrightarrow{\phi'_{m+1,n}(\sigma_{(m)},1)^{-1}} & F\mathbf{X}_{n+m+1} & \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{x}}} & \mathbf{X}_{n+m+2} \end{array}$$

commute. On se ramène facilement à montrer que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_{m+n+2} & \xrightarrow{\phi'_{m+2,n}(\sigma_{(m+1)},1)^{-1}} & \mathbf{X}_{m+n+2} \\ \phi_{2,m+n}(\sigma,1)^{-1} \downarrow & & \parallel \\ \mathbf{X}_{m+n+2} & \xrightarrow{\phi'_{1,m+1,n}(1,\sigma_{(m)},1)^{-1}} & \mathbf{X}_{m+n+2} \end{array}$$

est commutatif. Ceci découle immédiatement de la relation  $\sigma_{(m+1)} = \sigma_1 \cdot \phi_{1,m+1}(1, \sigma_{(m)})$ .

On a ainsi défini un foncteur :

$$\Delta : \mathbf{Spect}^{\Phi'}_F(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathbf{Spect}^{\Phi'}_F(\mathcal{M}))$$

qui associe au  $(F, \Phi')$ -spectre  $\mathbf{X}$  le bi-spectre  $\mathbf{Y}$ . Ce foncteur admet un foncteur dérivé à droite puisqu'il envoie les équivalences faibles entre objets stablement fibrants sur des équivalences faibles entre objets bi-stablement fibrants. La composée :

$$\mathbf{Spect}^{\Phi'}_F(\mathcal{M}) \xrightarrow{\Delta} \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathbf{Spect}^{\Phi'}_F(\mathcal{M})) \xrightarrow{\text{Ev}_0} \mathbf{Spect}^{\Phi'}_F(\mathcal{M})$$

est le foncteur identité. Par la seconde équivalence de Quillen du lemme 4.3.54, on déduit alors que  $R\Delta$  est une équivalence de catégories. D'autre part, la composée :

$$\mathbf{Spect}^{\Phi'}_F(\mathcal{M}) \xrightarrow{\Delta} \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathbf{Spect}^{\Phi'}_F(\mathcal{M})) \xlongequal{\quad} \mathbf{Spect}^{\Phi'}_{F\sigma}(\mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathcal{M})) \xrightarrow{\text{Ev}_0} \mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathcal{M})$$

est isomorphe au foncteur  $\text{Oub}^{\Phi'}$ . Par la première équivalence de Quillen du lemme 4.3.54, on sait que  $\text{REv}_0$  est une équivalence de catégories. Ceci montre que  $\text{ROub}^{\Phi'}$  est une équivalence de catégories. La proposition 4.3.47 est démontrée et donc aussi le théorème 4.3.40.



### 4.3.4 Hypothèse de finitude et $\Omega$ -spectres

Dans ce paragraphe, on travaille avec les spectres *non-symétriques*, i.e., on prendra pour  $\Phi$  le monoïde trivial  $(\{1\})_{n \in \mathbb{N}}$ . La catégorie des  $F$ -spectres non-symétriques à valeurs dans une catégorie  $\mathcal{C}$  sera simplement notée  $\mathbf{Spect}_F(\mathcal{C})$ .

On reprend nos hypothèses habituelles, à savoir :  $\mathfrak{M}$  est une catégorie de modèles présentable par cofibrations et  $F$  un endofoncteur de Quillen à gauche de  $\mathfrak{M}$  admettant un adjoint à droite  $G$  accessible. On va exploiter l'hypothèse supplémentaire suivante qui sera satisfaite dans tous les exemples qui nous intéressent :

**HYPOTHÈSE 4.3.56** — Le foncteur  $RG : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  commute aux compositions transfinies dans le sens suivant. Soit  $\lambda$  un ordinal. L'adjonction  $(F, G)$  induit une adjonction de Quillen :

$$(F, G) : \underline{\mathbf{HOM}}(\lambda, \mathfrak{M}) \longrightarrow \underline{\mathbf{HOM}}(\lambda, \mathfrak{M})$$

lorsque l'on munit  $\underline{\mathbf{HOM}}(\lambda, \mathfrak{M})$  de sa structure de Reedy (voir la remarque 4.1.54). La face carrée évidente :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ho}(\underline{\mathbf{HOM}}(\lambda, \mathfrak{M})) & \xrightarrow{RG} & \mathbf{Ho}(\underline{\mathbf{HOM}}(\lambda, \mathfrak{M})) \\ \text{LColim}_{\nu \in \lambda} \downarrow & \sim \not\cong & \downarrow \text{LColim}_{\nu \in \lambda} \\ \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) & \xrightarrow{RG} & \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \end{array}$$

déduite de l'isomorphisme  $\text{LColim}_{\nu \in \lambda} \circ LF \simeq LF \circ \text{LColim}_{\nu \in \lambda}$ , est inversible.

L'hypothèse 4.3.56 sera utilisée via la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.3.57** — Soient  $(K, L) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$  une adjonction de Quillen et  $\tau : F \circ K \xrightarrow{\sim} K \circ F$  une transformation naturelle inversible. On note  $\tau' = {}^a(\tau^{-1}) : F \circ L \longrightarrow L \circ F$  comme dans le lemme 4.3.17.

On suppose que le foncteur  $RL : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  commute aux compositions transfinies au sens de l'hypothèse 4.3.56. Alors, le foncteur  $RL_{\tau'} : \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$  préserve les équivalences stables.

**DEMONSTRATION** Soit  $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$  une équivalence stable de  $F$ -spectres. Par la proposition 4.2.72,  $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(f)$  est une équivalence faible niveau par niveau et les flèches  $\mathbf{A} \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B} \longrightarrow \text{Loc}_{\mathcal{A}}\mathbf{B}$  sont dans  $\text{Cell}(\nabla_{\infty}(\mathcal{A}) \cup (\mathbf{Cof}_{proj} \cap \mathbf{W}_{niv}))$ .

Il suffit donc de traiter le cas de  $f \in \text{Cell}(\nabla_{\infty}(\mathcal{A}) \cup (\mathbf{Cof}_{proj} \cap \mathbf{W}_{niv}))$ . Ainsi,  $f$  est la composée transfinie d'une  $\lambda$ -suite :

$$(4.53) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(0) \xrightarrow{a_0} \mathbf{A}(1) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbf{A}(\nu) \xrightarrow{a_{\nu}} \mathbf{A}(\nu + 1) \longrightarrow \dots$$

avec  $a_{\nu}$  un push-out d'un élément de  $\nabla_{\infty}(\mathcal{A}) \cup (\mathbf{Cof}_{proj} \cap \mathbf{W}_{niv})$ .

Montrons que  $RL_{\tau'}(f)$  est une équivalence stable ou plus correctement que  $RL_{\tau'}(f)$  est isomorphe à l'image d'une équivalence stable par le foncteur  $\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$ . Comme les flèches  $a_{\nu}$  de la  $\lambda$ -suite (4.53) sont des cofibrations projectives, on déduit que  $\text{LColim}_{\nu \in \lambda} \mathbf{A}(\nu) \simeq \text{Colim}_{\nu \in \lambda} \mathbf{A}(\nu) = \mathbf{B}$ . Ainsi, par l'hypothèse 4.3.56, on est ramené à prouver que :

$$(4.54) \quad RL_{\tau'}(\mathbf{A}(0)) \longrightarrow \text{LColim}_{\nu \in \lambda} RL_{\tau'}(\mathbf{A}(\nu))$$

est une équivalence stable. Toujours par l'hypothèse 4.3.56, on peut appliquer le lemme 4.3.58 ci-dessous, pour se ramener à montrer que  $RL_{\tau'}(a_{\nu}) : RL_{\tau'}(\mathbf{A}(\nu)) \longrightarrow RL_{\tau'}(\mathbf{A}(\nu + 1))$  est une équivalence stable pour chaque  $\nu \in \lambda$ . Seul le cas où  $a_{\nu}$  est un push-out d'un élément  $u \in \nabla_{\infty}(\mathcal{A})$  demande un argument. Dans ce cas, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbf{A}_n(\nu) \longrightarrow \mathbf{A}_n(\nu + 1)$  est un isomorphisme pour  $n \geq N$  (quitte à choisir convenablement les cylindres dans la formation des  $\nabla_n(\omega_X^p)$ ). Il vient que  $\text{REv}_n RL_{\tau'}(\mathbf{A}(\nu)) \longrightarrow \text{REv}_n RL_{\tau'}(\mathbf{A}(\nu + 1))$  est inversible pour  $n \geq N$ . On conclut alors par le lemme 4.3.59 ci-dessous. C.Q.F.D

**LEMME 4.3.58** — On suppose donné un foncteur  $\mathbf{E}(-) : \lambda \longrightarrow \mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})$  tel que :

- pour  $\nu + 1 \in \lambda$ , la flèche  $\mathbf{E}(\nu) \longrightarrow \mathbf{E}(\nu + 1)$  est une équivalence stable,

– pour  $\nu \in \lambda$  limite, la flèche  $\text{LColim}_{\mu \in \nu} \mathbf{E}_\mu \longrightarrow \mathbf{E}_\nu$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$ .

Alors, la flèche  $\mathbf{E}(0) \longrightarrow \text{LColim}_{\nu \in \lambda} \mathbf{E}(\nu)$  est une équivalence stable.

DEMONSTRATION Les conditions de l'énoncé dépendent uniquement de la classe d'isomorphisme de l'objet  $\mathbf{E}(-)$  dans  $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\text{HOM}(\lambda, \mathfrak{M})))$ . On peut alors supposer que  $\mathbf{E}(-)$  est un objet cofibrant de  $\text{HOM}(\lambda, \mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$  pour la structure de Reedy obtenue à partir de la structure projective instable sur  $\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})$ . Dans ce cas, les flèches  $\mathbf{E}_\nu \longrightarrow \mathbf{E}_{\nu+1}$  sont des cofibrations projectives stablement triviales et pour  $\nu$  limite,  $\text{Colim}_{\mu \in \nu} \mathbf{E}_\mu \longrightarrow \mathbf{E}_\nu$  est une cofibration projective triviale niveau par niveau et donc stablement triviale. Le résultat découle alors du fait que  $\mathbf{Cof}_{proj} \cap \mathbf{W}_{st}$  est stable par composition transfinie. C.Q.F.D

**LEMME 4.3.59** — Soit  $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$  un morphisme de  $F$ -spectres. On suppose que  $f_n : \mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{Y}_n$  est une équivalence faible de  $\mathfrak{M}$  pour  $n \geq N$ . Alors,  $f$  est une équivalence stable.

DEMONSTRATION On fait une récurrence descendante sur  $N$ . On peut supposer que  $f$  est une cofibration niveau par niveau entre  $F$ -spectres cofibrants niveau par niveau. On peut également supposer que  $\mathbf{X}_n = \emptyset$  pour  $n < N$ . Quitte à remplacer  $\mathbf{X}$  par  $\mathbf{X} \amalg_{\text{Sus}_F^N(\mathbf{X}_N)} \text{Sus}_F^N(\mathbf{Y}_N)$  on peut supposer que  $\mathbf{X}_N = \mathbf{Y}_N$ .

La composée  $F\mathbf{Y}_{N-1} \longrightarrow \mathbf{Y}_N \simeq \mathbf{X}_N$  correspond par adjonction à une flèche  $a : \text{Sus}_F^N(F\mathbf{Y}_{N-1}) \longrightarrow \mathbf{X}$ . De plus, le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sus}_F^N F\mathbf{Y}_{N-1} & \longrightarrow & \mathbf{X} \\ \omega_{\mathbf{Y}_{N-1}}^{N-1} \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sus}_F^{N-1} \mathbf{Y}_{N-1} & \longrightarrow & \mathbf{Y} \end{array}$$

commute. La flèche  $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X} \amalg_{\text{Sus}_F^N F\mathbf{Y}_{N-1}} \text{Sus}_F^{N-1} \mathbf{Y}_{N-1}$  est une équivalence stable puisque c'est un push-out de  $\omega_{\mathbf{Y}_{N-1}}^{N-1}$  (qui est une cofibration niveau par niveau dans le cas des spectres non symétriques). Il suffit donc de montrer que  $f' : \mathbf{X} \amalg_{\text{Sus}_F^N F\mathbf{Y}_{N-1}} \text{Sus}_F^{N-1} \mathbf{Y}_{N-1} \longrightarrow \mathbf{Y}$  est une équivalence stable. Or  $f'_n$  est une équivalence faible pour  $n \geq N - 1$  (en fait,  $f'_{N-1}$  est un isomorphisme et  $f'_m = f_m$  pour  $m \geq N$ ). C.Q.F.D

Supposons l'hypothèse 4.3.56 satisfaite. Le monoïde trivial admet bien évidemment un élément symétrique. Ainsi, l'adjonction  $(F, G)$  se prolonge en une adjonction de Quillen  $(F, G) : \mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})$ . Par la proposition 4.3.57, le foncteur  $RG : \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$  preserve les équivalences faibles. Rappelons également que le théorème 4.3.38, affirme que ce foncteur est une équivalence de Quillen à droite relativement à la structure projective stable.

À la page 488, on a construit une transformation naturelle  $t : F \longrightarrow s_-$  entre endofoncteurs de  $\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})$ . On a également posé  $\Lambda = G \circ s_- = s_- \circ G$  et  $\lambda : \text{id} \longrightarrow \Lambda$  la composée  $\text{id} \xrightarrow{\eta} G \circ F \xrightarrow{t} G \circ s_-$ .

**COROLLAIRE 4.3.60** — Pour tout  $\mathbf{X} \in \text{Ob}(\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})))$ , la flèche  $\mathbf{X} \longrightarrow R\Lambda(\mathbf{X})$  est une équivalence stable (où le foncteur dérivé  $R\Lambda$  est pris relativement à la structure projective instable).

DEMONSTRATION Un morphisme de  $F$ -spectres  $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$  est une équivalence stable si et seulement si  $s_+(f)$  est une équivalence stable. Lorsque  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sont projectivement cofibrants, ceci est clair puisque  $s_+$  est une équivalence de Quillen à gauche par le théorème 4.3.38. Pour le cas général, il suffit de remarquer que  $s_+$  preserve les équivalences faibles niveau par niveau, ce qui permet de remplacer  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  par des objets projectivement cofibrants sans changer l'hypothèse :  $s_+(f) \in \mathbf{W}_{st}$ .

D'autre part, pour tout  $F$ -spectre  $\mathbf{X}$ , la flèche de counité  $s_+s_- \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$  est une équivalence stable par le lemme 4.3.59, puisqu'elle induit un isomorphisme  $(s_+s_- \mathbf{X})_n \simeq \mathbf{X}_n$  pour  $n \geq 1$ . Ainsi, si  $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$  est une équivalence stable de  $F$ -spectres, la flèche  $s_+s_-(f)$  est aussi une équivalence stable et donc  $s_-(f)$  est une équivalence stable.

Par la discussion précédente et la proposition 4.3.57,  $R\Lambda : \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$  preserve les équivalences stables. Soient  $\mathbf{X}$  un  $F$ -spectre fibrant niveau par niveau et  $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{R}$  une équivalence stable avec  $\mathbf{R}$  un  $F$ -spectre stablement fibrant. Dans le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda\mathbf{X} & \longrightarrow & \Lambda\mathbf{R} \end{array}$$

les flèches horizontales sont alors des équivalences stables. La flèche  $\mathbf{R} \longrightarrow \Lambda \mathbf{R}$  est une équivalence stable par le théorème 4.3.38. Le corollaire est démontré. C.Q.F.D

Le résultat suivant fournit un modèle simple du  $\mathcal{B}$ -localisé d'un  $F$ -spectre :

**THEOREME 4.3.61** — *Soit  $\mathbf{X}$  un  $F$ -spectre fibrant niveau par niveau. La colimite homotopique de la  $\mathbb{N}$ -suite :*

$$(4.55) \quad \mathbf{X} \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{X}}} \Lambda(\mathbf{X}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^{on}(\mathbf{X}) \xrightarrow{\lambda_{\Lambda^{on}(\mathbf{X})}} \Lambda^{on+1}(\mathbf{X}) \longrightarrow \dots$$

est un  $\Omega_F$ -spectre. De plus, la flèche évidente  $\mathbf{X} \longrightarrow \mathrm{LColim}_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^{on} \mathbf{X}$  est une équivalence stable.

DEMONSTRATION Le fait que  $\mathbf{X} \longrightarrow \mathrm{LColim}_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^{on} \mathbf{X}$  est une équivalence stable découle du lemme 4.3.58 étant donné que les  $\lambda_{\Lambda^{on} \mathbf{X}}$  sont des équivalences stables par le corollaire 4.3.60.

Il reste à montrer que la colimite homotopique  $\mathbf{K}$  de (4.55) est un  $\Omega$ -spectre. Ceci équivaut à dire que  $\mathbf{K} \longrightarrow \mathrm{RA}(\mathbf{K})$  est un isomorphisme de  $\mathbf{Ho}_{\mathrm{niv}}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$ .

Étant donné que  $s_-$  commute aux colimites et qu'il preserve les équivalences faibles, on déduit de l'hypothèse 4.3.56 un isomorphisme de commutation à la colimite homotopique  $\mathrm{LColim}_{n \in \mathbb{N}} \circ \mathrm{RA} \simeq \mathrm{RA} \circ \mathrm{LColim}_{n \in \mathbb{N}}$ . Il suffit donc de prouver que le morphisme :

$$\mathrm{LColim}_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^{on} \mathbf{X} \longrightarrow \mathrm{LColim}_{n \in \mathbb{N}} \Lambda \circ \Lambda^{on} \mathbf{X}$$

est inversible. Ce morphisme correspond à la colimite homotopique du morphisme de  $\mathbb{N}$ -suites :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{X}}} & \Lambda(\mathbf{X}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Lambda^{on}(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\lambda_{\Lambda^{on}(\mathbf{X})}} & \Lambda^{on+1}(\mathbf{X}) & \longrightarrow & \dots \\ \lambda_{\mathbf{X}} \downarrow & & \downarrow \lambda_{\Lambda(\mathbf{X})} & & & & \downarrow \lambda_{\Lambda^{on}(\mathbf{X})} & & \downarrow \lambda_{\Lambda^{on+1}(\mathbf{X})} & & \\ \Lambda(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\Lambda(\lambda_{\mathbf{X}})} & \Lambda^2(\mathbf{X}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Lambda^{on+1}(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\Lambda(\lambda_{\Lambda^{on}(\mathbf{X})})} & \Lambda^{on+2}(\mathbf{X}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Le résultat découle alors du lemme 4.3.62 ci-dessous. C.Q.F.D

**LEMME 4.3.62** — *Pour tout  $F$ -spectre  $\mathbf{X}$  les deux morphismes  $\Lambda(\lambda_{\mathbf{X}})$  et  $\lambda_{\Lambda(\mathbf{X})}$  sont égaux.*

DEMONSTRATION Au niveau  $n$ , la flèche  $\lambda_{\Lambda(\mathbf{X})}$  est donnée par la composée :

$$(4.56) \quad G(\mathbf{X}_{n+1}) \xrightarrow{\eta} GF(G\mathbf{X}_{n+1}) \xrightarrow{G(\gamma_{\Lambda(\mathbf{X})})} G(G\mathbf{X}_{n+2})$$

Rappelons que les morphismes d'assemblage du  $F$ -spectre  $\Lambda(\mathbf{X})$  sont construits à partir du morphisme  $F \circ G \longrightarrow G \circ F$  déduit par adjonction de  $F \circ F = F \circ F$ . Ils sont donc donnés par la composée :

$$F(G\mathbf{X}_{n+1}) \xrightarrow{\delta} \mathbf{X}_{n+1} \xrightarrow{\eta} G(F\mathbf{X}_{n+1}) \xrightarrow{G(\gamma_{\mathbf{X}})} G\mathbf{X}_{n+2}$$

Étant donné que la composée  $G \longrightarrow GFG \longrightarrow G$  est l'identité, on voit que  $\lambda_{\Lambda(\mathbf{X})}$  est égale à la composée :

$$(4.57) \quad G(\mathbf{X}_{n+1}) \xrightarrow{G(\eta)} G(GF\mathbf{X}_{n+1}) \xrightarrow{G \circ G(\gamma_{\mathbf{X}})} G(G\mathbf{X}_{n+2})$$

Par définition, la composée (4.57) est le niveau  $n$  du morphisme de  $F$ -spectres  $\Lambda(\lambda_{\mathbf{X}})$ . C.Q.F.D

### 4.3.5 Spectres dans les catégories de modèles monoïdales

On suppose ici que  $(\mathfrak{M}, \otimes)$  est une catégorie de modèles monoïdale symétrique et unitaire (voir la définition 4.1.57). On suppose toujours que  $\mathfrak{M}$  est présentable par cofibrations.

Soit  $T$  un objet cofibrant de  $\mathfrak{M}$ . Le foncteur  $F = T \otimes -$  est un foncteur de Quillen à gauche qui est  $\Sigma$ -symétrique, lorsque  $\Sigma_n$  agit sur  $F^{on} = T^{\otimes n} \otimes -$  en permutant les facteurs de  $T \otimes \dots \otimes T$ . On supposera que le foncteur  $\underline{\mathrm{Hom}}_g(T, -)$  est accessible. On dispose ainsi de deux catégories (avec plusieurs structures de modèles) :

- $\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M})$ , la catégorie de  $T$ -spectres non-symétriques,
- $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathfrak{M})$ , la catégorie des  $T$ -spectres  $(\Sigma)$ -symétriques.

On verra dans ce numéro que  $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathfrak{M})$  est une catégorie de modèles monoïdale symétrique (sous l'hypothèse que  $(\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$  est stable au sens de la définition 4.1.44) et que sous certaines conditions, les catégories de modèles  $\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M})$  et  $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathfrak{M})$  sont Quillen-équivalentes.

On commence par construire un produit tensoriel sur les suites  $(\Sigma)$ -symétriques (voir la définition 4.3.3). On se place momentanément dans le cadre d'une catégorie monoïdale unitaire abstraite  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ . On supposera que  $\mathcal{C}$  admet les coproduits et que les foncteurs  $A \otimes -$  et  $- \otimes A$  y commutent pour  $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ .

**DEFINITION 4.3.63** — Soient  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites symétriques dans  $\mathcal{C}$ . On définit une nouvelle suite symétrique  $X \otimes Y$  en posant :

$$(X \otimes Y)_n = \coprod_{i+j=n} \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (X_i \otimes Y_j)$$

Le bi-foncteur  $- \otimes -$  que l'on vient de définir induit une structure monoïdale sur  $\mathbf{Suite}(\Sigma_n, \mathfrak{M})$  dont l'objet unité est donné par  $\mathbb{1}_\Sigma = (\mathbb{1}, \emptyset, \dots, \emptyset, \dots)$ . L'isomorphisme d'associativité est donné au niveau  $n$  par la composée :

$$(X \otimes (Y \otimes Z))_n \simeq \coprod_{i+j+k=n} \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j \times \Sigma_k}^{\Sigma_n} (X_i \otimes (Y_j \otimes Z_k)) \simeq \coprod_{i+j+k=n} \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j \times \Sigma_k}^{\Sigma_n} ((X_i \otimes Y_j) \otimes Z_k) \simeq ((X \otimes Y) \otimes Z)_n$$

Notons le lemme suivant :

**LEMME 4.3.64** — Supposons que  $\mathcal{C}$  est fermée à gauche (resp. à droite) et qu'elle admet les limites pertinentes. Alors la catégorie monoïdale  $\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})$  est fermée à gauche (resp. à droite).

DEMONSTRATION Par  $\otimes$ -dualité, il suffit de traiter le cas non resp. Soient  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites symétriques dans  $\mathcal{C}$ . Pour  $(i, n) \in \mathbb{N}^2$ , on note  $\underline{\text{Hom}}_g^{\Sigma_i}(X_i, Z_{i+n})$  le sous-objet des  $\Sigma_i$ -invariants de  $\underline{\text{Hom}}_g(X_i, Z_{i+n})$  pour l'action :

$$t \in \Sigma_i \curvearrowright \underline{\text{Hom}}_g(X_i, Z_{i+n}) \xrightarrow{\underline{\text{Hom}}_g(t^{-1}, Z_{i+n})} \underline{\text{Hom}}_g(X_i, Z_{i+n}) \xrightarrow{\underline{\text{Hom}}_g(X_i, \phi_{i,n}(t, 1))} \underline{\text{Hom}}_g(X_i, Z_{i+n})$$

Le groupe  $\Sigma_n$  opère sur  $\underline{\text{Hom}}_g(X_i, Z_{i+n})$  par  $\underline{\text{Hom}}_g(X_i, \phi_{i,n}(1, -))$ . On définit une suite symétrique  $\underline{\text{Hom}}_g(X, Z)$  par :

$$\underline{\text{Hom}}_g(X, Z)_n = \coprod_{i \in \mathbb{N}} \underline{\text{Hom}}_g^{\Sigma_i}(X_i, Z_{i+n})$$

Soit  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite symétrique. Se donner un morphisme de  $Y$  dans  $\underline{\text{Hom}}_g(X, Z)$  revient à se donner, pour tout  $(n, i) \in \mathbb{N}$ , une flèche  $\Sigma_i \times \Sigma_n$ -équivariante  $X_i \otimes Y_n \longrightarrow Z_{i+n}$ . Ceci montre que  $\underline{\text{Hom}}_g(X, Z)$  représente le foncteur  $\text{hom}_{\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(X \otimes -, Z)$ . C.Q.F.D

On suppose maintenant que  $(\mathcal{C}, \otimes)$  est monoïdale symétrique. On va définir une contrainte de symétrie pour le produit tensoriel de la définition 4.3.63. Pour cela, on introduit pour  $n = i + j$  la permutation  $\theta_{i,j} \in \Sigma_n$  définie par :

$$(4.58) \quad \theta_{i,j}(a) = \begin{cases} a + j & \text{si } 1 \leq a \leq i \\ a - i & \text{si } i + 1 \leq a \leq i + j \end{cases}$$

Ainsi  $\theta_{i,j}$  est l'unique permutation qui envoie  $\{1, \dots, i\}$  sur  $\{j + 1, \dots, j + i\}$  et  $\{i + 1, \dots, i + j\}$  sur  $\{1, \dots, j\}$  d'une manière croissante. On a clairement  $\theta_{j,i} = \theta_{i,j}^{-1}$ . On vérifie immédiatement que le carré suivant est commutatif :

$$(4.59) \quad \begin{array}{ccc} \Sigma_i \times \Sigma_j & \xrightarrow{\phi_{i,j}} & \Sigma_n \\ \tau \downarrow & & \downarrow \theta_{i,j}(-)\theta_{i,j}^{-1} \\ \Sigma_j \times \Sigma_i & \xrightarrow{\phi_{j,i}} & \Sigma_n \end{array}$$

où  $\tau$  est la permutation des facteurs. On a le lemme :

**LEMME 4.3.65** — Soient  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites symétriques dans  $\mathcal{C}$ . Soit  $n = i + j$  une décomposition de  $n$  en somme d'entiers naturels. La composée :

$$(4.60) \quad X_i \otimes Y_j \xrightarrow{\tau} Y_j \otimes X_i \longrightarrow \text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n} (Y_j \otimes X_i) \xrightarrow{\theta_{j,i}} \text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n} (Y_j \otimes X_i)$$

est  $\Sigma_i \times \Sigma_j$ -équivariante pour :

- l'action produit sur  $X_i \otimes Y_j$ ,
- l'action obtenue par restriction via  $\phi_{i,j} : \Sigma_i \times \Sigma_j \longrightarrow \Sigma_n$  de l'action de  $\Sigma_n$  sur  $\text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i)$ .

DEMONSTRATION Soit  $(u, v) \in \Phi_i \times \Phi_j$ . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} X_i \otimes Y_j & \xrightarrow{\tau} & Y_j \otimes X_i & \longrightarrow & \text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i) & \xrightarrow{\theta_{j,i}} & \text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i) \\ (u,v) \downarrow & & \downarrow (v,u) & & \downarrow \phi_{j,i}(v,u) & & \downarrow \theta_{j,i} \phi_{j,i}(v,u) \theta_{j,i}^{-1} \\ X_i \otimes Y_j & \xrightarrow{\tau} & Y_j \otimes X_i & \longrightarrow & \text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i) & \xrightarrow{\theta_{j,i}} & \text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i) \end{array}$$

À une permutation près de  $i$  et  $j$ , le carré commutatif (4.59) montre que  $\theta_{j,i} \phi_{j,i}(v, u) \theta_{j,i}^{-1} = \phi_{i,j}(u, v)$ . C.Q.F.D

Ainsi, la composée (4.60) induit par adjonction un morphisme  $\Sigma_n$ -équivariant (que l'on appelle  $\theta$  par abus de notations) :

$$(4.61) \quad \theta : \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n}(X_i \otimes Y_j) \longrightarrow \text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i)$$

et donc, par passage au coproduit suivant les décompositions  $n = i + j$ , un morphisme naturel de suites symétriques :

$$(4.62) \quad \theta : X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$$

Nous allons vérifier rapidement que  $\theta$  rend la structure monoïdale sur **Suite**( $\Sigma, \mathfrak{M}$ ) symétrique :

**LEMME 4.3.66** — La flèche (4.62) est involutive, i.e.,  $\theta^2 = \text{id}_{X \otimes Y}$ . De plus, le diagramme suivant :

$$(4.63) \quad \begin{array}{ccccc} (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{\sim} & Z \otimes (X \otimes Y) & \xrightarrow{\sim} & Z \otimes (Y \otimes X) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\sim} & (Y \otimes Z) \otimes X & \xrightarrow{\sim} & (Z \otimes Y) \otimes X \end{array}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION Pour faire cela, il est pratique de se donner une suite symétrique  $T = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et d'évaluer le foncteur  $\text{hom}_{\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(-, T)$  sur  $\theta^2$  et sur le diagramme de l'énoncé.

L'application  $\text{hom}_{\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(\theta, T) : \text{hom}_{\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(Y \otimes X, T) \longrightarrow \text{hom}_{\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(X \otimes Y, T)$  associe à une famille :

$$(\gamma_{j,i})_{j+i=n} \in \prod_{j+i=n} \text{hom}_{\text{Rep}(\Sigma_j \times \Sigma_i, \mathcal{C})}(Y_j \otimes X_i, T)$$

la famille des composées :

$$\left( X_i \otimes Y_j \xrightarrow{\tau} Y_j \otimes X_i \xrightarrow{\gamma_{j,i}} T_n \xrightarrow{\theta_{j,i}} T_n \right)_{i+j=n}$$

avec  $\tau$  l'isomorphisme de commutativité de  $\mathcal{C}$  et  $\theta_{j,i}$  l'élément (4.58) de  $\Sigma_{i+j}$ . Étant donné que  $\tau^2 = \text{id}$  et  $\theta_{j,i} \theta_{i,j} = 1$ , il est immédiat que  $\text{hom}_{\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(\theta^2, T)$  est l'identité.

Montrons la commutation du diagramme (4.63). La composée

$$\text{hom}_{\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}((Z \otimes Y) \otimes X, T) \longrightarrow \text{hom}_{\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}((Y \otimes Z) \otimes X, T) \longrightarrow \text{hom}_{\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(X \otimes (Y \otimes Z), T)$$

associe à une famille :

$$(\gamma_{k,j,i})_{k+j+i=n} \in \prod_{k+j+i=n} \text{hom}_{\text{Rep}(\Sigma_k \times \Sigma_j \times \Sigma_i)}((Z_k \otimes Y_j) \otimes X_i, T)$$

la famille des composées :

$$\left( X_i \otimes (Y_j \otimes Z_k) \xrightarrow{\tau} (Y_j \otimes Z_k) \otimes X_i \xrightarrow{\tau} (Z_k \otimes Y_j) \otimes X_i \xrightarrow{\gamma_{k,j,i}} T \xrightarrow{\phi_{j+k,i}(\theta_{j,k,1})} T \xrightarrow{\theta_{j+k,i}} T \right)_{i+j+k=n}$$

De même, la composée

$$\text{hom}_{\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(Z \otimes (Y \otimes X), T) \longrightarrow \text{hom}_{\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}((Y \otimes X) \otimes Z, T) \longrightarrow \text{hom}_{\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}((X \otimes Y) \otimes Z, T)$$

associe à une famille :

$$(\gamma_{k,j,i})_{k+j+i=n} \in \prod_{k+j+i=n} \text{hom}_{\text{Rep}(\Sigma_k \times \Sigma_j \times \Sigma_i)}(Z_k \otimes (Y_j \otimes X_i), T)$$

la famille des composées :

$$\left( (X_i \otimes Y_j) \otimes Z_k \xrightarrow{\tau} Z_k \otimes (X_i \otimes Y_j) \xrightarrow{\tau} Z_k \otimes (Y_j \otimes X_i) \xrightarrow{\gamma_{k,j,i}} T \xrightarrow{\phi_{k,i+j}(1, \theta_{j,i})} T \xrightarrow{\theta_{k,i+j}} T \right)_{i+j+k=n}$$

La commutation du diagramme (4.63) découle alors de la commutation du diagramme correspondant dans la catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{C}$  ainsi que la relation  $\theta_{j+k,i} \phi_{j+k,i}(\theta_{j,k}, 1) = \theta_{k,i+j} \phi_{k,i+j}(1, \theta_{j,i})$ . C.Q.F.D

On a donc la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.3.67** — Soit  $(\mathcal{C}, \otimes)$  une catégorie monoïdale fermée symétrique et unitaire. On suppose que  $\mathcal{C}$  admet les colimites et limites pertinentes. Alors,  $(\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C}), \otimes)$  est aussi une catégorie monoïdale fermée symétrique et unitaire.

Dans la suite,  $(\mathcal{C}, \otimes)$  sera toujours supposée symétrique.

**DEFINITION 4.3.68** — Soit  $T$  un objet de  $\mathcal{C}$ .

1- On note  $S^T$  la suite symétrique donnée au niveau  $n \in \mathbb{N}$  par l'objet  $S_n^T = T^{\otimes n}$  muni de l'action de  $\Sigma_n$  déduite de la permutation des facteurs.

2- On note  $m$  le morphisme de suites symétriques  $S^T \otimes S^T \longrightarrow S^T$  donné au niveau  $n$  par le coproduit selon les décompositions  $n = i + j$ , des flèches évidentes :

$$\text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (T^{\otimes i} \otimes T^{\otimes j}) \longrightarrow T^{\otimes n}$$

**PROPOSITION 4.3.69** — La suite  $S^T$ , munie de l'accouplement  $m : S^T \otimes S^T \longrightarrow S^T$  et de l'unité  $1_\Sigma \longrightarrow S^T$ , est une algèbre unitaire et commutative dans la catégorie monoïdale  $\text{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})$ .

DEMONSTRATION On traite uniquement la commutativité de  $S^T$ . Il s'agit de montrer pour  $n = i + j$  que le triangle suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (T^{\otimes i} \otimes T^{\otimes j}) & \xrightarrow{\theta} & \text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n} (T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & T^{\otimes n} & \end{array}$$

est commutatif. Par adjonction, et en utilisant la construction de  $\theta$ , on voit qu'il suffit de montrer la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} T^{\otimes i} \otimes T^{\otimes j} \xrightarrow{\tau} T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i} & \longrightarrow & \text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n} (T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i}) \xrightarrow{\theta_{j,i}} \text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n} (T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i}) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & T^{\otimes n} \end{array}$$

Le point clef est de remarquer que la permutation  $\tau : T^{\otimes i} \otimes T^{\otimes j} \longrightarrow T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i}$  coïncide avec l'action de  $\theta_{i,j} \in \Sigma_n$  sur  $T^{\otimes n}$  modulo les identifications canoniques. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} T^{\otimes i} \otimes T^{\otimes j} \xrightarrow{\tau} T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i} & \longrightarrow & \text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n} (T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i}) & \xrightarrow{\theta_{j,i}} & \text{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n} (T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i}) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & T^{\otimes n} & \xrightarrow{\theta_{i,j}} & T^{\otimes n} \end{array}$$

Le résultat découle alors de la relation  $\theta_{j,i} \theta_{i,j} = 1$ .

C.Q.F.D

On notera  $\mathbf{Mod}_g(S^T)$  (resp.  $\mathbf{Mod}_d(S^T)$ ) la catégorie des  $S^T$ -modules à gauche (resp. à droite) dans  $\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})$ . Comme  $S^T$  est une algèbre commutative, on dispose d'un isomorphisme  $\mathbf{Mod}_g(S^T) \simeq \mathbf{Mod}_d(S^T)$  qui à un  $S^T$ -module à gauche ( $S^T \otimes M \rightarrow M$ ) associe le  $S^T$ -module à droite ( $M \otimes S^T \simeq S^T \otimes M \rightarrow M$ ).

L'intérêt de l'algèbre  $S^T$  vient du résultat suivant :

**PROPOSITION 4.3.70** — *La catégorie  $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C})$  est (tautologiquement) isomorphe à la catégorie  $\mathbf{Mod}_g(S^T)$  des  $S^T$ -modules à gauche dans  $\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})$ .*

DEMONSTRATION Un  $T$ -spectre symétrique  $\mathbf{X}$  définit un  $S^T$ -module en prenant la suite symétrique  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et l'accouplement :

$$S^T \otimes (\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (\mathbf{X}_n)_n$$

donné en degré  $n$  par le coproduit, selon les décompositions  $n = i + j$ , des flèches :

$$\text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (T^{\otimes i} \otimes \mathbf{X}_j) \longrightarrow \mathbf{X}_n$$

déduites des morphismes d'assemblage du  $T$ -spectre symétrique  $\mathbf{X}$ .

Réciproquement, un  $S^T$ -module  $(M)_{n \in \mathbb{N}}$  définit un  $T$ -spectre symétrique  $\mathbf{M}$  en posant  $\mathbf{M}_n = M_n$  et en prenant pour morphisme d'assemblage  $T \otimes M_{n-1} \longrightarrow M_n$  la composante correspondante à la décomposition  $n = 1 + (n-1)$

du morphisme structural  $S^T \otimes M \longrightarrow M$ .

C.Q.F.D

Vue la proposition 4.3.70, les  $S^T$ -modules à gauche seront notés par les lettres grasses :  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ , etc. Comme  $S^T$  est commutative, on dispose aussi d'un isomorphisme  $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{Mod}_d(S^T)$ . Toutefois, cet isomorphisme est moins tautologique que celui de la proposition 4.3.70.

Comme  $S^T$  est une algèbre symétrique et unitaire, la catégorie  $\mathbf{Mod}_g(S^T)$  est encore monoïdale symétrique et unitaire. Si  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sont deux  $S^T$ -modules, on définit  $\mathbf{X} \otimes_{S^T} \mathbf{Y}$  comme étant le coégalisateur habituel :

$$\text{Coeq} \left( \mathbf{X} \otimes S^T \otimes \mathbf{Y} \rightrightarrows \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} \right)$$

où  $\mathbf{X}$  est considéré comme un  $S^T$ -module à droite via l'isomorphisme  $\mathbf{Mod}_g(S^T) \simeq \mathbf{Mod}_d(S^T)$ . Sous les hypothèses du lemme 4.3.64, la catégorie  $\mathbf{Mod}_g(S^T)$  est également fermée. Si  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sont deux  $S^T$ -modules à gauche, on définit  $\underline{\text{Hom}}_g^{S^T}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$  comme étant l'égalisateur :

$$(4.64) \quad \text{Eq} \left( \underline{\text{Hom}}_g(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \rightrightarrows \underline{\text{Hom}}_g(\mathbf{X} \otimes S^T, \mathbf{Z}) \right)$$

où la première flèche est celle déduite du morphisme structural  $\mathbf{X} \otimes S^T \longrightarrow \mathbf{X}$  de  $\mathbf{X}$  vu comme  $S^T$ -module à droite et la seconde est la composée :

$$\underline{\text{Hom}}_g(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\mathbf{X} \otimes S^T, \mathbf{Z} \otimes S^T) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\mathbf{X} \otimes S^T, \mathbf{Z})$$

Notons également que la structure de  $S^T$ -module à gauche sur (4.64) est donnée par celle de  $\mathbf{Z}$ .

En utilisant la proposition 4.3.70 on déduit un produit tensoriel  $- \otimes -$  sur la catégorie  $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C})$ . De plus,  $(\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C}), \otimes)$  est monoïdale symétrique et unitaire. Elle est également fermée si  $\mathcal{C}$  est fermée et admet les limites pertinentes. Notons la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.3.71** — *Appelons  $\underline{\text{SUS}}_{T, \Sigma} : \mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C})$  le foncteur qui à une suite symétrique  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe le  $T$ -spectre symétrique  $\coprod_{p \in \mathbb{N}} \underline{\text{Sus}}_{T, \Sigma}^p(X_p)$ . Ce foncteur correspond via l'isomorphisme  $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{Mod}_g(S^T)$  au foncteur "S<sup>T</sup>-module libre associé" qui à la suite symétrique  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe le  $S^T$ -module à gauche  $S^T \otimes X$ . En particulier, le foncteur  $\underline{\text{SUS}}_{T, \Sigma}$  est monoïdal.*

DEMONSTRATION Le foncteur  $\underline{\text{SUS}}_{T, \Sigma}$  est l'adjoint à gauche du foncteur oublié  $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})$ . De même, le foncteur  $S^T \otimes -$  est l'adjoint à gauche du foncteur oublié  $\mathbf{Mod}_g(S^T) \longrightarrow \mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})$ . Le résultat est maintenant clair.

C.Q.F.D

Pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , on note  $e_p(A)$  la suite symétrique  $(\emptyset, \dots, \emptyset, \text{Ind}_1^{\Sigma_p} A, \emptyset, \dots)$  avec  $\text{Ind}_1^{\Sigma_p} A$  placé en degré  $p$ . On a un isomorphisme canonique  $e_p(A) \otimes e_q(B) \simeq e_{p+q}(A \otimes B)$ . De la relation  $\text{Sus}_{T, \Sigma}^p = \underline{\text{SUS}}_{T, \Sigma} \circ e_p$ , on déduit le corollaire :

**COROLLAIRE 4.3.72** — *Il existe un isomorphisme de  $T$ -spectres  $\text{Sus}_{T,\Sigma}^p(X) \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(Y) \simeq \text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+q}(X \otimes Y)$  naturel en  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{C}$ . En particulier, le foncteur  $\text{Sus}_{T,\Sigma}^0$  est monoïdal.*

On dispose d'un morphisme évident de suites symétriques  $i_1 : e_1(T) \longrightarrow S^T$  qui est l'identité au niveau 1. On peut former la composée des morphismes de  $S^T$ -modules :

$$(4.65) \quad \omega : S^T \otimes e_1(T) \xrightarrow{\text{id} \otimes i_1} S^T \otimes S^T \xrightarrow{m} S^T$$

Le morphisme  $\omega$  est aussi la flèche correspondante à  $i_1$  via l'adjonction  $(S^T \otimes -, \text{Oub}^{S^T}) : \mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Mod}_g(S^T)$ .

