



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Joseph NAJNUDEL

**Pénalisations de l'araignée brownienne**

Tome 57, n° 4 (2007), p. 1063-1093.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2007\\_\\_57\\_4\\_1063\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_4_1063_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# PÉNALISATIONS DE L'ARAIGNÉE BROWNIENNE

par Joseph NAJNUDEL

---

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous pénalisons la loi d'une araignée brownienne  $(A_t)_{t \geq 0}$  prenant ses valeurs dans un ensemble fini  $E$  de demi-droites concourantes, avec un poids égal à  $\frac{1}{Z_t} \exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)$ , où  $t$  est un réel positif,  $(\alpha_k)_{k \in E}$  une famille de réels indexés par  $E$ ,  $\gamma$  un paramètre réel,  $X_t$  la distance de  $A_t$  à l'origine,  $N_t$  ( $\in E$ ) la demi-droite sur laquelle se trouve  $A_t$ ,  $L_t$  le temps local de  $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$  à l'origine, et  $Z_t$  la constante de normalisation. Nous montrons que la famille des mesures de probabilité obtenue par ces pénalisations converge vers une probabilité limite quand  $t$  tend vers l'infini, et nous étudions quelques propriétés de cette probabilité limite.

ABSTRACT. — In this paper, we penalize a Walsh Brownian motion  $(A_t)_{t \geq 0}$  (also called Brownian spider), which takes values in a finite set  $E$  of intersecting rays, with a weight equal to  $\frac{1}{Z_t} \exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)$ , where  $t$  is a positive real,  $(\alpha_k)_{k \in E}$  a family of real numbers indexed by  $E$ ,  $\gamma$  a real parameter,  $X_t$  the distance from  $A_t$  to the origin,  $N_t$  ( $\in E$ ) the ray on which  $A_t$  is to be found,  $X_t$  the local time of  $(A_s)_{0 \leq s \leq t}$  at the origin, and  $Z_t$  the normalization constant. We show that the family of probability measures obtained by these penalizations converges to a limit probability measure as  $t$  tends to infinity, and we study some properties of this limit probability measure.

## 1. Présentation du problème et des principaux résultats obtenus

### 1.1. Introduction

Récemment, de nombreuses études de pénalisations du mouvement brownien ont été effectuées, en particulier par B. Roynette, P. Vallois et M. Yor (voir [7], [8], [9], [10], [11]).

---

*Mots-clés* : pénalisation, temps local, araignée brownienne.

*Classification math.* : 60B10, 60J65, 60G17, 60G44, 60J25, 60J55.

Dans [8], les pénalisations étudiées sont des fonctions de la valeur  $X_t$  atteinte par un mouvement brownien en un temps  $t$ , et de  $S_t$ , suprémum sur  $[0, t]$  de ce mouvement brownien. Plus précisément, on considère une famille de mesures de probabilité  $(\mathbf{W}^{(t)})_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$  vérifiant, pour tout  $\Lambda_t$  appartenant à la tribu  $\mathcal{F}_t$  engendrée par  $(X_s)_{s \in [0, t]}$  ( $(X_t)_{t \geq 0}$  étant le processus canonique de  $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ ) :

$$\mathbf{W}^{(t)}(\Lambda_t) = \frac{\mathbf{W}[1_{\Lambda_t} f(X_t, S_t)]}{\mathbf{W}[f(X_t, S_t)]}$$

où  $S_t$  est le maximum de  $X_s$  pour  $s \in [0, t]$ ,  $\mathbf{W}$  la mesure de Wiener, et  $f$  une fonction de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}_+$ .

B. Roynette, P. Vallois et M. Yor montrent alors que pour certains choix de la fonction  $f$ , il existe une mesure de probabilité  $\mathbf{W}^{(\infty)}$  (dépendant de  $f$ ) sur  $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$  telle que pour tout  $s \geq 0$  et tout  $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$  :

$$\mathbf{W}^{(t)}(\Lambda_s) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{W}^{(\infty)}(\Lambda_s)$$

Un des cas où cette convergence a lieu est celui où  $f(a, y) = \exp(\lambda y + \mu a)$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ .

Par un changement de mouvement brownien, les résultats de [8] peuvent être adaptés au cas où  $S_t$  est remplacé par  $L_t$  (temps local en 0 de  $(X_u)_{u \leq t}$ ), et  $X_t$  par  $L_t - |X_t|$ ; en effet, le théorème d'équivalence de Lévy affirme que  $(S_t - X_t, S_t)_{t \geq 0}$  a même loi que  $(|X_t|, L_t)_{t \geq 0}$ .

Dans ces conditions, les poids exponentiels étudiés dans [8] prennent la forme :  $\frac{1}{Z_t} \exp(\alpha |X_t| + \gamma L_t)$  où  $\alpha$  et  $\gamma$  sont des paramètres réels, et  $Z_t$  est la constante de normalisation.

Le but de notre article est de généraliser l'étude de ces pénalisations exponentielles à toutes les araignées browniennes prenant leurs valeurs dans un ensemble fini de demi-droites concourantes.

## 1.2. Quelques rappels et définitions

Dans ce paragraphe, nous allons définir le cadre général dans lequel on peut construire les araignées browniennes (étudiées dans [1] et [12]), et nous énoncerons plusieurs propriétés de ces processus, utiles par la suite.

a) Soit  $(E, \mu)$  un espace de probabilité fini ; on suppose  $\mu(\{m\}) > 0$  pour tout  $m \in E$ . Cet espace de probabilité est fixé une fois pour toutes dans cet article ; par conséquent, nous omettrons en général d'indiquer la dépendance en  $(E, \mu)$  des quantités et des mesures de probabilité que nous introduirons.

On considère, sur l'espace  $\mathbf{R}_E = \{(0, 0)\} \cup (\mathbf{R}_+^* \times E)$ , la distance  $d$  définie par :

$$d((x, k), (y, l)) = |x - y|\mathbf{1}_{k=l} + (x + y)\mathbf{1}_{k \neq l}$$

Cette distance permet de considérer  $\mathcal{C}_E$ , espace des fonctions continues de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}_E$ , et de munir cet espace de la tribu  $\mathcal{T}_E$  associée à la topologie de la convergence uniforme.

b) Nous désignons par  $(A_t = (X_t, N_t))_{t \geq 0}$  le processus canonique (à valeurs dans  $\mathbf{R}_E$ ) associé à l'espace  $(\mathcal{C}_E, \mathcal{T}_E)$  et nous notons, pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,  $\mathcal{F}_t$  la sous-tribu de  $\mathcal{T}_E$  engendrée par  $(A_s)_{0 \leq s \leq t}$ .

Pour  $(x, k) \in \mathbf{R}_E$ , on peut alors considérer, sur  $\mathcal{C}_E$ , la mesure de probabilité  $\mathbf{W}_{(x,k)}$ , sous laquelle  $(A_t)_{t \geq 0}$  est une araignée brownienne issue de  $(x, k)$ .

c) Rappelons (voir [1]) que cette araignée brownienne est un processus de Feller qu'il est possible de caractériser par son semi-groupe  $(P_t)_{t \geq 0}$ ; pour toute fonction  $f$  borélienne bornée :

$$P_t f(x, k) = 2 \sum_{m \in E} \mu_m \int_{\mathbf{R}_+^*} dy p_t(x+y) f(y, m) + \int_{\mathbf{R}_+^*} dy (p_t(x-y) - p_t(x+y)) f(y, k)$$

avec  $\mu_m = \mu(\{m\})$  (notation conservée dans la suite de l'article) et  $p_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-a^2/2t}$ .

d) Pour tout  $(x, k) \in \mathbf{R}_E$ , le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , sous  $\mathbf{W}_{(x,k)}$ , est un mouvement brownien réfléchi issu de  $x$ .

D'autre part, si  $T_0 = \inf\{t \geq 0, X_t = 0\}$  et si  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des intervalles d'excursion de  $(X_t)_{t \geq T_0}$ ,  $N_t$  est constant sur chaque intervalle  $I \in \mathcal{I}$  et on peut donc poser  $N_t = N_I$  pour  $t \in I$ . On montre alors que conditionnellement à  $(X_t)_{t \geq 0}$ , les  $(N_I)_{I \in \mathcal{I}}$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mu$ .

En particulier, pour tout  $t \geq 0$ , conditionnellement au fait que  $T_0 \leq t$ ,  $N_t$  est une variable aléatoire de loi  $\mu$ , indépendante de  $(X_s)_{s \geq 0}$ .

e) Dans notre étude de l'araignée brownienne, interviennent des processus à valeurs réelles appelés processus bang-bang.

Par définition, un processus bang-bang de paramètre  $\gamma > 0$  est un processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$ , supposé issu de zéro dans cet article, et vérifiant l'équation différentielle stochastique :

$$dY_t = -\gamma \operatorname{sgn}(Y_t) dt + d\beta_t$$

où  $\beta$  est un mouvement brownien standard.

Un tel processus admet une probabilité invariante, égale à la loi d'une variable exponentielle symétrique de paramètre  $2\gamma$ , et son temps local en zéro, pris jusqu'à l'instant  $t$ , est p.s. équivalent à  $\gamma t$ , quand  $t$  tend vers l'infini.

De plus, la propriété suivante nous sera utile par la suite : si  $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien avec drift  $\gamma > 0$  issu de 0, et si on pose, pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,  $S_t = \sup\{\tilde{Y}_s, s \in [0, t]\}$ , alors le processus  $(S_t - \tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$  est la valeur absolue d'un processus bang-bang de paramètre  $\gamma$  (voir [3]).

Pour des discussions plus générales sur les processus de ce type, et en particulier sur leur semi-groupe, voir également [5].

### 1.3. Définition des pénalisations étudiées et énoncé des théorèmes principaux de l'article

Après avoir défini la loi de l'araignée brownienne, nous lui appliquons les changements de probabilité suivants : pour  $\alpha = (\alpha_i)_{i \in E}$  une famille de réels indexés par  $E$ ,  $\gamma \in \mathbf{R}$  et  $t \in \mathbf{R}_+$ , on pose

$${}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(t)} = \frac{\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)}{\mathbf{W}_{(0,0)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]} \cdot \mathbf{W}_{(0,0)}$$

où  $L_t$  est le temps local en 0 de  $(X_s)_{s \leq t}$  :

$$L_t = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{X_s \leq \epsilon} ds$$

(en fait, la limite inférieure ci-dessus est presque sûrement une limite).

Le but de notre article est de prouver les théorèmes suivants :

**THÉORÈME 1.1.** — *Il existe une mesure de probabilité  ${}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$  (sur la tribu  $\mathcal{F}_\infty$  engendrée par les  $\mathcal{F}_s$ ,  $s \in \mathbf{R}_+$ ), telle que pour tout  $s \in \mathbf{R}_+$  et tout  $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$  :*

$${}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(t)}(\Lambda_s) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} {}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}(\Lambda_s)$$

De plus, on a :

$${}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}(\Lambda_s) = \mathbf{W}_{(0,0)}[\mathbf{1}_{\Lambda_s} M(\alpha, \gamma, X_s, N_s, L_s, s)]$$

où la fonction  $M$  est donnée par le tableau suivant :

Conditions sur $\alpha, \gamma$	$M(\alpha, \gamma, x, k, l, s)$
$\gamma \geq \alpha_m$ pour tout $m$ et $\gamma > 0$	$e^{\gamma(l-x) - s\gamma^2/2}$
$\alpha_m = \max(\alpha) = \bar{\alpha}$ ssi $m \in J$ ( $J \subset E$ et $J \neq \emptyset$ ), $\bar{\alpha} > \gamma$ et $\bar{\alpha} > 0$	$e^{\gamma l - s\bar{\alpha}^2/2} \left( e^{-\bar{\alpha}x} + \frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}} \sum_{m \in J} \mu_m \sinh(\bar{\alpha}x) \mathbf{1}_{k \in J} \right)$
$\gamma = 0, \alpha_m \leq 0$ pour tout $m \in E$	1
$\alpha_m = 0$ si $m \in J$ ( $J \subset E$ et $J \neq \emptyset$ ), $\alpha_m < 0$ sinon, et $\gamma < 0$	$e^{\gamma l} \left( 1 + \frac{ \gamma }{\sum_{m \in J} \mu_m} x \mathbf{1}_{k \in J} \right)$
$\alpha_m < 0$ pour tout $m \in E$ et $\gamma < 0$	$e^{\gamma l} \left( 1 + \frac{\frac{1}{\alpha_k^2} + \sum_{m \in E} \frac{\mu_m}{\alpha_m \gamma}}{\sum_{m \in E} \mu_m \frac{ \alpha_m  +  \gamma }{\alpha_m^2 \gamma^2}} x \right)$

En particulier, pour tout  $s$ , la restriction de  $(\alpha, \gamma) \mathbf{W}^{(\infty)}$  à  $\mathcal{F}_s$  est équivalente à la loi de l'araignée brownienne sur  $[0, s]$ , et la famille

$$(M(\alpha, \gamma, X_s, N_s, L_s, s))_{s \geq 0}$$

des densités obtenues est une  $\mathcal{F}_s$ -martingale sous  $\mathbf{W}_{(0,0)}$ .

