

Vergrößerung von Finite-Elemente-Räumen

Habilitationsschrift

Stefan A. Sauter
Lehrstuhl Praktische Mathematik
Universität Kiel

Mai 1997

Inhaltsverzeichnis

none

1	Einleitung	5
1.1	Symbolverzeichnis	8
2	Motivation und Problemstellung	13
3	Grundlagen der Finite-Elemente-Methode	19
3.1	Funktionenräume	19
3.2	Variationsformulierung partieller Differentialgleichungen	22
3.3	Finite-Elemente-Diskretisierung	23
4	Zusammengesetzte finite Elemente	37
4.1	Konstruktion von CFE-Gittern	38
4.2	Definition von CFE-Räumen	52
4.2.1	Lokalität der Prolongation und Gitterkompatibilität . .	54
4.2.2	Geometrische Eigenschaften von CFE-Gittern	60
4.3	Diskretisierung	62
4.4	Wesentliche Randbedingungen	65
4.4.1	Zur Definition des Interpolationsgitters τ_ℓ^{int}	82
4.4.2	Lokalität der Prolongation für wesentlichen Randbedingungen	90
5	Approximationseigenschaft	99
5.1	Fortsetzungsoperatoren	101
5.2	Approximationseigenschaft für CFE-Räume	111
5.2.1	Approximation von Funktionen aus $H^k(\Omega)$	112
5.2.2	Approximation von Funktionen aus $H^k(\Omega)$, die wesentliche Randbedingungen erfüllen	123

6 Implementierung	139
6.1 Gittergenerierung	140
6.2 Erzeugung des linearen Gleichungssystems	150
6.3 Komplexitätsanalyse	154
6.4 Numerische Experimente	160
6.4.1 Approximationseigenschaft	160
6.4.2 Zusammengesetzte finite Elemente und Mehrgitterverfahren	165
6.4.3 Homogenisierung mit zusammengesetzten finiten Elementen	167

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit wird eine neue Klasse von finiten Elementen eingeführt, die sich einfach vergrößern läßt. Diese sogenannten zusammengesetzten finiten Elemente eignen sich daher besonders gut zur Diskretisierung von Problemen, für die herkömmliche finite Elemente keine groben Diskretisierungen zulassen. Die Effizienz vieler Lösungsverfahren (Extrapolation, Mehrgitterverfahren, Wavelets, etc.) basiert jedoch oftmals auf mehrskaligen Diskretisierungen eines Problems. Das bedeutet anschaulich, daß Informationen der gesuchten Lösung, die bereits auf groben Skalen darstellbar sind, auch auf diesen Skalen berechnet werden können. Die übliche Einschränkung an Finite-Elemente-Diskretisierungen, daß die Details des Problems (Geometriedetails, Koeffizienten der Differentialoperatoren etc.) aufgelöst sind, sind daher ein großes Handicap für eine effiziente numerische Behandlung. Für die in dieser Arbeit entwickelten, zusammengesetzten Finite-Elemente-Räume entfällt diese Restriktion. Probleme mit sehr vielen, kleinen, geometrischen Details können mit sehr wenigen Unbekannten (Größenordnung 10-20) diskretisiert werden. Das Entscheidende ist, daß bereits ab den sehr grobskaligen Diskretisierungen die asymptotischen Fehlerabschätzungen für den Diskretisierungsfehler gelten, und daher die oben beschriebenen effizienten Löser vorteilhaft eingesetzt werden können. Im Gegensatz zu vielen anderen Homogenisierungsverfahren, ist der Aufwand, die groben Diskretisierungen zu realisieren, d.h. die Gleichungssysteme aufzustellen und zu lösen, wesentlich geringer als die Diskretisierung des Problems auf einer sehr feinen Skala, bei der alle Mikrostrukturen aufgelöst sind. Diese Tatsache macht die zusammengesetzten finiten Elemente auch interessant, um Probleme, die komplizierte Mikrostrukturen enthalten, mit moderater Genauig-

keit zu lösen. Derartige Probleme treten typischerweise bei der Modellierung von Umweltphänomenen auf.

Wir werden diese Finite-Elemente-Räume abstrakt definieren, so daß sie ohne Modifikation in zwei und drei Raumdimensionen und sowohl auf simplizialen wie auch auf quadrilateralen Gitter angewendet werden können. Desweiteren bleibt der lokale Charakter der Finite-Elemente-Diskretisierung erhalten. Die Basisfunktionen der zusammengesetzten Finite-Elemente-Räume sind zwar eventuell über einen etwas größeren Bereich *verschmiert*, besitzen aber nach wie vor einen lokalen Träger, der aus $O(1)$ Dreiecken, Vierecken, etc. besteht.

Die Abschätzungen des Approximationsfehlers, die in dieser Arbeit hergeleitet werden, sind lokal. Das bedeutet, daß sowohl adaptive Verfeinerungsstrategien angewendet werden können, als auch lokale Fehlerabschätzungen zur Verfügung stehen, die benötigt werden, um eventuell vorhandene Singularitäten in der Lösung adaptiv aufzulösen, und um mit lokalen Fehlerabschätzungen abhängig von der Regularität der Lösung arbeiten zu können.

Die zusammengesetzte Finite-Elemente-Methode ist flexibel bezüglich unterschiedlicher Diskretisierungsordnung. Die Methode und die Fehlerabschätzungen werden für Diskretisierungen mit beliebigem, lokalem Polynomgrad hergeleitet. Wir diskutieren hier nicht die adaptive *hp*-Methode, da speziell für Probleme mit vielen und komplizierten Mikrostrukturen auf Grund der fehlenden Regularität eine Verfeinerung des Polynomgrades in der Nähe der Mikrostrukturen nicht sinnvoll ist.

In der Literatur existieren mehrere Vergrößerungsstrategien, die für spezielle Anwendungen vorteilhaft sein können. Falls man lediglich an der effizienten Lösung großer, positiv definiter Probleme interessiert ist, lassen sich BPX-artige Vorkonditionierer anwenden und für spezielle Probleme eventuell billigere Vergrößerungstechniken verwenden. In letzter Zeit haben algebraische Mehrgitterverfahren eine Wiederbelebung erfahren. Diese Verfahren zeigen für spezielle Typen von Problemen beindruckende Konvergenzeigenschaften. Das Dilemma ist jedoch, daß praktisch keine Theorie vorhanden ist, die für Real-Life-Probleme anwendbar ist, und daß einige dieser Methoden instabil werden, falls das lineare Gleichungssystem nicht einige algebraische Eigenschaften besitzt, die in der Praxis üblicherweise verletzt sind.

Die in dieser Arbeit vorgestellten zusammengesetzten finite Elemente besitzen eine sauber definierte mathematische Grundlage in Form einer sehr allgemein bewiesenen Approximationseigenschaft. Die numerischen Experimente bestätigen, daß sie sich sowohl zur Diskretisierung auf groben Ska-

len eignen wie auch zur effizienten Verwendung von Mehrgittermethoden für Probleme, die viele und komplizierte Mikrostrukturen enthalten. Eine wesentliche Stärke der vorgestellten Methode ist, daß sie sowohl einfach zu implementieren ist, wie auch das Potential besitzt, für kompliziertere Probleme, die beispielsweise hoch-oszillierende, unstetige Koeffizienten enthalten, angewendet werden kann.

Ich möchte an dieser Stellen, die Gelegenheit nützen, den Personen zu danken, die mir während der Zeit des Forschens und Aufschreibens dieser Arbeit die entscheidende Unterstützung gaben. Die größte fachliche Motivation waren die intensiven Diskussionen mit Herrn Prof. Hackbusch, der immer der Meinung war, daß irgendwo noch eine einfachere Lösung existiert, und damit bis zum Schluß recht hatte. Sowohl sein Interesse an den mathematischen Details als auch an der Einordnung der erzielten Ergebnisse gaben mir wichtige Impulse und waren eine ständige Motivation.

Ich möchte den Mitarbeitern und wissenschaftlichen Hilfskräften am Lehrstuhl Praktische Mathematik in Kiel danken für die permanente Unterstützung und Motivation, die ich erfahren habe. Speziell Lars Grasedyck und Jens Burmeister waren eine unschätzbare Hilfe bei der Implementierung der Methode.

Einen wesentlichen Teil dieser Arbeit habe ich am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach aufgeschrieben. Für diese Unterstützung, die sehr wesentlich zum Erfolg beitrug, möchte ich mich herzlich bedanken.

Ein großer Dank gebührt meiner Familie, die sehr viel Verständnis für meine Arbeit aufbrachte, und eine sehr wichtige Abwechslung darstellte zu all den Formeln und Beweisen in meiner wissenschaftlicher Arbeit. Besonderer Dank gilt meiner Tochter Lina, die mich am besten ermuntern konnte, immer weitere Dreiecke auf irgendwelche Schmierpapiere von ihr zu kritzeln.

1.1 Symbolverzeichnis

$a(\cdot, \cdot)$	Bilinearform (S. 22)
$a_\tau(\cdot, \cdot)$	lokale Bilinearform auf Ω_τ (S. 151)
\mathbf{A}_ℓ	Matrix des linearen Gleichungssystems (S. 63)
\mathbf{A}_ℓ^{makro}	Matrix zum inneren Gitter τ_ℓ^{makro} (S. 152)
argmin	$\operatorname{argmin}_{x \in M} F(x)$ ergibt einen fest-gewählten Minimierer des Funktionals F
argmax	analog wie argmin
b_j, b	Zahlen, welche die geometrische Größe der Einflußmenge $I_{j,\ell}(K)$ beschreiben (S. 46)
b_Γ	Breite des randnahen Gitters, $b_\Gamma = 5$ (S. 68)
b_x^ℓ, b_x^τ	CFE-Basisfunktionen (S. 63)
$C^\infty(\Omega)$	Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf Ω (S. 21)
$C_0^\infty(\Omega)$	Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf Ω mit kompaktem Träger (S. 21)
$C^\infty(\Omega, \Gamma_D)$	Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf Ω , die in einer Umgebung von Γ_D verschwinden (S. 21)
c_a, C_a	Verhältnis zwischen h_K und $h_{\Phi(K)}$ (siehe (4.5))
C_A	Verhältnis zwischen der Fläche von $L_\tau^N(K)$ und K (S. 29)
C_E	Norm des Fortsetzungsoperators (S. 100)
C_q	Verhältnis zwischen h_K und $h_{K'}$ im Fall von $\operatorname{dist}(K, K', \tau) \leq C$ (S. 28)
c_r, C_r	Verhältnis zwischen h_K und $h_{K'}$ für die Söhne K' von K (S. 58)
c_{ref}, C_{ref}	Konstanten, welche die Verfeinerungsgeschwindigkeit beschreiben (S. 45)
C_{reg}	Konstante, welche die Regularität der geometrischen finiten Elemente beschreibt (S. 24)
C_t	Konstante, welche den Lipschitz-stetigen Zusammenhang beschreibt (S. 27)

C_u	Konstante, welche die Quasiuniformität des Teilgitters $I_{j,\ell}(K)$ beschreibt (S. 57)
C_v	Summe der Verzerrungsparameter $\varepsilon_{j,\ell}(K)$ (S. 58)
C_W	Norm des Fortsetzungsoperators nach Whitney (S. 102)
C_Ω	Konstante, welche den Einfluß des Gebiets Ω auf die Norm des Fortsetzungsoperators charakterisiert (S. 105)
$C_\#$	Anzahl der Elemente $K \in \tau$, die $K' \in L_\tau^N(K)$ erfüllen (S. 29)
$C'_\#$	Anzahl der Elemente $K \in \tau$, die $K' \in U_{int}(K)$ erfüllen (S. 61)
d	Raumdimension, $d = 2, 3$
$D(y)$	Grobgittergebiet, welches zur Auswertung der Prolongation in einem Feingitterpunkt verwendet wird (S. 93)
$\text{dist}(\omega_1, \omega_2)$	Distanz zwischen den Mengen ω_1, ω_2 , d.h. $\text{dist}(\omega_1, \omega_2) := \inf_{\substack{x \in \omega_1 \\ y \in \omega_2}} \ x - y\ $
$\text{dist}(\omega_1, \omega_2, \tau)$	Elementweise Distanz zweier Mengen (S. 26)
$\text{dom } \tau$	Gebiet, welches von einem Gitter τ überdeckt wird (S. 24)
\mathbf{e}_x^ℓ	Einheitsgitterfunktion zum Knoten x (S. 63)
E	Fortsetzungsoperator (S. 100 und S. 107)
\mathbf{E}_K	Menge der Kanten eines geometrischen Elements (S. 141)
$E_{\ell+1,\ell}$	unstetiger Fortsetzungsoperator (globale Version) (S. 76)
$E_{\ell+1,\ell}^K$	unstetiger Fortsetzungsoperator (lokale Version) (S. 77)
\mathcal{E}_Ω	Fortsetzungsoperator nach Whitney (S. 101)
\mathcal{F}_{A,Γ_D}	Konstante, die in der Friedrichs-Ungleichung auftritt (S. 102)
\mathbf{F}_ℓ	Vektor der rechten Seite des linearen Gleichungssystems (S. 63)
$F_j^\ell(K)$	Vater eines Elements $K \in \tau_j$ auf der Stufe ℓ (S. 41)
h_K	maximaler Durchmesser eines geometrischen Elements (S. 24)
h_K^{\max}, h_K^{\min}	maximale, minimale Kantenlänge eines geometrischen Elements (S. 24)
h_ℓ, h_τ	maximale Schrittweite eines Gitters τ_ℓ bzw. τ (S. 24)
$h_\ell(x)$	maximale Schrittweite des Gitters τ_x
$\tilde{h}_\ell(x)$	maximale Schrittweite des Gitters $\tilde{\tau}_x$ (S. 45)
$h_{j,\ell}(K)$	maximale Schrittweite des Gitter $I_{j,\ell}(K)$ (S. 56)

$H^k(\Omega)$	Sobolevraum (S. 21)
$H_0^k(\Omega)$	Sobolevraum, Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ unter der Norm $\ \cdot\ _{k,p}$ (S. 21)
$H^k(\Omega, \Gamma_D)$	Sobolevraum, Vervollständigung von $C^\infty(\Omega, \Gamma_D)$ unter der Norm $\ \cdot\ _{k,p}$ (S. 21)
$I_{j,\ell}(K)$	Einflußmenge von K (S. 55)
i_K	Inkreisdurchmesser eines geometrischen Elements K (S. 24)
I_ℓ, I_τ	Finite-Elemente-Interpolationsoperator (S. 33).
$L_\tau^i(\omega)$	Elementschichten um die Menge ω (S. 26)
m	Norm, in der der Approximationsfehler gemessen wird, $m = 0, 1$
n_d	Konstante, welche festlegt, ob auf einem Element mit Null prolongiert wird ($n_d = 1$) (S. 71)
n_g	Konstante, welche die Entfernung beschreibt, über die extrapoliert werden darf, ($n_g = n_d + 2 = 3$) (S. 75 und S. 89)
n_T	Konstante, welche die Größe des Tetraeders beschreibt, der festlegt, ob mit Null prolongiert wird, ($n_T = 5$) (S. 70)
$Null(K)$	Funktion, die angibt, ob auf K mit Null prolongiert werden darf (S. 70)
p	lokaler Polynomgrad des Finite-Elemente-Raumes (S. 31)
$P_{j,\ell}$	Prolongationsoperator zwischen den Stufen ℓ und j (S. 53)
\mathcal{P}_A	Konstante, die in der verallgemeinerten Poincaré-Ungleichung auftritt (S. 103)
R^Θ	Raum der Gitterfunktionen auf Θ (S. 32)
R_ℓ, R_τ	Punktauswertung einer stetigen Funktion (S. 34, beachte aber S. 122)
$R_{\ell,\ell+1}$	Restriktion vom Gitter $\tau_{\ell+1}$ nach τ_ℓ (S. 64)
S_ℓ^{CFE}	zusammengesetzter Finite-Elemente-Raum (S. 53)
$S_\ell^{p,r}, S_\tau^{p,r}, S_\ell$	Finite-Elemente-Räume (S. 31)
$u_\ell^{int}, u_\tau^{int}$	Finite-Elemente-Interpolierende einer stetigen Funktion auf dem Gitter τ_ℓ (S. 34)
$u_{j,\ell}^{int}$	Finite-Elemente-Interpolation der von τ_ℓ nach τ_j prolongierten Finite-Elemente-Funktion (S. 118)

$u_{\ell+1,\ell}^E$	Extrapolation einer Finite-Elemente-Funktion mit Hilfe des Operators $E_{\ell+1,\ell}$ (S. 74)
\mathbf{V}_K	Menge der Ecken eines geometrischen Elements (S. 141)
$\mathbf{V}_\ell, \mathbf{V}_\tau$	Menge der Ecken eines Finite-Elemente-Gitters (S. 33)
$W^{k,p}(\Omega)$	Sobolevräume (S. 21)
\mathcal{W}_A	Norm des Fortsetzungsoperators nach Whitney auf dem Gebiet A (S. 102)
$Y_{j,\ell}(K)$	Knotenpunkte der Einflußmenge $I_{j,\ell}(K)$ (S. 55)
β_ℓ	Gitterfunktion aus R^{Θ_ℓ}
$\beta_{j,\ell}$	prolongierte Gitterfunktion auf der Stufe j (S. 54)
Θ_ℓ, Θ_τ	Menge der Knotenpunkte eines Finite-Elemente-Raumes (S. 33)
$\Theta_\ell^j(K)$	Menge der Knotenpunkte auf dem Teilgitter $\sigma_\ell^j(K)$ (S. 44)
$\varepsilon_{j,\ell}(K)$	Verzerrungsparameter (S. 57)
$\gamma^\ell(\omega)$	Randpunkt, der minimalen, elementweisen Abstand zur Menge ω besitzt (S. 76)
$\kappa_\ell^{\ell-1}(K)$	Abbildung, die einem randnahen Element das Grobgitterelement zuordnet, welches zur Prolongation in K verwendet wird (S. 76)
$\Lambda_{j,\ell}^{(m)}, \Lambda$	Stabilitätskonstanten für die Prolongation (S. 113, 116, 125)
π_ℓ^ℓ	Abbildung, die einem Knotenpunkt ein Element zuordnet, welches die Prolongationsmethode definiert (S. 78)
$\pi_\ell^{\ell-1}$	Abbildung, die einem Knotenpunkt das Grobgitterelement zuordnet, welches zur Auswertung der Prolongation verwendet wird (S. 78)
σ	Abkürzung für $\sigma_\ell^{\ell_{\max}}$ (S. 91)
$\sigma_\ell^j(K)$	Söhne eines geometrischen Elements $K \in \tau_\ell$ auf dem Gitter τ_j (S. 41)
$\sigma_\ell^{j,\infty}(K)$	Söhne eines geometrischen Elements $K \in \tau_\ell$ auf dem Gitter τ_j^∞ (S. 96)
τ_ℓ	Finite-Elemente-Gitter (S. 24)
$\tilde{\tau}_\ell$	Referenzgitter (S. 40)
τ_ℓ^∞	Angepaßtes Referenzgitter, welches aber noch Elemente enthalten kann, die außerhalb des Gebiets liegen (S. 43)

$\tau_\ell^\Gamma, \overset{\circ}{\tau}_\ell$	Randnahes und inneres Gitter (S. 68 und 72)
τ_ℓ^{int}	Gitter, welches zur Auswertung der Prolongation auf $\tau_{\ell+1}^\Gamma$ benötigt wird (S. 75)
τ_ℓ^N	Gitter, auf dem mit Null prolongiert wird (S.74)
τ_ℓ^P	Gitter, welches die Elemente enthält, die nahe am randnahen Feingitter τ_ℓ^Γ liegen (S. 74)
τ_x	Menge aller Elemente, die x berühren: $\tau_x := \{K \in \tau \mid x \in \overline{K}\}$
$\tilde{\tau}_x$	Menge aller Referenzelemente, die x berühren: $\tilde{\tau}_x := \{K \in \tilde{\tau} \mid x \in \overline{K}\}$
$\tau_\ell^{makro}, \tau_\ell^{mikro}$	Menge der zulässigen bzw. unzulässigen Elemente eines Gitters (S. 151)
Φ_ℓ	Abbildung, die den Zusammenhang zwischen den Referenzgittern $\tilde{\tau}_\ell$ und den angepaßten Gitter τ_ℓ herstellt (S. 45)
Ω	Gebiet des Randwertproblems (S. 13)
Ω_ℓ, Ω_τ	Gebiet, welches durch die Gitter τ_ℓ bzw. τ überdeckt werden (S. 24)
$\Omega_\ell^\Gamma, \overset{\circ}{\Omega}_\ell$	Gebiete, welche von den äußeren bzw. inneren Gittern (τ_ℓ^Γ bzw. $\overset{\circ}{\tau}_\ell$) überdeckt werden (S. 68)
$ M $	d -dimensionales Volumen der meßbaren Menge $M \subset R^d$ (S. 29)
$ \cdot _{k,p}$	$W^{k,p}$ -Seminorm (S. 21)
$\ \cdot\ $	Euklidische Norm
$\ \cdot\ _{k,p}$	$W^{k,p}$ -Norm (S. 21)
$\ \cdot\ _\tau$	andere Schreibweise für $\ \cdot\ _{\text{dom}\tau}$
$\ \cdot\ _m$	modifizierte H^m -Seminorm (S. 124)
$(\cdot, \cdot)_k$	Skalarprodukt auf $H^k(\Omega)$ (S. 22)
$(\cdot, \cdot)_{=k}$	Bilinearform, die der H^k -Seminorm entspricht (S. 107)

Kapitel 2

Motivation und Problemstellung

In dieser Einleitung wird an Hand von charakteristischen Anwendungen erklärt, weshalb Finite-Elemente-Räume, die sich einfach vergrößern lassen, wichtig sind, um Mehrskalenprobleme effizient zu behandeln. Der Begriff „Mehrskalenprobleme“ soll kurz konkretisiert werden.

Ziel ist es, partielle Differentialgleichungen auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ möglichst schnell bis zu einer vorgegebenen Genauigkeit zu lösen. Die Gleichung ist charakterisiert durch das Gebiet Ω , die Koeffizienten der Differentialoperatoren und Randbedingungen, sowie durch die Inhomogenitäten in der Gleichung und in den Randbedingungen. Für die numerische Lösung dieser Gleichung ist es üblicherweise erforderlich, das Gebiet Ω zu vernetzen, typischerweise durch „finite Elemente“, d.h. Dreiecks- oder Vierecksnetze in zwei Dimensionen und höherdimensionale Analoga für $d \geq 3$. Die Diskretisierung geschieht dann beispielsweise mit Hilfe des Galerkin- oder Differenzenverfahrens. Die Größe der Elemente ist eine charakteristische Größe für die Genauigkeit der numerischen Approximation. Umgekehrt legt eine vorgegebene Genauigkeit die (minimale) Größe der Elemente im wesentlichen fest. Auf der anderen Seite wird typischerweise gefordert, daß das Finite-Elemente-Gitter die Geometrie, d.h. den Rand des Gebiets Ω , vernünftig auflöst und genauso die Ränder der Teilgebiete, in denen die Koeffizienten der Differentialgleichung glatt sind. Falls derartige geometrische Mikrostrukturen wesentlich kleiner sind als die durch die Approximationseigenschaft bestimmte Elementgröße muß das Gitter in der Nähe dieser Mikrostrukturen sehr viel feiner sein. Falls die Zahl der Mikrostrukturen sehr hoch ist, ist eine grobskalige Diskre-

tisierung mit sehr wenigen Unbekannten mit üblichen finiten Elementen nicht möglich. Im folgenden werden typische Anwendungsbeispiele vorgestellt.

DISKRETISIERUNG PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNG ZU VORGE-
GEBENER (MODERATER) GENAUIGKEIT AUF KOMPLIZIERTEN GEBIETEN

Bei der Simulation von Umweltphänomenen ist die Berandung der betrachteten Gebiete häufig extrem kompliziert; die Genauigkeit, mit der die Lösung des Problems bestimmt werden soll, jedoch moderat. Als illustrierendes Beispiel sei hier die Modellierung des Strömungsverhaltens von Gewässern angeführt, z.B. mit Hilfe der Flachwasser-Gleichungen [30]. In Abbildung 2.1 ist am Beispiel der Ostsee die typische Komplexität der Randgeometrie

Abbildung 2.1: Ostsee

für derartige Probleme illustriert. Die Bedingung, daß ein Finite-Elemente-

Gitter den Rand des Gebiets auflösen muß, erfordert ein sehr feines Gitter nahe des Randes, was aber aus Gründen der gewünschten Genauigkeit nicht notwendig wäre. Ein Ausschnitt eines Finite-Elemente-Gitters für die Ostsee ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Bei diesem Problem ist man jedoch ledig-

Abbildung 2.2: Triangulierung eines Ausschnitts der Ostsee.

lich an einer makroskopischen Beschreibung der Strömung interessiert und nicht an einer mikroskopischen Beschreibung der Wellen in Randnähe. Die Auflösung der Mikrostrukturen in Randnähe führt daher auf unangemessen große Gleichungssysteme, die mit erheblichem Aufwand gelöst werden müssen.

SCHNELLE LÖSER FÜR PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN AUF KOMPLIZIERTEN GEOMETRIEN

Schnelle Lösungsverfahren speziell für elliptische Probleme basieren häufig auf einer Diskretisierung des Problems auf unterschiedlichen Skalen. Beispiele hierfür sind Mehrgitterverfahren oder Extrapolationstechniken. Falls nun keine adäquate Diskretisierung auf groben Skalen möglich ist wegen kleiner geometrischer Strukturen, bricht die Effizienz dieser Verfahrens zusammen. Derartige Probleme treten in der Technik auf, falls die Geometrie des betrachteten physikalischen Objekts kleine geometrische Details enthält. Beispiele: Autos, Flugzeuge, Motoren, Probleme der Festkörpermechanik, etc. Jedes Finite-Elemente-Gitter, welches die Geometrie auflöst, besteht aus so vielen Unbekannten, daß die Rechenkapazität weitere Verfeinerungen nicht zuläßt bzw. die numerische Lösung des entstehenden diskreten Problems sehr rechenaufwendig ist. In diesem Fall sind beispielsweise Mehrgitterverfahren nicht anwendbar. Finite-Elemente-Räume, deren minimale Dimension nicht mit der Komplexität der Geometrie gekoppelt ist, aber auch auf groben Skalen die notwendige Approximationsgüte besitzen, würden diese Schwierigkeit beseitigen.

HOMOGENISIERUNG VON DIFFERENTIALOPERATOREN

Bei der Modellierung von Umweltphänomen versucht man Gleichungen, die Differentialoperatoren mit sehr komplizierter Mikrostruktur enthalten, durch geeignete Mittelungen zu homogenisieren, und dadurch zu grobskaligeren Beschreibungen des Problems zu kommen. Ein Stichwort hierzu wäre die Modellierung von Strömungen in porösen Medien. Für periodische Probleme lassen sich hierfür analytische (fourierartige) Techniken verwenden und dadurch asymptotische Aussagen gewinnen. Bei stochastischer Verteilung der Mikrostrukturen lassen sich jedoch derartige Methoden nicht mehr anwenden. Hier wären ebenfalls Diskretisierungstechniken erforderlich, welche die Gleichung auf groben Skalen angemessen diskretisieren, um daraus Information über die homogenisierten Differentialoperatoren zu bekommen. In Abbildung 2.3 ist eine typische Anwendung illustriert.

Motiviert durch diese Problemstellungen, wird in dieser Arbeit eine neue

Abbildung 2.3: Flüssigkeit, die in die Erde sickert. Im vergrößerten Bildausschnitt sind typische Mikrostrukturen in Form unregelmäßig verteilter, unterschiedlich großer, kugelförmiger Körner dargestellt.

Klasse finiter Elemente eingeführt, die es erlauben, Mehrskalprobleme zu diskretisieren, wobei die minimale Zahl der Unbekannten unabhängig ist von der Zahl der Mikrostrukturen, und die asymptotischen Fehlerabschätzungen bereits auf den größten Skalen gelten.

Vergleichbare Ansätze in der Literatur lassen sich im wesentlichen in zwei Klassen einteilen.

1) Algebraische Mehrgitterverfahren.

Ziel dieser Methode ist es, aus einem großen linearen Gleichungssystem rein algebraisch eine Folge von niederdimensionalen Problemen zu erzeugen, die im Rahmen eines Mehrgitterverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems verwendet werden. Information über die kontinuierliche Gleichung und Diskretisierung (Gitter, Diskretisierungsordnung, etc.) werden nicht verwendet. Die vergrößerten linearen Gleichungssysteme können nicht in dem Sinn als Diskretisierung des kontinuierlichen Problems auf einer groben Skala verstanden werden, daß die Lösung der Grobgittergleichung eine der Feingitterlösung verwandte Approximationseigenschaft besitzt. In vielen Fällen liefert dieses Verfahren zufriedenstellende Mehrgitter-Konvergenzresultate und zeichnet sich durch den rein algebraischen Zugang aus, der in Richtung black-box-artiger Mehrgitterverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme zielt. Auf der anderen Seite ist die Konvergenztheorie bisher noch sehr unvollständig und häufig an algebraische Eigenschaften der Matrix gekoppelt, die für Finite-Elemente-Diskretisierung im allgemeinen nicht erfüllt sind. Detaillierte Darstellungen dieses Verfahrens findet sich in [37], [6], [46], [44], [14], [5].

2) Vergrößerung durch Agglomeration

Bei einer anderen Klasse von Verfahren wird das feine Gitter durch Agglomeration vergrößert. Das bedeutet, daß Punkte und Kanten sukzessive aus dem Feingitter entfernt werden, und die entstehenden Zellen neu vernetzt werden, so daß daraus (gröbere) Dreiecks- bzw. Vierecksgitter entstehen (siehe [3], [4], [10], [28], [9]). Diese Technik kann benutzt werden, um hierarchische Basen zu konstruieren, und damit das Hierarchische-Basis-Mehrgitter-Verfahren anwenden zu können. Verwandt mit diesem Ansatz ist die in [29] verwendete Technik. In der zitierten Arbeit wird eine geschachtelte Gitterhierarchie verwendet, welche jedoch den Rand des Gebiets nicht auflösen muß, sondern lediglich von innen sukzessive ausschöpft. Es wird gezeigt, daß sich Unterraum-Korrekturverfahren, die auf diesen Gittern basieren, zur Lösung des linearen Gleichungssystems auf dem feinsten Gitter anwenden lassen. Die meisten dieser Agglomerationsmethoden sind in zwei Dimensionen formuliert. Die Übertragung dieser Verfahren auf dreidimensionale Probleme ist keineswegs offensichtlich. Im Gegensatz dazu sind die hier vorgestellten, zusammengesetzten finiten Elemente unabhängig von der Raumdimension definiert und lassen sich daher ohne prinzipielle Schwierigkeiten in drei Dimensionen anwenden.

3) Weitere verwandte Verfahren

In [39] wird im Zusammenhang mit der Diskretisierung glatter, gekrümmter Ränder ein finites Element definiert, welches mit den in dieser Arbeit definierten zusammengesetzten finiten Elementen verwandt ist. Auch das Shortley-Weller-Differenzenverfahren besitzt eine interessante Verwandtschaft zu den hier vorgestellten zusammengesetzten finiten Elementen (vgl. [40], [19, Kapitel 4.8]). Dieses Verfahren beruht darauf, daß ein uniformes (kartesisches) Referenzgitter über das Gebiet gelegt wird, und geeignete Differenzenquotienten in Abhängigkeit von der Entfernung zum Rand verwendet werden. Ein Problem bei Shortley-Weller-Diskretisierungen entsteht, falls ein kleines Loch im Gebiet ganz in einer Gitterzelle liegt und keine Gitterlinie schneidet. Dann wird es „übersehen“, und die Diskretisierung wird ungenau. Einen Ausweg aus dieser Situation ist durch das sogenannte Galerkinprodukt gegeben (vgl. [17],[16]). Auf diesen Aspekt wird in Kapitel 4.3 eingegangen werden (vgl. [21]).

Kapitel 3

Grundlagen der Finite-Elemente-Methode

Im folgenden rekapitulieren wir einige grundlegende Definitionen und Techniken, die für die Analyse und Diskretisierung partieller Differentialgleichungen mit Variationstechniken benötigt werden.

3.1 Funktionenräume

Definition 1 Eine Teilmenge $\Omega \subset R^d$ heißt Gebiet, falls sie offen und zusammenhängend ist.

In dieser Arbeit werden wir uns bis auf wenige Ausnahmen mit Lipschitz-Gebieten beschäftigen. Diese sind Gegenstand der folgenden Definition.

Definition 2 Sei Ω ein beschränktes, meßbares Gebiet mit Rand $\Gamma := \partial\Omega$. Sei $C_{R,L}$ der Zylinder

$$C_{R,L} := \{y = (\hat{y}, y_n) : \|\hat{y}\| < R, \quad |y_n| < LR\}$$

mit positiven Konstanten L, R und $\hat{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$.

