Un contre-exemple à la conjecture de $\mathbb{A}^1$-connexité de F. Morel

Joseph Ayoub

Institut mathématique de Jussieu, université de Paris 7, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France.

Reçu le *****; accepté après révision le +++++

Présenté par ££££££

Résumé

Dans cette Note, on construit pour une certaine surface normale X un objet de $\mathbf{DM}_{\text{eff}}(X)$ dont les faisceaux d'homologie ne sont pas strictement $\mathbb{A}^1$-invariants. Ceci est en contradiction avec la conjecture de $\mathbb{A}^1$-connexité de F. Morel. ***Pour citer cet article : J. Ayoub, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

A counter-example to the $\mathbb{A}^1$-connectivity conjecture of F. Morel. In this Note, we construct for some normal surface X an object of $\mathbf{DM}_{\text{eff}}(X)$ whose homology sheaves are not strictly $\mathbb{A}^1$-invariant. This disproves the $\mathbb{A}^1$-connectivity conjecture of F. Morel. ***To cite this article: J. Ayoub, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

For a noetherian scheme X, we denote by $\mathbf{DM}_{\text{eff}}(X)$ the subcategory of $\mathrm{D}(Shv^{tr}_{\text{Nis}}(Sm/X))$ whose objects are the $\mathbb{A}^1$-local complexes of Nisnevich sheaves with transfers. By [7], there exists an $\mathbb{A}^1$-localization functor $\text{Loc}_{\mathbb{A}^1} : \mathrm{D}(Shv^{tr}_{\text{Nis}}(Sm/X)) \longrightarrow \mathbf{DM}_{\text{eff}}(X)$ left adjoint to the obvious inclusion. The following conjecture:

Conjecture (The $\mathbb{A}^1$-connectivity conjecture). *If X is regular, the functor $\text{Loc}_{\mathbb{A}^1}$ preserves (-1)-connected complexes.*

was formulated by F. Morel for Nisnevich sheaves of simplicial spectra in [6]. It is known to hold for X the spectrum of a field (see [5] for perfect fields and [6] for the general case). A standard consequence of the $\mathbb{A}^1$-connectivity conjecture is that the homology sheaves of an $\mathbb{A}^1$-local object are strictly $\mathbb{A}^1$-invariant.

We first prove that if the $\mathbb{A}^1$-connectivity property holds for a scheme X then it holds for any subscheme of X (possibly singular). This shows that the regularity assumption in the $\mathbb{A}^1$-connectivity conjecture is not important. Then we construct for some normal singular surface X an $\mathbb{A}^1$-local

Email address: `ayoub@math.jussieu.fr` (Joseph Ayoub).

object $\mathcal{K}^{M,!}_{X,1} \in \mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}(X)$ with non strictly $\mathbb{A}^1$-invariant homology sheaves. This disproves the $\mathbb{A}^1$-connectivity conjecture for schemes of dimension larger than 2. The $\mathbb{A}^1$-connectivity conjecture is still open for curves.

1. La propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité

Soit X un schéma noethérien de dimension de Krull finie. On note Sm/X la catégorie des X-schémas lisses de type fini qu'on munit de la topologie de Nisnevich. On considère suivant Morel et Voevodsky les trois catégories suivantes :

- $\mathcal{M}_1(X) = \mathrm{Spect}_s(Shv^{ens}_{\mathrm{Nis}}(Sm/X))$, la catégorie des faisceaux Nisnevich en S^1-spectres sur Sm/X,
- $\mathcal{M}_2(X) = \mathrm{Compl}(Shv^{ab}_{\mathrm{Nis}}(Sm/X))$, la catégorie des complexes de faisceaux Nisnevich en groupes abéliens sur Sm/X,
- $\mathcal{M}_3(X) = \mathrm{Compl}(Shv^{tr}_{\mathrm{Nis}}(Sm/X))$, la catégorie des complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts sur Sm/X (voir [4], [8] et [10]).