**THÉORÈME 1.2.** — Le processus canonique  $(A_s)_{s \geq 0}$  sous  $(\alpha, \gamma) \mathbf{W}^{(\infty)}$  peut être décrit de la manière suivante :

- Si  $\gamma > 0$  et  $\gamma \geq \alpha_m$  pour tout  $m$ ,  $(X_s)_{s \geq 0}$  est la valeur absolue d'un processus bang-bang de paramètre  $\gamma$ , et la loi de  $(N_s)_{s \geq 0}$  conditionnellement à  $(X_s)_{s \geq 0}$  est la même que sous  $\mathbf{W}_{(0,0)}$  : les variables  $(N_I)_{I \in \mathcal{I}}$  ( $\mathcal{I}$  étant l'ensemble des excursions de  $X$ ) sont indépendantes de loi  $\mu$ .
- Si  $\bar{\alpha} = \max(\alpha) > \gamma$  et  $\bar{\alpha} > 0$ ,  $(X_s)_{s \geq 0}$  est un processus dont la loi a une densité égale à  $\frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}} \exp(\gamma L_\infty)$  par rapport à celle de la valeur absolue d'un mouvement brownien avec drift  $\bar{\alpha}$  (dont  $L_\infty$  est le temps local total sur tout  $\mathbf{R}_+$ ), et  $(N_s)_{s \geq 0}$  est obtenu en effectuant la même démarche que pour l'araignée initiale, puis en conditionnant le résultat par le fait que la dernière excursion de  $(A_s)_{s \geq 0}$  se situe sur une branche  $m$  vérifiant  $\alpha_m = \bar{\alpha}$ .
- Si  $\gamma = 0$  et  $\alpha_m \leq 0$  pour tout  $m$ ,  $(A_s)_{s \geq 0}$  est une araignée brownienne.
- Si  $\gamma < 0$  et  $\alpha_m \leq 0$  pour tout  $m$ , on considère  $(Y_s, R_s)_{s \geq 0}$  une araignée brownienne,  $e$  une variable exponentielle de paramètre  $|\gamma|$  indépendante

de  $(Y_s, R_s)_{s \geq 0}$ ,  $\tau_e$  l'inverse du temps local de  $(Y_s)_{s \geq 0}$  en  $e$ ,  $(\hat{Y}_s)_{s \geq 0}$  un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0 et indépendant des variables précédentes,  $V$  une variable aléatoire (également indépendante des précédentes) définie sur  $E$ , et vérifiant les égalités suivantes pour  $m \in E$  :

$$\mathbf{P}(V = m) = \frac{\mu_m}{\sum_{k \in J} \mu_k} \mathbf{1}_{m \in J} \quad \text{si } J = \{m \in E, \alpha_m = 0\} \text{ est non vide,}$$

et

$$\mathbf{P}(V = m) = \frac{\mu_m \left( \frac{|\gamma|}{\alpha_m^2} + \sum_{k \in E} \frac{\mu_k}{|\alpha_k|} \right)}{\sum_{k \in E} \mu_k \frac{|\alpha_k| + |\gamma|}{\alpha_k^2}} \quad \text{si } J = \emptyset.$$

Dans ces conditions, le processus  $(X_s, N_s)_{s \geq 0}$  a même loi que  $(\tilde{X}_s, \tilde{N}_s)_{s \geq 0}$ , avec  $(\tilde{X}_s, \tilde{N}_s) = (Y_s, R_s)$  pour  $s \leq \tau_e$ , et  $(\tilde{X}_{s+\tau_e}, \tilde{N}_{s+\tau_e}) = (\hat{Y}_s, V)$  pour  $s \geq 0$ .

Les Théorèmes 1.1 et 1.2 constituent une étude asymptotique complète des pénalisations exponentielles données au début de la section.

On remarque que dans le cas où  $\max\{\alpha_m, m \in E\} > 0$  et  $\gamma = 0$ , la densité de la restriction de  ${}^{(\alpha, 0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$  à  $\mathcal{F}_s$  ( $s \geq 0$ ), par rapport à celle de  $\mathbf{W}_{(0,0)}$ , est le produit d'une fonction de  $s$  par une fonction de  $A_s$ .

Afin de comprendre ce résultat, on peut alors se demander pour quelles mesures de probabilité sur  $\mathcal{C}_E$  une telle propriété a lieu. Le théorème suivant répond à la question dans le cas où les densités de probabilité sont suffisamment régulières.

**THÉORÈME 1.3.** — *Soit  $\nu$  une mesure de probabilité définie sur  $\mathcal{C}_E$ , différente de  $\mathbf{W}_{(0,0)}$ .*

*On suppose que pour tout  $s \geq 0$ , la densité de la restriction de  $\nu$  à  $\mathcal{F}_s$  par rapport à celle de  $\mathbf{W}_{(0,0)}$  existe et s'écrit sous la forme :*

$$g(s, X_s, N_s) = h(s) f_{N_s}(X_s)$$

avec  $f_m \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+)$ ,  $f_0(0) = f_m(0) = 1$  pour tout  $m \in E$ , et  $h \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}_+)$ .

Dans ces conditions, il existe  $\beta > 0$  tel que  $h(s) = e^{-s\beta^2/2}$  pour tout  $s \geq 0$ , et la mesure  $\nu$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs des mesures  ${}^{(\alpha^{(m)}, 0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ , où pour tout  $m \in E$ ,  $\alpha^{(m)}$  est donné par  $\alpha_{m'}^{(m)} = \beta$  si  $m = m'$  et  $\alpha_{m'}^{(m)} = 0$  sinon.

#### 1.4. Interprétation heuristique des différents cas du Théorème 1.2

Les résultats donnés dans le Théorème 1.2 montrent que les processus obtenus dépendent de manière assez complexe des paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  définis précédemment. C'est pourquoi nous allons en donner une interprétation heuristique.

– Dans le premier cas du théorème,  $\gamma > 0$  est le plus grand des paramètres de la pénalisation ; de ce fait, son influence domine celle des  $(\alpha_m)_{m \in E}$ , et la loi limite obtenue ne dépend que de  $\gamma$ .

Le processus canonique, sous cette loi limite, a alors tendance à rester près de l'origine, pour que le temps local en zéro de  $(X_t)_{t \geq 0}$  soit asymptotiquement plus grand.

Cette attraction vers l'origine correspond bien au comportement d'un processus bang-bang.

– Dans le deuxième cas, l'influence qui domine est celle du plus grand coefficient  $\bar{\alpha}$  : le processus canonique, sous la nouvelle loi de probabilité, reste (à partir d'un certain temps) dans une des branches  $m \in E$  telles que  $\alpha_m = \bar{\alpha}$ .

De plus, la pénalisation exponentielle dominante est fortement liée à celle qui transforme un mouvement brownien standard en un mouvement brownien avec drift  $\bar{\alpha}$ , ce qui explique l'intervention de ce mouvement brownien avec drift dans la loi de  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

– Dans le troisième cas, on pourrait penser que la pénalisation a tendance à empêcher le processus de trop s'éloigner de l'origine.

En réalité, la pénalisation étudiée est uniquement fonction de  $(X_t, N_t)$ , et le fait que l'on fasse tendre  $t$  vers l'infini annule, à la limite, l'effet de cette pénalisation ; le cas est analogue à celui d'un pont brownien sur  $[0, t]$  ( $t$  tendant vers l'infini) restreint à un intervalle fixé  $[0, s]$  : ce processus tend, en loi, vers un mouvement brownien (voir [8]).

– Dans le dernier cas, la pénalisation du temps local à l'origine ( $\gamma < 0$ ) domine, de sorte que le processus étudié reste dans une même branche à partir d'un certain temps ; d'où l'intervention d'un processus de Bessel de dimension 3, qui n'est autre qu'un mouvement brownien conditionné à rester positif sur tout  $\mathbf{R}_+$ .

#### 1.5. Un petit guide de lecture de l'article

– Dans la suite de cet article, nous démontrons les trois théorèmes principaux, dans l'ordre où ils sont énoncés.



Plus précisément, nous effectuons une étude préalable de la quantité :

$\mathbf{W}_{(x,k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]$  dans la Section 2, étude nécessaire à la preuve du Théorème 1.1 qui est achevée dans la Section 3.

Les Sections 4 et 5 sont consacrées respectivement aux démonstrations des Théorèmes 1.2 et 1.3.

– On trouvera dans les preuves ci-dessous un certain nombre d'études de cas, selon les valeurs des différents paramètres. Une telle structure des démonstrations paraît inévitable, compte tenu du nombre assez important de ces paramètres.

Dans [4] et [8], on peut également voir des situations où interviennent des distinctions de cas, analogues à celles rencontrées dans cet article.

– Comme nous venons de l'évoquer ci-dessus, un certain nombre d'estimations assez élémentaires (Propositions 2.1, 2.2, et 2.3, Lemmes 2.4, 3.1 et 3.2), se ramenant assez rapidement à une étude du mouvement brownien, sont faites préalablement aux démonstrations des Théorèmes 1.1 et 1.2.

Nous conseillons au lecteur de faire une première lecture rapide de ces estimations, puis de se concentrer sur les démonstrations des théorèmes principaux de l'article, quitte à revenir ensuite sur la preuve des résultats de la Section 2 et du Paragraphe 3.1.

## 2. Etude de l'expression $\mathbf{W}_{(x,k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]$

### 2.1. Enoncé des résultats obtenus

Afin de prouver l'existence de  $(\alpha, \gamma) \mathbf{W}^{(\infty)}$ , nous allons commencer par définir une expression qui majore  $Z(\alpha, \gamma, x, k, t) = \mathbf{W}_{(x,k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]$  tout en étant équivalente à cette quantité quand  $t$  tend vers l'infini.

Pour cela, introduisons les deux quantités  $I(\beta, \gamma, x, t)$  et  $J(\beta, x, t)$  ( $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$ ,  $x, t \in \mathbf{R}_+$ ), données par les égalités suivantes :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \mathbf{E}_x[\exp(\beta|Y_t| + \gamma L_t) \mathbf{1}_{T_0 \leq t}]$$

$$J(\beta, x, t) = \mathbf{E}_x[\exp(\beta Y_t) \mathbf{1}_{T_0 > t}]$$

où, sous  $\mathbf{P}_x$ ,  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien issu de  $x$ ,  $L_t$  le temps local en zéro de  $(Y_s)_{0 \leq s \leq t}$ , et  $T_0 = \inf\{s \geq 0, Y_s = 0\}$ .