Das Gebiet Ω heißt Lipschitz-Gebiet, wenn für jeden Punkt $x_0 \in \Gamma$ ein orthogonales Koordinatensystem $y = T(x - x_0)$ eingeführt werden kann mit einer konstanten $(n \times n)$ -Matrix T , so daß in den y -Koordinaten der Schnitt Γ mit $\overline{C_{R,L}}$ gegeben ist durch die Gleichung $y_n = \varphi(\hat{y})$ mit einer Funktion

φ , die die Lipschitz-Bedingung in $\{\hat{y} : \|\hat{y}\| < R\}$ erfüllt mit einer Lipschitz-Konstanten kleiner gleich L und

$$\bar{\Omega} \cap \overline{C_{R,L}} = \{y : \|\hat{y}\| \leq R, \quad \varphi(\hat{y}) \leq y_n \leq LR\}.$$

Darüberhinaus fordern wir, daß Ω minimal-glatte Rand besitzt (vgl. [41]). Um diese Eigenschaft zu definieren, führen wir die Klasse der speziellen Lipschitz-Gebiete ein.

Definition 3 Sei $\varphi : R^{d-1} \rightarrow R$ eine Funktion, die die Lipschitz-Bedingung

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M \|x - y\|, \quad \forall x, y \in R^{d-1}$$

erfüllt. Die minimale Konstante M , für die obige Ungleichung erfüllt ist, nennen wir C_φ . Die Menge aller Punkte oberhalb von φ , nennt man spezielles Lipschitz-Gebiet

$$\Omega = \{x \in R^d \mid x_d > \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{d-1})\}.$$

Die Lipschitz-Konstante von Ω ist durch $C_\Omega = C_\varphi$ gegeben.

Mengen mit minimal-glattem Rand sind Gegenstand der folgenden Definition.

Definition 4 Der Rand Γ einer offenen Teilmenge $\Omega \subset R^d$ wird minimal-glatt genannt, falls eine Konstante $\varepsilon > 0$, ein $N \in N$, ein $M > 0$ und eine Folge von offenen Mengen $\{U_i\}_{i \in N}$ existieren, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Für alle $x \in \Gamma$ gilt $B_\varepsilon(x) \subset U_i$ für geeignetes i , wobei $B_\varepsilon(x)$ die Kugel mit Radius ε um x bezeichnet.
2. Kein Punkt $x \in R^d$ ist in mehr als N Mengen U_i enthalten.
3. Für jedes i existiert ein spezielles Lipschitz-Gebiet $\tilde{\Omega}_i$ mit $C_{\tilde{\Omega}_i} \leq M$, so daß

$$U_i \cap \Omega = U_i \cap \Phi(\tilde{\Omega}_i)$$

mit einer geeigneten Rotation Φ .

Im folgenden setzen wir immer voraus, daß Ω ein Lipschitz-Gebiet mit minimal-glattem Rand ist.¹

Die Räume $L^p(\Omega)$ bezeichnen die üblichen Lebesgue-Räume, wobei die Norm mit $\|\cdot\|_{0,p}$ bezeichnet wird. Sei zunächst $1 \leq p < \infty$. Im folgenden verwenden wir für Multiindizes $\alpha \in N_0^d$ die Konventionen

$$|\alpha|_p := |\alpha|_{lp}, \quad |\alpha| := |\alpha|_1, \\ x^\alpha := \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}, \quad D^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}.$$

Sei $C^\infty(\Omega)$ der Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf Ω . Für Funktionen $u \in C^\infty(\Omega)$ und $k \in N_0$ ist die Seminorm $|\cdot|_{k,p}$ definiert durch

$$|u|_{k,p}^p = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{0,p}^p$$

und die Norm $\|\cdot\|_{k,p}$ durch

$$\|u\|_{k,p}^p = \sum_{j=0}^k |u|_{j,p}^p.$$

Für $p = \infty$ werden die Summen wie üblich durch Suprema ersetzt. Der Abschluß von $C^\infty(\Omega)$ unter der Norm $\|\cdot\|_{k,p}$ definiert den Sobolev-Raum $W^{k,p}(\Omega)$.

Sei $\Gamma_D \subset \Gamma$ eine Teilmenge des Randes $\Gamma := \partial\Omega$, die positives Lebesgue-Maß auf Γ besitzt. Der Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die in einer Umgebung des Teilrandes Γ_D verschwinden, wird $C^\infty(\Omega, \Gamma_D)$ genannt. Der Abschluß dieses Funktionenraumes unter der $\|\cdot\|_{k,p}$ -Norm definiert den Raum $W^{k,p}(\Omega, \Gamma_D)$. Falls $\Gamma_D = \Gamma$ gilt, schreiben wir auch alternativ $C_0^\infty(\Omega) := C^\infty(\Omega, \Gamma)$ und $W_0^{k,p}(\Omega) := W^{k,p}(\Omega, \Gamma)$. Falls $p = 2$ gilt, schreiben wir $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$ etc. Die Dualräume dazu werden mit negativen Exponenten indiziert:

$$W^{-k,p}(\Omega) = \left(W_0^{k,q}(\Omega)\right)',$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gelten muß. Falls keine Verwechslungsgefahr besteht, verzichten wir auf die explizite Angabe des Gebiets und schreiben $W^{k,p}$ statt $W^{k,p}(\Omega)$.

¹Die Definition von minimal-glattem Rand impliziert nicht, daß Ω ein Gebiet ist.

Die Räume $W^{k,p}$ und $W_0^{k,p}$ sind Banach-Räume. Für $p = 2$ gilt darüber hinaus, daß H^k und H_0^k Hilbert-Räume mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} v(x) dx$$

sind.

3.2 Variationsformulierung partieller Differentialgleichungen

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, vergröberbare Finite-Elemente-Räume zu definieren, die zur Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen geeignet sind, die auf komplizierten Gebieten definiert sind oder hoch-oszillierende Koeffizienten enthalten. Als Anwendungsbeispiel beschränken wir uns auf lineare, skalare, elliptische Randwertaufgaben zweiter Ordnung. Wir betrachten derartige Probleme in der Variationsformulierung. Sei dazu V ein Hilbert-Raum und $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Für $F \in V'$ betrachten wir das Variationsproblem, $u \in V$ zu finden, so daß

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V \quad (3.1)$$

erfüllt ist. Konkret wollen wir annehmen, daß $a(u, v)$ die Darstellung besitzt

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \langle \text{grad } v, A \text{ grad } u \rangle + cuv dx$$

mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, die $A_{i,j} \in L^{\infty}(\Omega)$ und

$$\inf_{x \in \Omega} \inf_{\substack{v \in \mathbb{R}^d \\ v \neq 0}} \frac{v^T A(x) v}{v^T v} \geq a_0 > 0$$

erfüllt. Vom Koeffizienten $c \in L^{\infty}(\Omega)$ nehmen wir ebenfalls an, daß er positiv ist: $\inf_{x \in \Omega} c(x) \geq c_0 > 0$. Mögliche Wahlen von V sind beispielsweise $H^1(\Omega)$ bzw. $H_0^1(\Omega)$. Die erste Wahl würde Neumann-Randbedingungen entsprechen, letztere homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Die oben gemachten Voraussetzungen implizieren Koerzivität:

$$a(u, u) \geq C_e \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V$$

und Stetigkeit

$$|a(u, v)| \leq C_S \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V$$

der Bilinearform. Wir beschränkten uns hier auf die oben beschriebene Situation, um Schwierigkeiten, die nichts mit den noch einzuführenden Finite-Elemente-Räumen zu tun haben, zu vermeiden. Die obigen Bedingungen implizieren nach dem Satz von Lax-Milgram Existenz und Eindeutigkeit des Problems (3.1) für jede rechte Seite $F \in V'$ und die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten. Im folgenden beschränken wir uns auf zwei- und dreidimensionale Probleme, da diese in der Praxis die wichtigste Rolle spielen.

3.3 Finite-Elemente-Diskretisierung

Sei $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Folge endlichdimensionaler Unterräume von V , die geschachtelt sind: $V_n \subset V_{n'}$ für $n' \geq n$. Dann lautet die Galerkin-Diskretisierung von Problem (3.1): Suche $u_n \in V_n$, so daß

$$a(u_n, v_n) = F(v_n), \quad \forall v_n \in V_n \quad (3.2)$$

gilt. Auf Grund unserer Annahmen an die Bilinearform a folgt daraus die quasioptimale Fehlerabschätzung:

$$\|u - u_n\|_V \leq C \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_V. \quad (3.3)$$

Falls die Folge $\{V_n\}$ die Eigenschaft

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n} = V$$

besitzt, liegt Konvergenz vor. Um quantitative Konvergenzresultate zu erhalten, benötigt man Regularitätsaussagen für die Lösung u des Problems (3.1) und geeignete Approximationseigenschaften des Raumes V_n für Funktionen aus V . Dazu werden im folgenden Finite-Elemente-Räume eingeführt. Wir beginnen mit der Definition geometrischer finiter Elemente.

Definition 5 *Das Einheits-simplex in R^d wird mit $\hat{S} := \{x \in R_+^d : \|x\|_{l^1} < 1\}$ bezeichnet und der Einheitswürfel mit $\hat{Q} := \{x \in R_+^d : \|x\|_{l^\infty} < 1\}$. Ein Gebiet $K \subset R^d$ heißt geometrisches finites Element, wenn eine affin-lineare, bijektive Abbildung χ_K existiert, die entweder \hat{S} oder \hat{Q} auf K abbildet.*

Bemerkung 6 Diese Definition impliziert, daß Viereckselemente, d.h. $K = \chi_K(\hat{Q})$, immer entweder Rechtecke oder Parallelogramme sind. In [11, Kapitel 4.3] wird der allgemeinere Fall von isoparametrischen Elementen betrachtet. Alle Verfahren, die in der vorliegenden Arbeit vorgestellt werden, lassen sich ohne Modifikation auf diesen Fall anwenden. Die Beschränkung auf affin-lineare Transformationen erspart aber vor allem bei der Fehleranalyse technische, geometrische Voraussetzungen an die Gestalt der Elemente und Fallunterscheidungen.

Ein Finite-Elemente-Gitter ist eine Vereinigung von geometrischen finiten Elementen. Wir wollen in dieser Arbeit nur konforme Finite-Elemente-Räume betrachten, d.h. Räume, die im kontinuierlichen Raum V enthalten sind. In diesem Sinn definieren wir Finite-Elemente-Gitter wie folgt.

Definition 7 Eine Vereinigung $\tau = \{K_1, K_2, \dots, K_N\}$ von geometrischen finiten Elementen heißt Finite-Elemente-Gitter oder kurz FE-Gitter, wenn für zwei beliebige Elemente $K_i, K_j \in \tau$ der Schnitt $\overline{K_i} \cap \overline{K_j}$ entweder leer, ein gemeinsamer Punkt, eine gemeinsame Kante (oder eine gemeinsame Fläche für $d = 3$) ist oder $K_i = K_j$ gilt.² Das Gebiet, welches von einem Gitter überdeckt wird, bezeichnen wir mit

$$\text{dom } \tau = \text{int} \bigcup_{K \in \tau} \overline{K},$$

wobei $\text{int}(M)$ das Innere einer Menge M bezeichnet. Alternativ verwenden wir auch die Schreibweise $\Omega_\tau = \text{dom } \tau$. Für ein Element K bezeichnet i_K den Durchmesser des Inkreises von K und $h_K = \text{diam } K$ den Durchmesser von K . Die längste bzw. kürzeste Seite von K wird mit h_K^{\max} bzw. h_K^{\min} bezeichnet. Die Schrittweite eines Gitters wird $h_\tau = \max_{K \in \tau} h_K$ genannt.

Sei $\{\tau_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Finite-Elemente-Gittern. Das Gebiet, welches von τ_ℓ überdeckt wird, bezeichnen wir mit $\Omega_\ell := \Omega_{\tau_\ell}$. Wir nennen diese Familie regulär, falls eine Konstante C_{reg} existiert, so daß

$$\begin{aligned} \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \sup_{K \in \tau_\ell} \frac{h_K}{i_K} &\leq C_{reg}, \\ \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \sup_{K \in \tau_\ell} \frac{h_K^{\max}}{h_K^{\min}} &\leq C_{reg} \end{aligned} \tag{3.4}$$

gilt.

²Die Definition geometrischer Elemente impliziert, daß alle K offen sind.

Bemerkung 8 *Die beiden Bedingungen, die charakterisieren, ob eine Familie von FE-Gittern regulär ist, sind nicht unabhängig voneinander und in vielen Situationen äquivalent. Um zuviele technische Abschätzungen zu vermeiden, haben wir hier beide Bedingungen gefordert.*

In dieser Arbeit werden wir uns auf reguläre FE-Gitter beschränken. Wir betonen hier, daß nicht gefordert wird, daß die Gitter quasi-uniform sind, d.h. daß eine Konstante $C_u < \infty$ existiert, so daß

$$\sup_{\ell \geq 0} \frac{\sup_{K \in \tau_\ell} h_K}{\inf_{K \in \tau_\ell} h_K} < C_u.$$

Dies wäre eine globale Eigenschaft und würde wichtige Techniken wie adaptive Verfeinerung und Gittergraduierungen ausschließen. Die Forderung, daß die finite Elemente regulär sind, impliziert jedoch, daß zwei Elemente K, K' , die sich berühren³, vergleichbaren Durchmesser haben. Um diesen Sachverhalt zu formalisieren, ist es sinnvoll, Schichten von geometrischen Elementen um Teilmengen $\omega \subset R^d$ zu definieren. Dies ist Gegenstand der folgenden Definition, die durch Abbildung 3.1 illustriert wird.

Abbildung 3.1: Elementschichten um ein Gebiet ω . Die elementweise Distanz von K und ω beträgt $\text{dist}(K, \omega, \tau) = 5$.

³Zwei Elemente K, K' berühren sich, wenn $\overline{K} \cap \overline{K'} \neq \emptyset$ gilt.

Definition 9 Sei τ ein FE-Gitter und $\omega \subset R^d$. Für $i \in N_+$ sind die Schichten $L_\tau^i(\omega)$ durch die folgende Rekursion definiert

$$\begin{aligned} L_\tau^1(\omega) &:= \{K \in \tau \mid \overline{K} \cap \overline{\omega} \neq \emptyset\}, \\ L_\tau^{i+1}(\omega) &:= \{K \in \tau \mid \overline{K} \cap \overline{\text{dom } L_\tau^i(\omega)} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Für ein Gitter τ_ℓ aus einer Gitterhierarchie schreiben wir $L_\ell^i(\omega)$ statt $L_{\tau_\ell}^i(\omega)$ und für eine Menge M von geometrischen finiten Elementen $L_\ell^i(M)$ statt $L_\ell^i(\text{dom } M)$.

Ein Maß für die Entfernung zweier Teilmengen $\omega_1, \omega_2 \subset \text{dom } \tau$ läßt sich mit Hilfe dieser Schichten definieren.

Definition 10 Sei $\omega_1, \omega_2 \subset \text{dom } \tau$. Wir definieren die elementweise Distanz von ω_1 und ω_2 durch

$$\text{dist}(\omega_1, \omega_2, \tau) := \min \{i : \overline{\omega_2} \cap \overline{\text{dom } L_\tau^i(\omega_1)} \neq \emptyset\}.$$

Eine Folge von Elementen $K(K, \omega, \tau) := \{K_i\}_{i=1}^j$ heißt elementweise Verbindung von ω_1 und ω_2 in τ , falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\overline{K_1} \cap \overline{\omega_1} \neq \emptyset, \overline{K_j} \cap \overline{\omega_2} \neq \emptyset$.
2. $\overline{K_i} \cap \overline{K_{i+1}} \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots, j-1,$
3. $\text{dist}(\omega_1, \omega_2, \tau) = j$.

Diese Definition ist in Abbildung 3.1 illustriert. Im folgenden werden Gebiete charakterisiert, für die der Euklidische Abstand zweier Punkte vergleichbar ist mit der Länge des kürzesten Weges, der im Gebiet verläuft.

Definition 11 Sei M eine Teilmenge des R^n . Falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß für alle Punkte $x, y \in M$ ein Weg $s_{x,y}$ in M mit Anfangspunkt x und Endpunkt y existiert mit Länge $L(s_{x,y})$, der die Abschätzung

$$L(s_{x,y}) \leq C \|x - y\| \tag{3.5}$$

erfüllt, nennen wir das System M „Lipschitz-stetig zusammenhängend“.

Abbildung 3.2: Gebiete, die nicht Lipschitz-stetig zusammenhängend sind, oder für die die Lipschitz-Konstante C_t von dem Gebietsparameter ε abhängt.

Bemerkung 12 *Die Forderung, daß das Gebiet Lipschitz-stetig zusammenhängend ist, schließt wichtige Fälle, wie etwa geschlitzte Gebiete oder Gebiete, die „Cusps“ besitzen, aus (siehe Abbildung 3.2).*

In dieser Arbeit werden wir uns größtenteils auf Gebiete Ω , Ω_ℓ beschränken, die Lipschitz-stetig zusammenhängend sind. Genauer soll eine Konstante C_t unabhängig von der Verfeinerungsstufe ℓ existieren, für die das Gebiet Ω und die Gebiete $\Omega_\ell = \text{dom } \tau_\ell$ die Abschätzung (3.5) mit C_t erfüllen:

$$\forall \omega \in \{\Omega\} \cup \{\Omega_\ell : 0 \leq \ell \leq \ell_{\max}\}, \quad \forall x, y \in \omega, \quad \exists s_{x,y} : \quad (3.6)$$

$$L(s_{x,y}) \leq C_t \|x - y\|.$$

Wir geben aber an den Stellen, wo diese Eigenschaft benötigt wird, immer an, wie das Verfahren geeignet modifiziert werden kann, um diese Bedingung zu vermeiden.

Es ist einfach zu zeigen, daß die Schrittweite zweier regulärer Elemente, die sich berühren, nicht zu stark variieren kann. Das folgende Beispiel zeigt, daß die Größe von nahegelegenen Elementen stark schwanken kann, falls die Konstante, welche den Lipschitz-stetigen Zusammenhang des Gebiets beschreibt (siehe (3.5)), groß wird.

Beispiel 13 *Sei $\Omega_\varepsilon := (-1, 1)^2 \setminus \overline{S_\varepsilon}$ mit $S_\varepsilon := (0, 1) \times (0, \varepsilon)$ (siehe 1. Beispiel in Abbildung 3.2). Falls eine Gitterfamilie $\{\tau_\ell\}$ von unten in Richtung des*

Punktes $x_u := \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ graduiert ist, aber von oben in Richtung des Punktes $x_o := \left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right)$ nicht, entstehen an x_u Elemente mit Durchmesser $2^{-\ell}$, aber an x_o eventuell Elemente der Größe 1. Sei K ein Element, welches x_u berührt, und $h_K = 2^{-\ell}$ erfüllt. Sei K' ein Element, welches x_o berührt, und Durchmesser $h_{K'} = 1$ besitzt. Für sehr kleine Werte von $\varepsilon = h_{K'}$ würde dann gelten

$$\begin{aligned}\text{dist}(K, K') &= h_{K'} \\ h_K &= 2^\ell h_{K'}\end{aligned}$$

Das folgende Lemma macht eine Aussage über die lokalen Schrittweiteschwankungen bei regulären FE-Gittern.

Lemma 14 Sei $\{\tau_\ell\}$ eine Familie regulärer FE-Gitter und $d = 2, 3$. Falls zwei Elemente $K, K' \in \tau_\ell$ die Abschätzung $\text{dist}(K, K', \tau_\ell) = j$ erfüllen, gilt

$$h_K \leq C_q h_{K'}$$

mit einer Konstanten C_q , die nur von C_{reg} und j abhängt.

Beweis. Offensichtlich genügt es, den Fall zweier Elemente $K, K' \in \tau_\ell$ zu betrachten, die mindestens einen gemeinsamen Punkt besitzen. Die Bedingung (3.4) impliziert, daß lediglich $N = N(C_{reg})$ geometrische finite Elemente an einem Punkt zusammenstoßen können. Daher kann eine Folge von Elementen $\{K_i\}_{i=0}^{N'}$ gebildet werden, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $N' \leq N$,
2. $K_0 = K, \quad K_{N'} = K'$,
3. K_i und K_{i+1} besitzen mindestens eine gemeinsame Kante für alle $0 \leq i \leq N' - 1$.

Bedingung (3.4) sichert darüberhinaus, daß das Verhältnis von längster zu kürzester Seite durch eine Konstante C_{reg} beschränkt ist. Das bedeutet, daß die längste Seite $h_{K'}^{\max}$ von K' durch

$$h_{K'}^{\max} \leq (C_{reg})^{N'} h_K^{\max} =: C h_K^{\max}$$

abgeschätzt werden kann mit einer Konstanten C , die nur von C_{reg} abhängt. Nun kann die längste Seite in einem regulären Element nach unten und nach

oben durch den Durchmesser abgeschätzt werden, woraus die Behauptung folgt.

■

Eine weitere Eigenschaft der Elementschichten ist Gegenstand des folgenden Lemmas.

Lemma 15 *Sei $N \in N_0$ beliebig aber fest und $0 \leq \ell \leq j$. Dann gilt für alle $K \in \tau_\ell$*

$$|\text{dom } L_\ell^N(K)| \leq C_A(N) |K|,$$

wobei für eine meßbare Menge $A \in R^d$ die Abkürzung $|A| := \int_A 1 d\mu$ verwendet wird. Für alle $K' \in \tau_j$ ist die Anzahl der Elemente $K \in \tau_\ell$, die $K' \subset \text{dom } L_\ell^N(K)$ erfüllen, durch $C_\#(N)$ beschränkt:

$$\#\{K \in \tau_\ell \mid K' \subset \text{dom } L_\ell^N(K)\} \leq C_\#(N).$$

Dabei hängen $C_A(N)$ und $C_\#(N)$ lediglich von der Konstanten C_{reg} ab, welche die Regularität der Gitter charakterisiert (Definition 7).

Beweis. Alle $K' \in L_\ell^N(K)$ erfüllen $\text{dist}(K', K, \tau_\ell) \leq N$, und daher folgt mit Lemma 14 $h_{K'} \leq Ch_K$. Daher ist $L_\ell^N(K)$ in einer Kugel um den Schwerpunkt von K mit Radius $(NC + 1)h_K$ enthalten. Das war zu beweisen.

Wir kommen nun zur zweiten Aussage. Die Situation ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Sei $K' \in \tau_j$ und $K \in \tau_\ell$ derart, daß $K' \subset \text{dom } L_\ell^N(K)$ gilt. Sei $\hat{K} \in \tau_\ell$ ein weiteres Element, welches $K' \subset \text{dom } L_\ell^N(\hat{K})$ erfüllt. Daraus folgt, daß auch $L_\ell^N(K) \cap L_\ell^N(\hat{K}) \neq \emptyset$ gilt. Daher ist \hat{K} in $L_\ell^{2N}(K)$ enthalten. Wegen Lemma 14 gilt daher $h_{\hat{K}} \geq ch_K$. Im Beweis der ersten Aussage wurde gezeigt, daß $L_\ell^{2N}(K)$ in einer Kugel um den Schwerpunkt von K mit Radius $(2NC + 1)h_K$ enthalten ist. Daraus folgt, daß nur $O(1)$ Elemente \hat{K} existieren können, die $K' \in L_\ell^N(\hat{K})$ erfüllen. ■

Wir haben bisher von Ω lediglich vorausgesetzt, daß es ein beschränktes, meßbares Gebiet ist. Daher können wir nicht erwarten, daß eine (endliche) Partitionierung von Ω in *polygonale* (*polyhedrale* für $d = 3$) Elemente existiert. Die folgende Definition impliziert gewisse Regularitätsannahmen an die Glattheit des Randes.

Definition 16 *Sei Ω ein Gebiet mit stückweise analytischem Rand und τ ein FE-Gitter. Falls eine Lipschitz-stetige, bijektive Abbildung $\zeta : \Omega_\tau \rightarrow \Omega$ existiert, die stückweise analytisch ist:*

$$\zeta|_K \text{ ist analytisch,} \quad \forall K \in \tau,$$

Abbildung 3.3: Die Dreiecke auf dem groben Gitter τ sind durchgehend, die auf dem feinen gestrichelt gezeichnet. Die Dreiecke K, \hat{K}_i erfüllen $K' \in \text{dom } L_\tau^1(\hat{K}_i)$ und $K' \in \text{dom } L_\tau^1(K)$. Weiter gilt $\hat{K}_1 \in L_\tau^1(K) \cap L_\tau^1(\hat{K}_i)$.

nennen wir τ ein FE-Gitter für Ω .

In [7, Kapitel 8.2] ist erklärt, wie Finite-Elemente-Räume definiert werden können auf FE-Gittern für Ω . Für die vorliegende Arbeit ist jedoch dieser Aspekt der Gebietsapproximation von untergeordneter Bedeutung. Um die technischen Schwierigkeiten soweit wie möglich zu reduzieren, setzen wir durchweg voraus, daß Ω ein polygonales (polyhedrales für $d = 3$) Gebiet ist. Das impliziert, daß jedes FE-Gitter für Ω die Eigenschaft $\text{dom } \tau = \Omega$ besitzt.

Im nächsten Schritt werden wir Funktionenräume auf FE-Gittern definieren. Dazu werden Polynomräume auf den Referenzelementen definiert, und diese dann auf die geometrischen Elemente transportiert. Sei dazu $p \in \mathbb{N}$. Für \hat{S} besteht der Raum der Polynome P_p vom Grad p aus allen Funktionen der Form

$$\sum_{|\alpha|_1 \leq p} c_\alpha \hat{x}^\alpha$$

und für den Einheitswürfel \hat{Q} aus allen Funktionen der Form

$$\sum_{|\alpha|_\infty \leq p} c_\alpha \hat{x}^\alpha.$$

Dadurch lassen sich die Finite-Elemente-Räume wie folgt definieren.

Definition 17 Sei τ ein FE-Gitter und $p, r \in \mathbb{N}_0$. Dann ist der Finite-Elemente-Raum $S_\tau^{p,r}$ durch

$$S_\tau^{p,r} = \{v \in C^r(\text{dom } \tau) \mid \forall K \in \tau : (v \circ \chi_K)(\hat{x}) \in P_p\}$$

und für $r = -1$ durch

$$S_\tau^{p,-1} = \{v \in L^\infty(\text{dom } \tau) \mid \forall K \in \tau : (v \circ \chi_K)(\hat{x}) \in P_p\}$$

definiert.⁴ In dieser Arbeit beschränken wir uns auf konforme Finite-Elemente-Diskretisierungen, die $S_\tau^{p,r} \subset V$ erfüllen.

Wir werden im folgenden häufig auf die explizite Angabe der Indizes p und r verzichten und kurz S_τ schreiben. Diese Definition läßt sich noch in vielerlei Hinsicht verallgemeinern. Einige Anmerkungen finden sich in der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 18 Die Bedingung $v \in C^r(\text{dom } \tau)$ läßt sich verallgemeinern. Vor allem bei sogenannten nichtkonformen Diskretisierungen fordert man typischerweise keine Stetigkeit, sondern beispielsweise, daß die Normalenkomponente der Funktionen in bestimmten Punkte stetig auf den Elementflächen bzw. -kanten ist. Für eine detaillierte Darstellung nichtkonformer Finite-Elemente-Diskretisierungen verweisen wir auf [8].

Der Polynomgrad p kann auf verschiedenen Elementen auch variabel gewählt werden. Dies kommt bei der sogenannten p - und hp -Methode zur Anwendung, die beispielsweise in [43] erklärt wird.

Wir beschränkten uns auf die oben gegebene Definition, damit technische Schwierigkeiten soweit wie möglich vermieden werden.

Im folgenden werden wir zeigen, daß Finite-Elemente-Funktionen auf Gebieten, die Lipschitz-stetig zusammenhängend sind, Lipschitz-stetig sind.

Lemma 19 Sei Ω_ℓ Lipschitz-stetig zusammenhängend. Dann ist jede Finite-Elemente-Funktion $u \in S_\ell$ Lipschitz-stetig:

$$|u(x) - u(y)| \leq C_t \|x - y\| |u|_{W^{1,\infty}(s_{x,y})},$$

wobei $s_{x,y}$ wieder den kürzesten Weg von x nach y in Ω_ℓ bezeichnet.

⁴Wegen der vorausgesetzten Linearität von χ_K ist natürlich auch $v|_K$ ein Polynom vom Grad p . Obige Definition gilt jedoch auch für allgemeine Transformationen χ_K .

Beweis. Wir betrachten eine beliebige Funktion $u \in S_\ell$ und Punkte $x, y \in \Omega_\ell$. Sei s der kürzeste Weg, der die Voraussetzungen aus Definition 11 erfüllt. Wir wählen eine Folge von Elementen $K = \{K_i\}_{i=0}^N$ aus τ_ℓ , welche die folgenden Eigenschaften besitzt.

1. $x \in \overline{K_0}$, $y \in \overline{K_N}$.
2. $\overline{K_{i-1}}$ und $\overline{K_i}$ besitzen mindestens einen gemeinsamen Punkt, der auf s liegt.
3. Der Weg s wird von K überdeckt.
4. K ist diejenige Folge, welche die Eigenschaften (1)-(3) besitzt, und aus minimal vielen Elementen besteht.

Da jedes Element K_i per Definition konvex ist folgt, daß $\overline{K_i} \cap s$ eine gerade, einfach zusammenhängende Strecke ist, die im folgenden $s_i = \overline{z_i z_{i+1}}$ genannt wird. Die Anordnung sei so gewählt, daß sich K_i und K_{i-1} in z_i berühren. Formal setzen wir $z_0 = x$ und $z_{N+1} = y$. Damit gilt

$$|u(x) - u(y)| \leq \sum_{i=1}^{N+1} |u(z_{i-1}) - u(z_i)|.$$

Da u auf den Elementen polynomial ist und stetig über die Elementränder verläuft, gilt

$$|u(z_{i-1}) - u(z_i)| \leq |u|_{W^{1,\infty}(s_i)} \|z_i - z_{i-1}\|.$$

Das ergibt

$$|u(x) - u(y)| = \sum_{i=1}^{N+1} |u|_{W^{1,\infty}(s_i)} \|z_i - z_{i-1}\| \leq L(s) |u|_{W^{1,\infty}(s)},$$

wobei $L(s)$ wieder die Länge von s bezeichnet. Da $L(s)$ wegen des Lipschitz-stetigen Zusammenhangs von Ω_ℓ durch $C_t \|x - y\|$ abgeschätzt werden kann, ergibt sich die Behauptung. ■

Der Name *Finite Elemente* (im folgenden häufig mit FE abgekürzt) kommt daher, daß für den Raum S_τ eine Basis angegeben werden kann, die aus Funktionen mit kleinem Träger besteht. Um diese zu definieren, benötigen wir zunächst die Menge der Knotenpunkte zu einem FE-Gitter. Für eine Menge von Punkten $\Theta \subset R^d$ definieren wir den Raum der Gitterfunktionen durch

$$R^\Theta := \{\beta : \Theta \rightarrow R\}.$$

Eine Menge Θ_τ heißt unisolvente Knotenmenge zum Gitter τ , falls für beliebiges $\beta \in R^\Theta$ die Interpolationsaufgabe: Suche $u \in S_\tau$, so daß

$$u(x) = \beta(x), \quad \forall x \in \Theta_\tau$$

gilt, eine eindeutige Lösung besitzt. Wie derartige Punktemengen für allgemeine finite Elemente konstruiert werden können, findet man beispielsweise in [11] oder [7]. Wir betonen hier, daß die *Knotenpunkte* im allgemeinen nicht identisch sind mit den *Gitterpunkten* des Gitters. Die Menge der *Gitterpunkte* besteht aus den Eckpunkten der geometrischen finite Elemente und wird mit \mathbf{V}_τ bzw. $\mathbf{V}_\ell := \mathbf{V}_{\tau_\ell}$ bezeichnet.

Die Knotenbasis $\{\varphi_x^\tau\}_{x \in \Theta}$ des Raumes S_τ ist durch

$$\begin{aligned} \varphi_x^\tau &\in S_\tau \\ \varphi_x^\tau(y) &= \delta_{x,y}, \quad \forall y \in \Theta_\tau \end{aligned}$$

gegeben, wobei $\delta_{x,y}$ das Kronecker-Delta bezeichnet.

Mit Hilfe dieser Basis läßt sich jede Funktion mit ihrer Basisdarstellung identifizieren. Wir definieren dazu die Finite-Elemente-Interpolation $I_\tau : R^\Theta \rightarrow S_\tau$ durch

$$I_\tau[\beta](x) := \sum_{y \in \Theta} \beta(y) \varphi_y^\tau(x), \quad \forall x \in \text{dom } \tau.$$

Die FE-Diskretisierungen des Problems (3.2) ist dann durch die Wahl $V_n = S_\tau$ gegeben und lautet: Suche $u_\tau \in S_\tau$, so daß

$$a(u_\tau, v) = F(v), \quad \forall v \in S_\tau$$

gilt. Mit Hilfe der Basisdarstellung läßt sich dies auch als lineares Gleichungssystem formulieren:

$$\mathbf{A}_\tau \mathbf{u}_\tau = \mathbf{F}_\tau, \quad (3.7)$$

wobei der Operator $\mathbf{A}_\tau \in R^{\Theta_\tau \times \Theta_\tau}$ und die Gitterfunktion $\mathbf{F}_\tau \in R^{\Theta_\tau}$ durch

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\tau(x, y) &= a(\varphi_y^\tau, \varphi_x^\tau), \quad \forall x, y \in \Theta_\tau \\ \mathbf{F}_\tau(x) &= F(\varphi_x^\tau), \quad \forall x \in \Theta_\tau \end{aligned} \quad (3.8)$$

gegeben sind. Die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{u}_\tau \in R^\Theta$ ist dann über $u_\tau = I_\tau[\mathbf{u}_\tau]$ mit der Lösung von (3.2) gekoppelt. Die Güte der FE-Lösung wird durch die Fehlerabschätzung (3.3) auf die Approximationsgüte des Raumes S_τ zurückgeführt und hängt von der Glattheit der Lösung ab. Für Sobolev-Räume ist die Approximationseigenschaft genau untersucht. Wir beginnen mit der lokalen Eigenschaft.