Pour $i \in \{1,2,3\}$, on notera $\mathbf{Ho}(\mathcal{M}_i(X))$ la catégorie homotopique obtenue à partir de $\mathcal{M}_i(X)$ en inversant les équivalences faibles locales. Les trois catégories ainsi obtenues sont triangulées. Étant donné un X-schéma lisse U, on note $\mathrm{R}\Gamma(U,-)$ le foncteur dérivé à droite du foncteur « U-sections globales ». Pour $i=1$, ce foncteur prend ses valeurs dans la catégorie homotopique des spectres topologiques. Pour $i \in \{2,3\}$, ce foncteur est à valeur dans la catégorie dérivée des groupes abéliens. Étant donné un objet E de $\mathbf{Ho}(\mathcal{M}_i(X))$ et un entier relatif n on note $h_n(E)$ le faisceau Nisnevich associé au pré-faisceau en groupes abéliens :

$$U \in \mathrm{ob}(Sm/X) \rightsquigarrow \mathrm{H}_n(\mathrm{R}\Gamma(U,E))$$

avec $\mathrm{H}_n(-)$ le foncteur « n-ieme groupe d'homologie ». C'est le n-ieme faisceau d'homologie de E. Nous dirons suivant [6] que E est (-1)-connexe lorsque les faisceaux $h_n(E)$ sont nuls pour $n<0$. Rappelons la définition :

Définition 1.1 *Un objet F de $\mathbf{Ho}(\mathcal{M}_i(X))$ est* $\mathbb{A}^1$-local *si pour tout X-schéma lisse U, le morphisme induit par la projection de la droite affine :* $\mathrm{R}\Gamma(U,F) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma(\mathbb{A}^1_U,F)$ *est un isomorphisme.*

La sous-catégorie pleine $\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{M}_i(X))$ formée des objets $\mathbb{A}^1$-locaux est une sous-catégorie triangulée de $\mathbf{Ho}(\mathcal{M}_i(X))$. Suivant la valeur de $i \in \{1,2,3\}$, la catégorie $\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{M}_i(X))$ est respectivement notée $\mathbf{SH}_s(X)$, $\mathbf{DM}'_{\mathrm{eff}}(X)$ et $\mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}(X)$.

Par des variantes d'une construction de [7], nous disposons d'un foncteur de $\mathbb{A}^1$-localisation $\mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1} : \mathbf{Ho}(\mathcal{M}_i(X)) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{M}_i(X))$ adjoint à gauche de $\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{M}_i(X)) \subset \mathbf{Ho}(\mathcal{M}_i(X))$. La définition suivante est tirée de [6] :

Définition 1.2 *Nous dirons que le schéma X* possède la propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité *si le foncteur $\mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1}$ préserve les objets (-1)-connexes.*

La conjecture de $\mathbb{A}^1$-connexité de F. Morel est la suivante :

Conjecture (Conjecture de $\mathbb{A}^1$-connexité). *Tout schéma régulier X possède la propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité.*

Elle est connue lorsque X est le spectre d'un corps (voir [5] pour le cas d'un corps parfait et [6] pour le cas général). Dans [6], F. Morel énonce sa conjecture dans le cas des spectres simpliciaux i.e. pour $i=1$. En utilisant les spectres d'Eilenberg-MacLane il est facile de montrer que la propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité pour $\mathcal{M}_2(X)$ et $\mathcal{M}_3(X)$ découle de la propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité pour $\mathcal{M}_1(X)$. Il est également facile de voir que l'hypothèse de régularité est inessentielle du moins pour X de type fini sur un schéma régulier :

Lemme 1.3 *Soit X un schéma possédant la propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité. Alors tout sous-schéma fermé $Z \subset X$ possède également la propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité.*

Notons t l'immersion fermée de Z dans X. Soit E un objet (-1)-connexe de $\mathbf{Ho}(\mathcal{M}_i(Z))$. Il est bien connu que le foncteur $t_* : \mathcal{M}_i(Z) \longrightarrow \mathcal{M}_i(X)$ préserve les équivalences faibles locales ; il se dérive donc trivialement. En particulier, l'objet $\mathrm{R}t_*E \simeq t_*E$ est (-1)-connexe. Comme X possède la propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité, on déduit que $\mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1}\mathrm{R}t_*E$ est encore (-1)-connexe.