Étant donnée une suite symétrique  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la flèche  $\omega \otimes X$  :

$$S^T \otimes e_1(T) \otimes X \xrightarrow{\text{id} \otimes i_1} S^T \otimes S^T \otimes X \xrightarrow{m} S^T \otimes X$$

induit par la proposition 4.3.71 une flèche naturelle en  $X$  :

$$(4.66) \quad \omega_X : \underline{\text{SUS}}_{T,\Sigma}(e_1(T) \otimes X) \longrightarrow \underline{\text{SUS}}_{T,\Sigma}(X)$$

De plus, cette flèche correspond, via l'adjonction  $(\underline{\text{SUS}}_{T,\Sigma}, \text{Oub}_{\Sigma}^{T,\Sigma}) : \mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T,\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{C})$ , à la flèche

$$e_1(T) \otimes X \longrightarrow \underline{\text{SUS}}_{T,\Sigma}(X)$$

qui, au niveau  $n$ , est donnée par l'inclusion du facteur  $\text{Ind}_{1 \times \Sigma^{n-1}}^{\Sigma^n} T \otimes X_{n-1}$ , numéroté  $1 + n - 1 = n$ , dans le coproduit  $\coprod_{i+j=n} \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma^n} T^{\otimes i} X_j$ . Il vient que si l'on applique (4.66) à  $X = e_p(A)$ , on retrouve la flèche  $\omega_A^p$  (voir (4.31)). Le lemme suivant est maintenant clair :

**LEMME 4.3.73** — *Soient  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  et  $p \in \mathbb{N}$ . La flèche  $\omega_A^p : \text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+1}(T \otimes A) \longrightarrow \text{Sus}_{T,\Sigma}^p(A)$  correspond via l'isomorphisme de catégories  $\mathbf{Spect}_{T,\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{Mod}_g(S^T)$  à la composée :*

$$S^T \otimes e_{p+1}(T \otimes A) \simeq S^T \otimes e_1(T) \otimes e_p(A) \xrightarrow{i_1} S^T \otimes S^T \otimes e_p(A) \xrightarrow{m} S^T \otimes e_p(A)$$

**COROLLAIRE 4.3.74** — *Soient  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  et  $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ . Le carré suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+1}(T \otimes A) \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(B) & \xrightarrow{\omega_A^p \otimes \text{id}} & \text{Sus}_{T,\Sigma}^p(A) \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(B) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+q+1}(T \otimes A \otimes B) & \xrightarrow{\omega_{A \otimes B}^{p+q}} & \text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+q}(A \otimes B) \end{array}$$

*est commutatif.*

**DEMONSTRATION** Par le lemme précédent, le carré de l'énoncé correspond modulo l'isomorphisme  $\mathbf{Spect}_{T,\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{Mod}_g(S^T)$  au carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} (S^T \otimes e_1(T) \otimes e_p(A)) \otimes e_q(B) & \xrightarrow{\omega} & (S^T \otimes e_p(A)) \otimes e_q(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^T \otimes e_1(T) \otimes e_{p+q}(A \otimes B) & \xrightarrow{\omega} & S^T \otimes e_{p+q}(A \otimes B) \end{array}$$

La commutation de ce carré est évidente.

C.Q.F.D

Revenons au cas où  $\mathcal{C}$  est notre catégorie de modèles  $(\mathfrak{M}, \otimes, \mathbb{1})$  monoïdale symétrique et unitaire. Notons la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.3.75** — *La catégorie  $\mathbf{Spect}_{T,\Sigma}^{\Sigma}(\mathfrak{M})$  est une catégorie de modèles monoïdale pour sa structure projective instable.*



DEMONSTRATION Il s'agit de vérifier l'axiome (MMC) de la définition 4.1.57. Soit  $v : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$  une cofibration projective (resp. cofibration projective triviale niveau par niveau) de  $T$ -spectres symétriques. On note  $\mathcal{C}'$  la classe de flèches  $v' : \mathbf{A}' \longrightarrow \mathbf{B}'$  dans  $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathfrak{M})$  telles que :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}' \coprod_{\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}'} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}' \longrightarrow \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}'$$

est une cofibration projective (resp. cofibration projective triviale niveau par niveau). Il suffira de prouver que  $\mathbf{Cof}_{proj} \subset \mathcal{C}'$ . Pour cela, remarquons que  $\mathcal{C}'$  est stable par retract, composition transfinie et push-out. Ceci nous ramène à vérifier que  $\{\text{Sus}_{T,\Sigma}^q(u'); q \in \mathbb{N} \text{ et } u' \in \mathbf{Cof}\} \subset \mathcal{C}'$ .

Soit  $u' : U' \longrightarrow V'$  une cofibration de  $\mathfrak{M}$ . Il faut montrer que la flèche :

$$\mathbf{A} \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(V') \coprod_{\mathbf{A} \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(U')} \mathbf{B} \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(U') \longrightarrow \mathbf{B} \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(V')$$

est une cofibration projective (resp. cofibration projective triviale niveau par niveau). Pour faire cela, on introduit la classe  $\mathcal{C}$  des flèches  $v$  vérifiant cette propriété et on montre que  $\mathbf{Cof}_{proj} \subset \mathcal{C}$  (resp.  $\mathbf{Cof}_{proj} \cap \mathbf{W}_{niv} \subset \mathcal{C}$ ). Étant donné que  $\mathcal{C}$  est stable par retract, composition transfinie et push-out, on se ramène à montrer que  $\{\text{Sus}_{T,\Sigma}^p(u); p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathbf{Cof} \text{ (resp. } u \in \mathbf{Cof} \cap \mathbf{W})\} \subset \mathcal{C}$ . On se donne donc une cofibration (resp. une cofibration triviale)  $u : U \longrightarrow V$  de  $\mathfrak{M}$ . Par le corollaire 4.3.72, on voit que la flèche :

$$\text{Sus}_{T,\Sigma}^p(U) \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(V') \coprod_{\text{Sus}_{T,\Sigma}^p(U) \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(U')} \text{Sus}_{T,\Sigma}^p(V) \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(U') \longrightarrow \text{Sus}_{T,\Sigma}^p(V) \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(V')$$

s'identifie canoniquement à :

$$\text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+q}(U \otimes V') \coprod_{\text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+q}(U \otimes U')} \text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+q}(U' \otimes V) \longrightarrow \text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+q}(V \otimes V')$$

et donc à l'image de la cofibration (resp. cofibration triviale)  $U \otimes V' \coprod_{U \otimes U'} U' \otimes V \longrightarrow V \otimes V'$  par le foncteur de Quillen à gauche  $\text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+q}$ . D'où le résultat. C.Q.F.D

Nous ignorons si l'analogie de la proposition 4.3.75 est encore vrai pour la structure stable sur  $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C})$ . Nous avons toutefois le résultat conditionnel :

**THEOREME 4.3.76** — *On suppose que la catégorie  $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathfrak{M})$  est stable pour sa structure projective stable. Alors,  $(\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$  est une catégorie de modèles monoïdale.*

DEMONSTRATION Par la proposition 4.2.76, il nous reste à vérifier que  $\mathbf{E} \otimes \omega_A^p$  est une équivalence stable pour  $\mathbf{E}$  un  $T$ -spectre symétrique projectivement cofibrant,  $A$  un objet cofibrant de  $\mathfrak{M}$  et  $p \in \mathbb{N}$ . Il suffit donc de voir que pour tout  $\Omega_T$ -spectre fibrant niveau par niveau  $\mathbf{X}$ , l'application :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathfrak{M}))}(\mathbf{E} \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^p(A), \mathbf{X}) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathfrak{M}))}(\mathbf{E} \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+1}(T \otimes A), \mathbf{X})$$

est bijective. Par adjonction, cette application s'identifie à :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathfrak{M}))}(\mathbf{E}, \underline{\text{Hom}}_d(\text{Sus}_{T,\Sigma}^p(A), \mathbf{X})) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathfrak{M}))}(\mathbf{E}, \underline{\text{Hom}}_d(\text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+1}(T \otimes A), \mathbf{X}))$$

Il suffit donc de montrer que la flèche  $\underline{\text{Hom}}_g(\text{Sus}_{T,\Sigma}^p(A), \mathbf{X}) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+1}(T \otimes A), \mathbf{X})$  est une équivalence faible niveau par niveau. Soit  $q \in \mathbb{N}$ , la transformation naturelle :

$$(4.67) \quad \text{Ev}_q \circ \underline{\text{Hom}}_g(\text{Sus}_{T,\Sigma}^p(A), -) \longrightarrow \text{Ev}_q \circ \underline{\text{Hom}}_g(\text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+1}(T \otimes A), -)$$

correspond par adjonction à la flèche :

$$(4.68) \quad \text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+1}(T \otimes A) \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(-) \xrightarrow{\omega_A^p \otimes \text{id}} \text{Sus}_{T,\Sigma}^p(A) \otimes \text{Sus}_{T,\Sigma}^q(-)$$

Par le corollaire 4.3.74, la transformation naturelle (4.68) est isomorphe à :

$$(4.69) \quad \text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+q+1}(T \otimes A \otimes -) \xrightarrow{\omega_{A \otimes -}^{p+q}} \text{Sus}_{T,\Sigma}^{p+q}(A \otimes -)$$

On déduit que (4.67) est isomorphe à la transformation naturelle :

$$\underline{\text{Hom}}_g(A, \text{Ev}_{p+q}(-)) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(A, \underline{\text{Hom}}_g(T, \text{Ev}_{p+q+1}(-)))$$

déduite par adjonction du morphisme d'assemblage des  $T$ -spectres. Le résultat est maintenant clair étant donné que pour un  $\Omega_T$ -spectre fibrant niveau par niveau, le morphisme  $\mathbf{X}_{p+q} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(T, \mathbf{X}_{p+q+1})$  est une équivalence faible de  $\mathfrak{M}$ . C.Q.F.D

Notons la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.3.77** — *Pour que la catégorie de modèles  $(\mathbf{Spect}_{\Sigma}^T(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$  soit stable, il suffit qu'il existe un objet  $T' \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$  tel que  $T$  soit isomorphe à  $\Sigma^1(T')$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ .*

DEMONSTRATION Par la proposition 4.3.42, il suffit de traiter le cas  $T = T' \otimes \Sigma^1 \mathbf{1}$  avec  $T'$  un objet cofibrant de  $\mathfrak{M}$ . On note  $\tau$  la transposition  $(12) \in \Sigma_2$ . On sait par le théorème 4.3.38 que le foncteur  $(T \otimes -)_{\tau}$  est une équivalence de Quillen à gauche relativement à la structure projective stable de  $\mathbf{Spect}_{\Sigma}^T(\mathfrak{M})$ . On vérifie immédiatement que  $(T \otimes -)_{\tau}$  est égal au foncteur  $S^T \otimes e_0(T) \otimes -$  modulo l'isomorphisme  $\mathbf{Spect}_{\Sigma}^T(\mathfrak{M}) \simeq \mathbf{Mod}_g(S^T)$ . On a des isomorphismes canoniques de foncteurs :

$$S^T \otimes e_0(T) \otimes - = (S^T \otimes e_0(T') \otimes -) \circ (S^T \otimes e_0(\Sigma^1 \mathbf{1}) \otimes -) = (S^T \otimes e_0(\Sigma^1 \mathbf{1}) \otimes -) \circ (S^T \otimes e_0(T') \otimes -)$$

De plus, les deux foncteurs  $(S^T \otimes e_0(T') \otimes -)$  et  $(S^T \otimes e_0(\Sigma^1 \mathbf{1}) \otimes -)$  sont des foncteurs de Quillen à gauche. Ceci montre que  $(S^T \otimes e_0(\Sigma^1 \mathbf{1}) \otimes -)$  est une équivalence de Quillen à gauche. Il est immédiat que  $L(S^T \otimes e_0(\Sigma^1 \mathbf{1}) \otimes -)$  est isomorphe à l'endofoncteur  $\Sigma^1(-)$  de  $\mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_{\Sigma}^T(\mathfrak{M}))$ . C.Q.F.D

**Remarque 4.3.78** — La condition de la proposition 4.3.77 est clairement satisfaite lorsque  $\mathfrak{M}$  est stable.

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve du critère suivant :

**THEOREME 4.3.79** — *Pour que le foncteur de Quillen à gauche  $(- \otimes_{\{1\}} \Sigma) : \mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{\Sigma}^T(\mathfrak{M})$  soit une équivalence de Quillen relativement aux structures projectives stables, il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

- (i) La permutation  $(123) \in \Sigma_3$  opère par l'identité sur  $T^{\otimes 3}$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ .
- (ii) Le foncteur  $\text{RHom}_g(T, -)$  commute aux compositions transfinies comme dans l'hypothèse 4.3.56.
- (iii) La catégorie de modèles  $(\mathbf{Spect}_{\Sigma}^T(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$  est stable.

La permutation  $\tau = (12) \in \Sigma_2$  est une involution symétrique du monoïde  $\Sigma$  (voir la définition 4.3.36). D'après le théorème 4.3.40, il suffit de vérifier que le foncteur  $(T \otimes -)_{\tau} = (T \otimes_{\tau} -) : \mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M})$  est une équivalence de Quillen à gauche. On notera  $\underline{\text{Hom}}_g^{\tau}(T, -)$  l'adjoint à droite de  $T \otimes_{\tau} -$ . L'hypothèse de stabilité de  $(\mathbf{Spect}_{\Sigma}^T(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$  sera utilisée via le lemme suivant :

**LEMME 4.3.80** — *On suppose donné un morphisme de  $\mathbb{N}$ -suites dans une catégorie de modèles stable  $\mathfrak{N}$  :*

$$\begin{array}{ccccccc} A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ B_0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

et des morphismes  $\gamma_n : B_n \longrightarrow A_{n+1}$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$  faisant de :

$$\begin{array}{ccccccc} A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \\ B_0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

un diagramme commutatif dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . Alors, le morphisme évident  $\mathbf{LColim}_{n \in \mathbb{N}} A_n \longrightarrow \mathbf{LColim}_{n \in \mathbb{N}} B_n$  est un isomorphisme de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ .

DEMONSTRATION La colimite homotopique d'une  $\mathbb{N}$ -suite de  $\mathfrak{M}$  :

$$C_0 \xrightarrow{c_0} C_1 \xrightarrow{c_1} \dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{c_n} C_{n+1} \longrightarrow \dots$$

se calcule (à un isomorphisme non-unique près) dans la catégorie homotopique par :

$$\mathbf{Cone} \left( \coprod_n C_n \xrightarrow{\text{id} - \coprod_n c_n} \coprod_n C_n \right)$$

Les flèches  $\gamma_n$  de l'énoncé fournissent donc une flèche (non canonique)  $\gamma : \mathbf{LColim}_{n \in \mathbb{N}} B_n \longrightarrow \mathbf{LColim}_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . On montre facilement que les composées  $\gamma \circ c$  et  $c \circ \gamma$  sont inversibles (avec  $c : \mathbf{LColim}_{n \in \mathbb{N}} A_n \longrightarrow \mathbf{LColim}_{n \in \mathbb{N}} B_n$  le morphisme canonique). C.Q.F.D

La composée  $(T \otimes_{\tau} -) \circ (T \otimes_{\tau} -)$  est égale à  $(T^{\otimes 2} \otimes -)_{\sigma}$  avec  $\sigma = (123) \in \Sigma_3$ . On notera  $T^{\otimes 2} \otimes_{\sigma} -$  le prolongement de  $T^{\otimes 2} \otimes -$  associé à  $\sigma$  et  $\underline{\mathbf{Hom}}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -)$  son adjoint à droite.

**LEMME 4.3.81** — On suppose que  $\sigma = (123) : T^{\otimes 3} \longrightarrow T^{\otimes 3}$  est l'identité dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . On suppose aussi que  $(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$  est stable. Alors, l'unité :  $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -) \circ \mathbf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_{\sigma} -)\mathbf{X}$  de l'adjonction  $(\mathbf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_{\sigma} -), \mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T, -)) : \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$  est une équivalence stable pour tout  $T$ -spectre  $\mathbf{X}$ .

DEMONSTRATION Soit  $\mathbf{X}$  un  $T$ -spectre projectivement cofibrant. Choisissons une suite de cofibrations

$$\mathbf{X} \xrightarrow{a_1} \mathbf{R}_1 \xrightarrow{u} \mathbf{R}$$

avec  $a_1$  triviale niveau par niveau,  $u$  stablement triviale,  $\mathbf{R}_1$  fibrant niveau par niveau et  $\mathbf{R}$  stablement fibrant. On choisit ensuite une cofibration triviale niveau par niveau  $b_1 : T^{\otimes 2} \otimes_{\sigma} \mathbf{R}_1 \longrightarrow \mathbf{Q}_1$  avec  $\mathbf{Q}_1$  fibrant niveau par niveau et un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_1 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\mathbf{Hom}}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, \mathbf{Q}_1) & \xrightarrow{v} & \mathbf{P} \end{array}$$

avec  $v$  une cofibration stablement triviale et  $\mathbf{P}$  stablement fibrant.

Considérons le diagramme suivant dans  $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$  :

$$(4.70) \quad \begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{e} & & \\ & \mathbf{X} & \longrightarrow & \mathbf{LColim}_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^{on} \mathbf{R}_1 & \longrightarrow & \mathbf{LColim}_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^{on} \mathbf{R} \\ & \downarrow & & \downarrow (\star) & & \downarrow \\ \underline{\mathbf{Hom}}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, \mathbf{Q}_1) & \longrightarrow & \mathbf{LColim}_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^{on} \underline{\mathbf{Hom}}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, \mathbf{Q}_1) & \longrightarrow & \mathbf{LColim}_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^{on} \mathbf{P} \\ & & \xrightarrow{e'} & & \end{array}$$

Comme  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{P}$  sont des  $T$ -spectres stablement fibrants, les flèches  $\Lambda^{on} \mathbf{R} \longrightarrow \Lambda^{on+1} \mathbf{R}$  et  $\Lambda^{on} \mathbf{P} \longrightarrow \Lambda^{on+1} \mathbf{P}$  sont des équivalences faibles niveau par niveau. On déduit des isomorphismes  $\mathbf{R} \simeq \mathbf{LColim}_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^{on} \mathbf{R}$  et  $\mathbf{P} \simeq \mathbf{LColim}_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^{on} \mathbf{P}$  dans  $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$ . Ceci montre que les flèches  $e$  et  $e'$  sont des équivalences stables. En considérant l'image de (4.70) par  $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$ , la flèche  $\mathbf{X} \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_g^{\sigma}(T, \mathbf{Q}_1)$  devient un retract de  $(\star)$ . Il suffira donc de montrer que  $(\star)$  est une équivalence stable. On verra même que  $(\star)$  est un isomorphisme de  $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$ .

La flèche  $(\star)$  de (4.70) est la colimite homotopique du morphisme de  $\mathbb{N}$ -suites :

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda^0 \mathbf{R}_1 & \longrightarrow & \Lambda^1 \mathbf{R}_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Lambda^{on} \mathbf{R}_1 & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \Lambda^0 \underline{\mathrm{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, \mathbf{Q}_1) & \longrightarrow & \Lambda^1 \underline{\mathrm{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, \mathbf{Q}_1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Lambda^{on} \underline{\mathrm{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, \mathbf{Q}_1) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

On montrera que la restriction de ce morphisme de  $\mathbb{N}$ -suites suivant l'inclusion cofinale  $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ , vérifie la condition du lemme 4.3.80 niveau par niveau. Ainsi, on s'intéressera uniquement à l'image de cette restriction par le foncteur

$$\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}) \xrightarrow{Ev_p} \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) . \quad (4.71)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes n}, \mathbf{X}_{n+p}) & \xrightarrow{(1)} & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \mathbf{X}_{2+n+p}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow (2) & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes n}, \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) & \xrightarrow{(3)} & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{2+n+p})) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

où la flèche (1) est la composée :

$$\underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes n}, \mathbf{X}_{n+p}) \longrightarrow \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p}) \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{X}}^2} \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \mathbf{X}_{2+n+p})$$

La flèche (2) est induite par le morphisme d'unité  $\mathrm{id} \longrightarrow \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes -)$ . La flèche (3) est donnée par la composée :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes n}, \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2} \otimes \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) \\ & & \downarrow \gamma_{\underline{\mathrm{RHom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \sigma \mathbf{X})}^2 \\ & & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{2+n+p})) \end{array}$$

Supposons un instant que le morphisme d'assemblage du  $T$ -spectre  $\underline{\mathrm{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes_\sigma \mathbf{X})$  est égal dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  au morphisme d'assemblage du  $T$ -spectre  $\underline{\mathrm{Hom}}_g^1(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes_1 \mathbf{X})$  (avec  $T^{\otimes 2} \otimes_1 -$  le prolongement du foncteur  $T^{\otimes 2} \otimes - : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$  associé à l'isomorphisme d'associativité  $T \otimes (T \otimes T) \otimes - \simeq (T \otimes T) \otimes T \otimes -$ ). Dans ce cas, la flèche (3) dans le diagramme (4.71) est égale à la composée :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes n}, \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2} \otimes \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) \\ & & \downarrow \gamma_{\underline{\mathrm{RHom}}_g^1(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes_1 \mathbf{X})}^2 \\ & & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{2+n+p})) \end{array}$$

Le carré du morphisme d'assemblage  $\gamma_{\underline{\mathrm{Hom}}_g^1(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes_1 \mathbf{X})}$  du  $T$ -spectre  $\underline{\mathrm{Hom}}_g^1(T \otimes_1 \mathbf{X})$  est égal à la composée :

$$T^{\otimes 2} \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p}) \xrightarrow{\delta} T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p} \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{X}}^2} \mathbf{X}_{2+n+p} \xrightarrow{\eta} \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{2+n+p})$$

On dispose d'un isomorphisme canonique  $\underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, -)) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes n}, -)$  et d'un diagramme

commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p}) \\
 \downarrow & & \downarrow \gamma_{\mathbf{X}}^2 \\
 \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2} \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) & & \underline{\mathrm{Hom}}_g(T \otimes T^{\otimes n}, \mathbf{X}_{1+n+p}) \\
 \downarrow \delta & \nearrow & \downarrow \eta \\
 \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p}) & & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 1+n}, \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{1+n+p})) \\
 \downarrow \gamma_{\mathbf{X}}^2 & \nearrow & \\
 \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes n}, \mathbf{X}_{2+n+p}) & & \\
 \downarrow \eta & \nearrow & \\
 \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{2+n+p})) & & 
 \end{array}$$

Ceci montre que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes n}, \mathbf{X}_{n+p}) & \xrightarrow{(1)} & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \mathbf{X}_{2+n+p}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow (2) & \nearrow r_n & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes n}, \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) & \xrightarrow{(3)} & \underline{\mathrm{RHom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{2+n+p})) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

est commutatif dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  si l'on prend pour la flèche en pointillés la composée :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes n}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p}) \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{X}}^2} \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \mathbf{X}_{2+n+p})$$

On conclut alors avec le lemme 4.3.80.

Pour terminer, il nous reste donc à vérifier que les morphismes d'assemblage  $\gamma_{\underline{\mathrm{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes_\sigma \mathbf{X})}$  sont isomorphes dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  aux morphismes d'assemblage  $\gamma_{\underline{\mathrm{Hom}}_g^1(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes_1 \mathbf{X})}$ . Soit  $\epsilon \in \Sigma_3$  et explicitons  $\gamma_{\underline{\mathrm{Hom}}_g^\epsilon(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes_\epsilon \mathbf{X})}$  en revenant aux définitions. Il s'agit donc de la composée :

$$\begin{array}{ccc}
 T \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_n) & & \\
 \downarrow \eta & & \\
 \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes T \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_n)) & & \\
 \downarrow \epsilon^{-1} & & \\
 \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T \otimes T^{\otimes 2} \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_n)) & \xrightarrow{\delta} & \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T \otimes T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_n) \xrightarrow{\epsilon} \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes T \otimes \mathbf{X}_n) \\
 & & \downarrow \gamma_{\mathbf{X}} \\
 & & \underline{\mathrm{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+1})
 \end{array}$$

Étant donné que  $\sigma$  et  $\sigma^{-1}$  agissent trivialement sur  $T \otimes T \otimes T$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ , cette composée est la même (dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ ) pour  $\epsilon = 1$  ou  $\epsilon = \sigma$ . Le lemme est démontré. C.Q.F.D

On peut maintenant achever la preuve du théorème 4.3.79. Étant donné que  $(T \otimes_\tau -)^{\otimes 2} = (T^\otimes \otimes_\sigma -)$ , il suffit de montrer que l'adjonction  $((T^{\otimes 2} \otimes_\sigma -), \underline{\mathrm{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -))$  est une équivalence de Quillen relativement à la structure stable.

L'endofoncteur  $L(T^{\otimes 2} \otimes_\sigma -)$  de  $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$  preleve les équivalences stables. La condition (ii) du théorème 4.3.79 implique que l'endofoncteur  $\underline{\mathrm{RHom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -)$  de  $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$  preleve également les équivalences stables (voir la proposition 4.3.57). Ces deux foncteurs se dérivent donc trivialement relativement à la localisation

de  $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$  suivant les équivalences stables. On déduit, par le lemme 4.3.81, que l'unité de l'adjonction  $(\mathbf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_{\sigma} -), \mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -)) : \mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$  est inversible.

D'autre part, le foncteur  $\mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -)$  est conservatif. En effet, soit  $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$  un morphisme de  $T$ -spectres stablement fibrants. Supposons que  $\underline{\mathbf{Hom}}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, f)$  est une équivalence stable. Les  $T$ -spectres  $\underline{\mathbf{Hom}}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, \mathbf{X})$  et  $\underline{\mathbf{Hom}}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, \mathbf{Y})$  sont encore stablement fibrants. Il vient que  $\underline{\mathbf{Hom}}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, f)$  est une équivalence faible niveau par niveau. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , les carrés :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_n & \longrightarrow & \underline{\mathbf{Hom}}_g(\mathbf{X}_{n+2}) \\ f_n \downarrow & & \downarrow \underline{\mathbf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, f_{n+2}) \\ \mathbf{Y}_n & \longrightarrow & \underline{\mathbf{Hom}}_g(\mathbf{Y}_{n+2}) \end{array}$$

sont commutatifs et à flèches horizontales des équivalences faibles. Ceci montre que les  $f_n$  étaient des équivalences faibles.

Il découle alors formellement que la counité de l'adjonction  $(\mathbf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_{\sigma} -), \mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -))$  (au niveau de  $\mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$ ) est aussi inversible. En effet, la composée :

$$\mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -) \xrightarrow{\sim} \mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -) \circ \mathbf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_{\sigma} -) \circ \mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -) \longrightarrow \mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -)$$

est l'identité. Ceci montre que  $\mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -) \circ \mathbf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_{\sigma} -) \circ \mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -) \longrightarrow \mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -)$  est inversible.

On invoque alors le fait que  $\mathbf{RHom}_g^{\sigma}(T^{\otimes 2}, -)$  est conservatif. Le théorème 4.3.79 est démontré.

## 4.4 Des catégories de modèles de nature faisceautique

Le but de cette section est d'exposer les résultats de Jardine [Jar87] sur l'existence de structures de modèles sur les catégories de faisceaux sur un site. Une différence notable avec [Jar87] vient du fait que l'on considère des faisceaux à valeurs dans des catégories de *coefficients* (voir la définition 4.4.23). Ceci exclut donc l'exemple fondamental  $\Delta^{op} \mathcal{E}ns$  puisque les catégories de coefficients sont stables.

### 4.4.1 Préfaisceaux et faisceaux à valeurs dans une catégorie abstraite

Dans ce numéro, on se donne une catégorie  $\mathcal{C}$  complète et cocomplète. Si  $A$  est un objet de  $\mathcal{C}$  et  $E$  un ensemble, on notera  $E \otimes A$  (resp.  $\underline{\mathbf{hom}}(E, A)$ ) la colimite (resp. la limite) du foncteur :

$$E \longrightarrow * \xrightarrow{A} \mathcal{C}$$

où l'ensemble  $E$  est considéré comme une catégorie discrète. Bien entendu,  $E \otimes A$  (resp.  $\underline{\mathbf{hom}}(E, A)$ ) est simplement le coproduit (resp. le produit) de  $E$  copies de  $A$ . On vérifie aisément que le foncteur  $E \otimes -$  est adjoint à gauche du foncteur  $\underline{\mathbf{hom}}(E, -)$ .

**DEFINITION 4.4.1** — Soit  $\mathcal{S}$  une petite catégorie. On note  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$  la catégorie  $\mathbf{HOM}(\mathcal{S}^{op}, \mathcal{C})$ . Un objet de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$  est appelé un préfaisceau à valeurs dans  $\mathcal{C}$ . Lorsque  $\mathcal{C}$  est la catégorie des ensembles, on note simplement  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})$  la catégorie des préfaisceaux d'ensembles.

Dans la suite de cette section, une petite catégorie  $\mathcal{S}$  sera fixée. Sauf mention explicite du contraire, les préfaisceaux sont définis sur  $\mathcal{S}$ . Soit  $F$  un préfaisceau d'ensembles. On note  $\mathcal{S}/F$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})/F$  formée des flèches  $U \rightarrow F$  avec  $U$  un objet de  $\mathcal{S}$  vu comme un préfaisceau représentable via le plongement de Yoneda.

**DEFINITION 4.4.2** — Étant donné un préfaisceau  $K$  à valeurs dans  $\mathcal{C}$  et un préfaisceau d'ensembles  $F$ , on définit un préfaisceau  $F \otimes K : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$  par l'association :

$$U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow F(U) \otimes K(U)$$

Si  $H$  est un autre préfaisceau à valeurs dans  $\mathcal{C}$ , on note  $\underline{\mathbf{hom}}_{\mathcal{C}}(F, H)$  l'objet de  $\mathcal{C}$  défini par :

$$\mathbf{Lim}_{U \rightarrow F \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S}/F)} H(U)$$

On définit alors un préfaisceau  $\underline{\mathbf{hom}}(F, H)$  à valeurs dans  $\mathcal{C}$  par l'association :

$$U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow \underline{\mathbf{hom}}_{\mathcal{C}}(F \times U, H)$$

**Remarque 4.4.3** — Pour  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ , on a un isomorphisme canonique  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(U, H) \simeq H(U)$ . En effet, la catégorie  $\mathcal{S}/U$  admet  $\text{id}_U$  comme objet final.

On verra que  $\underline{\text{hom}}(F, -)$  est l'adjoint à droite du foncteur  $F \otimes -$ . On commence par :

**PROPOSITION 4.4.4** — Soit  $F$  un préfaisceau d'ensembles. Le foncteur  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F, -) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$  est adjoint à droite du foncteur composé :

$$\mathcal{C} \xrightarrow{cst} \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \xrightarrow{F \otimes -} \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$$

où  $cst$  est le foncteur qui associe à  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  le préfaisceau constant  $A_{cst}$  (i.e., tel que  $A_{cst}(U) = A$  pour  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ ).

DEMONSTRATION Il s'agit de construire un isomorphisme naturel en  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  et  $H \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$  :

$$\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(F \otimes A_{cst}, H) \xrightarrow{\sim} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F, H))$$

L'ensemble  $\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(F \otimes A_{cst}, H)$  est l'égalisateur de la double flèche évidente :

$$\prod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(F(U) \otimes A, H(U)) \rightrightarrows \prod_{U \rightarrow V \in \text{FI}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(F(V) \otimes A, H(U))$$

On déduit par adjonction, un isomorphisme naturel entre  $\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(F \otimes A_{cst}, H)$  et l'égalisateur de :

$$\prod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\text{hom}}(F(U), H(U))) \rightrightarrows \prod_{U \rightarrow V \in \text{FI}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\text{hom}}(F(V), H(U)))$$

Étant donné que le foncteur  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$  commute aux limites, il nous reste à construire un isomorphisme naturel en  $H$  entre les deux objets suivants :

$$\text{Lim}_{U \rightarrow F \in \text{Ob}(\mathcal{S}/F)} H(U) \quad \text{et} \quad \text{Eq} \left( \prod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} \underline{\text{hom}}(F(U), H(U)) \rightrightarrows \prod_{U \rightarrow V \in \text{FI}(\mathcal{S})} \underline{\text{hom}}(F(V), H(U)) \right)$$

En écrivant  $\underline{\text{hom}}(F(U'), H(U)) = \prod_{U' \rightarrow F} H(U)$  on voit que l'égalisateur de droite est égal à :

$$\text{Eq} \left( \prod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} \prod_{U \rightarrow F} H(U) \rightrightarrows \prod_{U \rightarrow V \in \text{FI}(\mathcal{S})} \prod_{V \rightarrow F} H(U) \right) = \text{Eq} \left( \prod_{U \rightarrow F \in \text{Ob}(\mathcal{S}/F)} H(U) \rightrightarrows \prod_{U \rightarrow V \rightarrow F \in \text{FI}(\mathcal{S}/F)} H(U) \right)$$

Le membre de droite est une description de la limite  $\text{Lim}_{U \rightarrow F \in \text{Ob}(\mathcal{S}/F)} H(U)$ . La proposition est démontrée. C.Q.F.D

**PROPOSITION 4.4.5** — Soit  $F$  un préfaisceau d'ensembles. L'endofoncteur  $\underline{\text{hom}}(F, -)$  de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$  est adjoint à droite de l'endofoncteur  $F \otimes -$ .

DEMONSTRATION Soient  $K$  et  $H$  deux préfaisceaux à valeurs dans  $\mathcal{C}$ . Il s'agit de construire un isomorphisme naturel :

$$\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(F \otimes K, H) \xrightarrow{\sim} \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(K, \underline{\text{hom}}(F, H))$$

Par définition, l'ensemble  $\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(K, \underline{\text{hom}}(F, H))$  est l'égalisateur de la double flèche évidente :

$$\prod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(K(U), \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F \times U, H)) \rightrightarrows \prod_{U \rightarrow V \in \text{FI}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(K(V), \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F \times U, H))$$

Par l'adjonction décrite dans la proposition 4.4.4, on a un isomorphisme naturel entre  $\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(K, \underline{\text{hom}}(F, H))$  et l'égalisateur :

$$\prod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}((F \times U) \otimes K(U)_{cst}, H) \rightrightarrows \prod_{U \rightarrow V \in \text{FI}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}((F \times U) \otimes K(V)_{cst}, H)$$

Étant donné que  $\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(-, H)$  envoie les colimites sur les limites, on voit qu'il suffit de construire un isomorphisme entre  $K$  et :

$$(4.72) \quad \text{Coeq} \left( \prod_{U \rightarrow V \in \text{FI}(\mathcal{S})} U \otimes K(V)_{cst} \rightrightarrows \prod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} U \otimes K(U)_{cst} \right)$$

Une flèche de (4.72) vers  $L \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$  correspond à un élément de :

$$\begin{aligned} & \text{Eq} \left( \prod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(U \otimes K(U)_{cst}, L) \rightrightarrows \prod_{U \rightarrow V \in \text{FI}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(U \otimes K(V)_{cst}, L) \right) \\ &= \text{Eq} \left( \prod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(K(U), L(U)) \rightrightarrows \prod_{U \rightarrow V \in \text{FI}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(K(V), L(U)) \right) = \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(K, L) \end{aligned}$$

La première égalité provient de l'adjonction  $(U \otimes (-)_{cst}, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(U, -))$  et de l'identification  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(U, L) = L(U)$  (voir la remarque 4.4.3). L'isomorphisme recherché s'obtient alors par le lemme de Yoneda. C.Q.F.D

On déduit immédiatement le corollaire :

**COROLLAIRE 4.4.6** — Soient  $F$  et  $G$  deux préfaisceaux d'ensembles sur  $\mathcal{S}$ . Il existe un isomorphisme naturel :

$$\underline{\text{hom}}(F \times G, H) \simeq \underline{\text{hom}}(G, \underline{\text{hom}}(F, H))$$

en  $H \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$ .

Rappelons qu'une topologie de Grothendieck  $top$  sur une petite catégorie  $\mathcal{S}$  est la donnée pour tout objet  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  d'une famille  $J_{top}(U)$  de sous-préfaisceaux d'ensembles de  $U$  telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

- (i)  $U \in J_{top}(U)$ .
- (ii) Pour toute flèche  $V \longrightarrow U$  et tout  $R \in J_{top}(U)$ , le sous-préfaisceau  $R \times_U V \subset V$  est dans  $J_{top}(V)$ .
- (iii) Soit  $R \in J_{top}(U)$  et  $P$  un sous-préfaisceau de  $U$ . Si pour tout  $V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)$  le sous-préfaisceau  $V \times_U P$  est dans  $J_{top}(V)$ , alors  $P \in J_{top}(U)$ .

Les sous-préfaisceaux dans  $J_{top}(U)$  sont appelés les *cribles couvrantes* de  $U$  (pour la topologie  $top$ ). Le couple  $(\mathcal{S}, top)$  est appelé un *site de Grothendieck*.

Dans le reste de cette sous-section, on suppose que  $\mathcal{S}$  est munie d'une topologie  $top$ . Rappelons la définition suivante :

**DEFINITION 4.4.7** — Un préfaisceau  $H$  à valeurs dans  $\mathcal{C}$  est un faisceau (resp. est séparé) (relativement à la topologie  $top$ ) lorsque la flèche :

$$H(U) = \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(U, H) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, H)$$

est un isomorphisme (resp. un monomorphisme) pour tout  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  et toute crible couvrante  $R$  de  $U$ . On note  $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$  dont les objets sont les faisceaux.

Soit  $H$  un préfaisceau à valeurs dans  $\mathcal{C}$ . On pose, suivant [SGA 4] :

$$(4.73) \quad LH(U) = \text{Colim}_{R \in J_{top}(U)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, H)$$

Il est clair que  $LH$  est naturellement un préfaisceau et que l'on dispose d'un morphisme canonique  $\ell(H) : H \longrightarrow LH$ . On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.4.8** — On suppose que les monomorphismes de  $\mathcal{C}$  sont stables par petites colimites filtrantes. Soit  $H$  un préfaisceau à valeurs dans  $\mathcal{C}$ . Alors,  $H$  est un faisceau si et seulement si  $\ell(H)$  est inversible.

DEMONSTRATION La condition est clairement nécessaire. Supposons donc que  $\ell(H)$  est inversible et montrons que  $H$  est un faisceau. Pour toute crible couvrante  $P \in J_{top}(U)$ , la flèche  $H(U) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H)$  admet une rétraction donnée par la composée :

$$H(U) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow \text{Colim}_{R \in J_{top}(U)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, H) \simeq H(U)$$

En particulier, cette flèche est un monomorphisme. Plus généralement, si  $R$  et  $R'$  sont deux cribles couvrantes de  $U$  avec  $R' \subset R$ , le morphisme :

$$\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, H) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R', H)$$

est un monomorphisme. En effet, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, H) & \longrightarrow & \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R', H) \\ \downarrow (1) & & \downarrow (2) \\ \prod_{V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)} H(V) & \xrightarrow{(3)} & \prod_{V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(V \times_R R', H) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \prod_{V' \rightarrow R' \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R')} H(V') \end{array} \quad (1)$$



Les flèches numérotées (1) sont des monomorphismes par la construction de  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(-, -)$  (voir la définition 4.4.2). Il vient que la flèche (2) est aussi un monomorphisme. L'assertion découle alors du fait que (3) est un monomorphisme puisque c'est le produit des monomorphismes  $H(V) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(V \times_R R', H)$ .

Il est maintenant facile d'achever la preuve de la proposition. En effet, pour  $P \in \mathcal{J}_{top}(U)$ , la flèche :

$$(4.74) \quad \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow \text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, H) \simeq H(U)$$

est un monomorphisme puisque c'est la colimite des monomorphismes  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, H)$  suivant les cribles couvrants  $R$  de  $U$  contenues dans  $P$ . Mais, la flèche (4.74) admet  $H(U) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H)$  pour section. Il vient que (4.74) et sa section sont des isomorphismes. C.Q.F.D

**LEMME 4.4.9** — *Soit  $H$  un préfaisceau à valeurs dans  $\mathcal{C}$ . Les flèches  $L(\ell(H)), \ell(L(H)) : L(H) \longrightarrow L(L(H))$  sont égales.*

DEMONSTRATION Soit  $U$  un objet de  $\mathcal{S}$ . Il s'agit de comparer les deux flèches :

$$\text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, H) \xrightarrow{\ell(H)} \text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, L(H))$$

$$\text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, H) \simeq L(H)(U) \longrightarrow \text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, L(H))$$

L'application  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(\text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, H), -) \longrightarrow \prod_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \text{hom}_{\mathcal{C}}(\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, H), -)$  étant injective, on se ramène à comparer les composées ci-dessous avec  $P$  une crible couvrante de  $U$  :

$$\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, L(H)) \longrightarrow \text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, L(H))$$

$$\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow L(H)(U) \longrightarrow \text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, L(H))$$

Il suffit donc de montrer que les deux composées :

$$\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, L(H)) \quad \text{et} \quad \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow L(H)(U) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, L(H))$$

sont égales. Puisque l'application  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(-, \text{Lim}_{V \rightarrow P \in \text{Ob}(\mathcal{S}/P)} L(H)(V)) \longrightarrow \prod_{V \rightarrow P \in \text{Ob}(\mathcal{S}/P)} \text{hom}_{\mathcal{C}}(-, L(H)(V))$  est injective, il suffit de prouver que les deux flèches suivantes sont égales pour  $V \rightarrow P \in \text{Ob}(\mathcal{S}/P)$  :

$$(4.75) \quad \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, L(H)) \longrightarrow L(H)(V) \quad \text{et} \quad \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow L(H)(U) \longrightarrow L(H)(V)$$

Étant donné le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) & \longrightarrow & \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, L(H)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(V, H) & \longrightarrow & \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(V, L(H)) \end{array}$$

on voit que la première composée de (4.75) est égale à :  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow H(V) \longrightarrow L(H)(V)$ . D'autre part, en étudiant la structure de préfaisceau sur  $L(H)$ , on voit que la seconde composée de (4.75) est égale à :

$$\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P \times_U V, H) \longrightarrow L(H)(V)$$

Comme  $P \times_U V \simeq V$ , on voit que cette composée est simplement  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow H(V) \longrightarrow L(H)(V)$ . Le lemme est démontré. C.Q.F.D

**THEOREME 4.4.10** — *On suppose que  $\mathcal{C}$  est présentable au sens de la définition 4.2.16. L'inclusion  $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \subset \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$  admet un adjoint à gauche :*

$$a_{top} : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_t(\mathcal{S}, \mathcal{C})$$

De plus, le foncteur  $a_{top}$  commute aux limites finies.

