Модели тройных накрытий

Эндрю Креш[*], Юрий Чинкель[†]

1 ноября 2018

Аннотация

Мы представляем модель данного накрытия алгебраических многообразий степени 3, для которой накрытие является конечным накрытием гладких проективных многообразий с гладким дивизором ветвления.

1 Введение

Пусть k – поле характеристики 0. Хорошо известно, что всякий морфизм проективных многообразий $\psi\colon T \to S$ над k, конечный степени 2 в общей точке, можно дополнить коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} \widetilde{T} \arrow[r, dashed, "\varrho_T"] \arrow[d, "\tilde{\psi}"'] & T \arrow[d, "\psi"] \\ \widetilde{S} \arrow[r, "\varrho_S"] & S \end{tikzcd} \tag{1}$$

с гладкими проективными многообразиями $\widetilde{S}$ и $\widetilde{T}$, таким образом, что ϱ_S является бирациональным морфизмом, ϱ_T является бирациональным отображением и $\tilde{\psi}$ является конечным накрытием степени 2. Множество точек ветвления конечного накрытия степени 2 гладких проективных многообразий является гладким дивизором.

[*]Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich, Switzerland, andrew.kresch@math.uzh.ch

[†]Courant Institute, 251 Mercer Street, New York, NY 10012, USA, Simons Foundation, 160 Fifth Av., New York, NY 10010, USA, tschinkel@cims.nyu.edu

В этой заметке мы докажем аналогичную теорему для тройных накрытий, над совершенным полем, характеристика которого не равна 2 или 3. Хорошие модели тройных накрытий важны для конструкции моделей расслоений (над базой любой размерности), в тех случаях, когда группа симметрий геометрического общего слоя допускает сюръективный гомоморфизм на симметрическую группу $\mathfrak{S}_3$, например, для расслоений на поверхности дель Пеццо степени 6 [1]–[4].

Есть обширная литература про тройные накрытия поверхностей, см. [5]–[9]. В [8] доказана теорема для тройных накрытий поверхностей, похожая на теорему в этой заметке; стратегия доказательства связна с классическим решением кубического уравнения. Наша стратегия связана с геометрией и с детальным исследованием ветвления в коразмерности 1 и 2.

Мы строим $\widetilde{\psi}\colon \widetilde{T} \to \widetilde{S}$ таким образом, что дивизор ветвления является гладким. С другой стороны, в геометрических приложениях встречаются много (нециклических) накрытий гладких проективных многообразий степени 3, у которых дивизор ветвления имеет особые точки, например 6-го порядка с 6 каспами лежащими на конике, для общей проекции гладкой кубичной поверхности [10]. Такое накрытие вполне разветвлено (геометрически, только один прообраз в T) только над каспами, но после применения нашей процедуры станет таким над целыми компонентами дивизора ветвления.

Как показано в [11, Exa. 3.1], таких моделей накрытий поверхностей степени ≥ 4 как в (1) не существуют, в общем случае.

Работа второго автора отчасти поддержана грантом NSF 1601912 и Лабораторией зеркальной симметрии НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ Договор № 14.641.31.0001.

2 Конечные накрытия и ветвление

Пусть k поле и S гладкое многообразие над k, то есть, отделимая геометрически целая схема конечного типа над k. Нормализация S в конечном расширении поля $k(S)$ дает каноническое соответствие между конечными расширениями $k(S)$ и связными нормальными k-схемами с конечным сюръективным морфизмом на S. Множество точек, где морфизм $T \to S$ не этален, является замкнутым подмножеством $Z \subset T$, которое

- равно T тогда и только тогда, когда ассоциированное расширение $k(S)$ не сепарабельно;

- имеет коразмерность 1 или пусто, по теореме чистоты Зарисского-Нагаты, в противном случае [12, Thm. X.3.1].

Следовательно, если существует дивизор с простыми нормальными пересечениями $D \subset S$, $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$, с неприводимыми D_i для всех i, такой, что $T \times_S (S \smallsetminus D) \to S$ этально, тогда множество точек ветвления (образ Z в S) имеет форму $\bigcup_{i \in I} D_i$, для некоторых $I \subset \{1, \ldots, n\}$.

После выбора конечного расширения $k(S)$, говоря о ветвлении, мы имеем ввиду ветвление $T \to S$, где T нормализация S в этом расширении $k(S)$.