Definition 20 Sei $k \geq p + 1 \geq 2$ und $R_\tau : C^0(\Omega) \rightarrow R^{\Theta_\tau}$ die Beschränkung einer stetigen Funktion auf die Knotenpunkte Θ_τ :

$$R_\tau[v](x) = v(x), \quad \forall x \in \Theta_\tau.$$

Wegen $H^k(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$ ist für alle $u \in H^k(\Omega)$ die Interpolierende $u_\tau^{int} \in S_\tau^{p,r}$ wohldefiniert.⁵ Dann besitzt $S_\tau^{p,r}$ die lokale Approximationseigenschaft für H^k , falls für $m = 0, 1$ die Abschätzung

$$\left| u - u_\tau^{int} \right|_{m,K} \leq Ch_K^{p+1-m} |u|_{p+1,K} \quad (3.9)$$

mit einer Konstanten C gilt, die unabhängig von u und K ist.

Im Hinblick auf a-posteriori-Fehlerschätzer ist das folgende Resultat von Bedeutung. Für alle $u \in H^1(\Omega)$ existiert ein $u_\tau \in S_\tau^{p,r}$, so daß für alle $K \in \tau$

$$|u - u_\tau|_{0,K} \leq Ch_K |u|_{1,L^1_\tau(K)} \quad (3.10)$$

gilt. Hier bezeichnet $L^1_\tau(K)$ wieder die Menge aller Elemente, die K berühren.

Für die globale Approximationseigenschaft müssen die Normen auf ganz Ω betrachtet werden.

Definition 21 Sei $k \geq p + 1 \geq 2$ und für $u \in H^k(\Omega)$ die Interpolierende $u_\tau^{int} \in S_\tau^{p,r}$ wie oben definiert. Dann besitzt $S_\tau^{p,r}$ die Approximationseigenschaft für $H^k(\Omega)$, falls für $m = 0, 1$ die Abschätzung

$$\left| u - u_\tau^{int} \right|_{m,\Omega} \leq Ch_\tau^{p+1-m} |u|_{p+1,\Omega}, \quad (3.11)$$

erfüllt ist. Desweiteren soll gelten, daß für alle $u \in H^1(\Omega)$ eine Funktion $u_\tau \in S_\tau^{p,r}$ existiert, die

$$|u - u_\tau|_{0,\Omega} \leq Ch_\tau |u|_{1,\Omega} \quad (3.12)$$

erfüllt.

Die lokale Approximationseigenschaft ist eine stärkere Bedingung als die globale. Beispielsweise folgt (3.11) direkt aus (3.9) durch Summation über alle Elemente. Wir hatten für die Approximationseigenschaft angenommen,

⁵Die Einbettung $H^k(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$ ist wegen $d = 2, 3$ auf Grund des Sobolevschen Einbettungssatzes stetig.

daß die zu approximierende Funktion aus $H^{p+1}(\Omega)$ ist. Wir betonen an dieser Stelle, daß das Ziel dieser Arbeit ist, eine neue Klasse von finiten Elementen zu definieren, welche die übliche Approximationseigenschaft besitzt, und deren minimale Dimension nicht an die Zahl der geometrischen Details gekoppelt ist. Diese Untersuchung hat nichts mit der Regularität der zu diskretisierenden Differentialgleichung zu tun. Üblicherweise ist die Glattheitsannahme $u \in H^{p+1}(\Omega)$ unrealistisch für die Lösung des Variationsproblems, falls die Daten (Rand des Gebiets, Koeffizienten des Differentialoperators) nicht glatt sind. Um optimale Fehlerabschätzungen (in Abhängigkeit der Zahl der Freiheitsgrade) zu erhalten, muß das Gitter in Richtung der Singularitäten graduiert werden. Man benötigt dann die lokale Approximationseigenschaft, bei der die kleiner werdende Schrittweite in der Nähe der Singularität ausgenützt wird, um quasi-optimale Fehlerabschätzungen herzuleiten.

Wir bemerken weiter, daß die Eigenschaft (3.12) nicht direkt aus dem lokalen Analogon (3.10) folgt, sondern eine (lokale) Zusatzannahme an das Gitter benötigt. Die Details finden sich in folgendem Lemma.

Lemma 22 *Für ein Element K bezeichnet $L_\ell^1(K)$ wieder die Elementschicht um K . Wir nehmen an, daß eine Konstante A existiert, die nur von C abhängt, so daß*

$$\sup_{\ell \geq 0} \sup_{K \in \tau_\ell} \# \{K' \in \tau_\ell \mid K \in L_\ell^1(K')\} \leq A$$

gilt. Dann folgt (3.12) aus (3.10).

Beweis. Mit Hilfe von (3.10) gilt:

$$\begin{aligned} \|u - u_\tau\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{K \in \tau_\ell} \|u - u_\tau\|_{0,K}^2 \leq C \sum_{K \in \tau_\ell} |u|_{1,L_\ell^1(K)}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \tau_\ell} h_K^2 |u|_{1,K}^2 \sum_{\substack{K' \in \tau_\ell \\ K \in L_\ell^1(K')}} 1 \leq CAh_\tau^2 \sum_{K \in \tau_\ell} |u|_{1,K}^2 = CAh_\tau^2 |u|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

■

Wir bemerken, daß die Bedingung aus dem obigen Lemma an die Gitter lokal ist, und daher wesentlich schwächer ist als die globale Quasiuniformität.

Bemerkung 23 *In [7] oder in [11] wird gezeigt, daß reguläre FE-Gitter die Approximationseigenschaften (3.9) und (3.10) besitzen. Der Beweis von (3.10) findet sich beispielsweise in [12].*

Ziel dieser Arbeit ist es, vergrößerbare Finite-Elemente-Räume zu konstruieren, die sowohl die lokalen wie auch globalen Approximationseigenschaften besitzen. Für die Konvergenzanalyse werden wir die sogenannte inverse Ungleichung verwenden, die für reguläre finite Elemente gültig ist (siehe [7, Lemma 4.5.3]). Die Details finden sich in der folgenden Annahme.

Annahme 24 Sei τ ein reguläres FE-Gitter und $S_\tau^{p,r}$ der zugehörige FE-Raum. Wir nehmen an, daß eine Konstante C_{inv} existiert, so daß für alle $i \geq j \geq 0$ und $q_1, q_2 \in [1, \infty]$ gilt

$$|u|_{W^{i,q_1}(K)} \leq C_{inv} h_K^{j-i+d/q_1-d/q_2} |u|_{W^{j,q_2}(K)}, \quad \forall K \in \tau, \quad \forall u \in S_\tau^{p,r}. \quad (3.13)$$

Kapitel 4

Zusammengesetzte finite Elemente

In diesem Kapitel werden Finite-Elemente-Räume definiert, die sich einfach vergrößern lassen. Unter Vergrößerung verstehen wir das folgende. Finite-Elemente-Räume sind endlichdimensionale (Teil-) Räume von den Funktionenräumen, in denen die Lösung partieller Differentialgleichungen liegt. Sie besitzen üblicherweise eine asymptotische Approximationseigenschaft der Form, daß quantitativ angegeben werden kann, wie genau Funktionen aus dem kontinuierlichen Funktionenraum approximiert werden können in Abhängigkeit der Dimension der Finite-Elemente-Räume. Diese Approximationseigenschaft gilt jedoch nur asymptotisch in dem Sinn, daß die Dimension der FE-Räume hinreichend groß sein muß. Hinreichend groß bedeutet in diesem Zusammenhang, daß alle Mikrostrukturen des Problems (geometrische Details, Bereiche in denen die Koeffizienten der Differentialgleichung glatt sind) aufgelöst sein müssen. Dadurch ist eine minimale Schranke für die Dimension der FE-Räume durch die Anzahl und Größe der Mikrostrukturen gegeben. Wir werden im folgenden sogenannte „zusammengesetzte Finite-Elemente-Räume“ definieren, für die Teilräume angegeben werden können, die ebenfalls die asymptotische Approximationsgüte besitzen, und deren (minimale) Dimension unabhängig von der Zahl der Mikrostrukturen ist. Diese Räume können dann benutzt werden, die in Kapitel 2 vorgestellten Anwendungen effizient zu diskretisieren.

Wir werden im folgenden „zusammengesetzte Finite-Elemente-Räume“ mit „CFE-Räume“ abkürzen, wobei das C von composite=zusammengesetzt abgeleitet ist. Die Konstruktion dieser Räume wird in die folgenden Schritte

gegliedert.

1. Definition einer Hierarchie logisch geschachtelter Gitter.
2. Definition der Standard-FE-Räume auf dem feinsten Gitter.
3. Definition des Vergrößerungsalgorithmus.

Der Vergrößerungsalgorithmus wird von der genauen Struktur der kontinuierlichen Funktionenräume abhängen. Die einfachste Situation ist der Fall, daß $V = H^1(\Omega)$ gilt. Wie bereits erwähnt, ist dies typischerweise erfüllt, falls natürliche Randbedingungen vorgegeben sind. Falls (teilweise) Dirichletsche Randbedingungen gestellt sind, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder wird der Raum H^1 eingeschränkt, so daß die Spuren der Funktionen die wesentlichen Randbedingungen erfüllen, oder werden die Randbedingungen in einer schwachen Form in die Variationsformulierung eingebaut. Im letzten Fall können die gleichen Finite-Elemente-Räume verwendet werden, wie im Fall von natürlichen Randbedingungen. Dieser Zugang ist in [22] ausgearbeitet. Wenn jedoch die Finite-Elemente-Räume ebenfalls die Dirichletschen Randbedingungen erfüllen sollen, muß der Vergrößerungsalgorithmus abgeändert werden, so daß die Randbedingungen auf den gröberen Stufen erfüllt bleiben. Eine ähnliche Modifikation wird bei Grenzschichtproblemen erforderlich. Da wird zwar üblicherweise auch $V = H^1(\Omega)$ zu Grunde gelegt, jedoch haben die für die Konvergenz wichtigen Regularitätsaussagen lediglich in den Teilgebieten Gültigkeit, in denen die Koeffizienten des Differentialoperators glatt sind. Um auf groben Stufen die Approximationseigenschaft zu erhalten, müssen die vergrößerten Finite-Elemente-Räume das richtige Verhalten über die Grenzschichten enthalten. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, daß $V = H^1(\Omega)$ gilt. Die anderen Situationen können dann durch lokale Modifikation der Vergrößerungsoperatoren behandelt werden, die dann im Anschluß an die folgenden Überlegungen diskutiert werden.

4.1 Konstruktion von CFE-Gittern

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $V = H^1(\Omega)$ gilt. Die Definition der CFE-Räume wird mit Hilfe von Gittern geschehen. Die Zahl der Freiheitsgrade eines CFE-Raumes wird direkt gekoppelt sein mit der Zahl der Knotenpunkte des zugehörigen Gitters. Daher werden wir von den groben

Gittern nicht verlangen, daß alle geometrischen Details aufgelöst werden, sondern lediglich, daß sie das Gebiet überdecken. Die folgende Eigenschaft wird Überdeckungseigenschaft für Neumann-Randbedingungen genannt:

$$\Omega = \text{dom } \tau_{\ell_{\max}} \subset \text{dom } \tau_{\ell_{\max}-1} \subset \dots \subset \text{dom } \tau_0. \quad (4.1)$$

Es wäre verhältnismäßig einfach, eine Hierarchie von regulären FE-Gittern $\{\tau_\ell\}_{0 \leq \ell \leq \ell_{\max}}$ zu erzeugen, die diese Eigenschaft besitzt. Falls keine zusätzlichen Voraussetzungen gefordert werden, entsteht jedoch die folgende Schwierigkeit. Die Finite-Elemente-Räume werden mit Hilfe von Prolongationsoperatoren definiert, die Finite-Elemente-Funktionen auf einem groben Gitter sukzessive von einer Stufe auf die nächst feinere prolongieren. Ein wesentlicher Bestandteil der Konvergenzanalyse wird sein, daß dieses iterierte Prolongieren die Gradienten der grobskaligen Finite-Elemente-Funktionen beschränkt läßt unabhängig von der Zahl der Stufen, über die prolongiert wird. Es wird sich herausstellen, daß die Beschränktheit der Gradienten nur dann gewährleistet ist, wenn die Gitter τ_ℓ nicht beliebig zueinander liegen. Ein Beispiel von regulären FE-Gittern, die diese Voraussetzung nicht erfüllen würden, ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Die Gitter erfüllen alle die minimale

Abbildung 4.1: Folge von regulären FE-Gittern, die gegeneinander rotiert und daher nicht physikalisch geschachtelt sind.

Winkelbedingung, sind jedoch gegeneinander rotiert, das heißt physikalisch nicht geschachtelt. Es wird in Beispiel 90 gezeigt, daß die noch zu definierende, iterierte Prolongation auf dieser Gittersequenz in der $W^{1,\infty}$ -Norm

nicht stabil ist, d.h. die Gradienten der Funktionen immer steiler werden. Da der Beweis der Approximationseigenschaft jedoch auf dieser Stabilität basiert, werden in Annahme 27 Bedingungen an die Gitterfolge formuliert, die gewährleisten, daß die Gitter auf den verschiedenen Stufen *nicht* beliebig zueinander orientiert sind, sondern *fast* physikalisch geschachtelt sind. Ein Algorithmus, der Gitter erzeugt, welche diese Annahmen erfüllen, wird in Kapitel 6 angegeben. Das zu Grunde liegende Prinzip wird im folgenden kurz erklärt.

Die Gittergenerierung gliedert sich in die folgenden drei Phasen.

1. Zunächst wird eine Folge $\{\tilde{\tau}_\ell\}_{\ell=0}^{\ell_{\max}}$ von Finite-Elemente-Gittern erzeugt, die logisch und physikalisch geschachtelt sind, jedoch keine Approximation des Gebietes Ω darstellen. Diese Gitter werden im folgenden immer als Referenzgitter bezeichnet.
2. In der zweiten Phase werden diese Gitter durch Verschieben randnaher Punkte dem Rand von Ω angepaßt. Die resultierenden Gitter werden mit τ_ℓ^∞ bezeichnet.
3. Die Gitter τ_ℓ^∞ können Elemente enthalten, die *außerhalb* des Gebietes liegen. Derartige Elemente werden in der dritten Phase eliminiert. Die entstehenden, reduzierten Gitter werden τ_ℓ genannt und zur Definition der zusammengesetzten Finite-Elemente-Räume herangezogen.

Für die Konvergenzanalyse werden die Gitter τ_ℓ als Störung der Referenzgitter $\tilde{\tau}_\ell$ aufgefaßt, und die meisten Abschätzungen mit Hilfe einer Abbildung, die τ_ℓ auf $\tilde{\tau}_\ell$ abbildet, auf die Referenzgitter transportiert. Die Hilfgitter τ_ℓ^∞ werden benötigt, um den (elementweisen) Abstand zweier Elemente aus τ_ℓ auf das Referenzgitter $\tilde{\tau}_\ell$ übertragen zu können.

Die genaue Definition dieser Phasen wird im folgenden angegeben. In der ersten Phase wird zunächst die Hierarchie von Referenzgittern erzeugt. Sei dazu $\Omega \subset R^d$ ein Gebiet und $\tilde{\tau}_0 = \{\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \dots, \tilde{K}_{N_0}\}$. Das Gitter $\tilde{\tau}_0$ muß *nicht* den Rand des Gebiets auflösen und sollte aus sehr wenigen Elementen bestehen. Die geometrischen finiten Elemente \tilde{K}_j sind entweder Drei- oder Vierecke in zwei Dimensionen oder höherdimensionale Analoga für $d > 2$. Von $\tilde{\tau}_0$ fordern wir, daß $\Omega \subset \text{dom } \tilde{\tau}_0$ gilt. Das Gitter $\tilde{\tau}_0$ soll nun verfeinert werden. Wir geben im folgenden zunächst eine einfache Strategie an, wobei für spezielle Anwendungen eventuell Modifikationen vorteilhaft sein könnten.

Darauf wird in Kapitel 6 eingegangen werden. Von $\tilde{\tau}_0$ nehmen wir an, daß es ein reguläres FE-Gitter im Sinne von Definition 7 ist.

Wir verfeinern $\tilde{\tau}_0$ sukzessive mit üblichen Strategien inklusive Adaptivität. Jedem Element wird ein sogenanntes *Verfeinerungsmuster* zugeordnet, d.h. eine Vorschrift wie es in feinere Elemente zerlegt wird. Bei Dreiecken können beispielsweise die Seitenmitten verbunden werden oder eine Seitenmitte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt, bei Vierecken können Parallelen zu den Kanten eingefügt werden, etc. Einige dieser Techniken sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Während dieses Verfeinerungsprozesses werden

Abbildung 4.2: Einige Verfeinerungstechniken für Drei- und Vierecke.

keine Punkte verschoben, so daß alle Grobgitterpunkte auch Feingitterpunkte sind. Wir nehmen an, daß die dadurch entstehenden Gittern $\{\tilde{\tau}_\ell\}_{0 \leq \ell \leq \ell_{\max}}$ FE-Gitter in obigem Sinne sind. Wegen der physikalischen Schachtelung der Gitter läßt sich eine logische Hierarchie wie folgt definieren. Sei $K \in \tilde{\tau}_\ell$, $j \geq \ell$. Dann sind die Söhne von K auf einem feineren Gittern $\tilde{\tau}_j$ gegeben durch

$$\sigma_\ell^j(K) = \{K' \in \tilde{\tau}_j \mid \text{dom } K' \subset \text{dom } K\}.$$

Der Vater eines Elements $K' \in \tilde{\tau}_j$ auf einem gröberem Gitter $\ell \leq j$ wird mit $F_j^\ell(K') \in \tilde{\tau}_\ell$ bezeichnet und ist durch

$$K' \in \sigma_\ell^j(F_j^\ell(K'))$$

definiert. Die folgende Annahme ist für alle Verfeinerungsstrategien erfüllt (vgl. Abbildung 4.3).

Abbildung 4.3: Vaterdreieck mit Söhnen. Für die Punkte x, y gilt $\text{dist}(x, y, \sigma(K)) = 2$

Annahme 25 Für alle Stufen $\ell < \ell_{\max}$, alle Elemente $K \in \tau_\ell$ und alle $x, y \in \bar{K}$ läßt sich die elementweise Distanz durch

$$\text{dist}(x, y, \sigma_\ell^{\ell+1}(K)) \leq 2 \quad (4.2)$$

abschätzen.

In der zweiten Phase wird nun das feinste Gitter $\tilde{\tau}_{\ell_{\max}}$ dem Gebiet Ω angepaßt, wobei die logische Hierarchie beibehalten wird. Die Gitterpunkte eines FE-Gitters τ bzw. τ_ℓ werden mit \mathbf{V}_τ bzw. \mathbf{V}_ℓ bezeichnet. Wir bemerken, daß \mathbf{V}_ℓ nur die Eckpunkte der Elemente von τ_ℓ enthält, und daher im allgemeinen nicht mit der Knotenmenge Θ_ℓ übereinstimmt. Die Idee dabei ist, daß Gitterpunkte des feinsten Gitters, die nahe am Rand liegen, auf den Rand geschoben werden. Dies wird in Abbildung 4.4 dargestellt. Die algorithmischen Details werden in Kapitel 6 erklärt. Hier genügt es, abstrakt anzunehmen, daß das Verschieben von Gitterpunkten $\mathbf{V}_{\ell_{\max}}$ zu einem Gitter $\tau_{\ell_{\max}}^\infty$ führt, welches die folgende Eigenschaft besitzt. Es existiert eine Teilmenge $\tau_{\ell_{\max}} \subset \tau_{\ell_{\max}}^\infty$, die ein FE-Gitter nach Definition 7 darstellt, und die Mikrostrukturen hinreichend genau auflöst. Hinreichend genau auflöst bedeutet in diesem Zusammenhang, daß sich der Gebietsrand glatt über den Elementkanten bzw. -oberflächen parametrisieren läßt. Verfeinerungen mit Randanpassung durch z.B. Projektion von randnahen Punkten beim Verfeinern auf den Rand des Gebiets lassen sich erfolgreich anwenden. Es ist klar, daß diese Bedingung eine Verbindung zwischen der Feinheit des Gitters $\tilde{\tau}_{\ell_{\max}}$

Abbildung 4.4: Das Referenzgitter wird durch Verschieben randnaher Punkte auf den Rand Γ dem Gebiet angepaßt.

und der Größe der aufzulösenden Mikrostrukturen herstellt. Da die Gitterpunkte auf den gröberen Gittern $\tilde{\tau}_\ell$ nach Konstruktion eine Teilmenge der feineren Gitterpunkte sind, verändert das oben beschriebene Verschieben von Feingitterpunkten auch alle gröberen Gitter. Das Resultat dieses Verschiebungsprozesses ergibt die FE-Gitter $\{\tau_\ell^\infty\}_{0 \leq \ell \leq \ell_{\max}}$. Die logische Vater/Sohn-Relation, die für die Referenzgitter $\tilde{\tau}_\ell$ definiert worden war, wird auf die Gitter τ_ℓ^∞ vererbt und gleich bezeichnet.

In der dritten Phase definieren wir nun die FE-Gitter, welche zur Definition von CFE-Räumen benötigt werden. Das feinste Gitter $\tau_{\ell_{\max}}$ wurde bereits definiert. Für $\ell < \ell_{\max}$ wird dieses Gitter sukzessive gemäß der folgenden Rekursion vergrößert. Sei ein Gitter $\tau_\ell \subset \tau_\ell^\infty$ gegeben. Die Menge Θ_ℓ bezeichnet wieder die Menge der Knotenpunkte eines FE-Raumes S_ℓ .

Falls $\ell \geq 1$ gilt, ist $\tau_{\ell-1}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \tau_{\ell-1} & : = \left\{ K \in \tau_{\ell-1}^\infty : \sigma_{\ell-1}^\ell(K) \cap \tau_\ell \neq \emptyset \right\} \cup \left\{ K \in \tau_{\ell-1}^\infty : K \cap \Theta_\ell \neq \emptyset \right\}, \\ \Theta_{\ell-1} & : \text{ Menge aller Knotenpunkte von } S_{\ell-1}. \end{aligned}$$

Diese Definition ist in Abbildung 4.5 illustriert. Da das Gitter $\tau_{\ell_{\max}}$ bereits weiter oben definiert wurde, ist damit die Gitterhierarchie $\{\tau_\ell\}_{0 \leq \ell \leq \ell_{\max}}$ festgelegt. Die Vater/Sohn-Relation wird vererbt unter Beachtung der folgenden Modifikation. Sei $K \in \tau_\ell$. Dann sind die Söhne auf dem feineren Gitter τ_j

Abbildung 4.5: Die Feingitterdreiecke aus τ_ℓ gehören zu den gestrichelten Linien. Das gröbere Gitter setzt sich aus den Vätern der Feingitterelemente zusammen und Dreiecken, in die Feingitterpunkte hineingeschoben wurden.

(d.h. $j \geq \ell$) definiert durch

$$\hat{\sigma}_\ell^j(K) := \sigma_\ell^j(K) \cap \tau_j.$$

Da keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir wieder σ an Stelle von $\hat{\sigma}$. Die Knotenpunkte der Söhne werden mit

$$\Theta_\ell^j(K) := \Theta_j \cap \overline{\text{dom } \sigma_\ell^j(K)} \quad (4.3)$$

bezeichnet. Die Schichten $L_\ell^j(\omega)$ und die elementweise Distanz sind immer bezüglich der Gitter τ_ℓ^∞ bzw. $\tilde{\tau}_\ell$ definiert. Wir unterstreichen hier, daß das Gitter $\tau_{\ell_{\max}}$ nicht als feinstes Gitter in einem Diskretisierungsprozeß aufgefaßt werden muß, sondern als das gröbste Gitter, auf das die übliche Finite-Elemente-Maschinerie aufgesetzt werden kann. Das bedeutet, daß das sukzessive Verfeinern des Gitters $\tau_{\ell_{\max}}$ und Projektion randnaher Punkte auf den Rand des Gebiets eine Folge von Gittern ergibt, auf denen sich wie üblich Finite-Elemente-Räume definieren lassen, welche die Standard-Approximationseigenschaft erfüllen.

Das Verschieben von Gitterpunkten definiert eine Abbildung von den angepaßten Gittern τ_ℓ auf die Referenzgitter $\tilde{\tau}_\ell$. Die Details finden sich in folgender Definition.

Definition 26 *Durch das Anpassen des Gitters an den Rand des Gebiets werden Gitterpunkte verschoben und dadurch geometrische Elemente verformt. Jedem verschobenen Element $K \in \tau_\ell^\infty$ entspricht ein Element $\tilde{K} \in \tilde{\tau}_\ell$ aus dem Referenzgitter. Formal läßt sich dieser Zusammenhang mit Hilfe*

einer bi-Lipschitz-stetigen Abbildung¹ $\Phi_\ell : \Omega_\ell^\infty \rightarrow \tilde{\Omega}_\ell$ beschreiben, die stückweise affin-linear ist. Genauer wird gefordert, daß für alle $K \in \tau_\ell^\infty$ gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_\ell(K) &= \tilde{K}, \\ \Phi_\ell|_K &\text{ ist affin-linear.} \end{aligned}$$

Im folgenden schreiben wir Φ statt Φ_ℓ , falls keine Mißverständnisse entstehen können.

Im folgenden werden an die Gitter $\tilde{\tau}_\ell$ und τ_ℓ^∞ Bedingungen gestellt, die garantieren, daß die verschobenen Gitter τ_ℓ^∞ vergleichbare Eigenschaften wie $\tilde{\tau}_\ell$ besitzen.

Annahme 27 Ein Maß für die lokale Schrittweite des Referenzgitters $\tilde{\tau}_\ell$ ist für $\tilde{y} \in \tilde{\Omega}_\ell$ durch

$$\tilde{h}_\ell(\tilde{y}) := \max \left\{ h_{\tilde{K}} \mid \tilde{K} \in \tilde{\tau}_\ell \wedge \tilde{y} \in \tilde{K} \right\}$$

gegeben. Das Referenzgitter und die Gitteradaption müssen dann die folgenden Kriterien erfüllen:

1. Es existieren Konstanten $C_{ref} > 0$ und $0 \leq c_{ref} < 1$, so daß für alle $0 \leq \ell \leq j \leq \ell_{\max}$ und alle $\tilde{y} \in \text{dom } \tilde{\tau}_j$ die Abschätzung

$$\tilde{h}_j(\tilde{y}) \leq C_{ref} c_{ref}^{j-\ell} \tilde{h}_\ell(\tilde{y}) \quad (4.4)$$

erfüllt ist. Desweiteren muß für alle $\tilde{K} \in \tilde{\tau}_\ell$ und alle $\tilde{K}' \in \sigma_\ell^{\ell+1}(\tilde{K})$ gelten:

$$h_{\tilde{K}} \leq C_{ref} h_{\tilde{K}'}.$$

2. Gitterpunkte $\tilde{y} \in \tilde{\Theta}_{\ell_{\max}}$ werden maximal um eine Distanz von $C\tilde{h}_{\ell_{\max}}(\tilde{y})$ verschoben (siehe Abbildung 4.6). Für jedes Element $K \in \tau_\ell^\infty$ ist der Durchmesser h_K abschätzbar durch den Durchmesser von $\tilde{K} \in \Phi(K) \in \tilde{\tau}_\ell$.²

$$c_a h_{\tilde{K}} \leq h_K \leq C_a h_{\tilde{K}}. \quad (4.5)$$

¹Eine Abbildung Φ heißt bi-Lipschitz-stetig, falls Φ bijektiv ist und Φ, Φ^{-1} Lipschitz-stetig sind.

²Diese Abschätzung folgt aus der Bedingung, daß die Lipschitz-Konstanten von Φ_ℓ bzw. Φ_ℓ^{-1} durch c_a^{-1} bzw. C_a beschränkt ist.

3. Sei $K \in \tau_\ell^\infty$.

(a) Für alle Söhne $K' \in \sigma_\ell^{\ell+1}(K)$ gilt

$$K' \cap K \neq \emptyset \quad K' \subset \text{dom } L_\ell^1(K)$$

(vgl. Abbildung 4.7).

(b) Für alle $K \in \tau_\ell^\infty$, die $\overline{K} \cap \Gamma \neq \emptyset$ erfüllen, gilt $\overline{\text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1}(K)} \cap \Gamma \neq \emptyset$
(vgl. Abbildung 4.8).

(c) Für alle $K' \in \tau_{\ell+1}^\infty$, für die $\overline{K} \cap \overline{K'} \neq \emptyset$ gilt, folgt $\overline{\text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1}(K)} \cap \overline{K'} \neq \emptyset$ (vgl. Abbildung 4.9).

4. Alle Gitter τ_ℓ und τ_ℓ^∞ sind regulär und die zugehörigen Gebiete Ω_ℓ Lipschitz-stetig zusammenhängend (siehe (3.6)).

5. Für alle $K \in \tau_\ell^\infty$ gilt $K \subset \text{dom } L_\ell^1(\Phi(K))$. Alle $\tilde{K} \in \tilde{\tau}_\ell$, die K berühren (d.h. $\overline{\tilde{K}} \cap \overline{K} \neq \emptyset$), berühren auch $\Phi(K)$:

$$\overline{\Phi(K)} \cap \overline{\tilde{K}} \neq \emptyset$$

(vgl. Abbildung 4.10).

6. Sei $0 \leq \ell < \ell_{\max}$ und $K \in \tau_\ell^\infty$. Wir konstruieren eine Zahlenfolge $\{b_i\}_{i=\ell}^{\ell_{\max}-1}$ rekursiv durch

- $j = \ell_{\max} - 1$: b_j ist die kleinste natürliche Zahl, für die

$$\text{dom } \sigma_\ell^{j+1}(K) \subset \text{dom } L_j^{b_j}(\sigma_\ell^j(K))$$

gilt.

- $j = \ell_{\max} - 2, \ell_{\max} - 3, \dots, \ell$: b_j ist die kleinste natürliche Zahl, für die

$$\text{dom } L_{j+1}^{b_{j+1}}(\sigma_\ell^{j+1}(K)) \subset \text{dom } L_j^{b_j}(\sigma_\ell^j(K))$$

gilt. Wir nehmen an, daß eine Konstante b existiert, so daß für alle ℓ und alle $K \in \tau_\ell^\infty$ die Folge $\{b_j\}_{j=\ell}^{\ell_{\max}-1}$ die Abschätzung $b_j \leq b$ für alle j erfüllt (vgl. Lemma 34).

Definition 28 Eine Familie von Gittern $\{\tau_\ell\}$, welches aus den Referenzgitter $\{\tilde{\tau}_\ell\}$ erzeugt wurde, nennen wir Familie von CFE-Gitter, falls die Eigenschaften aus Annahme 27 erfüllt sind.

Die obigen Bedingungen 2-6 sind trivialerweise für die Referenzgitter erfüllt (für Bedingung 6 verweisen wir auf Lemma 34). Sie besitzen alle lokalen Charakter, d.h. beim Verschieben eines Gitterpunktes des Referenzgitters wird nur eine lokale Elementumgebung dieses Punktes gestört, und die Gültigkeit der Kriterien kann im Anpassungsprozeß lokal berücksichtigt werden.

Einige der oben aufgeführten Bedingungen können abgeschwächt werden. Beispielsweise kann bei Bedingung 3a auch alternativ gefordert werden, daß

$$\text{dist}\left(K', K, \tau_{\ell+1}^\infty\right) \leq c_1 \quad K' \subset \text{dom } L_\ell^{c_2}(K).$$

gilt mit Konstanten $c_1, c_2 = O(1)$. Analog können Bedingungen 3b, 3c und 5 relaxiert werden. Um die Arbeit nicht mit technischen Details zu überladen, werden diese möglichen Verallgemeinerungen im folgenden nicht diskutiert.

Die folgenden Bemerkungen und Abbildungen illustrieren die einzelnen Bedingungen.

Lemma 29 Sei $K', K'' \in \tau_{\ell+1}^\infty$ zwei Elemente, die sich berühren: $\overline{K'} \cap \overline{K''} \neq \emptyset$. Dann berühren sich auch die Väter $F_{K'} := F_{\ell+1}^\ell(K')$ und $F_{K''} := F_{\ell+1}^\ell(K'')$ dieser Elemente: $\overline{F_{K'}} \cap \overline{F_{K''}} \neq \emptyset$.