DEMONSTRATION Pour tous ordinaux  $\nu \leq \lambda$ , on définit par induction transfinie un foncteur  $L^\lambda$  et une transformation naturelle  $\ell_{\nu \leq \lambda} : L^\nu \longrightarrow L^\lambda$  de la manière suivante :

- $L^0 = \text{id}$  et  $\ell_{\lambda \leq \lambda} = \text{id}$ .
- Si  $\lambda$  est limite, on pose  $L^\lambda = \text{Colim}_{\nu \in \lambda} L^\nu$ . Pour  $\mu \in \lambda$ , on prend  $\ell_{\mu \leq \lambda}$  la transformation évidente.
- Si  $\lambda = \nu + 1$ , on pose  $L^\lambda = L \circ L^\nu$ . Pour  $\mu \in \lambda$ , on prend  $\ell_{\mu \leq \lambda} = \ell(\bar{L}^\nu) \circ \ell_{\mu \leq \nu}$ .

Supposons que  $\mathcal{C}$  est  $\alpha$ -présentable avec  $\alpha$  majorant le cardinal de  $\mathcal{S}$ . Les foncteurs  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, -)$  sont  $\alpha$ -accessibles pour toutes les cribles couvrantes de la topologie  $\text{top}$ . En effet, la définition du foncteur  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, -)$  fait intervenir une limite suivant la catégorie  $\mathcal{S}/R$  qui est de cardinal inférieur à  $\alpha$ . Il vient que  $L$  est  $\alpha$ -accessible. Ainsi, pour  $\lambda$  le cardinal successeur de  $\alpha$ , la flèche  $\ell : L^\lambda \longrightarrow L(L^\lambda)$  s'identifie à la colimite des flèches :

$$\begin{array}{ccccccc}
 L & \xrightarrow{\ell(L)} & L^2 & \xrightarrow{\ell(L^2)} & \dots & \longrightarrow & L^\nu & \xrightarrow{\ell(L^\nu)} & L^{\nu+1} & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow \ell(L) & & \downarrow \ell(L^2) & & & & \downarrow \ell(L^\nu) & & \downarrow \ell(L^{\nu+1}) & & \\
 L^2 & \xrightarrow{\ell(L^2)} & L^3 & \xrightarrow{\ell(L^3)} & \dots & \longrightarrow & L^{\nu+1} & \xrightarrow{\ell(L^{\nu+1})} & L^{\nu+2} & \longrightarrow & \dots \\
 & \text{L}(\ell(L^1)) & \text{L}(\ell(L^2)) & & & & \text{L}(\ell(L^\nu)) & & & & 
 \end{array}$$

Par le lemme 4.4.9, on sait que  $L(\ell(L^\nu)) = \ell(L^{\nu+1})$ . Ceci montre que  $\ell : L^\lambda \longrightarrow L(L^\lambda)$  est inversible. Par la proposition 4.4.8,  $L^\lambda H$  est donc un faisceau pour tout  $H \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$ . L'énoncé découle alors formellement du fait que  $H \simeq L^\lambda H$  si le préfaisceau  $H$  est un faisceau. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.4.11** — *On suppose que  $\mathcal{C}$  est présentable au sens de la définition 4.2.16. Alors, les catégories  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$  et  $\mathbf{Shv}_{\text{top}}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$  sont aussi présentables.*

DEMONSTRATION Ceci découle immédiatement des propositions 4.2.20 et 4.2.21. C.Q.F.D

On a le lemme suivant :

**LEMME 4.4.12** — *On suppose que  $\mathcal{C}$  est présentable. Soit  $H$  un préfaisceau à valeurs dans  $\mathcal{C}$ . Le morphisme  $\ell(H) : H \longrightarrow LH$  induit un isomorphisme après faisceautisation.*

DEMONSTRATION On garde les notations de la preuve du théorème 4.4.10. Il s'agit de montrer que la colimite des flèches verticales :

$$\begin{array}{ccccccc}
 L(H) & \xrightarrow{\ell(L)} & L^2(H) & \xrightarrow{\ell(L^2)} & \dots & \longrightarrow & L^\nu(H) & \xrightarrow{\ell(L^\nu)} & L^{\nu+1} & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow L(\ell) & & \downarrow L^2(\ell) & & & & \downarrow L^\nu(\ell) & & \downarrow L^{\nu+1}(\ell) & & \\
 L^2(H) & \xrightarrow{\ell(L^2)} & L^3(H) & \xrightarrow{\ell(L^3)} & \dots & \longrightarrow & L^{\nu+1}(H) & \xrightarrow{\ell(L^{\nu+1})} & L^{\nu+2}(H) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

est inversible. On montre par induction transfinie à partir du lemme 4.4.9 que  $L^\nu(\ell) = \ell(L^\nu)$ . Le résultat est alors immédiat. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.4.13** — *On suppose que  $\mathcal{C}$  est présentable. Soient  $H$  un préfaisceau à valeurs dans  $\mathcal{C}$  et  $F \longrightarrow F'$  un morphisme de préfaisceaux d'ensembles qui devient inversible après faisceautisation. La flèche  $F \otimes H \longrightarrow F' \otimes H$  induit alors un isomorphisme après faisceautisation.*

DEMONSTRATION On se ramène immédiatement au cas du morphisme de préfaisceaux d'ensembles  $F \longrightarrow LF$ . On dispose d'un morphisme évident  $L(F) \otimes H \longrightarrow L(F \otimes H)$  donné au niveau de  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  par la colimite suivant  $R \in J_{\text{top}}(U)$  des :

$$\underline{\text{hom}}_{\mathcal{E}_{ns}}(R, F) \otimes H(U) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(R, F \otimes H)$$

Montrons que ce morphisme définit un relèvement dans le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 F \otimes H & \longrightarrow & L(F \otimes H) \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 LF \otimes H & \longrightarrow & L(LF \otimes H)
 \end{array}$$

Ceci permettra de conclure étant donné que les flèches horizontales deviennent inversibles après application de  $\mathbf{a}_{\text{top}}$ . Seule la commutation du triangle inférieur demande un argument. Pour cela, on remarque que la naturalité en  $F$  du

morphisme  $L(F) \otimes H \longrightarrow L(F \otimes H)$  et le fait que  $\ell(L) = L(\ell)$  fournissent le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} LF \otimes H & \longrightarrow & L(F \otimes H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L^2F \otimes H & \longrightarrow & L(LF \otimes H) \end{array}$$

Le corollaire est démontré.

C.Q.F.D

On déduit alors le résultat suivant :

**COROLLAIRE 4.4.14** — *On suppose que  $\mathcal{C}$  est présentable. Soit  $F \longrightarrow F'$  un morphisme de préfaisceaux d'ensembles qui induit un isomorphisme après faisceautisation. Soit  $K$  un faisceau à valeurs dans  $\mathcal{C}$ . Alors les morphismes :*

$$\underline{\text{hom}}(F', K) \longrightarrow \underline{\text{hom}}(F, K) \quad \text{et} \quad \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F', K) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F, K)$$

sont inversibles.

DEMONSTRATION En remarquant que  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(*, \underline{\text{hom}}(F, -)) \simeq \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F, -)$ , il suffit de considérer la première flèche.

Soit  $H$  un préfaisceau à valeurs dans  $\mathcal{C}$ . La flèche :

$$\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(H, \underline{\text{hom}}(F', K)) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(H, \underline{\text{hom}}(F, K))$$

est isomorphe à :

$$\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(F' \otimes H, K) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(F \otimes H, K)$$

Comme  $K$  est un faisceau, cette flèche s'identifie à :

$$\text{hom}_{\mathbf{Shv}_{\text{top}}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(\text{a}_{\text{top}}(F' \otimes H), K) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Shv}_{\text{top}}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(\text{a}_{\text{top}}(F \otimes H), K)$$

Le résultat découle alors du corollaire 4.4.13 et du lemme de Yoneda.

C.Q.F.D

### 4.4.2 Préfaisceaux et faisceaux à valeurs dans une catégorie de modèles

Supposons maintenant que  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$ . On fait les définitions suivantes :

**DEFINITION 4.4.15** — *Soit  $f : H \longrightarrow K$  une flèche de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ .*

1- *On dit que  $f$  est une équivalence faible (resp. cofibration injective, fibration projective) lorsque pour tout  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ , la flèche  $f(U) : H(U) \longrightarrow K(U)$  est une équivalence faible (resp. cofibration, fibration) de  $\mathfrak{M}$ .*

2- *On dit que  $f$  est une cofibration projective (resp. fibration injective) lorsque  $f$  admet la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) par rapport aux fibrations triviales projectives (resp. cofibrations triviales injectives).*

3- *On notera  $\mathbf{W}$  la classe des équivalences faibles de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ . On note  $\mathbf{Cof}_{\text{proj}}$ , (resp.  $\mathbf{Cof}_{\text{inj}}$ ) la classe des cofibrations projectives (resp. injectives) et  $\mathbf{Fib}_{\text{proj}}$ , (resp.  $\mathbf{Fib}_{\text{inj}}$ ) celle des fibrations projectives (resp. injectives).*

**PROPOSITION 4.4.16** — *Supposons que  $\mathfrak{M}$  est une catégorie de modèles présentable par cofibrations. Alors, la catégorie  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  munie des trois classes  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{Cof}_{\text{proj}}$  et  $\mathbf{Fib}_{\text{proj}}$ , est une catégorie de modèles présentable par cofibrations.*

DEMONSTRATION On suppose que  $\mathfrak{M}$  est  $\alpha$ -présentable par cofibrations. Il est immédiat que les classes  $\mathbf{Fib}_{\text{proj}}$  et  $\mathbf{Fib}_{\text{proj}} \cap \mathbf{W}$  coïncident respectivement avec les deux classes :

$$\text{RLP}\{U \otimes f_{\text{cst}} : U \otimes A_{\text{cst}} \longrightarrow U \otimes B_{\text{cst}} ; f : A \rightarrow B \in \mathbf{Cof}_{\alpha} \cap \mathbf{W} \subset \text{Fl}(\mathfrak{M}) \text{ et } U \in \text{Ob}(\mathcal{S})\}$$

$$\text{RLP}\{U \otimes f_{\text{cst}} : U \otimes A_{\text{cst}} \longrightarrow U \otimes B_{\text{cst}} ; f : A \rightarrow B \in \mathbf{Cof}_{\alpha} \subset \text{Fl}(\mathfrak{M}) \text{ et } U \in \text{Ob}(\mathcal{S})\}$$

L'axiome (MC5) découle alors par l'argument du petit objet et du fait que les flèches de

$$\text{Cell}\{U \otimes f_{\text{cst}} : U \otimes A_{\text{cst}} \longrightarrow U \otimes B_{\text{cst}} ; f : A \rightarrow B \in \mathbf{Cof}_{\alpha} \cap \mathbf{W} \subset \text{Fl}(\mathfrak{M}) \text{ et } U \in \text{Ob}(\mathcal{S})\}$$

sont des équivalences faibles. Les axiomes (MC1), (MC2) et (MC3) sont évidents. L'axiome (MC4) s'obtient par l'astuce de Joyal. Le fait que la catégorie de modèles ainsi obtenue soit présentable par cofibrations découle immédiatement du corollaire 4.4.11.

C.Q.F.D

Le résultat suivant demandera plus de travail ; on utilisera librement les résultats du numéro 4.2.3 :

**PROPOSITION 4.4.17** — *Supposons que  $\mathfrak{M}$  est une catégorie de modèles présentable par cofibrations. Alors, la catégorie  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  munie des trois classes  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{Cof}_{inj}$  et  $\mathbf{Fib}_{inj}$ , est une catégorie de modèles présentable par cofibrations.*

**DEMONSTRATION** Soit  $\alpha$  un cardinal majorant celui de  $\mathcal{S}$  et tel que  $\mathfrak{M}$  est  $\alpha$ -présentable par cofibrations. Soit  $\beta$  un cardinal comme dans la proposition 4.2.41. On prouvera l'égalité :

$$(4.76) \quad \mathbf{Fib}_{inj} = \mathbf{RLP}((\mathbf{Cof}_{inj})_\beta \cap \mathbf{W})$$

Montrons seulement comment obtenir l'axiome **(MC5)** de (4.76). L'argument du petit objet appliqué à la classe essentiellement petite  $(\mathbf{Cof}_{inj})_\beta \cap \mathbf{W}$ , fournit des factorisations par cofibrations triviales injectives suivies de fibrations injectives. De même, l'argument du petit objet appliqué à  $(\mathbf{Cof}_{inj})_\beta$  fournit des factorisations par cofibrations injectives suivies de flèches dans  $\mathbf{RLP}((\mathbf{Cof}_{inj})_\beta)$ . De (4.76), on déduit que  $\mathbf{RLP}((\mathbf{Cof}_{inj})_\beta) \subset \mathbf{Fib}_{inj}$ . Pour voir que  $\mathbf{RLP}((\mathbf{Cof}_{inj})_\beta) \subset \mathbf{W}$  il suffit de remarquer que :

$$\{U \otimes f_{cst} : U \otimes A_{cst} \longrightarrow U \otimes B_{cst} ; f : A \rightarrow B \in \mathbf{Cof}_\alpha \subset \mathbf{Fl}(\mathfrak{M}) \text{ et } U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})\} \subset (\mathbf{Cof}_{inj})_\beta$$

Le reste de la démonstration est consacré à la preuve de (4.76). Soit  $f \in \mathbf{RLP}((\mathbf{Cof}_{inj})_\beta \cap \mathbf{W})$  et montrons que  $f \in \mathbf{RLP}(\mathbf{Cof}_{inj} \cap \mathbf{W})$ . On se donne un carré commutatif dans  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & H \\ u \downarrow & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & K \end{array}$$

avec  $u$  une cofibration triviale injective. Pour  $U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})$ , on choisit une section  $r_U : B(U) \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u(U))$  comme dans le cas respé de la définition 4.2.45.

On considère l'ensemble  $\mathcal{E}$  formé des classes d'isomorphisme des familles  $(v_U, a_U)_{U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})}$  avec :

- $v_U : A(U) \longrightarrow T(U)$  une sous-cofibration  $r_U$ -normale de  $c_0(u(U))$ ,
- $a_U : s(T(U)) \longrightarrow H(U)$  avec  $s(T(U)) = T(U) \times_{\Phi_{c_0 f}(u(U)), r_U} B(U)$ ,

et qui vérifient les conditions suivantes :

- (i) Les sous-objets  $s(T(U))$  de  $B(U)$  forment un sous-préfaisceau  $s(T)$  de  $B$ .
- (ii) Les flèches  $a_U$  définissent un morphisme de préfaisceaux  $a : s(T) \longrightarrow H$  faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & H & & \\ \downarrow & & \downarrow f & & \\ s(T) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & K \end{array}$$

On ordonne  $\mathcal{E}$  de la manière évidente. Par la proposition 4.2.54, les chaînes de  $\mathcal{E}$  sont majorées par leur colimite. Le lemme de Zorn assure l'existence d'éléments maximaux.

Supposons que  $(v_U, a_U)_{U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})}$  est un élément maximal de  $\mathcal{E}$  et montrons que  $T(U) = \Phi_{c_0 f}(u(U))$  pour tout  $U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})$ . Considérons le diagramme de  $\mathbf{OrdEns}$  :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})} \mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v_U}(u(U)|r_U) & & \\ \downarrow & & \\ \mathbf{Sub}_\beta(u) & \longrightarrow & \prod_{U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})} \mathbf{Sub}_\beta(u(U)) \end{array}$$

où les flèches sont les inclusions évidentes. On note  $\mathcal{L}$  la limite de ce diagramme. Par les lemmes 4.2.57 et 4.2.4, cette limite est cofinale dans  $\prod_{U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})} \mathbf{Sub}_\beta(u(U))$  (pour la cofinalité de l'inclusion  $\mathbf{Sub}_\beta(u) \subset \prod_{U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})} \mathbf{Sub}_\beta(u(U))$ ), se référer à la preuve de la proposition 4.2.20).

Se donner un objet de  $\mathcal{L}$  revient à se donner une sous-flèche  $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$  de  $u$  de but  $\beta$ -accessible et telle que pour  $U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})$ ,  $u_0(U)$  est une sous-cofibration  $r_U$ -spéciale de  $u(U)$  qui est de plus orthogonale à  $v_U$ . Notons  $T_0(U) = T(U) \times_{\Phi_{c_0 f}(u(U))} \Phi_{c_0 f}(u_0(U))$ . Comme  $u_0(U)$  est orthogonale à  $v_U$ , la flèche  $A_0(U) \longrightarrow T_0(U)$  est  $r_{0,U}$ -normale dans  $u_0(U)$  (avec  $r_{0,U} : B_0(U) \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u_0(U))$  la section déduite de  $r_U$ ). Notons  $s(T_0)$  le préfaisceau

$s(T) \times_B B_0$ . On a clairement  $s(T_0)(U) = T_0(U) \times_{\Phi_{\text{cof}}(u_0(U)), r_{0,U}} B_0(U)$  pour  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ . La flèche  $s(T_0) \longrightarrow B_0$  est donc une cofibration injective triviale. On déduit l'existence d'un relèvement :

$$\begin{array}{ccccc} s(T_0) & \longrightarrow & s(T) & \xrightarrow{a} & H \\ u_0 \downarrow & & \nearrow l & & \downarrow f \\ B_0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & K \end{array}$$

Pour  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ ,  $v'_U : A(U) \longrightarrow T'(U) = T(U) \coprod_{T_0(U)} \Phi_{\text{cof}}(u_0(U))$  est une sous-cofibration  $r_U$ -normale de  $u(U)$  majorant  $v_U$ . Il vient que la famille  $(v'_U, a_U \cup l(U))_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})}$  majore  $(v_U, a_U)_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})}$  dans  $\mathcal{E}$ . Par maximalité, on déduit que les sous-objets  $\Phi_{\text{cof}}(u_0(U))$  de  $\Phi_{\text{cof}}(u(U))$  sont majorés par  $T(U)$ . Comme  $\mathcal{L}$  est cofinale dans  $\prod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} \mathbf{Sub}_\beta(u(U))$ , on a forcément  $T(U) = \Phi_{\text{cof}}(u(U))$ . C.Q.F.D

**DEFINITION 4.4.18** — Soit  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$  une catégorie de modèles présentable par cofibrations. Le triplet  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj}})$  est la structure de modèles projective sur  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ . Le triplet  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj}})$  est la structure de modèles injective sur  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ .

Notons les deux lemmes simples suivants :

**LEMME 4.4.19** — Soient  $\mathfrak{M}$  une catégorie présentable par cofibrations et  $F$  un préfaisceau d'ensembles. Alors :

$$(F \otimes -, \underline{\text{hom}}(F, -)) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \quad \text{et} \quad (F \otimes (-)_{\text{cst}}, \underline{\text{hom}}_{\mathfrak{M}}(F, -)) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$$

sont des adjonctions de Quillen lorsque l'on munit  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  de sa structure injective. Si le préfaisceau  $F$  est représentable,  $(F \otimes (-)_{\text{cst}}, \underline{\text{hom}}_{\mathfrak{M}}(F, -))$  est également une adjonction de Quillen relativement à la structure projective sur  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ .

**DEMONSTRATION** En effet, le foncteur  $F \otimes -$  (resp.  $F \otimes (-)_{\text{cst}}$ ) envoie les cofibrations et les cofibrations triviales de  $(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}), \mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj}})$  (resp.  $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ ) sur des cofibrations injectives et des cofibrations injectives triviales. Si  $U$  est un objet de  $\mathcal{S}$ , le foncteur  $\underline{\text{hom}}_{\mathfrak{M}}(U, -)$  envoie les fibrations projectives et les fibrations projectives triviales sur des fibrations et des fibrations triviales de  $\mathfrak{M}$ . C.Q.F.D

**LEMME 4.4.20** — On garde les hypothèses du lemme 4.4.19. La famille des foncteurs :

$$\underline{\text{Rhom}}_{\mathfrak{M}}(U, -) : \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$$

avec  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ , est conservative.

**COROLLAIRE 4.4.21** — Supposons que la catégorie de modèles présentable par cofibrations  $\mathfrak{M}$  est stable. Alors les structures de modèles sur  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  de la définition 4.4.18 sont stables.

**DEMONSTRATION** Il s'agit de montrer que l'unité et la counité de l'adjonction

$$(\Sigma^1, \Omega^1) : \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$$

sont inversibles. Ceci découle du lemme 4.4.20 et de la commutation de  $\Sigma^1$  et  $\Omega^1$  avec les foncteurs  $\underline{\text{Rhom}}_{\mathfrak{M}}(U, -)$  pour  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ . C.Q.F.D

Étant donnée une topologie de Grothendieck  $top$  sur  $\mathcal{S}$  nous allons localiser les structures de la définition 4.4.18 pour obtenir les structures  $top$ -locales de Jardines [Jar87]. On fera cela dans un cadre restreint que nous allons décrire.

**DEFINITION 4.4.22** — Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles stable. Un objet  $A \in \mathfrak{M}$  est dit homotopiquement compact si pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le foncteur  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, -[n]) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{E}ns$  commute aux petites colimites filtrantes.

**DEFINITION 4.4.23** — Une catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est appelée une catégorie de coefficients lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $\mathfrak{M}$  est propre à gauche, présentable par cofibrations et stable,
- (ii) Les équivalences faibles de  $\mathfrak{M}$  sont stables par coproduits finis.
- (iii) Il existe un ensemble  $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$  d'objets homotopiquement compacts qui engendre la catégorie triangulée avec sommes infinies  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ .

On supposera que l'ensemble  $\mathcal{E}$  fait partie des données d'une catégorie de coefficients.

On est bien sûr intéressé par les exemples suivants :

**Exemple 4.4.24** — **1-** Les deux catégories de modèles  $\mathbf{Spect}_{\mathcal{S}^1}(\Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns)$  et  $\mathbf{Spect}_{\mathcal{S}^1}^{\Sigma}(\Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns)$  munies de leurs structures projectives stables sont des catégories de coefficients. La condition (iii) découle du fait qu’une colimite filtrante d’objets fibrants est encore un objet fibrant.

**2-** De même, si  $A$  est un anneau, la catégorie des complexes de  $A$ -modules à gauche  $\mathbf{Compl}(\text{Mod}_g(A))$  est une catégorie de coefficients.

**Remarque 4.4.25** — Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de coefficients. La famille des foncteurs  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, -[n]) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ , avec  $A$  dans  $\mathcal{E}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , détecte les équivalences faibles. Il vient que dans une catégorie de coefficients, les équivalences faibles sont stables par petites colimites filtrantes.

**DEFINITION 4.4.26** — Soient  $H$  et  $K$  deux objets de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ . On notera  $\underline{\Pi}_0(H, K)$  le préfaisceau d’ensembles défini par l’association :

$$U \in \text{Ob}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(U \overset{\mathbb{L}}{\otimes} H, K)$$

où le foncteur dérivé  $U \overset{\mathbb{L}}{\otimes} -$  est pris relativement à la structure injective sur  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ . On notera  $\underline{\Pi}_0^{\text{top}}(H, K)$  le faisceau associé à  $\underline{\Pi}_0(H, K)$  pour la topologie  $\text{top}$ .

**Remarque 4.4.27** — Lorsque  $H = A_{\text{cst}}$  avec  $A$  un objet de  $\mathfrak{M}$ , le préfaisceau  $\underline{\Pi}_0(H, K)$  est donné par :  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, K(U))$ . On le notera simplement  $\Pi_0(A, K)$ . Son faisceau associé est alors noté  $\Pi_0^{\text{top}}(A, K)$

**DEFINITION 4.4.28** — Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de coefficients. Une flèche  $f : H \longrightarrow K$  de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  est appelée une équivalence  $\text{top}$ -locale si pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et  $A \in \mathcal{E}$ , le morphisme de faisceaux :

$$\Pi_0^{\text{top}}(A, f[n]) : \Pi_0^{\text{top}}(A, H[n]) \longrightarrow \Pi_0^{\text{top}}(A, K[n])$$

est inversible. On notera  $\mathcal{L}_{\text{top}}$  (resp.  $\mathcal{L}_{\text{top}, \beta}$ ) la classe des équivalences  $\text{top}$ -locales (resp. celles qui dont la source et le but sont  $\beta$ -accessibles).

**Remarque 4.4.29** — Une équivalence faible de préfaisceaux à valeurs dans  $\mathfrak{M}$  est une équivalence  $\text{top}$ -locale. Si la topologie  $\text{top}$  est la topologie grossière, alors les équivalences  $\text{top}$ -locales sont exactement les équivalences faibles de préfaisceaux. Ceci découle de la remarque 4.4.25.

**LEMME 4.4.30** — La classe  $\mathcal{L}_{\text{top}}$  vérifie la propriété de 2 sur 3. Elle est stable par rétractions et petites colimites filtrantes. La classe  $\mathcal{L}_{\text{top}} \cap \mathbf{Cof}_{\text{inj}}$  est stable par push-out.

**DEMONSTRATION** Les deux premières propriétés sont évidentes. La stabilité de  $\mathcal{L}_{\text{top}}$  par colimites filtrantes découle de la remarque 4.4.25.

Pout montrer que  $\mathcal{L}_{\text{top}} \cap \mathbf{Cof}_{\text{inj}}$  est stable par push-out, on se donne un carré cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ H' & \xrightarrow{f'} & K' \end{array}$$

avec  $f \in \mathcal{L}_{\text{top}} \cap \mathbf{Cof}_{\text{inj}}$ . On a donc  $\mathbf{Cof}(f) = \mathbf{Cof}(f')$ . Soit  $A \in \mathcal{E}$  un objet homotopiquement compact de  $\mathfrak{M}$ . Comme  $\mathfrak{M}$  est stable, on déduit une suite exacte de préfaisceaux de groupes abéliens :

$$\Pi_0(A, H[n]) \longrightarrow \Pi_0(A, K[n]) \longrightarrow \Pi_0(A, \mathbf{Cof}(f)[n]) \longrightarrow \Pi_0(A, H[n+1]) \longrightarrow \Pi_0(A, K[n+1])$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Le foncteur  $a_{\text{top}}$  étant exact, il vient que  $\Pi_0^{\text{top}}(A, \mathbf{Cof}(f)[n]) \simeq \Pi_0^{\text{top}}(A, \mathbf{Cof}(f')[n])$  est le faisceau nul. Le résultat découle alors de la suite exacte :

$$\Pi_0(A, \mathbf{Cof}(f')[n-1]) \longrightarrow \Pi_0(A, H'[n]) \longrightarrow \Pi_0(A, K'[n]) \longrightarrow \Pi_0(A, \mathbf{Cof}(f')[n])$$

et du fait que le foncteur  $a_{\text{top}}$  est exact.

C.Q.F.D

**Remarque 4.4.31** — L’argument ci-dessus, montre plus généralement qu’une cofibration injective  $u : H \longrightarrow K$  est une équivalence  $\text{top}$ -locale si et seulement si, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $A \in \mathcal{E}$ , les faisceaux  $\Pi_0^{\text{top}}(A, \Sigma^n \mathbf{Cof}(u))$  sont nuls.

**PROPOSITION 4.4.32** — On suppose que  $\mathfrak{M}$  est une catégorie de coefficients. Il existe un cardinal  $\beta$  tel que  $\mathbf{W}_{\mathcal{L}_{\text{top}}} = \mathbf{W}_{\mathcal{L}_{\text{top}, \beta}}$ . De plus,  $\mathcal{L}_{\text{top}} = \mathbf{W}_{\mathcal{L}_{\text{top}}}$ .

DEMONSTRATION Soit  $\alpha$  un cardinal tel que  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  est  $\alpha$ -présentable pour sa structure injective et que tous les objets de  $\mathcal{E}$  sont  $\alpha$ -accessibles. On choisit le cardinal  $\beta$  comme dans la proposition 4.2.41.

On utilisera librement l'existence de la localisation de Bousfield de la structure  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$  suivant la classe essentiellement petite  $\mathcal{L}_{top,\beta}$ . Par la proposition 4.2.74 et le lemme 4.4.30, on déduit que  $\mathbf{W}_{\mathcal{L}_{top,\beta}} \subset \mathcal{L}_{top}$ .

Il s'agit de montrer que toute équivalence  $top$ -locale  $f$  est dans  $\mathbf{W}_{\mathcal{L}_{top,\beta}}$ . On peut pour cela supposer que  $f : H \longrightarrow K$  est une cofibration injective et l'on choisit une section  $r : K \longrightarrow \Phi_{cf_0}(f)$  comme dans la définition 4.2.45. On considère alors l'ensemble  $\mathcal{E}$  formé des classes d'isomorphismes de sous-cofibrations  $r$ -normales  $v : H \longrightarrow T$  de  $c(f)$  avec  $v$  dans  $\mathbf{W}_{\mathcal{L}_{top,\beta}}$ .

Cet ensemble est naturellement ordonné et toutes ses chaînes sont majorées par leur colimite. Il admet donc des éléments maximaux. Dans la suite, on suppose que  $v : H \longrightarrow T$  est un élément maximal de  $\mathcal{E}$  et on montrera que  $T \simeq \Phi_{cf_0}(f)$ .

On appelle  $\mathbf{Sub}_\beta^{top}(?)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Sub}_\beta(?)$  formée des sous-flèches qui sont des équivalences  $top$ -locales. Par le lemme 4.4.33 ci-dessous, on sait que l'inclusion  $\mathbf{Sub}_\beta^{top}(?) \subset \mathbf{Sub}_\beta(?)$  est cofinale (du moins pour ? une cofibration injective). Considérons alors le diagramme de  $\mathcal{OrdEns}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sub}_\beta^{top}(c(f)) & & \mathbf{Sub}_\beta^{top}(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Sub}_\beta(c(f)) & \xleftarrow{P} \mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v}(f|r) \xrightarrow{R} & \mathbf{Sub}_\beta(v) \end{array}$$

avec :

- les flèches verticales sont les inclusions évidentes,
- le foncteur  $P$  associe à une sous-flèche  $f_0$  la sous-flèche  $c(f_0)$ ,
- le foncteur  $Q$  associe à une sous-flèche  $f_0 : H_0 \longrightarrow K_0$  la sous-flèche  $v_0 : H_0 \longrightarrow T_0 = T \times_{\Phi_{cf_0}(f)} \Phi_{cf_0}(f_0)$ .

Par les lemmes 4.2.57 et 4.2.4, la limite  $\mathcal{L}$  de ce diagramme est cofinale dans  $\mathbf{Sub}_\beta(c(f))$ . Se donner un objet de  $\mathcal{L}$ , revient à se donner une sous-cofibration  $f_0 : H_0 \longrightarrow K_0$  de  $f$ ,  $r$ -normale et orthogonale à  $v$  et telle que les flèches  $c(f_0)$  et  $v_0 : H_0 \longrightarrow T_0$  sont dans  $\mathcal{L}_{top}$  (et donc dans  $\mathcal{L}_{top,\beta}$  car  $T_0$  est  $\beta$ -accessible). Il vient que  $H \longrightarrow T \coprod_{T_0} \phi_{cf_0}(f_0)$  est une sous-cofibration  $r$ -normale qui est dans  $\mathbf{W}_{\mathcal{L}_{top,\beta}}$ . Par maximalité de  $v$ , on déduit que  $\phi_{cf_0}(f_0)$  est un sous-objet de  $T$ . Ceci force l'égalité  $T = \Phi_{cf_0}(f)$ . La proposition est prouvée. C.Q.F.D

**LEMME 4.4.33** — *On garde les hypothèses de la proposition 4.4.32. Soit  $u : H \longrightarrow K$  une équivalence  $top$ -locale. L'inclusion  $\mathbf{Sub}_\beta^{top}(u) \subset \mathbf{Sub}_\beta(u)$  est cofinale.*

DEMONSTRATION Pour  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $A \in \mathcal{E}$  et  $u' : H' \longrightarrow K'$  une sous-flèche de  $u$ , considérons le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Pi_0^{top}(A, H'[r]) & \longrightarrow & \Pi_0^{top}(A, K'[r]) \\ \downarrow (1) & & \downarrow (2) \\ \Pi_0^{top}(A, H[r]) & \xrightarrow{\sim} & \Pi_0^{top}(A, K[r]) \end{array}$$

Notons  $N_1(u')$  et  $N_2(u')$  le noyau de (1) et (2) respectivement. De même, notons  $P_1(u')$  et  $P_2(u')$  les images respectives de (1) et (2).

Pour  $u'$  de but  $\beta$ -accessible, les groupes  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, H'[r])$  et  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, K'[r])$  sont de cardinal inférieur à  $\beta$ . D'autre part, le foncteur  $atop$  préserve les objets  $\beta$ -accessibles. Il vient que  $N_i(u')$  et  $P_i(u')$  sont des faisceaux de groupes abéliens  $\beta$ -accessibles pour  $i \in \{1, 2\}$ .

Soit  $u_0 : H_0 \longrightarrow K_0$  une sous-flèche de  $u$  de but  $\beta$ -accessible. On construit par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  une suite croissante de sous-flèches  $u_n \in \mathbf{Sub}_\beta(u)$  de la manière suivante. Supposons  $u_{n-1}$  construite. Étant donné que  $u = \text{Colim}_{u' \in \mathbf{Sub}_\beta(u)} u'$ , et que le foncteur  $\Pi_0^{top}(A, -[r])$  commute aux colimites filtrantes, on déduit qu'il existe  $u_{n-1} \leq u_n \in \mathbf{Sub}_\beta(u)$  telle que  $N_i(u_{n-1}) \longrightarrow N_i(u_n)$  est nul pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $P_2(u_{n-1})$  contenu dans  $P_1(u_n)$ . En passant à la colimite suivant  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient une sous-flèche  $u_\infty$  telle que  $N_i(u_\infty) = 0$  pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $P_1(u_\infty) \simeq P_2(u_\infty)$ . Ceci montre que  $u_\infty$  induit un isomorphisme après application  $\Pi_0^{top}(A, -[r])$ .

Notons  $\mathbf{Sub}_\beta^{A,r}(u) \subset \mathbf{Sub}_\beta(u)$  la sous-catégorie pleine formée des sous-flèches induisant un isomorphisme après application du foncteur  $\Pi_0^{top}(A, -[r])$ . On a montré que cette inclusion était cofinale. Étant donné que  $\mathcal{E}$  est de cardinal essentiel inférieur à  $\beta$ , on peut appliquer le lemme 4.2.4 au diagramme des inclusions  $\mathbf{Sub}_\beta^{A,r}(u) \subset \mathbf{Sub}_\beta(u)$  pour déduire le résultat recherché. C.Q.F.D

Par la proposition 4.4.32 on peut localiser suivant la classe  $\mathcal{L}_{top}$  :

**DEFINITION 4.4.34** — On suppose que  $\mathfrak{M}$  est une catégorie de coefficients. La structure projective (resp. injective)  $top$ -locale  $(\mathbf{W}_{top}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-top})$  (resp.  $(\mathbf{W}_{top}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-top})$ ) sur  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  est la localisation de Bousfield de la structure projective (resp. injective) de la définition 4.4.18 suivant  $\mathcal{L}_{top}$ . On note  $\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$  la catégorie homotopique de ces structures de modèles.

Par la seconde partie de la proposition 4.4.32, on sait que  $\mathbf{W}_{top}$  est exactement la classe des équivalences  $top$ -locales. Notons le lemme suivant :

**LEMME 4.4.35** — On garde les hypothèses de la définition 4.4.34. Les structures de modèles  $top$ -locales sur  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  sont propres à gauche et stables.

**DEMONSTRATION** La propriété à gauche est conservée par la localisation de Bousfield (voir le théorème 4.2.71). Pour la stabilité, il faut montrer que l'endofoncteur  $\Omega^1$  de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$  préserve les équivalences  $top$ -locales.

Soit  $f : H \longrightarrow K$  une équivalence  $top$ -locale. Pour  $A \in \mathcal{E}$ , le morphisme  $\Pi_0^{top}(A, \Omega^1(H)[n]) \longrightarrow \Pi_0^{top}(A, \Omega^1(K)[n])$  est isomorphe à  $\Pi_0^{top}(A, H[n-1]) \longrightarrow \Pi_0^{top}(A, K[n-1])$ . Ce dernier est inversible. C.Q.F.D

**LEMME 4.4.36** — Soient  $\mathfrak{M}$  une catégorie de coefficients et  $F$  un préfaisceau d'ensembles. Alors :

$$(F \otimes -, \underline{\text{hom}}(F, -)) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \quad \text{et} \quad (F \otimes (-)_{cst}, \underline{\text{hom}}_{\mathfrak{M}}(F, -)) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$$

sont des adjonctions de Quillen lorsqu'on munit  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  de sa structure injective  $top$ -locale. Si le préfaisceau  $F$  est représentable,  $(F \otimes (-)_{cst}, \underline{\text{hom}}_{\mathfrak{M}}(F, -))$  est également une adjonction de Quillen relativement à la structure projective  $top$ -locale sur  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ .

**DEMONSTRATION** Les assertions concernant l'adjonction  $(F \otimes (-)_{cst}, \underline{\text{hom}}_{\mathfrak{M}}(F, -))$  sont évidentes. Pour l'adjonction  $(F \otimes -, \underline{\text{hom}}(F, -))$  il faut montrer que  $F \otimes -$  preserve les équivalences  $top$ -locales. Soient  $n \in \mathbb{Z}$  et  $A \in \mathcal{E}$ . Par la définition 4.4.23, le foncteur  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, -[n]) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Ab}$  commute aux colimites filtrantes et aux coproduits finis. On déduit qu'il commute aussi aux coproduits infinis. Il vient que la transformation naturelle  $F \otimes \Pi_0(A, -[n]) \longrightarrow \Pi_0(A, F \otimes -[n])$  est inversible. Étant donné que le foncteur  $a_{top}$  commute aux produits finis de préfaisceaux d'ensembles, on déduit pour  $K \in \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  un isomorphisme canonique  $\Pi_0^{top}(A, F \otimes K[n]) \simeq a_{top} F \times \Pi_0^{top}(A, F \otimes K[n])$ . Le résultat est maintenant clair. C.Q.F.D

Nous allons voir que les structures de modèles  $top$ -locales passent à la catégorie des faisceaux.

**LEMME 4.4.37** — Soient  $H$  et  $K$  deux préfaisceaux sur  $\mathcal{S}$  à valeurs dans une catégorie de coefficients  $\mathfrak{M}$ . On note  $\underline{\Pi}'_0(H, K)$  le préfaisceau d'ensembles défini par l'association :

$$U \in \text{Ob}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow \text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(R \overset{\text{L}}{\otimes} H, K)$$

Le morphisme évident  $\underline{\Pi}_0(H, K) \longrightarrow \underline{\Pi}'_0(H, K)$  induit un isomorphisme sur les  $top$ -faisceaux associés.

**DEMONSTRATION** On peut supposer que l'objet  $H$  est injectivement cofibrant. Soit  $R \in \mathcal{J}_{top}(U)$  une crible couvrante de  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ . Pour tout  $V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)$ , on dispose d'un morphisme évident :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(R \otimes H, K) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(V \otimes H, K)$$

induisant une application :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(R \otimes H, K) \longrightarrow \lim_{V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)} \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(V \otimes H, K) = \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R, \underline{\Pi}_0(H, K))$$

On obtient ainsi des applications naturelles en  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  :

$$\text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(R \overset{\text{L}}{\otimes} H, K) \longrightarrow \text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R, \underline{\Pi}_0(H, K))$$

et donc un morphisme de préfaisceaux d'ensembles  $m : \underline{\Pi}'_0(H, K) \longrightarrow \text{L}\underline{\Pi}_0(H, K)$ . On vérifie immédiatement que la composée :

$$\underline{\Pi}_0(H, K) \longrightarrow \underline{\Pi}'_0(H, K) \xrightarrow{m} \text{L}\underline{\Pi}_0(H, K)$$

est le morphisme évident  $\ell(\underline{\Pi}_0(H, K))$  (voir la page 512). Étant donné que la faisceautisation de  $\ell(?)$  est un isomorphisme, on déduit que le morphisme de faisceaux d'ensembles  $a_{top}\underline{\Pi}_0(H, K) \longrightarrow a_{top}\underline{\Pi}'_0(H, K)$  admet une rétraction.



Pour conclure, il suffit de montrer que le morphisme de préfaisceaux d'ensembles :

$$L(m) : L\underline{\Pi}'_0(H, K) \longrightarrow LL\underline{\Pi}_0(H, K)$$

est injectif. On se donne alors deux éléments  $\gamma_1, \gamma_2 \in L\underline{\Pi}'_0(H, K)(U)$  ayant même image par  $L(m)$ . Soit  $R$  une crible couvrante de  $U$  telle que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soient représentés par deux éléments  $\gamma'_1$  et  $\gamma'_2$  de  $\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R, \underline{\Pi}'_0(H, K))$ . Quitte à raffiner la crible  $R$ , on peut également supposer que les images de  $\gamma'_1$  et  $\gamma'_2$  sont égales dans  $\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R, L\underline{\Pi}_0(H, K))$ .

Pour  $V \rightarrow R \in \mathcal{S}/R$ , notons  $(\gamma'_i)_V$  l'image de  $\gamma'_i$  dans  $\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(V, \underline{\Pi}'_0(H, K)) = \underline{\Pi}'_0(H, K)(V)$ . En reprenant la définition de  $\underline{\Pi}'_0(H, K)(V)$ , on voit qu'il existe une crible couvrante  $R_V$  de  $V$  telle que  $(\gamma'_1)_V$  et  $(\gamma'_2)_V$  soient représentées par des éléments  $\gamma''_{V,1}$  et  $\gamma''_{V,2}$  dans  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{M}))}(R_V \otimes H, K)$  et telle que les images de  $\gamma''_{V,1}$  et  $\gamma''_{V,2}$  coïncident dans  $\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R_V, \underline{\Pi}_0(H, K))$ .

Notons  $P$  la crible couvrante de  $U$  égale à l'image du morphisme de préfaisceaux :

$$\coprod_{V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)} R_V \longrightarrow \coprod_{V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)} V \longrightarrow U$$

Nous allons montrer que les images de  $\gamma'_1$  et  $\gamma'_2$  coïncident dans  $\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(P, \underline{\Pi}'_0(H, K))$ . Ceci terminera la preuve du lemme.