De plus, posons :

$$J^*(\beta, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{x}{\beta^2} \mathbf{1}_{\beta \neq 0} + \sqrt{\frac{2}{\pi t}} x \mathbf{1}_{\beta=0} + 2 \sinh(\beta x) \exp(t\beta^2/2) \mathbf{1}_{\beta > 0}$$

et définissons la quantité  $I^*(\beta, \gamma, x, t)$  par le tableau suivant :

Conditions sur $\beta$ et $\gamma$	$I^*(\beta, \gamma, x, t)$
$\beta, \gamma < 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \left( \frac{x}{\beta\gamma} + \frac{ \beta + \gamma }{\beta^2\gamma^2} \right)$
$\beta = 0, \gamma < 0$	$\frac{1}{ \gamma } \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$
$\gamma = 0, \beta < 0$	$\frac{1}{ \beta } \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$
$\beta = \gamma = 0$	1
$\beta > 0, \beta > \gamma$	$\frac{1}{\beta-\gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} + \frac{2\beta}{\beta-\gamma} e^{-\beta x+t\beta^2/2}$
$\gamma > 0, \gamma > \beta$	$\frac{1}{\gamma-\beta} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} + \frac{2\gamma}{\gamma-\beta} e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$
$\gamma = \beta > 0$	$\gamma \sqrt{\frac{2t}{\pi}} + 2(t\gamma^2 + 1)e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$

Si on pose :

$$Z^*(\alpha, \gamma, x, k, t) = \sum_{m \in E} \mu_m I^*(\alpha_m, \gamma, x, t) + J^*(\alpha_k, x, t)$$

on a alors les trois propositions suivantes :

PROPOSITION 2.1. — Pour tous  $\beta \in \mathbf{R}$  et  $x \in \mathbf{R}_+$  :

- $J(\beta, x, t) \leq J^*(\beta, x, t)$  pour tout  $t \geq 0$ .
- $J(\beta, x, t)$  est équivalent à  $J^*(\beta, x, t)$  quand  $t$  tend vers l'infini.

PROPOSITION 2.2. — Pour tous  $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$  et  $x \in \mathbf{R}_+$  :

- $I(\beta, \gamma, x, t) \leq I^*(\beta, \gamma, x, t)$  pour tout  $t \geq 0$ .
- $I(\beta, \gamma, x, t)$  est équivalent à  $I^*(\beta, \gamma, x, t)$  quand  $t$  tend vers l'infini.

PROPOSITION 2.3. — Pour tous  $\alpha \in \mathbf{R}^E, \gamma \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}_+$  et  $k \in E$  :

- $Z(\alpha, \gamma, x, k, t) \leq Z^*(\alpha, \gamma, x, k, t)$  pour tout  $t \geq 0$ .
- $Z(\alpha, \gamma, x, k, t)$  est équivalent à  $Z^*(\alpha, \gamma, x, k, t)$  quand  $t$  tend vers l'infini.

Remarquons tout de suite que les Propositions 2.1 et 2.2 entraînent la Proposition 2.3.

En effet, on a :

$$Z(\alpha, \gamma, x, k, t) = A_1 + A_2$$

avec

$$A_1 = \mathbf{W}_{(x,k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t) \mathbf{1}_{T_0 \leq t}]$$

$$A_2 = \mathbf{W}_{(x,k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t) \mathbf{1}_{T_0 > t}]$$

où  $T_0 = \inf\{s \geq 0, X_s = 0\}$ . D'après la propriété d) de l'araignée (donnée au début de l'article), conditionnellement au fait que  $T_0 \leq t$ ,  $N_t$  est une variable de loi  $\mu$ , indépendante de  $(X_t, L_t)$ . Comme, d'autre part,  $(X_s)_{s \geq 0}$  sous  $\mathbf{W}_{(x,k)}$  a même loi que  $(|Y_s|)_{s \geq 0}$  sous  $\mathbf{P}_x$ , on a :

$$A_1 = \sum_{m \in E} \mu_m I(\alpha_m, \gamma, x, t).$$

Par ailleurs, si  $(X_s)_{s \geq 0}$  ne s'annule pas avant  $t$ , il est évident que  $L_t = 0$  et  $N_t = k$ .

On a donc  $A_2 = J(\alpha_k, x, t)$ , et il en résulte l'égalité suivante :

$$Z(\alpha, \gamma, x, k, t) = \sum_{m \in E} \mu_m I(\alpha_m, \gamma, x, t) + J(\alpha_k, x, t)$$

qui entraîne la Proposition 2.3, en supposant vraies les Propositions 2.1 et 2.2.

Il nous reste donc à démontrer ces deux propositions, ce qui est fait dans les Paragraphes 2.2 et 2.3.

### 2.2. Preuve de la Proposition 2.1

Le principe de réflexion implique :

$$\begin{aligned} J(\beta, x, t) &= \mathbf{E}_x[e^{\beta Y_t} \mathbf{1}_{T_0 > t}] = \mathbf{E}_x[e^{\beta Y_t} \mathbf{1}_{Y_t > 0}] - \mathbf{E}_x[e^{\beta Y_t} \mathbf{1}_{Y_t > 0, T_0 \leq t}] \\ &= \mathbf{E}_x[e^{\beta Y_t} \mathbf{1}_{Y_t > 0}] - \mathbf{E}_x[e^{-\beta Y_t} \mathbf{1}_{Y_t < 0}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty (e^{-((x-y)^2/2t) + \beta y} - e^{-((x+y)^2/2t) + \beta y}) dy. \end{aligned}$$

**Supposons  $\beta < 0$  :** De la majoration immédiate :

$$e^{-(x-y)^2/2t} - e^{-(x+y)^2/2t} \leq \frac{(x+y)^2}{2t} - \frac{(x-y)^2}{2t} = \frac{2xy}{t}$$

on déduit l'inégalité :

$$J(\beta, x, t) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} x \int_0^\infty y e^{\beta y} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{x}{\beta^2} = J^*(\beta, x, t).$$

Par ailleurs, on a les encadrements suivants :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(x-y)^2}{2t} &\leq e^{-(x-y)^2/2t} \leq 1 - \frac{(x-y)^2}{2t} + \frac{(x-y)^4}{8t^2} \\ 1 - \frac{(x+y)^2}{2t} &\leq e^{-(x+y)^2/2t} \leq 1 - \frac{(x+y)^2}{2t} + \frac{(x+y)^4}{8t^2} \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$J^*(\beta, x, t) - J(\beta, x, t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty \frac{(x+y)^4}{8t^2} e^{\beta y} dy = x^5 t^{-5/2} C(\beta x)$$

où, pour tout  $u < 0$ ,  $C(u) = \frac{1}{\sqrt{128\pi}} \int_0^\infty (1+y)^4 e^{uy} dy$  est fini.

$J^*(\beta, x, t)$  est donc à la fois un majorant et un équivalent de  $J(\beta, x, t)$  quand  $t \rightarrow \infty$  ( $x$  étant fixé) : la Proposition 2.1 est donc vraie pour  $\beta < 0$ .

**Supposons  $\beta = 0$  :** On obtient ici

$$J(0, x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-x}^x e^{-y^2/2t} dy$$

expression admettant bien comme majorant et comme équivalent :

$$J^*(0, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} x$$

quand  $t$  tend vers l'infini.

**Supposons  $\beta > 0$  :** On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^\infty (e^{-((x-y)^2/2t)+\beta y} - e^{-((x+y)^2/2t)+\beta y}) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^\infty dz e^{-(z^2/2t)+\beta z} (e^{\beta x} - e^{-\beta x}) = 2 \sinh(\beta x) e^{t\beta^2/2} \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^0 (e^{-((x-y)^2/2t)+\beta y} - e^{-((x+y)^2/2t)+\beta y}) dy = -J(-\beta, x, t).$$

D'où l'égalité :

$$J(\beta, x, t) = J(-\beta, x, t) + 2 \sinh(\beta x) e^{t\beta^2/2}$$

quantité qui admet comme majorant et comme équivalent :

$$J^*(\beta, x, t) = 2 \sinh(\beta x) e^{t\beta^2/2} + \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{x}{\beta^2}.$$

Nous venons donc de prouver la Proposition 2.1 dans tous les cas. □

### 2.3. Preuve de la Proposition 2.2

Afin de démontrer cette proposition, nous allons donner quelques résultats sur la loi jointe de  $(|Y_t|, L_t)$ , lorsque  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien issu de  $x$  et  $(L_t)_{t \geq 0}$  son temps local en zéro.

Plus précisément, en notant (pour tout  $x \in \mathbf{R}_+$ ),  $\mathbf{P}_x$  la loi d'un mouvement brownien réel issu de  $x$ ,  $(Y_t)_{t \geq 0}$  le processus canonique de  $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$  et  $L_t$  son temps local en 0, nous allons prouver le lemme suivant :

LEMME 2.4. — Avec les notations précédentes :

– Pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\mathbf{P}_x[L_t + |Y_t| \in dz, L_t > 0] = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} z(x+z) \exp\left(-\frac{(x+z)^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{z>0} dz.$$

– Conditionnellement au fait que  $L_t > 0$ ,  $\Theta_t = \frac{|Y_t|}{L_t + |Y_t|}$  est une variable uniforme sur  $[0, 1]$ , indépendante de  $L_t + |Y_t|$ .

Autrement dit, on a, pour  $l, y > 0$  :

$$\mathbf{P}_x(L_t \in dl, |Y_t| \in dy) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} (l+x+y) \exp\left(-\frac{(l+x+y)^2}{2t}\right) dy dl.$$

Preuve. — En effectuant une intégration par rapport au premier et au dernier temps d'annulation de  $(Y_s)_{s \leq t}$ , et en appliquant la propriété de Markov au temps  $T_0 = \inf\{t \geq 0, Y_t = 0\}$ , on obtient, pour tous  $y \in \mathbf{R}_+$  et  $l > 0$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x(|Y_t| \in dy, L_t \in dl) &= \int_{s_1+s_2 \leq t} \mathbf{P}_x(T_0 \in ds_1) \mathbf{P}_0(|Y_{t-s_1}| \in dy) \dots \\ &\dots \mathbf{P}_0\left(\sup_{0 \leq u \leq t-s_1} \{u|Y_u = 0\} \in ds_2(t-s_1-s_2), L_{t-s_1} \in dl \mid |Y_{t-s_1}| = y\right) \end{aligned}$$

Par un renversement du temps effectué sur le pont brownien :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x(|Y_t| \in dy, L_t \in dl) &= \int_{s_1+s_2 \leq t} \mathbf{P}_x(T_0 \in ds_1) \mathbf{P}_y(T_0 \in ds_2, L_{t-s_1} \in dl, |Y_{t-s_1}| \in [0, dy]) \\ &= \int_{s_1+s_2 \leq t} \mathbf{P}_x(T_0 \in ds_1) \mathbf{P}_y(T_0 \in ds_2) \mathbf{P}_0(|Y_{t-s_1-s_2}| \in [0, dy], L_{t-s_1-s_2} \in dl) \\ &= \int_{s_1+s_2 \leq t} \frac{2dy}{\sqrt{2\pi(t-s_1-s_2)}} \mathbf{P}_x(T_0 \in ds_1) \mathbf{P}_y(T_0 \in ds_2) \dots \\ &\dots \mathbf{P}_0(L_{t-s_1-s_2} \in dl \mid |Y_{t-s_1-s_2}| = 0). \end{aligned}$$

Or la loi du temps local d'un pont brownien sur l'intervalle de temps  $[0, t-s_1-s_2]$  est connue : c'est la loi (dite de Rayleigh) de la racine carrée d'une variable exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2(t-s_1-s_2)}$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}_x(|Y_t| \in dy, L_t \in dl) \\
 &= \int_{s_1+s_2 \leq t} dy dl \frac{2l e^{-l^2/2(t-s_1-s_2)}}{\sqrt{2\pi(t-s_1-s_2)}^3} \mathbf{P}_x(T_0 \in ds_1) \mathbf{P}_y(T_0 \in ds_2) \\
 &= 2dy dl \int_{s_1+s_2 \leq t} \mathbf{P}_x(T_0 \in ds_1) \mathbf{P}_y(T_0 \in ds_2) D_l(t-s_1-s_2) \\
 &= 2dy dl \int_{s_1+s_2 \leq t} ds_1 ds_2 D_x(s_1) D_y(s_2) D_l(t-s_1-s_2) \\
 &= 2dy dl D_x * D_y * D_l(t) = 2D_{x+y+l}(t) dy dl \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} (l+x+y) \exp\left(-\frac{(l+x+y)^2}{2t}\right) dy dl
 \end{aligned}$$

$D_a(u)$  désignant la densité de  $T_0$  en  $u$  sous  $\mathbf{P}_a$ .