Beweis. Die Menge $\overline{K'} \cup \overline{K''}$ ist zusammenhängend. Die Bedingung an Φ_ℓ aus Annahme 27 impliziert, daß $\Phi_\ell^{-1}\Phi_{\ell+1}$ stetig ist. Daher ist auch $\Phi_\ell^{-1}\Phi_{\ell+1}(\overline{K'} \cup \overline{K''}) = \overline{F_{K'}} \cup \overline{F_{K''}}$ zusammenhängend (siehe [36, Satz 4.9]).

Bemerkung 30 Bedingung 1 besagt *nicht*, daß in jedem Verfeinerungsschritt alle Elemente verfeinert werden müssen. Das ermöglicht die Verwendung adaptiver Verfeinerungen und adaptiver Gitter. Bedingung 1 wird genau in Aufspaltung (5.19) und (5.36) benötigt. Dort wird ein lokaler Fehler $u - u_\ell$ in eine Teleskopsumme $\sum_j u_j - u_{j-1}$ aufgespalten und ausgenützt, daß die lokalen Schrittweiten summierbar sind: $\sum_j h_j(y) < \infty$. Falls dies nicht gilt, kann die Aufspaltung modifiziert werden, so daß nur diejenigen Differenzen betrachtet werden, für die $u_j - u_{j-1} \neq 0$ gilt. Wir verzichten hier aus Gründen der Übersichtlichkeit auf dieses technische Detail.

Bemerkung 31 *In Bedingung 2 wurde gefordert, daß Gitterpunkte des Feingitters $\tilde{y} \in \tilde{\Theta}_{\ell_{\max}}$ um $O(\tilde{h}_{\ell_{\max}}(y))$ verschoben sein können. Dies ist eine schwächere Bedingung als die entsprechende Bedingung für Standard-Finite-Elemente-Gitter im Fall von glatten, gekrümmten Rändern, bei der Punkte maximal um eine Distanz $C(\tilde{h}_{\ell_{\max}}(\tilde{y}))^2$ verschoben werden dürfen. Eine typische Situation ist in Abbildung 4.6 dargestellt.*

Abbildung 4.6: Obere Zeile: Feingitterpunkte des Referenzgitters dürfen um $O(\tilde{h}_{\ell_{\max}})$ verschoben werden. Untere Zeile: Bei üblichen finiten Elementen dürfen Feingitterpunkte nur um $O(\tilde{h}_{\ell_{\max}}^2)$ verschoben werden.

Bemerkung 32 *Bedingung 3a wäre verletzt, falls die Söhne ganz außerhalb eines Vatelements liegen würden. Eine Situation, für die ein Sohn K' von K keinen gemeinsamen Punkt mit K besitzen würde, ist in Abbildung 4.7 konstruiert.*

Bedingung 3b drückt aus, daß randnahe Punkte auf den Rand und nicht weg vom Rand geschoben werden sollen. Das ist in Abbildung 4.8 illustriert.

Bedingung 3c ist mit Bedingung 3a verwandt. Falls ein Knoten ganz durch ein Nachbarlement geschoben wird, kann diese Bedingung verletzt sein (siehe Abbildung 4.9).

Bemerkung 33 *Die Bedingung 5 macht ebenfalls eine Aussage, wie weit die Gitterpunkte verschoben werden dürfen, und ist in Abbildung 4.10 illustriert.*

Das folgende Lemma zeigt, daß Bedingung 6 im Fall $\tau_{\ell}^{\infty} = \tilde{\tau}_{\ell}$ mit $b = 1$ erfüllt ist.

Abbildung 4.7: Vaterdreieck mit (verschobenen) Söhnen. Die Söhne sind graugefärbt. Im verbotenen Fall würde ein Sohn (*) das Vaterdreieck (gestrichelt gezeichnet) nicht mehr berühren.

Abbildung 4.8: Verfeinerung in Randnähe. Die Söhne eines Elements, welches den Rand berührt, müssen ebenfalls den Rand berühren.

Lemma 34 *Für die Referenzgitter gilt Bedingung 6 mit $b = 1$.*

Beweis. Sei ℓ und $K \in \tilde{\tau}_\ell$ beliebig. Die Folge $\{b_j\}$ sei wie oben definiert. Wir zeigen $b_j \leq 1$ rekursiv und beginnen mit $b_{\ell_{\max}-1}$. Zur Abkürzung schreiben wir σ^j statt $\sigma_\ell^j(K)$. Da keine Punkte verschoben wurden, gilt $\text{dom } \sigma^{\ell_{\max}} \subset \text{dom } \sigma^{\ell_{\max}-1} \subset L_{\ell_{\max}-1}^1(\sigma^{\ell_{\max}-1})$, d.h. $b_{\ell_{\max}-1} = 1$.

Sei die Aussage für ein j bereits bewiesen. Es gelte also $\text{dom } L_{j+1}^1(\sigma^{j+1}) \subset \text{dom } L_j^1(\sigma^j)$. Sei dann $K' \in L_j^1(\sigma^j)$. Dann existiert ein $K'' \in \sigma^j$, welches $\overline{K''} \cap \overline{K'} \neq \emptyset$ erfüllt. Da $K'' \subset F_j^{j-1}(K'')$ und $K' \subset F_j^{j-1}(K') \subset \sigma^{j-1}$ gilt, folgt

$$K'' \subset F_j^{j-1}(K'') \subset L_{j-1}^1(\sigma^{j-1})$$

Abbildung 4.9: In der oberen Zeile werden Punkte höchstens in Nachbar-elemente verschoben. In der unteren ist ein Eckpunkt von K' ganz durch das Nachbardreieck in K hineingeschoben worden. Dann gilt $\overline{K'} \cap \overline{K} \neq \emptyset$ aber auch $\overline{K'} \cap \text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1}(K) = \emptyset$. Bedingung 3c wäre daher verletzt.

Abbildung 4.10: Das obere Dreieck K (erlaubt) liegt in $L_\ell^1(\tilde{K})$, das untere Dreieck K ist zu weit verschoben.

und daraus die Behauptung. ■

Im folgenden Beispiel wird eine Situation gezeigt, bei der die Bedingung 6 verletzt wäre.

Beispiel 35 *Wir betrachten die Gitterfolge $\{\tau_\ell\}_{\ell=0}^3$ aus Abbildung 4.11. Dafür gilt*

$$\text{dom } \sigma_0^3(K) \subset \text{dom } L_2^1(\sigma_0^2(K)) \subset \text{dom } L_1^2(\sigma_0^1(K)) \subset \text{dom } L_0^3(K).$$

Die Schichtdicke wird also immer größer und Bedingung 6 wäre verletzt. Die dargestellte Situation zeichnet sich durch 1) degenerierte Elemente aus, 2) Viereckselemente in Randnähe und 3) systematische Verschiebung der Gitterpunkte des Referenzgitters in eine Richtung. Es ist uns kein Beispiel bekannt, bei dem eine Gittersequenz in Randnähe regelmäßig verfeinert wurde oder aus Simplexes besteht und Bedingung 6 verletzt ist.

Abbildung 4.11: Adaptive Verfeinerung eines Vierecksgitters mit verschobenen Punkten. Die grau gefärbten Bereiche markieren diejenigen Elemente, welche die markierten Schichten auf den feineren Gittern überdecken.

Eine Konsequenz aus der Stetigkeit von Φ ist Gegenstand des folgenden Lemmas.

Lemma 36 *Sei $K \in \tau_\ell^\infty$. Dann gilt für alle $x, y \in \overline{\text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1}(K)}$*

$$\text{dist}(x, y, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq 2.$$

Seien $K, \hat{K} \in \tau_\ell^\infty$ zwei Elemente, die sich berühren: $\overline{K} \cap \overline{\hat{K}} \neq \emptyset$. Für alle $K' \in \tau_{\ell+1}^\infty$, welche $\overline{K'} \cap \overline{K} \neq \emptyset$ erfüllen, existiert ein $x \in \overline{K'}$ mit der Eigenschaft

$$\text{dist}(x, \hat{K}, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq 2.$$

Weiter gilt für alle $x \in K$ die Inklusion

$$K \subset \text{dom } L_{\ell+1}^3(x).$$

Beweis. Wir folgern die Behauptung aus der entsprechenden Eigenschaft der Referenzgitter (4.2). Sei $x, y \in \overline{\text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1}(K)}$. Da Φ_ℓ Lipschitz-stetig ist, gilt

$$\Phi_{\ell+1}(x), \Phi_{\ell+1}(y) \in \overline{\text{dom } \Phi_{\ell+1}(\sigma_\ell^{\ell+1}(K))} = \overline{\text{dom } \Phi_\ell(K)}.$$

Wegen Annahme 25 existieren zwei Elemente $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2 \in \sigma_\ell^{\ell+1}(\Phi_\ell(K))$, die $\Phi_{\ell+1}(x)$ und $\Phi_{\ell+1}(y)$ elementweise verbinden. Da $\Phi_{\ell+1}^{-1}$ Lipschitz-stetig ist, verbinden $\Phi_{\ell+1}^{-1}(\tilde{K}_1)$ und $\Phi_{\ell+1}^{-1}(\tilde{K}_2)$ die Punkte x und y .

Wir kommen nun zur zweiten Aussage. Als Illustration dient Abbildung 4.12. Die Söhne von K auf dem Gitter $\tau_{\ell+1}^\infty$ wurden $\sigma_\ell^{\ell+1,\infty}(K) :=$

Abbildung 4.12: Es gilt $x \in \overline{K'} \cap \overline{K}$. Das Dreieck \hat{K} erfüllt daher $\text{dist}(x, \hat{K}, \tau_{\ell+1}^\infty) = 2$.

$\Phi_{\ell+1}^{-1}(\sigma_\ell^{\ell+1}(\Phi_\ell(K)))$ genannt. Aus $\overline{K'} \cap \overline{K} \neq \emptyset$ folgt wegen Bedingung 3c aus Annahme 27 auch $\overline{K'} \cap \overline{\text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1,\infty}(K)} \neq \emptyset$. Sei x ein Punkt aus dieser Schnittmenge. Aus Definition 7 folgt, daß die Elemente \overline{K} und $\overline{\hat{K}}$ mindestens eine gemeinsame Ecke $y \in \mathbf{V}(K) \cap \mathbf{V}(\hat{K})$ besitzen. Wir zeigen $y \in \overline{\text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1,\infty}(K)}$, woraus mit dem ersten Teil des Lemmas die Behauptung folgt. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von Φ_ℓ ist der Referenzpunkt $\tilde{y} = \Phi_\ell(y)$ in $\overline{\hat{K}} = \overline{\Phi_\ell(K)}$ enthalten. Daher ist \tilde{y} auch in $\overline{\text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1}(\hat{K})}$ enthalten. Da $\Phi_{\ell+1}^{-1}$ ebenfalls Lipschitz-stetig ist, ist y in $\overline{\text{dom } \Phi_{\ell+1}^{-1}(\sigma_\ell^{\ell+1}(\hat{K}))}$ enthalten, was zu zeigen war.

Wir kommen nun zur letzten Inklusion und orientieren uns wieder an Abbildung 4.12. Sei dazu $z \in K$ beliebig und $K' \in \tau_{\ell+1}^\infty$ ein Element, welches z enthält: $z \in \overline{K'}$. Wegen $\overline{K'} \cap \overline{K} \neq \emptyset$ läßt sich die zweite Aussage des Lemmas anwenden, woraus $K \in L_{\ell+1}^3(z)$ folgt. ■

Im nächsten Schritt werden nun Finite-Elemente-Räume auf diesen Gittern definiert.

4.2 Definition von CFE-Räumen

Da das Gitter $\tau_{\ell_{\max}}$ ein FE-Gitter darstellt, welches den Rand des Gebietes hinreichend genau auflöst, läßt sich darauf wie üblich ein Finite-Elemente-

Raum definieren. Um technische Schwierigkeiten zu vermeiden, nehmen wir an, daß $\text{dom } \tau_{\ell_{\max}} = \Omega$ gilt. Der Fall von gekrümmten Rändern kann wie in [7, Kapitel 8.2] behandelt werden.

Da wir angenommen hatten, daß $\Omega = \text{dom } \tau_{\ell_{\max}}$ gilt, ist $S_{\tau_{\ell_{\max}}}$ der übliche FE-Raum zum Gitter $\tau_{\ell_{\max}}$, der die Approximationseigenschaft (siehe Definition 21) besitzt. Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, schreiben wir im folgenden $S_{\ell_{\max}}$ statt $S_{\tau_{\ell_{\max}}}$ und entsprechend $\Theta_{\ell_{\max}}, \varphi_x^{\ell_{\max}}$.

Wir kommen nun zur Definition des Vergrößerungsalgorithmus. Die größeren Finite-Elemente-Räume sind Teilräume von $S_{\ell_{\max}}$ und mit Hilfe einer geeigneten Prolongation definiert. Wir setzen

$$\begin{aligned} P_{\ell+1,\ell} &: R^{\Theta_\ell} \rightarrow R^{\Theta_{\ell+1}}, \\ P_{\ell+1,\ell}[\beta_\ell](x) &: = I_\ell[\beta_\ell](x), \quad \forall x \in \Theta_{\ell+1}. \end{aligned}$$

Anschaulich bedeutet diese Definition das folgende. Einer Gitterfunktion β_ℓ auf der Skala ℓ wird mit Hilfe der Finite-Elemente-Interpolation I_ℓ zu einer kontinuierlichen Funktion. Da auf Grund der Gitterkonstruktion gilt, daß alle feineren Gitterpunkte im gröberen Gitter enthalten sind, läßt sich diese Interpolation in den feineren Gitterpunkten auswerten und definiert dadurch eine Prolongation vom gröberen Gitter auf das feinere. Die Komposition dieser Abbildungen wird mit $P_{j,\ell} = P_{j,j-1}P_{j-1,j-2} \cdots P_{\ell+1,\ell}$ bezeichnet. Auf diese Art lassen sich Gitterfunktionen auf groben Gittern *hochheben* zu Gitterfunktionen auf dem feinsten Gitter $\tau_{\ell_{\max}}$. Diese hochgehobenen Gitterfunktionen lassen sich wieder als kontinuierliche Funktionen interpretieren mittels der Finite-Elemente-Interpolation $I_{\ell_{\max}}$. Die Details finden sich in folgender Definition.

Definition 37 *Der „zusammengesetzte Finite-Elemente-Raum“ auf der feinsten Stufe ℓ_{\max} stimmt mit dem Standard-Finite-Elemente-Raum überein: $S_{\ell_{\max}}^{CFE} := S_{\ell_{\max}}$. Auf gröberen Stufen $\ell < \ell_{\max}$ definieren wir*

$$S_\ell^{CFE} := \left\{ v \in S_{\ell_{\max}}^{CFE} \mid \exists \beta_\ell \in R^{\Theta_\ell} : v = I_{\ell_{\max}} P_{\ell_{\max},\ell}[\beta_\ell] \right\}.$$

Wir wollen im folgenden verschiedene Aspekte dieser Definition illustrieren. Wir betrachten den Spezialfall, daß $\tau_{\ell_{\max}}^\infty = \tilde{\tau}_{\ell_{\max}}$ gilt, d.h. zur Randanpassung keine Gitterpunkte des Referenzgitters verschoben werden müssen, sondern es genügt, zur Definition von $\tau_{\ell_{\max}}$ geeignete Elemente wegzulassen. In diesem Fall läßt sich der Raum S_ℓ^{CFE} alternativ definieren durch

$$S_\ell^{CFE} := \{ v : \Omega \rightarrow R \mid \exists \tilde{v} \in S_\ell : v = \tilde{v} |_\Omega \}.$$

Das bedeutet, daß S_ℓ^{CFE} aus den üblichen Finite-Elemente-Funktionen zum Gitter τ_ℓ besteht, aber deren Träger auf das Gebiet Ω beschränkt wird. Im allgemeinen Fall $\tau_{\ell_{\max}}^\infty \neq \tilde{\tau}_{\ell_{\max}}$ gilt dies natürlich nicht mehr, jedoch sehen die CFE-Funktionen zum Gitter τ_ℓ „sehr ähnlich“ aus wie die auf das Gebiet Ω eingeschränkten Funktionen von S_ℓ . Dies wird durch Abbildung 4.13 illustriert. Die Basisfunktionen auf S_ℓ^{CFE} haben die (nahezu) gleiche Form

Abbildung 4.13: Basisfunktion, die zu einem groben Gitter gehört. Die Form gleicht der üblichen Hutfunktion auf dem Grobgitter, wobei die Löcher im Gebiet herausgeschnitten sind.

wie die Standard-Hutfunktionen, jedoch sind eventuelle Löcher im Gebiet herausgeschnitten.

Eine wesentliche Eigenschaft der zusammengesetzten Finite-Elemente-Räume ist, daß sie geschachtelt sind: $S_\ell^{CFE} \subset S_{\ell+1}^{CFE}$. Diese Eigenschaft ist sowohl für die Analyse wie auch für die Realisierung von Prolongation sehr vorteilhaft.

Im folgenden Abschnitt werden wir die Lokalität der Prolongation charakterisieren.

4.2.1 Lokalität der Prolongation und Gitterkompatibilität

Auf Grund der Linearität der Prolongation gilt die Darstellung

$$\beta_{j,\ell}(x) := P_{j,\ell}[\beta](x) := \sum_{y \in \Theta_\ell} c_y^{(j,\ell)}(x) \beta(y), \quad \forall \beta \in R^{\Theta_\ell}$$

mit Koeffizienten $c_y^{(j,\ell)}(x)$, die nicht von β abhängen. Wir wollen im folgenden die Koeffizienten charakterisieren, die von Null verschieden sind. Wir verwenden dazu die folgende Definition.

Definition 38 Seien $K \in \tau_\ell$ und $\sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K)$ die Söhne von K auf der feinsten Stufe. Wir definieren im folgenden diejenige Menge von Elementen auf der Stufe $j \geq \ell$, die zur Berechnung von $\beta_{\ell_{\max},\ell}$ in den Knoten $\Theta_\ell^{\ell_{\max}}(K)$ verwendet werden³. Dies geschieht durch die Rekursion: Für $j = \ell_{\max}$ setzen wir

$$I_{j,\ell}(K) = \sigma_\ell^j(K),$$

und für $j = \ell_{\max} - 1, \ell_{\max} - 2, \dots, \ell$:

$$I_{j,\ell}(K) = \left\{ \tilde{K} \in \tau_j \mid \tilde{K} \cap \text{dom } I_{j+1,\ell}(K) \neq \emptyset \right\}. \quad (4.6)$$

Die Menge der Knotenpunkte von $I_{j,\ell}(K)$ heißt $Y_{j,\ell}(K) := \Theta_j \cap \overline{\text{dom } I_{j,\ell}(K)}$.

Anschaulich besteht $I_{j-1,\ell}(K)$ aus derjenigen Teilmenge von τ_{j-1} , die $I_{j,\ell}(K)$ überdeckt und aus minimal vielen Elementen besteht. Insbesondere ist jeder Knotenpunkt aus der feineren Einflußmenge $Y_{j,\ell}$ in $\overline{\text{dom } I_{j-1,\ell}(K)}$ enthalten. Durch diese Definition ist desweiteren die folgende Überdeckungseigenschaft sichergestellt:

$$\text{dom } I_{j,\ell}(K) \subset \text{dom } I_{j-1,\ell}(K), \quad (4.7)$$

die später benötigt wird.

Die (iterierte) Prolongation besitzt damit die Darstellung

$$\beta_{\ell_{\max},\ell}(x) := P_{\ell_{\max},j}[\beta_{j,\ell}](x) = \sum_{y \in Y_{j,\ell}(K)} c_y^{(j,\ell)}(x) \beta_{j,\ell}(y), \quad \forall x \in \Theta_\ell^{\ell_{\max}}(K).$$

Bemerkung 39 Mit den Zahlen $\{b_j\}_{j=\ell}^{\ell_{\max}-1}$ aus Annahme 27 gilt

$$I_{j,\ell}(K) \subset L_j^{b_j}(K).$$

Offensichtlich gilt im Fall, daß keine Gitterpunkte beim Anpassen des Feingitters an das Gebiet verschoben wurden,

$$I_{\ell,\ell}(K) = K$$

für alle Elemente $K \in \tau_\ell$.

³Die Knoten der Söhne $\Theta_\ell^{\ell_{\max}}(K)$ wurden in (4.3) definiert.

Die Bedingungen aus Annahme 27 gewährleisten, daß die Gitter auf den unterschiedlichen Verfeinerungsstufen *nicht* beliebig zueinander ausgerichtet sind. Wir führen einen Parameter ein, der die lokale, geometrische Verschiebung der Gitter zueinander mißt. Dazu benötigen wir die Funktion Φ_ℓ aus Definition 26, welche die verschobenen Gitter- bzw. Knotenpunkten auf die Referenzgitter bzw. Knotenpunkte des Referenzgitters abbildet: $\Phi_\ell(\tau_\ell^\infty) = \tilde{\tau}_\ell$. Man kann ein Gitter $\tau_{\ell+1}^\infty$ jedoch auch mit dem Gitter τ_ℓ^∞ in Verbindung bringen. Zur Illustration dient Abbildung 4.14. Das Gitter

Abbildung 4.14: Referenztriangulierung $\tilde{\tau}_{\ell-1}$ mit gestrichelt gezeichneten, feineren Referenzgittern. Die angepaßten Gitter τ_ℓ^∞ und $\tau_{\ell+1}^\infty$ können mit Hilfe von $\Phi_\ell^{-1}\Phi_{\ell+1}$ miteinander in Beziehung gebracht werden. Dem Knotenpunkt $y \in \Theta_{\ell+1}^\infty$ entspricht der Punkt $\Phi_{\ell+1}(y)$ im Referenzgitter und $\Phi_\ell^{-1}\Phi_{\ell+1}(y)$ im Gitter τ_ℓ^∞ .

$\Phi_\ell^{-1}\Phi_{\ell+1}\tau_{\ell+1}^\infty$ sind die physikalisch geschachtelten Söhne von τ_ℓ^∞ . Ein Knotenpunkt $y \in \Theta_{\ell+1}^\infty$ des feineren Gitters wäre dann gemäß $\tilde{y} := \Phi_\ell^{-1}\Phi_{\ell+1}(y)$ mit einem Gitterpunkt aus dem so konstruierten Gitter verbunden. Die Komposition $\Phi_\ell^{-1}\Phi_{\ell+1}$ spielt für die folgende Definition eine Rolle.

Definition 40 Für $K \in \tau_\ell$ und $j \geq \ell$ bezeichnet $I_{j,\ell}(K)$ die Einflußmenge aus Definition 38. Sei zunächst $I_{j,\ell}(K) \neq \emptyset$. Eine lokales Maß für die Schrittweite ist durch

$$h_{j,\ell}(K) := \max_{K' \in I_{j,\ell}(K)} h_{K'} \quad (4.8)$$

definiert. Falls $I_{\ell_{\max},\ell}(K) = \emptyset$ gilt, setzen wir $h_{\ell_{\max},\ell}(K) = 0$, und falls $I_{j,\ell}(K) = \emptyset$ gilt, ist die lokale Schrittweite durch $h_{j,\ell}(K) := h_{j+1,\ell}(K)$ definiert.

Ein Maß für die lokale Verformung ist durch

$$\varepsilon_{j,\ell}(K) := \max_{y \in Y_{j,\ell}(K)} \max_{\substack{K' \in \tau_{j-1} \\ \Phi_{j-1}^{-1}\Phi_j(y) \cap \overline{K'} \neq \emptyset}} \frac{\|y - \Phi_{j-1}^{-1}\Phi_j(y)\|}{h_{K'}} \quad (4.9)$$

gegeben, falls $I_{j,\ell}(K) \neq \emptyset$ gilt. Sonst setzen wir $\varepsilon_{j,\ell}(K) := 0$.

Die Definition des Verzerrungsparameters ist in Abbildung 4.15 illustriert.

Abbildung 4.15: K bezeichnet das Grobgitterdreieck. Die Söhne von K sind gestrichelt dargestellt. Die Einflußmenge $I_{i+1,i}(K)$ besteht aus den drei groben Dreiecken. Der Verzerrungsparameter wäre in diesem Fall durch $\varepsilon_{i+1,i}(K) = d/h_{K'}$ gegeben.

Bemerkung 41 *Definition 40 berücksichtigt, daß die Teilgitter $I_{j,\ell}(K)$ für $j \gg \ell$ nicht quasi-uniform sein müssen, und die Schrittweite $h_{j-1,\ell}(K)$ wesentlich größer sein kann als die Schrittweiten $h_{K'}$ im Nenner von (4.9).*

Aus Annahme 27 lassen sich Abschätzungen für die lokalen Schrittweiten und Verzerrungsparameter ableiten. Dies ist Gegenstand des folgenden Lemmas.

Lemma 42 *Sei $\{\tau_\ell\}_{0 \leq \ell \leq \ell_{\max}}$ eine Folge von FE-Gittern, welche die Annahme 27 erfüllt.*

Dann existiert eine Konstante $C_u < \infty$, so daß für alle $\ell \geq 0$

$$\sup_{K \in \tau_\ell} \sup_{K' \in I_{\ell,\ell}(K)} \frac{h_{\ell,\ell}(K)}{h_{K'}} < C_u \quad (4.10)$$

gilt.

Die Gitter $\{\tau_\ell\}$ sind lokal geometrisch verfeinert. Das bedeutet, daß Konstanten $c_r, C_r < \infty$ existieren, so daß für alle $\ell \geq 0$ und alle $K \in \tau_\ell$

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq \ell} h_{j,\ell}(K) &\leq C_r h_{\ell,\ell}(K), \\ h_{K'}/c_r &\leq h_K \leq c_r h_{K'}, \quad \forall K' \in \tau_{\ell+1} : \overline{K'} \cap \overline{K} \neq \emptyset \end{aligned} \quad (4.11)$$

gilt.

Die Verzerrungsparameter sind summierbar. Es existiert eine Konstante C_v unabhängig von ℓ_{\max} , so daß für alle ℓ und alle $K \in \tau_\ell$ die folgende Abschätzung erfüllt ist

$$\sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} \varepsilon_{j,\ell}(K) \leq C_v. \quad (4.12)$$

Beweis. Wegen $I_{\ell,\ell}(K) \subset L_\ell^b(K)$ gilt für alle $K' \in I_{\ell,\ell}(K)$:

$$\text{dist}(K', K, \tau_\ell^\infty) \leq b.$$

Mit Hilfe von Lemma 14 folgt daraus (4.10).

Wir kommen nun zu (4.11). Es gilt $I_{j,\ell}(K) \subset L_j^b(\sigma_\ell^j(K))$. Daraus folgt wie zuvor, daß für alle $K' \in I_{j,\ell}(K)$ ein $K'' \in \sigma_\ell^j(K)$ existiert, für das $h_{K'} \leq C h_{K''}$ gilt. Sei $\widetilde{K}'' := \Phi(K'')$ und $\widetilde{K} := \Phi(K)$. Bedingung (4.5) impliziert dann

$$h_{K'} \leq CC_a h_{\widetilde{K}''} \leq CC_a \tilde{h}_j(\tilde{y})$$

mit einer beliebigen Ecke \tilde{y} von \widetilde{K}'' . Aus $\widetilde{K}'' \subset \widetilde{K}$ folgt $\tilde{y} \in \widetilde{K}$. Annahme (4.4) impliziert daher

$$\tilde{h}_j(\tilde{y}) \leq C_{ref} c_{ref}^{j-\ell} \tilde{h}_\ell(\tilde{y}) \leq CC_{ref} c_{ref}^{j-\ell} h_{\widetilde{K}} \leq \frac{CC_{ref}}{c_a} c_{ref}^{j-\ell} h_K.$$

Das ergibt

$$\sum_{j=\ell}^{\ell_{\max}} h_{j,\ell}(K) \leq \frac{CC_{ref}}{c_a} h_K \sum_{j=\ell}^{\ell_{\max}} c_{ref}^{j-\ell} \leq \frac{CC_{ref}}{c_a(1-c_{ref})} h_K \leq \frac{CC_{ref}}{c_a(1-c_{ref})} h_{\ell,\ell}(K).$$

Wir kommen nun zur zweiten Ungleichung aus (4.11). Sei $K' \in \tau_{\ell+1}$ und $F_{K'} := F_{\ell+1}^\ell(K')$ der Vater von K' . Ein weiteres Element $K \in \tau_\ell$ erfülle $\overline{K} \cap \overline{K'} \neq \emptyset$. Wegen Annahme 27, Bedingung 3c, gilt dann auch $\text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1}(K) \cap \overline{K'} \neq \emptyset$. Anders ausgedrückt heißt das $\text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1}(K) \cap \text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1}(F_{K'}) \neq \emptyset$.

Mit Hilfe von Lemma 29 folgt daraus auch $\overline{K} \cap \overline{F_{K'}} \neq \emptyset$, d.h. $K \in L_\ell^1(F_{K'})$. Lemma 14 impliziert daher

$$h_{K'} \leq C_a h_{\Phi(K')} \leq C_a h_{\Phi(F_{K'})} \leq C \frac{C_a}{c_a} h_{F_{K'}} \leq C^2 \frac{C_a}{c_a} h_K$$

und

$$h_{K'} \geq c_a h_{\Phi(K')} \geq \frac{c_a}{C_{ref}} h_{\Phi(F_{K'})} \geq \frac{c_a}{C_a C_{ref}} h_{F_{K'}} \geq \frac{c_a}{C C_a C_{ref}} h_K.$$

Es bleibt, die Summierbarkeit der Verzerrungsparameter zu beweisen. Sei $y \in \Theta_j$ und $\tilde{y} := \Phi_{j-1}^{-1} \Phi_j(y)$ der zugehörige Punkt im Gitter τ_{j-1}^∞ (vgl. Lemma 40). Annahme 27, Bedingung 1, ergibt

$$\|y - \tilde{y}\| \leq \|y - \Phi_j(y)\| + \|\Phi_j(y) - \Phi_{j-1}^{-1} \Phi_j(y)\| \leq C \tilde{h}_{\ell_{\max}}(y).$$

Sei nun $K' \in \tau_{j-1}$ ein Element, welches $\tilde{y} \in \overline{K'}$ erfüllt. Sei $\tilde{K} \in \tilde{\tau}_{j-1}$ das Element, welches $h_{\tilde{K}} = \tilde{h}_{j-1}(\tilde{y})$ und ebenfalls $\tilde{y} \in \overline{\tilde{K}}$ erfüllt. Dann gilt wegen Annahme 27 (Bedingung 5)

$$\overline{\Phi(K')} \cap \overline{\tilde{K}} \neq \emptyset$$

und wegen Lemma 14

$$h_{K'} \geq c_a h_{\Phi(K')} \geq \frac{c_a}{C} h_{\tilde{K}} = \frac{c_a}{C} \tilde{h}_{j-1}(\tilde{y}).$$

Daraus folgt, daß für alle $K' \in \tau_{j-1}$, welche $\tilde{y} \in \overline{K'}$ erfüllen, die Abschätzung

$$\frac{\|y - \tilde{y}\|}{h_{K'}} \leq \frac{C^2 \tilde{h}_{\ell_{\max}}(\tilde{y})}{c_a \tilde{h}_{j-1}(\tilde{y})} \leq \frac{C^2 C_{ref}}{c_a} c_{ref}^{\ell_{\max}+1-j}$$

gilt. Zusammen ergibt dies $\varepsilon_{j,\ell} \leq C c_{ref}^{\ell_{\max}+1-j}$. Summation liefert

$$\sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} \varepsilon_{j,\ell} \leq C \sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} c_{ref}^{\ell_{\max}+1-j} \leq \frac{C}{1-c_{ref}} =: C_v.$$

■

Bemerkung 43 *Da die Elemente regulär sind, sind die Teilgitter $I_{\ell,\ell}(K)$ quasi-uniform. Für die feineren Teilgittern $I_{j,\ell}(K)$ wird diese Eigenschaft jedoch nicht gefordert.*

Wir werden in Kapitel 5.2 beweisen, daß die CFE-Räume eine den Abschätzungen (3.9)-(3.12) verwandte Approximationseigenschaft besitzt. Lediglich die lokale Abschätzung muß der vorgestellten Lokalisierung angepaßt werden. Statt auf einem Element K wird der Fehler auf dem $\sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K)$ betrachtet. Auf der rechten Seite wird die Einflußmenge $I_{\ell,\ell}(K)$ an Stelle des Elements K auftreten. Genauer werden wir zeigen, daß für alle $u \in H^{p+1}(\Omega)$ ein $u_\tau \in S_\tau^{CFE}$ existiert, das

$$|u - u_\tau|_{m, \sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K)} \leq Ch_K^{p+1-m} \|u\|_{p+1, I_{\ell,\ell}(K)}, \quad m = 0, 1,$$

erfüllt. Mit Hilfe der Inklusion $I_{\ell,\ell}(K) \subset L_\ell^b(K)$ treten lediglich $b = O(1)$ Elementschichten um K auf der rechten Seite der Abschätzung auf.