3 Основной результат

Пусть k совершенное поле характеристики, не равной 2 или 3, S гладкое проективное многообразие над k и T проективное многообразие с морфизмом на S, степени 3 в общей точке. Если расширение полей $k(T)/k(S)$ циклично, то такой-же аргумент, как и для двойных накрытий, дает коммутативную диаграмму (1), где $\tilde{\psi}\colon \widetilde{T} \to \widetilde{S}$ цикличное накрытие гладких проективных многообразий степени 3 с ветвлением над гладким дивизором $\widetilde{S}$. Как и в случае двойных накрытий, необходимо разрешение особенностей на S; например, достаточно иметь:

(R) вложенное разрешение особенностей дивизоров на S последовательностью раздутий с гладким центром.

Конечно, это имеет место, когда характеристика k равна 0 (Хиронака). Когда характеристика k положительна, это имеет место для $\dim(S) \leq 3$ (тривиально для $\dim(S) \leq 2$, теорема Абьянкара для $\dim(S) = 3$).

Теорема 1. *Пусть k совершенное поле характеристики, не равной 2 или 3, S гладкое проективное многообразие над k и $\psi\colon T \to S$ морфизм проективных многообразий, конечный степени 3 в общей* *точке. Предположим, что* (R) *выполнено для* S*. Тогда существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{T} \arrow[r, dashed, "\varrho_T"] \arrow[d, "\tilde{\psi}"'] & T \arrow[d, "\psi"] \\ \widetilde{S} \arrow[r, "\varrho_S"] & S \end{tikzcd}$$

с гладкими проективными многообразиями $\widetilde{S}$ *и* $\widetilde{T}$*, таким образом, что*

- ϱ_S *бирациональный морфизм;*
- ϱ_T *бирациональное отображение;*
- $\tilde{\psi}$ *конечное накрытие степени* 3*, с ветвлением над гладким дивизором в* $\widetilde{S}$*.*

Доказательство. Как уже упомянуто, в случае цикличного $k(T)/k(S)$ это достигается с помощью (R), превращая дивизор ветвления в дивизор с простыми нормальными пересечениями и повторно раздувая компоненты пересечений пар компонент дивизора ветвления, достигая гладкости дивизора ветвления. Существенным для второго шага является наблюдение, что компонента Y пересечения $D_i \cap D_j$, $i \neq j$, компонент дивизора ветвления с простыми нормальными пересечениями $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ (полученным на первом шагу) может быть одной из двух типов, в зависимости от того, содержит ли дивизор ветвления для $k(T)/k(S)$ раздутия $B\ell_Y S$ исключительный дивизор раздутия как одну из компонент. Пусть ℓ, соответственно m, обозначает число компонент $Y \subset D_i \cap D_j$, для некоторых $i \neq j$, для которых исключительный дивизор $B\ell_Y S$ является, или нет, компонентой дивизора ветвления. (Для простоты, мы продолжаем обозначать S, даже если на первом шагу надо бирационально преобразовывать.) Раздувая Y, для которого исключительный дивизор не является компонентой дивизора ветвления, когда это возможно, а в противном случае, раздувая любой Y, мы получаем, для $(\ell, m) \neq (0, 0)$ пару (ℓ', m'), для $S' := B\ell_Y S$, которая меньше, чем (ℓ, m), в лексиграфическом порядке.

В нецикличном случае, мы применяем такой-же первый шаг, превращая дивизор ветвления в дивизор с простыми нормальными пересечениями, с помощью (R). Теперь дивизор ветвления имеет компоненты двух видов: некоторые, например $D_1 \cup \dots \cup D_n$, с простым ветвлением, и другие, $D'_1 \cup \dots \cup D'_{n'}$ с полным ветвлением. Мы будем считать, что все D_i и $D'_{i'}$ неприводимы.

Дискриминант $k(T)/k(S)$ определяет квадратичное расширение $k(S)$ с ветвением в $D_1 \cup \dots \cup D_n$. Раздувая пересечения пар компонент, мы добиваемся того, что $D_i \cap D_j = \emptyset$, для $i \neq j$.