Ces égalités impliquent le lemme annoncé (voir également [6] pour une autre démonstration). □

*Suite de la preuve de la Proposition 2.2.* — Avec les notations du Lemme 2.4, on peut écrire :

$\beta|Y_t| + \gamma L_t = (|Y_t| + L_t)(\gamma + (\beta - \gamma)\Theta_t)$ , ce qui implique la formule suivante :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \mathbf{E} \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty z(x+z) \exp\left(\frac{-(x+z)^2}{2t} + zU_{\beta,\gamma}\right) dz \right]$$

où  $U_{\beta,\gamma} = \gamma + (\beta - \gamma)\Theta_t$  est une variable uniforme sur  $[\beta, \gamma]$  (ou bien  $[\gamma, \beta]$  si  $\gamma < \beta$ ).

Nous allons à présent distinguer plusieurs cas, selon les valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$ .

**Supposons  $\beta, \gamma < 0$  :** Dans ce cas, le théorème de convergence monotone prouve que  $\mathbf{E}[\int_0^\infty z(x+z)e^{-((x+z)^2/2t)+zU_{\beta,\gamma}} dz]$  croît vers

$$\mathbf{E} \left[ \int_0^\infty z(x+z)e^{zU_{\beta,\gamma}} dz \right]$$

quand  $t$  tend vers l'infini.

Or pour  $\phi \in \mathbf{R}_-, \int_0^\infty z(x+z)e^{\phi z} dz = \frac{x}{\phi^2} + \frac{2}{|\phi|^3}$ .

On en déduit que si  $\beta \neq \gamma$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \int_0^\infty z(x+z) e^{zU_{\beta,\gamma}} dz \right] &= \frac{1}{\gamma - \beta} \int_\beta^\gamma \left( \frac{x}{\phi^2} + \frac{2}{|\phi|^3} \right) d\phi \\ &= \frac{1}{\gamma - \beta} \left[ -\frac{x}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} \right]_\beta^\gamma = \frac{x}{\beta\gamma} + \frac{|\beta| + |\gamma|}{\beta^2\gamma^2} \end{aligned}$$

et que cette dernière égalité se prolonge en fait au cas où  $\beta = \gamma$ .

Il en résulte que  $I(\beta, \gamma, x, t)$  admet comme majorant et comme équivalent :

$$I^*(\beta, \gamma, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \left( \frac{x}{\beta\gamma} + \frac{|\beta| + |\gamma|}{\beta^2\gamma^2} \right)$$

quand  $t$  tend vers l'infini.

**Supposons**  $\beta = 0, \gamma < 0$  : on a, pour tout  $z$  :

$$\mathbf{E}[e^{zU_{\beta,\gamma}}] = \frac{1}{|\gamma|} \int_\gamma^0 e^{\phi z} d\phi = \frac{1 - e^{\gamma z}}{|\gamma|z}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} I(\beta, \gamma, x, t) &= \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty (x+z) e^{-(x+z)^2/2t} dz \\ &\quad - \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty (x+z) e^{-((x+z)^2/2t) + \gamma z} dz. \end{aligned}$$

On a  $\int_0^\infty (x+z) e^{\gamma z} dz < \infty$ , donc le deuxième terme de l'expression ci-dessus, négatif, est dominé par  $t^{-3/2}$  quand  $t$  tend vers l'infini.

Par ailleurs,

$$\int_0^\infty (x+z) e^{-(x+z)^2/2t} dz = \left[ -te^{-(x+z)^2/2t} \right]_0^\infty = te^{-x^2/2t}$$

admet  $t$  comme majorant et comme équivalent quand  $t$  tend vers l'infini.

Ces deux propriétés permettent d'en déduire que  $I(\beta, \gamma, x, t)$  admet comme majorant et équivalent :

$$I^*(\beta, \gamma, x, t) = \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$$

**Supposons**  $\gamma = 0, \beta < 0$  : par symétrie, ce cas est évidemment analogue au cas précédent.

**Supposons**  $\beta = \gamma = 0$  : on a :

$$\begin{aligned} I(\beta, \gamma, x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty z(x+z)e^{-(x+z)^2/2t} dz \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \left[ -tz e^{-(x+z)^2/2t} \right]_0^\infty + \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-(x+z)^2/2t} dz \\ &= 2\mathbf{P}(\mathcal{N} \geq x/\sqrt{t}) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{N}$  est une variable gaussienne centrée réduite.

La Proposition 2.2 est donc vraie dans ce cas puisque  $I^*(\beta, \gamma, x, t) = 1$ .

**Supposons**  $\beta > 0$  et  $\beta > \gamma$  : On a :

$$\mathbf{E}[e^{zU_{\beta,\gamma}}] = \frac{1}{\beta - \gamma} \int_\gamma^\beta e^{\phi z} d\phi = \frac{e^{\beta z} - e^{\gamma z}}{(\beta - \gamma)z}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} I(\beta, \gamma, x, t) &= \frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty (x+z)e^{-((x+z)^2/2t) + \beta z} dz \\ &\quad - \frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty (x+z)e^{-((x+z)^2/2t) + \gamma z} dz. \end{aligned}$$

Pour tout  $\phi > 0$  :

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty (x+z)e^{-((x+z)^2/2t) + \phi z} dz \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \left[ -te^{-((x+z)^2/2t) + \phi z} \right]_0^\infty + \phi \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-((x+z)^2/2t) + \phi z} dz \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-x^2/2t} + 2\phi e^{-\phi x + t\phi^2/2} - \phi \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-((x-z)^2/2t) - \phi z} dz \end{aligned}$$

avec

$$\int_0^\infty e^{-((x-z)^2/2t) - \phi z} dz \leq \int_0^\infty e^{-\phi z} dz = \frac{1}{\phi}.$$

Donc la quantité ci-dessus admet  $\sqrt{2/\pi t} + 2\phi e^{-\phi x + t\phi^2/2}$  comme majorant et comme équivalent quand  $t$  tend vers l'infini.

On peut en particulier en déduire que le second terme de  $I(\beta, \gamma, x, t)$ , négatif, est négligeable devant le premier quand  $t$  tend vers l'infini (quel que



soit le signe de  $\gamma$ ), ce qui permet de prendre :

$$I^*(\beta, \gamma, x, t) = \frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} + \frac{2\beta}{\beta - \gamma} \exp(-\beta x + t\beta^2/2)$$

comme majorant et équivalent de  $I(\beta, \gamma, x, t)$ .

**Supposons  $\gamma > 0$  et  $\gamma > \beta$  :** ce cas est analogue au précédent.

**Supposons  $\gamma = \beta > 0$  :** On a ici :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty z(x+z)e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z} dz$$

Or

$$\int_0^\infty (z(x+z) - \gamma t z - t) e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z} dz = \left[ -t z e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z} \right]_0^\infty = 0.$$

On en déduit :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty (\gamma z + 1) e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z} dz.$$

Par ailleurs, on a :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z} dz = 2e^{-\gamma x + t\gamma^2/2} - \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-((x-z)^2/2t)-\gamma z} dz$$

quantité équivalente et inférieure à  $2e^{-\gamma x + t\gamma^2/2}$ .

La quantité  $-\gamma x \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z} dz$  est donc négative et équivalente à  $-2\gamma x e^{-\gamma x + t\gamma^2/2}$ .

D'autre part, d'après un calcul précédemment effectué,

$$\gamma \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty (x+z) e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z} dz$$

est équivalent et inférieur à :

$$\gamma \sqrt{\frac{2t}{\pi}} + 2t\gamma^2 e^{-\gamma x + t\gamma^2/2}$$

(voir l'étude du cas  $\beta > 0$  et  $\beta > \gamma$ ).

En additionnant les trois termes évalués ci-dessus, on obtient donc à nouveau :

$$I^*(\beta, \gamma, x, t) = \gamma \sqrt{\frac{2t}{\pi}} + 2(t\gamma^2 + 1) \exp(-\gamma x + t\gamma^2/2)$$

comme majorant et équivalent pour  $I(\beta, \gamma, x, t)$ . □

Nous venons donc d'achever la preuve des Propositions 2.1 et 2.2, qui entraînent la Proposition 2.3.

### 3. Preuve de l'existence de la mesure $(\alpha, \gamma) \mathbf{W}^{(\infty)}$

#### 3.1. Quelques lemmes techniques

L'objet de la Section 3 est de prouver le Théorème 1.1. Pour cela, nous aurons besoin de deux lemmes, dont le premier est le suivant :

LEMME 3.1. — *Pour tous  $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$ , il existe  $D(\beta, \gamma)$  tel qu'on ait, pour tout  $t \geq 1$  et tout  $x \geq 0$  :*

$$J^*(\beta, x, t) \leq D(\beta, \gamma) \sinh((\beta^+ + 1)x) I^*(\beta, \gamma, 0, t).$$

*Preuve.* — Fixons  $\beta$  et  $\gamma$  dans  $\mathbf{R}$ ,  $x$  dans  $\mathbf{R}_+$ , et supposons  $t \geq 1$ .

– Si  $\beta < 0$  et  $\gamma < 0$ ,  $J^*(\beta, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{x}{\beta^2}$  et  $I^*(\beta, \gamma, 0, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{|\beta| + |\gamma|}{\beta^2 \gamma^2}$ , ce qui implique :

$$J^*(\beta, x, t) = \frac{x\gamma^2}{|\beta| + |\gamma|} I^*(\beta, \gamma, 0, t)$$

– Si  $\beta < 0$  et  $\gamma = 0$ ,  $I^*(\beta, \gamma, 0, t) = \frac{1}{|\beta|} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \geq \frac{1}{|\beta|} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}$ , et donc :

$$J^*(\beta, x, t) \leq \frac{x}{|\beta|} I^*(\beta, \gamma, 0, t)$$

– Si  $\beta < 0$  et  $\gamma > 0$ ,  $I^*(\beta, \gamma, 0, t) \geq \frac{1}{\gamma - \beta} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \geq \frac{1}{\gamma - \beta} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}$ , d'où :

$$J^*(\beta, x, t) \leq x \left( \frac{\gamma - \beta}{\beta^2} \right) I^*(\beta, \gamma, 0, t)$$

– Si  $\beta = 0$  et  $\gamma < 0$ ,  $J^*(\beta, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} x$  et  $I^*(\beta, \gamma, 0, t) = \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$ , d'où :

$$J^*(\beta, x, t) = |\gamma| x I^*(\beta, \gamma, 0, t)$$

– Si  $\beta = \gamma = 0$ ,  $I^*(\beta, \gamma, 0, t) = 1 \geq \frac{1}{\sqrt{t}} \geq \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$ , et :

$$J^*(\beta, x, t) \leq x I^*(\beta, \gamma, 0, t)$$

– Si  $\beta = 0$  et  $\gamma > 0$ ,  $I^*(\beta, \gamma, 0, t) \geq \frac{1}{\gamma - \beta} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$ , d'où :

$$J^*(\beta, x, t) \leq x(\gamma - \beta) I^*(\beta, \gamma, 0, t)$$

– Si  $\beta > 0$  et  $\gamma < \beta$ ,  $J^*(\beta, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{x}{\beta^2} + 2 \sinh(\beta x) e^{t\beta^2/2}$  et :

$$I^*(\beta, \gamma, 0, t) \geq \frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} + \frac{2\beta}{\beta - \gamma} e^{t\beta^2/2}.$$

On en déduit que :

$$J^*(\beta, x, t) \leq \max \left( \frac{x(\beta - \gamma)}{\beta^2}, \sinh(\beta x) \frac{\beta - \gamma}{\beta} \right) I^*(\beta, \gamma, 0, t)$$

Or  $x \leq \frac{\sinh(\beta x)}{\beta}$ , d'où :

$$J^*(\beta, x, t) \leq \max\left(\frac{\beta - \gamma}{\beta^3}, \frac{\beta - \gamma}{\beta}\right) \sinh(\beta x) I^*(\beta, \gamma, 0, t)$$

– Si  $\beta > 0$  et  $\gamma = \beta$ , on a  $I^*(\beta, \gamma, 0, t) \geq \beta \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} + 2e^{t\beta^2/2}$ .