Soit  $W \rightarrow P \in \text{Ob}(\mathcal{S}/P)$ . Il existe donc  $V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)$  et un diagramme commutatif de préfaisceaux :

$$\begin{array}{ccccc} W & \longrightarrow & R_V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & & \longrightarrow & U \end{array}$$

L'image de  $\gamma'_i$  dans  $\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(W, \underline{\Pi}'_0(H, K)) = \underline{\Pi}'_0(H, K)(W)$  est le pull-back de  $(\gamma'_i)_V \in \underline{\Pi}'_0(H, K)(V)$ . C'est donc l'image de  $(\gamma''_{V,i}) \in \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{M}))}(R_V \otimes H, K)$  suivant :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{M}))}(R_V \otimes H, K) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{M}))}(W \otimes H, K) \longrightarrow \underline{\Pi}'_0(H, K)(W)$$

Notons  $\gamma'''_i$  l'image de  $(\gamma''_{V,i})$  dans  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{M}))}(W \otimes H, K)$ . En utilisant le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{M}))}(R_V \otimes H, K) & \longrightarrow & \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{M}))}(W \otimes H, K) \\ \downarrow & & \parallel \\ \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R_V, \underline{\Pi}_0(H, K)) & \longrightarrow & \underline{\Pi}_0(H, K)(W) \end{array}$$

On voit que  $\gamma'''_1 = \gamma'''_2$ . D'où le resultat. C.Q.F.D

Pour  $A$  un objet de  $\mathfrak{M}$ , on pose  $\Pi'_0(A, -) = \underline{\Pi}'_0(A_{cst}, -)$ .

**LEMME 4.4.38** — Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de coefficients. Soient  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $A \in \mathcal{E}$  et  $H$  un préfaisceau à valeurs dans  $\mathfrak{M}$  injectivement fibrant. Il existe un isomorphisme canonique  $\Pi_0(A[-n], LH) \simeq \Pi'_0(A[-n], H)$ .

DEMONSTRATION Soit  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ . On a un isomorphisme :

$$\Pi_0(A[-n], LH)(U) = \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], \text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \underline{\text{hom}}_{\mathfrak{M}}(R, H)) \simeq \text{Colim}_{R \in \mathcal{J}_{top}(U)} \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], \underline{\text{hom}}_{\mathfrak{M}}(R, H))$$

Comme  $\underline{\text{hom}}_{\mathfrak{M}}(R, -)$  est un foncteur de Quillen à droite relativement à la structure injective et que  $H$  est injectivement fibrant, on déduit un isomorphisme :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, \underline{\text{hom}}_{\mathfrak{M}}(R, H)[n]) \simeq \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(R \otimes (A[-n])_{cst}, H)$$

D'où le résultat. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.4.39** — Si  $H$  est un objet injectivement fibrant de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ , alors la flèche  $\ell(H) : H \longrightarrow LH$  est une équivalence top-locale.

DEMONSTRATION On vérifie immédiatement que la composée  $\Pi_0(A[-n], H) \longrightarrow \Pi_0(A[-n], L(H)) \simeq \Pi'_0(A[-n], H)$  est égale au morphisme évident. Le résultat découle alors du lemme 4.4.37. C.Q.F.D

Plus généralement, nous avons :

**PROPOSITION 4.4.40** — Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de coefficients. Soit  $f : H \longrightarrow K$  une flèche de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  induisant un isomorphisme  $a_{top}(f) : a_{top}H \xrightarrow{\sim} a_{top}K$  sur les faisceaux associés. Alors,  $f$  est une équivalence *top*-locale.

**DEMONSTRATION** On procède en deux étapes. Notre point de départ sera le corollaire 4.4.39, affirmant que  $H \longrightarrow LH$  est une équivalence *top*-locale pour  $H$  injectivement fibrant.

*Étape 1* : Soit  $f : H \longrightarrow H'$  une flèche de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  avec  $H$  injectivement fibrant. On suppose qu'il existe un relèvement  $r : H' \longrightarrow LH$  dans le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\ell(H)} & LH \\ f \downarrow & \nearrow r & \downarrow L(f) \\ H' & \xrightarrow{\ell(H')} & LH' \end{array}$$

Alors  $f$  est une équivalence *top*-locale.

En effet, soit  $i : H' \longrightarrow Q$  une cofibration triviale injective avec  $Q$  un objet injectivement fibrant de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ . Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H' & \longrightarrow & LH & \longrightarrow & LH' \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ Q & \longrightarrow & & \longrightarrow & LQ \end{array}$$

fournit le digramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & LH \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Q & \longrightarrow & Q \amalg_{H'} LH \longrightarrow LQ \end{array}$$

où les flèches verticales sont des équivalences faibles. En passant aux  $\Pi_0^{top}(A[-n], -)$  (avec  $n \in \mathbb{Z}$  et  $A \in \mathcal{E}$ ) on obtient le diagramme de faisceaux d'ensembles :

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{\sim} & & & \\ \Pi_0^{top}(A[-n], H) & \longrightarrow & \Pi_0^{top}(A[-n], H') & \longrightarrow & \Pi_0^{top}(A[-n], LH) \\ & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \Pi_0^{top}(A[-n], Q) & \longrightarrow & \Pi_0^{top}(A[-n], Q \amalg_{H'} LH) & \longrightarrow & \Pi_0^{top}(A[-n], LQ) \\ & & & & \xrightarrow{\sim} \end{array}$$

Ceci montre que la flèche  $\Pi_0^{top}(A[-n], H') \longrightarrow \Pi_0^{top}(A[-n], LH)$  est surjective et injective. D'où le résultat.

*Étape 2* : On traite maintenant le cas général. En considérant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} H & \xrightarrow{\ell(H)} & LH & \xrightarrow{\ell(LH)} & L^2H & \xrightarrow{\ell(L^2H)} & \dots \longrightarrow L^\lambda H \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ K & \xrightarrow{\ell(K)} & LK & \xrightarrow{\ell(LK)} & L^2K & \xrightarrow{\ell(L^2K)} & \dots \longrightarrow L^\lambda K \end{array}$$

et en utilisant le fait que  $\mathbf{W}_{top}$  est stable par colimite filtrantes, on voit qu'il suffit de montrer que pour tout préfaisceau  $M$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ , la flèche  $M \longrightarrow LM$  est une équivalence *top*-locale.

Choisissons une cofibration injective triviale  $M \longrightarrow N$  avec  $N$  un préfaisceau injectivement fibrant. Les flèches horizontales dans le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ LM & \longrightarrow & N \amalg_M LM \end{array}$$

sont des équivalences faibles. Il suffit donc de prouver que  $N \longrightarrow N \coprod_M LM$  est une équivalence *top*-locale. On montrera que la condition de l'étape 1 est vérifiée avec  $r$  la flèche :

$$N \coprod_M LM \longrightarrow LN$$

déduite du carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ LM & \longrightarrow & LN \end{array}$$

Il reste à montrer que la composée suivante :

$$b : N \coprod_M LM \longrightarrow LN \longrightarrow L(N \coprod_M LM)$$

coïncide avec la flèche  $\ell(N \coprod_M LM)$ . Remarquons que  $b$  est le coproduit des deux composées :

$$N \longrightarrow LN \longrightarrow L(N \coprod_M LM) \quad \text{et} \quad LM \longrightarrow LN \longrightarrow L(N \coprod_M LM)$$

D'autre part, on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\ell(N)} & LN \\ \downarrow & & \downarrow \\ N \coprod_M LM & \xrightarrow{\ell(N \coprod_M LM)} & L(N \coprod_M LM) \\ \uparrow & & \uparrow \\ LM & \xrightarrow{\ell(LM)} & L^2M \end{array}$$

Ceci montre que  $\ell(N \coprod_M LM)$  est le coproduit des composées :

$$N \longrightarrow LN \longrightarrow L(N \coprod_M LM) \quad \text{et} \quad LM \longrightarrow L^2M \longrightarrow L(N \coprod_M LM)$$

Il reste donc à voir que les composées suivantes sont égales :

$$(4.77) \quad LM \longrightarrow LN \longrightarrow L(N \coprod_M LM) \quad \text{et} \quad LM \xrightarrow{\ell(LM)} L^2M \longrightarrow L(N \coprod_M LM)$$

Par le lemme 4.4.9, on a  $\ell(LM) = L(\ell(M))$ . Il vient que les deux composées (4.77) s'obtiennent par application du foncteur  $L$  aux deux composées :

$$M \longrightarrow N \longrightarrow N \coprod_M LM \quad \text{et} \quad M \longrightarrow LM \longrightarrow N \coprod_M LM$$

Le résultat recherché est maintenant clair.

C.Q.F.D

On fait maintenant la définition suivante :

**DEFINITION 4.4.41** — Soit  $f$  une flèche de  $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ .

1-  $f$  est dite une équivalence faible lorsqu'elle est une équivalence *top*-locale une fois considérée dans  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ . On note  $\mathbf{W}$  la classe des équivalences faibles entre faisceaux.

2-  $f$  est dite une fibration projective (resp. injective) lorsqu'elle est une fibration projective (resp. injective) *top*-locale, une fois considérée dans  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ . On note  $\mathbf{Fib}_{proj}$  (resp.  $\mathbf{Fib}_{inj}$ ) la classe des fibrations projectives (resp. injectives) entre faisceaux.

3-  $f$  est dite une cofibration projective (resp. injective) lorsqu'elle admet la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations projectives (resp. injectives) triviales. On note  $\mathbf{Cof}_{proj}$  (resp.  $\mathbf{Cof}_{inj}$ ) la classe des cofibrations projectives (resp. injectives) entre faisceaux.

Notons le lemme suivant :

**LEMME 4.4.42** — Soit  $(F, G) : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$  un couple de foncteurs adjoints avec  $(\mathfrak{C}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$  une catégorie de modèles  $\alpha$ -présentable par cofibrations et  $\mathfrak{D}$  une catégorie complète et cocomplète. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

- $G$  est pleinement fidèle et  $\alpha$ -accessible.
- $F$  commute aux limites finies.
- Le foncteur  $G \circ F$  préserve les objets  $\beta$ -accessibles pour  $\beta$  supérieur ou égal à  $\alpha$ .
- Pour tout  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , l'unité  $A \longrightarrow G \circ F(A)$  est une équivalence faible.

Alors, le quadruplet  $(\mathfrak{D}, G^{-1}\mathbf{W}, F\mathbf{Cof}, G^{-1}\mathbf{Fib})$  est une catégorie de modèles  $\alpha$ -présentable par cofibrations. De plus,  $(F, G)$  devient une équivalence de Quillen.

DEMONSTRATION Le fait que  $\mathfrak{D}$  est une catégorie présentable découle de la proposition 4.2.21. La dernière condition de l'énoncé, montre que  $G \circ F\mathbf{W} \subset \mathbf{W}$ . Il vient que  $F\mathbf{W} \subset G^{-1}\mathbf{W}$ . Comme  $F \circ G \simeq \text{id}$ , on déduit que  $F\mathbf{W} = G^{-1}\mathbf{W}$ . Il vient que  $F(\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}) = F\mathbf{Cof} \cap G^{-1}\mathbf{W}$ . On a aussi  $G^{-1}(\mathbf{Fib} \cap \mathbf{W}) = G^{-1}\mathbf{Fib} \cap G^{-1}\mathbf{W}$ . L'axiome (MC4) découle alors par un jeu d'adjonction. On obtient aussi les formules :

$$G^{-1}\mathbf{Fib} = \text{LLP}(F(\mathbf{Cof}_\alpha \cap \mathbf{W})) \quad \text{et} \quad G^{-1}\mathbf{Fib} \cap G^{-1}\mathbf{W} = \text{RLP}(F\mathbf{Cof}_\alpha)$$

L'axiome (MC5) s'obtient à l'aide de l'argument du petit objet. Les autres axiomes et propriétés sont faciles. C.Q.F.D

En appliquant le lemme 4.4.42 ci-dessus, on obtient :

**COROLLAIRE 4.4.43** — Les deux triplets  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj})$  et  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$  définissent des structures de catégories de modèles présentables par cofibrations sur la catégorie  $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ . De plus, cette dernière est Quillen équivalente à  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  munie de ses structures top-locales.

### 4.4.3 Functorialité élémentaire

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie complète et cocomplète. Un foncteur  $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$  entre petites catégories induit un foncteur évident  $f_* : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$  qui à un préfaisceau  $H'$  sur  $\mathcal{S}'$  associe  $H' \circ f$ . On a :

**LEMME 4.4.44** — Le foncteur  $f_*$  admet un adjoint à gauche  $f^* : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathcal{C})$  qui à un préfaisceau  $K$  sur  $\mathcal{S}$  associe le préfaisceau  $f^*K$  tel que :

$$(4.78) \quad f^*K(U') = \text{Colim}_{U' \rightarrow f(U) \in \text{Ob}(U' \setminus \mathcal{S})} K(U) \quad \text{pour } U' \in \text{Ob}(\mathcal{S}')$$

(voir la remarque 2.1.29 pour la définition de la catégorie  $U' \setminus \mathcal{S}$ ).

DEMONSTRATION Il est facile de voir que le préfaisceau  $f^*K$  défini par (4.78) est égal au coégalisateur :

$$(4.79) \quad \text{Coeq} \left( \coprod_{U \rightarrow V \in \text{FI}(\mathcal{S})} f(U) \otimes K(V)_{cst} \rightrightarrows \coprod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} f(U) \otimes K(U)_{cst} \right)$$

Une flèche de (4.79) vers  $L' \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathcal{C}))$  correspond à un élément de :

$$\begin{aligned} & \text{Eq} \left( \coprod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(f(U) \otimes K(U)_{cst}, L') \rightrightarrows \coprod_{U \rightarrow V \in \text{FI}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(f(U) \otimes K(V)_{cst}, L') \right) \\ &= \text{Eq} \left( \coprod_{U \in \text{Ob}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(K(U), L' \circ f(U)) \rightrightarrows \coprod_{U \rightarrow V \in \text{FI}(\mathcal{S})} \text{hom}_{\mathcal{C}}(K(V), L' \circ f(U)) \right) = \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})}(K, L' \circ f) \end{aligned}$$

D' où le résultat.

C.Q.F.D

Lorsque  $K$  est un préfaisceau d'ensembles représentable par  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ , le préfaisceau  $f^*K$  est canoniquement représentable par  $f(U)$ .

**Remarque 4.4.45** — Soient  $F \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}))$  et  $K \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$ . De la formule (4.78), on déduit immédiatement un isomorphisme canonique  $f^*F \otimes f^*K \simeq f^*(F \otimes K)$ . On déduit alors la formule d'adjonction habituelle  $\underline{\text{hom}}(f^*F, H') \simeq \underline{\text{hom}}(F, f_*H')$  pour  $H' \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathcal{C}))$ . En appliquant  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(*, -)$  à cet isomorphisme, on déduit également  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(f^*F, H') \simeq \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F, f_*H')$ .

Lorsque  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles, on a le résultat simple suivant :

**PROPOSITION 4.4.46** — Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles présentable par cofibrations. Alors l'adjonction  $(f^*, f_*) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathfrak{M})$  est une adjonction de Quillen lorsque les catégories de préfaisceaux sont munies des structures projectives de la définition 4.4.18.

DEMONSTRATION En effet, le foncteur  $f_*$  préserve les équivalences faibles et les fibrations projectives. C.Q.F.D

On introduit la terminologie suivante :

**DEFINITION 4.4.47** — Supposons donnés deux sites de Grothendieck  $(\mathcal{S}, top)$  et  $(\mathcal{S}', top')$ .

1- Un foncteur  $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$  est dit continu lorsque pour tout faisceau d'ensembles  $F'$  sur  $(\mathcal{S}', top')$ , le préfaisceau  $F' \circ f : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}ns$  est un faisceau sur  $(\mathcal{S}, top)$ .

2- Un pré-morphisme de sites  $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$  est un foncteur continu  $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ .

Étant donné un pré-morphisme de sites  $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$ , on note  $f_* : \mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}') \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$  le foncteur image directe des faisceaux. Ce foncteur admet un adjoint à gauche, noté  $f^*$  et donné par  $a_{top'} \circ f^* \circ inc$  avec  $inc$  le foncteur d'inclusion de la catégorie des faisceaux dans celle des préfaisceaux. On a le lemme :

**LEMME 4.4.48** — Soient  $(\mathcal{S}, top)$  et  $(\mathcal{S}', top')$  deux sites de Grothendieck et  $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$  un foncteur. Alors  $f$  est continu si et seulement si pour tout  $U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})$  et  $R \in \mathbf{J}_{top}(U)$ , le morphisme évident  $f^*R \longrightarrow f^*U = f(U)$  induit un isomorphisme après faisceautisation.

DEMONSTRATION La condition est suffisante. En effet, soit  $F'$  un faisceau d'ensembles sur  $\mathcal{S}'$  et vérifions que  $F' \circ f$  est encore un faisceau sur  $\mathcal{S}$ . Soit  $R \in \mathbf{J}_{top}(U)$  une crible couvrante de  $U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})$ . Le morphisme évident :

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(U, F' \circ f) \longrightarrow \mathbf{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R, F' \circ f)$$

s'identifie via l'adjonction  $(f^*, f_*)$  à :

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}')} (f^*U, F') \longrightarrow \mathbf{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}')} (f^*R, F')$$

Étant donné que  $F'$  est un faisceau pour la topologie  $top'$ , cette application s'identifie également à :

$$(4.80) \quad \mathbf{hom}_{\mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}')} (a_{top'}(f(U)), F') \longrightarrow \mathbf{hom}_{\mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}')} (a_{top'}(f^*R), F')$$

qui est bien un isomorphisme puisque le morphisme de faisceaux  $a_{top'}(f^*R) \longrightarrow a_{top'}(f(U))$  est inversible par hypothèse.

La condition est nécessaire. En effet, si  $f$  est continue, le raisonnement précédent montre que pour tout faisceau d'ensembles  $F'$  sur  $\mathcal{S}'$  l'application (4.80) est inversible. On applique alors le lemme de Yoneda pour conclure. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.4.49** — Soit  $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$  un pré-morphisme de sites. Soit  $H'$  un faisceau sur  $\mathcal{S}'$  à valeurs dans une catégorie présentable  $\mathcal{C}$ . Alors,  $H' \circ f$  est encore un faisceau sur  $\mathcal{S}$ .

DEMONSTRATION Soient  $U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})$  et  $R \in \mathbf{J}_{top}(U)$ . La flèche  $\underline{\mathbf{hom}}_{\mathcal{C}}(U, f_*H') \longrightarrow \underline{\mathbf{hom}}_{\mathcal{C}}(R, f_*H')$  s'identifie à  $\underline{\mathbf{hom}}_{\mathcal{C}}(f^*U, H') \longrightarrow \underline{\mathbf{hom}}_{\mathcal{C}}(f^*R, H')$  (voir la remarque 4.4.45). Le résultat découle alors du lemme 4.4.14. C.Q.F.D

En particulier, sous les conditions du corollaire précédent on dispose d'une adjonction :

$$(f^*, f_*) : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}', \mathcal{C})$$

qui étend celle pour les faisceaux d'ensembles. Le foncteur  $f^*$  sur les faisceaux à valeurs dans  $\mathcal{C}$  est donné, comme dans le cas des faisceaux d'ensembles, par  $a_{top'} \circ f^* \circ inc$ .

**DEFINITION 4.4.50** — 1- Un pré-morphisme de sites  $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$  est dit un morphisme de sites lorsque le foncteur  $f^* : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}')$  commute aux limites finies.

2- Un pré-morphisme de sites  $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$  est dit un pseudo-morphisme de sites lorsque le foncteur  $f^* : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}')$  commute aux produits fibrés et aux égalisateurs.

Notre but est de montrer que les pseudo-morphismes de sites induisent des adjonctions de Quillen relativement aux structures locales projectives. Pour  $\mathfrak{M}$  la catégorie des ensembles simpliciaux, la preuve de ce résultat utilise les hyper-recouvrements (voir [DHI04]). Dans le cas géométrique, Morel et Voevodsky [MV90] déduisent ce résultat de la propriété de Brown-Gersten [BG73] pour la topologie de Nisnevich.

Bien qu'il est tout à fait plausible que la méthode de [DHI04] s'étend à des catégories de modèles très générales, nous avons choisi une autre méthode qui fonctionne bien dans le cas où la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  est stable. Voici donc le théorème qu'on démontrera ici :

**THEOREME 4.4.51** — Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de coefficients. Soit  $f : (\mathcal{S}', \text{top}') \longrightarrow (\mathcal{S}, \text{top})$  un pseudo-morphisme de sites. Alors, l'adjonction  $(f^*, f_*) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathfrak{M})$  est une adjonction de Quillen relativement aux structures locales projectives de la définition 4.4.34. De plus, le foncteur  $f^*$  envoie les équivalences top-locales sur des équivalences top'-locales.

Nous aurons besoin de quelques compléments sur les sites et leurs faisceaux. Soient  $(\mathcal{S}, \text{top})$  un site de Grothendieck et  $\mathcal{T} \subset \mathbf{Shv}_{\text{top}}(\mathcal{S})$  une sous-catégorie pleine contenant l'image de  $\mathcal{S}$  par le foncteur  $\mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\text{top}}(\mathcal{S})$ . On note  $u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$  le foncteur évident. On suppose donnée une classe de catégories complètes et cocomplètes  $\mathcal{C}$  contenant  $\mathcal{E}ns$ . On munit  $\mathcal{T}$  de la topologie  $\text{top} = \text{top}_{\mathcal{C}}$  la plus fine pour laquelle les préfaisceaux  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(-, G) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{C}$  sont des faisceaux pour  $G \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Shv}_{\text{top}}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$  et  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$  (on verra dans la remarque 4.4.54 que la topologie  $\text{top}_{\mathcal{C}}$  ne dépend pas du choix de  $\mathcal{C}$ ). On a la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.4.52** — 1- Soient  $U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})$  et  $R \in \mathbf{J}_{\text{top}}(U)$ . Le morphisme de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{T})$  :

$$(4.81) \quad \text{Colim}_{V \rightarrow R \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S}/R)} \mathfrak{a}_{\text{top}}(V) \longrightarrow \mathfrak{a}_{\text{top}}(U)$$

où la colimite est prise dans la catégorie des préfaisceaux sur  $\mathcal{T}$ , devient un isomorphisme après faisceautisation.

2- Soit  $F \in \mathbf{Ob}(\mathcal{T})$ . Le morphisme de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{T})$  :

$$(4.82) \quad \text{Colim}_{U \rightarrow F \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S}/F)} \mathfrak{a}_{\text{top}}(U) \longrightarrow F$$

où la colimite est prise dans la catégorie des préfaisceaux sur  $\mathcal{T}$ , devient un isomorphisme après faisceautisation.

**DEMONSTRATION** On divise la preuve en plusieurs parties. On montre d'abord que (4.81) et (4.82) sont surjectifs sur les faisceaux associés.

*Partie A* : Notons  $R'$  le préfaisceau image de (4.81). Nous allons vérifier que  $R'$  est une crible couvrante de  $\mathfrak{a}_{\text{top}}(U)$ . Il s'agit de montrer pour  $G \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Shv}_{\text{top}}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$  (avec  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ ) que le morphisme :

$$(4.83) \quad G(U) = \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{a}_{\text{top}}(U), G) \longrightarrow \text{Lim}_{E \rightarrow R' \in \mathbf{Ob}(\mathcal{T}/R')} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(E, G)$$

est inversible. Le foncteur  $\mathcal{S}/R \longrightarrow \mathcal{T}/R'$  qui à  $V \rightarrow R$  associe  $\mathfrak{a}_{\text{top}}(V) \rightarrow R'$ , fournit une rétraction de (4.83) :

$$(4.84) \quad \text{Lim}_{E \rightarrow R' \in \mathbf{Ob}(\mathcal{T}/R')} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(E, G) \longrightarrow \text{Lim}_{V \rightarrow R \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S}/R)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{a}_{\text{top}}(V), G) = G(U)$$

Il suffit alors de voir que (4.84) est un monomorphisme. Pour cela, remarquons que par construction de  $R'$ , tout objet  $E \rightarrow R'$  de  $\mathcal{T}/R'$  admet une flèche vers un élément de la forme  $\mathfrak{a}_{\text{top}}(V) \rightarrow R'$ . Ceci montre que la flèche :

$$\text{Lim}_{E \rightarrow R' \in \mathbf{Ob}(\mathcal{T}/R')} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(E, G) \longrightarrow \prod_{V \rightarrow R \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S}/R)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{a}_{\text{top}}(V), G)$$

est un monomorphisme.

*Partie B* : Notons  $R_F$  le préfaisceau image de (4.82). Nous allons vérifier que  $R_F$  est une crible couvrante de  $F \in \mathbf{Ob}(\mathcal{T})$ . On reprend l'argument de la partie A. Pour  $G \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Shv}_{\text{top}}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$  (avec  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ ), le morphisme :

$$(4.85) \quad \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F, G) \longrightarrow \text{Lim}_{E \rightarrow R_F \in \mathbf{Ob}(\mathcal{T}/R_F)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(E, G)$$

est inversible. En effet, le foncteur  $\mathcal{S}/F \longrightarrow \mathcal{T}/R_F$  qui à  $U \rightarrow F$  associe  $\mathfrak{a}_{\text{top}}(U) \rightarrow R_F$ , fournit une rétraction de (4.85) :

$$(4.86) \quad \text{Lim}_{E \rightarrow R_F \in \mathbf{Ob}(\mathcal{T}/R_F)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(E, G) \longrightarrow \text{Lim}_{U \rightarrow F \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S}/F)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{a}_{\text{top}}(U), G) = \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F, G)$$

Il reste à voir que (4.86) est un monomorphisme. Pour cela, remarquons que par construction de  $R_F$ , tout objet  $E \rightarrow R_F$  de  $\mathcal{T}/R_F$  admet une flèche vers un élément de la forme  $\mathfrak{a}_{\text{top}}(U) \rightarrow R_F$ . Ceci montre que la flèche :

$$\text{Lim}_{E \rightarrow R_F \in \mathbf{Ob}(\mathcal{T}/R_F)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(E, G) \longrightarrow \prod_{U \rightarrow F \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S}/F)} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{a}_{\text{top}}(U), G)$$

est un monomorphisme.

*Partie C* : Montrons que (4.81) est un monomorphisme après application du foncteur L (voir la page 512). Supposons donnés  $F \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ ,  $P \in \text{J}_{top}(F)$  et une double flèche coégalisée par (4.81) :

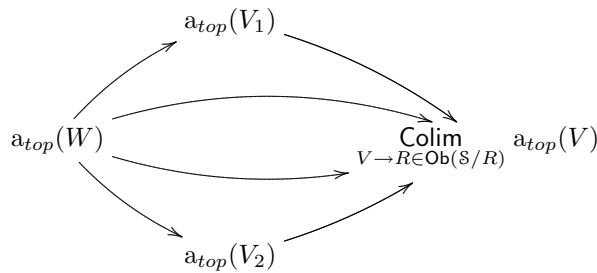
$$P \rightrightarrows_{V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)} \text{Colim} \ a_{top}(V) \longrightarrow a_{top}(U)$$

On note  $P' \subset P$  l'égalisateur de la double flèche ci-dessus. Il s'agit de montrer que  $P'$  est une crible couvrante de  $a_{top}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ .

Pour tout  $G \rightarrow P \in \text{Ob}(\mathcal{T}/P)$ , on dispose (par la partie B de la preuve) d'une crible couvrante engendrée par les flèches  $a_{top}(W) \rightarrow G$  avec  $W \rightarrow G \in \text{Ob}(\mathcal{S}/G)$ . Il suffira donc de montrer que  $a_{top}(W) \times_P P' \subset a_{top}(W)$  est une crible couvrante de  $a_{top}(W)$  pour toute flèche  $a_{top}(W) \rightarrow P$ . Il est clair que  $a_{top}(W) \times_P P'$  est simplement l'égalisateur de la double flèche (de source  $a_{top}(W)$ ) :

$$a_{top}(W) \longrightarrow P \rightrightarrows_{V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)} \text{Colim} \ a_{top}(V)$$

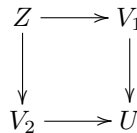
Étant donné que  $a_{top}(W)$  est un préfaisceau représentable de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{T})$ , il existe  $V_i \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)$  avec  $i \in \{1, 2\}$  et une factorisation de la double flèche :



Notons  $Q$  la crible de  $W$  telle que  $Z \rightarrow Q \in \text{Ob}(\mathcal{S}/Q)$  si et seulement si les deux composées :

$$a_{top}(Z) \longrightarrow a_{top}(W) \longrightarrow a_{top}(V_1) \quad \text{et} \quad a_{top}(Z) \longrightarrow a_{top}(W) \longrightarrow a_{top}(V_2)$$

sont égales à l'image par  $a_{top}$  de flèches  $Z \longrightarrow V_1$  et  $Z \longrightarrow V_2$  rendant commutatif le carré :



Il est facile de voir que  $Q$  est une crible couvrante de  $W$  et qu'elle égalise  $a_{top}(W) \rightrightarrows_{V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)} \text{Colim} \ a_{top}(V)$ .

*Partie D* : Il reste à montrer que (4.82) est un monomorphisme après application du foncteur L. On procède comme dans la partie C. Supposons donnés  $E \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ ,  $P \in \text{J}_{top}(E)$  et une double flèche coégalisée par (4.82) :

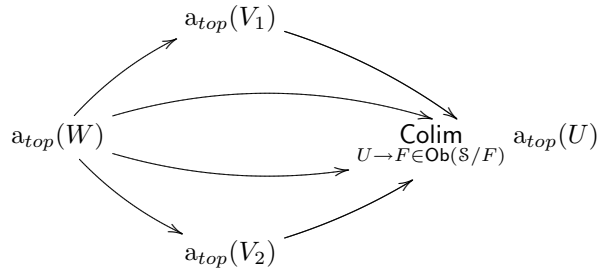
$$P \rightrightarrows_{U \rightarrow F \in \text{Ob}(\mathcal{S}/F)} \text{Colim} \ a_{top}(U) \longrightarrow F$$

On note  $P' \subset P$  l'égalisateur de la double flèche ci-dessus et on montre que  $P' \in \text{J}_{top}(E)$ .

Comme dans la partie C, on se ramène à montrer pour  $W \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  et  $a_{top}(W) \rightarrow P \in \text{Ob}(\mathcal{T}/P)$  que l'égalisateur de la double flèche :

$$a_{top}(W) \longrightarrow P \rightrightarrows_{U \rightarrow F \in \text{Ob}(\mathcal{S}/F)} \text{Colim} \ a_{top}(U)$$

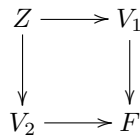
est une crible couvrante de  $\mathfrak{a}_{top}(W)$ . Étant donné que  $\mathfrak{a}_{top}(W)$  est un préfaisceau représentable de  $\mathcal{T}$ , il existe  $V_i \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)$  avec  $i \in \{1, 2\}$  et une factorisation de la double flèche :



Pour terminer, il suffit de remarquer qu'il existe une crible couvrante  $Q \in \text{J}_{top}(W)$  telle que pour tout  $Z \rightarrow Q \in \mathcal{S}/Q$ , les deux composées :

$$\mathfrak{a}_{top}(Z) \longrightarrow \mathfrak{a}_{top}(W) \longrightarrow \mathfrak{a}_{top}(V_1) \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}_{top}(Z) \longrightarrow \mathfrak{a}_{top}(W) \longrightarrow \mathfrak{a}_{top}(V_2)$$

sont égales à l'image par  $\mathfrak{a}_{top}$  des flèches  $Z \longrightarrow V_1$  et  $Z \longrightarrow V_2$  rendant commutatif le carré de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})$  :



La proposition est prouvée.

C.Q.F.D

Pour  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ , on note  $u^! : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T}, \mathcal{C})$  le foncteur qui à  $G \in \text{Ob}(\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$  associe le faisceau  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(-, G) : \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ . Le résultat suivant est bien connu (voir [SGA 4]) :

**COROLLAIRE 4.4.53** — *Le foncteur  $u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$  induit un morphisme de sites. Pour  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ , le foncteur  $u_* : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$  est une équivalence de catégories ayant pour inverse  $u^!$ . De plus, on a un isomorphisme canonique de foncteurs  $u^* \simeq u^!$ .*

DEMONSTRATION Si  $E$  est un faisceau d'ensembles sur  $\mathcal{T}$ ,  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  et  $R$  une crible couvrante de  $U$ , on a :

$$\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R, u_*(E)) = \lim_{V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)} \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{T})}(\mathfrak{a}_{top}(V), E) \simeq \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{T})} \left( \text{Colim}_{V \rightarrow R \in \text{Ob}(\mathcal{S}/R)} \mathfrak{a}_{top}(V), E \right)$$

Par la proposition 4.4.52, le membre de droite est égal à  $E(\mathfrak{a}_{top}(U)) = u_*(E)(U)$ . Ceci montre que  $u_*E$  est un faisceau. Le foncteur  $u$  est donc continu.

Pour  $G \in \text{Ob}(\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$ , on a un isomorphisme évident  $u_*u^!G \simeq G$ . De même, pour  $E \in \text{Ob}(\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T}, \mathcal{C}))$ , et  $F \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ , on a par la proposition 4.4.52, un isomorphisme  $E(F) = \lim_{U \rightarrow F \in \text{Ob}(\mathcal{S}/F)} E(\mathfrak{a}_{top}(U)) = \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F, u_*E)$ . Ceci fournit un isomorphisme  $E \simeq u^!u_*(E)$ . D'où la seconde partie de l'énoncé.

En particulier, on déduit un isomorphisme canonique  $u^* \simeq u^!$ . Le foncteur  $u^*$  commute aux limites projectives, car c'est une équivalence de catégories. Le foncteur  $u$  induit donc un morphisme de sites. C.Q.F.D

**Remarque 4.4.54** — Par le corollaire 4.4.53, le foncteur  $u^* : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T})$  est une équivalence de catégories. Étant donnée que la topologie d'un site est uniquement déterminée par sa catégorie de faisceaux d'ensembles (voir [SGA 4]), on déduit que la topologie  $top_{\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{T}$  ne dépend pas du choix de la classe  $\mathcal{C}$ . En particulier, l'hypothèse  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$  dans 4.4.53 est superflue.

**LEMME 4.4.55** — *Soit  $K$  un préfaisceau sur  $\mathcal{T}$  à valeurs dans une catégorie présentable  $\mathcal{C}$ . On a un isomorphisme canonique  $\mathfrak{a}_{top}(K) \simeq u^!_{\mathfrak{a}_{top}u_*}(K)$ . En particulier, on a  $u_*\mathfrak{a}_{top}(K) \simeq \mathfrak{a}_{top}u_*(K)$ .*

DEMONSTRATION On note  $\mathfrak{a}'_{top} : \mathbf{PreShv}(\mathcal{T}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T}, \mathcal{C})$  le foncteur  $u^! \circ \mathfrak{a}_{top}u_*$ . On montrera que  $\mathfrak{a}'_{top}$  est l'adjoint à droite de l'inclusion évidente (que l'on notera  $inc$ ). On définit une transformation naturelle  $\text{id} \longrightarrow inc \circ \mathfrak{a}'_{top}$  en prenant pour  $K$  un préfaisceau sur  $\mathcal{T}$  et  $F \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ , la composée :

$$K(F) \longrightarrow \lim_{U \rightarrow F \in \text{Ob}(\mathcal{S}/F)} K(\mathfrak{a}_{top}(U)) = \lim_{U \rightarrow F \in \text{Ob}(\mathcal{S}/F)} u_*(K)(U) = \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F, u_*(K)) \longrightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{C}}(F, \mathfrak{a}_{top}u_*(K))$$



Il est clair que si  $F$  est déjà un faisceau sur  $\mathcal{J}$ , la flèche  $K \longrightarrow inc \circ a'_{top}(K)$  est inversible. Il est également clair que  $a'_{top}$  appliqué à la transformation naturelle  $id \longrightarrow inc \circ a'_{top}$  est canoniquement isomorphe à l'identité. Le résultat découle formellement de ces propriétés. C.Q.F.D

**PROPOSITION 4.4.56** — *Gardons les notations et les hypothèses ci-dessus. Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de coefficients. L'adjonction  $(u^*, u_*) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{J}, \mathfrak{M})$  est une équivalence de Quillen relativement aux structures locales projectives. De plus, le foncteur  $u^*$  preserve et détecte les équivalences locales.*

DEMONSTRATION Pour  $n \in \mathbb{Z}$  et  $A \in \mathcal{E}$ , le foncteur  $\Pi_0(A[-n], u_*(-))$  est égal à  $u_*\Pi_0(A[-n], -)$ . Étant donné que le foncteur  $u_*$  commute à la faisceutisation (voir le lemme 4.4.55), on déduit un isomorphisme  $\Pi_0^{top}(A[-n], u_*(-)) \simeq u_*\Pi_0^{top}(A[-n], -)$ . Comme  $u_* : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$  est une équivalence de catégories, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est une équivalence  $top$ -locale,
- (ii)  $u_*(f)$  est une équivalence  $top$ -locale,

pour tout  $f \in \mathbf{Fl}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{J}, \mathfrak{M}))$ .

Montrons que  $u^*$  preserve les équivalences  $top$ -locales. Soit  $g : L \longrightarrow M$  une équivalence  $top$ -locale de préfaisceaux sur  $\mathcal{S}$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ . Étant donné que  $u^*$  commute à la faisceutisation, on peut supposer par la proposition 4.4.40 que  $L$  et  $M$  sont des faisceaux. Le résultat découle alors de l'équivalence entre (i) et (ii) et du fait que  $u_*u^*(g) \simeq u_*u^!(g) \simeq g$ . Il vient que  $(u^*, u_*)$  est une adjonction de Quillen relativement aux structures projectives locales.

Il reste à voir que  $Ru_*$  est une équivalence de catégories. Comme  $u_*$  preserve les équivalences locales, il se dérive trivialement. Il suffit donc de montrer que le foncteur  $u_* : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{J}, \mathfrak{M})[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})[\mathbf{W}^{-1}]$  est une équivalence de catégories. Ceci découle immédiatement de l'équivalence entre les assertions (i) et (ii) et du fait que  $u_* : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{J}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  est une équivalence de catégories. C.Q.F.D

Revenons à la preuve du théorème 4.4.51. On sait que  $(f^*, f_*)$  est une adjonction de Quillen pour les structures projectives de la définition 4.4.18. Il reste à montrer que  $f^* : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathfrak{M})$  preserve les équivalences locales. Notons  $\mathcal{J} \subset \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$  (resp.  $\mathcal{J}' \subset \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}')$ ) la plus petite sous-catégorie contenant l'image de  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ) et stable par produits fibrés et égalisateurs. Comme  $f^* : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}')$  commute aux produits fibrés et égalisateurs, il induit un foncteur  $g : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}'$  tel que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{u} & \mathcal{J} \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \mathcal{S}' & \xrightarrow{u'} & \mathcal{J}' \end{array}$$

est commutatif (à isomorphisme canonique près). On déduit alors un carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) & \xrightarrow{u^*} & \mathbf{PreShv}(\mathcal{J}, \mathfrak{M}) \\ f^* \downarrow & & \downarrow g^* \\ \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathfrak{M}) & \xrightarrow{u'^*} & \mathbf{PreShv}(\mathcal{J}', \mathfrak{M}) \end{array}$$

commutatif à isomorphisme canonique près. Par la proposition 4.4.56, les foncteurs  $u^*$  et  $u'^*$  preservent et détectent les équivalences locales. Il suffit donc de montrer que  $g^*$  preserve les équivalences locales. On s'est donc ramené au cas où  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  admettent les produits fibrés et les égalisateurs et le foncteur  $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$  y commute. C'est sous cette hypothèse que nous démontrerons le théorème 4.4.51. Le lemme clef est le suivant :

**LEMME 4.4.57** — *Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de coefficients. Soit  $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$  un foncteur entre petites catégories. On suppose que les catégories  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  admettent les produits fibrés et les égalisateurs et que  $f$  y commute. Alors, pour  $K \in \mathbf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et  $A \in \mathcal{E}$ , le morphisme évident :*

$$(f^*)_{Ab}\Pi_0(A[-n], K) \longrightarrow \Pi_0(A[-n], f^*K)$$

est inversible (avec  $(f^*)_{Ab} : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, Ab) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', Ab)$  le foncteur image inverse de préfaisceaux de groupes abéliens).

DEMONSTRATION Rappelons que pour  $U' \in \text{Ob}(\mathcal{S}')$  et  $F$  un préfaisceau sur  $\mathcal{S}$ , on a :

$$f^*F(U') = \text{Colim}_{U' \rightarrow f(U) \in \text{Ob}(U' \setminus \mathcal{S})} F(U)$$

Il s'agit de montrer que le foncteur  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], -) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{A}b$  commute aux colimites suivant  $(U' \setminus \mathcal{S})^{\text{op}}$ . Étant donné que  $\mathcal{S}$  admet les produits fibrés et les égalisateurs et que  $f$  y commute, la catégorie  $(U' \setminus \mathcal{S})^{\text{op}}$  est pseudo-filtrante au sens de [SGA 4]. Plus précisément,  $(U' \setminus \mathcal{S})^{\text{op}}$  est une union disjointe de catégories filtrantes. Il suffit donc de démontrer que  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], -)$  commute aux colimites filtrantes ainsi qu'aux coproduits quelconques.

La commutation avec les colimites filtrantes est vraie par la définition 4.4.23. En écrivant un coproduit quelconque comme une colimite filtrante de coproduits finis, on voit qu'il suffit de montrer que le morphisme évident :  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], P) \oplus \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], Q) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], P \amalg Q)$  est inversible pour tout  $P, Q \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ .

Étant donné que le coproduit de deux équivalences faibles est une équivalence faible (voir la définition 4.4.23) on peut supposer que  $P$  et  $Q$  sont des objets cofibrants. Le résultat découle alors du fait que  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  est additive puisque  $\mathfrak{M}$  est supposée stable. C.Q.F.D

Il est maintenant aisé d'achever la preuve du théorème 4.4.51, i.e., de prouver que le foncteur  $f^*$  préserve les équivalences locales. Soit  $u : H \longrightarrow K$  une équivalence  $top$ -locale de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ . Soient  $n \in \mathbb{Z}$  et  $A \in \mathcal{E}$ . Par le lemme 4.4.57 et l'isomorphisme  $a_{top'} \circ f^* \simeq f^* \circ a_{top}$ , la flèche  $\Pi_0^{top'}(A[-n], u) : \Pi_0^{top'}(A[-n], f^*H) \longrightarrow \Pi_0^{top'}(A[-n], f^*K)$  s'identifie à :

$$(f^*)_{Ab} \Pi_0^{top}(A[-n], u) : (f^*)_{Ab} \Pi_0^{top}(A[-n], H) \longrightarrow (f^*)_{Ab} \Pi_0^{top}(A[-n], K)$$

Elle est donc inversible. Ceci montre que  $f^*(u)$  est une équivalence  $top'$ -locale. C.Q.F.D

Dans la section 4.5, nous utiliserons le théorème 4.4.51 sous une forme généralisée que nous allons décrire.