D'autre part, il est facile de voir (en utilisant la construction du foncteur de $\mathbb{A}^1$-localisation de [7]) que la transformation naturelle évidente : $\mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1}\mathrm{R}t_* \longrightarrow \mathrm{R}t_*\mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1}$ est inversible. On déduit finalement que $\mathrm{R}t_*\mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1}(E)$ est $\mathbb{A}^1$-connexe ce qui n'est possible que lorsque $\mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1}(E)$ est lui même $\mathbb{A}^1$-connexe.

La conjecture de $\mathbb{A}^1$-connexité est exactement ce qu'il faut pour que la t-structure évidente sur $\mathbf{Ho}(\mathcal{M}_i(X))$ induise une t-structure sur $\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{M}_i(X))$. En d'autres termes (voir [6]) :

Lemme 1.4 *Soit X un schéma possédant la propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité. Alors pour tout $E \in \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{M}_i(X))$, les faisceaux d'homologie $h_n(E)$ sont strictement $\mathbb{A}^1$-invariants.*

Rappelons qu'un faisceau Nisnevich F sur Sm/X est dit strictement $\mathbb{A}^1$-invariant lorsque pour tout X-schéma lisse U la projection de la droite affine induit un isomorphisme sur la cohomologie Nisnevich : $\mathrm{H}^*_{\mathrm{Nis}}(U,F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{A}^1_U,F)$.

Dans la section 3, nous construirons pour une surface normale X un objet $\mathcal{K}^{M,!}_{X,1}$ dans $\mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}(X)$ tel que $h_{-1}(\mathcal{K}^{M,!}_{X,1})$ n'est pas strictement $\mathbb{A}^1$-invariant. Ceci montrera que la surface X ne possède pas la propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité.

2. Un résultat préliminaire

Dans la suite, nous travaillerons exclusivement avec les complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts i.e. avec $\mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}(-) \subset \mathbf{Ho}(\mathcal{M}_3(-))$. Nous utiliserons les résultats de [9], [10].

Soit k un corps parfait et F un faisceau Nisnevich $\mathbb{A}^1$-invariant avec transferts sur Sm/k. On sait par [9] que F est strictement $\mathbb{A}^1$-invariant. On verra F comme un objet de $\mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}(k)$ concentré en degré 0. Pour V une variété lisse sur k, on dispose par [9] (voir aussi [3]) d'une résolution flasque de la restriction de F à V_{Nis} (le petit site Nisnevich de V) :

$$F_{|V} \to \coprod_{v\in V_0} v_*F_{|v} \to \coprod_{v\in V_1} v_*(F_{-1})_{|v} \to \dots$$

avec $F_{-n} = \underline{Hom}((\mathbb{G}_m,1)^{\wedge n},F)$, V_d l'ensemble des points de codimension d dans V et où l'on a désigné par la même lettre un point de V et son morphisme d'immersion dans V.

Soit $i : X \longrightarrow W$ une immersion fermée de k-schémas de type fini. Rappelons qu'on pose $i^!A = i^*\mathrm{fibre}(A \to \mathrm{R}j_*j^*A)$ pour $A \in \mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}(W)$ et j l'immersion ouverte complémentaire à i. On a la proposition suivante :

Proposition 2.1 *On suppose que W est régulier et soit π_W sa projection sur k. On note c la codimension de X dans W que l'on suppose constante. Soit U un X-schéma lisse. Il existe un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée des complexes de groupes abéliens :*

$$R\Gamma(U,i^!\pi_W^*F) \simeq \left[\coprod_{u\in U_0}(F_{-c})(u) \to \coprod_{u\in U_1}(F_{-c-1})(u) \to \dots \to \coprod_{u\in U_d}(F_{-c-d})(u) \to \dots\right]$$

où le groupe abélien $\coprod_{u\in U_0}(F_{-c})(u)$ est placé en degré cohomologique c.