On obtient donc :

$$\begin{aligned} J^*(\beta, x, t) &\leq \max\left(\frac{x}{\beta^3}, \sinh(\beta x)\right) I^*(\beta, \gamma, 0, t) \\ &\leq \max\left(\frac{1}{\beta^4}, 1\right) \sinh(\beta x) I^*(\beta, \gamma, 0, t) \end{aligned}$$

– Si  $\beta > 0$  et  $\gamma > \beta$ , on a  $I^*(\beta, \gamma, 0, t) \geq \frac{1}{\gamma - \beta} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} + \frac{2\gamma}{\gamma - \beta} e^{t\beta^2/2}$  d'où :

$$\begin{aligned} J^*(\beta, \gamma, x) &\leq \max\left(x \frac{\gamma - \beta}{\beta^2}, \sinh(\beta x) \frac{\gamma - \beta}{\gamma}\right) I^*(\beta, \gamma, 0, t) \\ &\leq \max\left(\frac{\gamma - \beta}{\beta^3}, \frac{\gamma - \beta}{\gamma}\right) \sinh(\beta x) I^*(\beta, \gamma, 0, t) \end{aligned}$$

Le Lemme 3.1 est donc prouvé dans tous les cas. □

Il est utilisé pour démontrer le lemme suivant :

LEMME 3.2. — Pour tous  $\alpha \in \mathbf{R}^E$ ,  $\gamma \in \mathbf{R}$ , il existe  $H(\alpha, \gamma)$ ,  $\psi(\alpha) \in \mathbf{R}_+$  tels que pour tous  $x \in \mathbf{R}_+$ ,  $k \in E$ , et  $t \geq 1$  :

$$Z^*(\alpha, \gamma, x, k, t) \leq H(\alpha, \gamma) \exp(\psi(\alpha)x) Z^*(\alpha, \gamma, 0, 0, t)$$

Preuve. — On observe, tout d'abord, que quels que soient  $\beta$  et  $\gamma$ , il existe  $C(\beta, \gamma)$  tel que pour tous  $x, t$  :

$$I^*(\beta, \gamma, x, t) \leq C(\beta, \gamma)(1 + x) I^*(\beta, \gamma, 0, t)$$

(en fait,  $I^*(\beta, \gamma, x, t) \leq I^*(\beta, \gamma, 0, t)$  dès que  $\sup(\beta, \gamma) \geq 0$ ).

On en déduit que pour tous  $\alpha = (\alpha_m)_{m \in E} \in \mathbf{R}^E$ ,  $\gamma \in \mathbf{R}$ ,  $t, x \in \mathbf{R}_+$  :

$$\sum_{m \in E} \mu_m I^*(\alpha_m, \gamma, x, t) \leq C(\alpha, \gamma)(1 + x) \sum_{m \in E} \mu_m I^*(\alpha_m, \gamma, 0, t)$$

$$(*) \quad \leq C(\alpha, \gamma)(1 + x) Z^*(\alpha, \gamma, 0, 0, t)$$

où  $C(\alpha, \gamma) = \max\{C(\alpha_m, \gamma), m \in E\}$ .

A présent, posons  $\delta(\alpha) = \max\{\alpha_m^+, m \in E\}$ ,  $\nu = \min\{\mu_m, m \in E\}$  ( $\nu > 0$  puisque  $\mu_m > 0$  pour tout  $m \in E$ ), et  $D(\alpha, \gamma) = \max\{D(\alpha_m, \gamma), m \in E\}$ .

Si  $t \geq 1$ , le Lemme 3.1 permet d'obtenir les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} J^*(\alpha_k, x, t) &\leq D(\alpha_k, \gamma) \sinh((\alpha_k^+ + 1)x) I^*(\alpha_k, \gamma, 0, t) \\ &\leq D(\alpha, \gamma) \sinh((\delta(\alpha) + 1)x) \sum_{m \in E} \frac{\mu_m}{\nu} I^*(\alpha_m, \gamma, 0, t) \\ &\leq \frac{D(\alpha, \gamma)}{\nu} \sinh((\delta(\alpha) + 1)x) Z^*(\alpha, \gamma, 0, 0, t) \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant l'inégalité (\*) :

$$Z^*(\alpha, \gamma, x, k, t) \leq \left( \frac{D(\alpha, \gamma)}{\nu} + C(\alpha, \gamma) \right) \exp[(\delta(\alpha) + 1)x] Z^*(\alpha, \gamma, 0, 0, t)$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 3.2. □

Ce lemme nous permettra d'achever la preuve du Théorème 1.1, ce que nous faisons dans le paragraphe suivant.

### 3.2. Preuve du Théorème 1.1

Soient  $\alpha \in \mathbf{R}^E$ ,  $\gamma \in \mathbf{R}$ ,  $s \geq 0$  et  $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$ . En appliquant la propriété de Markov au temps  $s$ , on obtient, pour tout  $t \geq s$  :

$$\begin{aligned} {}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(t)}[\Lambda_s] &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} \frac{e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t}}{\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t}]} \right] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} \frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t} | \mathcal{F}_s]}{\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t}]} \right] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} e^{\gamma L_s} \frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma(L_t - L_s)} | X_s, N_s]}{\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t}]} \right] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} \exp(\gamma L_s) \frac{Z(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t - s)}{Z(\alpha, \gamma, 0, 0, t)} \right]. \end{aligned}$$

On sait que  $\exp(\gamma L_s) \frac{Z(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t - s)}{Z(\alpha, \gamma, 0, 0, t)}$  est équivalent à  $\exp(\gamma L_s) \frac{Z^*(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t - s)}{Z^*(\alpha, \gamma, 0, 0, t)}$  quand  $t$  tend vers l'infini,  $L_s, X_s, N_s$  étant fixés. Or  $Z^*(\alpha, \gamma, x, k, u) = \sum_{m \in E} \mu_m I^*(\alpha_m, \gamma, x, u) + J^*(\alpha_k, x, u)$  pour tous  $x, k, u$ , donc d'après les expressions de  $I^*$  et  $J^*$  données précédemment, on a les

équivalents suivants :

Conditions sur $\alpha, \gamma$	Equivalent de $Z^*(\alpha, \gamma, x, k, u)$ quand $u \rightarrow \infty$
$\gamma \geq \alpha_m$ pour tout $m$ , $\gamma = \alpha_m$ ssi $m \in J$ , $J$ sous-ensemble non vide de $E$ , et $\gamma > 0$	$2 \left( \sum_{m \in J} \mu_m \right) u \gamma^2 e^{-\gamma x + u \gamma^2 / 2}$
$\gamma > \alpha_m$ pour tout $m \in E$ et $\gamma > 0$	$\left( \sum_{m \in E} \frac{2\gamma \mu_m}{\gamma - \alpha_m} \right) e^{-\gamma x + u \gamma^2 / 2}$
$\alpha_m = \max(\alpha) = \bar{\alpha}$ ssi $m \in J$ ( $J$ sous-ensemble non vide de $E$ ), $\bar{\alpha} > \gamma$ et $\bar{\alpha} > 0$	$e^{u \bar{\alpha}^2 / 2} \left( \frac{2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha} - \gamma} \left( \sum_{m \in J} \mu_m \right) e^{-\bar{\alpha} x} + 2 \sinh(\bar{\alpha} x) \mathbf{1}_{k \in J} \right)$
$\gamma = 0, \alpha_m = 0$ si $m \in J$ (sous-ensemble non vide de $E$ ) et $\alpha_m < 0$ sinon	$\sum_{m \in J} \mu_m$
$\gamma = 0, \alpha_m < 0$ pour tout $m \in E$	$\sqrt{\frac{2}{\pi u}} \left( \sum_{m \in E} \frac{\mu_m}{ \alpha_m } \right)$
$\alpha_m = 0$ si $m \in J$ (sous-ensemble non vide de $E$ ), $\alpha_m < 0$ sinon, et $\gamma < 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi u}} \left( \frac{\sum_{m \in J} \mu_m}{ \gamma } + x \mathbf{1}_{k \in J} \right)$
$\alpha_m < 0$ pour tout $m \in E$ et $\gamma < 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi u^3}} \left( \sum_{m \in E} \mu_m \frac{ \alpha_m  +  \gamma }{\alpha_m^2 \gamma^2} + x \left( \frac{1}{\alpha_k^2} + \sum_{m \in E} \frac{\mu_m}{\alpha_m \gamma} \right) \right)$

On en déduit que l'expression  $\exp(\gamma L_s) \frac{Z(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t-s)}{Z(\alpha, \gamma, 0, 0, t)}$  converge, quand  $t$  tend vers l'infini, vers  $M(\alpha, \gamma, X_s, N_s, L_s, s)$ .

Par ailleurs, si  $t \geq s + 1$ , on a, d'après le Lemme 3.2, les inégalités :

$$\begin{aligned} Z(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t - s) &\leq Z^*(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t - s) \\ &\leq H(\alpha, \gamma) e^{\psi(\alpha) X_s} Z^*(\alpha, \gamma, 0, 0, t - s). \end{aligned}$$

De plus :

$$Z(\alpha, \gamma, 0, 0, t) \geq \frac{1}{2} Z^*(\alpha, \gamma, 0, 0, t)$$

pour  $t$  assez grand, puisque  $Z(\alpha, \gamma, 0, 0, t)$  est équivalent à  $Z^*(\alpha, \gamma, 0, 0, t)$  quand  $t$  tend vers l'infini.

D'autre part, pour  $t$  assez grand :

$$\frac{Z^*(\alpha, \gamma, 0, 0, t - s)}{Z^*(\alpha, \gamma, 0, 0, t)} \leq 2M(\alpha, \gamma, 0, 0, 0, s) \leq 2.$$

Il en résulte que pour  $t$  assez grand :

$$e^{\gamma L_s} \frac{Z(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t - s)}{Z(\alpha, \gamma, 0, 0, t)} \leq 4H(\alpha, \gamma) \exp(\psi(\alpha)X_s + \gamma L_s).$$

Ce majorant étant intégrable sous  $\mathbf{W}_{(0,0)}$ , on en déduit le Théorème 1.1, par convergence dominée. □

### 4. Etude du processus associé à $(\alpha, \gamma)\mathbf{W}^{(\infty)}$

Dans cette section, nous allons prouver le Théorème 1.2 en distinguant plusieurs cas, selon l'expression de la martingale  $(M_s^{(\alpha, \gamma)})_{s \geq 0}$ ,  $M_s^{(\alpha, \gamma)} = M(\alpha, \gamma, X_s, N_s, L_s, s)$  étant la densité de la restriction de  $(\alpha, \gamma)\mathbf{W}^{(\infty)}$  à  $\mathcal{F}_s$ , par rapport à celle de  $\mathbf{W}_{(0,0)}$  (nous noterons plus simplement  $M_s$  cette densité s'il n'y a pas d'ambiguïté possible).