**DEFINITION 4.4.58** — Soit  $(\mathcal{S}, top)$  un site de Grothendieck. Une  $P$ -structure sur  $\mathcal{S}$  est la donnée pour tout  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  d'un site  $(\mathcal{E}_U, top_U)$  avec  $\mathcal{E}_U \subset \mathcal{S}/U$  une sous-catégorie pleine et tel que :

- l'identité de  $U$  est dans  $\mathcal{E}_U$ ,
- la composée  $\mathcal{E}_U \subset \mathcal{S}/U \longrightarrow \mathcal{S}$  induit un pseudo-morphisme de sites  $e_U : (\mathcal{S}, top) \longrightarrow (\mathcal{E}_U, top_U)$ ,
- pour  $F$  un préfaisceau d'ensembles sur  $\mathcal{S}$ , le morphisme  $a_{top_U}(e_U)_*(F) \longrightarrow (e_U)_*a_{top}(F)$  est inversible.

La terminologie choisie dans la définition 4.4.58 est inspirée de la notion de *petits sites*, v.s., *gros sites* associé à un schéma  $X$ . On a le résultat suivant :

**PROPOSITION 4.4.59** — Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de coefficients. On garde les notations de la définition 4.4.58. La structure locale  $(\mathbf{W}_{top}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-top})$  sur  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  est la localisation de Bousfield de la structure projective  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj})$  suivant la classe des flèches de la forme  $(e_U)^*(a)$  avec  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  et  $a \in \mathbf{W}_{top_U} \cap \mathbf{Cof}_{proj} \subset \text{Fl}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M}))$  de source projectivement cofibrante.

DEMONSTRATION Soit  $\beta$  un cardinal et notons  $\mathcal{L}_{P,\beta}$  la classe des flèches de la forme  $(e_U)^*(a)$  avec  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  et  $a \in \mathbf{W}_{top_U} \cap \mathbf{Cof}_{proj}$  de source cofibrante et de but  $\beta$ -accessible. Notons  $(\mathbf{W}_{P,\beta}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-P,\beta})$  la localisation de Bousfield de la structure projective sur  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  suivant la classe essentiellement petite  $\mathcal{L}_{P,\beta}$ . Par le théorème 4.4.51, les flèches  $(e_U)^*(a)$  sont des équivalences  $top$ -locales. Il s'agit donc de démontrer que  $\mathbf{W}_{top} \subset \mathbf{W}_{P,\beta}$  pour  $\beta$  suffisamment grand. On prendra  $\beta$  tel que la structure projective locale sur  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M})$  coïncide avec la localisation de Bousfield de la structure projective suivant la classe  $\mathcal{L}_{top_U,\beta}$  des équivalences  $top_U$ -locales de buts  $\beta$ -accessibles.

Soit  $f : H \longrightarrow K$  une équivalence  $top$ -locale de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  et montrons que  $f \in \mathbf{W}_{P,\beta}$ . On peut supposer que  $f$  est une fibration entre objets fibrants relativement à la structure  $(\mathbf{W}_{P,\beta}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-P,\beta})$ . Par le choix de  $\beta$ , l'adjonction  $((e_U)^*, (e_U)_*)$  est une adjonction de Quillen entre :

$$(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M}), \mathbf{W}_{top_U}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{top_U-proj}) \quad \text{et} \quad (\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}), \mathbf{W}_{P,\beta}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-P,\beta})$$

pour tout  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ . Il vient que  $(e_U)_*f$  est une fibration entre objets fibrants relativement à la structure  $top_U$ -locale projective. D'autre part, la troisième condition de la définition 4.4.58, fournit un isomorphisme  $\Pi_0^{top_U}(A[-n], (e_U)_*(-)) \simeq (e_U)_*\Pi_0^{top}(A[-n], -)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ . On voit alors que  $(e_U)_*$  préserve les équivalences locales. Ainsi,  $(e_U)_*f$  est une fibration triviale. Il vient que  $f(U)$  est une équivalence faible de  $\mathfrak{M}$ . Ceci étant vrai pour tout  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ , nous avons obtenu que  $f$  est une équivalence faible de préfaisceaux. C.Q.F.D

**DEFINITION 4.4.60** — Soit  $(\mathcal{S}, top)$  et  $(\mathcal{S}', top')$  deux sites de Grothendieck munis de  $P$ -structures  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$ . Un pré-morphisme de sites  $(\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$  est dit compatible aux  $P$ -structures, lorsque pour tout  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  :

- le foncteur  $f_U : \mathcal{S}/U \longrightarrow \mathcal{S}'/f(U)$  envoie  $\mathcal{E}_U$  dans  $\mathcal{E}'_{f(U)}$  et induit donc un foncteur  $f_U^\mathcal{E} : \mathcal{E}_U \longrightarrow \mathcal{E}'_{f(U)}$ ,
- le foncteur  $f_U^\mathcal{E}$  définit un pseudo-morphisme de sites  $f_U^\mathcal{E} : (\mathcal{E}'_{f(U)}, top'_{f(U)}) \longrightarrow (\mathcal{E}_U, top_U)$ .

**THEOREME 4.4.61** — *On se donne un pré-morphisme de sites  $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$  compatible à deux  $P$ -structures sur  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  comme dans la définition 4.4.60. Alors,  $(f^*, f_*) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathfrak{M})$  est une adjonction de Quillen relativement aux structures locales projectives.*

DEMONSTRATION Il suffit de montrer que  $Lf^* : \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathfrak{M}))$  envoie la flèche  $(e_U)^*a$  sur une équivalence  $top'$ -locale pour toute équivalence  $top_U$ -locale  $a$  de but et source cofibrants. Étant donné le carré commutatif de pré-morphismes de sites :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_U & \xrightarrow{e_U} & \mathcal{S} \\ f_U^\mathcal{E} \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{E}'_{f(U)} & \xrightarrow{e'_{f(U)}} & \mathcal{S}' \end{array}$$

on voit que  $Lf^*L(e_U)^*(a) \simeq L(e'_{f(U)})^*L(f_U^\mathcal{E})^*(a)$ . Le résultat découle alors du théorème 4.4.51 et du fait que  $f_U^\mathcal{E}$  et  $e'_{f(U)}$  sont des pseudo-morphismes de sites. C.Q.F.D

### 4.4.4 Cas où $\mathfrak{M}$ est monoïdale

Notons d'abord le résultat simple suivant :

**PROPOSITION 4.4.62** — *Soit  $\mathfrak{M}$  une catégorie de modèles monoïdale (resp. et symétrique). On suppose que  $\mathfrak{M}$  est présentable. La catégorie  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  est alors naturellement une catégorie de modèles monoïdale (resp. et symétrique) relativement aux structures projectives et injectives de la définition 4.4.18.*

DEMONSTRATION Le cas de la structure injective est évident. Le cas de la structure projective se ramène au cas de la structure injective étant donné que  $\mathbf{Cof}_{proj} \subset \mathbf{Cof}_{inj}$ . C.Q.F.D

Lorsque  $\mathfrak{M}$  admet un objet unité cofibrant  $\mathbb{1}$ ,  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  est alors une catégorie de modèles monoïdale unitaire pour la structure injective. C'est également le cas pour la structure projective si  $\mathcal{S}$  admet un objet final (i.e., le préfaisceau final est représentable). Pour démontrer l'anaolgue de la proposition précédente pour les structures  $top$ -locales, nous aurons besoin de supposer que le site  $(\mathcal{S}, top)$  admet suffisamment de points.

**PROPOSITION 4.4.63** — *Supposons que la catégorie de coefficients  $\mathfrak{M}$  est aussi une catégorie de modèles monoïdale (resp. et symétrique). Si le site  $(\mathcal{S}, top)$  admet suffisamment de points, alors  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  est une catégorie de modèles monoïdale (resp. et symétrique) relativement aux structures projective et injective  $top$ -locales*

DEMONSTRATION Par la proposition 4.2.76, il faut vérifier que  $u \otimes K$  est encore une équivalence  $top$ -locale pour  $K$  un préfaisceau projectivement (resp. injectivement) cofibrant et  $u : G \longrightarrow H$  une équivalence  $top$ -locale entre objets projectivement (resp. injectivement) cofibrants. Étant donné que  $-\otimes-$  preserve les équivalences faibles de préfaisceaux entre objets injectivement cofibrants, il suffit de traiter le cas non-respé.

Soit  $(x^*, x_*) : \mathcal{E}ns \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$  un point pour la topologie  $top$ . Notons  $E$  l'image de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{E}ns$  par le foncteur  $x^*$ . On munit  $E$  de la topologie  $t$  induite par celle de  $\mathcal{E}ns$  de sorte que  $\mathbf{Shv}_t(E) \simeq \mathcal{E}ns$ . Le point  $(x^*, x_*)$  est donc induit par un morphisme de sites  $x : (E, t) \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$ .

On fixe une famille conservative de points  $x_\alpha : (E_\alpha, t_\alpha) \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$  avec  $E_\alpha \subset \mathcal{E}ns$  comme ci-dessus et contenant le singleton  $* = \{\emptyset\}$ . Par la preuve du théorème 4.4.51, on a pour  $n \in \mathbb{Z}$  et  $A \in \mathcal{E}$ , un isomorphisme canonique  $x_\alpha^*(\Pi_0^{top}(A[-n], -)) \simeq \Pi_0^{t_\alpha}(A[-n], x_\alpha^*(-))$ . Ainsi, une flèche  $f$  de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  est une équivalence  $top$ -locale si et seulement si  $\Pi_0^{t_\alpha}(A[-n], x_\alpha^*(f))$  est inversible, ce qui revient à dire que  $\mathbf{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], x_\alpha^*(f)(*))$  est inversible. Comme la famille des  $\mathbf{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], -)$  detecte les équivalences faibles, on a une équivalence entre :

- (i)  $f$  est une équivalence  $top$ -locale,
- (ii) pour tout  $\alpha$ ,  $x_\alpha^*(f)(*)$  est une équivalence faible de  $\mathfrak{M}$ .

Il nous reste donc à montrer que  $x_\alpha^*(u \otimes K)(*_\alpha)$  est une équivalence faible. Comme  $x_\alpha^*$  est monoïdal, cette flèche s'identifie à  $x_\alpha^*(u)(*_\alpha) \otimes x_\alpha^*(K)(*_\alpha)$ . Comme  $x_\alpha^*$  est un foncteur de Quillen à gauche,  $x_\alpha^*(K)(*_\alpha)$  est cofibrant et  $x_\alpha^*(u)(*_\alpha)$  est une équivalence faible entre objets cofibrants. D'où le résultat. C.Q.F.D

## 4.5 Le dérivateur algébrique homotopique et stable SHH

Dans ce numéro, nous construisons le 2-foncteur SHH et vérifions qu'il est un dérivateur algébrique homotopique et stable au sens de la définition 2.4.13. Tout est formel à l'exception de l'axiome de localité. Nous suivrons pour cela la méthode de Morel et Voevodsky [MV90]. On fixe un schéma de base  $S$ . Rappelons que  $\mathbf{DiaSch}/S$  désigne

la 2-catégorie des diagrammes de  $S$ -schémas (voir la définition 2.4.4). Un objet  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  de  $\text{DiaSch}/S$  est un foncteur covariant  $\mathcal{F} : \mathcal{J} \longrightarrow \text{Sch}/S$  de source une petite catégorie.

Le symbole  $\tau \in \{\text{Nis}, \text{ét}\}$  désignera l'une des topologies usuelles : Nisnevich ou étale (quasi-compact). Nous fixons une catégorie de coefficients  $\mathfrak{M}$ . Rappelons que  $\mathcal{E} \subset \text{Ob}(\mathfrak{M})$  est un ensemble d'objets homotopiquement compacts qui engendrent la catégorie triangulée  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  avec petites sommes.

#### 4.5.1 Le 2-foncteur $\text{PreShv}(\text{Sm}/(-, -), \mathfrak{M})$

Étant donné un diagramme de  $S$ -schémas  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ , on notera  $\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  la catégorie dont les objets sont les couples  $(U, i)$  avec  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  et  $U$  un  $\mathcal{F}(i)$ -schéma lisse. On notera  $(U \rightarrow \mathcal{F}(i), i)$  cet objet si on veut mettre en évidence le morphisme structural de  $\mathcal{F}(i)$ -schémas. Une flèche  $(U', i') \longrightarrow (U, i)$  dans  $\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  est un couple  $(U' \rightarrow U, i' \rightarrow i)$  tel que le carré :

$$\begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(i') & \longrightarrow & \mathcal{F}(i) \end{array}$$

commute. Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme de  $\text{DiaSch}/S$ . Nous allons associer à  $(f, \alpha)$  un foncteur  $(f, \alpha)^* : \text{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \text{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$ . On dispose d'une factorisation canonique :

$$(4.87) \quad (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \xrightarrow{f} (\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{F}, \mathcal{J})$$

Nous construirons  $f^*$  et  $\alpha^*$  séparément.

On considère le foncteur  $f = - \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G} : \text{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow \text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  qui à un couple  $(V, j)$ , avec  $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  et  $V$  un  $\mathcal{F}(\alpha(j))$ -schéma lisse, associe le couple  $(V \times_{\mathcal{F}(\alpha(j))} \mathcal{G}(j), j)$ . Ce foncteur induit une adjonction :

$$(4.88) \quad (f^*, f_*) : \text{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \text{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$$

D'autre part, le 1-morphisme  $\alpha : (\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  induit un foncteur :

$$\bar{\alpha} : \text{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow \text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J})$$

qui à un couple  $(U \rightarrow \mathcal{F}(\alpha(j)), j)$  associe  $(U \rightarrow \mathcal{F}(\alpha(j)), \alpha(j))$ . On définit alors le foncteur  $\alpha^*$  par :

$$(4.89) \quad \alpha^* = \bar{\alpha}_* : \text{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \text{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$$

**DEFINITION 4.5.1** — Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas. On définit le foncteur :

$$(4.90) \quad (f, \alpha)^* : \text{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \text{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$$

par la composée  $\text{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \xrightarrow{\alpha^*} \text{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \xrightarrow{f^*} \text{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$ .

Le lemme ci-dessous est évident. Il découle immédiatement de la description de l'image inverse des préfaisceaux (voir la formule (4.78) du lemme 4.4.44) :

**LEMME 4.5.2** — Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme de  $\text{DiaSch}/S$ . Soit  $H$  un préfaisceau sur  $\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ . Le préfaisceau  $(f, \alpha)^*H$  est donné par l'association :

$$(V, j) \in \text{Ob}(\text{Sm}/\mathcal{G}(j)) \rightsquigarrow \text{Colim}_{V \rightarrow U \times_{\mathcal{F}(\alpha(j))} \mathcal{G}(j) \in \text{Ob}(V \setminus (\text{Sm}/\mathcal{F}(\alpha(j))))} H(U, \alpha(j))$$

**PROPOSITION 4.5.3** — L'association  $(f, \alpha) \rightsquigarrow (f, \alpha)^*$  s'étend naturellement en un 2-foncteur contravariant :

$$\text{PreShv}(\text{Sm}/(-, -), \mathfrak{M}) : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{Cat}$$

DEMONSTRATION Soient deux 1-morphismes composables dans  $\text{DiaSch}/S$  :

$$(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \xrightarrow{(g, \beta)} (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \xrightarrow{(f, \alpha)} (\mathcal{F}, \mathcal{I})$$

Pour  $H$  un préfaisceau sur  $\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{I})$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}$  et  $(W \rightarrow \mathcal{H}(k), k) \in \text{Ob}(\text{Sm}/(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$ , on a par le lemme 4.5.2 :

$$\begin{aligned} [(g, \beta)^*(f, \alpha)^*H](W, k) &= \text{Colim}_{W \rightarrow V \times_{\mathcal{G}(\beta(k)), \mathcal{H}(k)}} [(f^*, \alpha)^*H](V, \beta(k)) \\ &= \text{Colim}_{W \rightarrow V \times_{\mathcal{G}(\beta(k)), \mathcal{H}(k)}} \left( \text{Colim}_{V \rightarrow U \times_{\mathcal{F}(\alpha(\beta(k))), \mathcal{G}(\beta(k))}} H(U, \alpha \circ \beta(k)) \right) \simeq \text{Colim}_{W \rightarrow U \times_{\mathcal{F}(\alpha \circ \beta(k)), \mathcal{H}(k)}} H(U, \alpha \circ \beta(k)) \\ &= [(\alpha \circ \beta, f \circ g)^*H](W, k) \end{aligned}$$

Ceci fournit une transformation naturelle inversible  $(g, \beta)^*(f, \alpha)^* \simeq (\alpha \circ \beta, f \circ g)^*$ . La relation de cocycle pour cet isomorphisme de connexion découle de la relation de cocycle pour la composition des foncteurs colimites.

Soient  $(f, \alpha), (f', \alpha') : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{I})$  deux 1-morphismes de  $\text{DiaSch}/S$  et  $t : \alpha \longrightarrow \alpha'$  une transformation naturelle rendant le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{G} \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \mathcal{F} \circ \alpha & \xrightarrow{t} & \mathcal{F} \circ \alpha' \end{array}$$

commutatif. Nous allons définir une transformation naturelle  $t^* : (f', \alpha')^* \longrightarrow (f, \alpha)^*$ . Pour  $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  et  $V$  un  $\mathcal{G}(j)$ -schéma lisse, la transformation naturelle  $t$  définit un foncteur  $V \setminus (\text{Sm}/\mathcal{F}(\alpha'(j))) \longrightarrow V \setminus (\text{Sm}/\mathcal{F}(\alpha(j)))$  qui à un couple  $(U' \rightarrow \mathcal{F}(\alpha'(j)), V \rightarrow U' \times_{\mathcal{F}(\alpha'(j))} \mathcal{G}(j))$  associe le couple :

$$(U' \times_{\mathcal{F}(\alpha'(j))} \mathcal{F}(\alpha(j)) \rightarrow \mathcal{F}(\alpha(j)), V \rightarrow U' \times_{\mathcal{F}(\alpha'(j))} \mathcal{G}(j) \simeq (U' \times_{\mathcal{F}(\alpha'(j))} \mathcal{F}(\alpha(j))) \times_{\mathcal{F}(\alpha(j))} \mathcal{G}(j))$$

Ce foncteur et les flèches  $H(U', \alpha'(j)) \longrightarrow H(U' \times_{\mathcal{F}(\alpha'(j))} \mathcal{F}(\alpha(j)), \alpha(j))$  induisent un morphisme dans  $\mathfrak{M}$  :

$$\text{Colim}_{(U' \rightarrow \mathcal{F}(\alpha'(j)), V \rightarrow U' \times_{\mathcal{F}(\alpha'(j))} \mathcal{G}(j))} H(U', \alpha'(j)) \longrightarrow \text{Colim}_{(U \rightarrow \mathcal{F}(\alpha(j)), V \rightarrow U \times_{\mathcal{F}(\alpha(j))} \mathcal{G}(j))} H(U, \alpha(j))$$

et donc la transformation naturelle  $t^*$ . La commutation de ces transformations naturelles avec les isomorphismes de connexion est laissée aux lecteurs. C.Q.F.D

**PROPOSITION 4.5.4** — Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{I})$  un 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas. Le foncteur  $(f, \alpha)^*$  admet un adjoint à droite  $(f, \alpha)_*$ . Si  $(f, \alpha)$  est lisse argument par argument, le foncteur  $(f, \alpha)^*$  admet un adjoint à gauche  $(f, \alpha)_\#$ .

DEMONSTRATION En utilisant la décomposition  $(f, \alpha) = \alpha \circ f$  on est ramené à distinguer deux cas.

Le cas de  $f : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J})$ . Le foncteur  $f^*$  est l'image inverse suivant le foncteur

$$f = (- \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G}) : \text{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow \text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J})$$

Il admet un adjoint à droite, à savoir, le foncteur image directe qui à un préfaisceau  $H$  sur  $\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  associe  $H \circ f$ . Lorsque les morphismes  $f(j)$  sont lisses, le foncteur  $f : \text{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow \text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  admet un adjoint à droite  $c_f$  qui à  $(V \rightarrow \mathcal{G}(j), j)$  associe le couple  $(V \rightarrow \mathcal{G}(j) \rightarrow \mathcal{F}(\alpha(j)), j)$ . L'adjoint à gauche  $f_\#$  de  $f^*$  est donc donné par  $c_f^*$ . On a de plus  $f^* = (c_f)_*$ .

Le cas de  $\alpha : (\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{I})$ . Le foncteur  $\alpha^*$  est construit comme l'image directe suivant le foncteur  $\bar{\alpha}$ . Il admet donc un adjoint à gauche  $\alpha_\# = \bar{\alpha}^*$  et un adjoint à droite  $\alpha_* = \bar{\alpha}!$ . C.Q.F.D

Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{I})$  un 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas. Pour  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  on forme la face carrée dans  $\text{DiaSch}/S$  :

$$(4.91) \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{G}/i, \mathcal{J}/i) & \xrightarrow{(\text{id}, u_i)} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ (f/i) \downarrow & \swarrow r & \downarrow (f, \alpha) \\ \mathcal{F}(i) & \xrightarrow{(\text{id}_{\mathcal{F}(i)}, i)} & (\mathcal{F}, \mathcal{I}) \end{array}$$

Le lemme suivant découle immédiatement de la construction du foncteur  $\alpha_* = \bar{\alpha}^!$ .

**LEMME 4.5.5** — *La transformation naturelle  $(\text{id}_{\mathcal{F}(i)}, i)^*(f, \alpha)_* \longrightarrow (f/i)_*(\text{id}, u_i)^*$  est inversible.*

De même, lorsque les foncteurs  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont constants de valeur le  $S$ -schéma  $F$ , on peut former la face carrée :

$$(4.92) \quad \begin{array}{ccc} (F, i \setminus \mathcal{J}) & \xrightarrow{u_i} & (F, \mathcal{J}) \\ \alpha/i \downarrow & \nearrow r & \downarrow \alpha \\ (F, i) & \xrightarrow{i} & (F, \mathcal{J}) \end{array}$$

On a alors :

**LEMME 4.5.6** — *La transformation naturelle  $(\alpha/i)_{\#} u_i^* \longrightarrow i^* \alpha_{\#}$  est inversible.*

Soit  $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$  un morphisme de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas. Pour un foncteur  $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ , on forme le carré commutatif :

$$(4.93) \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{G} \circ \alpha, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f|_{\mathcal{J}} \downarrow & & \downarrow f \\ (\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

On a alors :

**LEMME 4.5.7** — *La transformation naturelle  $\alpha^* f_* \longrightarrow (f|_{\mathcal{J}})_* \alpha^*$  est inversible. Supposons de plus que  $f$  est cartésien et lisse argument par argument. Alors,  $(f|_{\mathcal{J}})_{\#} \alpha^* \longrightarrow \alpha^* f_{\#}$  est inversible.*

**DEMONSTRATION** La première assertion est évidente. En effet, les foncteurs  $\alpha^*$ ,  $f_*$  et  $(f|_{\mathcal{J}})_*$  sont des images directes. Pour montrer la seconde assertion, on se ramène immédiatement au cas où  $\alpha$  est le foncteur  $i : * \longrightarrow \mathcal{J}$  pour  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . Pour  $U$  un  $\mathcal{F}(i)$ -schéma lisse et  $K \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$ , on a :

$$f_{\#} K(U, i) = \underset{(U, i) \rightarrow (V \rightarrow \mathcal{G}(j) \rightarrow \mathcal{F}(j), j) \in \text{Ob}((U, i) \setminus (\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J})))}{\text{Colim}} K(V, j)$$

Comme  $f$  est cartésien, les flèches  $(U, i) \rightarrow (V \rightarrow \mathcal{G}(j) \rightarrow \mathcal{F}(j), j)$  se factorisent canoniquement par  $(U, i) \rightarrow (V \times_{\mathcal{G}(j)} \mathcal{G}(i) \rightarrow \mathcal{G}(i) \rightarrow \mathcal{F}(i), i)$ . Il vient que la colimite ci-dessus se réécrit :

$$f_{\#} K(U, i) = \underset{(U, i) \rightarrow (V \rightarrow \mathcal{G}(i) \rightarrow \mathcal{F}(i), i) \in \text{Ob}(U \setminus (\text{Sm}/\mathcal{G}(i)))}{\text{Colim}} K(V, i) = f(i)_{\#} i^*(K)(U)$$

Le lemme est démontré.

C.Q.F.D

Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $S$ -schémas. Il sera pratique dans la suite de considérer sur  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$  une structure de modèles intermédiaire entre la structure projective et la structure injective.

**DEFINITION 4.5.8** — *Un morphisme  $f : H \longrightarrow K$  de préfaisceaux sur  $\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}$  est une cofibration semi-projective si pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ , le morphisme  $(\text{id}_{\mathcal{F}(i)}, i)^*(f)$  est une cofibration projective dans  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/\mathcal{F}(i), \mathfrak{M})$ . La classe des cofibrations semi-projectives est notée par  $\mathbf{Cof}_{s-pr}$ . On définit la classe  $\mathbf{Fib}_{s-pr}$  des fibrations semi-projectives par la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathbf{Cof}_{s-pr} \cap \mathbf{W}$ .*

La preuve de la proposition suivante est calquée sur celle de la proposition 4.4.17.

**PROPOSITION 4.5.9** — *Le triplet  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr})$  est une structure de modèles présentable par cofibrations sur la catégorie  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$ .*

**DEMONSTRATION** Le résultat est vrai lorsque  $\mathfrak{M}$  est seulement supposée présentable par cofibrations. On montrera uniquement que  $\text{RLP}((\mathbf{Cof}_{s-pr})_{\beta} \cap \mathbf{W}) = \mathbf{Fib}_{s-pr}$  pour  $\beta$  suffisamment grand. Soit  $\alpha$  un cardinal majorant celui de  $\mathcal{J}$  et de  $\text{Sm}/S$  et tel que  $\mathfrak{M}$  est  $\alpha$ -présentable par cofibrations. On prendra  $\beta$  un cardinal comme dans la proposition 4.2.41.

Soit  $f \in \text{RLP}((\mathbf{Cof}_{s-pr})_\beta \cap \mathbf{W})$  et montrons que  $f \in \text{RLP}(\mathbf{Cof}_{s-pr} \cap \mathbf{W})$ . On se donne un carré commutatif dans  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$  :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & H \\ u \downarrow & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & K \end{array}$$

avec  $u$  une cofibration triviale semi-projective. Pour  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ , on note  $?(i)$  la restriction de  $?$  à  $\text{Sm}/\mathcal{F}(i)$ . On choisit une section  $r_i : B(i) \longrightarrow \Phi_{c_0f}(u(i))$  comme dans le cas respé de la définition 4.2.45.

On considère l'ensemble  $\mathcal{E}$  formé des classes d'isomorphisme des familles  $(v_i, a_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})}$  avec :

- $v_i : A(i) \longrightarrow T(i)$  une sous-cofibration  $r_i$ -normale de  $c_0(u(i))$ ,
- $a_i : s(T(i)) \longrightarrow H(i)$  avec  $s(T(i)) = T(i) \times_{\Phi_{c_0f}(u(i)), r_i} B(i)$ ,

et qui vérifient les conditions suivantes :

- (i) Les sous-objets  $s(T(i))$  de  $B(i)$  forment un sous-préfaisceau  $s(T)$  de  $B$ .
- (ii) Les flèches  $a_i$  définissent un morphisme de préfaisceaux  $a : s(T) \longrightarrow H$  faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \nearrow a & & \downarrow f \\ s(T) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & K \end{array}$$

On ordonne  $\mathcal{E}$  de la manière évidente. Par la proposition 4.2.54, les chaînes de  $\mathcal{E}$  sont majorées par leur colimite. Le lemme de Zorn assure l'existence d'éléments maximaux.

Supposons que  $(v_i, a_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})}$  est un élément maximal de  $\mathcal{E}$  et montrons que  $T(i) = \Phi_{c_0f}(u(i))$  pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . Considérons le diagramme de  $\mathcal{OrdEns}$  :

$$\begin{array}{ccc} & & \prod_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v_i}(u(i)|r_i) \\ & & \downarrow \\ \mathbf{Sub}_\beta(u) & \longrightarrow & \prod_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \mathbf{Sub}_\beta(u(i)) \end{array}$$

où les flèches sont les inclusions évidentes. On note  $\mathcal{L}$  la limite de ce diagramme. Par les lemmes 4.2.57 et 4.2.4, cette limite est cofinale dans  $\prod_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \mathbf{Sub}_\beta(u(i))$  (pour la cofinalité de l'inclusion  $\mathbf{Sub}_\beta(u) \subset \prod_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \mathbf{Sub}_\beta(u(i))$ , le lecteur pourra facilement adapter l'argument de la preuve de la proposition 4.2.20).

Se donner un objet de  $\mathcal{L}$  revient à se donner une sous-flèche  $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$  de  $u$  de but  $\beta$ -accessible et telle que pour  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ,  $u_0(i)$  est une sous-cofibration  $r_i$ -spéciale de  $u(i)$  qui est de plus orthogonale à  $v_i$ . Notons  $T_0(i) = T(i) \times_{\Phi_{c_0f}(u(i))} \Phi_{c_0f}(u_0(i))$ . Comme  $u_0(i)$  est orthogonale à  $v_i$ , la flèche  $A_0(i) \longrightarrow T_0(i)$  est  $r_{0,i}$ -normale dans  $u_0(i)$  (avec  $r_{0,i} : B_0(i) \longrightarrow \Phi_{c_0f}(u_0(i))$  la section déduite de  $r_i$ ). Notons  $s(T_0)$  le préfaisceau  $s(T) \times_B B_0$ . On a clairement  $s(T_0)(i) = T_0(i) \times_{\Phi_{c_0f}(u_0(i)), r_{0,i}} B_0(i)$  pour  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . La flèche  $s(T_0) \longrightarrow B_0$  est donc une cofibration semi-projective triviale. On déduit l'existence d'un relèvement :

$$\begin{array}{ccccc} s(T_0) & \longrightarrow & s(T) & \xrightarrow{a} & H \\ u_0 \downarrow & & & \nearrow l & \downarrow f \\ B_0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & K \end{array}$$

Pour  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ,  $v'_i : A(i) \longrightarrow T'(i) = T(i) \prod_{T_0(i)} \Phi_{c_0f}(u_0(i))$  est une sous-cofibration  $r_i$ -normale de  $u(i)$  majorant  $v_i$ . Il vient que la famille  $(v'_i, a_i \cup l(i))_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})}$  majore  $(v_i, a_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})}$  dans  $\mathcal{E}$ . Par maximalité, on déduit que les sous-objets  $\Phi_{c_0f}(u_0(i))$  de  $\Phi_{c_0f}(u(i))$  sont majorés par  $T(i)$ . Comme  $\mathcal{L}$  est cofinale dans  $\prod_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \mathbf{Sub}_\beta(u(i))$ , on a forcément  $T(i) = \Phi_{c_0f}(u(i))$ . C.Q.F.D

Rappelons que  $\tau \in \{\text{Nis}, \text{ét}\}$  désigne l'une des topologies usuelles Nisnevich ou étale. On munit la catégorie  $\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  de la topologie  $\tau$  engendrée par les familles de la forme :

$$\left( (u_\alpha, \text{id}_i) : (U_\alpha, i) \longrightarrow (U, i) \right)_\alpha$$

avec  $(u_\alpha)_\alpha$  une famille couvrante pour la topologie  $\tau$ . Ainsi, un sous-préfaisceau  $R$  de  $(U, i)$  est une crible couvrante pour la topologie  $\tau$  si et seulement si la restriction de  $R$  à la sous-catégorie  $\text{Et}/U$  des  $U$ -schémas étales est une crible couvrante pour la topologie  $\tau$ . On vérifie immédiatement que la donnée pour  $(U, i) \in \text{Ob}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}))$  du site  $(\text{Et}/U, \tau)$  est une  $P$ -structure sur  $(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \tau)$  au sens de la définition 4.4.58. Cette  $P$ -structure sera appelée la  $P$ -structure étale.

Par la proposition 4.4.32, on peut localiser la structure  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr})$  pour obtenir la structure semi-projective  $\tau$ -locale que l'on notera  $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\tau})$ . On a le théorème suivant :

**THEOREME 4.5.10** — Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas.

1- On a, relativement aux structures semi-projectives  $\tau$ -locales  $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\tau})$ , les deux adjonctions de Quillen suivantes :

$$(i) ((f, \alpha)^*, (f, \alpha)_*) : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) ,$$

$$(ii) (f_\#, f^*) : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \text{ lorsque } f \text{ est cartésien et lisse argument par argument.}$$

2- On a, relativement aux structures projectives  $\tau$ -locales  $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\tau})$ , les trois adjonctions de Quillen suivantes :

$$(i) (f^*, f_*) : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) ,$$

$$(ii) (\alpha_\#, \alpha^*) : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) ,$$

$$(iii) ((f, \alpha)_\#, (f, \alpha)^*) : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \text{ lorsque } (f, \alpha) \text{ est lisse argument par argument.}$$

3- Enfin,  $(\alpha^*, \alpha_*) : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$  est une adjonction de Quillen relativement aux structures injectives  $\tau$ -locales  $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-\tau})$ .

DEMONSTRATION On traite d'abord les assertions relatives aux structures projectives  $\tau$ -locales. Le foncteur  $f = (-) \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G} : \text{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow \text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  est continu. De plus, le pré-morphisme de sites qu'il définit est compatible aux  $P$ -structures étales. La première assertion découle alors du théorème 4.4.61. Supposons que  $(f, \alpha)$  est lisse argument par argument. L'adjonction  $((f, \alpha)_\#, (f, \alpha)^*)$  est associée au foncteur  $c_{f, \alpha} : \text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow \text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  qui à un objet  $(V, j)$  associe  $(V \rightarrow \mathcal{G}(j) \rightarrow \mathcal{F}(\alpha(j)), \alpha(j))$ . Ce foncteur est clairement continu et compatible aux  $P$ -structures étales. On peut encore appliquer le théorème 4.4.61. Enfin, la seconde assertion est clairement un cas particulier de la troisième.

Revenons à la première partie de l'énoncé. Le foncteur  $(f, \alpha)^*$  preserve clairement les cofibrations semi-projectives. Pour montrer qu'il preserve les cofibrations semi-projectives triviales, il suffit de le faire après application des foncteurs  $(\text{id}_{\mathcal{G}(j)}, j)^*$  pour  $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . Mais on vient de montrer que  $f(\alpha(j))^*$  preserve les cofibrations projectives triviales. De même, pour vérifier que  $f_\#$  preserve les cofibrations semi-projectives et les cofibrations semi-projectives triviales, on peut se ramener au cas où  $f$  est un morphisme lisse de  $S$ -schémas en utilisant le lemme 4.5.7.

Pour la dernière assertion, il suffit de remarquer que le foncteur  $\alpha^*$  preserve les cofibrations injectives et les équivalences  $\tau$ -locales. Le théorème est démontré. C.Q.F.D

Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $S$ -schémas. On considère la classe  $\mathcal{A}$  de flèches de  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$  de la forme

$$\sigma(U, i, B) : (U, i) \otimes B_{cst} \xrightarrow{s_0 \otimes \text{id}_B} (\mathbb{A}_U^1, i) \otimes B_{cst}$$

avec  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ,  $U$  un  $\mathcal{F}(i)$ -schéma lisse,  $s_0$  la section nulle de la droite affine et  $B$  un objet cofibrant de  $\mathfrak{M}$ . On note également  $\mathcal{A}_\alpha$  la classe des  $\sigma(U, i, B)$  avec  $B$  un objet  $\alpha$ -accessible. On a :

**PROPOSITION 4.5.11** — Supposons que  $\beta$  est suffisamment grand. Soit  $K \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$  fibrant pour la structure  $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr})$ . Alors,  $K$  est  $\mathcal{A}_\beta$ -local si et seulement si pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  et  $U$  un  $\mathcal{F}(i)$ -schéma lisse, la flèche  $K(\mathbb{A}_U^1, i) \longrightarrow K(U, i)$  est une équivalence faible.

DEMONSTRATION Soit  $\beta$  un cardinal tel que  $A[n]$  admet un représentant cofibrant et  $\beta$ -accessible pour tout  $A \in \mathcal{E}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Par définition,  $K$  est  $\mathcal{A}_\beta$ -local si le morphisme :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))}((\mathbb{A}_U^1, i) \otimes B_{cst}, K) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))}((U, i) \otimes B_{cst}, K)$$

est inversible pour  $B$  cofibrant et  $\beta$ -accessible dans  $\mathfrak{M}$ . Par le lemme 4.4.36, on dispose pour un préfaisceau représentable  $F$  d'une adjonction de Quillen  $(F \otimes (-)_{cst}, \underline{\text{hom}}_{\mathfrak{M}}(F, -))$  avec  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$  munie de sa structure projective  $\tau$ -locale. Le morphisme ci-dessus s'identifie donc à :

$$(4.94) \quad \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(B, K(\mathbb{A}_U^1, i)) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(B, K(U, i))$$



Étant donné que la classe des objets cofibrants  $\beta$ -accessibles contient des représentants de  $A[n]$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  et  $A \in \mathcal{E}$ , on déduit que (4.94) est inversible si et seulement si  $K(\mathbb{A}_U^1, i) \longrightarrow K(U, i)$  est une équivalence faible (on utilise que  $\mathcal{E}$  est un système de générateurs compacts de  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ ). C.Q.F.D

En particulier, on a  $(\mathbf{W}_\tau)_{\mathcal{A}\beta} = (\mathbf{W}_\tau)_{\mathcal{A}}$  pour  $\beta$  suffisamment grand. Ceci montre que la localisation de Bousfield suivant  $\mathcal{A}$  existe :

**DEFINITION 4.5.12** — Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $S$ -schémas. La structure semi-projective (resp. projective, injective)  $\mathbb{A}^1$ -locale :

$$(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\mathbb{A}^1}) \quad (\text{resp. } (\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1}) \quad , \quad (\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-\mathbb{A}^1}))$$

est la localisation de Bousfield suivant  $\mathcal{A}$  de la structure semi-projective (resp. projective, injective)  $\tau$ -locale. Les flèches dans  $\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}$  sont appelées les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles.

Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $S$ -schémas. On note  $\mathbb{A}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^1$  le préfaisceau d'ensembles sur  $\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  qui à un objet  $(U, i)$  associe  $\text{hom}_{\text{Sch}/\mathcal{F}(i)}(U, \mathbb{A}_{\mathcal{F}(i)}^1)$ . On a le résultat suivant :

**LEMME 4.5.13** — 1- Soit  $K \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$  un objet fibrant relativement à la structure projective  $\tau$ -locale  $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\tau})$ . Alors,  $K$  est  $\mathbb{A}^1$ -local si et seulement si la flèche  $\underline{\text{hom}}(\mathbb{A}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^1, K) \longrightarrow K$  est une équivalence faible de préfaisceaux.

2- Soit  $H \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$  un préfaisceau injectivement cofibrant. Alors la flèche  $H \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^1 \otimes H$  induite par la section nulle est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible.

**DEMONSTRATION** En effet, pour  $(U, i)$  un objet de  $\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ , la flèche  $\underline{\text{hom}}(\mathbb{A}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^1, K)(U, i) \longrightarrow K(U, i)$  s'identifie canoniquement à  $K(\mathbb{A}_U^1, i) \longrightarrow K(U, i)$ .

Montrons la seconde partie du lemme. Il suffit de montrer que pour tout  $K$  injectivement fibrant et  $\mathbb{A}^1$ -local, l'application :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))}(\mathbb{A}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^1 \otimes H, K) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))}(H, K)$$

est bijective. En utilisant l'adjonction de Quillen du lemme 4.4.36, cette application s'identifie à :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))}(H, \underline{\text{hom}}(\mathbb{A}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^1, K)) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))}(H, K)$$

Le résultat découle alors de la première partie. C.Q.F.D

On a également le théorème :

**THEOREME 4.5.14** — Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas.

1- On a, relativement aux structures semi-projectives  $\mathbb{A}^1$ -locales  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\mathbb{A}^1})$ , les deux adjonctions de Quillen suivantes :

(i)  $((f, \alpha)^*, (f, \alpha)_*) : \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$ ,

(ii)  $(f_\#, f^*) : \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$  lorsque  $f$  est cartésien et lisse argument par argument.

2- On a, relativement aux structures projectives  $\mathbb{A}^1$ -locales  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1})$ , les trois adjonctions de Quillen suivantes :

(i)  $(f^*, f_*) : \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$ ,

(ii)  $(\alpha_\#, \alpha^*) : \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$ ,

(iii)  $((f, \alpha)_\#, (f, \alpha)^*) : \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$  lorsque  $(f, \alpha)$  est lisse argument par argument.

3- Enfin,  $(\alpha^*, \alpha_*) : \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$  est une adjonction de Quillen relativement aux structures injectives  $\mathbb{A}^1$ -locales  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-\mathbb{A}^1})$ .

**DEMONSTRATION** Pour déduire l'énoncé du théorème 4.5.10, il s'agit de montrer que les différents foncteurs de Quillen à gauche envoient les flèches de  $\mathcal{A}$  sur des  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles.