Um daraus eine globale Abschätzung zu beweisen, müssen wir analog wie in Lemma 22 die Größe $I_{j,\ell}(K)$ und die Anzahl der Elemente $\#I_{j,\ell}(K)$ abschätzen. In diesem Zusammenhang werden im folgenden einige geometrische Eigenschaften für CFE-Gitter hergeleitet.

4.2.2 Geometrische Eigenschaften von CFE-Gittern

Im folgenden wird generell angenommen, daß $\{\tau_\ell\}_{\ell \geq 0}$ eine Folge von CFE-Gittern darstellt. Wir benötigen zunächst einige Bezeichnungen. Wir orientieren uns an Abbildung 4.16.

Abbildung 4.16: Feingitterdreieck K' mit Grobgitterumgebung U_{int} . Für den Knotenpunkt $y \in \Theta_{K'}$ gilt $\kappa_j^{j-1}(y) = K$.

Definition 44 Sei $K \in \tau_\ell$ und $K' \in I_{j,\ell}(K)$. Eine Teilmenge von $I_{j-1,\ell}(K)$, die $\Theta_{K'}$ überdeckt, und aus minimal vielen Elementen besteht, wird mit $U_{int}(K')$ bezeichnet

$$U_{int}(K') := \operatorname{argmin} \# \left\{ \tau' \subset I_{j-1,\ell}(K) \mid \Theta_{K'} \subset \overline{\operatorname{dom} \tau'} \right\}.$$

Einige Implikationen finden sich in folgendem Lemma.

Lemma 45 Sei $\{\tau_\ell\}_{0 \leq \ell \leq \ell_{\max}}$ eine Folge von CFE-Gittern. Wir setzen $C_A := C_A(b)$ und $C_\# := C_\#(\hat{b})$ mit den Funktionen $C_A(\cdot)$, $C_\#(\cdot)$ aus Lemma 15 und der Konstanten b aus Annahme 27. Dann gilt für alle $0 \leq \ell \leq j \leq \ell_{\max}$ und $K \in \tau_\ell$ die Abschätzung

$$|\text{dom } I_{j,\ell}(K)| \leq C_A |K|,$$

wobei für eine meßbare Menge $A \in \mathbb{R}^d$ wieder die Abkürzung $|A| := \int_A 1 d\mu$ verwendet wird.

Für alle $j \geq \ell$ und alle $K' \in \tau_j$ ist die Anzahl der Elemente $K \in \tau_\ell$, in deren Einflußmenge das Element K' enthalten ist, durch $C_\#$ beschränkt:

$$\#\{K \in \tau_\ell \mid K' \in I_{j,\ell}(K)\} \leq C_\#.$$

Diese Situation ist in Abbildung 4.17 illustriert.

Abbildung 4.17: Sei $\ell_{\max} = 2$. Die Dreiecke K_1, K_2 gehören dann zum Gitter τ_0 , die Dreiecke K'_1 und K'_2 zu den Mengen $I_{1,0}(K_{1,2})$ und K''_1, K''_2 zu den Mengen $I_{2,0}(K_{1,2})$. Zur Auswertung der Prolongation auf K'_1 wird K'_2 benötigt. Daher gilt $K'_2 \in I_{1,0}(K_1)$ und auf der anderen Seite $K'_1 \in I_{1,0}(K_2)$. Daraus folgt für diese Situation $C_\# = 2$.

Sei $U_{\text{int}}(K')$ wie oben definiert. Dann existiert eine Konstante $C'_\#$, die unabhängig von ℓ, j, ℓ_{\max} und K ist, mit der Eigenschaft, daß für alle $\hat{K} \in I_{j-1,\ell}(K)$ die Abschätzung

$$\#\{K' \in I_{j,\ell}(K) \mid \hat{K} \in U_{\text{int}}(K')\} \leq C'_\#$$

gilt (vgl. Abbildung 4.18)

Abbildung 4.18: Die gestrichelten Linien charakterisieren die Feingitterdreiecke. Der gemeinsame Knotenpunkt y ist im Grobgitterelement K enthalten. Daher gilt für alle dargestellten Feingitterelemente $K \in U_{int}(K')$ und daher $C'_{\#} = 6$.

Beweis. Die Abschätzung

$$\text{dom } I_{j,\ell}(K) \subset \text{dom } I_{\ell,\ell}(K)$$

folgt direkt aus der Definition der Einflußmengen und $\text{dom } I_{\ell,\ell}(K) \subset \text{dom } L_{\ell}^b(K)$ aus Annahme 27. Daher sind die ersten beiden Aussagen direkte Folgerungen aus Lemma 15.

Um die letzte Abschätzung zu beweisen, gehen wir ganz analog vor. Die Bedingung $\hat{K} \in U_{int}(K')$ impliziert, daß $\overline{\hat{K}} \cap \overline{K'} \neq \emptyset$. In Lemma 42 wurde daraus

$$h_{K'}/c_r \leq h_{\hat{K}} \leq c_r h_{K'}$$

gefolgert. Da K' regulär ist, gilt daher $|K'| \geq ch_{\hat{K}}^d$. Da \hat{K} und K' sich berühren und $h_{K'} \leq c_r h_{\hat{K}}$ gilt, ist K' in einer Kugel um \hat{K} mit Radius $(1 + c_r)h_{\hat{K}}$ enthalten. Daher ist die Anzahl der Elemente $K' \in I_{j,\ell}(K)$, die $\hat{K} \in U_{int}(K')$ erfüllen, durch eine Konstante $C'_{\#}$ beschränkt, die unabhängig von j, ℓ, ℓ_{\max}, K und \hat{K} ist. ■

4.3 Diskretisierung mit zusammengesetzten finiten Elementen

In diesem Abschnitt soll erklärt werden, wie mit Hilfe von CFE-Räumen partielle Differentialgleichungen diskretisiert werden können.

Um die folgenden Überlegungen zu illustrieren, betrachten wir das folgende Modellproblem. Sei $\Omega \subset R^d$ ein Gebiet. Wir setzen $V = H^1(\Omega)$

und betrachten das Variationsproblem, für gegebenes $F \in V'$ eine Funktion $u \in V$ zu suchen, die

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V \quad (4.13)$$

erfüllt. Wir nehmen an, daß die Bilinearform a die Voraussetzungen aus Abschnitt 3.2 erfüllt. Auf dem feinsten Gitter stimmt der CFE-Raum mit dem Standard-FE-Raum überein. Wir können also das Gleichungssystem auf der feinsten Stufe ℓ_{\max} gemäß (3.7) und (3.8) aufstellen. Der Operator wird mit $\mathbf{A}_{\ell_{\max}} \in R^{\Theta_{\ell_{\max}} \times \Theta_{\ell_{\max}}}$ bezeichnet und der Vektor der rechten Seite mit $\mathbf{F}_{\ell_{\max}} \in R^{\Theta_{\ell_{\max}}}$. Dann ist die Lösung $\mathbf{u}_{\ell_{\max}} \in R^{\Theta_{\ell_{\max}}}$ von

$$\mathbf{A}_{\ell_{\max}} \mathbf{u}_{\ell_{\max}} = \mathbf{F}_{\ell_{\max}} \quad (4.14)$$

gekoppelt mit der Galerkin-Lösung durch

$$u_{\ell_{\max}}(x) = \sum_{y \in \Theta_{\ell_{\max}}} \mathbf{u}_{\ell_{\max}}(y) \varphi_y^{\ell_{\max}}(x).$$

Die Frage ist nun, wie man analoge Gleichungssysteme zu den vergrößerten CFE-Räumen definiert. Eine naheliegende Wahl der Basis von S_{ℓ}^{CFE} ist durch die folgende Vorschrift gegeben. Sei $\mathbf{e}_x^{\ell} \in R^{\Theta_{\ell}}$ der Einheitsvektor zum Knoten x , d.h.

$$\mathbf{e}_x^{\ell}(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die CFE-Basisfunktion zum Knotenpunkt $x \in \Theta_{\ell}$ ist gegeben durch

$$b_x^{\ell}(y) = I_{\ell_{\max}} P_{\ell_{\max}, \ell} [\mathbf{e}_x^{\ell}](y).$$

Die Matrix $\mathbf{A}_{\ell} \in R^{\Theta_{\ell} \times \Theta_{\ell}}$ sei durch

$$\mathbf{A}_{\ell}(x, y) = a(b_y^{\ell}, b_x^{\ell}), \quad \forall x, y \in \Theta_{\ell}$$

und der Vektor der rechten Seite durch

$$\mathbf{F}_{\ell}(x) = F(b_x^{\ell}) \quad \forall x \in \Theta_{\ell}$$

definiert. Die Lösung von

$$\mathbf{A}_{\ell} \mathbf{u}_{\ell} = \mathbf{F}_{\ell}$$

ist dann gekoppelt mit der Finite-Elemente-Lösung in S_ℓ^{CFE} durch

$$u_\ell(x) = \sum_{y \in \Theta_\ell} \mathbf{u}_\ell(y) b_y^\ell(x).$$

Mit Hilfe des Galerkin-Produkts läßt sich die Matrix \mathbf{A}_ℓ und der Vektor \mathbf{F}_ℓ rekursiv aus der Diskretisierung auf dem feineren Gitter $\tau_{\ell+1}$ gewinnen. Es gilt

$$b_x^\ell = I_{\ell_{\max}} P_{\ell_{\max}, \ell+1} \left[P_{\ell+1, \ell} \mathbf{e}_x^\ell \right].$$

Sei $\mathbf{e}_x^{\ell+1, \ell} := P_{\ell+1, \ell} \left[\mathbf{e}_x^\ell \right]$ die prolongierte Einheitsfunktion. Da alle auftretenden Operatoren linear sind, gilt

$$b_x^\ell = \sum_{z \in \Theta_{\ell+1}} \mathbf{e}_x^{\ell+1, \ell}(z) b_z^{\ell+1}.$$

Da die Basisfunktionen $b_z^{\ell+1}$ lokalen Träger besitzen, besteht obige Summation natürlich nur aus sehr wenigen Termen. Dies ist an dieser Stelle jedoch nur von untergeordneter Bedeutung und wird bei der Komplexitätsanalyse genauer diskutiert. Die Matrix \mathbf{A}_ℓ besitzt dann die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\ell(x, y) &= a(b_y^\ell, b_x^\ell) = \sum_{q, r \in \Theta_{\ell+1}} \mathbf{e}_x^{\ell+1, \ell}(q) \mathbf{e}_y^{\ell+1, \ell}(r) a(b_r^{\ell+1}, b_q^{\ell+1}) \\ &= \sum_{q, r \in \Theta_{\ell+1}} \mathbf{e}_x^{\ell+1, \ell}(q) \mathbf{e}_y^{\ell+1, \ell}(r) \mathbf{A}_{\ell+1}(q, r) \end{aligned}$$

oder kompakt geschrieben

$$\mathbf{A}_\ell = R_{\ell, \ell+1} \mathbf{A}_{\ell+1} P_{\ell+1, \ell}. \quad (4.15)$$

$R_{\ell, \ell+1}$ bezeichnet den zu $P_{\ell+1, \ell}$ adjungierten Operator bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts:

$$\langle P_{\ell+1, \ell} \beta, \omega \rangle_{\ell+1} = \langle R_{\ell, \ell+1} \beta, \omega \rangle_\ell, \quad \forall \beta \in R^{\Theta_{\ell+1}}, \omega \in R^{\Theta_\ell}$$

mit

$$\langle \omega, \omega' \rangle_\ell := \sum_{x \in \Theta_\ell} \omega(x) \omega'(x).$$

Diese Matrixdarstellung (4.15) wird als Galerkinprodukt bezeichnet (vgl. [18, Kapitel 3.7]). Analog läßt sich für den Vektor der rechten Seite die Darstellung

$$\mathbf{F}_\ell = P_{\ell+1, \ell}^T \mathbf{F}_{\ell+1}$$

herleiten. Damit ist nun erklärt, wie das Variationsproblem (4.13) mit zusammengesetzten finiten Elementen diskretisiert wird, wie die linearen Gleichungssysteme aufgestellt werden und wie die berechnete Gitterfunktion als CFE-Funktion interpretiert werden muß. Wir haben hier bereits erwähnt, daß die Transformationsmatrizen $P_{\ell+1,\ell}$ schwach besetzt sind. Die algorithmischen Aspekte, lokale Varianten und die zugehörige Komplexitätsanalyse werden in Kapitel 6 erklärt.

Wie erwähnt eignet sich obige Konstruktion zur Diskretisierung von Problemen, für die im Kontinuierlichen der Raum $H^1(\Omega)$ als Lösungsraum zugrunde gelegt wird. Falls wesentliche Randbedingungen gefordert werden und der Raum $H^1(\Omega)$ restringiert wird, muß die obige Definition abgeändert werden, damit die CFE-Räume ebenfalls die wesentlichen Randbedingungen erfüllen. Diese Modifikation ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

4.4 CFE-Räume für Probleme mit wesentlichen Randbedingungen

Wir betrachten hier zunächst den einfachsten Fall, daß auf dem ganzen Rand von Ω homogene Dirichlet-Randbedingungen gefordert werden, und daher der Raum $V = H_0^1(\Omega)$ zugrunde gelegt wird. Ziel dieses Abschnitts ist es, *konforme* Unterräume von V zu definieren, welche die Approximationseigenschaft besitzen. Alternativ könnte man die Randbedingungen auch schwach in die Variationsformulierung integrieren und das Problem auf ganz $H^1(\Omega)$ formulieren (siehe [22]). Die Analyse des letzteren Zugangs macht aber vor allem bei Problemen, bei denen die Randlänge $\int_{\Gamma} 1 d\Gamma$ wesentlich größer ist als das Gebietsvolumen $\int_{\Omega} 1 d\mu$ erhebliche Schwierigkeiten, so daß sich in diesem Fall die konforme Diskretisierung als robuster bezüglich komplizierter Ränder erweist. Die Idee ist wieder ähnlich wie bei natürlichen Randbedingungen. Falls die geometrischen Elemente einen hinreichend großen Abstand zum Rand des Gebiets haben, wird der CFE-Raum mit dem üblichen FE-Raum übereinstimmen und nur in Randnähe mit Hilfe einer modifizierten Prolongation erklärt. Für natürliche Randbedingungen haben wir gefordert, daß die FE-Gitter das Gebiet Ω überdecken. Im Falle von wesentlichen Randbedingungen wird man intuitiv eher erwarten, daß keine Freiheitsgrade verwendet werden, die zu Knotenpunkten *außerhalb* des Gebiets gehören. Das könnte vermieden werden, indem gefordert wird, daß alle Gitter τ_{ℓ} *innerhalb*

des Gebiets liegen, und sich sukzessive dem Rand anpassen, beispielsweise indem aus den Gittern für Neumann-Randbedingungen, diejenigen Elemente weggelassen werden, die nichtleeren Schnitt mit dem Gebietsrand haben. Die feineren Gitter überdecken dann im allgemeinen ein größeres Gebiet als gröbere (siehe Abbildung 4.19). Für die Prolongation wird daher ein Fort-

Abbildung 4.19: Grob- und Feingitter (gestrichelt gezeichnet) für Dirichlet-Randbedingungen. Die Gitter liegen *innerhalb* des Gebiets und passen sich schichtweise dem Rand des Gebiets an.

setzungsoperator konstruiert, der Funktionen auf dem kleineren, groben Gittergebiet ($\text{dom } \tau_\ell$) auf das nichtüberdeckte Feingittergebiet ($\text{dom } \tau_{\ell+1}$) durch Extrapolation fortsetzt. Nun ist jedoch klar, daß die Entfernung, über die mit hinreichender Genauigkeit extrapoliert werden kann, maximal Größenordnung h_ℓ besitzt. In Abbildung 4.20 ist eine mögliche Situation gezeigt, bei der diese Bedingung verletzt ist. Das feinere Gitter $\tau_{\ell+1}$ enthält Dreiecke, die einen Abstand vom nächstgelegenen Grobgitterdreieck besitzen, der wesentlich größer als $O(h_\ell)$ ist. Daher ist Extrapolation ungeeignet. Eine Alternative wäre, in derartigen Fällen, d.h. falls ein Feingitterelement einen hinreichend großen Abstand zum nächstgelegenen Grobgitterelement besitzt, die prolongierte Funktion Null zu setzen. Das würde zu Genauigkeitsverlusten führen, falls beispielsweise quadratische Elemente auf Dreiecken verwendet werden sollen. In diesem Fall erwartet man lokal auf einem Dreieck $K \in \tau_{\ell+1}$ einen Approximationsfehler von

$$|u - u_{\ell+1}|_{1,K} \leq Ch_K^2 |u|_{3,K}. \quad (4.16)$$

Abbildung 4.20: Grobes Gitter, welches ganz im Gebiet liegt und verfeinertes Gitter. Der Abstand des Dreiecks K_2 vom nächstgelegenen Grobgitterelement ist wesentlich größer als $O(h_{K_2})$. Der Abstand von K_1 zum Grobgitterdreieck K ist dagegen Null. In der Abbildung ist der Koordinatenursprung mit P bezeichnet.

Für das Gebiet Ω aus der Abbildung 4.20 existiert eine Funktion $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, die auf dem eingezeichneten Dreieck K_2 durch

$$u|_{K_2} = x_2(x_2 - \varepsilon)$$

gegeben ist. Man rechnet leicht nach, daß die Nullfunktion in einem Dreieck mit Durchmesser $h_\ell < \varepsilon$ **nicht** die Abschätzung 4.16 erfüllt, sondern lediglich lineare Konvergenz liefert. Diese Eigenschaft wird im Kapitel 5.2.2 auch für allgemeinere Fälle gezeigt werden. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß für lineare Elemente auf Freiheitsgrade, die zu Knotenpunkten außerhalb des Gebiets gehören, verzichtet werden kann, dies jedoch für Approximationen höherer Ordnung nicht mehr möglich ist.

Es stellt sich nun die Frage, warum auf Grund der bisherigen Überlegungen nicht immer FE-Gitter verwendet werden sollen, die das Gebiet überdecken. Das hängt mit der numerischen Stabilität der linearen Gleichungssysteme zusammen, die mit der eingeführten Basis gekoppelt ist. Das Problem wäre, daß es dann passieren kann, daß durch den noch zu definierenden, iterierten Prolongationsprozeß die Einheitsgitterfunktion \mathbf{e}_x^ℓ , die zu einem Knoten außerhalb des Gebiets gehört, nach dem Prolongieren die Nullfunktion ergibt oder eine Funktion mit extrem kleinen Funktionswerten. Diese Tatsache wird die Genauigkeit der Diskretisierung nicht beeinträchtigen, jedoch die numerische Handhabbarkeit des entstehenden linearen Gleichungssystems negativ beeinflussen. Ein weiterer Grund, nach Möglichkeit

auf Freiheitsgrade außerhalb des Gebiets zu verzichten, ist der folgende. Für die in der Kapitel 2 beschriebenen Anwendungen ist eine Diskretisierung mit linearen Elementen speziell in der Nähe der komplizierten Mikrostrukturen am sinnvollsten hinsichtlich der Approximationsgenauigkeit (als Funktion der Zahl der Freiheitsgrade). Auf Grund der fehlenden Regularität an derartigen Stellen lassen sich mit Approximationen höherer Ordnung keine Genauigkeitsverbesserung erzielen, sondern lediglich durch Verfeinerung der geometrischen Elemente und Verwendung linearer Ansatzräume. Aus diesen Überlegungen scheint es uns angemessen, den Fall von linearen Elementen speziell zu berücksichtigen, und die Verwendung von Gitterfolgen, die alle im Gebiet enthalten sind, in Betracht zu ziehen.

Für quadratische und höhere Elemente können wir die gleichen CFE-Gitter, wie sie für natürliche Randbedingungen definiert waren, verwenden. Für lineare Elemente definieren wir Teilgitter, die einen vorgeschriebenen Abstand zum Rand besitzen.

Diese Überlegungen sollen nun mathematisch präzise formuliert werden. Finite-Elemente-Gitter für Dirichlet-Randbedingungen sind Gegenstand der folgenden Definition. Zunächst werden wir CFE-Gitter definieren für Elemente beliebiger Ordnung. Diese werden auch Freiheitsgrade außerhalb des Gebiets enthalten. Für lineare finite Elemente wird danach die mögliche Modifikation angegeben, um Freiheitsgrade außerhalb des Gebiets weitestgehend zu vermeiden. Generell werden im folgenden die Gitter für Neumann-Randbedingungen, welche das Gebiet überdecken und die Überdeckungseigenschaft (4.7) erfüllen, mit τ_ℓ^{NM} bezeichnet und die daraus entstandenen Dirichlet-Gitter mit τ_ℓ .

Definition 46 *Die Gitter im Fall von Dirichlet-Randbedingungen sind dieselben wie für Neumann-Randbedingungen: $\tau_\ell = \tau_\ell^{NM}$. Im einem randnahen Bereich muß die Prolongation modifiziert werden. Sei dazu $b_\Gamma = 5$. Die Elementschichten um Γ werden wieder mit $L_\ell^{b_\Gamma}(\Gamma)$ bezeichnet. Dann definieren wir die inneren und äußeren Gitter durch*

$$\tau_\ell^\Gamma := \tau_\ell \cap L_\ell^{b_\Gamma}(\Gamma), \quad \overset{\circ}{\tau}_\ell := \tau_\ell \setminus \tau_\ell^\Gamma. \quad (4.17)$$

Das Überdeckungsgebiet von τ_ℓ wird mit $\Omega_\ell := \text{dom } \tau_\ell$ bezeichnet und $\Gamma_\ell := \partial\Omega_\ell$ gesetzt. Die Gebiete, die von den Teilgittern überdeckt werden, nennen wir Ω_ℓ^Γ bzw. $\overset{\circ}{\Omega}_\ell$.

Diese Definition ist in Abbildung 4.21 illustriert.

Abbildung 4.21: Gitter für Dirichlet-Randbedingungen. Die graugefärbten Dreiecke gehören zu τ^Γ , die anderen zu $\overset{\circ}{\tau}$. Der Übersichtlichkeit halber wurde hier $b_\Gamma = 2$ statt $b_\Gamma = 5$ gesetzt.

Wir haben die randnahen Gitter mit Hilfe von randnahen Schichten definiert. Die Entfernung der Elemente $K \in \tau_\ell^\Gamma$ vom Rand wird in folgendem Lemma abgeschätzt.

Lemma 47 *Es existiert eine Konstante c_d , die nur von b_Γ und der Konstanten C_{reg} aus Definition 7 abhängt, so daß für alle $K \in \tau_\ell^\Gamma$*

$$\text{dist}(K, \Gamma) \leq c_d h_K$$

gilt.

Beweis. Es gilt $\text{dist}(K, \Gamma, \tau_\ell^\infty) \leq b_\Gamma$, und daher folgt die Behauptung aus Lemma 14. ■

Wir kommen nun zu der Modifikation für lineare Elemente. Dazu sind einige Vorbemerkungen erforderlich. Die Idee bei linearen Elementen ist, daß die CFE-Gitter nur aus Elementen $K \in \tau_\ell^{NM}$ bestehen, die einen vorgeschriebenen Abstand zum Rand besitzen: $\text{dist}(K, \Gamma) \geq c_d h_K$. Das kann jedoch dazu führen, daß τ_ℓ Elemente enthält, die weiter als $O(h_K)$ vom nächstgelegenen Grobgitterelement entfernt sind. Zur Prolongation kann daher die Funktion auf dem nächstgelegenen Grobgitterelement nicht mehr herangezogen werden. Die Idee ist nun, auf derartigen Elementen K mit Null zu prolongieren. Im Hinblick auf die Approximationseigenschaft muß daher gewährleistet sein, daß die Nullfunktion auf K die lokale Approximationseigenschaft für Funktionen aus $H_0^1(\Omega) \cap H^{p+1}(\Omega)$ besitzt. Dafür sollen nun geometrische Bedingungen hergeleitet werden. Zunächst definieren wir ein Maß dafür, wie gut auf einem geometrischen Element approximiert werden kann.

Definition 48 Sei $K \in \tau_\ell$. Falls für alle $y \in \Theta_K$ ein Dreieck (Tetraeder in 3d) T_y existiert, das

1. $\text{dom } T_y \subset \text{dom } L_\ell^{n_T}(y)$ mit $n_T = 5$,
2. $h_{T_y}/i_{T_y} + h_{T_y}^{\max}/h_{T_y}^{\min} \leq C_{\text{reg}}$,⁴
3. $y \in \overline{T_y}$,
4. alle Ecken von T_y liegen auf Γ ,

impliziert, setzen wir $\text{Null}(K) := \text{zulässig}$, sonst definieren wir $\text{Null}(K) := \text{unzulässig}$.

Diese Definition ist in Abbildung 4.22 illustriert. Das folgende Lemma besagt, daß $\text{Null}(K) = \text{zulässig}$ impliziert, daß die Nullfunktion die lokale Approximationseigenschaft besitzt.

Lemma 49 Sei $K \in \tau_\ell^{NM}$ mit $\text{Null}(K) = \text{zulässig}$. Dann gilt für jede Funktion $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ die Abschätzung

$$|u|_{m,K} \leq Ch_K^{2-m} |u|_{2,\mathcal{U}(K)},$$

wobei die Fortsetzung von u auf R^d wiederum mit u bezeichnet wird und $\mathcal{U}(K) := \bigcup_{y \in \Theta_K} T_y$ gesetzt wurde.

Bemerkung 50 Die obigen Voraussetzungen an T_y werden häufig „minimale Winkelbedingung“ genannt. Es ist bekannt, daß diese Bedingung zu einer maximalen Winkelbedingung abgeschwächt werden kann (vgl. [42], [2], [25], [31] oder [1]). Um technische Schwierigkeiten zu vermeiden, verzichten wir hier auf dieses Detail.

Der Beweis dieses Lemmas wird im Abschnitt 5.2.2, in dem die Approximationseigenschaft für zusammengesetzte finite Elemente bewiesen wird, nachgeholt. Für lineare Elemente enthalten die Gitter also Elemente, die einen vorgeschriebenen Abstand zum Rand besitzen, und einige weitere Elemente, die sicherstellen, daß kein Element existiert, welches zu weit vom größeren Gitter entfernt ist und $\text{Null}(K) = \text{unzulässig}$ erfüllt.

⁴Hier bezeichnet i_{T_y} wieder den Inkreisradius und $h_{T_y}^{\max}/h_{T_y}^{\min}$ das Verhältnis von längster zu kürzester Seite.

Abbildung 4.22: Oberes Bild: Dreieck K mit Ecken x, y, z . Diese sind in T_1 und T_2 enthalten. T_1, T_2 sind von Größenordnung h_K , nicht-degeneriert und alle Ecken liegen auf $\Gamma = \partial\Omega$. Unteres Bild: Ausschnitt aus graduiertem Gitter. Das Dreieck T enthält alle Ecken von K und hat Größenordnung $\text{diam } T \approx 6h_K$. Jedoch berührt es mehr als fünf Elementschichten um K . Daher würde $\text{Null}(K) = \text{unzulässig}$ gelten.

Definition 51 Sei $\{\tau_\ell^{NM}\}_{0 \leq \ell \leq \ell_{\max}}$ eine Folge von CFE-Gittern, welche die Überdeckungseigenschaft (4.1) für Neumann-Randbedingungen erfüllt. Die Gitter für Diskretisierungen mit linearen Elementen sind mit Hilfe des folgenden Algorithmus definiert. Sei $b_\Gamma = 5$ und $n_d = 1$.

procedure generiere_Dirichlet_Gitter (*in:* $\{\tau_\ell^{NM}\}_{\ell=0}^{\ell_{\max}}$, *out:* $\{\tau_\ell\}_{\ell=0}^{\ell_{\max}}$);

begin

for $\ell := 0$ **to** $\ell_{\max} - 1$ **do**

$$\tau_\ell := \tau_\ell^{NM} \setminus L_\ell^2(\Gamma); \quad (4.18)$$

$\tau_{\ell_{\max}} := \tau_{\ell_{\max}}^{NM};$

for $\ell := \ell_{\max} - 1$ **downto** 0 **do**

for all $K \in \tau_{\ell+1}$ **do**
if $\text{Null}(K) = \text{unzulässig}$ **and** $\text{dist}(K, \Omega_\ell, \tau_{\ell+1}^\infty) > n_d$
then⁵

$$\tau_\ell := \tau_\ell \cup U_{\text{int}}(K);$$

end;

Die „äußeren“ und „inneren“ Gitter $\tau_{\ell+1}^\Gamma, \overset{\circ}{\tau}_{\ell+1} \subset \tau_{\ell+1}$ sind wieder durch

$$\begin{aligned} \tau_\ell^\Gamma &:= \tau_\ell \cap L_\ell^{\text{b}\Gamma}(\Gamma) \\ \overset{\circ}{\tau}_\ell &:= \tau_\ell \setminus \tau_\ell^\Gamma. \end{aligned} \quad (4.19)$$

gegeben.

Bemerkung 52 In obiger Definition wurden die randnahen Elemente, auf denen die Nullfunktion keine gute Approximation darstellt, besonders berücksichtigt. Das ist notwendig, um lokale Fehlerabschätzungen mit der lokalen Elementgröße herzuleiten. Falls das Gitter quasi-uniform ist oder man nur an Fehlerabschätzungen mit der maximalen Schrittweite h_ℓ interessiert ist, können die Gitter für Dirichlet-Randbedingungen vereinfacht durch $\tau_\ell := \tau_\ell^{NM} \setminus L_\ell^2(\Gamma)$ definiert werden.

Für lineare Elemente folgt natürlich nicht mehr $\text{dom} \tau_{\ell+1} \subset \text{dom} \tau_\ell$. In diesem Fall liegen die Gitter *innerhalb* des Gebiets. In Randnähe kommen sukzessive randnahe Gitterschichten auf den feineren Stufen hinzu. Wir betonen, daß auf für die reduzierten Gitter für Dirichlet-Randbedingungen, die Definition der Schichten $L_\ell^i(\omega)$ über das Gitter τ_ℓ^∞ definiert ist.

Im folgenden setzen wir voraus, daß $\{\tau_\ell\}_{0 \leq \ell \leq \ell_{\max}}$ eine Familie regulärer Finite-Elemente-Gitter ist, welche die Voraussetzungen aus obiger Definition erfüllt. Die Menge der Knotenpunkte für das Dirichlet-Problem besteht für $0 \leq \ell < \ell_{\max}$ aus allen Knotenpunkten des Gitters τ_ℓ und für $\ell = \ell_{\max}$ aus allen Knotenpunkten, die nicht auf Γ liegen. Wir erklären nun einen Prolongationsoperator $P_{\ell+1, \ell} : R^{\Theta_\ell} \rightarrow R^{\Theta_{\ell+1}}$. Falls geometrische finite Elemente „hinreichend weit“ vom Rand entfernt sind, d.h. $K \in \overset{\circ}{\tau}_{\ell+1}$ gilt, wird wieder die kanonische Finite-Elemente-Interpolierende verwendet. Das ist gerechtfertigt, da in folgendem Lemma gezeigt wird, daß die inneren, feinen Gitter $\overset{\circ}{\Omega}_{\ell+1}$ vom Grobgitter Ω_ℓ überdeckt werden:

$$\overset{\circ}{\Omega}_{\ell+1} \subset \Omega_\ell. \quad (4.20)$$

⁵Die Menge U_{int} wurde in Definition 44 eingeführt als minimale Teilmenge des Grobgitters, welche K überdeckt.