Мы утверждаем, что $D_i \cap D'_{i'} = \emptyset$, для всех i и i'. Это следует из того, что прообраз $D'_{i'}$ в двойном дискриминантном накрытии был бы неприводим. Мы рассуждаем от противного, заменяя S строгой гензелизацией локального кольца S в общей точке одной из компонент $D_i \cap D'_{i'}$. Мы по-прежнему имеем кубическое расширение поля вычетов общей точки, с нетривиальным дискриминантом, что дает циклическое кубическое расширение дискриминантного накрытия. Оно должно происходить из циклического кубического расширения внизу, заменой базы к двойному накрытию, и мы получаем противоречие.

Может случиться, что $D'_{i'} \cap D'_{j'} \neq \emptyset$, для некоторых $i' \neq j'$, но тогда, как в начале доказательства, мы исправим это раздутием компонент пересечений $D'_{i'} \cap D'_{j'}$. Мы получим гладкий дивизор ветвления и, следовательно, гладкую модель накрытия. $\square$

Список литературы

[1] Ж.-Л. Кольо-Телен, Н. А. Карпенко, А. С. Меркурьев, Рациональные поверхности и каноническая размерность группы PGL_6, *Алгебра и анализ*, 19(5):159–178, 2007.

[2] M. Blunk, Del Pezzo surfaces of degree 6 over an arbitrary field, *J. Algebra*, 323(1):42–58, 2010.

[3] N. Addington, B. Hassett, Yu. Tschinkel, A. Várilly-Alvarado, Cubic fourfolds fibered in sextic del Pezzo surfaces, `arXiv:1606.05321`.

[4] A. Kuznetsov, Derived categories of families of sextic del Pezzo surfaces, `arXiv:1708.00522`.

[5] P. du Val, On triple planes having branch curves of order not greater than twelve, *J. London Math. Soc.*, 8(3):199–206, 1933.

[6] R. Miranda, Triple covers in algebraic geometry, *Amer. J. Math.*, 107(5):1123–1158, 1985.

[7] H. Tokunaga, Triple coverings of algebraic surfaces according to the Cardano formula, *J. Math. Kyoto Univ.*, 31(2):359–375, 1991.

[8] S.-L. Tan, Triple covers on smooth algebraic varieties, *Geometry and Nonlinear Partial Differential Equations (Hangzhou, 2001)*, *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 143–164.

[9] T. Shirane, A note on normal triple covers over $\mathbf{P}^2$ with branch divisors of degree 6, *Kodai Math. J.*, 37(2):330–340, 2014.

[10] O. Zariski, On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve *Amer. J. Math.*, 51(2):305–328, 1929.

[11] T. Shirane, On 4-fold covers of algebraic surfaces, *Kyushu J. Math.*, 64(2):297–322, 2010.

[12] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

MODELS OF TRIPLE COVERS

ANDREW KRESCH AND YURI TSCHINKEL

Abstract. We exhibit, for a degree 3 covering of algebraic varieties, a model where the covering is a finite covering of smooth projective varieties branched over a smooth divisor.

1. Introduction

Let k be a field of characteristic 0. It is well known that any morphism of projective varieties $\psi\colon T \to S$ over k, that is generically finite of degree 2, can be put into a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \widetilde{T} \arrow[r, dashed, "\varrho_T"] \arrow[d, "\tilde{\psi}"'] & T \arrow[d, "\psi"] \\ \widetilde{S} \arrow[r, "\varrho_S"] & S \end{tikzcd} \tag{1}$$

with smooth projective varieties $\widetilde{S}$ and $\widetilde{T}$, such that ϱ_S is a birational morphism, ϱ_T is a birational map, and $\tilde{\psi}$ is a degree 2 finite covering. The branch locus of a degree 2 finite covering of smooth projective varieties is a smooth divisor.

In this note, we establish an analogous theorem for triple covers, over perfect fields of characteristic not equal to 2 or 3. Good models of triple covers are important for the construction of models of fibrations (over a base of arbitrary dimension), when the symmetry group of the geometric generic fiber admits the symmetric group $\mathfrak{S}_3$ as a quotient, as is the case for fibrations in sextic del Pezzo surfaces [1]–[4].

There is an extensive literature on triple covers of surfaces, e.g., [5]–[9]. In [8], a theorem similar to the one in this note is proved for triple covers of surfaces, by a method related to the classical solution of a cubic equation. Our approach is more geometric, and is based on an analysis of ramification in codimension 1 and 2.