#### 4.1. Cas où $\gamma \geq \alpha_m$ pour tout $m$ et $\gamma > 0$

Sous  $\mathbf{W}_{(0,0)}$ ,  $(\tilde{Y}_s = L_s - X_s)_{s \geq 0}$  est un mouvement brownien. La densité de la loi de  $(\tilde{Y}_u)_{0 \leq u \leq s}$  sous  $(\alpha, \gamma)\mathbf{W}^{(\infty)}$ , par rapport à celle d'un mouvement brownien sur  $[0, s]$ , est donc égale à  $M_s = \exp(\gamma \tilde{Y}_s - s\gamma^2/2)$ .

Par conséquent,  $(\tilde{Y}_s)_{s \geq 0}$  est un mouvement brownien avec drift  $\gamma$  sous  $(\alpha, \gamma)\mathbf{W}^{(\infty)}$ , et  $(X_s)_{s \geq 0}$  peut être obtenu à partir de  $(\tilde{Y}_s)_{s \geq 0}$  grâce à l'expression :  $X_s = \left( \sup_{u \in [0, s]} \tilde{Y}_u \right) - \tilde{Y}_s$ .

On en déduit que  $(X_s)_{s \geq 0}$  a même loi que la valeur absolue d'un processus bang-bang de paramètre  $\gamma$ .

Par ailleurs,  $N_s$  n'intervient pas dans l'expression de  $M_s$ , donc le processus  $(N_s)_{s \geq 0}$ , sachant  $(X_s)_{s \geq 0}$ , a même loi sous  $(\alpha, \gamma)\mathbf{W}^{(\infty)}$  que sous  $\mathbf{W}_{(0,0)}$ .

#### 4.2. Cas où $\max\{\alpha_m, m \in E\} > \max(\gamma, 0)$

Dans ce paragraphe, nous posons  $\bar{\alpha} = \max\{\alpha_m, m \in E\}$  et nous notons  $J$  l'ensemble (non vide) des éléments  $m$  de  $E$  tels que  $\alpha_m = \bar{\alpha}$ . Commençons tout d'abord par étudier le cas particulier suivant :

**a) Cas particulier :  $\gamma = 0$  et il existe  $m \in E$  tel que  $J = \{m\}$**

On a dans ce cas :

$$M_s = e^{-s\bar{\alpha}^2/2} \left( e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m} \right)$$

pour tout  $s \geq 0$ .

Considérons à présent un processus  $(Y_t, R_t)_{t \geq 0}$  sur  $\mathbf{R}_E$  défini de la manière suivante :

- $(Y_t)_{t \geq 0}$  est la valeur absolue d'un mouvement brownien avec drift  $\bar{\alpha}$ .
- Soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble des intervalles d'excursion de  $(Y_t)_{t \geq 0}$ . Conditionnellement à  $(Y_t)_{t \geq 0}, (R_t)_{t \geq 0}$  est constant sur chaque intervalle  $I \in \mathcal{I}$  ( $R_t = R_I$  pour  $t \in I$ ), avec  $R_I = m$  p.s. si  $I$  est l'unique intervalle d'excursion non borné de  $(Y_t)_{t \geq 0}$ , et avec les autres  $(R_I)_{I \in \mathcal{I}}$  indépendants de loi  $\mu$ .

Montrons alors que  $(\alpha, 0) \mathbf{W}^{(\infty)}$  est la loi du processus  $(Y_t, R_t)_{t \geq 0}$ .

Pour cela, observons que si  $t > 0, k \in E$  et si  $F$  est une fonctionnelle mesurable bornée de  $\mathcal{C}([0, t], \mathbf{R}_E)$  dans  $\mathbf{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[F((Y_s)_{s \leq t}) \mathbf{1}_{R_t=k}] &= \mathbf{E}[F((Y_s)_{s \leq t}) \mathbf{P}(R_t = k | (Y_s)_{s \in \mathbf{R}_+})] \\ &= \mathbf{E}[F((Y_s)_{s \leq t}) (\mathbf{1}_{k=m} \mathbf{1}_{\forall s \geq t, Y_s > 0} + \mu_k \mathbf{1}_{\exists s \geq t, Y_s = 0})] \\ &= \mathbf{E}[F((Y_s)_{s \leq t}) (\mathbf{1}_{k=m} \mathbf{P}(\forall s \geq t, Y_s > 0 | Y_t) \\ &\quad + \mu_k \mathbf{P}(\exists s \geq t, Y_s = 0 | Y_t))] \end{aligned}$$

compte tenu de la propriété de Markov de  $(Y_s)_{s \geq 0}$ .

Comme  $Y_t = |B_t^{(\bar{\alpha})}|$  où  $(B_t^{(\bar{\alpha})})_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien avec drift  $\bar{\alpha}$ , on a :

$$\mathbf{P}(\exists s \geq t, Y_s = 0 | Y_t) = \mathbf{E}[\mathbf{P}(\exists s \geq t, B_s^{(\bar{\alpha})} = 0 | B_t^{(\bar{\alpha})}) | |B_t^{(\bar{\alpha})}|].$$

Or  $\mathbf{P}(\exists s \geq t, B_s^{(\bar{\alpha})} = 0 | B_t^{(\bar{\alpha})})$  est égal à 1 si  $B_t^{(\bar{\alpha})} \leq 0$  et à  $e^{-2\bar{\alpha}B_t^{(\bar{\alpha})}}$  si  $B_t^{(\bar{\alpha})} \geq 0$  : le premier cas est évident et le deuxième résulte du fait que  $(e^{-2\bar{\alpha}B_t^{(\bar{\alpha}) \wedge T_0}})_{t \geq s}$  est une martingale bornée si  $T_0 = \inf\{t \geq s, B_t^{(\bar{\alpha})} = 0\}$ .

Compte tenu des densités en  $Y_t$  et en  $-Y_t$  de la loi de  $B_t^{(\bar{\alpha})}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\exists s \geq t, Y_s = 0 | Y_t) &= \mathbf{P}(B_t^{(\bar{\alpha})} = -Y_t | Y_t) + e^{-2\bar{\alpha}Y_t} \mathbf{P}(B_t^{(\bar{\alpha})} = Y_t | Y_t) \\ &= \frac{e^{-\bar{\alpha}Y_t}}{e^{\bar{\alpha}Y_t} + e^{-\bar{\alpha}Y_t}} + e^{-2\bar{\alpha}Y_t} \cdot \frac{e^{\bar{\alpha}Y_t}}{e^{\bar{\alpha}Y_t} + e^{-\bar{\alpha}Y_t}} = \frac{e^{-\bar{\alpha}Y_t}}{\cosh(\bar{\alpha}Y_t)} \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbf{P}(\forall s \geq t, Y_s > 0 | Y_t) = 1 - \frac{e^{-\bar{\alpha}Y_t}}{\cosh(\bar{\alpha}Y_t)} = \frac{\sinh(\bar{\alpha}Y_t)}{\cosh(\bar{\alpha}Y_t)}.$$

On en déduit, en utilisant la densité de la loi de  $(Y_s)_{s \leq t}$  par rapport à celle du mouvement brownien réfléchi :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[F((Y_s)_{s \leq t}) \mathbf{1}_{R_t=k}] &= \mathbf{E} \left[ F((Y_s)_{s \leq t}) \left( \mathbf{1}_{k=m} \frac{\sinh(\bar{\alpha} Y_t)}{\cosh(\bar{\alpha} Y_t)} + \mu_k \frac{e^{-\bar{\alpha} Y_t}}{\cosh(\bar{\alpha} Y_t)} \right) \right] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ F((X_s)_{s \leq t}) \cosh(\bar{\alpha} X_t) e^{-t\bar{\alpha}^2/2} \left( \mathbf{1}_{k=m} \frac{\sinh(\bar{\alpha} X_t)}{\cosh(\bar{\alpha} X_t)} + \mu_k \frac{e^{-\bar{\alpha} X_t}}{\cosh(\bar{\alpha} X_t)} \right) \right] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ F((X_s)_{s \leq t}) \mathbf{1}_{N_t=k} e^{-t\bar{\alpha}^2/2} \left( e^{-\bar{\alpha} X_t} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha} X_t) \mathbf{1}_{N_t=m} \right) \right] \\ &= {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)} [F((X_s)_{s \leq t}) \mathbf{1}_{N_t=k}]. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que la loi de  $((Y_s)_{s \leq t}, R_t)$  et celle de  $((X_s)_{s \leq t}, N_t)$  sous  ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$  sont égales.

Par ailleurs, la loi conditionnelle de  $(R_s)_{s \leq t}$  sachant  $((Y_s)_{s \leq t}, R_t)$  peut être décrite de la manière suivante : si  $\mathcal{I}_t$  est l'ensemble des intervalles d'excursions de  $(Y_s)_{s \leq t}$ ,  $I_0$  l'élément de  $\mathcal{I}_t$  contenant  $t$ , et pour tout  $I \in \mathcal{I}_t$ ,  $R_I = R_s$  avec  $s$  quelconque dans  $I$ , alors  $R_{I_0} = R_t$  p.s., et les variables  $(R_I)_{I \in \mathcal{I}_t \setminus I_0}$  sont indépendantes de loi  $\mu$ .

On déduit de cette description que la loi de  $(R_s)_{s \leq t}$  sachant  $((Y_s)_{s \leq t}, R_t)$  est égale à celle de  $(N_s)_{s \leq t}$  sachant  $((X_s)_{s \leq t}, N_t)$  sous  $\mathbf{W}_{(0,0)}$ , et donc également sous  ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ , puisque la densité de  ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$  par rapport à  $\mathbf{W}_{(0,0)}$  ne dépend que de  $X_t$  et  $N_t$ .

Sous  ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ , on a donc d'une part l'égalité des lois de  $((Y_s)_{s \leq t}, R_t)$  et de  $((X_s)_{s \leq t}, N_t)$ , d'autre part l'égalité des lois conditionnelles de  $(R_s)_{s \leq t}$  sachant  $((Y_s)_{s \leq t}, R_t)$  et de  $(N_s)_{s \leq t}$  sachant  $((X_s)_{s \leq t}, N_t)$  : il en résulte l'égalité des lois de  $(X_s, N_s)_{s \leq t}$  et de  $(Y_s, R_s)_{s \leq t}$ .

Le résultat annoncé au début du paragraphe est donc démontré, ce qui achève la démonstration du Théorème 1.2 dans le cas particulier a).

De plus, ce résultat entraîne les faits suivants, valables pour tout  $s \geq 0$  sous la probabilité  ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$  :

- conditionnellement à  $\mathcal{F}_s$  et au fait que  $X_t$  ne s'annule pour aucun  $t \geq s$ ,  $L_\infty - L_s$  est nul.

- conditionnellement à  $\mathcal{F}_s$  et au fait que  $X_t$  s'annule pour au moins un  $t \geq s$ ,  $L_\infty - L_s$  est une variable exponentielle de paramètre  $\bar{\alpha}$ . En particulier,  $L_\infty$  est une variable exponentielle de paramètre  $\bar{\alpha}$ .

Ces propriétés résultent du fait que le mouvement brownien avec drift  $\bar{\alpha}$  est un processus fortement markovien dont le temps local total en zéro est une variable exponentielle de paramètre  $\bar{\alpha}$ .



*Remarque.* — Si  $E = \{-1, 1\}$ ,  $\mu_1 = \mu_{-1} = 1/2$  et  $m = 1$ , le processus  $(X_t N_t)_{t \geq 0}$ , qui est un mouvement brownien sous  $\mathbf{W}_{(0,0)}$ , est un mouvement brownien avec drift  $\bar{\alpha}$  sous  ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ .

Cela se vérifie aussi bien avec la martingale  $(M_s)_{s \geq 0}$  qu'avec la description du processus  $(Y_t, R_t)_{t \geq 0}$  donnée ci-dessus.

Nous pouvons à présent traiter le cas suivant, plus général :

**b) Cas où il existe  $m \in E$  tel que  $J = \{m\}$ , mais où  $\gamma < \bar{\alpha}$  n'est pas nécessairement nul.**

On a maintenant :

$$M_s = \exp(\gamma L_s - s\bar{\alpha}^2/2) \left( e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m} \right).$$

D'autre part, sous  ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ ,  $L_\infty$  est une variable exponentielle de paramètre  $\bar{\alpha}$  ; on peut donc définir la mesure de probabilité suivante :

$$\nu = \frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}} \exp(\gamma L_\infty) \cdot {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$$

(sous laquelle  $L_\infty$  est une variable exponentielle de paramètre  $\bar{\alpha} - \gamma$ ).  
 Montrons que  $\nu$  est exactement la mesure  ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$  que nous étudions, celle-ci étant donc absolument continue par rapport à  ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ .

Pour prouver ce résultat, fixons  $s \geq 0$  et  $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$ . On a :

$$\begin{aligned} \nu(\Lambda_s) &= {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)} \left[ \frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}} \mathbf{1}_{\Lambda_s} e^{\gamma L_s} e^{\gamma(L_\infty - L_s)} \right] \\ &= {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)} \left[ \frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}} \mathbf{1}_{\Lambda_s} e^{\gamma L_s} {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)} [e^{\gamma(L_\infty - L_s)} | \mathcal{F}_s] \right] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ \frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}} \mathbf{1}_{\Lambda_s} e^{\gamma L_s - s\bar{\alpha}^2/2} \left( e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m} \right) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)} [e^{\gamma(L_\infty - L_s)} | \mathcal{F}_s] \right]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si  $T_0 = \inf \{u \geq s, X_u = 0\}$  et si  $t \geq s$ , on a :

$${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)} [T_0 \leq t, \Lambda_s] = \mathbf{W}_{(0,0)} [M_t^{(\alpha,0)} \cdot \mathbf{1}_{T_0 \leq t} \cdot \mathbf{1}_{\Lambda_s}]$$

puisque  $\{T_0 \leq t\}$  et  $\Lambda_s$  sont  $\mathcal{F}_t$ -mesurables.

De plus,  $\{T_0 \leq t\}$  et  $\Lambda_s$  sont également  $\mathcal{F}_{T_0 \wedge t}$ -mesurables, donc d'après le théorème d'arrêt :

$$\begin{aligned} {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)} [T_0 \leq t, \Lambda_s] &= \mathbf{W}_{(0,0)} [M_{T_0 \wedge t}^{(\alpha,0)} \mathbf{1}_{T_0 \leq t} \mathbf{1}_{\Lambda_s}] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)} [M_{T_0}^{(\alpha,0)} \mathbf{1}_{T_0 \leq t} \mathbf{1}_{\Lambda_s}]. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $t$  vers l'infini, on a, par convergence monotone :

$$\begin{aligned} {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[T_0 < \infty, \Lambda_s] &= \mathbf{W}_{(0,0)}[M_{T_0}^{(\alpha,0)} \mathbf{1}_{T_0 < \infty} \mathbf{1}_{\Lambda_s}] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)}[M_{T_0}^{(\alpha,0)} \mathbf{1}_{\Lambda_s}] \end{aligned}$$

puisque  $T_0 < \infty$  p.s. sous  $\mathbf{W}_{(0,0)}$ .

Il en résulte :

$$\begin{aligned} {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[T_0 < \infty, \Lambda_s] &= \mathbf{W}_{(0,0)}[\mathbf{1}_{\Lambda_s} \mathbf{W}_{(0,0)}[M_{T_0}^{(\alpha,0)} | \mathcal{F}_s]] \\ &= {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} \frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[M_{T_0}^{(\alpha,0)} | \mathcal{F}_s]}{M_s^{(\alpha,0)}} \right] \\ &= {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} \frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{-(T_0-s)\bar{\alpha}^2/2} | \mathcal{F}_s]}{e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m}} \right]. \end{aligned}$$

Or, conditionnellement à  $\mathcal{F}_s$ ,  $T_0 - s$  est le temps d'atteinte de zéro d'un mouvement brownien issu de  $X_s$ . On en déduit :

$$\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{-(T_0-s)\bar{\alpha}^2/2} | \mathcal{F}_s] = e^{-\bar{\alpha}X_s}$$

et

$${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[T_0 < \infty, \Lambda_s] = {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} \frac{e^{-\bar{\alpha}X_s}}{e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m}} \right]$$

autrement dit :

$${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[T_0 < \infty | \mathcal{F}_s] = \frac{e^{-\bar{\alpha}X_s}}{e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m}}.$$

La loi conditionnelle de  $L_\infty - L_s$ , sachant la tribu engendrée par  $\mathcal{F}_s$  et l'événement  $\{T_0 < \infty\}$ , a été décrite à la fin de l'étude du cas a). On déduit de cette description l'égalité suivante :

$${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[e^{\gamma(L_\infty - L_s)} | \mathcal{F}_s] = \frac{\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha} - \gamma} e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m}}{e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m}}.$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \nu(\Lambda_s) &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} e^{\gamma L_s - s\bar{\alpha}^2/2} \left( e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m} \right) \right] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)}[\mathbf{1}_{\Lambda_s} M_s^{(\alpha,\gamma)}]. \end{aligned}$$

On a donc l'égalité cherchée :

$$\nu = {}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$$

qui implique le Théorème 1.2 dans le cas b).

**c) Cas général**

Une fois le Théorème 1.2 prouvé dans le cas particulier b), il est facile de l'étendre au cas général  $\bar{\alpha} > \max(\gamma, 0)$ .

En effet, dans ce cas, la loi de  $(X_t, N_t)_{t \geq 0}$  est une moyenne des lois données en b), avec une pondération  $\frac{\mu_m}{\sum_{k \in J} \mu_k}$  pour chaque  $m \in J$ .

On en déduit que le processus canonique sous  $(\alpha, \gamma) \mathbf{W}^{(\infty)}$  peut être décrit de la même manière qu'en b), sauf que sa dernière excursion se situe sur une branche quelconque appartenant à  $J$ , choisie aléatoirement à l'aide de la mesure  $\mu$  : ceci correspond exactement à l'énoncé du Théorème 1.2.

**4.3. Cas où  $\gamma < 0$  et  $\alpha_m \leq 0$  pour tout  $m \in E$**

Dans ce cas, on a :

$$M_s = e^{\gamma L_s} (1 + \theta_{N_s} X_s)$$

où les  $(\theta_k)_{k \in E}$ , positifs, dépendant de  $\alpha$ , sont tels que :

$$\sum_{k \in E} \mu_k \theta_k = |\gamma|.$$

Nous allons tout d'abord supposer qu'il existe  $m \in E$  tel que  $\theta_k = \frac{|\gamma|}{\mu_m}$  si  $k = m$ , et  $\theta_k = 0$  si  $k \neq m$ .

Dans ces conditions :

$$M_s = e^{\gamma L_s} \left( 1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m} \right).$$

Considérons alors des réels positifs  $l$  et  $s$ , une variable aléatoire  $\mathcal{F}_{\tau_l}$ -mesurable bornée  $Y$  ( $\tau_l$  étant l'inverse, pris en  $l$ , du temps local de  $(X_t)_{t \geq 0}$ ), et une fonctionnelle  $F$  mesurable bornée de  $\mathcal{C}([0, s], \mathbf{R}_E)$  dans  $\mathbf{R}$ .

On a, lorsque  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} & (\alpha, \gamma) \mathbf{W}^{(\infty)} [\mathbf{1}_{\tau_l \leq t} Y F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s})] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ M_{t+s}^{(\alpha, \gamma)} \mathbf{1}_{\tau_l \leq t} Y F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s}) \right] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ M_{(t+s) \wedge (\tau_l+s)}^{(\alpha, \gamma)} \mathbf{1}_{\tau_l \leq t} Y F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s}) \right] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ M_{\tau_l+s}^{(\alpha, \gamma)} F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s}) \mathbf{1}_{\tau_l \leq t} Y \right] \end{aligned}$$

en utilisant le théorème d'arrêt pour la deuxième égalité.

Le théorème de convergence monotone entraîne alors, en faisant tendre  $t$  vers l'infini :

$$\begin{aligned} & {}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)} [\mathbf{1}_{\tau_l < \infty} Y F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s})] \\ &= e^{\gamma l} \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ e^{\gamma(L_{\tau_l+s} - L_{\tau_l})} \left( 1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_{\tau_l+s} \mathbf{1}_{N_{\tau_l+s}=m} \right) F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s}) Y \right] \end{aligned}$$

compte tenu du fait que  $\tau_l < \infty$  p.s. sous  $\mathbf{W}_{(0,0)}$ .

D'après la propriété de Markov de l'araignée,  $(X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{\tau_l}$  sous  $\mathbf{W}_{(0,0)}$  et a même loi que  $(X_u, N_u)_{0 \leq u \leq s}$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} & {}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)} [\mathbf{1}_{L_\infty \geq l} Y F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s})] \\ &= \exp(\gamma l) {}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)} [F(X_u, N_u)_{0 \leq u \leq s}] \mathbf{W}_{(0,0)} [Y]. \end{aligned}$$

En particulier, pour  $F$  et  $Y$  égaux à 1, on obtient :

$${}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)} [L_\infty \geq l] = \exp(\gamma l).$$

On a donc les caractéristiques suivantes :

- $L_\infty$  est une variable exponentielle de paramètre  $|\gamma|$ .
- conditionnellement à  $L_\infty \geq l$ ,  $(X_s, N_s)_{0 \leq s \leq \tau_l}$  est une araignée brownienne arrêtée en  $\tau_l$ , et  $(X_{\tau_l+s}, N_{\tau_l+s})_{s \geq 0}$  a pour loi  ${}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$  ; de plus, ces deux processus sont indépendants.

On déduit de ce qui précède que conditionnellement à  $L_\infty = l$ ,  $(X_s, N_s)_{0 \leq s \leq \tau_l}$  est encore une araignée arrêtée en  $\tau_l$ , et  $(X_{\tau_l+s}, N_{\tau_l+s})_{s \geq 0}$  est un processus de loi  ${}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ , conditionné par le fait qu'il ne s'annule qu'au temps zéro, les deux processus étant encore indépendants.