Lemma 53 *Seien die inneren Gitter $\overset{\circ}{\tau}_{\ell+1}$ und inneren Gebiete $\overset{\circ}{\Omega}_{\ell+1}$ in Definition 46 bzw. 51 definiert. Dann gilt $\overset{\circ}{\Omega}_{\ell+1} \subset \Omega_\ell$.*

Beweis. Im Fall von Definition 46 folgt die Aussage direkt aus der Überdeckungseigenschaft der Gitter für Neumann-Randbedingungen:

$$\overset{\circ}{\Omega}_{\ell+1} \subset \Omega_{\ell+1} \subset \Omega_\ell.$$

Wir betrachten nun die Variante aus Definition 51 und orientieren uns an Abbildung 4.23. Sei $K' \in \overset{\circ}{\tau}_{\ell+1}$ und $K \in \tau_\ell^{NM}$ ein beliebiges Grobgitterelement

Abbildung 4.23: Das Dreieck K' schneidet das Grobgitterdreieck K . Die Annahme $K \in L_\ell^2(\Gamma)$ impliziert $K' \in L_{\ell+1}^5(\Gamma)$.

mit der Eigenschaft $\overline{K} \cap \overline{K'} \neq \emptyset$. Wir zeigen $K \notin L_\ell^2(\Gamma)$, woraus dann $K \in \tau_\ell$ folgt. Wir nehmen das Gegenteil an: $K \in L_\ell^2(\Gamma)$. Dann existiert ein elementweiser Weg $K(K, \Gamma, \tau_\ell^\infty) = \{K_i\}_{i=1}^2$, der Γ mit K' verbindet, und $K_2 = K$ erfüllt. Wegen $\overline{K} \cap \overline{K'} \neq \emptyset$ läßt sich Lemma 36 anwenden. Es existieren daher Elemente $K'_3, K'_4 \in \tau_{\ell+1}^\infty$, die

$$\overline{K'} \cap \overline{K'_4} \neq \emptyset, \quad \overline{K'_4} \cap \overline{K'_3} \neq \emptyset, \quad \overline{K'_3} \cap \overline{K_1} \neq \emptyset$$

erfüllen. Aus $\overline{K'_3} \cap \overline{K_1}$ folgt mit Bedingung 3c aus Annahme 27 auch $\overline{K'_3} \cap \text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1}(K_1) \neq \emptyset$. Bedingung 3b aus Annahme 27 besagt, daß $\Gamma \cap \text{dom } \sigma_\ell^{\ell+1}(K_1) \neq \emptyset$ gilt. Mit Hilfe von Lemma 36 ergibt sich daher die Existenz eines elementweisen Wegs $K = \{K'_i\}_{i=1}^4$ in $\tau_{\ell+1}^\infty$, der Γ und K' verbindet, woraus $K' \in L_{\ell+1}^5(\Gamma)$ folgt. Dies ist aber ein Widerspruch zu $K' \in \overset{\circ}{\tau}_{\ell+1}$. ■

Dieses Lemma stellt sicher, daß für Feingitterpunkte, die in $\overset{\circ}{\tau}_{\ell+1}$ enthalten sind, die FE-Interpolierende zur Prolongation verwendet werden kann. Sei

dazu $\beta_\ell \in R^{\Theta_\ell}$ und $u_\ell^{int} := I_\ell[\beta_\ell]$ die FE-Interpolierende auf Ω_ℓ . Dann setzen wir

$$P_{\ell+1,\ell}[\beta_\ell](x) = u_\ell^{int}(x), \quad \forall x \in \Theta_{\ell+1} \cap \overline{\overset{\circ}{\Omega}_{\ell+1}}$$

Um die Dirichlet-Randwerte zu erfüllen, werden wir auf $\tau_{\ell+1}^\Gamma$ die Prolongation modifizieren. Das geschieht in zwei Stufen. Sei $S_\ell^{p,-1}$ der Raum aller stückweise polynomialen (Maximalgrad p), unstetigen Funktionen auf Ω_ℓ (vgl. Definition 17). Im ersten Schritt wird eine Abbildung $E_{\ell+1,\ell} : S_\ell^{p,-1} \rightarrow S_{\ell+1}^{p,-1}$ konstruiert, die u_ℓ^{int} auf eine Funktion $u_{\ell+1,\ell}^E : \Omega_{\ell+1} \rightarrow R$ abbildet. Da $u_{\ell+1,\ell}^E$ jedoch im allgemeinen unstetig sein wird, verwenden wir im zweiten Schritt einen Mittelungsoperator, um $u_{\ell+1,\ell}^E$ in den Feingitterpunkten auszuwerten. Die Idee ist nun die folgende. Für die Elemente $K \in \tau_{\ell+1}^\Gamma$ wird ein „geeignetes“ Grobgitterelement $\tilde{K} \in \tau_\ell$ gesucht und die bereits definierte Funktion u_ℓ^{int} geeignet extrapoliert. Geeignet heißt in diesem Fall, daß $\text{dist}(K, \tilde{K}) = O(h_K)$ gelten muß. Die Existenz eines solchen Grobgitterelements ist für lineare Elemente nicht gesichert. Falls kein geeignetes Grobgitterelement zum Prolongieren existiert, wird die prolongierte Funktion Null gesetzt. Aus Gründen, die wieder mit der Stabilität der iterierten Prolongation zu tun haben, werden wir das Element \tilde{K} nicht aus dem ganzen Gitter τ_ℓ auswählen, sondern aus einer geeigneten Teilmenge $\tau_\ell^{int} \subset \tau_\ell$.

Das soll nun formalisiert werden. Wir definieren im folgenden die Menge von Elementen, auf denen die Nullfunktion eine hinreichend gute Approximation darstellt, und die Menge von Grobgitterelementen, die zum Prolongieren benötigt werden. Die Situation ist in Abbildung 4.24 illustriert.

Definition 54 Seien b_Γ und n_d aus Definition 46 bzw. 51. Die Teilmenge $\tau_{\ell+1}^N \subset \tau_{\ell+1}$ besteht aus Elementen, die „weit“ vom nächstgelegenen Grobgitterelement entfernt sind, und ist durch

$$\tau_{\ell+1}^N := \left\{ K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma \mid \text{dist}(K', \Omega_\ell, \tau_{\ell+1}^\infty) > n_d \right\}$$

definiert. Um auf Elementen $K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma \setminus \tau_{\ell+1}^N$ zu prolongieren, wird die Grobgitterfunktion auf Elementen K verwendet, welche $\text{dist}(K', K, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq n_d$ erfüllen. Diese sind in der Teilmenge $\tau_\ell^P \subset \tau_\ell$ enthalten:

$$\tau_\ell^P := \left\{ K \in \tau_\ell \mid \text{dist}(\Omega_{\ell+1}^\Gamma, K, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq n_d \right\}. \quad (4.21)$$

Wie bereits erwähnt, wird zur Prolongation im randnahen Bereich nur eine Teilmenge $\tau_\ell^{int} \subset \tau_\ell^P$ verwendet, von der wir die folgenden Eigenschaften fordern:

Abbildung 4.24: Grobes und verfeinertes Gitter. Vom feinen Gitter ist nur die randnahe Schicht gezeichnet. Die hellgrau gefärbten Dreiecke bilden die Menge τ_ℓ^P . Die Menge $U_{int}(K_1)$ besteht aus den drei, mit Sternen markierten Dreiecken aus τ_ℓ^P . Die dunkelgrau gefärbten Dreiecke bilden die Menge $\tau_{\ell+1}^N$, da kein Grobgitterdreieck in $L_{\ell+1}^1(K_2)$ liegt.

1. Die Teilmenge τ_ℓ^{int} soll „hinreichend dicht“ in der Menge τ_ℓ^P liegen:

$$\forall K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma \setminus \tau_{\ell+1}^N, \quad \text{dist} \left(K', \text{dom } \tau_\ell^{int}, \tau_{\ell+1}^\infty \right) \leq n_g, \quad (4.22)$$

wobei die Konstante $n_g \in \mathbb{N}$ weder von der Verfeinerungsstufe noch von den Elementen abhängt.

2. Für alle $K, K' \in \tau_\ell^{int}$ gilt, daß entweder $K = K'$ gilt oder der Schnitt $\overline{K} \cap \overline{K'}$ leer ist.

Bemerkung 55 Für quadratische oder höhere Elemente gilt wegen der geforderten Überdeckungseigenschaft immer $\text{dist} \left(K', \Omega_\ell, \tau_{\ell+1}^\infty \right) \leq n_d$ und daher $\tau_{\ell+1}^N = \emptyset$.

Im folgenden wird die Prolongation für Dirichlet-Randbedingungen definiert. Die Definition besteht aus den folgenden zwei Phasen.

1. Definition eines Operators $E_{\ell+1,\ell} : S_\ell^{p,-1} \rightarrow S_{\ell+1}^{p,-1}$, der Grobgitterfunktionen auf (unstetige) Feingitterfunktionen abbildet.

2. Definition einer Abbildung $\pi_{\ell+1}^{\ell+1} : \Theta_{\ell+1} \rightarrow \tau_{\ell+1}$, die jedem Knotenpunkt $x \in \Theta_{\ell+1}$ ein Element $K \in \tau_{\ell+1}$ zuordnet, welches $x \in \bar{K}$ erfüllt.

Dann ist die Prolongation in einem Knotenpunkt $x \in \Theta_{\ell+1}$ einer Gitterfunktion $\beta_\ell \in R^{\Theta_\ell}$ durch

$$P_{\ell+1,\ell}[\beta_\ell](x) := (E_{\ell+1,\ell}[I_\ell[\beta_\ell]])|_{K'}(x) \quad (4.23)$$

gegeben, wobei $K' := \pi_{\ell+1}^{\ell+1}(x)$ gesetzt wurde.

Wir beginnen mit der Definition des Operators $E_{\ell+1,\ell} : S_\ell^{p,-1} \rightarrow S_{\ell+1}^{p,-1}$. Sei $v_\ell \in S_\ell^{p,-1}$ beliebig. Die fortgesetzte Funktion wird $v_{\ell+1,\ell}^E := E_{\ell+1,\ell}[v_\ell]$ genannt und ist wie folgt gegeben. Auf $\overset{\circ}{\tau}_{\ell+1} \cup \tau_{\ell+1}^N$ setzen wir

$$\begin{aligned} v_{\ell+1,\ell}^E \Big|_{\text{dom } \tau_{\ell+1}^N} &\equiv 0, \\ \mathbf{v}_{\ell+1,\ell}^E(x) &= v_\ell(x), \quad x \in \Theta_{\ell+1} \cap \overline{\overset{\circ}{\Omega}_{\ell+1}}, \\ v_{\ell+1,\ell}^E \Big|_{\overset{\circ}{\Omega}_{\ell+1}} &= I_{\overset{\circ}{\tau}_{\ell+1}} \left[\mathbf{v}_{\ell+1,\ell}^E \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Es bleibt, $v_{\ell+1,\ell}^E$ auf $\tau_{\ell+1}^\Gamma \setminus \tau_{\ell+1}^N$ zu definieren. Nach Konstruktion gilt für $K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma \setminus \tau_{\ell+1}^N$ im allgemeinen nicht mehr $\text{dom } K' \subset \Omega_\ell$. Die Funktion $\kappa_{\ell+1}^\ell : \tau_{\ell+1}^\Gamma \rightarrow \tau_\ell \cup \{\emptyset\}$ ordnet jedem $K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma$ ein *nahegelegenes* Grobgitterelement zu und ist durch

$$\kappa_{\ell+1}^\ell(K') := \begin{cases} \emptyset & K' \in \tau_{\ell+1}^N, \\ \underset{K \in \tau_\ell^{\text{int}}}{\text{argmin dist}}(K', K, \tau_{\ell+1}^\infty) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.25)$$

definiert. Für ein randnahes Element $K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma \setminus \tau_{\ell+1}^N$ wird mit Hilfe des nächstgelegenen Grobgitterelement $K := \kappa_{\ell+1}^\ell(K')$ extrapoliert. Zur Definition der Extrapolation benötigen wir noch den zu K' nächstgelegenen Randpunkt.

Definition 56 Die Funktion γ^ℓ ordnet einer Teilmenge $\omega \subset \Omega_\ell$ einen nächstgelegenen (bezogen auf die elementweise Distanz) Randpunkt zu. Sei dazu $i := \text{dist}(\Gamma, \omega, \tau_\ell)$. Dann ist $\gamma^\ell(\omega) \in \Gamma$ ein Punkt, der

$$\begin{aligned} \text{dist}(\gamma^\ell(\omega), \omega, \tau_\ell) &= i && \text{für } i > 1, \\ \text{dist}(\gamma^\ell(\omega), \omega) &= \text{dist}(\Gamma, \omega) && \text{für } i = 1 \end{aligned}$$

erfüllt. Alternativ verwenden wir auch die Bezeichnung $\gamma_\omega^\ell = \gamma(\omega)$. Falls keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir γ_ω statt γ_ω^ℓ .

Der Extrapolationsoperator $E_{\ell+1,\ell}$ ist für Elemente $K' \in \tau_{\ell+1}^N \cup \overset{\circ}{\tau}_{\ell+1}$ bereits durch (4.24) definiert. Für Elemente $K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma$ wird $E_{\ell+1,\ell}$ mit Hilfe des nächstgelegenen Grobgitterelements $K := \kappa_{\ell+1}^\ell(K')$ und des nächstgelegenen Randpunkts $\gamma_{K'}$ erklärt. Die lokale Version des Fortsetzungsoperators wird mit $E_{\ell+1,\ell}^{K'}$ bezeichnet und hängt über

$$E_{\ell+1,\ell}[v_\ell]|_{K'} := E_{\ell+1,\ell}^{K'}[v_\ell]$$

mit $E_{\ell+1,\ell}$ zusammen. Die Details finden sich in folgender Definition. Zur Illustration dient Abbildung 4.25.

Abbildung 4.25: Extrapolationsoperator $T_{K'}$: Die Funktion v_ℓ auf dem nahegelegenen Grobgitterelement K wird analytisch fortgesetzt, und der Wert im nächstgelegenen Randpunkt abgezogen.

Definition 57 Sei $K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma \setminus \tau_{\ell+1}^N$ und $K := \kappa_{\ell+1}^\ell(K')$. Gegeben sei ein Grobgitterfunktion $v_\ell \in S_\ell^{p,-1}$, die auf K' prolongiert werden soll. Die prolongierte Funktion wird $v_{\ell+1,\ell}$ genannt. Die analytische Fortsetzung von $v_\ell|_K$ auf ganz R^d bezeichnen wir mit $v_{\ell,K}^{ext}$. Falls $\ell+1 < \ell_{\max}$ oder $\overline{K'} \cap \Gamma = \emptyset$ gilt, setzen wir

$$v_{\ell+1,\ell}|_{K'} := E_{\ell+1,\ell}^{K'}[v_\ell] := v_{\ell,K}^{ext}|_{K'} - v_{\ell,K}^{ext}(\gamma_{K'}). \quad (4.26)$$

Falls $\overline{K'} \cap \Gamma$ aus mehr als einem Punkt besteht, impliziert diese Definition natürlich nicht, daß $v_{\ell+1,\ell}|_{K'}$ in jedem Randpunkt verschwindet. Um konforme FE-Räume zu erhalten, müssen wir daher diese Definition auf dem feinsten Level für Elemente, die $\overline{K'} \cap \Gamma \neq \emptyset$ erfüllen, modifizieren. In den Knotenpunkten setzen wir in diesem Fall

$$v_{\ell+1,\ell}(y) := v_{\ell,K}^{ext}(y) - v_{\ell,K}^{ext}(\gamma_y), \quad \forall y \in \Theta_{K'},$$

und auf K' werden diese Werte interpoliert

$$v_{\ell+1,\ell}(x) := E_{\ell+1,\ell}^{K'}[v_\ell](x) := \sum_{y \in \Theta_{K'}} v_{\ell+1,\ell}(y) \varphi_y^{\ell+1}(x), \quad x \in K'. \quad (4.27)$$

Für lineare Simplexelemente gilt beispielsweise $\nabla v_\ell|_K = \text{const}$ und $p = 1$, so daß die Formel sich in diesem Fall für $y \in \Theta_{K'}$ zu

$$v_{\ell+1,\ell}(y) = \begin{cases} \langle \nabla v_\ell|_K, y - \gamma_{K'} \rangle & \text{falls } \ell + 1 < \ell_{\max} \text{ oder } \overline{K'} \cap \Gamma = \emptyset, \\ \langle \nabla v_\ell|_K, y - \gamma_y \rangle & \text{sonst} \end{cases}$$

vereinfacht. Offensichtlich impliziert $y \in \Gamma$ in jedem Fall, daß $y = \gamma_y$ gilt, und daher auf der feinsten Stufe $v_{K'}(y) = 0$ gilt.

Bemerkung 58 *Der Grund, warum nicht auf allen Stufen gemäß (4.27) extrapoliert wird, hängt mit der Stabilität der iterierten Prolongation zusammen. Offensichtlich gilt im Fall (4.27), daß die H^1 -Seminorm von $v_{\ell+1,\ell}$ auf K' mit der H^1 -Seminorm von $v_{\ell,K}^{\text{ext}}$ auf K übereinstimmt. Das gilt für die Prolongation nach Formel (4.27) nicht; die Gradienten können sich stärker vergrößern, so daß diese Version der Prolongation nur einmal angewendet werden soll.*

Durch (4.24) und Definition 57 ist der Operator $E_{\ell+1,\ell} : S_\ell^{p,-1} \rightarrow S_{\ell+1}^{p,-1}$ für alle Elemente $K' \in \tau_{\ell+1}$ definiert. Um die Prolongation $P_{\ell+1,\ell} : R^{\Theta_\ell} \rightarrow R^{\Theta_{\ell+1}}$ gemäß (4.23) definieren zu können, muß noch die Funktion $\pi_{\ell+1}^{\ell+1} : \Theta_{\ell+1} \rightarrow \tau_{\ell+1}$ definiert werden, die einem Knotenpunkt ein Element zuordnet, welches diesen enthält oder berührt. Die Prolongation $P_{\ell+1,\ell}$ in einem Punkt x ist dann erklärt als Auswertung von $E_{\ell+1,\ell}^{K'}$ in x , wobei $K' = \pi_{\ell+1}^{\ell+1}(x)$ gesetzt wurde. Die Definition von $\pi_{\ell+1}^{\ell+1}$ basiert auf der Wahl einer geeigneten Reihenfolge, in der die Elemente K für die Berechnung von $v_{\ell+1,\ell}^E$ abgearbeitet werden, und bereits belegte Werte nicht überschrieben werden. Die Details finden sich in folgender Definition.

Definition 59 *Sei $\beta_\ell \in R^{\Theta_\ell}$ und $u_\ell^{\text{int}} := I_\ell[\beta_\ell]$ die FE-Interpolierende. Die prolongierte Funktion nennen wir $\beta_{\ell+1,\ell} := P_{\ell+1,\ell}[\beta_\ell]$. Diese ist durch den folgenden Algorithmus definiert. Zunächst wird die Funktion $\pi_{\ell+1}^{\ell+1} : \Theta_{\ell+1} \rightarrow \tau_{\ell+1}$ definiert, die festlegt, mit Hilfe welches Feingitterelements die Prolongation in einem Feingitterpunkt bestimmt wird. Das zugehörige Grobgitterelement ist dann durch $\kappa_{\ell+1}^\ell(\pi_{\ell+1}^{\ell+1}(x))$ gegeben. Diese Komposition definiert dann eine Abbildung $\pi_{\ell+1}^\ell : \Theta_{\ell+1} \rightarrow \tau_\ell$ durch $\pi_{\ell+1}^\ell := \kappa_{\ell+1}^\ell \circ \pi_{\ell+1}^{\ell+1}$, die einem Feingitterpunkt x das Grobgitterdreieck zuordnet, welches zur Auswertung der Prolongation in x benötigt wird.*

procedure prolongation($\beta_\ell, \beta_{\ell+1,\ell}$);

begin

Initialisiere die Funktion $\pi_{\ell+1}^{\ell+1}$ durch

$$\pi_{\ell+1}^{\ell+1}(x) := \text{undefined}, \quad \forall x \in \Theta_{\ell+1};$$

for all $K' \in \tau_{\ell+1}^{\text{int}}$ **do for all** $x \in \Theta_{K'}$ **do begin**

$$\pi_{\ell+1}^{\ell+1}(x) := K'; \quad \pi_{\ell+1}^{\ell}(x) := \kappa_{\ell+1}^{\ell}(K'); \quad \text{end};$$

for all $K' \in \tau_{\ell+1}^{\Gamma}$ **do for all** $x \in \Theta_{K'}$ **do**

if $\pi_{\ell+1}^{\ell+1}(x) = \text{undefined}$ **then begin**

$$\pi_{\ell+1}^{\ell+1}(x) := K'; \quad \pi_{\ell+1}^{\ell}(x) := \kappa_{\ell+1}^{\ell}(K'); \quad \text{end};$$

for all $K' \in \overset{\circ}{\tau}_{\ell+1}$ **do for all** $x \in \Theta_{K'}$ **do**

if $\pi_{\ell+1}^{\ell+1}(x) = \text{undefined}$ **then begin** $\pi_{\ell+1}^{\ell+1}(x) := K'$;

$\pi_{\ell+1}^{\ell}(x) := K$ für ein $K \in \tau_{\ell}$, welches $x \in \overline{K}$ erfüllt; **end**;

for all $x \in \Theta_{\ell+1}$ **do begin**

$$K' := \pi_{\ell+1}^{\ell+1}(x); \quad K := \pi_{\ell+1}^{\ell}(x);$$

$$\beta_{\ell+1,\ell}(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } K = \emptyset, \\ \sum_{y \in \Theta_K} \beta_{\ell}(y) E_{\ell+1,\ell}^{K'}[\varphi_y^{\ell}](x) & \text{falls } K \neq \emptyset \text{ und } x \in \overline{\Omega_{\ell+1}^{\Gamma}}, \\ \sum_{y \in \Theta_K} \beta_{\ell}(y) \varphi_y^{\ell}(x) & \text{sonst}; \end{cases}$$

end end;

Bemerkung 60 Durch die oben angegebene Reihenfolge, zunächst auf $\tau_{\ell+1}^{\text{int}}$ zu prolongieren, dann auf $\tau_{\ell+1}^{\Gamma} \setminus \tau_{\ell+1}^{\text{int}}$ und schließlich auf $\overset{\circ}{\tau}_{\ell+1}$, ist der Mittelungsprozess (nicht eindeutig) festgelegt. Jedoch ist die Reihenfolge, mit der die Elemente der einzelnen Teilgitter abgearbeitet werden, unwesentlich.

Bemerkung 61 Die Prolongation läßt sich als lineare Abbildung der Form

$$\beta_{\ell+1,\ell}(x) := \sum_{y \in \Theta_x} c_y(x) \beta_{\ell}(y)$$

schreiben, wobei $\Theta_x = \Theta_K$ mit $K := \pi_{\ell+1}^{\ell}(x)$ gesetzt wurde⁶. Die Koeffizienten $c_y(x)$ sind dann durch

$$c_y(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } K = \emptyset, \\ E_{\ell+1,\ell}^{K'}[\varphi_y^{\ell}](x) & \text{falls } K \neq \emptyset \text{ und } x \in \overline{\Omega_{\ell+1}^{\Gamma}}, \\ \varphi_y^{\ell}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

⁶Falls $\pi_{\ell+1}^{\ell}(x) = \emptyset$ gilt, setzen wir $\Theta_x = \emptyset$ und die Summe über leere Menge gleich Null.

gegeben.

Damit ist die Prolongation für den Fall, daß homogene Dirichlet-Randbedingungen auf ganz Γ vorgegeben sind, vollständig definiert.

Im folgenden werden einige Modifikationen der hier definierten Prolongation angegeben, um inhomogene Dirichlet-Randbedingungen oder gemischte Randbedingungen zu behandeln.

Zunächst wollen wir den Fall betrachten, daß inhomogene Randbedingungen auf dem ganzen Gebietsrand vorgegeben sind, d.h. $u = g$ auf Γ gelten soll. Das zugehörige Variationsproblem lautet dann: Suche $u \in H^1(\Omega)$ mit $u = g$ auf dem Rand, so daß

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

erfüllt ist. Dieses Problem wird nun umformuliert. Die minimale Glattheitsanforderung an g ist durch $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ gegeben. Wir nehmen an, daß eine Fortsetzung $u_g \in H^1(\Omega)$ existiert, die $u_g = g$ auf Γ erfüllt. Indem wir die Zerlegung $u = u_0 + u_g$ verwenden, ist obiges Variationsproblem äquivalent zu folgendem homogenen Dirichlet-Problem: Suche $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ so daß

$$a(u_0, v) = F(v) - a(u_g, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

erfüllt ist.

Im folgenden wollen wir eine Möglichkeit vorstellen, wie eine derartige Funktion u_g mit Hilfe einer leicht modifizierten Prolongation einfach erzeugt werden kann. Wir betrachten zunächst den Fall stetiger Randvorgaben $g \in C^0(\Gamma)$. Für Grobgitterpunkte $x \in \Theta_0$ setzen wir

$$u_0(x) := g(x^0) \max\left(0, 1 - \frac{\text{dist}(x, \Gamma)}{h_0}\right), \quad (4.28)$$

wobei $x_0 = \gamma(x)$ wieder einen nächstgelegenen Randpunkt bezeichnet. Mit Hilfe einer modifizierten Prolongation, die unten erklärt wird, definieren wir Gitterwerte auf dem feinsten Gitter. Die lineare Interpolation dieser Gitterwerte auf dem feinsten Gitter definiert dann die Funktion u_g .

Die erforderlichen Modifikationen für die Prolongation sind die folgenden.

- Die Taylor-artige Entwicklung (4.26) erhält den additiven Zusatzterm $g(\gamma_{K'})$ und (4.27) den Zusatzterm $g(\gamma_y)$.

- Für Elemente $K \in \tau_\ell^N$ haben wir vorausgesetzt, daß für jeden Knotenpunkt $y \in \Theta_K$ ein nichtentartetes Dreieck (Tetraeder in 3D) T_y mit Durchmesser $O(h_\ell)$ existiert, dessen Ecken alle auf Γ liegen, und das $\text{dist}(K, \tilde{K}) \leq Ch_{\tilde{K}}$ erfüllt. Die Interpolation von g in den Ecken von T_y ergibt die Werte in den Knotenpunkten y . Die Interpolation dieser Knotenwerte liefert die FE-Funktion auf K .

Damit ist die Prolongation im betrachteten Fall definiert. Falls g unstetig ist, kann man nicht mehr erwarten, daß der Finite-Elemente-Raum, der per Definition aus stetigen Funktionen besteht, die Randbedingungen in den Knotenpunkten erfüllt. Man muß dann statt der Punktauswertung $g(\gamma_{K'})$ in (4.28) einen geeigneten Mittelwert verwenden. Wir verzichten hier auf die Details.

Abschließend soll noch der Fall von gemischten Randbedingungen diskutiert werden. Wir nehmen an, daß der Rand Γ in disjunkte Teilränder Γ_D und Γ_N zerlegt werden kann, die $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ erfüllen. Auf Γ_N seien natürliche und auf Γ_D homogene Dirichlet-Randbedingungen⁷ vorgegeben. Der zugrundeliegende Funktionenraum wäre dann

$$V = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}.$$

Um diesen Fall zu behandeln, müssen Zusatzvoraussetzungen an die FE-Gitter gestellt werden. Für das *feinste* Gitter fordern wir, daß für alle $K \in \tau_{\ell_{\max}}$ gilt

$$K \cap \Gamma_N = \emptyset \vee K \cap \Gamma_D = \emptyset,$$

d.h. kein Element des *feinsten* Gitters darf sowohl den Dirichlet- wie auch den Neumann-Rand schneiden. Für lineare Elemente muß in Definition 51 die Gleichung (4.18) durch

$$\tau_\ell := \tau_\ell^{NM} \setminus L_\ell^2(\Gamma_D)$$

ersetzt werden. In allen Fällen sind die randnahen Gitter durch

$$\tau_\ell^\Gamma := \tau_\ell \cap L_\ell^{b\Gamma}(\Gamma_D)$$

definiert. Mit diesen Bezeichnungen kann die oben definierte Prolongation für Dirichlet-Randbedingungen wie zuvor angewendet werden. Damit ist für alle

⁷Die Verallgemeinerung auf inhomogene Randbedingungen geschieht wie zuvor erklärt.

möglichen Fälle definiert, wie bei wesentlichen Randbedingungen prolongiert wird.

Es fehlt noch die explizite Definition der Menge τ_ℓ^{int} , die bei der Definition der Prolongation eine zentrale Rolle gespielt hat. Bisher wurde lediglich gefordert, daß τ_ℓ^{int} hinreichend dicht in der Menge τ_ℓ^P liegt. Gewisse Stabilitätskriterien müssen jedoch noch beachtet werden. Dies ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

4.4.1 Zur Definition des Interpolationsgitters τ_ℓ^{int}

Zunächst werden wir Bedingungen 1,2 aus Definition 54, die an die Menge τ_ℓ^{int} gestellt werden, motivieren. Wir sind gestartet mit der Menge τ_ℓ^P , die alle Elemente enthält, die nahe genug am feineren, randnahen Gitter $\tau_{\ell+1}^\Gamma$ liegen, damit sie zur Extrapolation herangezogen werden können. Es soll nun eine geeignete Teilmenge $\tau_\ell^{int} \subset \tau_\ell^P$ gewählt werden, die hinreichend dicht in τ_ℓ^P liegt, und gewisse Zusatzvoraussetzungen, die mit der Stabilität der iterierten Prolongation zu tun haben, erfüllen. Das geschieht in den folgenden beiden Schritten

1. $\tau_\ell^{P,\Gamma} := \tau_\ell^P \cap \tau_\ell^\Gamma$.
2. Wähle davon eine maximal-unabhängige Teilmenge aus, die τ_ℓ^{int} genannt wird.

Diese beiden Schritte sollen zunächst motiviert werden. Wir betrachten zunächst den Effekt der Mittelung, die bei der Auswertung der unstetigen Extrapolation $E_{\ell+1,\ell}$ stattfindet. Die verwendete Anordnung der Knotenpunkte für die Prolongation und die Forderung, daß sich die Elemente aus $\tau_{\ell+1}^{int}$ nicht berühren, impliziert, daß auf $\tau_{\ell+1}^{int}$ die prolongierte Funktion durch

$$u_{\ell+1,\ell}(x) = E_{\ell+1,\ell}[u_\ell](x), \quad \forall x \in \text{dom } \tau_{\ell+1}^{int}$$

gegeben ist, d.h. die Mittelung auf $\tau_{\ell+1}^{int}$ durch die Identität gegeben ist. Falls also die H^1 -Seminorm von $E_{\ell+1,\ell}[u_\ell]$ auf $\tau_{\ell+1}^{int}$ nicht zu groß ist, wächst die Norm auf $\tau_{\ell+1}^{int}$ nicht durch das Mitteln. Die Idee ist daher, zur Prolongation auf $\tau_{\ell+1}^{int}$ nur Elemente aus τ_ℓ^{int} zu verwenden.

Falls jedoch ein Element $K \in \tau_{\ell+1}^{int}$ nicht randnah ist, sondern $K \in \mathring{\Omega}_{\ell+1}$ gilt, wird mit Hilfe der Umgebung $U_{int}(K)$ prolongiert (siehe Definition 44). $\tilde{K} \in U_{int}(K)$ muß jedoch keineswegs die Bedingung $\tilde{K} \in \tau_\ell^{int}$ erfüllen. Auf

diesem Element könnte auf der gröberen Stufe der Gradient durch das Mittel bereits kritisch vergrößert worden sein. Mit Hilfe einer Zusatzbedingung an die Gitter läßt sich $\tau_\ell^{int} \subset \tau_\ell^F$ immer erreichen. Dadurch wird der Extrapolationsprozeß weiter lokalisiert. Wir bemerken hier weiter, daß die Wahl der Mittelung, welche die extrapolierten, unstetigen Funktionen $E_{\ell+1,\ell}[u_\ell]$ nach $S_{\ell+1}^{p,r}$ abbildet, sowohl für die theoretische Analyse als auch für die Praxis eine entscheidende Bedeutung besitzt. Wir wollen dies anhand des folgenden Beispiels illustrieren.

Beispiel 62 *Wir betrachten die obere Halbebene und eine Folge von Gittern wie sie in Abbildung 4.26 dargestellt sind. Auf dem größten Gitter betrach-*

Abbildung 4.26: Grobgitter und randnahe Schicht des Feingitters. Die Zahlen an den Dreiecken geben die Werte der Gitterfunktion an. Sind zwei Zahlen an einem Punkt, gehört die obere zum Grobgitter und die untere zum Feingitter. Die Pfeile geben an, welches Grobgitterdreieck zum Extrapolieren verwendet wurde. Auf der linken Skala sind die Größen und Entfernungen angegeben.

*ten wir die Gitterfunktion, die durch die Zahlen an den Grobgitterpunkten definiert ist. Die Pfeile geben an, welche Grobgitterdreiecke zur Extrapolation verwendet wurden. Die $W^{1,\infty}$ -Seminorm der Grobgitterfunktion beträgt 2 und die der Feingitterfunktion 4 (Dreieck * der Abbildung). Es ist klar, daß diese Konstruktion iteriert werden kann, so daß die $W^{1,\infty}$ -Seminorm mit zunehmenden Stufen divergiert.*

Bemerkung 63 *In vorigem Beispiel war die Prolongation instabil, weil die Mittelung ungeeignet gewählt wurde. Die iterierte Extrapolation wäre hingegen stabil gewesen, da die Gradienten auf allen Feingitterdreiecken entweder mit $(0,0)^T$ oder $(0,2)^T$ übereingestimmt hätten.*

Wir haben zuvor die Stabilität der $W^{1,\infty}$ -Seminorm betrachtet, da diese für die Konvergenztheorie die zentrale Rolle spielen wird.

Wie angekündigt soll die Menge $\tau_\ell^{P,\Gamma}$ noch weiter eingeschränkt werden. Die Definition von τ_ℓ^{int} als maximal-unabhängige Teilmenge von $\tau_\ell^{P,\Gamma}$ hängt mit der Stabilität des Mittelungsprozeß zusammen. Die Details finden sich in folgender Definition.

Definition 64 Die Menge τ_ℓ^{int} ist eine maximal-unabhängige Teilmenge von $\tau_\ell^{P,\Gamma}$, d.h.

$$\tau_\ell^{int} := \operatorname{argmax} \left\{ \#\tau \mid \tau \subset \tau_\ell^{P,\Gamma} \wedge \forall K \in \tau, \forall K' \in \tau \setminus \{K\} \text{ gilt } \overline{K} \cap \overline{K'} = \emptyset \right\}.$$

Die folgende Bemerkung illustriert diese Definition.