We produce $\tilde{\psi}\colon \widetilde{T} \to \widetilde{S}$, ramified over a smooth divisor of $\widetilde{S}$. By contrast, many of the (non-cyclic) degree 3 coverings of smooth projective varieties that occur naturally have singular branch locus, such as

Date: November 1, 2018.

6-cuspidal sextic with cusps on a conic as branch locus of a general projection of a smooth cubic surface [10]. Such a covering is totally ramified (geometrically, only one pre-image in T) only over the cusps; after the procedure described here has been applied there is total ramification over entire components of the branch locus.

As explained in [11, Exa. 3.1], models of degree ≥ 4 covers of surfaces as in (1) do not exist in general.

Acknowledgments: The second author was partially supported by NSF grant 1601912 and by the Laboratory of Mirror Symmetry NRU HSE, RF Government grant, ag. No. 14.641.31.0001.

2. Finite covers and ramification

Let k be a field and S a smooth variety over k, i.e., a separated geometrically integral scheme of finite type over k. By the normalization of S in a finite field extension of $k(S)$ we have a canonical correspondence between finite field extensions of $k(S)$ and connected normal k-schemes with finite surjective morphism to S. The set of points where such a morphism $T \to S$ fails to be étale is a closed subset $Z \subset T$ which is

- equal to T if and only the associated finite field extension of $k(S)$ is inseparable;
- is otherwise of pure codimension 1 or empty, by the Zariski-Nagata purity theorem [12, Thm. X.3.1].

Consequently, if there exists a simple normal crossing divisor $D \subset S$, $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ with D_i irreducible for all i, such that $T \times_S (S \smallsetminus D) \to S$ is étale, then the branch locus (the image of Z in S) is of the form $\bigcup_{i \in I} D_i$ for some $I \subset \{1, \dots, n\}$.

Once a finite field extension of $k(S)$ has been specified, when we refer to the branch locus we mean the branch locus of $T \to S$, where T is the normalization of S in the given field extension of $k(S)$.

3. Main result

Let k be a perfect field of characteristic not equal to 2 or 3, S a smooth projective variety over k, and T a projective variety with morphism to S that is generically finite of degree 3. If the field extension $k(T)/k(S)$ is cyclic, then an argument just as in the case of double covers yields a commutative diagram (1), where $\widetilde{\psi}\colon \widetilde{T} \to \widetilde{S}$ is a cyclic degree 3 covering of smooth projective varieties branched over a smooth divisor on $\widetilde{S}$. As in the case of double covers, a form of resolution of singularities for divisors on S is required; for instance, it is sufficient if the following is available:

(R) embedded resolution of singularities of divisors on S by iterated blow-up with smooth center.

Of course, this is available (Hironkaka) when k has characteristic zero. When k has positive characteristic, this is available for $\dim(S) \leq 3$ (trivial/classical for $\dim(S) \leq 2$, due to Abhyankar for $\dim(S) = 3$).

Theorem 1. *Let k be a perfect field of characteristic not equal to 2 or 3, S a smooth projective variety over k, and $\psi\colon T \to S$ a morphism of projective varieties that is generically finite of degree 3. We suppose that* (R) *holds for S. Then there exists a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{T} \arrow[r, dashed, "\varrho_T"] \arrow[d, "\tilde{\psi}"'] & T \arrow[d, "\psi"] \\ \widetilde{S} \arrow[r, "\varrho_S"] & S \end{tikzcd}$$

with smooth projective varieties $\widetilde{S}$ and $\widetilde{T}$, such that

- *ϱ_S is a birational morphism;*
- *ϱ_T is a birational map;*
- *$\widetilde{\psi}$ is a degree 3 finite covering, branched over a smooth divisor of $\widetilde{S}$.*