Pour démontrer cette proposition, on se ramène facilement au cas : $U = X$. Il suffit alors de remarquer que :

$$R\Gamma(W,\pi_W^*F) \simeq \left[\coprod_{w\in W_0} F(w) \to \coprod_{w\in W_1} F_{-1}(w) \to \dots \to \coprod_{w\in W_e} F_{-e}(w) \to \dots\right]$$

$$R\Gamma(W-X,\pi_W^*F) \simeq \left[\coprod_{w\in W_0} F(w) \to \dots \to \coprod_{w\in W_c-X_0} F_{-c}(w) \to \dots \to \coprod_{w\in W_{c+d}-X_d} F_{-c-d}(w) \to \dots\right]$$

et d'utiliser le triangle distingué de complexes de groupes abéliens :

$$R\Gamma(X, i^!\pi_W^* F) \longrightarrow R\Gamma(W, \pi_W^* F) \longrightarrow R\Gamma(W - X, \pi_W^* F) \longrightarrow$$

On déduit également que l'objet $i^!\pi_W^* F$ est $\mathbb{A}^1$-local : c'est un objet de $\mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}(X)$.

On spécialisera la proposition précédente à F le faisceau de K-théorie de Milnor $\mathcal{K}_n^M$. Rappelons que ce faisceau est défini par la formule :

$$\mathcal{K}_n^M := h_0(\mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1}(\mathbb{Z}_{tr}(\mathbb{G}_m, 1)^{\wedge n}))$$

Pour $n = 0$, c'est simplement le faisceau constant $\mathbb{Z}$. Pour $n = 1$, c'est le faisceau $\mathscr{O}^\times$ des fonctions globales inversibles. On sait par [10] et [11] que $(\mathcal{K}_n^M)_{-1} = \mathcal{K}_{n-1}^M$. On en déduit alors que l'objet $i^!\pi_W^* \mathcal{K}_{n+c}^M[c] \in \mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}(X)$ ne dépend que de X. En effet, au dessus d'un X-schéma lisse U il est donné par le complexe :

$$\left[\coprod_{u \in U_0} \mathcal{K}_n^M(u) \to \coprod_{u \in U_1} \mathcal{K}_{n-1}^M(u) \to \cdots \to \coprod_{u \in U_n} \mathcal{K}_0^M(u)\right]$$

avec $\coprod_{u \in U_0} \mathcal{K}_n^M(u)$ placé en degré 0. On notera $\mathcal{K}_{X,n}^{M,!}$ cet objet de $\mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}(X)$.

Remarque : Soit π_X le morphisme structural du k-schéma X. Notons d_X la dimension de X qu'on supposera constante pour simplifier. On a dans la version stable $\mathbf{DM}(-)$ de $\mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}(-)$ des isomorphismes (voir [1], chapitre 1) : $i^!\pi_W^* \mathcal{K}_{n+c}^M[c] \simeq i^!\pi_W^! \mathcal{K}_{n+c-(c+d_X)}^M[c - (c + d_X)] \simeq \pi_X^! \mathcal{K}_{n-d_X}^M[-d_X]$. Ceci donne une preuve rigoureuse de l'indépendance de $\mathcal{K}_{X,n}^{M,!}$ de l'immersion de X dans une variété lisse.

3. Le contre-exemple

Nous montrerons que la conjecture de $\mathbb{A}^1$-connexité de F. Morel est fausse pour un k-schéma X en montrant que les faisceaux d'homologie de $\mathcal{K}_{X,n}^{M,!}$ ne sont pas toujours strictement $\mathbb{A}^1$-invariants. Ceci se produit déjà pour X une surface normale et $n = 1$.

Dans la suite on se donne une surface normale X définie sur un corps algébriquement clos (pour simplifier) ayant un seul point singulier $s \in X$. L'objet $\mathcal{K}_{X,1}^{M,!} \in \mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}(X)$ se calcule au dessus d'un X-schéma lisse connexe U à l'aide du complexe à deux termes :

$$[0 \to k(U)^\times \to \oplus_{u \in U_1} \mathbb{Z} \to 0]$$

Comme U est un schéma normal, le H^1 de ce complexe n'est autre que le groupe de classe $\mathrm{Cl}(U)$ de U ; c'est le quotient du groupe des diviseurs par le sous-groupe des diviseurs principaux. On en déduit :