On traite d'abord le cas du foncteur  $f^*$ . Soient  $B \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$  un objet cofibrant,  $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  et  $U$  un  $\mathcal{F}(\alpha(j))$ -schéma lisse. La source et le but de  $\sigma(U, j, B) : (\mathbb{A}_U^1, j) \otimes B_{cst} \longrightarrow (U, j) \otimes B_{cst}$  sont projectivement cofibrants. Le résultat recherché découle alors de l'égalité  $f^*(\sigma(U, j, B)) = \sigma(U \times_{\mathcal{F}(\alpha(j))} \mathcal{G}(j), j, B)$ . De même, si  $V$  est un  $\mathcal{G}(j)$ -schéma lisse,

on a  $f_{\#}(\sigma(V, j, B)) = \sigma(V \rightarrow \mathcal{G}(j) \rightarrow \mathcal{F}(\alpha(j)), j, B)$ . D'où le resultat pour  $f_{\#}$ . Le cas de  $\alpha_{\#}$  se traite de la même façon. Le cas du foncteur  $\alpha^*$  est légèrement moins trivial. Il suffit toutefois de remarquer que ce dernier envoie la flèche  $K \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^1 \otimes K$  sur  $\alpha^*K \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}}^1 \otimes \alpha^*K$  pour  $K \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$  et d'invoquer le lemme 4.5.13. C.Q.F.D

## 4.5.2 Le 2-foncteur $\text{SH}_{\mathfrak{M}}^T(-)$ . Début de la vérification des axiomes

On suppose maintenant que notre catégorie de coefficients  $\mathfrak{M}$  est aussi une catégorie de modèles monoïdale symétrique. Par la proposition 4.4.63 et la proposition 4.2.76 appliquée à la  $\mathbb{A}^1$ -localisation, les catégories  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$  sont encore des catégories de modèles monoïdals symétriques relativement aux structures projectives et injectives ( $\tau$ -locales et  $\mathbb{A}^1$ -locales). C'est également le cas relativement aux structures semi-projectives, étant donné que l'on peut vérifier l'axiome (MMC) après application des foncteurs  $i^*$  pour  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . Notons le lemme suivant :

**LEMME 4.5.15** — Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas.

1. Les foncteurs  $f_*$  et  $\alpha^*$  sont monoïdals symétriques. Les foncteurs  $(f, \alpha)^*$  et  $\alpha_{\#}$  sont pseudo-comonoïdals et  $\alpha_*$  est pseudo-monoïdal.
2. Supposons que  $(f, \alpha)$  est lisse argument par argument. Alors,  $(f, \alpha)^*$  est monoïdal symétrique et  $(f, \alpha)_{\#}$  est un  $(f, \alpha)^*$ -projecteur au sens de la définition 2.1.99.

**DEMONSTRATION** L'image directe sur les préfaisceaux suivant n'importe quel foncteur est clairement monoïdal. D'où la première assertion. Ceci montre que  $f_*$  et  $\alpha^*$  sont monoïdals. De même, pour  $(f, \alpha)$  lisse argument par argument, le foncteur  $f^*$  est monoïdal puisqu'il est isomorphe à l'image direct suivant  $c_f$  (voir la preuve de la proposition 4.5.4). Les autres assertions découlent maintenant par adjonction (pour  $(f, \alpha)^*$  il faut utiliser  $(f, \alpha)^* = \alpha^* \circ f^*$ ). C.Q.F.D

La proposition ci-dessous montre que  $(f, \alpha)^*$  est en fait un foncteur monoïdal.

**PROPOSITION 4.5.16** — Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas. Soient  $K, L \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$ . La flèche naturelle  $(f, \alpha)^*(K \otimes L) \longrightarrow (f, \alpha)^*(K) \otimes (f, \alpha)^*(L)$  est inversible.

**DEMONSTRATION** Il suffit de vérifier que la flèche en question est inversible après applications des foncteurs  $j^*$  pour  $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . On se ramène alors au cas où  $\mathcal{J} = \mathcal{J} = *$ , i.e., à un morphisme de  $S$ -schémas  $f : Y \longrightarrow X$ .

On fixe le préfaisceau  $L$  et on note  $\mathcal{C}$  la classe des préfaisceaux  $K$  vérifiant la conclusion de l'énoncé. Il est clair que  $\mathcal{C}$  est stable par colimite quelconque. On se ramène alors au cas où  $K$  est de la forme  $U \otimes (A_{cst})$  avec  $U$  un  $X$ -schéma lisse et  $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ . Le même raisonnement permet de supposer que  $L = V \otimes (B_{cst})$  avec  $V$  un  $X$ -schéma lisse et  $B \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ . On a alors la chaîne d'isomorphismes :

$$\begin{aligned} f^*((U \otimes (A_{cst})) \otimes (V \otimes (B_{cst}))) &\simeq f^*((U \times_X V) \otimes (A \otimes B)_{cst}) \simeq (U \times_X V) \times_Y (V \times_X Y) \otimes (A \otimes B)_{cst} \\ &\simeq ((U \times_X Y) \otimes (A_{cst})) \otimes ((V \times_X Y) \otimes (B_{cst})) \simeq f^*(U \otimes (A_{cst})) \otimes f^*(V \otimes (B_{cst})) \end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera facilement que la composée ci-dessus est égale au morphisme canonique de l'énoncé. C.Q.F.D

On résume quelques formules de projections dans la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.5.17** — 1- Soit  $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$  un morphisme cartésien et lisse de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas. Pour  $K \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$  et  $M \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$ , le morphisme (structural du  $f^*$ -projecteur)  $f_{\#}(f^*(K) \otimes M) \longrightarrow K \otimes f_{\#}(M)$  est inversible.

2- Soit  $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$  un foncteur de  $\text{Dia}$  et  $X$  un  $S$ -schéma. Pour  $K \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(X, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$  et  $M \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(X, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$ , le morphisme  $\alpha_{\#}(\alpha^*(K) \otimes M) \longrightarrow K \otimes \alpha_{\#}M$  est inversible.

3- Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas. On note  $\pi_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}$  la projection structurale  $(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow S$ . Soient  $T \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/S, \mathfrak{M}))$  et  $M \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$ . Le morphisme  $(f, \alpha)_{\#}((f, \alpha)^*(\pi_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^*T) \otimes M) \longrightarrow (\pi_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^*T) \otimes (f, \alpha)_{\#}M$  est inversible.

**DEMONSTRATION** Pour la première partie, on se ramène à  $\mathcal{J} = *$  en utilisant le lemme 4.5.7. Soit donc  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme lisse de  $S$ -schémas. Comme dans la preuve de la proposition 4.5.16 on peut supposer que  $K = U \otimes (A_{cst})$  et  $M = V \otimes (B_{cst})$  avec  $U$  un  $X$ -schéma lisse,  $V$  un  $Y$ -schéma lisse et  $A, B \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ . On a alors la chaîne d'isomorphismes :

$$f_{\#}(f^*(U \otimes A_{cst}) \otimes (V \otimes B_{cst})) \simeq f_{\#}(((U \times_X Y) \otimes A_{cst}) \otimes (V \otimes B_{cst})) \simeq f_{\#}(((U \times_X Y) \times_Y V) \otimes (A \otimes B)_{cst})$$

$$\simeq (U \times_X (V \rightarrow Y \rightarrow X))(A \otimes B)_{cst} \simeq (U \otimes A_{cst}) \otimes ((V \rightarrow Y \rightarrow X) \otimes B_{cst}) \simeq (U \otimes A_{cst}) \otimes f_{\#}(V \otimes B_{cst})$$

Le lecteur vérifiera facilement que la composée ci-dessus coïncide avec le morphisme canonique de l'énoncé.

Pour la seconde partie, on utilise le lemme 4.5.6 pour se ramener au cas où  $\mathcal{J} = *$ , i.e., à  $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow *$ . On peut supposer que  $K = U \otimes (A_{cst})$  et  $M = (V, j) \otimes B_{cst}$  avec  $U$  et  $V$  des  $X$ -schémas lisses,  $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  et  $A, B \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ . On a alors la chaîne d'isomorphismes :

$$\begin{aligned} \alpha_{\#}(\alpha^*(U \otimes A_{cst}) \otimes ((V, j) \otimes B_{cst})) &\simeq \alpha_{\#}((U \times_X V, j) \otimes (A \otimes B)_{cst}) \simeq (U \times_X V) \otimes (A \otimes B)_{cst} \\ &\simeq (U \otimes A_{cst}) \otimes \alpha_{\#}((V, j) \otimes B_{cst}) \end{aligned}$$

dont la composée coïncide avec le morphisme de l'énoncé.

Il nous reste à montrer la dernière partie. On suppose que  $T = U \otimes A_{cst}$  et  $M = (V, j) \otimes B_{cst}$  avec  $U$  un  $S$ -schéma lisse,  $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ,  $V$  un  $\mathcal{G}(j)$ -schéma lisse et  $A, B \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ . On a alors la chaîne d'isomorphismes :

$$\begin{aligned} (f, \alpha)_{\#}((f, \alpha)^* \pi_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^*(U \otimes A_{cst}) \otimes ((V, j) \otimes B_{cst})) &\simeq (f, \alpha)_{\#}((U \times_S V, j) \otimes (A \otimes B)_{cst}) \simeq (U \times_S V \rightarrow \mathcal{F}(\alpha(j)), j) \otimes (A \otimes B)_{cst} \\ &\simeq \pi_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^*(U \otimes A_{cst}) \otimes ((V \rightarrow \mathcal{F}(\alpha(j)), j) \otimes B_{cst}) \simeq \pi_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^*(U \otimes A_{cst}) \otimes (f, \alpha)_{\#}((V, j) \otimes B_{cst}) \end{aligned}$$

La proposition est prouvée.

C.Q.F.D

On fixe un objet projectivement cofibrant  $T$  de  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/S, \mathfrak{M})$  tel que pour tout  $S$ -schéma lisse  $U$ , le foncteur  $\underline{\text{Hom}}(T(U), -) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$  est accessible. Étant donné un diagramme de  $S$ -schémas  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  on notera  $T_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}$  l'objet  $\pi_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}^* T$  où  $\pi_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}$  désigne la projection structurale de  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ . On vérifie facilement que les foncteurs  $\underline{\text{Hom}}(T_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}, -)$  sont accessibles.

**DEFINITION 4.5.18** — On note  $\mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  la catégorie  $\mathbf{Spect}_{T_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$ .

**PROPOSITION 4.5.19** — Le 2-foncteur  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(-, -), \mathfrak{M}) : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{Mono}$  qui à un 1-morphisme  $(f, \alpha)$  associe le foncteur monoïdal  $(f, \alpha)^*$  induit naturellement un 2-foncteur contravariant :

$$\mathbb{M}_T(-, -) : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{Mono}$$

**DEMONSTRATION** Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas. L'isomorphisme canonique  $(f, \alpha)^* T_{\mathcal{F}, \mathcal{J}} \simeq T_{\mathcal{G}, \mathcal{J}}$  induit un isomorphisme de foncteurs  $\epsilon : T_{\mathcal{G}, \mathcal{J}} \otimes (f, \alpha)^*(-) \simeq (f, \alpha)^*(T_{\mathcal{F}, \mathcal{J}} \otimes -)$  qui est clairement  $\Sigma$ -symétrique au sens de la définition 4.3.16. On a donc  $(f, \alpha)_{\epsilon}^* : \mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  le prolongement de  $(f, \alpha)^*$  aux catégories des  $T$ -spectres symétriques.

Supposons donné un 1-morphisme  $(g, \beta) : (\mathcal{H}, \mathcal{K}) \longrightarrow (\mathcal{G}, \mathcal{J})$ . L'isomorphisme de connexion  $(g, \beta)^*(f, \alpha)^* \simeq (f \circ g, \alpha \circ \beta)^*$  est compatible aux isomorphismes  $\epsilon$ . On déduit par la naturalité du prolongement un isomorphisme  $(g, \beta)_{\epsilon}^*(f, \alpha)_{\epsilon}^* \simeq (f \circ g, \alpha \circ \beta)_{\epsilon}^*$ .

De même, un 2-morphisme  $t : (f, \alpha) \longrightarrow (f', \alpha')$  entre 1-morphismes dans  $\text{Mor}((\mathcal{F}, \mathcal{J}), (\mathcal{G}, \mathcal{J}))$  induit une transformation naturelle  $t^* : (f', \alpha')^* \longrightarrow (f, \alpha)^*$ . Cette dernière est compatible avec l'isomorphisme  $\epsilon$  et induit donc une transformation naturelle  $t^* : (f', \alpha')_{\epsilon}^* \longrightarrow (f, \alpha)_{\epsilon}^*$ .

Pour terminer, il reste à vérifier que certains diagrammes commutent. Pour faire cela, il suffit d'appliquer les foncteurs  $\text{Ev}_p$  et d'invoquer la proposition 4.5.3.

C.Q.F.D

Dans la suite, on notera simplement  $(f, \alpha)^* : \mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  le foncteur  $(f, \alpha)_{\epsilon}^*$  associé à un 1-morphisme  $(f, \alpha)$ . Par le lemme 4.3.17, ce foncteur admet un adjoint à droite  $(f, \alpha)_*$ . Lorsque  $(f, \alpha)$  est lisse argument par argument, on a par la proposition 4.5.17 un isomorphisme  $\epsilon' : (f, \alpha)_{\#}((f, \alpha)^* T_{\mathcal{F}, \mathcal{J}} \otimes -) \simeq T_{\mathcal{F}, \mathcal{J}} \otimes (f, \alpha)_{\#}(-)$  et donc un prolongement  $((f, \alpha)_{\#})_{(\epsilon')^{-1}}$ . Pour vérifier qu'il s'agit bien de l'adjoint à gauche de  $(f, \alpha)_{\epsilon}^*$ , il suffit de vérifier que  $\epsilon$  s'obtient par adjonction de  $\epsilon'$  (ce qui est évident). Dans la suite,  $((f, \alpha)_{\#})_{(\epsilon')^{-1}}$  sera simplement noté  $(f, \alpha)_{\#}$ .

**LEMME 4.5.20** — Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $S$ -schémas. Le foncteur  $T_{\mathcal{F}, \mathcal{J}} \otimes -$  est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures semi-projectives (resp. projectives, injectives)  $\mathbb{A}^1$ -locales.

**DEMONSTRATION** Comme  $T$  est un objet projectivement cofibrant de  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/S, \mathfrak{M})$ ,  $T_{\mathcal{F}, \mathcal{J}}$  est semi-projectivement cofibrant. Ceci prouve le cas non-respé.

Montrons que  $T_{\mathcal{F},\mathcal{J}} \otimes -$  est un foncteur de Quillen à gauche relativement à la structure projective<sup>6</sup> Il faut montrer que  $T_{\mathcal{F},\mathcal{J}} \otimes -$  préserve les cofibrations projectives puisqu'il préserve déjà les cofibrations semi-projectives  $\mathbb{A}^1$ -triviales. Il suffit alors de voir que  $T_{\mathcal{F},\mathcal{J}} \otimes -$  envoie les éléments de

$$\text{Cell}\{(U, i) \otimes (u)_{cst} \mid u : A \rightarrow B \in \mathbf{Cof} \subset \text{Fl}(\mathfrak{M}) \text{ et } (U, i) \in \text{Ob}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}))\}$$

sur des cofibrations projectives. Étant donné l'isomorphisme  $T_{\mathcal{F},\mathcal{J}} \otimes ((U, i) \otimes (u)_{cst}) \simeq (U, i) \otimes \pi_{\mathcal{F},\mathcal{J}}^*(T \otimes (u)_{cst})$ , il suffit de montrer que pour toute cofibration projective  $v : H \longrightarrow K$  de  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/S, \mathfrak{M})$ , la flèche  $(U, i) \otimes \pi_{\mathcal{F},\mathcal{J}}^*(v)$  est une cofibration projective. Cette condition étant stable par composition transfinie, push-out et retraction, on peut supposer que  $v$  est de la forme  $V \otimes (w)_{cst}$  avec  $V$  un  $S$ -schéma lisse et  $w$  une cofibration de  $\mathfrak{M}$ . Le résultat découle alors du fait que  $(U, i) \otimes \pi_{\mathcal{F},\mathcal{J}}^*(V \otimes (w)_{cst}) = (U \times_S V) \otimes (w)_{cst}$ .

Il reste à traiter le cas de la structure injective  $\mathbb{A}^1$ -locale. Il est clair que  $T_{\mathcal{F},\mathcal{J}} \otimes -$  est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$ . Pour montrer qu'il est encore un foncteur de Quillen à gauche après les deux localisations de Bousfield suivant les classes  $\mathcal{L}_\tau$  et  $\mathcal{A}$ , il suffit de vérifier que le foncteur

$$L(T_{\mathcal{F},\mathcal{J}} \otimes -) : \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$$

préserve les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles. Ceci découle du cas non-respé de l'énoncé.

C.Q.F.D

**DEFINITION 4.5.21** — Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $S$ -schémas. La structure semi-projective (resp. projective, injective)  $\mathbb{A}^1$ -stable sur  $\mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  est la structure projective stable sur la catégorie  $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$  déduite de la structure semi-projective (resp. projective, injective)  $\mathbb{A}^1$ -locale  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\tau})$  sur la catégorie  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$ . Cette structure sera notée :

$$(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\mathbb{A}^1-st}) \text{ (resp. } (\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st}), (\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-\mathbb{A}^1-st}))$$

Les flèches de  $\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}$  sont appelées les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences stables. La catégorie homotopique de ces structures  $\mathbb{A}^1$ -stables est notée  $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^T(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ .

**Remarque 4.5.22** — Il existe bien entendu trois autres structures naturelles sur  $\mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  obtenues à partir des trois structures  $\mathbb{A}^1$ -locales en prenant la structure injective sur les  $T$ -spectres.

**THEOREME 4.5.23** — Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas.

1- On a, relativement aux structures semi-projectives  $\mathbb{A}^1$ -stables  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\mathbb{A}^1-st})$ , les deux adjonctions de Quillen suivantes :

(i)  $((f, \alpha)^*, (f, \alpha)_*) : \mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathcal{G}, \mathcal{J})$ ,

(ii)  $(f_{\#}, f^*) : \mathbb{M}_T(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J})$  lorsque  $f$  est cartésien et lisse argument par argument.

2- On a, relativement aux structures projectives  $\mathbb{A}^1$ -locales  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$ , les trois adjonctions de Quillen suivantes :

(i)  $(f^*, f_*) : \mathbb{M}_T(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathcal{G}, \mathcal{J})$ ,

(ii)  $(\alpha_{\#}, \alpha^*) : \mathbb{M}_T(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ ,

(iii)  $((f, \alpha)_{\#}, (f, \alpha)^*) : \mathbb{M}_T(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  lorsque  $(f, \alpha)$  est lisse argument par argument.

3- Enfin,  $(\alpha^*, \alpha_*) : \mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J})$  est une adjonction de Quillen relativement aux structures injectives  $\mathbb{A}^1$ -locales  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-\mathbb{A}^1})$ .

DEMONSTRATION Ceci découle immédiatement du théorème 4.5.14 et du lemme 4.3.34.

C.Q.F.D

On a le résultat suivant :

**THEOREME 4.5.24** — Les associations  $(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \rightsquigarrow \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^T(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  et  $(f, \alpha) \rightsquigarrow L(f, \alpha)^*$  s'étendent naturellement en un 2-foncteur contravariant :

$$\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^T : \mathbf{DiaSch} \longrightarrow \mathbf{Mono}\mathfrak{M}$$

DEMONSTRATION Le fait que les catégories  $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^T(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  soient triangulées et monoïdales symétriques découle des propositions 4.2.76, 4.2.82, 4.4.63 et 4.3.77, des théorèmes 4.3.76 et 4.1.49 et du lemme 4.1.58. De même, le fait que

<sup>6</sup>Il n'y a pas de contradictions avec le fait que  $T_{\mathcal{F},\mathcal{J}}$  est non projectivement cofibrant ! En effet, l'objet unité n'est pas nécessairement projectivement cofibrant.

les foncteurs  $L(f, \alpha)^*$  soient triangulés et monoïdales découle du théorème 4.5.23, de la proposition 4.5.16 et du lemme 4.1.51. Il reste à construire le 2-foncteur en question. Il suffit alors de prendre la composée des 2-foncteurs :

$$\text{DiaSch}/S \xrightarrow{\mathbb{M}_T(-, -)} \mathfrak{ModCat} \xrightarrow{\text{Ho}(-), \mathbb{L}} \mathfrak{Cat}$$

où  $\mathfrak{ModCat}$  désigne la 2-catégorie des catégories de modèles et des foncteurs de Quillen à gauche.

C.Q.F.D

Selon la terminologie de la définition 2.4.12, nous venons de construire un pré-dérivateur algébrique à valeurs dans  $\mathfrak{Mono}\mathfrak{TR}$ . Nous allons entreprendre la vérification des axiomes d'un dérivateur algébrique homotopique stable. L'axiome **DerAlg 0** est trivial. On a également l'axiome **DerAlg 1** :

**LEMME 4.5.25** — *Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un diagramme de  $S$ -schémas. Les foncteurs  $i^* : \mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathcal{F}(i))$  avec  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  préservent et détectent les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences stables.*

**DEMONSTRATION** Montrons d'abord que  $i^*$  préserve les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences stables. On sait que  $i^*$  est un foncteur de Quillen à gauche relativement à la structures semi-projective  $\mathbb{A}^1$ -stable. Il préserve donc les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences stables entre objets semi-projectivement cofibrants. Pour le cas général, on prend  $u : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F} \in \mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}$ . Il existe un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}' & \xrightarrow{u'} & \mathbf{F}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{E} & \xrightarrow{u} & \mathbf{F} \end{array}$$

tel que  $\mathbf{E}'$  et  $\mathbf{F}'$  sont semi-projectivement cofibrants et tel que les flèches verticales sont des équivalences faibles de préfaisceaux niveau par niveau. L'assertion découle alors du fait que  $i^*$  préserve les équivalences faibles de préfaisceaux.

La familles des foncteurs  $i^*$  détecte les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences stables. En effet, soit  $f$  une flèche de  $\mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  qui devient une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence stable après application des foncteurs  $i^*$ . On peut supposer que  $f$  est une fibration relativement à la structure

$$(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$$

Comme  $(i_{\#}, i^*)$  est une adjonction de Quillen relativement à cette structure,  $i^*(f)$  est une fibration triviale pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ . C'est donc une équivalence faible de préfaisceaux niveau par niveau. En d'autres termes, pour tout  $(U, i) \in \text{Ob}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}))$  et  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Ev}_p(f)(U, i)$  est une équivalence faible de  $\mathfrak{M}$ . Le résultat est maintenant clair. C.Q.F.D

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du lemme 4.5.25 :

**COROLLAIRE 4.5.26** — *Soit  $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$  un foncteur entre petites catégories. Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un digramme de  $S$ -schémas. Le foncteur  $\alpha^* : \mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J})$  préserve les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences stables. Il se dérive donc trivialement.*

La proposition suivante n'est autre que les axiomes **DerAlg 2g** et **DerAlg 2d** :

**PROPOSITION 4.5.27** — *Soit  $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$  un 1-morphisme de diagrammes de  $S$ -schémas. Le foncteur  $L(f, \alpha)^* : \text{SH}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \text{SH}(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  admet un adjoint à droite  $R(f, \alpha)_*$ . De plus, lorsque  $f(j)$  est lisse pour tout  $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ , ce même foncteur admet un adjoint à gauche  $L(f, \alpha)_{\#}$ .*

**DEMONSTRATION** C'est une conséquence directe du théorème 4.5.23.

C.Q.F.D

Montrons l'axiome **DerAlg 3** :

**LEMME 4.5.28** — *Reprenons les notations du diagramme (4.93). La transformation  $\alpha^*Rf_* \longrightarrow R(f|_{\mathcal{J}})_*\alpha^*$  est inversible. Supposons de plus que  $f$  est cartésien et lisse argument par argument. Alors,  $L(f|_{\mathcal{J}})_{\#}\alpha^* \longrightarrow \alpha^*Lf_{\#}$  est inversible.*

**DEMONSTRATION** Par le théorème 4.5.23, les foncteurs  $f_*$  et  $(f|_{\mathcal{J}})_*$  sont de Quillen à droite relativement à la structure de modèles  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$ . Il en est de même des foncteurs  $\alpha^*$ . Le résultat découle maintenant du lemme 4.5.7.

La seconde partie de l'énoncé découle aussi du lemme 4.5.7 étant donné que les foncteurs en question sont de Quillen à gauche relativement à la structure semi-projective  $\mathbb{A}^1$ -stable (voir le théorème 4.5.23).

C.Q.F.D

On démontre maintenant l'axiome **DerAlg 4'd** :

**LEMME 4.5.29** — *On reprend les hypothèses et les notations des diagrammes (4.91) et (4.92). Les transformations naturelles  $(\text{id}_{\mathcal{F}(i)}, i)^* \mathbf{R}(f, \alpha)_* \longrightarrow \mathbf{R}(f/i)_*(\text{id}, u_i)^*$  et  $\mathbf{L}(\alpha/i)_{\#} u_i^* \longrightarrow i^* \mathbf{L}\alpha_{\#}$  sont inversibles.*

**DEMONSTRATION** Les lemmes 4.5.5 et 4.5.6 affirment que ces transformations naturelles sont inversibles aux niveaux des préfaisceaux à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ . On déduit qu'elles sont également inversibles au niveau des catégories de modèles  $\mathbb{M}_T(-, -)$ . Il s'agit donc de vérifier qu'elles induisent des isomorphismes sur les foncteurs dérivés.

On traite d'abord la transformation  $(\text{id}_{\mathcal{F}(i)}, i)^* \mathbf{R}(f, \alpha)_* \longrightarrow \mathbf{R}(f/i)_*(\text{id}, u_i)^*$ . Il suffit de montrer que  $(\text{id}, u_i)^*$  préserve les objets fibrants relativement à la structure semi-projective  $\mathbb{A}^1$ -stable  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$ . Cela revient à dire que  $(\text{id}, u_i)_{\#}$  préserve les cofibrations triviales de cette même structure. Pour cela, on aura besoin d'explicitier le foncteur  $(\text{id}, u_i)_{\#}$ . Pour  $K \in \text{Ob}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}/i, \mathcal{J}/i), \mathfrak{M}))$  et  $(V, j) \in \text{Ob}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}))$ , on a :

$$(\text{id}, u_i)_{\#}(K)(V, j) = \underset{(V, j) \rightarrow (X, k); \alpha(k) \rightarrow i}{\text{Colim}} K(X, \alpha(k) \rightarrow i) = \coprod_{\alpha(j) \rightarrow i} K(V, \alpha(j) \rightarrow i)$$

On a donc un isomorphisme canonique  $j^*[(\text{id}, u_i)_{\#}(K)] \simeq \coprod_{\alpha(j) \rightarrow i} [\alpha(j) \rightarrow i]^* K$ . Il est maintenant clair que  $(\text{id}, u_i)_{\#}$  est un foncteur de Quillen à gauche relativement à la structure semi-projective  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr})$ . Étant donné que le foncteur :

$$\mathbf{L}(\text{id}, u_i)_{\#} : \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}/i, \mathcal{J}/i), \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$$

préservé les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles (puisque c'est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures projectives  $\mathbb{A}^1$ -locale), on déduit que  $(\text{id}, u_i)_{\#}$  est aussi un foncteur de Quillen à gauche relativement à  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\mathbb{A}^1})$ . Pour conclure, il reste à appliquer le lemme 4.3.34.

Le cas de la transformation naturelle  $(\alpha/i)_{\#} u_i^* \longrightarrow i^* \alpha_{\#}$  se traite de la même manière. On se ramène à montrer que  $u_i^*$  préserve les cofibrations de la structure  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$ . On montrera plus généralement qu'il est de Quillen à gauche relativement à cette structure. Par le lemme 4.3.34, on peut raisonner sur les préfaisceaux à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ . Comme  $u_i^*$  commute aux colimites, il suffit de montrer que  $u_i^*$  envoie une flèche de la forme  $(U, j) \otimes u_{cst}$  sur une cofibration projective (resp. et triviale) pour tout  $(U, j) \in \text{Ob}(\text{Sm}/F) \times \text{Ob}(\mathcal{J})$  et  $u$  une cofibration (resp. triviale) de  $\mathfrak{M}$ . Soit  $V$  un  $F$ -schéma lisse et  $i \rightarrow \alpha(k) \in \text{Ob}(i \setminus \mathcal{J})$  on a :

$$u_i^*((U, j) \otimes u_{cst})(V, i \rightarrow \alpha(k)) = \text{hom}((V, k), (U, j)) \otimes u_{cst} = \coprod_{i \rightarrow \alpha(j)} \text{hom}((V, i \rightarrow \alpha(k)), (U, i \rightarrow \alpha(j))) \otimes u_{cst}$$

Ceci montre l'égalité  $u_i^*((U, j) \otimes u_{cst}) = \coprod_{i \rightarrow \alpha(j)} (U, i \rightarrow \alpha(j)) \otimes u_{cst}$ . Le résultat est démontré. C.Q.F.D

On résume la discussion par :

**THEOREME 4.5.30** — *Les axiomes **DerAlg 0** à **DerAlg 4** sont vérifiés pour  $\mathbb{SH}$ .*

**DEMONSTRATION** Il reste à voir que  $\mathbb{SH}_{\mathfrak{M}}^T(X, -) : \text{Dia} \longrightarrow \mathfrak{TA}$  est un dérivateur triangulé. Plus précisément, il reste à établir les propriétés 5 et 6 de la définition 2.1.34. Ceci découle immédiatement de la construction de la structure triangulée sur la catégorie homotopique (voir le théorème 4.1.49) et du théorème 4.1.56. C.Q.F.D

On a également les formules de projection :

**PROPOSITION 4.5.31** — **1-** *Soit  $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$  un morphisme cartésien et lisse de  $\mathcal{J}$ -diagrammes de  $S$ -schémas.*

*Pour  $K \in \text{Ob}(\mathbb{M}_T(\mathcal{F}, \mathcal{J}))$  et  $M \in \text{Ob}(\mathbb{M}_T(\mathcal{G}, \mathcal{J}))$ , le morphisme  $\mathbf{L}f_{\#}(\mathbf{L}f^*(K) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} M) \longrightarrow K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}f_{\#}M$  est inversible.*

**2-** *Soit  $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$  un foncteur entre petites catégories et  $X$  un  $S$ -schéma. Pour  $K \in \text{Ob}(\mathbb{M}_T(X, \mathcal{J}))$  et  $M \in$*

*$\text{Ob}(\mathbb{M}_T(X, \mathcal{J}))$ , le morphisme  $\mathbf{L}\alpha_{\#}(\alpha^*(K) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} M) \longrightarrow K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}\alpha_{\#}M$  est inversible.*

**DEMONSTRATION** La première assertion découle de la proposition 4.5.17 et du fait que tous les foncteurs présents sont de Quillen à gauche relativement à la structure semi-projective  $\mathbb{A}^1$ -stable (utiliser que  $f$  est cartésien).

Pour la seconde partie, on utilise le lemme 4.5.29 pour se ramener au cas où  $\mathcal{J} = *$ . Dans ce cas, on montre que pour  $K$  projectivement cofibrant, le foncteur  $\alpha^*(K) \otimes -$  est de Quillen à gauche relativement à structure projective  $\mathbb{A}^1$ -stable. Les détails sont laissés en exercice. C.Q.F.D

### 4.5.3 L'axiome de localité

Pour montrer que  $\mathbb{SH}_{\mathfrak{M}}^T(-)$  est un dérivateur algébrique homotopique et stable (avec  $T$  bien choisi), il reste à vérifier l'axiome **DerAlg 5** qui affirme que  $\mathbb{SH}(-, \mathbf{e})$  est un 2-foncteur homotopique stable. Cette section est consacrée à la preuve de l'axiome de localité. Nous suivrons la méthode de [MV90].

Pour un  $S$ -schéma  $X$ , on notera  $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^T(X) = \mathbb{S}\mathbb{H}_{\mathfrak{M}}^T(X, \mathbf{e})$ . On aura besoin de quelques préliminaires concernant les images directes suivant les immersions fermées. On introduit la topologie  $t_\emptyset$  sur  $\mathbf{Sm}/X$  pour laquelle  $J_{t_\emptyset}(U/X) = \{\text{id}_{U/X} : (U/X) \rightarrow (U/X)\}$  lorsque  $U$  est non vide et  $J_{t_\emptyset}(\emptyset/X) = \{\text{id}_{\emptyset/X} : (\emptyset/X) \rightarrow (\emptyset/X), \emptyset \rightarrow (\emptyset/X)\}$  où  $\emptyset$  désigne le préfaisceau d'ensembles vides et  $(\emptyset/X)$  le  $X$ -schéma vide. On vérifie immédiatement que  $t_\emptyset$  est une topologie sur  $\mathbf{Sm}/X$ . Un préfaisceau  $K$  sur  $\mathbf{Sm}/X$  à valeurs dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est un  $t_\emptyset$ -faisceau (i.e. un faisceau pour la topologie  $t_\emptyset$ ) si et seulement si  $K(\emptyset/X)$  est l'objet final de  $\mathcal{C}$ . Étant donné un préfaisceau  $K$  sur  $\mathcal{C}$ , le faisceau associé  $\mathbf{a}_{t_\emptyset}(F)$  est donné par :

$$U \in \text{Ob}(\mathbf{Sm}/X) \rightsquigarrow (\mathbf{a}_{t_\emptyset}F)(U) = \begin{cases} *_{\mathcal{C}} & \text{si } U \simeq \emptyset/X \\ F(U) & \text{si } U \not\simeq \emptyset/X \end{cases}$$

(où  $*_{\mathcal{C}}$  désigne l'objet final de  $\mathcal{C}$ ). Lorsque  $\mathcal{C}$  est pointée, l'inclusion  $\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/X, \mathcal{C}) \subset \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathcal{C})$  admet un adjoint à droite :

$$\mathbf{b} : \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/X, \mathcal{C})$$

qui à un préfaisceau  $F$  associe le  $t_\emptyset$ -faisceau  $\mathbf{b}(F)$  donné par :  $(\mathbf{b}F)(U) = F(U) \times_{F(\emptyset/X)} *_{\mathcal{C}}$  pour  $U \in \text{Ob}(\mathbf{Sm}/X)$ .

Rappelons que  $\mathfrak{M}$  est notre catégorie de coefficients. C'est une catégorie pointée puisqu'elle est supposée stable. Par le corollaire 4.4.43, on dispose sur  $\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$  de deux structures de modèles  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$  et  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj})$ . En appliquant le lemme 4.4.42 à l'adjonction  $(\mathbf{a}_{t_\emptyset}, inc)$  et aux structures  $\tau$ -locales sur  $\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ , on obtient également deux structures de modèles  $\tau$ -locales sur  $\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ . On les notera  $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-\tau})$  et  $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\tau})$ .

**PROPOSITION 4.5.32** — Soit  $i : Z \longrightarrow X$  une immersion fermée de  $S$ -schémas. Le foncteur :

$$i_* : \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$$

est un foncteur de Quillen à gauche pour les structures injectives  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$  et  $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{\tau-inj})$ .

DEMONSTRATION Le foncteur  $i_* : \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$  admet un adjoint à droite  $i^!$  qui à un préfaisceau  $H$  sur  $\mathbf{Sm}/X$  associe le préfaisceau  $i^!H$  donné par :

$$i^!H : (V \rightarrow Z) \in \text{Ob}(\mathbf{Sm}/Z) \rightsquigarrow \text{Lim}_{U \times_X Z \rightarrow V} H(U)$$

On en déduit que le foncteur  $i_* : \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$  admet un adjoint à droite donné par  $\mathbf{b} \circ i^! \circ inc$ . On le notera encore  $i^!$ .

Les cofibrations de la structure injective sur  $\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(-, \mathfrak{M})$  sont les  $t_\emptyset$ -faisceautisations des cofibrations injectives de préfaisceaux. C'est donc exactement les morphismes de  $t_\emptyset$ -faisceaux  $H \longrightarrow K$  tels que  $H(U) \longrightarrow K(U)$  est une cofibration pour tout  $X$ -schéma lisse  $U$ . De même, un morphisme de  $t_\emptyset$ -faisceaux  $f : H \longrightarrow K$  est une équivalence faible si et seulement si  $f(U)$  est une équivalence faible pour tout  $X$ -schéma  $U$ .

On déduit immédiatement que le foncteur  $i_* : \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$  préserve les cofibrations injectives et les équivalences faibles de la structure  $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$ . C'est donc bien un foncteur de Quillen à gauche.

Il reste à vérifier que  $i_*$  envoie les équivalences  $\tau$ -locales sur des équivalences  $\tau$ -locales. Soit  $u : H \longrightarrow K$  une équivalence  $\tau$ -locale de  $\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M})$ . Soient  $n \in \mathbb{Z}$  et  $A \in \mathcal{E}$ . On a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} i_*\Pi_0(A[-n], H) & \longrightarrow & i_*\Pi_0(A[-n], K) \\ \parallel & & \parallel \\ \Pi_0(A[-n], i_*H) & \longrightarrow & \Pi_0(A[-n], i_*K) \end{array}$$

Il faut donc prouver que  $\mathbf{a}_\tau i_* \Pi_0(A[-n], H) \longrightarrow \mathbf{a}_\tau i_* \Pi_0(A[-n], K)$  est inversible. Le résultat découle immédiatement de la commutation  $\mathbf{a}_\tau \circ i_* \simeq i_* \circ \mathbf{a}_\tau$  pour les  $t_\emptyset$ -faisceaux d'ensembles (voir le lemme 4.5.33 ci-dessous). C.Q.F.D

**LEMME 4.5.33** — Soit  $i : Z \longrightarrow X$  une immersion fermée de  $S$ -schémas. La transformation naturelle  $\mathbf{a}_\tau \circ i_* \longrightarrow i_* \circ \mathbf{a}_\tau$  est inversible lorsqu'elle est évaluée sur les  $t_\emptyset$ -faisceaux d'ensembles.

DEMONSTRATION Soit  $F$  un préfaisceau d'ensembles sur  $\mathbf{Sm}/Z$  et  $U$  un  $X$ -schéma lisse. On a :

$$\mathbf{L}(i_*F)(U) = \text{Colim}_{(U_i \rightarrow U), i \in \text{Cov}_\tau(U)} \text{Eq} \left( \prod_i F(U_i \times_X Z) \rightrightarrows \prod_{i,j} F((U_i \times_U U_j) \times_X Z) \right)$$

où la colimite est prise selon la catégorie directe  $\text{Cov}_\tau(U)$  des familles  $(U_i \rightarrow U)_i$  de morphismes étales qui sont couvrantes pour la topologie  $\tau$ .

Le foncteur évident  $\text{Cov}_\tau(U) \longrightarrow \text{Cov}_\tau(U \times_X Z)$  qui à une famille  $(U_i \rightarrow U)_i$  associe la famille  $(U_i \times_X Z \rightarrow U \times_X Z)$  est cofinal dès que  $U \times_X Z$  est non vide<sup>7</sup>. En effet, soit  $(V_j \rightarrow U \times_X Z)_j$  une famille couvrante pour la topologie  $\tau$  (l'ensemble indexant est donc non vide). Quitte à raffiner la famille en question, on peut supposer qu'il existe pour tout  $j$  un  $U$ -schéma étale  $U_j$  tel que  $V_j = U_j \times_X Z$ . La famille  $(U_j \rightarrow U)_j \coprod \{(U - U \times_X Z) \rightarrow U\}$  est alors un  $\tau$ -recouvrement de  $U$  dont la restriction à  $U \times_X Z$  raffine notre recouvrement de départ (puisque  $\emptyset = (U - U \times_X Z) \times_X Z \rightarrow Z$  se factorise par tous les  $V_j$  et qu'il y en a au moins un).

Il vient que lorsque  $U \times_X Z$  est non vide,  $L(i_*F)(U)$  est isomorphe à :

$$\text{Colim}_{(V_j \rightarrow U \times_X Z)_i \in \text{Cov}(U \times_X Z)} \text{Eq} \left( \prod_i F(V_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(V_i \times_{U \times_X Z} V_j) \right) = LF(U \times_X Z)$$

D'autre part, pour  $F$  un  $t_\emptyset$ -faisceau, on a évidemment  $L(i_*F)(U) = *$  pour  $U \times_X Z \simeq \emptyset/Z$ . Ceci donne  $L(i_*F) \simeq i_*LF$  et donc également un isomorphisme  $a_\tau(i_*F) \simeq i_*a_\tau F$ . On laisse aux lecteurs le soin de vérifier que cet isomorphisme coïncide avec l'isomorphisme canonique de l'énoncé. C.Q.F.D

On a également :

**THEOREME 4.5.34** — Soit  $i : Z \longrightarrow X$  une immersion fermée de  $S$ -schémas. Le foncteur :

$$i_* : \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$$

est un foncteur de Quillen à gauche pour les structures  $\mathbb{A}^1$ -locales injectives  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{\mathbb{A}^1-inj})$ .

DEMONSTRATION Il suffit par la proposition 4.5.32 et la remarque 4.2.59 de montrer que  $Li_*$  envoie les flèches de la forme  $\mathbb{A}^1_V \otimes A \longrightarrow V \otimes A$  (avec  $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$  et  $V$  un  $Z$ -schéma lisse) sur des  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles. Par la preuve de la proposition 4.5.32, on sait que  $i_*$  se dérive trivialement. Il faut donc montrer que :

$$p : i_*(\mathbb{A}^1_V \otimes A) \longrightarrow i_*(V \otimes A)$$

est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible. La flèche  $p$  admet une section  $s$  (la section nulle). Il suffit de montrer que l'identité de  $i_*(A \otimes \mathbb{A}^1_V)$  est  $\mathbb{A}^1$ -homotope à la flèche déduite de  $s \circ p$ . On obtient une telle homotopie en prenant la composée :

$$i_*\mathbb{A}^1_X \otimes (\mathbb{A}^1_V \otimes A) \longrightarrow i_*(\mathbb{A}^1_Z) \otimes i_*(\mathbb{A}^1_V \otimes A) = i_*((\mathbb{A}^1_Z \times \mathbb{A}^1_Z \times_Z V) \otimes A) \xrightarrow{m} i_*((\mathbb{A}^1_Z \times_Z V) \otimes A)$$

avec  $m$  la flèche induite par la multiplication du schéma en anneaux  $\mathbb{A}^1$ . C.Q.F.D

**Remarque 4.5.35** — La preuve de la proposition 4.5.32 et du théorème 4.5.34 montre que le foncteur  $i_* : \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$  preserve les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles. Ce dernier se dérive donc trivialement. On a en particulier des isomorphismes  $Li_* \simeq i_* \simeq Ri_*$ .

Rappelons que le but de cette sous-section est d'établir l'axiome de localité. On commence d'abord par la version instable. Soit une paire d'immersions complémentaires :

$$(4.95) \quad U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} Z$$

avec  $i$  une immersion fermée et  $j$  une immersion ouverte. Soit  $H$  un objet de  $\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ . La composée :

$$(4.96) \quad j\#j^*H \longrightarrow H \longrightarrow i_*i^*H$$

correspond par adjonction à une flèche  $j^*H \longrightarrow j^*i_*i^*H$ . Or, pour tout  $t_\emptyset$ -faisceau  $F$  sur  $\mathbf{Sm}/Z$  on a  $j^*i_*F(U' \rightarrow U) = (i_*F)(U' \rightarrow U \rightarrow X) = F(\emptyset) = *$ . Le préfaisceau  $j^*i_*F$  est donc nul. Ceci montre que la composée (4.96) est nulle. On a donc un carré commutatif de  $t_\emptyset$ -faisceaux :

$$(4.97) \quad \begin{array}{ccc} j\#j^*H & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & i_*i^*H \end{array}$$

<sup>7</sup>Lorsque  $U$  est non vide et que  $U \times_X Z$  est vide, ce foncteur est bien entendu non cofinal!