Bemerkung 65 Falls $\tau_\ell^{int} \subset \tau_\ell^\Gamma$ für alle ℓ gilt, werden zur Auswertung der Prolongation auf Feingitterelementen $K' \in \tau_{\ell+1}^{int}$ immer Grobgitterelemente verwendet, die $K \in \tau_\ell^{int}$ erfüllen.

Wie erwähnt, werden wir eine Zusatzbedingung an das Gitter stellen, um $\tau_\ell^{int} \subset \tau_\ell^\Gamma$ verlangen zu können. Die Idee dabei ist, daß das innere Gitter $\overset{\circ}{\tau}_\ell$ ganz von einer randnahen Schicht umgeben sein sollte, d.h. $\overline{\overset{\circ}{\Omega}_\ell} \cap \partial\Omega_\ell = \emptyset$. Das kann erreicht werden, indem gefordert wird, daß immer eine feste Zahl von randnahen Gitterschichten $L_\ell^j(\Gamma)$ **regelmäßig** verfeinert werden. Diese Anforderung bedeutet anschaulich, daß die Grobgitter (mindestens) in Bereichen, in denen Mikrostrukturen noch nicht aufgelöst sind, verfeinert werden. In der folgenden Definition ist erklärt, welche Verfeinerungsstrategien hier als regelmäßig betrachtet werden. Zur Orientierung dient Abbildung 4.27.

Definition 66 Ein Dreieck heißt *regelmäßig verfeinert*, falls die Seitenmitten miteinander verbunden werden. Ein Viereck heißt *regelmäßig verfeinert*, falls die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten miteinander verbunden werden.

Ein Tetraeder T wird wie folgt *regelmäßig* in 8 Tetraeder unterteilt. Man verfeinert zunächst die Dreiecke, welche die Oberfläche des Tetraeders bilden, *regelmäßig*. Dann muß noch eine weitere Diagonale eingezeichnet werden.

Abbildung 4.27: Regelmäßige Verfeinerung von geometrischen Elementen.

Seien $\{x_i\}_{i=1}^4$ die Ecken von T und x_{ij} die Mitte der Kante $\overline{x_i x_j}$. Dann besitzen die verfeinerten Tetraeder die Ecken

$$\begin{aligned} T_1 &= (x_1, x_{12}, x_{13}, x_{14}) & T_5 &= (x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{24}) \\ T_2 &= (x_{12}, x_2, x_{23}, x_{24}) & T_6 &= (x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}) \\ T_3 &= (x_{13}, x_{23}, x_3, x_{34}) & T_7 &= (x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}) \\ T_4 &= (x_{14}, x_{24}, x_{34}, x_4) & T_8 &= (x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{34}), \end{aligned}$$

wobei die angegebene Numerierung der Eckpunkte wesentlich ist. Für alle Tetraeder des **Grobgritters** nehmen wir an, daß die Numerierung der Eckpunkte derart gewählt ist, daß die Diagonale $\overline{x_{24} x_{13}}$ kürzer oder gleich lang ist wie die alternativen Diagonalen $\overline{x_{23} x_{14}}$, $\overline{x_{12} x_{34}}$.

Ein Parallelepiped wird verfeinert, indem die Oberflächenvierecke regel-

mäßig verfeinert werden, und die dadurch entstandenen, gegenüberliegenden Flächenmittelpunkte verbunden werden.

Lemma 67 Sei $\{\tilde{\tau}_\ell\}$ eine Familie von Referenzgittern, die **regelmäßig** verfeinert wurden und $\{\tau_\ell\}$ die angepaßten CFE-Gitter. Dann gilt für alle Punkte $x \in \text{dom } \tilde{\tau}_\ell$ und $j \geq 1$

$$\text{dom } L_{\ell+1}^j(x) \subset \text{dom } L_\ell^k(x)$$

mit $k = \lceil (j+1)/2 \rceil$. Hier und im folgenden bezeichnet $\lceil a \rceil$ die kleinste Ganzzahl, die nicht kleiner als a ist, und $\lfloor a \rfloor$ die größte Ganzzahl, die nicht größer als a ist

Für alle Punkte $x \in \text{dom } \tau_{\ell+1}$ und $j \geq 1$ gilt

$$\text{dom } L_{\ell+1}^j(x) \subset \text{dom } L_\ell^k(x)$$

mit $k = \lceil (j+3)/2 \rceil$.

Beweis. Der Beweis der ersten Aussage ist elementar aber technisch und muß für die einzelnen, regelmäßigen Verfeinerungsstrategien getrennt überprüft werden. Er wird hier nicht ausgeführt.

Wir kommen nun zur zweiten Aussage. Zur Orientierung dient Abbildung 4.28. Sei dazu $x \in \text{dom } \tau_{\ell+1}$ und $K' = \{K'_i\}_{i=1}^j$ ein elementweiser Weg, der x mit einem $y \in \text{dom } L_{\ell+1}^j(x)$ verbindet. Wir setzen $k = \lceil (j+3)/2 \rceil$. Seien $K_1, K_k \in \tau_\ell^\infty$ Elemente, die

$$x \in \overline{K_1}, \quad y \in \overline{K_k} \tag{4.29}$$

erfüllen. Aus Annahme 27 (Bedingung 3a) folgt, daß Söhne $K'_0 \in \sigma_\ell^{\ell+1}(K_1)$ bzw. $K'_{j+1} \in \sigma_\ell^{\ell+1}(K_k)$ existieren, die K'_1 bzw. K'_j berühren. Der um K'_0, K'_{j+1} erweiterte Weg wird $K'' = \{K'_i\}_{i=0}^{j+1}$ genannt. Wir betrachten nun diese Situation im Referenzgebiet: $\widetilde{K}'' := \{\widetilde{K}'_i\}_{i=0}^{j+1}$ mit $\widetilde{K}'_i = \Phi(K'_i)$. Seien \tilde{x}, \tilde{y} Punkte, die

$$\tilde{x} \in \widetilde{K}'_0 \cap \Phi(K_1) \quad \tilde{y} \in \widetilde{K}'_{j+1} \cap \Phi(K_k) \tag{4.30}$$

erfüllen. Offensichtlich gilt $\tilde{y} \in \overline{\text{dom } L_{\ell+1}^{j+2}(\tilde{x})}$. Daher läßt sich der erste Teil des Lemmas anwenden, und wir erhalten

$$\tilde{y} \in \overline{\text{dom } L_\ell^k(\tilde{x})}.$$

Abbildung 4.28: Weg, der x mit y verbindet, im angepaßten bzw. im Referenzgitter. Die Grobgitterdreiecke K_1 und K_k enthalten x bzw. y . Die Punkte \tilde{x} und \tilde{y} sind in den Referenzelementen $\widetilde{K'_0} \cap \widetilde{K_1}$ bzw. $\widetilde{K'_{j+1}} \cap \widetilde{K_k}$ enthalten.

Der Weg, der \tilde{x} mit \tilde{y} verbindet, wird $\widetilde{K} = \{\tilde{K}_i\}_{i=1}^k$ genannt. Wegen (4.30) gilt $\widetilde{K_1} = \Phi(K_1)$ und $\widetilde{K_k} = \Phi(K_k)$. Der zugehörige Weg im Gitter τ_ℓ^∞ ist durch $K = \{K_i\}_{i=1}^k$ mit $K_i = \Phi^{-1}(\tilde{K}_i)$ gegeben. Wegen der Stetigkeit von Φ^{-1} und (4.29) verbindet K die Punkte x und y . Daher folgt die Behauptung $y \in \underline{\text{dom } L_\ell^k(x)}$. ■

Der Algorithmus zur Generierung von Referenzgittern, die in Randnähe *regelmäßig* verfeinert wurden, ist durch die folgende Prozedur definiert. Sei ein grobes FE-Gitter $\tilde{\tau}_0$ gegeben, das $\Omega \subset \text{dom } \tilde{\tau}_0$ erfüllt.

procedure generiere_Referenzgitter($\tilde{\tau}_0, b_\Gamma, \ell_{\max}$);

begin

for $\ell := 1$ **to** ℓ_{\max} **do begin**

Kommentar: Es wird das Verfeinerungsmuster für jedes Element bestimmt.

for all $K \in \tau_{\ell-1}$ **do begin**

$muster(K) := \text{undefiniert};$

for all $K' \in L_{\ell-1}^{b_\Gamma+1}(K)$ **do**

if $K' \cap \Gamma \neq \emptyset$ **then** $muster(K) := \text{regelmäßig};$

if $muster(K) := undefiniert$ **then** $muster(K) := frei$;⁸
end;

Kommentar: Jetzt wird gemäß Verfeinerungsmuster verfeinert.

for all $K \in \tau_{\ell-1}$ **do begin**

generiere Söhne $\sigma_{\ell-1}^\ell(K)$ gemäß $muster(K)$;

for all $K' \in \sigma_{\ell-1}^\ell(K)$ **do** $F_\ell^{\ell-1}(K') := K$;

$\tilde{\tau}_\ell := \tilde{\tau}_\ell \cup \sigma_\ell^{\ell-1}(K)$;

end end end;

Lemma 68 Sei $K' \in L_{\ell+1}^1(\tau_{\ell+1}^\Gamma)$ und $K := F_{\ell+1}^\ell(K') \in \tau_\ell^\infty$ der Vater von K' . Dann wurde K regelmäßig verfeinert.

Beweis. Auf der Verfeinerungsstufe ℓ werden alle Referenzelemente regelmäßig verfeinert, die $\text{dist}(\tilde{K}, \Gamma, \tilde{\tau}_\ell) \leq b_\Gamma + 1$ erfüllen. Aus Lemma 67 folgt daher, daß für alle $x \in \Gamma$ die Inklusion

$$\text{dom } L_{\ell+1}^{b_\Gamma+1}(x) \subset \text{dom } L_\ell^k(x) \quad (4.31)$$

mit $k = \lfloor \frac{b_\Gamma+4}{2} \rfloor \leq b_\Gamma$ gilt.

Die Voraussetzung $K' \in L_{\ell+1}^1(\tau_{\ell+1}^\Gamma)$ impliziert, daß $K' \in L_{\ell+1}^{b_\Gamma+1}(x)$ gilt für ein $x \in \Gamma$. Für den Vater K von K' ist wegen Annahme 27 (Bedingung 3a) $K' \cap K \neq \emptyset$ erfüllt. Daraus folgt $K \cap \text{dom } L_{\ell+1}^{b_\Gamma+1}(x) \neq \emptyset$ und wegen (4.31) auch $K \cap \text{dom } L_\ell^k(x) \neq \emptyset$. Das impliziert jedoch $K \in L_\ell^k(\Gamma)$. Aus Annahme 27 (Bedingung 5) folgt, daß $\Phi(K) \in L_\ell^{k+1}(\Gamma)$ gilt, und daher wurde K regelmäßig verfeinert. ■

Im folgenden werden wir zeigen, daß die oben definierten Referenzgitter zu Finite-Elemente-Gittern für Dirichlet-Randbedingungen führen, welche die Dichtheitsvoraussetzung (4.22) erfüllt. Dazu sind einige vorbereitende Lemmas erforderlich.

Lemma 69 Für alle $K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma$, die $\text{dist}(K', \Omega_\ell, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq n_d$ erfüllen⁹, gilt auch $\text{dist}(K', \Omega_\ell^\Gamma, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq n_d$.

⁸Die Schreibweise „ $muster(K) := frei$ “ soll andeuten, daß das Verfeinerungsmuster für K frei gewählt werden kann. Es muß jedoch sichergestellt werden, daß die entstehenden Referenzgitter reguläre FE-Gitter sind, und die Voraussetzungen aus Annahme 27 erfüllt sind.

⁹Auf diesen Elementen wird *nicht* mit Null prolongiert.

Beweis. Sei $K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma$ und $\text{dist}(K', \Omega_\ell, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq n_d$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Zunächst nehmen wir an, daß $K' \cap \Omega_\ell = \emptyset$ gilt. Dies kann nur in der für lineare Elemente definierten Variante auftreten (siehe Definition 51). Wir wählen ein $K \in \tau_\ell$, welches minimalen Abstand zu K' besitzt

$$\text{dist}(K', K, \tau_{\ell+1}^\infty) = \text{dist}(K', \Omega_\ell, \tau_{\ell+1}^\infty).$$

Daraus folgt $\overline{K} \cap \partial\Omega_\ell \neq \emptyset$. Definition 51 impliziert $K \in L_\ell^3(\Gamma)$, woraus $K \in \tau_\ell^\Gamma$ folgt.

Der zweite Fall ist durch $K' \cap \Omega_\ell \neq \emptyset$ charakterisiert. Wir wählen K wie zuvor. In diesem Fall gilt $\text{dist}(K', K, \tau_{\ell+1}^\infty) = 1$. Dann gilt wegen $K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma \subset L_{\ell+1}^{b_\Gamma}(\Gamma)$ die Abschätzung

$$\text{dist}(\Gamma, K, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq b_\Gamma. \quad (4.32)$$

Daraus soll nun eine Abschätzung für $\text{dist}(\Gamma, K, \tau_\ell^\infty)$ hergeleitet werden. Aus (4.32) folgt $\overline{K} \cap \text{dom } L_{\ell+1}^{b_\Gamma}(\Gamma) \neq \emptyset$. In Lemma 68 wurde gezeigt, daß alle Väter von $\tau_{\ell+1}^\Gamma$ regelmäßig verfeinert wurden. Aus Lemma 67 folgt daher $\overline{K} \cap \text{dom } L_\ell^k(\Gamma) \neq \emptyset$ mit $k = \lceil (b_\Gamma + 3)/2 \rceil$. Dies impliziert $K \in L_\ell^{k+1}(\Gamma)$. Aus $b_\Gamma = 5$ folgt $\lceil (b_\Gamma + 3)/2 \rceil + 1 \leq b_\Gamma$, und daher ist K randnah: $K \in \tau_\ell^\Gamma$. ■

Es bleibt zu beweisen, daß die so definierte Teilmenge τ_ℓ^{int} die Dichtheitsvoraussetzung (4.22) erfüllt. Dafür wird das folgende Lemma benötigt.

Lemma 70 *Sei $\{\tau_\ell\}$ in Randnähe regelmäßig verfeinert, d.h. gemäß Algorithmus **generiere_Referenzgitter** erzeugt. Dann erfüllt die oben definierte Menge τ_ℓ^{int} die Voraussetzung (4.22).*

Beweis. Die folgende Situation ist in Abbildung 4.29 illustriert. Da τ_ℓ^{int} als maximal-unabhängige Teilmenge von $\tau_\ell^{P,\Gamma}$ definiert war, ist lediglich zu zeigen, daß eine Konstante n_g existiert, so daß für alle $K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma \setminus \tau_{\ell+1}^N$ die Abschätzung $\text{dist}(K', \text{dom } \tau_\ell^{\text{int}}, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq n_g$ gilt. Sei dazu $\tilde{K} \in \tau_\ell^\Gamma$ ein Element, welches $\text{dist}(K', \tilde{K}, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq n_d$ erfüllt. Das bedeutet, daß ein elementweiser Weg $\{K_i\}_{i=1}^{n_d}$ in $\tau_{\ell+1}^\infty$ existiert, für den $\overline{K'} \cap \overline{K_1} \neq \emptyset$ und $\overline{K_{n_d}} \cap \overline{\tilde{K}} \neq \emptyset$ gilt, wobei \tilde{K} in $\tau_\ell^{P,\Gamma}$ enthalten ist. Da τ_ℓ^{int} die maximal-unabhängige Menge von $\tau_\ell^{P,\Gamma}$ ist, existiert ein $K \in \tau_\ell^{\text{int}}$, welches \tilde{K} berührt. In Lemma 36 wurde gezeigt, daß daraus $\text{dist}(K', K, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq n_d + 2$ folgt. ■

Abbildung 4.29: Grobgitter und randnahe Schicht des feineren Gitters. Die grau gefärbten Dreiecke bilden τ_ℓ^P . Die schwarzen Punkte markieren die maximal-unabhängige Teilmenge von τ_ℓ^P .

Wir haben also gezeigt, daß τ_ℓ^{int} lokalisiert werden kann, d.h. $\tau_\ell^{int} \subset \tau_\ell^\Gamma$ gilt, falls τ_ℓ in Randnähe regelmäßig verfeinert wurde. Im folgenden wird noch eine weitere Eigenschaft bewiesen, die aus der regelmäßigen Verfeinerung in Randnähe folgt, und später benötigt wird.

Lemma 71 Sei $K' \in \overset{\circ}{\tau}_{\ell+1}$ ein Element des inneren Gitters, welches das randnahe Gitter berührt: $K' \in L_{\ell+1}^1(\tau_{\ell+1}^\Gamma)$. Dann gilt $K' \cap \overset{\circ}{\Omega}_\ell = \emptyset$.

Beweis. Sei $K' \in \overset{\circ}{\tau}_{\ell+1}$ ein Element, welches $K' \in L_{\ell+1}^1(\tau_{\ell+1}^\Gamma)$ erfüllt. Daraus folgt

$$K' \in L_{\ell+1}^{b_\Gamma+1}(\Gamma). \quad (4.33)$$

Sei $K \in \tau_\ell$ ein beliebiges Grobgitterelement, welches K' berührt. Wir zeigen $K \in \tau_\ell^\Gamma$, woraus dann die Behauptung folgt. Wegen (4.33) gilt

$$\text{dist}(K, \Gamma, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq b_\Gamma + 1.$$

Wie im Beweis von Lemma 69 schließt man daraus $K \in L_\ell^k(\Gamma)$ mit $k = \lceil (b_\Gamma + 4)/2 \rceil$. Aus $b_\Gamma = 5$ folgt $k = 5$, und daher ist K randnah: $K \in \tau_\ell^\Gamma$. ■

4.4.2 Lokalität der Prolongation für wesentlichen Randbedingungen

Die Lokalität der Prolongation spielt für die effiziente Realisierung und für die Herleitung lokaler Fehlerabschätzungen mit einer *lokalen* Schrittweite eine

zentrale Rolle. Die Situation für wesentliche Randbedingungen unterscheidet sich lediglich in Randnähe von natürlichen Randbedingungen. Die Gitter für Dirichlet-Randbedingungen waren mit Hilfe der Gitter für Neumann-Randbedingungen definiert, indem eventuell geeignete Elemente weggelassen wurden. Die Gitter für Neumann-Randbedingungen werden wieder mit τ_ℓ^{NM} bezeichnet und die daraus entstandenen Dirichlet-Gitter mit τ_ℓ . Um die lokalen Fehlerabschätzungen zu formulieren, werden die lokalen Bereiche im Gebiet wieder durch die Söhne von Elementen aus τ_ℓ^{NM} charakterisiert. Sei $\sigma(K)$ die Menge der Söhne eines Elements $K \in \tau_\ell^{NM}$ auf der feinsten Stufe $\tau_{\ell_{\max}}$. Die lokalen Fehlerabschätzungen werden dann für $K \in \tau_\ell^{NM}$ die Form

$$\|u - u_\ell\|_{1,\sigma(K)} \leq Ch_\ell \|u\|_{2,L^2_b(K)}$$

besitzen, wobei $\|\cdot\|_{1,\sigma(K)}$ hier und im folgenden eine Abkürzung für $\|\cdot\|_{1,\text{dom } \sigma(K)}$ ist. Wir betonen hier, daß das Element $K \in \tau_\ell^{NM}$ selbst *nicht* im Gitter τ_ℓ enthalten sein muß, sondern lediglich dazu dient, den lokalen Bereich $\text{dom } \sigma(K) \subset \Omega$ zu charakterisieren.

Wir werden im folgenden die Definition der Einflußmengen $I_{j,\ell}(K)$ leicht modifizieren, um zu berücksichtigen, daß im Fall von wesentlichen Randbedingungen Knotenpunkte existieren können, die in keinem Grobgitterelement enthalten sind. Wir benötigen hierzu wieder die Funktion $\kappa_{\ell+1} : \Theta_{\ell+1} \rightarrow \tau_{\ell+1}$ aus Definition 59, die einem Feingitterpunkt das Element aus $\tau_{\ell+1}$ zuordnet, welches die Prolongation im Feingitterpunkt bestimmt.

Definition 72 *Seien $K \in \tau_\ell^{NM}$ und $\sigma(K)$ die Söhne von K auf der feinsten Stufe. Wir rekapitulieren die Definition der Knotenmenge $\Theta_\ell^{\ell_{\max}}(K) := \Theta_{\ell_{\max}} \cap \text{dom } \sigma(K)$. Die Einflußmengen, die beschreiben, welche Elemente auf der Stufe $\ell \leq j \leq \ell_{\max}$ verwendet werden, um die Prolongation in den Feingitterpunkten $\Theta_\ell^{\ell_{\max}}(K)$ auszuwerten, sind durch die folgende Rekursion definiert.*

Auf der feinsten Stufe gilt

$$I_{\ell_{\max},\ell}(K) := \sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K), \quad Y_{\ell_{\max},\ell}(K) := \Theta_\ell^{\ell_{\max}}(K),$$

und für $j = \ell_{\max} - 1, \ell_{\max} - 2, \dots, \ell$ setzen wir

$$\begin{aligned} I_{j,\ell}(K) &:= \left\{ \tilde{K} \in \tau_j \mid \tilde{K} \cap \text{dom } I_{j+1,\ell}(K) \neq \emptyset \right\} \\ &\quad \cup \left\{ \tilde{K} = \kappa_{j+1}^j(x) : x \in Y_{j+1,\ell}(K) \right\}, \\ Y_{j,\ell}(K) &:= \Theta_j \cap \overline{\text{dom } I_{j,\ell}(K)}. \end{aligned}$$

Die Definition der Einflußmenge impliziert $I_{j,\ell}(K) \subset \tau_j \cup \{\emptyset\}$, aber im allgemeinen nicht $K \in \tau_\ell$. Der Grund, die lokalen Bereiche durch Elemente aus τ_ℓ^{NM} zu beschreiben, ist lediglich, daß das Gebiet $\text{dom } \sigma(K)$ durch K geometrisch besser charakterisiert ist, verglichen mit einem „nahegelegenen“ Element aus dem Dirichlet-Gitter.

Die Definition der lokalen Schrittweite $h_{j,\ell}(K)$ und des Verzerrungsparameters $\varepsilon_{j,\ell}(K)$ behält weiterhin seine Gültigkeit, genauso wie die gemachten Regularitäts- und Kompatibilitätsannahmen (Annahme 27). Wir setzen voraus, daß alle Einflußmengen die folgende Eigenschaft besitzen. Die folgende Situation ist in Abbildung 4.30 dargestellt.

Abbildung 4.30: Grobe Triangulierung τ_ℓ mit randnaher Schicht τ_ℓ^Γ und inneren Dreiecken $\overset{\circ}{\tau}_\ell$. Die Feingitterdreiecke sind durch die gestrichelten Linien charakterisiert. Um auf dem Dreieck K' zu prolongieren, werden K_1 und K_y benötigt. Es wurde $\kappa_{\ell+1}(y) = K''$ und $\kappa_{\ell+1}^\ell(K'') = K_y$ gesetzt. Damit der Weg s in $\text{dom} \left(\overline{I_{j-1,\ell} \cap \tau_{j-1}^\Gamma} \right)$ verläuft, muß K_2 auch in $I_{j,\ell}(K)$ enthalten sein. Man könnte auch alternativ fordern, daß statt mit K_y entweder mit K_2 oder K_3 extrapoliert wird.

Annahme 73 Für ein Element K' bezeichnet $\Theta_{K'}^{\text{ext}} \subset \Theta_{K'}$ die Menge der Knotenpunkte, auf der die Prolongation durch Extrapolation erklärt ist, und $\Theta_{K'}^{\text{int}}$ diejenige, auf der die Prolongation durch Interpolation definiert ist. Für alle Stufen $0 \leq \ell < j \leq \ell_{\max}$, alle $K \in \tau_\ell^{NM}$ und alle $K' \in I_{j,\ell}(K)$, welche $\Theta_{K'}^{\text{ext}} \neq \emptyset$ und $\Theta_{K'}^{\text{int}} \neq \emptyset$ erfüllen, existiert für alle $y \in \Theta_{K'}^{\text{ext}}$, $x \in \Theta_{K'}^{\text{int}}$ ein Weg

$s_{x,y}$, der x mit $K_y := \kappa_j^{j-1}(y)$ verbindet, ganz in $\overline{\text{dom}(I_{j-1,\ell} \cap \tau_{j-1}^\Gamma)}$ verläuft und

$$L(s_y) \leq C_t \|x - y\|$$

erfüllt.

Die folgende Bemerkung illustriert diese Voraussetzung.

Bemerkung 74 *Diese Bedingung ist das Analogon zur Voraussetzung*

$$K \cap K' \neq \emptyset, \quad \forall K' \in \sigma_\ell^{\ell+1}(K)$$

im Fall von Neumann-Randbedingungen (Annahme 27). Falls y ein Knotenpunkt ist, für den die Prolongation durch Extrapolation erklärt ist, muß sichergestellt sein, daß eine Verbindung zwischen y und dem Grobgitterelement existiert, die in der Einflußmenge verläuft. Diese Bedingung kann auch weggelassen werden und explizit bei der Definition der Einflußmengen durch Hinzunahme geeigneter Grobgitterelemente sichergestellt werden. Um die Beweise zu vereinfachen, wird diese Eigenschaft hier vorausgesetzt.

Einige wichtige geometrischen Folgerungen sind in folgendem Lemma zusammengestellt. Sei dazu $\{\tau_\ell\}_{\ell=0}^{\ell_{\max}}$ eine Folge von CFE-Gittern für Dirichlet-Randbedingungen. Wir nehmen an, daß diese Familie aus Referenzgittern $\{\tilde{\tau}_\ell\}_{\ell=0}^{\ell_{\max}}$ entstanden ist, welche die Bedingungen aus Annahme 27 erfüllt, und mit Hilfe der Prozedur **generiere Referenzgitter** regelmäßig auf randnahen Schichten verfeinert wurde. Die Menge $D(y)$ beschreibt das Grobgittergebiet, welches zur Auswertung der Prolongation in einem Knotenpunkt $y \in \Theta_{\ell+1}$ verwendet wird:

1. $D(y) = \kappa_\ell^{\ell+1}(y)$, falls in y durch Interpolation prolongiert wird: $y \in \overset{\circ}{\Omega}_{\ell+1}$.
2. $D(y) = T_y$, falls in y mit Null prolongiert wird. T_y bezeichnet das Dreieck (Tetraeder) aus Definition 48.
3. $D(y) = \{\kappa_\ell^{\ell+1}(y), y, y^0\}$, falls in y die Prolongation durch Extrapolation definiert ist. y^0 bezeichnet wieder den nächstgelegenen Randpunkt (siehe Definition 57).

Lemma 75 Für alle $K' \in \tau_{\ell+1}$ und $y \in \Theta_{K'}$ gilt $D(y) \subset \text{dom } L_{\ell+1}^{n_L}(y)$ mit $n_L := \max(b_\Gamma, n_d + 5, n_T) = 6$.

Sei $K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma$ ein randnahes Element und $y \in \Theta_{K'}$ ein Knotenpunkt, für den die Prolongation durch Extrapolation erklärt ist. Das dazu benötigte Grobgitterelement wird mit $K = \kappa_{\ell+1}^{\ell+1}(y)$ bezeichnet. Dann gilt

$$h_K \geq ch_{K'}.$$

Die Größe der Einflußmenge für Dirichlet-Randbedingungen kann durch

$$\begin{aligned} \text{dom } I_{j,\ell}(K) &\subset \text{dom } L_\ell^{n_I}(K), \\ n_I &:= n_L + 4b + 8 \end{aligned} \tag{4.34}$$

abgeschätzt werden.

Bemerkung 76 Die Abschätzung für n_I kann verbessert werden. Da wir jedoch hier nur an der Frage interessiert sind, von welchen Größen die Konstanten abhängen, wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auf eine optimale Abschätzung verzichtet.

Beweis. Mit betrachten die drei Möglichkeiten, wie die Prolongation in y definiert ist, getrennt.

(1) Interpolation:

Das Element, welches zur Interpolation benutzt wird, ist durch $K = \kappa_{\ell+1}^\ell(y)$ gegeben und erfüllt $y \in \bar{K}$. In Lemma 36 wurde gezeigt, daß daraus $K \subset \text{dom } L_{\ell+1}^3(y)$ folgt.

(2) Prolongation mit Null:

In Definition 48 wurde explizit $T_y \subset \text{dom } L_{\ell+1}^{n_T}(y)$ gefordert.

(3) Extrapolation:

Sei $K' := \kappa_{\ell+1}(y)$ das Element, welches die Prolongationsmethode festlegt, und $K := \kappa_{\ell+1}^\ell(y)$ das Element, mit dem prolongiert wird. Per Definition erfüllt dieses $\text{dist}(K, y, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq n_g$. Mit Lemma 36 folgt dann $K \subset \text{dom } L_{\ell+1}^{n_g+3}(y)$. In Beweis von Lemma 70 wurde die Abschätzung $n_g \leq n_d + 2$ bewiesen. Das Element K' ist randnah, d.h. $K' \in L_{\ell+1}^{b_\Gamma}(\Gamma)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{dist}(y, \Gamma, \tau_{\ell+1}^\Gamma) &\leq b_\Gamma \\ \text{dist}(K', \Gamma, \tau_{\ell+1}^\Gamma) &\leq b_\Gamma, \end{aligned}$$

Abbildung 4.31: Randnahes Element K' und Grobgitterelement K , welches zur Extrapolation verwendet wird.

woraus $y^0 \in L_{\ell+1}^{\text{br}}(y)$ folgt.

Wir kommen nun zur zweiten Aussage. Zur Orientierung dient Abbildung 4.31. Sei $K' \in \tau_{\ell+1}^\Gamma$ und $y \in \Theta_{K'}$ ein Knotenpunkt, für den die Prolongation durch Extrapolation erklärt ist. Das Vaterelement wird $F_{K'} := F_{\ell+1}^\ell(K')$ genannt, und das Grobgitterelement, welches zur Prolongation verwendet wird, mit $K = \kappa_{\ell+1}^\ell(y)$ bezeichnet. Aus $\text{dist}(K', K, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq n_g$ und $K' \cap F_{K'} \neq \emptyset$ folgt

$$\text{dist}(F_{K'}, K, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq n_g + 1.$$

Das bedeutet, daß ein Elementweg $K' = \{K'_i\}_{i=1}^{n_g+1}$ existiert, der $F_{K'}$ und K verbindet. Die Väter von K'_i werden mit $K_i = F_{\ell+1}^\ell(K'_i)$ bezeichnet. Wegen Annahme 27 (Bedingung 3a) gilt $K'_i \subset \text{dom } L_\ell^1(K_i)$. Daraus folgt¹⁰

$$\text{dist}(F_{K'}, K, \tau_\ell^\infty) \leq 2(n_g + 1). \quad (4.35)$$

Aus Lemma 14 folgt dann $h_K \geq ch_{F_{K'}}$. Seien $\widetilde{F}_{K'} = \Phi(F_{K'})$ und $\widetilde{K}' = \Phi(K')$ die Elemente im Referenzgitter. Mit Annahme 27 (Bedingung 2) gilt

$$h_K \geq ch_{F_{K'}} \geq cc_a h_{\widetilde{F}_{K'}} \geq cc_a h_{\widetilde{K}'} \geq c \frac{c_a}{C_a} h_{K'},$$

was zu zeigen war.

¹⁰Die folgende Abschätzung kann verbessert werden. Dies ist jedoch für diesen Beweis nicht erforderlich.