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{Nis}}(U, \mathcal{K}_{X,1}^{M,!}) = \mathrm{H}_{-1}(\mathrm{R}\Gamma(U, \mathcal{K}_{X,1}^{M,!})) \simeq \mathrm{Cl}(U)$$

Il vient que le faisceau $h_{-1}(\mathcal{K}_{X,1}^{M,!})$ est le faisceau Nisnevich $c\ell_X$ associé au pré-faisceau :

$$\mathrm{Cl}_X : U \in \mathrm{ob}(Sm/X) \rightsquigarrow \mathrm{Cl}(U)$$

Notons le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Si le X-schéma lisse U se factorise par l'ouvert $X - s \subset X$, on a : $c\ell_X(U) = 0$. En particulier, si le faisceau $c\ell_X$ est strictement $\mathbb{A}^1$-invariant, il est de la forme $s_* F$ pour F un faisceau $\mathbb{A}^1$-invariant avec transferts sur Sm/s.*

Dans ce lemme (comme pour les complexes de Cousin de la section 2) on a noté par la même lettre un point ainsi que son morphisme d'immersion. Montrons que $c\ell_X$ s'annule au dessus des $(X - s)$-schémas. En effet, un $(X - s)$-schéma lisse est régulier. Il vient que $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Pic}(U)$. Mais le groupe de Picard s'annule sur les schémas locaux. La deuxième partie du lemme découle du théorème de localité de [7]. En effet, si $c\ell_X$ est strictement $\mathbb{A}^1$-invariant, il est $\mathbb{A}^1$-local comme objet de $\mathbf{Ho}(\mathcal{M}_3(X))$. Si l'on note j l'inclusion de l'ouvert $X - s$ dans X, on dispose alors d'un triangle distingué de localité (voir [7]) :

$$\mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1} \mathrm{L}j_\# j^* c\ell_X \longrightarrow c\ell_X \longrightarrow s_* \mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1} \mathrm{L}s^* c\ell_X \longrightarrow$$

dans $\mathbf{DM}_{\text{eff}}(X)$. Comme $j^* c\ell_X = 0$, on déduit que le morphisme $c\ell_X \longrightarrow s_* \mathrm{Loc}_{\mathbb{A}^1} \mathrm{L} s^* c\ell_X$ est inversible. D'où le résultat.

Pour continuer, on fixe une modification $e : X' \longrightarrow X$ avec :

– e un morphisme projectif induisant un isomorphisme : $e^{-1}(X - s) \longrightarrow X - s$,

– X' un k-schéma lisse irréductible,

– $C = e^{-1}(s)$ (munie de sa structure de s-schéma réduit) est partout de codimension 1 dans X'.

Pour un X-schéma lisse U, nous poserons $U' = U \times_X X'$, $U_s = U \times_X s$ et $U_C = U \times_X C$.

On note $R_0(U)$ le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(U')$ formé des diviseurs à support dans U_C. Si $(C_i)_{i=1,\dots,n}$ désignent les composantes irréductibles de C alors le groupe $R_0(U)$ est engendré par les diviseurs $[U \times_X C_i]$ (du moins pour U connexe). Il vient immédiatement que R_0 est un faisceau constant de rang fini.

On a un isomorphisme naturel en U : $\mathrm{Pic}(U')/R_0(U) \simeq \mathrm{Pic}(U' - U_C) \simeq \mathrm{Pic}(U - U_s)$. D'autre part, l'intersection par U_C fournit un morphisme (encore naturel en U) $\cap : \mathrm{Pic}(U') \longrightarrow \mathrm{Pic}(U_C)$.