Le théorème suivant est dû à Morel et Voevodsky [MV90] :

**THEOREME 4.5.36** — *Supposons que  $H$  est un objet projectivement cofibrant de  $\mathbf{Shv}_{t_0}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ . Le carré commutatif (4.97) est homotopiquement cocartésien relativement aux structures de modèles  $\mathbb{A}^1$ -locales.*

Notons d'abord la réduction suivante :

**LEMME 4.5.37** — *Il suffit de prouver le théorème 4.5.36 pour  $H$  de la forme  $a_{t_0}(X' \otimes A_{cst})$  avec  $A$  un objet cofibrant de  $\mathfrak{M}$  et  $X'$  un  $X$ -schéma lisse.*

**DEMONSTRATION** On utilise l'hypothèse que  $\mathfrak{M}$  est stable via la discussion suivante. Supposons donnée une suite de cofibrations (voir la définition 4.1.45) :

$$H_1 \xrightarrow{h} H_2 \xrightarrow{k} \text{Cone}(h) \longrightarrow \text{Cof}(k)$$

avec  $H_1$  un  $t_0$ -faisceau projectivement cofibrant et  $h$  et  $k$  des cofibrations projectives. On considère la structure de Reedy sur  $\underline{\text{HOM}}(\square, \mathbf{Shv}_{t_0}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$  déduite de la structure injective  $\mathbb{A}^1$ -locale sur la catégorie des  $t_0$ -faisceaux et telle que les cofibrations sont détectées argument par argument relativement à  $\square$ . Étant donné que le foncteur  $i_*$  preserve les cofibrations injectives, on déduit une suite de cofibrations dans  $\underline{\text{HOM}}(\square, \mathbf{Shv}_{t_0}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$  dont les sommets sont constitués des carrés (4.97) avec  $H$  remplacé respectivement par  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $\text{Cone}(h)$  et  $\text{Cof}(k)$ . Étant donné que la propriété d'être cocartésien vérifie la propriété de 2 sur 3 dans les triangles distingués, on voit que si la conclusion du théorème 4.5.36 est vraie pour  $H_1$  et  $\text{cone}(h)$ , elle l'est encore pour  $H_2$ .

Supposons le théorème 4.5.36 démontré pour les préfaisceaux de l'énoncé. Rappelons que les cofibrations projectives de  $\mathbf{Shv}_{t_0}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$  sont engendrées par la classe  $\mathcal{C}$  des flèches :

$$a_{t_0}(X' \otimes A_{cst}) \longrightarrow a_{t_0}(X' \otimes B_{cst})$$

avec  $A \longrightarrow B$  une cofibration de  $\mathfrak{M}$  de but  $\beta$ -accessible ( $\beta$  étant un cardinal suffisamment grand) et  $X'$  un  $X$ -schéma lisse. Ainsi, tout objet projectivement cofibrant  $H$  est rétract de  $\Phi_{\mathcal{C}, \beta}(\emptyset \rightarrow H)$  (voir la proposition 4.2.26). Il suffit donc de démontrer le théorème 4.5.36 pour  $\Phi_{\mathcal{C}, \beta}(\emptyset \rightarrow H)$ . Rappelons que cet objet est construit comme la colimite d'une  $\lambda$ -suite :

$$(\emptyset \longrightarrow \Phi_1 \longrightarrow \Phi_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow \Phi_\nu \longrightarrow \Phi_{\nu+1} \longrightarrow \dots)_{\nu \in \lambda}$$

Nous allons montrer par induction transfinie que la conclusion du théorème est vraie pour tous les  $\Phi_\nu$ .

Supposons le résultat vrai pour  $\Phi_\nu$ . L'objet  $\Phi_{\nu+1}$  est le push-out d'un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_i a_{t_0}(X'_i \otimes (A_i)_{cst}) & \longrightarrow & \Phi_\nu \\ \downarrow & & \\ \coprod_i a_{t_0}(X'_i \otimes (B_i)_{cst}) & & \end{array}$$

avec  $u_i : A_i \longrightarrow B_i$  des cofibrations de  $\mathfrak{M}$  et  $X'_i$  des  $X$ -schémas lisses. Il vient que le  $\text{Cone}(\Phi_\nu \rightarrow \Phi_{\nu+1})$  est équivalent à  $\coprod_i a_{t_0}(X'_i \otimes \text{Cof}(u_i)_{cst})$ . En particulier, il rend le carré (4.97) cocartésien. Ceci montre que  $\Phi_{\nu+1}$  rend également le carré (4.97) cocartésien en vue de la discussion du début de la preuve.

Supposons que  $\mu$  est un ordinal limite et que tous les  $\Phi_\nu$  rendent le carré (4.97) cocartésien pour  $\nu \in \mu$ . On dispose alors d'un morphisme de  $\mu$ -suites :

$$\begin{array}{ccccccc} \emptyset & \longrightarrow & \text{Cof}(j_{\#}j^*\Phi_1 \rightarrow \Phi_1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \text{Cof}(j_{\#}j^*\Phi_\nu \rightarrow \Phi_\nu) & \longrightarrow & \text{Cof}(j_{\#}j^*\Phi_{\nu+1} \rightarrow \Phi_{\nu+1}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \emptyset & \longrightarrow & i_*i^*\Phi_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & i_*i^*\Phi_\nu & \longrightarrow & i_*i^*\Phi_{\nu+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Le résultat découle maintenant du lemme 4.2.69 et du fait que les flèches horizontales sont toutes des cofibrations injectives. C.Q.F.D

Nous aurons besoin de faire une courte digression pour établir un résultat technique. Le résultat en question est valable avec  $\mathbf{Sm}/X$  remplacée par une petite catégorie  $\mathcal{S}$  arbitraire et la catégorie de modèles  $\mathfrak{M}$  uniquement supposée présentable par cofibrations. On adoptera donc ces hypothèses pour le lemme 4.5.38 et son corollaire 4.5.39.

**LEMME 4.5.38** — Soit  $F$  un préfaisceau d'ensembles sur une petite catégorie  $\mathcal{S}$ . On définit un objet  $N(F)$  de  $\Delta^{\text{op}}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}))$  qui à  $\underline{n} \in \text{Ob}(\Delta)$  associe :

$$\coprod_{U=(U(0) \rightarrow \dots \rightarrow U(n)) : \underline{n} \rightarrow \mathcal{S}/F} U(0)$$

et à une application croissante  $r : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$  associe le coproduit des flèches :

$$U(0) \longrightarrow U(r(0)) \longrightarrow \coprod_{V:\underline{m} \rightarrow \mathcal{S}/F} V(0)$$

où la seconde flèche est l'identité de la composante correspondante au foncteur composé :  $\underline{m} \rightarrow \underline{n} \rightarrow \mathcal{S}/F$ . On verra  $N(F)$  comme un préfaisceau d'ensembles sur  $\Delta \times \mathcal{S}$ .

Notons  $p : \Delta \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  la projection sur le second facteur. Alors pour tout objet  $A$  cofibrant de  $\mathfrak{M}$ , le morphisme évident :

$$Lp^*(N(F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow F \otimes A_{cst}$$

est un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$ .

**DEMONSTRATION** Nous allons utiliser le formalisme des dérivateurs (voir la sous-section 2.1.2). Pour cela, il sera plus naturel de noter  $p_{\#}$  au lieu de  $p^*$  et  $p^*$  au lieu de  $p_*$ . Avec ces notations, on prouvera que :

$$Lp_{\#}(N(F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow F \otimes A_{cst}$$

est un isomorphisme. On dispose d'un morphisme évident de préfaisceaux d'ensembles  $N(F) \otimes A_{cst} \rightarrow p^*(F \otimes A_{cst})$  tel que pour  $(\underline{n}, T) \in \text{Ob}(\Delta) \times \text{Ob}(\mathcal{S})$ , la flèche  $(N(F) \otimes A_{cst})(\underline{n}, T) \rightarrow (p^*(F \otimes A_{cst}))(\underline{n}, T)$  est le coproduit des :

$$\text{hom}_{\mathcal{S}}(T, U(0)) \otimes A \longrightarrow F(T) \otimes A$$

La flèche de l'énoncé est la composée :

$$Lp_{\#}(N(F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow Lp_{\#}p^*(F \otimes A_{cst}) \xrightarrow{\sim} (F \otimes A_{cst})$$

La dernière flèche est inversible par la proposition 2.1.41.

Pour montrer le lemme, nous allons vérifier que  $(N(F) \otimes A_{cst}) \rightarrow p^*(F \otimes A)$  induit une équivalence d'homotopie (au sens de la définition 2.1.56) chaque fois qu'on l'évalue sur  $T \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ . La flèche  $(N(F) \otimes A_{cst})(-, T) \rightarrow p^*(F \otimes A_{cst})(-, T)$  qui vit dans  $\mathbf{PreShv}(\Delta, \mathfrak{M})$ , est donnée au niveau  $\underline{n} \in \text{Ob}(\Delta)$  par :

$$\coprod_{T \rightarrow U(0), U:\underline{n} \rightarrow \mathcal{S}/F} A \longrightarrow \coprod_{T \rightarrow F} A$$

qui s'écrit de manière plus suggestive :

$$\coprod_{T \rightarrow U_0 \rightarrow U_1 \rightarrow \dots \rightarrow U_n \rightarrow F} A \longrightarrow \coprod_{T \rightarrow F} A$$

On voit alors que la flèche  $(N(F) \otimes A_{cst})(T, -) \rightarrow p^*(F \otimes A_{cst})(T, -)$  possède une retraction :

$$\coprod_{T \rightarrow F} A \xrightarrow{\sim} \coprod_{T=T=\dots=T \rightarrow F} A \subset \coprod_{T \rightarrow U(0), U:\underline{n} \rightarrow \mathcal{S}/F} A$$

Pour conclure, il reste à montrer que l'identité de  $(N(F) \otimes A_{cst})(-, T)$  est homotope, au sens de la définition 2.1.56, à l'endomorphisme qui envoie identiquement le  $(T \rightarrow U_0 \rightarrow \dots \rightarrow U_n \rightarrow F)$ -ième facteur  $A$  sur le  $(T = T = \dots = T \rightarrow F)$ -ième facteur. Une telle homotopie est donnée par un morphisme dans  $\mathbf{PreShv}(\Delta/\underline{1}, \mathfrak{M})$  qui à  $r : \underline{n} \rightarrow \underline{1}$  associe la composée :

$$\left( \coprod_{T \rightarrow U_0 \rightarrow \dots \rightarrow U_n \rightarrow F} A \right) \longrightarrow \left( \coprod_{T \rightarrow U_0 \rightarrow \dots \rightarrow U_{i_r} \rightarrow F} A \right) \longrightarrow \left( \coprod_{T \rightarrow U_0 \rightarrow \dots \rightarrow U_{i_r} = \dots = U_{i_r} \rightarrow F} A \right) \subset \left( \coprod_{T \rightarrow U_0 \rightarrow \dots \rightarrow U_n \rightarrow F} A \right)$$

avec  $i_r \in \mathbf{n} \cup \{-1\}$  le plus grand entier tel que  $r(i_r) = 0$  (avec les conventions  $r(-1) = 0$  et  $U_{-1} = T$ ). C.Q.F.D

On obtient facilement le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 4.5.39** — Soient  $\mathcal{S}$  une petite catégorie et  $G \longrightarrow F$  un morphisme de préfaisceaux d'ensembles sur  $\mathcal{S}$ . Notons  $G_F$  le préfaisceau d'ensembles sur  $\mathcal{S}/F$  qui à une flèche  $s : U \rightarrow F \in \text{Ob}(\mathcal{S}/F)$  associe le produit fibré  $G(U) \times_{F(U)} *$  avec  $* \longrightarrow F(U)$  l'application qui pointe la section  $s$ .

Notons  $p_F : \mathcal{S}/F \longrightarrow \mathcal{S}$  le foncteur évident et  $p_F^* : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, -) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}/F, -)$  le foncteur de composition à droite par  $p_F$  (c'est la convention des dérivateurs de Grothendieck). Pour tout objet cofibrant  $A$  de  $\mathfrak{M}$ , le morphisme évident  $\mathbf{L}(p_F)_\#(G_F \otimes A_{cst}) \longrightarrow G \otimes A_{cst}$  est inversible dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$ .

DEMONSTRATION Considérons le préfaisceau d'ensembles  $N(G_F)$  sur  $\mathbf{\Delta} \times \mathcal{S}/F$ . Notons comme dans le lemme 4.5.38,  $p$  les projections sur le second facteur  $\mathbf{\Delta} \times (-) \longrightarrow (-)$ . On sait par le lemme 4.5.38 que le morphisme canonique  $\mathbf{L}p_\#(N(G_F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow G_F \otimes A_{cst}$  est inversible. Il suffira donc de montrer que la flèche :

$$\mathbf{L}(p_F)_\# \mathbf{L}p_\#(N(G_F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow G \otimes A_{cst}$$

est inversible. On a clairement  $p_\# \circ (p_F \times \text{id}_\mathbf{\Delta})_\# \simeq (p_F)_\# \circ p_\#$ . Il vient qu'il suffit de prouver que :

$$\mathbf{L}p_\# \mathbf{L}(p_F \times \text{id}_\mathbf{\Delta})_\#(N(G_F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow G \otimes A_{cst}$$

est inversible. En appliquant encore une fois le lemme 4.5.38, on se ramène à montrer que la flèche évidente :

$$\mathbf{L}(p_F \times \text{id}_\mathbf{\Delta})_\#(N(G_F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow N(G) \otimes A_{cst}$$

est inversible. Il suffit de voir que pour tout  $\mathbf{n} \in \text{Ob}(\mathbf{\Delta})$ , la flèche :

$$\mathbf{L}(p_F)_\#(N(G_F)(\mathbf{n}) \otimes A_{cst}) \longrightarrow N(G)(\mathbf{n}) \otimes A_{cst}$$

est inversible. Étant donné que le préfaisceau  $N(G_F)(\mathbf{n})$  est un coproduit de préfaisceaux représentables, il reste à voir que  $(p_F)_\#(N(G_F)(\mathbf{n})) \simeq N(G)(\mathbf{n})$ . Ceci découle immédiatement de la définition de  $N(-)$  et de l'isomorphisme de catégories  $(\mathcal{S}/F)/G_F \simeq (\mathcal{S}/G)$ . C.Q.F.D

On reprend les hypothèses du théorème 4.5.36. De la digression précédente, on utilisera uniquement le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 4.5.40** — Soit  $G \longrightarrow F$  un morphisme de préfaisceaux d'ensembles sur  $\mathbf{Sm}/X$ . Pour une section  $s : Y \longrightarrow F$  avec  $Y$  un  $X$ -schéma lisse, on note  $T_{Y,s}$  le préfaisceau d'ensembles sur  $\mathbf{Sm}/Y$  défini par :

$$T_{Y,s} = p_Y^* G \times_{p_Y^* F} Y$$

avec  $p_Y$  la projection structurale de  $Y$  sur  $X$  et la flèche  $Y \longrightarrow p_Y^* F$  utilisée dans le produit fibré est l'adjointe de  $(p_Y)_\# Y \simeq Y \xrightarrow{s} F$ .

Soit  $A$  un objet cofibrant de  $\mathfrak{M}$  et supposons que pour tout  $X$ -schéma lisse  $Y$  et toute section  $s \in F(Y)$  le morphisme :

$$T_{Y,s} \otimes A_{cst} \longrightarrow Y \otimes A_{cst}$$

est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible de  $\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/Y, \mathfrak{M})$ . Alors,  $G \otimes A_{cst} \longrightarrow F \otimes A_{cst}$  est aussi une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible.

DEMONSTRATION La catégorie  $(\mathbf{Sm}/X)/F$  est un site pour la topologie  $\tau$  induite de celle de  $\mathbf{Sm}/X$ . On dispose donc d'une structure de modèles projective  $\tau$ -locale  $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\tau})$  sur  $\mathbf{PreShv}((\mathbf{Sm}/X)/F, \mathfrak{M})$ . La donnée pour  $(Y/X) \rightarrow F \in \text{Ob}((\mathbf{Sm}/X)/F)$  du petit site  $(\mathbf{Et}/Y, \tau)$  est une  $P$ -structure sur  $(\mathbf{Sm}/X)/F$ . Le foncteur continu  $p_F : (\mathbf{Sm}/X)/F \longrightarrow \mathbf{Sm}/X$  est compatible aux  $P$ -structures étales. On dispose par le théorème 4.4.61 d'une adjonction de Quillen :

$$(4.98) \quad ((p_F)_\#, (p_F)^*) : \mathbf{PreShv}((\mathbf{Sm}/X)/F, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$$

pour les structures projectives  $\tau$ -locales. On peut localiser la structure  $\tau$ -locale sur  $\mathbf{PreShv}((\mathbf{Sm}/X)/F, \mathfrak{M})$  suivant la classe  $\mathcal{A}$  des flèches  $((Y/X) \rightarrow F) \otimes A_{cst} \longrightarrow ((\mathbb{A}_Y^1/X) \rightarrow F) \otimes A_{cst}$  avec  $Y$  un  $X$ -schéma lisse et  $A$  un objet

cofibrant de  $\mathfrak{M}$ . On obtient ainsi la structure projective  $\mathbb{A}^1$ -locale  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1})$ . Il est facile de voir que les foncteurs évidents

$$(4.99) \quad ((Y/X) \rightarrow F)^* : \mathbf{PreShv}((\mathbf{Sm}/X)/F, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/Y, \mathfrak{M}), \text{ avec } (Y/X) \rightarrow F \in \text{Ob}((\mathbf{Sm}/X)/F)$$

préservent les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles. L'analogie de la proposition 4.5.11 reste vrai pour  $\mathbf{PreShv}((\mathbf{Sm}/X)/F, \mathfrak{M})$ . Il est facile d'en déduire que la famille des foncteurs (4.99) détecte également les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles. Enfin, la formule  $(p_F)_\#(((Y/X) \rightarrow F) \otimes A_{cst}) = (Y/X) \otimes A_{cst}$ , montre que (4.98) est encore une adjonction de Quillen pour les structures projectives  $\mathbb{A}^1$ -locales.

Il est maintenant facile de déduire l'énoncé du corollaire 4.5.39. En effet, la flèche  $G \otimes A_{cst} \longrightarrow F \otimes A_{cst}$  s'identifie au  $L(p_F)_\#$  de la flèche :

$$(4.100) \quad G_F \otimes A_{cst} \longrightarrow * \otimes A_{cst}$$

Il suffit donc de prouver que (4.100) est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible de  $\mathbf{PreShv}((\mathbf{Sm}/X)/F, \mathfrak{M})$ . Comme (4.99) détectent les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles, il suffit de considérer les restrictions de (4.100) à  $\mathbf{Sm}/Y$  suivant les différentes sections  $s : (Y/X) \rightarrow F$ . Ces restrictions sont données par  $T_{Y,s} \otimes A_{cst} \longrightarrow Y \otimes A_{cst}$ . Le corollaire est prouvé. C.Q.F.D

On peut maintenant attaquer la preuve du théorème 4.5.36. On se fixe donc un objet cofibrant  $A$  de  $\mathfrak{M}$  et un  $X$ -schéma lisse  $X'$ . On forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' & \xleftarrow{i'} & Z' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Z \end{array}$$

On veut montrer que le carré suivant :

$$(4.101) \quad \begin{array}{ccc} a_{t_\emptyset}(U' \otimes A_{cst}) & \longrightarrow & a_{t_\emptyset}(X' \otimes A_{cst}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & i_* a_{t_\emptyset}(Z' \otimes A_{cst}) \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien (en effet, les foncteurs  $j_\#, j^*$  et  $i^*$  commutent aux foncteurs  $a_{t_\emptyset}$ ). Il serait plus aisé de travailler avec la version suivante :

**LEMME 4.5.41** — *Il existe un carré commutatif de préfaisceaux d'ensembles :*

$$\begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & i_* Z' \end{array}$$

où la flèche horizontale inférieure est donnée par l'unique élément  $\text{hom}(U, i_* Z') = \text{hom}(\emptyset, Z')$ . De plus, pour que le carré (4.101) soit homotopiquement cocartésien il suffit que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} U' \otimes A_{cst} & \longrightarrow & X' \otimes A_{cst} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \otimes A_{cst} & \longrightarrow & i_* Z' \otimes A_{cst} \end{array}$$

le soit (dans  $\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$ ).

**DEMONSTRATION** La commutation du carré de préfaisceaux d'ensembles découle du fait que  $\text{hom}(U', i_* Z') = *$ , i.e., du fait qu'il y a une seule flèche de  $U'$  vers  $i_* Z'$ . Pour la dernière assertion, il suffit de remarquer que le push-out de :

$$\begin{array}{ccc} U \otimes A_{cst} & \longrightarrow & i_* Z' \otimes A_{cst} \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$$

s'identifie canoniquement à  $i_* a_{t_0}(i_* Z' \otimes A_{cst})$ .

C.Q.F.D

Nous sommes ramenés à montrer que le morphisme de préfaisceaux :

$$(4.102) \quad [X' \coprod_{U'} U] \otimes A_{cst} \longrightarrow i_* Z' \otimes A_{cst}$$

est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible. Pour un  $X$ -schéma lisse  $W$  nous avons :

$$[X' \coprod_{U'} U](W) = \text{hom}(W, X') \prod_{\text{hom}(W, U')} \text{hom}(W, U) = \begin{cases} \text{hom}(W, X') & \text{si } W \times_X Z \neq \emptyset \\ * & \text{si } W \times_X Z = \emptyset \end{cases}$$

On applique le corollaire 4.5.40 à (4.102). Il suffit alors de montrer pour une section  $s : Y \longrightarrow i_* Z'$  qu'un certain morphisme de préfaisceaux :

$$T_{X', Y, s} \otimes A_{cst} \longrightarrow Y \otimes A_{cst}$$

est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible de  $\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/Y, \mathfrak{M})$ . Un calcul facile montre que :

$$T_{X', Y, s}(P) = \begin{cases} \text{hom}_X(P, X') \times_{\text{hom}_Z(P \times_X Z, Z')} * & \text{si } P \times_X Z \neq \emptyset \\ * & \text{si } P \times_X Z = \emptyset \end{cases}$$

où  $P$  est un  $Y$ -schéma lisse et le produit fibré est pris suivant l'application  $* \rightarrow \text{hom}_Z(P \times_X Z, Z')$  qui pointe la composée :

$$P \times_X Z \longrightarrow Y \times_X Z \xrightarrow{s} Z'$$

Remarquons d'autre part que le préfaisceau  $T_{X', Y, s}$  coïncide avec  $T_{X' \times_X Y, Y, (\text{id}, s) : Y \times_X Z \rightarrow Y \times_X Z'}$ . On peut donc supposer que  $Y = X$ . Il nous reste à montrer la proposition :

**PROPOSITION 4.5.42** — Soit  $X'$  un  $X$ -schéma lisse et soit  $s : Z \longrightarrow X'$  une section partielle définie sur  $Z$ . On note  $T_{X', s}$  le préfaisceau d'ensembles défini par :

$$T_{X', s}(P) = \begin{cases} \text{hom}_X(P, X') \times_{\text{hom}(P \times_X Z, Z')} * & \text{si } P \times_X Z \neq \emptyset \\ * & \text{si } P \times_X Z = \emptyset \end{cases}$$

Alors la flèche  $T_{X', s} \otimes A_{cst} \longrightarrow X \otimes A_{cst}$  est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible.

DEMONSTRATION On procède en trois étapes.

*Étape 1 :* Soit  $(u_i : X_i \longrightarrow X)_i$  une famille de morphismes étales, couvrante pour la topologie  $\tau$ . On note  $Z_i, X'_i$  et  $s_i$  les pull-back de  $Z, X'$  et  $s$  suivant  $u_i$ . Le préfaisceau  $u_i^*(T_{X', s})$  s'identifie canoniquement à  $T_{X'_i, s_i}$ . Ainsi, par le lemme 4.5.43 ci-dessous, il suffit de prouver la proposition pour chaque  $X_i$ . Quitte à choisir un recouvrement suffisamment fin, on peut alors supposer que :

- (i)  $X$  est affine,
- (ii)  $s : Z \longrightarrow X'$  admet un voisinage affine dans  $X'$ ,
- (iii) le faisceau normal  $\mathcal{N}_s$  de l'immersion  $s$  est libre.

Nous prouverons la proposition sous les hypothèses ci-dessus.

*Étape 2 :* Soient  $r : X'' \longrightarrow X'$  un morphisme étale et  $s$  et  $s'$  des sections définies sur  $Z$  telles que le triangle suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{s'} & X'' \\ & \searrow s & \downarrow r \\ & & X' \end{array}$$

On dispose alors d'un morphisme évident de préfaisceaux  $T_{X'', s'} \longrightarrow T_{X', s}$ . Montrons que ce morphisme induit un isomorphisme sur les faisceaux associés (pour la topologie  $\tau$ ). Il suffit de vérifier cela sur les points de la topologie Nisnevich. Soit  $Y \longrightarrow X$  le localisé hensélien d'un point dans un  $X$ -schéma lisse. Si  $Y \times_X Z$  est non vide, on définit une application inverse :

$$T_{X', s}(Y) \longrightarrow T_{X'', s'}(Y)$$

de la manière suivante. Soit  $f : Y \longrightarrow X'$  un morphisme de  $X$ -schémas tel que le triangle :

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Z & \xrightarrow{f \times_X Z} & Z' \\ \downarrow & \nearrow s & \\ Z & & \end{array}$$

est commutatif. Le carré ci-dessous est aussi commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Y \times_X Z & \longrightarrow & Y & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ Z & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

Ceci donne une section partielle  $Y \times_X Z \longrightarrow Y \times_{X'} X''$  du morphisme étale  $Y \times_{X'} X'' \longrightarrow Y$ . Comme  $Y$  est supposé hensélien, cette section se prolonge uniquement à  $Y$ . On note  $r_f : Y \longrightarrow Y \times_{X'} X''$  le morphisme ainsi obtenu. On définit alors  $f'$  par la composée  $Y \xrightarrow{r_f} Y \times_{X'} X'' \longrightarrow X''$ . On vérifie aisément que l'association  $f \rightsquigarrow f'$  est bien un inverse à droite et à gauche de  $T_{X'',s'}(Y) \longrightarrow T_{X',s}(Y)$ .

Étape 3 : En utilisant les hypothèses (i), (ii) et (iii) de l'étape 1, on peut construire un morphisme étale  $X'_0 \longrightarrow \mathbb{A}_X^n$  avec  $X'_0$  un voisinage affine de  $s$  dans  $X'$  et tel que la composée :

$$Z \longrightarrow X'_0 \longrightarrow \mathbb{A}_X^n$$

est la section nulle. En utilisant l'étape 2, on est ramené à traiter le cas où  $X' = \mathbb{A}_X^n$  et  $s$  la section nulle. On dispose d'une application :

$$T_{\mathbb{A}_X^n,0} \times \mathbb{A}_X^1 \longrightarrow T_{\mathbb{A}_X^n,0}$$

qui à un couple  $(f, t) \in T_{\mathbb{A}_X^n,0}(Y) \times \mathbb{A}_X^1(Y)$  associe la composée :

$$Y \longrightarrow \mathbb{A}_X^n \times \mathbb{A}_X^1 \xrightarrow{(x_1, \dots, x_n, t) \rightarrow (tx_1, \dots, tx_n)} \mathbb{A}_X^n$$

Cette application fournit une homotopie entre l'identité de  $T_{X',s}$  et l'application nulle.

C.Q.F.D

Le résultat suivant à été utilisé dans la première étape de la preuve précédente :

**LEMME 4.5.43** — Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $u : U \longrightarrow X$  morphisme lisse couvrant pour la topologie  $\tau$ . Le foncteur

$$u^* : \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/U, \mathfrak{M})$$

préserve et détecte les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles.

DEMONSTRATION Rappelons que  $u^* \simeq (c_u)_*$  avec  $c_u$  le foncteur de composition à droite par  $u$ . Le fait que  $(c_u)_*$  préserve les équivalences  $\tau$ -locales est clair. Pour montrer que  $(c_u)_*$  détecte les équivalences  $\tau$ -locales, il suffit de remarquer que  $(c_u)_*$  commute au foncteur de faisceautisation et qu'un morphisme de faisceaux d'ensembles  $a : H \longrightarrow K$  sur  $\mathbf{Sm}/X$  est un isomorphisme si et seulement si  $u^*(a)$  est un isomorphisme (car  $u$  est couvrante).

Soit  $f : H \longrightarrow K$  une flèche de  $\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ . On suppose que  $u^*(f)$  est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible. On peut supposer que  $H$  et  $K$  sont fibrants pour la structure  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1})$ . Comme  $u^*$  est de Quillen à droite relativement à cette structure, on déduit que  $u^*(f)$  est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible entre objets  $\mathbb{A}^1$ -fibrants. C'est donc une équivalence  $\tau$ -locale. Ceci montre que  $f$  est aussi une équivalence  $\tau$ -locale.

C.Q.F.D

Notons le corollaire suivant du théorème 4.5.34 :

**COROLLAIRE 4.5.44** — Soient  $i : Z \longrightarrow X$  une immersion fermée de  $S$ -schémas et  $j$  l'immersion ouverte complémentaire. Le couple de foncteurs  $(Li^*, j^*)$  est conservatif sur  $\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$ . De plus, le morphisme de counité  $Li^* Ri_* \longrightarrow \text{id}$  est inversible.

DEMONSTRATION La première assertion découle du 2-triangle distingué :

$$(4.103) \quad Lj_{\#} j^* \longrightarrow \text{id} \longrightarrow Ri_* Li^* \longrightarrow$$

déduit du carré homotopiquement cocartésien et du fait que  $Ri_* = i_*$  sur les  $t_\theta$ -faisceaux (On utilise ici l'équivalence de catégories  $\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})) \simeq \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{Shv}_{t_\theta}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$ ). Pour montrer la seconde assertion, on applique le triangle (4.103) à  $i_*$  et on utilise que  $j^*i_* = 0$  pour déduire que  $i_* \xrightarrow{\eta} i_*Li^*i_*$  est inversible. Il vient que  $i_*Li^*i_* \xrightarrow{\delta} i_*$  est aussi inversible. Pour terminer, il reste à montrer que le foncteur  $i_*$  détecte les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles sur les  $t_\theta$ -faisceaux. Soit donc  $f : H \longrightarrow K$  une flèche de  $\mathbf{Shv}_{t_\theta}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M})$  qui devient une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible après application de  $i_*$ . Comme  $i_*$  préserve les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles, on peut supposer que  $H$  et  $K$  sont projectivement  $\mathbb{A}^1$ -fibrants. Il vient que  $i_*(f)$  est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence stable entre objets  $\mathbb{A}^1$ -fibrants. C'est donc une équivalence de préfaisceaux. Le résultat découle maintenant du fait que tout  $Z$ -schéma lisse est localement pour la topologie de Nisnevich isomorphe au pull-back d'un  $X$ -schéma lisse par l'immersion  $i$ . C.Q.F.D

Il reste à déduire l'analogie stable du théorème 4.5.36. Soit  $X$  un  $S$ -schéma. L'équivalence de Quillen à gauche  $a_{t_\theta} : \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\theta}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$  (relativement aux structures  $\mathbb{A}^1$ -locales) induit une équivalence de Quillen à gauche :

$$a_{t_\theta} : \mathbf{Spect}_{T_X}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{a_{t_\theta}(T_X)}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\theta}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$$

Pour une immersion fermée  $i : Z \longrightarrow X$ , on dispose d'une transformation naturelle

$$(4.104) \quad T_X \otimes i_*(-) \longrightarrow i_*(T_Z \otimes -)$$

qui induit le prolongement  $i_* : \mathbf{Spect}_{T_Z}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T_X}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$  Le lecteur vérifie facilement que (4.104) induit une transformation naturelle :

$$(4.105) \quad a_{t_\theta}(T_X) \otimes i_*(-) \longrightarrow i_*(a_{t_\theta}(T_Z) \otimes -)$$

où le produit tensoriel est pris dans la catégorie des  $t_\theta$ -faisceaux. On obtient de plus un carré commutatif de catégories :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spect}_{a_{t_\theta}(T_Z)}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\theta}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M})) & \xrightarrow{i_*} & \mathbf{Spect}_{a_{t_\theta}(T_X)}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\theta}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Spect}_{T_Z}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M})) & \xrightarrow{i_*} & \mathbf{Spect}_{T_X}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les inclusions évidentes (qui sont donc des équivalences de Quillen à droite). On a le théorème suivant :

**THEOREME 4.5.45** — *Soit  $i : Z \longrightarrow X$  une immersion fermée de  $S$ -schémas. Le foncteur :*

$$(4.106) \quad i_* : \mathbf{Spect}_{a_{t_\theta}(T_Z)}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\theta}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{a_{t_\theta}(T_X)}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\theta}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$$

*est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures injectives stables sur les spectres déduites des structures injectives  $\mathbb{A}^1$ -locales ( $\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}$ ,  $\mathbf{Cof}_{inj}$ ,  $\mathbf{Fib}_{inj-\mathbb{A}^1}$ ) sur les catégories de  $t_\theta$ -faisceaux.*

**DEMONSTRATION** Le foncteur (4.106) admet un adjoint à droite (voir le lemme 4.5.46 ci-dessous). Le fait que (4.106) préserve les cofibrations injectives et les cofibrations injectives  $\mathbb{A}^1$ -triviales niveau par niveau découle du théorème 4.5.34. Il reste à voir que (4.106) envoie les flèches de la forme  $\omega_K^p$  (voir la page 484) sur des  $\mathbb{A}^1$ -équivalences stables pour tout  $K \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Shv}_{t_\theta}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M}))$  injectivement cofibrant et  $p \in \mathbb{N}$ . On dispose d'un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sus}_{a_{t_\theta}(T_X), \Sigma}^{p+1}(a_{t_\theta}(T_X) \otimes i_*K) & \xrightarrow{\omega_{i_*K}^p} & \mathbf{Sus}_{a_{t_\theta}(T_X), \Sigma}^p(i_*K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ i_*\mathbf{Sus}_{a_{t_\theta}(T_Z), \Sigma}^{p+1}(a_{t_\theta}(T_Z) \otimes K) & \xrightarrow{i_*\omega_K^p} & i_*\mathbf{Sus}_{a_{t_\theta}(T_Z), \Sigma}^p(K) \end{array}$$

Il suffira de montrer que les flèches verticales sont des  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles niveau par niveau. On se ramène ainsi à montrer que les flèches :

$$(4.107) \quad a_{t_\theta}(T_X^{\otimes r}) \otimes i_*K \longrightarrow i_*(a_{t_\theta}(T_Z^{\otimes r}) \otimes K)$$

sont des  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles. Notons  $j$  l'immersion ouverte complémentaire. Le couple de foncteurs  $(Li^*; j^*)$  est conservatif par le corollaire 4.5.44. Il suffit donc de prouver que :

(4.108)

$$j^*[a_{t_0}(T_X^{\otimes r}) \otimes i_*K] \longrightarrow j^*[i_*(a_{t_0}(T_Z^{\otimes r}) \otimes K)] \quad \text{et} \quad Li^*[a_{t_0}(T_X^{\otimes r}) \otimes i_*K] \longrightarrow Li^*[i_*(a_{t_0}(T_Z^{\otimes r}) \otimes K)]$$

sont inversibles. La flèche de gauche est l'unique flèche entre objets nuls puisque  $j^*i_* = 0$ . Pour la seconde flèche, on considère le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Li^*[a_{t_0}(T_X^{\otimes r}) \otimes i_*K] & \longrightarrow & Li^*[i_*(a_{t_0}(T_Z^{\otimes r}) \otimes K)] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \\ a_{t_0}(T_Z^{\otimes r}) \otimes Li^*i_*K & \longrightarrow & a_{t_0}(T_Z^{\otimes r}) \otimes K \end{array}$$

Le résultat découle alors du fait que la counité de  $(Li^*, i_*)$  est inversible (toujours par le corollaire 4.5.44). C.Q.F.D

**LEMME 4.5.46** — *On garde les hypothèses du théorème 4.5.45. Le foncteur (4.106) admet un adjoint à droite.*

DEMONSTRATION Soit  $\mathbf{E}$  un  $a_{t_0}(T_X)$ -spectre symétrique à valeurs dans  $\mathbf{Shv}_{t_0}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ . On définit une suite symétrique  $(\mathbf{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathbf{Shv}_{t_0}(\mathbf{Sm}/Z, \mathfrak{M})$  par :

$$(4.109) \quad \mathbf{F}_n = \text{Eq} \left( \prod_{k \in \mathbb{N}} \underline{\text{Hom}}_g(a_{t_0}(T_Z)^{\otimes k}, i^! \mathbf{E}_{k+n}) \rightrightarrows \prod_{l \in \mathbb{N}} \underline{\text{Hom}}_g(a_{t_0}(T_Z)^{\otimes l}, i^! \underline{\text{Hom}}_g(a_{t_0}(T_X), \mathbf{E}_{l+1+n})) \right)$$

où  $\Sigma_n$  opère sur  $\mathbf{F}_n$  par les restrictions suivant  $1 \times \Sigma_n \subset \Sigma_m \times \Sigma_n \subset \Sigma_{m+n}$  de l'action de  $\Sigma_{m+n}$  sur  $\mathbf{E}_{m+n}$ . Les deux flèches de (4.109) sont données par l'adjoint du morphisme d'assemblage du  $a_{t_0}(T_X)$ -spectre  $\mathbf{E}$  et par la composée :

$$\underline{\text{Hom}}_g(a_{t_0}(T_Z)^{\otimes k}, i^!(-)) \simeq \underline{\text{Hom}}_g(a_{t_0}(T_Z)^{\otimes k-1}, \underline{\text{Hom}}_g(a_{t_0}(T_Z), i^!(-))) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(a_{t_0}(T_Z)^{\otimes k-1}, i^! \underline{\text{Hom}}_g(a_{t_0}(T_X), -))$$

On vérifie facilement que le produit des flèches :

$$\mathbf{F}_n \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(a_{t_0}(T_Z)^{\otimes k}, i^! \mathbf{E}_{k+n}) \simeq \underline{\text{Hom}}_g(a_{t_0}(T_Z), \underline{\text{Hom}}_g(a_{t_0}(T_Z)^{\otimes k-1}, i^! \mathbf{E}_{k-1+1+n}))$$

se factorise par le sous-objet  $\underline{\text{Hom}}_g(a_{t_0}(T_Z), \mathbf{F}_{n+1})$ . On obtient ainsi un  $a_{t_0}(T_Z)$ -spectre symétrique  $\mathbf{F}$ . Le lecteur vérifiera que le foncteur  $\text{hom}(i_*(-), \mathbf{E})$  est représenté par  $\mathbf{F}$ . C.Q.F.D

On a enfin l'axiome de localité pour les catégories  $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^T(-)$  :

**COROLLAIRE 4.5.47** — *Soient  $i : Z \longrightarrow X$  une immersion fermée de  $S$ -schémas et  $j$  l'immersion ouverte complémentaire. Le couple de foncteurs  $(Li^*, j^*)$  est conservatif sur  $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^T(X)$ . De plus, le morphisme de counité  $Li^*Ri_* \longrightarrow \text{id}$  est inversible.*

DEMONSTRATION Montrons d'abord la première assertion. Si  $\mathbf{E}$  est un  $a_{t_0}(T_X)$ -spectre projectivement cofibrant à valeurs dans  $\mathbf{Shv}_{t_0}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ , le carré commutatif :

$$(4.110) \quad \begin{array}{ccc} j_{\#}j^*\mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & i_*i^*\mathbf{E} \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien niveau par niveau. Comme  $i_*$  préserve les  $\mathbb{A}^1$ -équivalences stables, il se dérive trivialement. On déduit ainsi un 2-triangle distingué dans  $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^T(X)$  :

$$(4.111) \quad Lj_{\#}j^* \longrightarrow \text{id} \longrightarrow Ri_*Li^* \longrightarrow$$

Ceci montre que le couple de foncteurs  $(Li^*, j^*)$  est conservatif. La seconde assertion découle de son analogue instable (et du fait que  $i_*$  se dérive trivialement pour les  $t_0$ -faisceaux). C.Q.F.D



### 4.5.4 Fin de la vérification des axiomes

Il nous reste à montrer le théorème de changement de base par un morphisme lisse, l'axiome d'homotopie et l'axiome de stabilité.

**PROPOSITION 4.5.48** — *Soit un carré cartésien de  $S$ -schémas :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec  $f$  lisse. Le morphisme de changement de base  $Lf'_\#Lg'^* \longrightarrow Lg^*Lf_\#$  est inversible.

DEMONSTRATION Étant donné que les quatre foncteurs  $f_\#, g^*, g'^*$  et  $f'_\#$  sont de Quillen à gauche relativement à la structure projective  $\mathbb{A}^1$ -stable  $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$ , il suffit de démontrer que la transformation naturelle  $f'_\#g'^* \longrightarrow g^*f_\#$  est inversible au niveau des préfaisceaux à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ . Étant donné que les quatre foncteurs en question commutent aux petites colimites, il suffit d'évaluer en  $U' \otimes A_{cst}$  avec  $U'$  un  $X'$ -schéma lisse et  $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ . On obtient alors la flèche :

$$(U' \otimes_{X'} Y' \rightarrow Y' \rightarrow Y) \otimes A_{cst} \longrightarrow ((U' \rightarrow X' \rightarrow X) \times_X Y) \otimes A_{cst}$$

Le résultat découle alors de la transitivité du produit fibré de schémas.