Pour déterminer la loi du deuxième processus, considérons  $s \geq 0$ ,  $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$ ,  $l \geq 0$  et  $t \geq s$ . On a :

$$\begin{aligned} {}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)} [\Lambda_s, \tau_l \leq t] &= \mathbf{W}_{(0,0)} [M_t^{(\alpha, \gamma)} \mathbf{1}_{\Lambda_s} \mathbf{1}_{\tau_l \leq t}] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)} [M_{\tau_l \vee s}^{(\alpha, \gamma)} \mathbf{1}_{\Lambda_s} \mathbf{1}_{\tau_l \leq t}] \end{aligned}$$

d'où

$${}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)} [\Lambda_s, \tau_l < \infty] = \mathbf{W}_{(0,0)} [M_{\tau_l \vee s}^{(\alpha, \gamma)} \mathbf{1}_{\Lambda_s}]$$

et donc :

$$\begin{aligned}
 (\alpha, \gamma) \mathbf{W}^{(\infty)}[\Lambda_s, L_\infty \leq l] &= \mathbf{W}_{(0,0)}[(M_s^{(\alpha, \gamma)} - M_{\tau_l \vee s}^{(\alpha, \gamma)}) \mathbf{1}_{\Lambda_s}] \\
 &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ \left( e^{\gamma L_s} \left( 1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m} \right) - e^{\gamma l} \right) \mathbf{1}_{L_s \leq l} \mathbf{1}_{\Lambda_s} \right] \\
 &= \mathbf{W}_{(0,0)}[L_s \leq l] \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} \left( e^{\gamma L_s} \left( 1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m} \right) - e^{\gamma l} \right) | L_s \leq l \right]
 \end{aligned}$$

Comme  $(\alpha, \gamma) \mathbf{W}^{(\infty)}[L_\infty \leq l] = 1 - e^{\gamma l}$ , on a :

$$\begin{aligned}
 (\alpha, \gamma) \mathbf{W}^{(\infty)}[\Lambda_s | L_\infty \leq l] &= \frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[L_s \leq l]}{1 - e^{\gamma l}} \mathbf{W}_{(0,0)} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} \left( e^{\gamma L_s} \left( 1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m} \right) - e^{\gamma l} \right) | L_s \leq l \right] \\
 &= \frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[L_s \leq l]}{1 - e^{\gamma l}} \tilde{\mathbf{W}}_s(l) \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} \left( e^{\gamma L_s} \left( 1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m} \right) - e^{\gamma l} \right) \right]
 \end{aligned}$$

où  $\tilde{\mathbf{W}}_s(l)$  est la loi de  $(X_u, N_u)_{u \leq s}$  conditionné par l'événement  $\{L_s \leq l\}$ .  
 Quand  $l$  tend vers zéro,  $\frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[L_s \leq l]}{1 - e^{\gamma l}}$  tend vers  $\frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{2}{\pi s}}$ .

D'autre part, si  $L_s \leq l$  et si  $(X_s, N_s)$  est fixé,  $e^{\gamma L_s} \left( 1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m} \right) - e^{\gamma l}$  tend vers  $\frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m}$  quand  $l$  tend vers zéro.

Ceci permet de démontrer :

$$(\alpha, \gamma) \mathbf{W}^{(\infty)}[\Lambda_s | L_\infty = 0] = \tilde{\mathbf{W}}_s(0) \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \frac{X_s}{\mu_m} \mathbf{1}_{N_s=m} \right]$$

où  $\tilde{\mathbf{W}}_s(0)$  est la loi d'une araignée sur  $[0, s]$ , conditionnée par sa non-annulation en dehors du temps 0; sous  $\tilde{\mathbf{W}}_s(0)$ ,  $(X_u)_{u \leq s}$  est un méandre brownien de durée  $s$ .

On en déduit que sous  $(\alpha, \gamma) \mathbf{W}^{(\infty)}$ , et conditionnellement au fait que  $X_s > 0$  pour tout  $s > 0$ ,  $(X_s)_{s \geq 0}$  est un processus de Bessel de dimension 3, et  $N_s = m$  pour tout  $s$ .

On a donc la description de  $(X_t, N_t)_{t \geq 0}$  dans le cas où un seul des  $\theta_k$  précédemment donnés est nul.

Le cas général est simple à étudier à présent; en effet, il suffit de faire une moyenne pondérée des mesures précédemment décrites pour chacun des  $m \in E$  (avec la pondération  $\frac{\mu_m \theta_m}{|\gamma|}$ ).

*Remarque.* — Dans le cas étudié ci-dessus ( $\gamma < 0$  et  $\alpha_m \leq 0$  pour tout  $m$ ), on peut vérifier directement, à partir de l'expression de  $M_s$ , que la loi

du processus  $(X_u)_{u \leq s}$  a une densité  $e^{\gamma L_s}(1 + |\gamma|X_s)$  par rapport à la loi d'un mouvement brownien réfléchi sur  $[0, s]$ .

La validité de la description de  $(X_s)_{s \geq 0}$  donnée dans le Théorème 1.2 peut alors se déduire du Théorème 1.1. de [8] (appliqué à la fonction  $\phi(y) = |\gamma|e^{\gamma y}$ ) et du théorème d'équivalence de Lévy.

Par ailleurs, dans le cas où  $\theta_k > 0$  ssi  $k = m$ , on a :

$${}^{(\alpha, \gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}[N_t \neq m] = \mathbf{W}_{(0,0)}[e^{\gamma L_t} \mathbf{1}_{N_t \neq m}] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

ce qui donne une preuve rapide du fait que l'excursion non bornée de  $(A_s)_{s \geq 0}$  se situe presque sûrement sur la demi-droite d'indice  $m$ .

#### 4.4. Cas où $\gamma = 0$ et $\alpha_m \leq 0$ pour tout $m \in E$

Ce cas est le plus simple de tous :  ${}^{(\alpha, 0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$  est exactement la loi d'une araignée brownienne, puisque  $M_s^{(\alpha, 0)}$  est constante et égale à 1.

A présent, nous venons d'achever la preuve du Théorème 1.2 dans tous les cas possibles.  $\square$

*Remarque.* — Le Théorème 1.2 indique différents comportements possibles pour le processus limite, selon les valeurs des réels  $\alpha_m$  ( $m \in E$ ) et  $\gamma$ .

Cette distinction de cas généralise celle que B. Roynette, P. Vallois et M. Yor obtiennent dans [8] lors de l'étude des pénalisations exponentielles du mouvement brownien. Une distinction de cas du même type apparaît également dans les résultats prouvés par Y. Hariya et M. Yor dans [4].

Par ailleurs, il pourrait être intéressant d'étudier d'autres pénalisations de l'araignée brownienne, liées par exemple aux temps passés par l'araignée dans les différentes branches, dont la loi jointe, sur un intervalle de temps fixe, est décrite en [2].

### 5. Preuve du Théorème 1.3

Soit  $\nu$  une mesure de probabilité vérifiant les conditions de l'énoncé du Théorème 1.3.

La famille des variable aléatoires  $(g(s, X_s, N_s))_{s \geq 0}$  est une martingale sous  $\mathbf{W}_{(0,0)}$ , ce qui implique les résultats suivants, compte tenu du semi-groupe de l'araignée brownienne :

– Pour tous  $x \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $s \geq 0$  et  $m \in E$ ,  $\frac{\partial g}{\partial s}(s, x, m) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, x, m) = 0$ .

– Pour tout  $s \geq 0$ ,  $\sum_{m \in E} \mu_m \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0, m) = 0$ .

La première égalité donne :

$$h'(s)f_m(x) + \frac{1}{2}h(s)f_m''(x) = 0.$$

Comme  $h(s)$  est non nul pour tout  $s$ , on en déduit :

$$f_m''(x) = -\frac{2h'(s)}{h(s)}f_m(x)$$

ce qui implique que  $C = \frac{h'(s)}{h(s)}$  ne dépend pas de  $s$ .

Si on suppose  $C > 0$ ,  $f_m''(x)$  est négatif pour tout  $x$ , et  $f'_m$  est décroissante. Comme  $f_m$  est une fonction positive, la limite de  $f'_m(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini est positive, et  $f_m$  est croissante : pour tout  $x$ ,  $f_m(x) \geq f_m(0) = 1$ . On en déduit que  $f_m''(x) = -2Cf_m(x) \leq -2C$ , ce qui est contradictoire avec la positivité de  $f_m$ .

Si on suppose  $C = 0$ , toutes les fonctions  $f_m$  ( $m \in E$ ) sont affines et positives :  $f_m(x) = 1 + \lambda_m x$  où  $\lambda_m \geq 0$ .

Or, pour tout  $s \geq 0$ ,  $\sum_{m \in E} \mu_m \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0, m) = 0$ , ce qui implique  $\sum_{m \in E} \lambda_m \mu_m = 0$ , d'où  $\lambda_m = 0$  pour tout  $m$ .

La mesure  $\nu$  est alors égale à  $\mathbf{W}_{(0,0)}$ , ce qui est exclu dans l'hypothèse du Théorème 1.3.

Nous venons donc de prouver que  $C$  est strictement négatif, notons le  $-\beta^2/2$ , avec  $\beta > 0$ .

Comme  $h(0) = 1$  (puisque  $f_0(0) = 1$ ), on a  $h(s) = e^{-s\beta^2/2}$  comme annoncé, et  $f_m''(x) = \beta^2 f_m(x)$ .

On en déduit qu'il existe  $\delta_m$  et  $\lambda_m \in \mathbf{R}$  tels que :

$$f_m(x) = \delta_m \exp(-\beta x) + \lambda_m \sinh(\beta x)$$

pour tout  $x \geq 0$ ; comme  $f_m(0) = 1$ ,  $\delta_m = 1$  pour tout  $m$ .

Par ailleurs,  $f_m(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$ , donc  $\lambda_m \geq 0$  pour tout  $m$ .

De plus, on doit avoir, pour tout  $s \geq 0$ ,  $\sum_{m \in E} \mu_m \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0, m) = 0$ , ce qui implique  $\sum_{m \in E} \mu_m f'_m(0) = 0$ , soit  $\sum_{m \in E} \mu_m (1 - \lambda_m) = 0$  et  $\sum_{m \in E} \mu_m \lambda_m = 1$ .

On en déduit que  $\nu$  est une moyenne pondérée des mesures  $(\alpha^{(m)}, 0)\mathbf{W}^{(\infty)}$ , la pondération étant  $\mu_m \lambda_m$ , ce qui achève la preuve du Théorème 1.3.  $\square$

Les processus associés aux mesures vérifiant l'énoncé du Théorème 3 peuvent être considérés comme des généralisations du mouvement brownien avec drift.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BARLOW, J. PITMAN & M. YOR, « On Walsh's Brownian motions », in *Séminaire de Probabilités, XXIII*, Lecture Notes in Math., vol. 1372, Springer, Berlin, 1989, p. 275-293.
- [2] ———, « Une extension multidimensionnelle de la loi de l'arc sinus », in *Séminaire de Probabilités, XXIII*, Lecture Notes in Math., vol. 1372, Springer, Berlin, 1989, p. 294-314.
- [3] A.-S. CHERNY & A.-N. SHIRYAEV, « Some Distributional Properties of a Brownian Motion with a Drift and an Extension of P. Lévy's Theorem », *Theory of Probab. and Its Applications* **44** (2000), n° 2, p. 412-418.
- [4] Y. HARIYA & M. YOR, « Limiting distributions associated with moments of exponential Brownian functionals », *Studia Sci. Math. Hungar.* **41** (2004), n° 2, p. 193-242.
- [5] I. KARATZAS & S.-E. SHREVE, *Brownian motion and stochastic calculus*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1988, 437-442 pages.
- [6] J. PITMAN, « The distribution of local times of a Brownian bridge », in *Séminaire de Probabilités, XXXIII*, Lecture Notes in Math., vol. 1709, Springer, Berlin, 1999, p. 388-394.
- [7] B. ROYNETTE, P. VALLOIS & M. YOR, « Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **337** (2003), n° 10, p. 667-673.
- [8] ———, « Limiting laws for long Brownian bridges perturbed by their one-sided maximum. III », *Period. Math. Hungar.* **50** (2005), n° 1-2, p. 247-280.
- [9] ———, « Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time. II », *Studia Sci. Math. Hungar.* **43** (2006), n° 3, p. 295-360.
- [10] ———, « Pénalisations et quelques extensions du théorème de Pitman, relatives au mouvement brownien et à son maximum unilatère », in *Séminaire de Probabilités, XXXIX*, Lecture Notes in Math., vol. 1874, Springer, 2006, p. 305-336.
- [11] ———, « Some penalizations of the Wiener measure », *Jap. Journal of Math.* **1** (2006), p. 263-290.
- [12] J.-B. WALSH, « A diffusion with a discontinuous local time », *Temps Locaux, Astérisque* **52-53** (1978), p. 37-45.

Manuscrit reçu le 30 juin 2005,

révisé le 15 juin 2006,

accepté le 12 octobre 2006.

Joseph NAJNUDEL  
Université Pierre et Marie Curie  
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires  
175, rue du Chevaleret  
75013 Paris  
France  
najnudel@clipper.ens.fr