On déduit de là une suite de morphismes naturels en U :

$$\mathrm{Cl}(U) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U - U_s) \simeq \mathrm{Pic}(U' - U_C) \simeq \mathrm{Pic}(U')/R_0(U) \xrightarrow{\cap} \mathrm{Pic}(U_C)/R(U)$$

avec R l'image de R_0 par $\cap$, qui est encore un faisceau constant de rang fini. En passant aux faisceaux associés, on déduit un morphisme :

$$\alpha : c\ell_X \longrightarrow s_*(\mathrm{Pic}_C/R)$$

avec Pic_C le faisceau Nisnevich sur Sm/s associé au pré-faisceau $V \in \mathrm{ob}(Sm/s) \rightsquigarrow \mathrm{Pic}(V \times_s C)$. On démontre :

Lemme 3.2 *Le morphisme α est surjectif.*

Il suffit clairement de prouver que le morphisme $\mathrm{Pic}(U') \xrightarrow{\cap} \mathrm{Pic}(U_C)$ est surjectif pour U un schéma local hensélien pro-lisse sur X.

Soit $a \in \mathrm{Pic}(U_C)$ qu'on supposera très ample relativement à U_s (ceci étant permis puisque les diviseurs amples engendrent $\mathrm{Pic}(U_C)$). La classe a est représentée par un sous-schéma Z_s de U_C fini sur U_s et contenu dans le lieu lisse de U_C. On ne restreint pas la généralité en supposant Z_s irréductible.

Soit V un ouvert affine de U' contenant Z_s et trivialisant le diviseur a. On supposera également que $V \cap U_C$ est dense dans toutes les fibres de la projection $U_C \longrightarrow U_s$ (il suffit que V vérifie cela pour la fibre au dessus du point fermé de U). Le sous-schéma Z_s est alors défini par l'annulation d'une fonction sur $V \cap U_C$. En relevant cette fonction à V, on obtient un sous-schéma Z' de V tel que $Z' \cap (V \cap U_C) = Z_s$.

On note Z l'adhérence de Z' dans U'. On a alors : $Z \cap U_C \cap V = Z_s$. Il vient que $(Z \cap U_C) - Z_s$ est contenu dans le sous-schéma fermé $U_C - (U_C \cap V)$ disjoint de Z_s. Ceci montre que Z_s est une composante connexe de $Z \cap U_C$.

Le sous-schéma Z est projectif sur U car U' est projectif sur U. Étant donné que $Z \cap U_C$ est contenu dans $Z_s \cup (U_C - V)$ on déduit de la densité de $U_C \cap V$ dans les fibres du U_s-schéma U_C que Z est fini sur U. En particulier, le schéma Z est une union disjointe de schémas henséliens. Puisque Z_s est une composante connexe du sous-schéma $Z \cap U_C$, on déduit en fin de compte qu'en remplaçant Z par sa composante connexe contenant Z_s on a : $Z \cap U_C = Z_s$. Il est alors évident que la classe du diviseur Z dans $\mathrm{Pic}(U')$ est envoyée sur a par $\mathrm{Pic}(U') \xrightarrow{\cap} \mathrm{Pic}(U_C)$.

Corollaire 3.3 *Si le faisceau Nisnevich $c\ell_X$ est strictement $\mathbb{A}^1$-invariant alors* Pic_C *est $\mathbb{A}^1$-invariant.*

Par le lemme 3.1 le faisceau $c\ell_X$ est de la forme s_*F avec F un faisceau $\mathbb{A}^1$-invariant avec transferts. La surjection $\alpha : c\ell_X \twoheadrightarrow s_*(\mathrm{Pic}_C/R)$ est induite par une surjection : $F \twoheadrightarrow \mathrm{Pic}_C/R$. Mais un quotient d'un faisceau $\mathbb{A}^1$-invariant avec transferts sur Sm/s est encore $\mathbb{A}^1$-invariant par [9] (voir aussi [4]). D'où la $\mathbb{A}^1$-invariance de Pic_C/R. Comme R est un faisceau constant, le faisceau Pic_C est également $\mathbb{A}^1$-invariant.

Pour terminer, il reste à trouver un X avec Pic_C non $\mathbb{A}^1$-invariant. Un tel exemple nous a été communiqué par L. Barbieri-Viale (voir notamment [2]) :

Exemple : Soit $X \subset \mathbb{P}^3$ la surface définie par l'équation homogène :

$$w(x^3 - y^2 z) + f(x, y, z) = 0$$

avec f un polynôme homogène de degré 4 suffisamment général. La surface X est alors lisse en dehors du point $s = [0 : 0 : 0 : 1]$. L'éclaté $X' \longrightarrow X$ du point s dans X fournit une modification avec X' lisse et C la courbe cuspidale d'équation $x^3 - y^2 z = 0$. Il est bien connu que $\mathrm{Pic}_C = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{G}_a$ avec $\mathbb{G}_a$ le groupe additif.