Proof. As mentioned, when $k(T)/k(S)$ is cyclic this is achieved by applying (R) to make the branch locus into a simple normal crossing divisor and repeatedly blowing up components of the intersection of a pair of components of the branch locus to make the branch locus smooth. Essential for the second step is the observation that a component Y of an intersection $D_i \cap D_j$ $(i \neq j)$ of components of the simple normal crossing branch locus $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ (achieved by the first step) may be assigned to one of two types, according to whether the branch locus for $k(T)/k(S)$ of the blow-up $B\ell_Y S$ has the exceptional divisor as a component. Let ℓ, respectively m denote the number of components $Y \subset D_i \cap D_j$ for some $i \neq j$, for which the exceptional divisor of $B\ell_Y S$ is, respectively is not, a component of the branch locus. (For simplicity of notation we continue to write S, even though the first step potentially makes a birational modification.) By blowing up some Y for which the exceptional divisor is not a component of the branch locus whenever this is possible, and otherwise blowing up any Y, we obtain for $(\ell, m) \neq (0,0)$ a pair (ℓ', m') associated with $S' := B\ell_Y S$ that is smaller than (ℓ, m) in lexicographic order.

In the non-cyclic case we proceed with the same first step, making the branch locus into a simple normal crossing by applying (R). Now the branch locus has components of two kinds: some, say $D_1 \cup \cdots \cup D_n$, with simple ramification and others, $D'_1 \cup \cdots \cup D'_{n'}$ with total ramification. We adopt the convention that the D_i and $D'_{i'}$ are all irreducible.

The discriminant of $k(T)/k(S)$ determines a quadratic extension of $k(S)$ with branch locus $D_1 \cup \cdots \cup D_n$. By blowing up intersections of pairs of components, we achieve $D_i \cap D_j = \emptyset$ for $i \neq j$.

We claim that $D_i \cap D'_{i'} = \emptyset$ for all i and i'. This follows from the fact that the pre-image of $D'_{i'}$ in the discriminant double cover would be irreducible. We argue by contradiction, replacing S by a strict henselization of the local ring of S at the generic point of a component of $D_i \cap D'_{i'}$. We still have a cubic extension of the residue field of the generic point, still with nontrivial discriminant, and this yields a cyclic cubic extension of the discriminant cover. This must be obtained from a cyclic cubic extension below by base change to the double cover, and we have a contradiction.

We may have $D'_{i'} \cap D'_{j'} \neq \emptyset$ for some $i' \neq j'$, but then as described at the beginning of the proof we may deal with this by blowing up components of intersections $D'_{i'} \cap D'_{j'}$. Then we have a smooth branch locus and hence a smooth model of the covering. $\square$

References

[1] J.-L. Colliot-Thélène, N. A. Karpenko, and A. S. Merkurjev, Rational surfaces and the canonical dimension of the group PGL_6, *Algebra i Analiz*, 19(5):159–178, 2007.

[2] M. Blunk, Del Pezzo surfaces of degree 6 over an arbitrary field. *J. Algebra*, 323(1):42–58, 2010.

[3] N. Addington, B. Hassett, Yu. Tschinkel, and A. Várilly-Alvarado, Cubic fourfolds fibered in sextic del Pezzo surfaces, `arXiv:1606.05321`.

[4] A. Kuznetsov, Derived categories of families of sextic del Pezzo surfaces, `arXiv:1708.00522`.

[5] P. du Val, On triple planes having branch curves of order not greater than twelve, *J. London Math. Soc.*, 8(3):199–206, 1933.

[6] R. Miranda, Triple covers in algebraic geometry, *Amer. J. Math.*, 107(5):1123–1158, 1985.

[7] H. Tokunaga, Triple coverings of algebraic surfaces according to the Cardano formula, *J. Math. Kyoto Univ.*, 31(2):359–375, 1991.

[8] S.-L. Tan. Triple covers on smooth algebraic varieties, *Geometry and nonlinear partial differential equations (Hangzhou, 2001)*, *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 143–164.

[9] T. Shirane, A note on normal triple covers over $\mathbf{P}^2$ with branch divisors of degree 6, *Kodai Math. J.*, 37(2):330–340, 2014.

[10] O. Zariski, On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve, *Amer. J. Math.*, 51(2):305–328, 1929.

[11] T. Shirane, On 4-fold covers of algebraic surfaces, *Kyushu J. Math.*, 64(2):297–322, 2010.

[12] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich, Switzerland
Email address: andrew.kresch@math.uzh.ch

Courant Institute, 251 Mercer Street, New York, NY 10012, USA

Simons Foundation, 160 Fifth Av., New York, NY 10010, USA
Email address: tschinkel@cims.nyu.edu