C.Q.F.D

On démontre maintenant l'axiome d'homotopie :

**PROPOSITION 4.5.49** — *Soit  $X$  un  $S$ -schéma et notons  $p : \mathbb{A}_X^1 \longrightarrow X$  la projection de la droite affine sur  $X$ . Le morphisme d'unité  $\text{id} \longrightarrow Rp_*Lp^*$  est inversible.*

DEMONSTRATION C'est équivalent de demander que la counité  $Lp_\#Lp^* \longrightarrow \text{id}$  est inversible. Par la formule de projection, on déduit un isomorphisme  $Lp_\#Lp^*(-) \simeq (Lp_\#\mathbb{1}_{\mathbb{A}_X^1}) \otimes (-)$  avec  $\mathbb{1}_{\mathbb{A}_X^1}$  l'objet unité de la catégorie monoïdale  $\mathbb{M}_T(\mathbb{A}_X^1)$ . Par définition de  $p_\#$ , l'objet  $p_\#\mathbb{1}_{\mathbb{A}_X^1}$  est le  $T_X$ -spectre de suspension  $\text{Sus}_{T_X, \Sigma}^0(\mathbb{A}_X^1 \otimes \mathbb{1})$ . Il nous reste à montrer que le morphisme :

$$\text{Sus}_{T_X, \Sigma}^0(\mathbb{A}_X^1 \otimes \mathbb{1}) \longrightarrow \text{Sus}_{T_X, \Sigma}^0(\text{id}_X \otimes \mathbb{1})$$

est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible niveau par niveau. Au niveau  $n \in \mathbb{N}$ , cette flèche est donnée par  $\mathbb{A}^1 \otimes T_X^{\otimes n} \longrightarrow T_X^{\otimes n}$ . Le résultat est maintenant clair.

C.Q.F.D

Pour l'axiome de stabilité, on aura besoin du lemme ci-dessous qui repose sur l'axiome de localité :

**LEMME 4.5.50** — *Soit  $X$  un  $S$ -schéma. On forme le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_{mX} & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_X^1 & \xleftarrow{s} & X \\ & \searrow q & \downarrow p & \swarrow & \\ & & X & & \end{array}$$

Il existe un isomorphisme  $Lp_\#Rs_* \simeq \text{Sus}_{T_X, \Sigma}^0[\text{Cof}(\mathbb{G}_{mX} \otimes \mathbb{1}_X \rightarrow \mathbb{A}_X^1 \otimes \mathbb{1}_X)] \overset{L}{\otimes} -$ .

DEMONSTRATION Soit  $\mathbf{E}$  un  $a_{t_0}(T)$ -spectre symétrique à valeurs dans  $\mathbf{Shv}_{t_0}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ . On suppose que  $\mathbf{E}$  est projectivement cofibrant. On dispose d'un morphisme évident :

$$\text{Cof}(j_\#\mathbb{1}_{\mathbb{G}_{mX}} \rightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{A}_X^1}) \otimes p^*\mathbf{E} \longrightarrow s_*\mathbf{E}$$

qui est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible niveau par niveau. Le lemme découle alors de la formule de projection appliquée à  $Lp_\#$  et du fait que  $\text{Cof}(j_\#\mathbb{1}_{\mathbb{G}_{mX}} \rightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{A}_X^1}) \otimes -$  est de Quillen à gauche pour la structure injective.

C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.5.51** — *Supposons que l'objet  $T$  est équivalent à  $\text{Cof}(\mathbb{G}_{mS} \otimes \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{A}_S^1 \otimes \mathbb{1})$ . Alors, pour tout  $S$ -schéma  $X$ , le foncteur  $Lp_\#Rs_*$  est une équivalence de catégories,*

DEMONSTRATION En effet, par le lemme 4.5.50, le foncteur  $Lp_{\#}Rs_*$  est isomorphe à  $\text{Sus}_{T_X, \Sigma}^0(T_X) \overset{L}{\otimes} -$ . Le résultat découle alors du théorème 4.3.38. C.Q.F.D

**DEFINITION 4.5.52** — Soit  $T \longrightarrow \text{Cof}(\mathbb{G}_{mS} \otimes \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{A}_S^1 \otimes \mathbb{1})$  une équivalence faible avec  $T$  un préfaisceau cofibrant à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ . On pose alors  $\mathbb{S}\mathbb{H}_{\mathfrak{M}}(-, -) = \mathbb{S}\mathbb{H}_{\mathfrak{M}}^T(-, -)$  et  $\mathbf{S}\mathbb{H}_{\mathfrak{M}}(-) = \mathbf{S}\mathbb{H}_{\mathfrak{M}}^T(-)$ . C'est respectivement le dérivateur motivique et 2-foncteur motivique associé à la catégorie de coefficients  $\mathfrak{M}$ .

**Remarque 4.5.53** — Le dérivateur algébrique homotopique et stable  $\mathbb{S}\mathbb{H}$  ne dépend de  $T$  qu'à une équivalence près. En effet, si  $T'$  est un autre remplacement cofibrant de  $\text{Cof}(\mathbb{G}_{mS} \otimes \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{A}_S^1 \otimes \mathbb{1})$  muni d'une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible  $T \longrightarrow T'$ , on a par le théorème 4.3.40, une équivalence de Quillen entre les deux catégories des spectres.

### 4.5.5 Quelques compléments

Dans cette dernière section, nous supposons que la catégorie de coefficients  $\mathfrak{M}$  est la catégorie des  $S^1$ -spectres symétriques  $\mathbf{Spect}_{S^1}^{\Sigma}(\Delta^{\text{op}}(\mathcal{E}ns))$  ou la catégorie des complexes de  $R$ -modules  $\mathbf{Compl}(\mathbf{Mod}(R))$  avec  $R$  un anneau commutatif. Dans ce cas, la catégorie triangulée  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$  admet une  $t$ -structure naturelle  $(\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{\geq 0}, \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{< 0})$ . Son cœur est équivalent à la catégorie des groupes abéliens dans le cas  $\mathfrak{M} = \mathbf{Spect}_{S^1}^{\Sigma}(\Delta^{\text{op}}(\mathcal{E}ns))$ . Il est équivalent à la catégories des  $R$ -modules dans le cas  $\mathfrak{M} = \mathbf{Compl}(\mathbf{Mod}(R))$ . Si  $A$  est un objet de  $\mathfrak{M}$  et  $r \in \mathbb{Z}$ , on note  $A_{\geq r}$  et  $A_{< r}$  les tronqués bien définis à isomorphisme près dans  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ . On pose aussi  $h_r(A) = (A_{\leq r})_{\geq r}[-r]$ .

Cette  $t$ -structure est engendrée, au sens de la définition 2.1.71, par l'objet unité  $\mathbb{1}$  de  $\mathfrak{M}$  (i.e., le spectre symétrique  $\text{Sus}_{S^1, \Sigma}^0(S^0)$  et le complexe concentré en degré zero  $[\dots \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow 0 \rightarrow \dots]$  respectivement). Elle est en particulier non-dégénérée (par la proposition 2.1.73). On déduit donc pour tout objet  $A$  de  $\mathfrak{M}$  des isomorphismes :

$$A \simeq \text{HoLim}_{n \in \mathbb{N}} A_{\leq -n} \quad \text{et} \quad \text{HoColim}_{n \in \mathbb{N}} A_{\geq n} \simeq A$$

On peut modifier la construction dans la preuve de la proposition 2.1.70 pour obtenir des troncations au niveau de la catégorie de modèles. On fixe un remplacement fibrant  $A \longrightarrow A_{fib}$  fonctoriel en  $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ . Soit  $r \in \mathbb{N}$ . On définit alors  $\phi_r(A)$  par le push-out du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\Sigma^n \mathbb{1} \rightarrow A_{fib}, n \geq r} \Sigma^n \mathbb{1} & \longrightarrow & A_{fib} \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$$

où  $\Sigma^1(-)$  désigne un modèle du foncteur de suspension. On pose alors  $\phi_r^k(A) = \phi_r(\phi_r^{k-1}(A))$  pour  $k \geq 1$  et on note  $A_{< r}$  la colimite de la  $\mathbb{N}$ -suite :

$$A \longrightarrow \phi_r^1(A) \longrightarrow \phi_r^2(A) \longrightarrow \dots \longrightarrow \phi_r^n(A) \longrightarrow \dots$$

Par construction,  $A_{< r}$  est aussi la colimite des  $\phi_r^k(A)_{fib}$ . C'est donc un objet fibrant. De plus, toute flèche de  $\Sigma^n \mathbb{1}$  vers  $A_{< 0}$  est nulle (avec  $n \geq r$ ). Ceci montre que  $A_{< r}$  est un objet strictement inférieur à  $r$ . On factorise d'une manière fonctorielle la flèche  $A \longrightarrow A_{< r}$  par une cofibration triviale suivie d'une fibration  $\tilde{A} \longrightarrow A_{< r}$ . On pose alors  $A_{\geq r}$  la fibre  $\tilde{A} \longrightarrow A_{< r}$ . On a ainsi associé à tout objet  $A$  un diagramme fonctoriel en  $A$  :

$$(4.112) \quad A_{\geq r} \longrightarrow \tilde{A} \longrightarrow A_{< r}$$

qui relève le triangle distingué habituel<sup>8</sup>.

Soit  $\mathcal{S}$  est une petite catégorie. On considère la  $t$ -structure sur  $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$  engendrée par  $U \otimes \mathbb{1}$  pour  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ . Cette  $t$ -structure est encore non-dégénérée. Son cœur est équivalent à la catégorie abélienne des préfaisceaux de groupes abéliens et des  $R$ -modules respectivement. Si  $K$  est un préfaisceau à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ , on pose  $\tilde{K}(-) = \widetilde{K(-)}$ ,  $K_{< r}(-) = K(-)_{< r}$  et  $K_{\geq r}(-) = K(-)_{\geq r}$  (avec  $r \in \mathbb{N}$ ). Pour simplifier, nous supposons que nos sites de Grothendieck admettent suffisamment de points. Notons le lemme suivant :

**LEMME 4.5.54** — Soient un site  $(\mathcal{S}, \text{top})$  et  $u : K \longrightarrow H$  un morphisme de préfaisceaux. Alors,  $u$  est une équivalence top-locale si et seulement si pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ , le morphisme de préfaisceaux  $h_r(K) \longrightarrow h_r(H)$  à valeurs dans la catégorie abélienne  $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{\geq 0} \cap \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{\leq 0}$  induit un isomorphisme sur les faisceaux associés.

<sup>8</sup> Bien entendu, des constructions beaucoup plus jolies existent, notamment pour la catégorie des complexes.

DEMONSTRATION Soit  $x : \mathcal{E}ns \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$  un point du site  $(\mathcal{S}, top)$ . Pour tout préfaisceau  $K$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ , on a un isomorphisme canonique  $x^*h_r(K) \simeq h_r(x^*(K))$ . Il suffit donc de démontrer le lemme pour le site ponctuel. Le résultat découle alors du fait que la  $t$ -structure est non dégénérée. C.Q.F.D

**LEMME 4.5.55** — Soient un site  $(\mathcal{S}, top)$  et un préfaisceau  $K$  sur  $\mathcal{S}$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ . Soit  $K \longrightarrow H$  une équivalence top-locale avec  $H$  un préfaisceau fibrant pour la structure top-locale  $(\mathbf{W}_{top}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-top})$ . Si le préfaisceau  $K$  est strictement négatif, il en est de même de  $H$ .

DEMONSTRATION La conclusion du lemme ne dépend pas du choix du remplacement top-fibrant de  $K$ . Il suffit donc d'établir l'énoncé pour un  $H$  particulier.

On note  $(-)_{top-f}$  le remplacement top-fibrant fonctoriel. On pose  $\psi(-) = ((-)_{top-f})_{<0}$ ,  $\psi^{\nu+1}(-) = \psi(\psi^\nu(-))$  et  $\psi^\nu(-) = \mathbf{Colim}_{\mu \in \nu} \psi^\mu$  lorsque l'ordinal  $\nu$  est limite. Si  $\lambda$  est l'ordinal successeur de  $\alpha$  (avec  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$   $\alpha$ -accessible pour sa structure top-locale), le préfaisceau  $H = \psi^\lambda(K)$  est top-fibrant. Il est également strictement négatif. Enfin,  $K \longrightarrow H$  est une top-équivalence faible lorsque  $K$  est strictement négatif (utiliser le lemme 4.5.54). C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.5.56** — Soient un site  $(\mathcal{S}, top)$  et un préfaisceau  $K$  sur  $\mathcal{S}$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ . Le morphisme de groupes abéliens :

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, K_{\geq 0}) \longrightarrow \mathbf{hom}_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, K)$$

est inversible pour tout  $U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})$ .

DEMONSTRATION Le triangle distingué  $K_{\geq 0} \longrightarrow K \longrightarrow K_{<0} \longrightarrow$  induit une suite exacte longue sur les groupes d'homomorphismes. Il suffit donc de montrer que les deux groupes suivant :

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, K_{<0}) \quad \text{et} \quad \mathbf{hom}_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, \Omega^1 K_{<0})$$

sont nuls. Par le lemme 4.5.55, les remplacements top-fibrants de  $K_{<0}$  et  $\Omega^1 K_{<0}$  sont des préfaisceaux strictement négatifs. D'où le résultat. C.Q.F.D

**DEFINITION 4.5.57** — Soit  $(\mathcal{S}, top)$  un site de Grothendieck. On dit que  $\mathcal{S}$  est de dimension cohomologique finie s'il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{S})$  le foncteur  $\mathbf{H}_{top}^i(U, -) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, Ab) \longrightarrow Ab$  est identiquement nul pour  $i > N$ . Le plus petit entier  $N$  vérifiant cette condition est appelé la dimension cohomologique de  $\mathcal{S}$ .

**PROPOSITION 4.5.58** — Soit  $(\mathcal{S}, top)$  un site de Grothendieck de dimension cohomologique finie  $N$ . Soient  $K$  un préfaisceau sur  $\mathcal{S}$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}$  et  $K \longrightarrow H$  une équivalence top-locale avec  $H$  un préfaisceau top-fibrant. Supposons que le préfaisceau  $K$  est positif. Alors, le morphisme  $H \longrightarrow H_{\geq -N}$  est une équivalence faible de préfaisceaux.

DEMONSTRATION On dispose d'un système projectif dans  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  (appelé la tour de Postnikov) :

$$(4.113) \quad \dots \longrightarrow K_{\leq r+1} \longrightarrow K_{\leq r} \longrightarrow \dots \longrightarrow K_{\leq 1} \longrightarrow K_{\leq 0}$$

(avec  $K_{\leq r} = K_{< r+1}$ ). On choisit un remplacement top-fibrant de (4.113) dans  $\mathbf{PreShv}(\mathbb{N} \times \mathcal{S}, \mathfrak{M})$  relativement à la structure injective  $(\mathbf{W}_{top}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-top})$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & K_{\leq r+1} & \longrightarrow & K_{\leq r} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow K_{\leq 1} \longrightarrow K_{\leq 0} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H_{r+1} & \longrightarrow & H_r & \longrightarrow & \dots \longrightarrow H_1 \longrightarrow H_0 \end{array}$$

En particulier, les flèches verticales sont des équivalences top-locales, les  $H_n$  des préfaisceaux top-fibrants et les flèches  $H_{r+1} \longrightarrow H_r$  sont des top-fibrations.

Supposons que l'on sache montrer la proposition pour les préfaisceaux bornés, en particulier pour les  $K_{\leq r}$ , et expliquons comment conclure. Le préfaisceau  $H = \mathbf{Lim}_{r \in \mathbb{N}} H_r$  est top-fibrant. Il reste à montrer que  $H \longrightarrow H_{\leq -N}$  est une équivalence faible et que  $K \longrightarrow H$  est une équivalence top-locale. Pour cela, nous allons calculer les préfaisceaux de cohomologie  $\Pi_0(A, H)$  avec  $A = \Sigma^p \mathbb{1}$  ou  $A = \Omega^q \mathbb{1}$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ). On dispose d'une suite exacte courte (dite de Milnor) :

$$\mathbf{Lim}^1 \Pi_0(A, H_r) \longrightarrow \Pi_0(A, H) \longrightarrow \mathbf{Lim} \Pi_0(A, H_r)$$

Nous allons voir que pour  $r$  suffisamment grand, le morphisme  $\Pi_0(A, H_{r+1}) \longrightarrow \Pi_0(A, H_r)$  est inversible. Ceci montrera que  $\text{Lim}^1 \Pi_0(A, H_r) = 0$ . On aura donc :

- $\Pi_0(A, H) = \Pi_0(A, H_r) = 0$  pour  $A = \Omega^r \mathbb{1}$  et  $r > N$ ,
- $\Pi_0^{\text{top}}(A, H) \simeq \Pi_0^{\text{top}}(A, H_r) \simeq \Pi_0^{\text{top}}(A, K)$ ,

et la proposition sera montrée. Notons  $F_r$  la fibre de  $H_r \longrightarrow H_{r-1}$  (qui est donc un objet fibrant) et  $E_r = (K_{\leq r})_{\geq r}$ . On a un morphisme de triangles distingués dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$  :

$$(4.114) \quad \begin{array}{ccccccc} E_r & \longrightarrow & K_{\leq r} & \longrightarrow & K_{\leq r-1} & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ F_r & \longrightarrow & H_r & \longrightarrow & H_{r-1} & \longrightarrow & \end{array}$$

Ceci montre que  $F_r$  est un remplacement *top*-fibrant du préfaisceau  $E_r$  concentré en degré  $r$ . On sait donc que  $F_r \longrightarrow (F_r)_{\geq r-N}$  est inversible. En particulier on a  $\Pi_0(\Sigma^p \mathbb{1}, F_r) = 0$  pour  $r \geq N+p+1$  et  $\Pi_0(\Omega^q \mathbb{1}, F_r) = 0$  pour  $r \geq N-q+1$ . Le résultat découle maintenant de la suite exacte longue déduite du triangle  $F_r \longrightarrow H_r \longrightarrow H_{r-1} \longrightarrow \dots$ .

Il reste à montrer la proposition pour  $K$  borné, i.e.,  $K = K_{\leq r}$ . On raisonne par récurrence sur  $r$ . Lorsque  $r = 0$ , le résultat découle immédiatement du lemme 4.5.59. Pour passer du cas  $r - 1$  au cas  $r$ , il suffit d'utiliser le triangle distingué  $F_r \longrightarrow H_r \longrightarrow H_{r-1} \longrightarrow \dots$  et d'appliquer le cas  $r = 0$  à  $E_r \longrightarrow F_r$ . C.Q.F.D

Si  $K$  est un préfaisceau à valeurs dans le cœur de  $\mathfrak{M}$ , on notera  $K_a$  le préfaisceau de groupes abéliens égal à la composée :

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{\leq 0} \cap \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{\geq 0} \longrightarrow Ab$$

**LEMME 4.5.59** — Soit  $K$  un préfaisceau à valeurs dans le cœur de  $\mathfrak{M}$  et soit  $K \longrightarrow H$  un remplacement *top*-fibrant. Alors pour tout  $r \in \mathbb{N}$ ,  $h_r(H)_a$  est canoniquement isomorphe au préfaisceau  $H_{\text{top}}^{-r}(-, K_a)$ .

DEMONSTRATION On traite uniquement le cas où  $\mathfrak{M}$  est la catégorie  $\mathbf{Spect}_{S^1}(\Delta^{\text{op}} \mathcal{E}ns)$ . Étant donnée l'équivalence de Quillen

$$\mathbf{Spect}_{S^1}(\Delta^{\text{op}} \mathcal{E}ns) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{S^1}^{\Sigma}(\Delta^{\text{op}} \mathcal{E}ns)$$

on peut travailler avec les spectres non-symétriques. On dispose alors d'une adjonction de Quillen :

$$(\mathbf{N}, \mathbf{E}) : \mathbf{Spect}_{S^1}(\Delta^{\text{op}} \mathcal{E}ns) \longrightarrow \mathbf{Compl}(Ab)$$

avec  $\mathbf{N}$  le foncteur qui à un  $S^1$ -spectre  $\mathbf{A}$  associe le complexe  $\text{Colim}_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{N}(\mathbb{Z}[\mathbf{A}_n])[-n]$  où  $\mathbf{N}(-)$  est le complexe normalisé associé à un objet simplicial en groupes abéliens. Le foncteur  $\mathbf{E}$  envoie un complexe de groupes abéliens sur son spectre d'Eilenberg-McLane. Les foncteurs  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{E}$  préservent les équivalences faibles. Le foncteur  $\mathbf{RE}$  est  $t$ -exact et induit une équivalence de catégories sur les cœurs.

L'adjonction  $(\mathbf{N}, \mathbf{E})$  induit une adjonction de Quillen :

$$(\mathbf{N}, \mathbf{E}) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathbf{Spect}_{S^1}(\Delta^{\text{op}} \mathcal{E}ns)) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathbf{Compl}(Ab))$$

qui passe à la localisation suivant les équivalences *top*-locales du moins lorsque  $(\mathcal{S}, \text{top})$  admet suffisamment de points. En effet, les foncteurs  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{E}$  préservent les *top*-équivalences puisqu'ils commutent au foncteur fibre associé à un point  $\mathcal{E}ns \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\text{top}}(\mathcal{S})$ .

Il est facile maintenant de déduire le lemme. On peut supposer que notre préfaisceau  $K$  est de la forme  $\mathbf{E}(A)$  avec  $A$  un préfaisceau de groupes abéliens sur  $\mathcal{S}$ . Soit  $A \longrightarrow I$  une équivalence *top*-locale de  $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathbf{Compl}(Ab))$  avec  $I$  un complexe *top*-fibrant. On déduit alors une équivalence *top*-locale  $K = \mathbf{E}(A) \longrightarrow \mathbf{E}(I)$  et le préfaisceau  $\mathbf{E}(I)$  est *top*-fibrant. Le résultat découle maintenant du fait que  $\mathbf{E}$  est exact. C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.5.60** — Soit un site  $(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  de dimension cohomologique finie  $N$ . Soit un préfaisceau  $K$  sur  $\mathcal{S}$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ . Le morphisme de groupes abéliens :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}_{\text{top}}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, K) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}_{\text{top}}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, K_{\leq N})$$

est inversible pour tout  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ .

DEMONSTRATION La suite exacte longue associée à  $K_{\geq N+1} \longrightarrow K \longrightarrow K_{\leq N} \longrightarrow \dots$  montre qu'il suffit de prouver que les groupes :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}_{\text{top}}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, K_{\geq N+1}) \quad \text{et} \quad \text{hom}_{\mathbf{Ho}_{\text{top}}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, \Sigma^1 K_{\geq N+1})$$

Ceci découle immédiatement de la proposition 4.5.58.

C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.5.61** — Soit un site  $(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  quasi-compact et de dimension cohomologique finie. Pour tout  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ , le foncteur :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, -) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

commute aux colimites filtrantes.

DEMONSTRATION Soient  $\mathcal{J}$  une petite catégorie filtrante et  $K(-) : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  un foncteur. Les corollaires 4.5.56 et 4.5.60 montrent que l'on peut remplacer  $K(-)$  par  $(K(-)_{\geq 0})_{\leq N}$ . On peut donc supposer que  $K(-)$  est positif et borné. En utilisant la tour de Postnikoff (voir la preuve de la proposition 4.5.58) on se ramène par récurrence au cas où les  $K(-)$  sont concentrés en un seul degré  $0 \leq r \leq N$ . Modulo le lemme 4.5.59, le résultat découle de la commutation de  $\text{H}_{top}^r(U, -) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{A}b$  aux colimites filtrantes (voir [SGA 4]).

C.Q.F.D

**PROPOSITION 4.5.62** — Soit  $(\mathcal{S}, top)$  un site muni d'une  $P$ -structure  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow (\mathcal{E}_U, top_U)$ . On suppose que les sites  $(\mathcal{E}_U, top_U)$  sont quasi-compact et de dimension cohomologique finie. Alors, une colimite filtrante de préfaisceaux projectivement  $top$ -fibrants et encore un préfaisceau projectivement  $top$ -fibrant.

DEMONSTRATION Soient  $\mathcal{J}$  une petite catégorie filtrante et  $K(-) : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$  un foncteur à valeurs dans les préfaisceaux projectivement  $top$ -fibrants. Le préfaisceau  $\text{Colim}_{\mathcal{J}} K(-)$  est encore projectivement fibrant. Il reste à montrer qu'il est  $top$ -local. Soit  $\text{Colim}_{\mathcal{J}} K \longrightarrow H$  un remplacement  $top$ -fibrant. On montrera que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le morphisme :

$$(4.115) \quad \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], \text{Colim}_{\mathcal{J}} K(-)) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], H)$$

est inversible. Notons  $e_U : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}_U$  le pseudo-morphisme de sites évident. L'application (4.115) s'identifie à :

$$(4.116) \quad \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], \text{Colim}_{\mathcal{J}} (e_U)_* K(-)) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], (e_U)_* H)$$

Le foncteur  $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], -)$  commute clairement aux colimites filtrantes. L'application (4.116) s'écrit :

$$(4.117) \quad \text{Colim}_{\mathcal{J}} \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], (e_U)_* K(-)) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], (e_U)_* H)$$

Par le théorème 4.4.51, le foncteur  $(e_U)_*$  preserve les objets  $top$ -fibrants. En particulier,  $(e_U)_* K(-)$  et  $(e_U)_* H$  sont  $top_U$ -fibrants. On déduit que (4.117) est isomorphe à :

$$(4.118) \quad \text{Colim}_{\mathcal{J}} \text{hom}_{\mathbf{Ho}_{top_U}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], (e_U)_* K(-)) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}_{top_U}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], (e_U)_* H)$$

Le résultat découle maintenant du corollaire 4.5.61.

C.Q.F.D

Revenons aux cas des schémas. Nous travaillerons uniquement avec la topologie de Nisnevich, bien que les résultats ci-dessous sont aussi vrais pour  $\tau = \text{ét}$  lorsque les schémas considérés sont de dimension cohomologique étale fini (eg. des schémas de type fini sur un corps algébriquement clos). Pour un schéma  $X$  noethérien, la dimension cohomologie de  $(\mathbf{Et}/X, \text{Nis})$  est majorée par la dimension de Krull (voir [TT90]). Si cette dimension est finie, la proposition 4.5.62 s'applique. On a également :

**PROPOSITION 4.5.63** — Soit  $X$  un  $S$ -schéma noethérien et de dimension de Krull finie. Une colimite filtrante de préfaisceaux projectivement  $\mathbb{A}^1$ -fibrants de  $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/X, \mathfrak{M})$  est encore un objet  $\mathbb{A}^1$ -fibrant.

DEMONSTRATION Comme  $X$  est noethérien et de dimension de Krull fini, il en est de même de tout  $X$ -schéma de type fini.

Soient  $\mathcal{J}$  une petite catégorie filtrante et  $K(-) : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/X, \mathfrak{M})$  un foncteur à valeurs dans les préfaisceaux projectivement  $\mathbb{A}^1$ -fibrants. La colimite  $\text{Colim}_{\mathcal{J}} K(-)$  est Nis-fibrante par la proposition 4.5.62. Pour vérifier qu'elle est  $\mathbb{A}^1$ -locale, il suffit de montrer que  $\underline{\text{hom}}(\mathbb{A}_X^1, \text{Colim}_{\mathcal{J}} K(-)) \longrightarrow \text{Colim}_{\mathcal{J}} K(-)$  est une équivalence faible de préfaisceaux. Le résultat découle alors de la commutation de  $\underline{\text{hom}}(\mathbb{A}_X^1, -)$  aux colimites et du fait que les colimites filtrantes préservent les équivalences faibles de  $\mathfrak{M}$ .

C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.5.64** — Soit  $X$  un  $S$ -schéma noethérien et de dimension de Krull finie. Pour  $U$  un  $X$ -schéma lisse, le foncteur

$$\underline{\text{Hom}}(U \otimes \mathbb{1}, -) : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/X, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/X, \mathfrak{M}))$$

commute aux compositions transfinies (au sens de l'hypothèse 4.3.56).

On en déduit (sous les hypothèses du corollaire 4.5.64) que  $\underline{\mathbf{Hom}}(T_X, -)$  commute aux compositions transfinies pour  $T$  comme dans la définition 4.5.52. Le lemme ci-dessous et le théorème 4.3.79 montrent donc que la catégorie  $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$  est équivalente à la catégorie homotopique stable des  $T_X$ -spectres non-symétriques.

**LEMME 4.5.65** — *La permutation (123) opère trivialement sur  $\mathbf{Cof}(\mathbb{G}_{m_S^1} \otimes \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{A}_S^1 \otimes \mathbb{1})^{\otimes 3}$  dans la catégorie homotopique  $\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/S, \mathfrak{M}))$ .*

DEMONSTRATION Le groupe  $\mathbb{G}_S(3)$  des matrices  $3 \times 3$  inversibles opère sur l'objet  $Q = \mathbf{Cof}(\mathbb{G}_{m_S^3} \otimes \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{A}_S^3 \otimes \mathbb{1})$ , i.e., on a une flèche :

$$\mathbb{G}_S(3) \otimes Q \longrightarrow Q$$

De plus, l'action de la permutation (123) coïncide avec l'action par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a la relation :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le trois matrices dans le membre de droite sont unipotentes, i.e., de la forme  $\text{id}_3 + N$  avec  $N$  nilpotente. Il suffit donc de montrer que  $\text{id}_3 + N$  opère trivialement. Pour cela, on considère le morphisme de  $S$ -schémas  $\mathbb{A}_S^1 \longrightarrow \mathbb{G}_S(3)$  donné par  $t \rightsquigarrow \text{id}_3 + t.N$ . La composée :

$$\mathbb{A}_S^1 \otimes Q \longrightarrow \mathbb{G}_S(3) \otimes Q \longrightarrow Q$$

fournit l'homotopie recherchée.

C.Q.F.D

**COROLLAIRE 4.5.66** — *Pour tout  $S$ -schéma  $X$ , la catégorie  $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$  est canoniquement équivalente à la catégorie homotopique de  $\mathbf{Spect}_{T_X}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$  munie de la structure stable déduite de la structure  $\mathbb{A}^1$ -locale sur  $\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ .*

On a aussi le théorème suivant :

**THEOREME 4.5.67** — *Soit  $X$  un  $S$ -schéma noethérien de dimension de Krull finie. La catégorie triangulée  $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$  est compactement engendrée par les objets de la forme  $\text{Sus}_{T_X, \Sigma}^p(U \otimes \mathbb{1})$  avec  $p \in \mathbb{N}$  et  $U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Sm}/X)$ .*

DEMONSTRATION Les foncteurs  $\text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(\text{Sus}_{T_X, \Sigma}^p(U \otimes \mathbb{1})[n], -)$  avec  $p \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et  $U \in \mathbf{Sm}/X$  forment une famille conservative. En effet, soit  $u : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$  un morphisme de  $T_X$ -spectres symétriques dont les images par ces foncteurs sont inversibles. On peut supposer que  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  sont stablement  $\mathbb{A}^1$ -fibrants. Dans ce cas, l'application :  $\text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(\text{Sus}_{T_X, \Sigma}^p(U \otimes \mathbb{1})[n], u)$  s'identifie à :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(\mathbb{1}[n], \mathbf{E}_p(U)) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(\mathbb{1}[n], \mathbf{F}_p(U))$$

Ceci montre que  $u$  est une équivalence faible de préfaisceaux niveau par niveau.

Il reste à montrer que les objets  $\text{Sus}_{T_X, \Sigma}^p(U \otimes \mathbb{1})$  sont compacts. On montrera plus généralement que le foncteur

$$\text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(\text{Sus}_{T_X, \Sigma}^p(U \otimes \mathbb{1}), -) : \mathbf{Spect}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

commute aux colimites filtrantes. Il suffit pour cela de montrer que les colimites filtrantes préservent les  $T_X$ -spectres fibrants de la structure :

$$(4.119) \quad (\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, (\mathbf{Cof}_{proj})_{proj}, (\mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1})_{proj-st})$$

Soient  $\mathcal{J}$  une petite catégorie filtrante et  $\mathbf{K}(-) : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$  un foncteur à valeurs dans les  $T_X$ -spectres fibrants pour la structure (4.119). Par la proposition 4.5.63, la colimite  $\text{Colim}_{\mathcal{J}} \mathbf{K}$  est projectivement  $\mathbb{A}^1$ -fibrante niveau par niveau. Il reste à voir que  $\text{Colim}_{\mathcal{J}} \mathbf{K}$  est un  $\Omega$ -spectre. Il s'agit donc de montrer que pour  $p \in \mathbb{N}$ , le morphisme  $\text{Colim}_{\mathcal{J}} \mathbf{K}_p(-) \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(T_X, \text{Colim}_{\mathcal{J}} \mathbf{K}_{p+1}(-))$  est une équivalence faible. Il suffit de montrer que pour tout  $X$ -schéma lisse  $U$ , l'application :

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], \text{Colim}_{\mathcal{J}} \mathbf{K}_p(-)) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))}(U \otimes T_X[n], \text{Colim}_{\mathcal{J}} \mathbf{K}_p(-))$$

est bijective. Ceci découle du fait que  $\mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/X, \mathfrak{M}))(U \otimes \mathbb{1}, -)$  et  $\mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/X, \mathfrak{M}))(U \otimes T_X, -)$  commutent aux colimites filtrantes. C.Q.F.D

**Remarque 4.5.68** — Soit  $U$  un  $X$ -schéma lisse et notons  $f : U \longrightarrow X$  son morphisme structural. Le  $T_X$ -spectre  $\mathrm{Sus}_{T_X, \Sigma}^p(U \otimes \mathbb{1})$  est isomorphe à  $\mathbf{L}f_{\#} \mathbb{1}_U(-p)[-2p]$ . En effet, on peut écrire  $\mathrm{Sus}_{T_X, \Sigma}^p(U \otimes \mathbb{1}) \simeq [\mathrm{Sus}_{T_X, \Sigma}^1 \mathbb{1}]^{\otimes p} \otimes \mathrm{Sus}_{T_X, \Sigma}^0(U \otimes \mathbb{1})$ . On a bien  $\mathbf{L}f_{\#} \mathbb{1} = \mathrm{Sus}_{T_X, \Sigma}^0(U \otimes \mathbb{1})$  par définition. Il reste à voir que  $\mathrm{Sus}_{T_X, \Sigma}^1 \mathbb{1}(1)[2] \simeq \mathbb{1}$ . Ceci découle du fait que  $\omega_{T_X}^1 : \mathrm{Sus}_{T_X, \Sigma}^1(T_X) \longrightarrow \mathrm{Sus}_{T_X, \Sigma}^0 \mathbb{1}$  est une équivalence stable.





# Bibliographie

- [AR94] J. ADÁMEK ET J. ROSICKÝ *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 189, Cambridge University Press (1994).
- [AK02] Y. ANDRÉ ET B. KAHN. — *Nilpotence, radicaux et structures monoïdales* (avec un appendice de Peter O'Sullivan). *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova* 108 (2002), 107–291.
- [Ayo04] J. AYOUB. — *Motivic version of the classical polylogarithms*. Dans *Oberwolfach Reports. Abstract of a talk in the Arbeitsgemeinschaft mit aktuellem thema : Polylogarithms*. Organised by S. Bloch, G. Kings and J. Wildeshaus.
- [Ayo07] J. AYOUB. — *The motivic nearby cycles and the conservation conjecture*. Dans "Algebraic Cycles and Motives" part I. London Mathematical Society Lecture Note Series, no. 343. Editeurs, J. Nagel et C. Peters.
- [BBD82] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN ET P. DELIGNE. — *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*. Astérisque, volume 100, Société Mathématique de France, 1982.
- [BD94] A. BEILINSON ET P. DELIGNE. — *Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs*. Dans "Motives", Proceedings of the Research Conference on Motives held July 20 -August 2, 1991, in Seattle, Washington. Editeurs : U. Jannsen, S.L. Kleiman et J.-P. Serre. Proc. of Symp. in Pure Math. 55, Part II, AMS 1994, pp. 123-190.
- [BK72] A.K. BOUSFIELD ET D.M. KAN. — *Homotopy limits, completions and localizations*. Lecture Notes in Mathematics, No. 304, Springer, New York, 1972.
- [BG73] K.S. BROWN AND S.M. GERSTEN. — *Algebraic K-theory and generalized sheaf cohomology*. Lecture Notes in Mathematics, 341 (1973), 266-292.
- [Del01] P. DELIGNE. — *Voevodsky's lectures on cross functors. Fall 2001*. Motivic Homotopy Theory Program : <http://www.math.ias.edu/vladimir/seminar.html>.
- [DHI04] D. DUGGER, S. HOLLANDER ET D. ISAKSEN. — *Hypercovers and simplicial presheaves*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 136 (2004) 9-51.
- [EGA I] A. GROTHENDIECK ET J. DIEUDONNÉ. — *Éléments de géométrie algébrique I. Le langage des schémas*. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S, volume 4.
- [EGA II] A. GROTHENDIECK ET J. DIEUDONNÉ — *Éléments de géométrie algébrique II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S, volume 8.
- [Ful84] W. FULTON. — *Intersection Theory*. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, Springer Verlag.
- [GJ99] P.G. GOERSS ET J.F. JARDINE. — *Simplicial Homotopy Theory*, Progress in Mathematics Vol. 174, Birkhäuser Basel-Boston-Berlin (1999).
- [Gro90] A. GROTHENDIECK. — *Les dérivateurs*, manuscrit édité par M. Künzer, J. Malgoire et G. Maltsiniotis. Disponible à l'adresse : <http://www.math.jussieu.fr/maltsin/groth/Derivateur.html>.
- [Har77] R. HARTSHORNE. — *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1977.
- [Hir03] P.S. HIRSCHHORN. — *Model categories and their localizations*. Mathematical Surveys and Monographs, 99. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xvi+457 pp.
- [Hov99] M. HOVEY. — *Model categories*. Mathematical Surveys and Monographs 63, AMS, Providence, RI, (1999), x + 209 pp.
- [Hov01] M. HOVEY. — *Spectra and symmetric spectra in general model categories*. Journal of Pure and Applied Algebra, volume 165, (2001), pp. 63-127.
- [HW98] A. HUBER ET J. WILDESHAUS. — *Classical motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne*. Preprint. Disponible à l'adresse : <http://wwwmath1.uni-muenster.de/sfb/about/publ/wildeshaus.html>.

- [Jar87] J.F. JARDINE. — *Simplicial presheaves*. Journal of Pure and Applied Algebra, volume 47, (1987), pp. 35-87.
- [Jar99] J.F. JARDINE. — *Motivic symmetric spectra*. Documenta Mathematica, Band 5, (2000) pp. 445-552. Disponible à l'adresse : <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/vol-05/vol-05.html>.
- [Joy84] A. JOYAL. — *Letter to Alexander Grothendieck*. Datée le 4/11/1984.
- [KM71] G.M. KELLEY AND S. MAC LANE. — *Coherence in closed categories*. Journal of Pure and Applied Algebra, volume 1, (1971), issue 1, pp. 97-140.
- [Kim05] S.-I. KIMURA. — *Chow groups are finite dimensional, in some sense*. Math. Ann. 331 (2005), no. 1, pp. 173-201.
- [Lev05] M. LEVINE. — *Motivic tubular neighborhoods*. Preprint. Disponible à l'adresse : <http://front.math.ucdavis.edu/math.AG/0509463>.
- [Mac63] S. MACLANE. — *Natural associativity and commutativity*. Rice University Studies 49, 1963 n. 4, pp. 28-46.
- [Mac71] S. MACLANE. — *Categories for the working mathematician*, volume 5 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1971.
- [Mal01a] G. MALTSINIOTIS. — *Introduction à la théorie des dérivateurs*. Preprint. Disponible à l'adresse : <http://www.math.jussieu.fr/maltsin/>.
- [Mal01b] G. MALTSINIOTIS. — *La K-théorie d'un dérivateur triangulé*. Preprint. Disponible à l'adresse : <http://www.math.jussieu.fr/maltsin/>.
- [MV90] F. MOREL ET V. VOEVODSKY. —  *$\mathbb{A}^1$ -Homotopy theory of schemes*. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., volume 90.
- [Mor02] F. MOREL. — *The homotopy t-structure of the  $\mathbb{A}^1$ -homotopy category*. Preprint. Disponible à l'adresse : <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/morel/stable.html>.
- [Mor03] F. MOREL. — *An introduction to  $\mathbb{A}^1$ -homotopy theory*. Contemporary Developments in Algebraic K-theory, ICTP Lectures Notes, 15 (2003), pp. 357-441, M. Karoubi, A.O. Kuku, C. Pedrini (ed.).
- [Mor05] F. MOREL. — *The stable  $\mathbb{A}^1$ -connectivity theorems*. To appear in Journal of K-theory.
- [Nee01] A. NEEMAN. — *Triangulated categories*. Annals of mathematics studies 148 (2001), Princeton University Press, 449 pp.
- [Qui67] D.G. QUILLEN. — *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43 Springer-Verlag, Berlin-New York 1967 iv+156 pp.
- [Rio02] J. RIOU. — *Théorie homotopique des S-schémas*. DEA de l'université Paris 7 (2002). Disponible à l'adresse : <http://www.math.jussieu.fr/riou/dea/>.
- [Rio06] J. RIOU. — *Opérations sur la K-théorie algébrique et régulateurs via la théorie homotopique des schémas*. Thèse de Doctorat de l'université Paris 7 (2006). K-théorie Preprint Archives. Diponible à l'adresse : <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0793/>.
- [Rön05] O. RÖNDIGS. — *Functoriality in motivic homotopy theory*. Preprint (2005). Disponible à l'adresse : <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/oroendig/>
- [TT90] R. W. THOMASON, T. TROBAUGH. — *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*. Dans "The Grothendieck Festschrift" : a collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck, Volume III, pages 247-436. Progress in Mathematics, 88 (1990). Birkhäuser.
- [Ver96] J-L. VERDIER. — *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*. Astérisque, volume 239, Société Mathématique de France, 1996.
- [VSF00] V. VOEVODSKY, A. SUSLIN ET E. M. FRIEDLANDER. — *Cycles, transfers, and motivic homology theories*. Annals of Mathematics Studies, 143. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000. vi+254 pp.
- [Voe98] V. VOEVODSKY. —  *$\mathbb{A}^1$ -Homotopy theory*. Documenta Mathematica, Extra volume ICM I (1998), p. 579-606. <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/xvol-icm/00/Voevodsky.MAN.html>.
- [Voe02] V. VOEVODSKY. — *Cancellation theorem*. Preprint, January 28, 2002, K-theory Preprint Archives. Disponible à l'adresse <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0541/>.
- [Vol07] V. VOLOGODSKY. — *Integrality of instanton numbers*. Preprint 2007. <http://arxiv.org/pdf/0707.4617>.

- [Wil97] J. WILDESHAUS. — *Realizations of Polylogarithms*. Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1650, 1997.
- [SGA 4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, séminaire dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, Lecture Notes in Mathematics 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-73.
- [SGA 4+1/2] *Cohomologie étale*, par P. Deligne, Lecture Notes in Mathematics 569, Springer Verlag, 1977.
- [SGA 6] *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, par P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie, Lecture Notes in Mathematics 225, 1971.