Remarque : Nous avons montré que la surface X de l'exemple précédent ne possède pas la propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité. En utilisant le lemme 1.3, on peut montrer que tout k-schéma Y de dimension supérieure à 3 ne possède pas la propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité. Il suffit pour cela de trouver une surface tracée dans Y ayant une singularité équivalente à celle de l'exemple précédent. Ceci est toujours possible. On peut également montrer que les k-schémas de dimension 2 ne possèdent pas la propriété de $\mathbb{A}^1$-connexité. On se ramène facilement au cas de $\mathbb{A}^2_k$. On considère ensuite un morphisme fini $e : V \longrightarrow \mathbb{A}^1$ avec V un voisinage affine du point singulier de la surface X ci-dessus. Ensuite on montre que $h_{-1}(e_* \mathcal{K}^{M,!}_{V,1})$ n'est pas strictement $\mathbb{A}^1$-invariant. Notons en guise de conclusion que la conjecture de $\mathbb{A}^1$-connexité est encore ouverte pour les schémas de dimension 1.

Remerciements

Cette note a été inspirée par des discussions que j'ai eu avec Luca Barbieri-Viale sur la K-théorie négative des variétés singulières. Je tiens à le remercier ici. Je remercie également Fabien Morel qui m'a encouragé à rédiger cette note.

Références

[1] J. Ayoub : Thèse de Doctorat de l'Université Paris 7 : Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. *Preprint, 12 Décembre 2005, K-theory Preprint Archives.* `http ://www.math.uiuc.edu/K-theory/0761/`.

[2] L. Barbieri-Viale et V. Srinivas : The Néron-Severi group and the mixed Hodge structure on H^2. Appendix to "On the Néron-Severi group of a singular variety" [J. Reine Angew. Math. 435 (1993), 65-82]. *Journal of Reine Angew. Math. 450 (1994), 37-42.*

[3] F. Déglise : Thèse de Doctorat de l'Université Paris 7 : Module homotopiques avec transfers et motifs génériques. *Preprint, 16 January 2006, K-theory Preprint Archives.* `http ://www.math.uiuc.edu/K-theory/0766/`.

[4] C. Mazza, V. Voevodsky et C. Weibel : Lectures in motivic cohomology (lectures given by V. Voevodsky in 1999-2000). `http ://math.rutgers.edu/~weibel/motiviclectures.html`.

[5] F. Morel : An introduction to $\mathbb{A}^1$-homotopy theory. *In Contemporary Developments in Algebraic K-theory, I.C.T.P Lecture notes, 15 (2003), pp. 357-441, M. Karoubi, A.O. Kuku , C. Pedrini (ed.).*

[6] F. Morel : The stable $\mathbb{A}^1$-connectivity theorems. *Preprint (June 2004). A paraître dans : K-theory Journal. Disponible à :* `http ://www.mathematik.uni-muenchen.de/~morel/listepublications.html`.

[7] F. Morel et V. Voevodsky : $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes. *Publications Mathematiques de l'H.I.E.S, volume 90(1999), p. 45-143.*

[8] A. Suslin et V. Voevodsky : Relative cycles and chow sheaves. *Cycles, transfers, and motivic homology theories, 10-86, Ann. of Math. Stud., 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.*

[9] V. Voevodsky : Cohomological theory of presheaves with transfers. *Cycles, transfers, and motivic homology theories, 87-137, Ann. of Math. Stud., 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.*

[10] V. Voevodsky : Triangulated categories of motives over a field. *Cycles, transfers, and motivic homology theories, 188-238, Ann. of Math. Stud., 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.*

[11] V. Voevodsky : Cancellation theorem. *Preprint, January 28, 2002, K-theory Preprint Archives.* `http ://www.math.uiuc.edu/K-theory/0541/`.