Schließlich wird die Einflußmenge $I_{j,\ell}(K)$ für Dirichlet-Randbedingungen abgeschätzt. Dazu führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Für ein Teilgitter $\tau'_\ell \in \tau_\ell$ setzen wir

$$\tau'_\ell{}^\Gamma := \tau'_\ell \cap \tau_\ell^\Gamma, \quad \tau'_\ell{}^\circ := \tau'_\ell \setminus \tau'_\ell{}^\Gamma.$$

Für ein Element $K \in \tau_\ell$ enthält $\sigma_\ell^{j,\infty}(K)$ alle Söhne von K auf τ_j^∞ , d.h.

$$\sigma_\ell^{j,\infty} := \Phi_j^{-1} \left(\sigma_\ell^j(\Phi(K)) \right).$$

Zur Abkürzung schreiben wir $I_{j,\ell}$ statt $I_{j,\ell}(K)$ und $\sigma_\ell^{j,\infty}$ statt $\sigma_\ell^{j,\infty}(K)$. Die Abschätzung (4.34) wird induktiv bewiesen. Wir beginnen mit $j = \ell_{\max}$. Dann gilt

$$I_{j,\ell} = \sigma_\ell^j \subset \sigma_\ell^{j,\infty} \subset L_j^{1,\Gamma}(\sigma_\ell^{j,\infty}) \cup L_j^{1,\circ}(\sigma_\ell^{j,\infty}).$$

Wir nehmen an, daß für ein $1 \leq j \leq \ell_{\max}$ die Inklusion

$$I_{j,\ell} \subset L_j^{\rho_j,\Gamma}(\sigma_\ell^{j,\infty}) \cup L_j^{b_j,\circ}(\sigma_\ell^{j,\infty})$$

mit den Zahlen $b_j \leq b$ aus Annahme 27, Bedingung 6, gilt. Wir betrachten nun $I_{j-1,\ell}$. Diese Menge enthält alle Elemente, die $I_{j,\ell}$ überdecken, und diejenigen Elemente, mit Hilfe derer extrapoliert wird. Für die letzteren Elemente ist sichergestellt, daß diese in τ_{j-1}^Γ liegen. Daher gilt mit Hilfe von Annahme 27, Bedingung 3a und Bedingung 6,

$$\begin{aligned} \text{dom } L_j^{b_j,\circ}(\sigma_\ell^{j,\infty}) &\subset \text{dom } L_{j-1}^{b_{j-1}}(\sigma_\ell^{j-1,\infty}) \\ \text{dom } L_j^{\rho_j,\Gamma}(\sigma_\ell^{j,\infty}) &\subset \text{dom } L_{j-1}^1(L_j^{\rho_j,\Gamma}(\sigma_\ell^{j,\infty})) \cup \text{dom } L_j^{n_L,\Gamma}(I_{j,\ell}^\Gamma). \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Einflußmenge $\text{dom } I_{j-1,\ell}$ die Inklusion

$$\begin{aligned} \text{dom } I_{j-1,\ell} &\subset \text{dom } L_j^1(L_j^{\rho_j,\Gamma}(\sigma_\ell^{j,\infty})) \cup \text{dom } L_{j-1}^{b_{j-1}}(\sigma_\ell^{j-1,\infty}) \cup \text{dom } L_j^{n_L,\Gamma}(I_{j,\ell}^\Gamma) \\ &\subset \text{dom } L_{j-1}^1(L_j^{\rho_j,\Gamma}(L_j^1(\sigma_\ell^{j-1,\infty}))) \cup \text{dom } L_{j-1}^{b_{j-1}}(\sigma_\ell^{j-1,\infty}) \\ &\quad \cup \text{dom } L_{j-1}^{n_L,\Gamma}(L_j^{\rho_j,\Gamma}(\sigma_\ell^{j,\infty})) \cup \text{dom } L_j^{n_L,\Gamma}(L_j^{b_j,\circ}(\sigma_\ell^{j,\infty})) \\ &\subset \text{dom } L_{j-1}^1(L_j^{\rho_j+1,\Gamma}(\sigma_\ell^{j-1,\infty})) \cup \text{dom } L_{j-1}^{b_{j-1}}(\sigma_\ell^{j-1,\infty}) \\ &\quad \cup \text{dom } L_{j-1}^{n_L+\rho_j+1,\Gamma}(\sigma_\ell^{j-1,\infty}) \cup \text{dom } L_j^{n_L+b_j+1,\Gamma}(\sigma_\ell^{j-1,\infty}). \end{aligned}$$

Da alle Elemente $K' \in \tau_j^\Gamma$ Söhne von *regelmäßig* verfeinerten Vaterelementen (siehe Lemma 68) sind, läßt sich Lemma 67 anwenden. Das ergibt

$$I_{j-1,\ell} \subset L_{j-1}^{\rho_{j-1},\Gamma} \left(\sigma_\ell^{j-1,\infty} \right) \cup L_{j-1}^{b_{j-1}} \left(\sigma_\ell^{j-1,\infty} \right)$$

mit

$$\begin{aligned} \rho_{j-1} &= \max \left(\left\lceil \frac{\rho_j + 4}{2} \right\rceil + 1, \left\lceil \frac{n_L + \rho_j + 4}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n_L + b_j + 4}{2} \right\rceil \right) \\ &\leq \max \left(\left\lceil \frac{n_L + \rho_j + 4}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n_L + b + 4}{2} \right\rceil \right). \end{aligned}$$

Diese Folge wird majorisiert durch die Folge $\{\tilde{\rho}_j\}_{j=\ell}^{\ell_{\max}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\ell_{\max}} &= 1 \\ \tilde{\rho}_{j-1} &= \frac{\tilde{\rho}_j}{2} + C \end{aligned}$$

mit

$$C = \left\lceil \frac{n_L + b + 4}{2} \right\rceil.$$

Diese Folge ist beschränkt durch $\tilde{\rho}_j \leq 1 + 2C$, woraus

$$I_{j,\ell} \subset L_j^N \left(\sigma_\ell^{j,\infty} \right)$$

mit $N = n_L + b + 7$ folgt. Daraus folgt wegen Annahme 27, Bedingung 6, auch

$$\text{dom } I_{j,\ell} \subset \text{dom } L_j^{N+b} (K)$$

gilt. Es bleibt zu zeigen, daß $\text{dom } L_j^{N+b} (K) \subset \text{dom } L_\ell^{N+3b+1} (K)$ gilt. Sei dazu $K' \in L_j^{N+b} (K)$ beliebig. Dann existiert ein Weg $\{K'_i\}_{i=1}^{N+b}$ in τ_j^∞ , der K' und K verbindet, d.h. $\overline{K'_1} \cap \overline{K'} \neq \emptyset$ und $\overline{K'_{N+b}} \cap \overline{K}$ erfüllt. Der Vater von K' auf Stufe ℓ wird mit $F_{K'} = F_j^\ell (K')$ bezeichnet und die Vaterelemente von K'_i mit $K_i := F_j^\ell (K'_i)$. Iteriertes Anwenden von Lemma (29) ergibt, daß

$$\overline{K_i} \cap \overline{K_{i+1}} \neq \emptyset$$

gilt. Aus Annahme 27, Bedingung 6, folgt

$$\begin{aligned} K'_1 &\subset \text{dom } L_\ell^b (K_1), \\ K'_{N+b} &\subset \text{dom } L_\ell^b (K_{N+b}). \end{aligned}$$

Zusammen haben wir

$$K' \subset \text{dom } L_\ell^{N+3b+1} (K)$$

gezeigt. ■

Kapitel 5

Approximationseigenschaft für CFE-Räume

In diesem Abschnitt wird die Approximationseigenschaft von zusammengesetzten Finite-Elemente-Räumen untersucht. Die Lösung des Variationsproblems aus Abschnitt 3.2 wird im Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$ angenommen, der eventuell noch durch Vorgabe von wesentlichen Randbedingungen restringiert war und abstrakt V genannt wurde. Im vorigen Kapitel hatten wir geeignete Teilräume von V definiert. Sei im folgenden $p \geq 1$ wieder der polynomiale Grad der Ansatzfunktionen, d.h. $S_\ell^{CFE} \subset S_{\ell_{\max}}^{p,r}$. Ziel ist es zu zeigen, daß diese Räume die Approximationseigenschaft besitzen. Sei dazu $V^k := V \cap H^k(\Omega)$ mit $k \geq p+1 \geq 2$. Wir werden zeigen, daß für alle $u \in V^k$ ein $u_\ell \in S_\ell^{CFE}$ existiert, das

$$|u - u_\ell|_{m, \sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K)} \leq Ch_K^{p+1-m} \|u\|_{p+1, I_{\ell, \ell}(K)}, \quad m = 0, 1$$

und

$$|u - u_\ell|_{0, \sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K)} \leq Ch_K \|u\|_{1, I_{\ell, \ell}(K)}$$

erfüllt, sowie die globalen Analoga, bei denen $\sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K)$ und $I_{\ell, \ell}(K)$ durch Ω und h_K durch h_ℓ ersetzt sind.

Wir skizzieren zunächst die zugrunde liegende Beweisidee für den Fall, daß $V = H^1(\Omega)$ gilt. Wir betrachten den Standard-Finite-Elemente-Raum, den wir auf Ω einschränken:

$$S_\ell^{p,r}(\Omega) := \{v \in C^0(\Omega) \mid \exists w \in S_\ell^{p,r} : v = w|_\Omega\}.$$

Wir haben vorausgesetzt, daß Ω ein Lipschitz-Gebiet ist. Das sichert die Existenz¹ eines stetigen Fortsetzungsoperator $E_k : H^k(\Omega) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^d)$, d.h.

$$\|E_k u\|_{k, \mathbb{R}^d} \leq C_E \|u\|_{k, \Omega}, \quad \forall u \in H^k(\Omega), \quad (5.1)$$

wobei die Konstante C_E lediglich von k und Ω abhängt. Sei nun $u \in H^k(\Omega)$ mit $k = p + 1$ und $u^* := E_k u$. Aus $p \geq 1$ und der Voraussetzung an Ω folgt mit dem Sobolevschen Einbettungssatz ($d = 2, 3$), daß u^* stetig ist (siehe [32, Kapitel 1.4.5]). Daher ist die Interpolierende von u^* wohldefiniert. Wir definieren die Restriktion $R_\ell : C^0(\Omega) \rightarrow R^{\Theta_\ell}$ einer stetigen Funktion auf die Knotenpunkte des Gitter τ_ℓ durch

$$R_\ell[u](x) = u(x), \quad \forall x \in \Theta_\ell. \quad (5.2)$$

Wir setzen

$$\tilde{u}_\ell^{int}(x) := I_\ell R_\ell[u].$$

Offensichtlich ist \tilde{u}_ℓ^{int} eine Funktion, die auf $\text{dom } \tau_\ell =: \Omega_\ell \supset \Omega$ definiert ist. In [7, Theorem 4.7.3] wird bewiesen, daß

$$\left| u^* - \tilde{u}_\ell^{int} \right|_{m, \Omega_\ell} \leq C h_\ell^{p+1-m} |u^*|_{p+1, \Omega_\ell}$$

gilt. Die Approximation von u ist dann durch $\tilde{u}_\ell := \tilde{u}_\ell^{int}|_\Omega \in S_\ell^{p,r}(\Omega)$ definiert. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |u - \tilde{u}_\ell|_{m, \Omega} &\leq \left| u^* - \tilde{u}_\ell^{int} \right|_{m, \Omega_\ell} \leq C h_\ell^{p+1-m} |u^*|_{p+1, \Omega_\ell} \\ &\leq C C_E h_\ell^{p+1-m} \|u\|_{p+1, \Omega}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Um die Approximationseigenschaft für den zusammengesetzten Finite-Elemente-Raum S_ℓ^{CFE} zu beweisen, verwenden wir eine Funktion, die \tilde{u}_ℓ möglichst ähnlich ist. Wir setzen

$$u_\ell := I_{\ell_{\max}} P_{\ell_{\max}, \ell} R_\ell[u].$$

Der Beweis, daß u_ℓ die Approximationseigenschaft besitzt, benutzt die Abschätzung (5.3) und wird im wesentlichen aus der folgenden Stabilitätsabschätzung der iterierten Prolongation

$$\|I_j P_{j, \ell}[\beta_\ell]\|_m \leq C \|I_\ell[\beta_\ell]\|_m \quad \forall \beta_\ell \in R^{\Theta_\ell} \quad (5.4)$$

¹Die Existenz eines derartigen Fortsetzungsoperator ist auch für eine größere Klasse von Gebieten gesichert (siehe [15], [26]).

für $m = 0, 1$ bestehen. Die daraus hergeleitete Fehlerabschätzung wird die Konstante C_E enthalten. In der Einleitung wurde erklärt, daß CFE-Räume sich besonders zur Diskretisierung auf Gebieten mit kleinen geometrischen Details eignen. Ziel ist es daher, Fehlerabschätzungen herzuleiten, die unabhängig von der *Größe* und der *Anzahl* der Mikrostrukturen sind. Im Hinblick auf die Abschätzung (5.3) ist es daher notwendig zu untersuchen, ob ein Fortsetzungsoperator E_k gefunden werden kann, so daß die Konstante C_E in (5.1) unabhängig von der Größe und Anzahl der Mikrostrukturen ist.

Die Analyse der Approximationsfehler wird in zwei Teile zerfallen. Im nächsten Abschnitt werden wir beweisen, daß unter sehr moderaten Annahmen an das Gebiet ein Fortsetzungsoperator existiert, so daß C_E unabhängig von der Größe der Mikrostrukturen ist. Dieser Abschnitt ist unabhängig von der eigentlichen Fehlerabschätzung der Finite-Elemente-Räume im darauffolgenden Abschnitt und kann von Lesern, die an diesen Details nicht interessiert sind, übersprungen werden.

5.1 Fortsetzungsoperatoren für Gebiete mit kleinen geometrischen Details

Im Buch von Stein [41] wird gezeigt, daß die Fortsetzung nach Whitney [45] stetig Funktionen aus $H^k(\Omega)$ zu Funktionen in $H^k(\mathbb{R}^d)$ fortsetzt, falls das Gebiet minimal-glatte Rand besitzt. In [35] wird eine Modifikation dieser Fortsetzung im Fall von $H^1(\Omega)$ vorgestellt, die sich für Gebiete mit Mikrostrukturen, speziell für perforierte Gebiete, eignet. Die Fortsetzungskonstante ist unter schwachen Bedingungen an das Gebiet unabhängig von der Größe der Mikrostrukturen. Wir benötigen in (5.3) die Fortsetzung von Funktionen aus $H^{p+1}(\Omega)$ speziell für $p \geq 1$. Im folgenden werden wir die in [35] vorgestellten Fortsetzungsoperatoren auf diesen Fall verallgemeinern und zeigen, daß unter denselben Voraussetzungen an das Gebiet die Norm des Fortsetzungsoperator unabhängig ist von der Größe der Mikrostrukturen.

Wir rekapitulieren den zentralen Satz über die Fortsetzung nach Whitney von Sobolev-Funktionen auf Gebieten mit minimal-glatte Rand.

Satz 77 *Sei Ω eine offene Teilmenge der \mathbb{R}^d mit minimal-glatte Rand. Dann existiert ein linearer Fortsetzungsoperator (nach Whitney) $\mathcal{E}_\Omega : H^k(\Omega) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^d)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $\mathcal{E}_\Omega [u] |_\Omega = u$,
2. \mathcal{E}_Ω bildet $H^k(\Omega)$ stetig auf $H^k(\mathbb{R}^d)$ ab für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\|\mathcal{E}_\Omega [u]\|_{k, \mathbb{R}^d} \leq C_W \|u\|_{k, \Omega}, \quad \forall u \in H^k(\Omega), \quad (5.5)$$

mit einer Konstanten, die nur von k und den Konstanten ε , N und M aus Definition 4, welche die minimale Glattheit von Mengen charakterisieren, abhängt.

Dieser Satz ist formuliert und bewiesen in [41, pp. 181]. Wir betonen an dieser Stelle, daß der Fortsetzungsoperator nach Whitney \mathcal{E}_Ω unabhängig von der Differentiationsordnung k ist.

Die Annahmen in Satz 77 können im allgemeinen nicht abgeschwächt werden (vgl. [41, p.189]).

Wir sind an Gebieten interessiert, die kleine geometrischen Details enthalten. Als Beispiel betrachten wir das Ringegebiet

$$\Omega_\delta := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \delta < \|x\| < 1\}. \quad (5.6)$$

Für kleines δ verursacht die erste Bedingung in der Definition 4 Probleme, da der Radius ε der Kugeln $B_\varepsilon(x)$ mit kleiner werdendem δ immer kleiner gewählt werden muß. Das bedeutet, daß $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ gilt und C_W aus (5.5) von δ abhängt.

Im folgenden wird ein Fortsetzungsoperator definiert, für den die Fortsetzungskonstante nicht von der Größe der Mikrostrukturen abhängt. Sie wird nur von den Bildern lokaler Teilgebiete unter einer geeigneten Skalierung abhängen. Um die Abhängigkeit vom Gebiet genauer zu präzisieren, benötigen wir die folgenden Konstanten.

Definition 78 Sei A ein Lipschitz-Gebiet mit minimal-glattem Rand Γ und \mathcal{E}_A die Fortsetzung nach Whitney. Die kleinste Konstante C , für die

$$\|\mathcal{E}_A [u]\|_{k, \mathbb{R}^d} \leq C \|u\|_{k, \Omega}, \quad \forall u \in H^k(A)$$

gilt, wird mit \mathcal{W}_A bezeichnet

Sei Γ_D ein Teilmenge des Randes, die positives Lebesgue-Maß auf Γ besitzt. Daher sind die Normen $|\cdot|_{k, A}$ und $\|\cdot\|_{k, A}$ auf $H^k(A, \Gamma_D)$ äquivalent. Die kleinste Konstante, für die die Friedrichs-Ungleichung

$$\|u\|_{k, A} \leq C |u|_{k, A}, \quad \forall u \in H^k(A, \Gamma_D)$$

gilt, nennen wir \mathcal{F}_{A,Γ_D} , und die kleinste Konstante, für die die verallgemeinerte Poincaré-Ungleichung

$$\inf_{p \in P_{k-1}} \|u + p\|_{k,A} \leq C |u|_{k,A}, \quad \forall u \in H^k(A) / P_{k-1}$$

gilt, wird \mathcal{P}_A genannt. Hierbei bezeichnet P_{k-1} wieder den Raum aller Polynome vom Maximalgrad $k - 1$ und $H^k(A) / P_{k-1}$ den entsprechenden Quotientenraum.

Wir benötigen einige weitere Voraussetzungen an das Gebiet.

Definition 79 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Wir nehmen an, daß eine Teilmenge $N'_0 \subset N_0$ und ein Paar $\mathcal{U} := (\mathcal{C}, \varepsilon)$ existiert, bestehend aus einer Folge $\mathcal{C} := \{\omega_i\}_{i \in N'_0}$ offener Teilmengen $\omega_i \subset \mathbb{R}^d$ und einer positiven Zahlenfolge $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in N'_0}$,² welches die untenstehenden Eigenschaften besitzt. Zur Orientierung dient Abbildung 5.1. Es existiert eine endliche Zahl von Teilmengen $\{\mathcal{C}_j\}_{j=1}^M$, $\mathcal{C}_j \subset \mathcal{C}$, mit den Eigenschaften

- $\mathcal{C} = \bigcup_{j=1}^M \mathcal{C}_j$,
- $\forall 1 \leq j \leq M, \quad \forall \omega, \omega' \in \mathcal{C}_j$:

$$\omega = \omega' \vee \bar{\omega} \cap \bar{\omega}' = \emptyset. \quad (5.7)$$

Für $0 \leq j \leq M - 1$ sind die Mengen Ω_j rekursiv durch

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \Omega, \\ \Omega_{j+1} &:= \text{int} \left\{ \overline{\Omega_j \cup \bigcup_{\omega \in \mathcal{C}_{j+1}} \omega} \right\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

definiert. Für $\omega \in \mathcal{C}_j$ setzen wir $\omega^{\text{in}} := \omega \cap \Omega_{j-1}$ und $\omega^{\text{out}} := \omega \cap \Omega_{j-1}^c$.³ Die mit ε_i skalierten Gebiete werden $\hat{\omega}_i$ genannt:

$$\hat{\omega}_i := \left\{ \hat{x} \in \mathbb{R}^d \mid \exists x \in \omega_i : \hat{x} = x / \varepsilon_i \right\}, \quad (5.9)$$

und analog ist $\widehat{\omega}_i^{\text{in}}$ und $\widehat{\omega}_i^{\text{out}}$ definiert. Es muß gelten:

²Da wir speziell an *kleinen* geometrischen Details interessiert sind, beschränken wir uns auf den Fall $0 < \varepsilon_i \leq 1$.

³Das Komplement einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ wird mit $A^c := \mathbb{R}^d \setminus A$ bezeichnet.

Abbildung 5.1: Gebiet Ω , welches zwei kleine Löcher besitzt und Überdeckung mit Gebieten ω_j . Der grau gefärbte Bereich stellt das Gebiet ω_0 dar. Die Teilmenge \mathcal{C}_1 ist durch schwarze Kreise, \mathcal{C}_2 durch Kreuze, \mathcal{C}_3 durch gedrehte Kreuze und \mathcal{C}_4 durch * markiert.

1. Alle Gebiete Ω_j sind Lipschitz-Gebiete mit minimal-glattem Rand.
2. Für alle $i \geq 1$ sind ω_i , ω_i^{in} , ω_i^{out} Lipschitz-Gebiete mit minimal-glattem Rand.
3. Es gilt $\omega_0 \subset \Omega \subset \Omega_M$ und für alle $i \in N_0'$: $\omega_i^{in} \neq \emptyset$.

Für $i \geq 0$, bezeichnen wir die Stetigkeitskonstanten der Fortsetzung nach Whitney mit \mathcal{W}_i :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 &:= \mathcal{W}_{\Omega_M}, \\ \mathcal{W}_i &:= \mathcal{W}_{\widehat{\omega_i^{in}}}, \quad i \geq 1, \end{aligned}$$

und die entsprechenden Konstanten der Friedrichs- bzw. verallgemeinerten Poincaré-Ungleichung mit \mathcal{F}_i und \mathcal{P}_i . Das Supremum über diese Konstanten wird mit

$$C(\mathcal{U}) := \sup_{i \geq 0} \max(\mathcal{W}_i, \mathcal{F}_i, \mathcal{P}_i)$$

bezeichnet. Das Infimum über alle möglichen Überdeckungen definiert die Konstante

$$C_\Omega := \inf \{C(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \text{ erfüllt die Eigenschaften (1)-(3)}\}.$$

Wir werden zeigen, daß für Ω ein Fortsetzungsoperator existiert, der nur von den Konstanten C_Ω abhängt. Die obige Definition bedeutet das folgende. Das Gebiet soll sich lokal aus skalierten Bildern „vernünftiger“ Gebiete zusammensetzen. Die Konstante C_Ω ist dann unabhängig von der Skalierung. Bevor wir den Beweis ausführen, soll die Bedeutung anhand von Beispielen illustriert werden.

Beispiel 80 Wir betrachten das Gebiet Ω_δ aus (5.6). Wir definieren das System von $\mathcal{U} = (\mathcal{C}, \varepsilon)$ durch

$$\begin{aligned} \omega_0 &:= \{x \in R^d \mid 2\delta < \|x\| < 1\}, \\ \omega_1 &:= \{x \in R^d \mid \|x\| < 3\delta\}, \quad \varepsilon_1 = \delta. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist das Gebiet $\widehat{\omega}_1^{int}$ durch

$$\widehat{\omega}_1^{int} := \{\hat{x} \in R^d \mid 1 < \|\hat{x}\| < 3\}$$

gegeben und unabhängig von δ . Die Konstante C_Ω ist daher unabhängig von δ . Es ist klar, daß Gebiet Ω beliebig viele kreisförmige Löcher enthalten darf, so lange für alle paarweise verschiedenen Löcher L_i gilt, daß der Abstand zum nächstgelegenen Loch mindestens $O(\text{diam } L_i)$ beträgt. Dann ist C_Ω wiederum unabhängig von der Größe und Anzahl der Löcher.

Beispiel 81 Wir betrachten das Gebiet

$$\begin{aligned} \Omega_\delta &:= \{x \in R^d \mid \|x\|_\infty < 1\} \setminus S_\delta \\ S_\delta &:= \{x \in R^d \mid x_1 \geq 0 \wedge |x_2| \leq \delta\}, \end{aligned}$$

welches in Abbildung 5.2 dargestellt ist.

Die beiden links dargestellten Überdeckungsgebiete ω_1, ω_2 sind zu langgestreckt, um durch eine einfache Skalierung der Form (5.9) auf ein Einheits-element abgebildet werden zu können. Falls schmalere Gebiete ω_i verwendet werden (rechte Abbildung), wäre die Bedingung verletzt, daß ω_2^{in} ein Gebiet sein muß, da $\omega_2^{in} = \omega_2 \cap \Omega_1 = \omega_2 \cap \text{int} \{\overline{\Omega \cup \omega_1}\}$ **nicht** zusammenhängend ist.

Abbildung 5.2: Gebiet Ω_δ mit Ausschnitten möglicher Überdeckungen durch Gebiete ω_i . Links: Beide Gebiete ω_1, ω_2 können nicht durch eine einfache Skalierung, die unabhängig von δ ist, auf ein Einheitsgebiet (z.B. Einheitswürfel) transformiert werden. Rechts: Das Gebiet ω_2^{in} (grau gefärbt) ist nicht zusammenhängend.

Das folgende Beispiel illustriert, daß Löcher im Gebiet nicht wesentlich näher zusammenrücken dürfen als der Durchmesser der Löcher.

Beispiel 82 Wir betrachten das Gebiet $\Omega_\delta = (-\delta, 1 + \delta) \times (-\delta, 1 + \delta) \setminus (0, 1)^2$. Auf diesem Gebiet betrachten wir die Funktion

$$u(x) = \sinh x_2$$

Das Gebiet ohne Loch ist durch $\Omega = (-\delta, 1 + \delta) \times (-\delta, 1 + \delta)$ gegeben. Man rechnet nach, daß die Fortsetzung von u auf Ω mit minimaler H^1 -Norm durch $u^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$u^*(x) = \sinh x_2$$

gegeben ist. Es gilt

$$\|u^*\|_{1,\Omega} = \eta(\delta) \|u\|_{1,\Omega_\delta}$$

mit einer Funktion η , die sich für $\delta \rightarrow 0$ wie $\eta(\delta) \geq C/\sqrt{\delta}$ verhält. Daher ist die Fortsetzungs-konstante für dieses Gebiet nicht unabhängig von δ .

Wir formulieren nun den Satz zur Existenz von Fortsetzungsoperatoren für Gebiete mit kleinen geometrischen Details.

Satz 83 Sei Ω ein Gebiet mit minimal-glattem Rand. Sei C_Ω die Konstante aus Definition 79. Dann existiert für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ein linearer Fortsetzungsoperator $E_k : H^k(\Omega) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^d)$ mit den folgenden Eigenschaften.

1. Für alle $u \in H^k(\Omega)$ gilt $E_k[u] |_\Omega = u$.

2. E_k ist stetig, d.h.

$$\|E_k[u]\|_{k,R^d} \leq C_E \|u\|_{k,\Omega}, \quad \forall u \in H^k(\Omega).$$

3. Die Konstante C_E hängt nur von C_Ω und M aus Definition 79 ab.

Im Gegensatz zur Fortsetzung nach Whitney wird der Fortsetzungsoperator E_k von der Differentiationsordnung k abhängen. Der Einfachheit halber schreiben wir jedoch abkürzend E statt E_k . Der Beweis von Satz 83 ist wie folgt gegliedert. Wir werden zunächst explizit den Fortsetzungsoperator konstruieren und dann einige Hilfssätze beweisen. Danach wird Satz 83 bewiesen. Wir verwenden die Bezeichnungen aus Definition 79. Der Fortsetzungsoperator E_j wird sukzessive eine Funktion $u \in H^k(\Omega_{j-1})$ nach $H^k(\Omega_j)$ fortsetzen, wobei Ω_j durch (5.8) definiert war. Da $\Omega_0 = \Omega$ und Ω_M minimal-glatt sind, ist damit ein Fortsetzungsoperator durch

$$E := \mathcal{E}_{\Omega_M} E_M E_{M-1} \cdots E_1 \quad (5.10)$$

von $H^k(\Omega)$ nach $H^k(R^d)$ definiert.

In Definition 79 wurde gefordert, daß Ω_{j-1} Lipschitz-Gebiete mit minimal-glattem Rand sind. Sei $\mathcal{U} = (\mathcal{C}, \varepsilon)$ ein System, das die Eigenschaften aus Definition 79 besitzt, und $2C_\Omega = C(\mathcal{U})$ erfüllt. Daher existiert nach Satz 77 für jede Funktion $u \in H^k(\Omega_{j-1})$ die Fortsetzung nach Whitney, die wir mit $u^* := \mathcal{E}_{\Omega_{j-1}}[u]$ bezeichnen. Dann gilt

$$\|u^*\|_{k,\Omega_j} \leq C \|u^*\|_{k,R^d} \leq \mathcal{W}_{\Omega_{j-1}} \|u\|_{k,\Omega_{j-1}}. \quad (5.11)$$

Im folgenden definieren wir eine Fortsetzung von u , so daß (5.11) gilt, wobei die Norm auf der rechten Seite durch die Seminorm ersetzt werden kann.

Für ein Lipschitz-Gebiet $A \subset R$ mit minimal-glattem Rand $\Gamma := \partial A$ definieren wir die Bilinearform, die zur $H^k(A)$ -Seminorm gehört, durch

$$(v, w)_{=k,A} := \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha v, D^\alpha w)_{L^2(A)}.$$

Sei Γ_D eine Teilmenge von Γ , die positives Lebesgue-Maß auf Γ besitzt. Auf Grund der Friedrichs-Ungleichung gilt dann für alle $v \in H^k(A, \Gamma_D)$ die Abschätzung

$$\|v\|_{k,A} \leq \mathcal{F}_{A,\Gamma_D} |v|_{k,A}.$$

Wegen des Lax-Milgram-Lemmas besitzt daher für jedes $w \in H^k(A)$ das Variationsproblem: Suche $z \in H^k(A, \Gamma_D)$, so daß

$$(z, v)_{=k,A} = (w, v)_{=k,A}, \quad \forall v \in H^k(A, \Gamma_D) \quad (5.12)$$

gilt, eine eindeutige Lösung, die stetig von w abhängt:

$$\|z\|_{k,A} \leq \mathcal{F}_{A, \Gamma_D} |w|_{k,A}. \quad (5.13)$$

Die Projektion, die w auf z abbildet, wird im folgenden $P_{A, \Gamma_D} : H^k(A) \rightarrow H^k(A, \Gamma_D)$ genannt. Für die Operatornorm gilt dann

$$\|P_{A, \Gamma_D}\| \leq \mathcal{F}_{A, \Gamma_D}.$$

Damit läßt sich die Modifikation der Fortsetzung nach Whitney angeben. Sei dazu A wie oben definiert und $A^{in} \subset A$, $A^{out} := A \setminus \overline{A^{in}}$ Lipschitz-Gebiete mit minimal-glattem Rand. Sei $\gamma := \overline{A^{in}} \cap \overline{A^{out}}$ der Rand, über den fortgesetzt werden soll. Für $u \in H^k(A^{in})$ bezeichnet $u_W := \mathcal{E}_{A^{in}}[u]$ die Fortsetzung nach Whitney. Dann setzen wir

$$E_{A^{in}, A}[u] = \begin{cases} u & \text{in } A^{in}, \\ u_W - P_{A^{out}, \gamma}[u_W] & \text{in } A^{out}. \end{cases} \quad (5.14)$$

Die Norm von $E_{A^{in}, A}[u]$ wird in folgendem Lemma abgeschätzt.

Lemma 84 *Sei $E_{A^{in}, A} : H^k(A^{in}) \rightarrow H^k(A)$ durch (5.14) definiert. Dann gilt für alle $u \in H^k(A^{in})$*

$$\|E_{A^{in}, A}[u]\|_{k,A} \leq C \|u\|_{k,A^{in}}, \quad (5.15)$$

wobei C nur von der Konstanten der Whitney-Fortsetzung und $\mathcal{F}_{A^{out}, \gamma}$ abhängt.

Beweis. Wir setzen wieder $u_W := \mathcal{E}_{A^{in}}[u]$. Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} \|E_{A^{in}, A}[u]\|_{k,A} &\leq \|u\|_{k,A^{in}} + \|E_{A^{in}, A}[u]\|_{k,A^{out}} \\ &\leq \|u\|_{k,A^{in}} + \|u_W\|_{k,A^{out}} + \|P_{A^{out}, \gamma}[u_W]\|_{k,A^{out}} \\ &\leq \|u\|_{k,A^{in}} + \mathcal{W}_{A^{in}} \|u\|_{k,A^{in}} + \mathcal{F}_{A^{out}, \gamma} \|u_W\|_{k,A^{out}} \\ &\leq (1 + \mathcal{W}_{A^{in}} (1 + \mathcal{F}_{A^{out}, \gamma})) \|u\|_{k,A^{in}}. \end{aligned}$$

■

Der wesentliche Unterschied dieser Fortsetzung im Vergleich zu der Whitney'schen ist, daß in (5.15) die Normen durch Seminormen ersetzt werden können. Dies ist Gegenstand des folgenden Lemmas.

Lemma 85 *Mit den Bezeichnungen aus vorigem Lemma gilt für alle $u \in H^k(A^{in})$ die Abschätzung*

$$\left| E_{A^{in},A} [u] \right|_{k,A} \leq C |u|_{k,A^{in}},$$

wobei C wiederum nur von der Konstanten der Whitney-Fortsetzung und $\mathcal{F}_{A^{out},\gamma}$, $\mathcal{P}_{A^{in}}$ abhängt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß für alle Polynome vom Maximalgrad $k - 1$, d.h. $p \in P_{k-1}$ gilt

$$E_{A^{in},A} [p] = p.$$

Sei p_W die Whitney-Fortsetzung von $p|_{A^{in}}$ auf A . Dann definieren wir $p^* \in H^k(A^{out}, \gamma)$ durch

$$(p^*, v)_{=k,A^{out}} = (p_W, v)_{=k,A^{out}}, \quad \forall v \in H^k(A^{out}, \gamma)$$

oder äquivalent durch

$$(p^* - p_W, v)_{=k,A^{out}} = 0, \quad \forall v \in H^k(A^{out}, \gamma).$$

Da p ein Polynom vom Maximalgrad $k - 1$ ist, erfüllt $p^* := p_W - p$ diese Gleichung, so daß wir lediglich zeigen müssen, daß $p^* \in H^k(A^{out}, \gamma)$ gilt. Wir wissen, daß $p_W - p \in H^k(A)$ gilt. Aus $p|_{A^{in}} = p_W|_{A^{in}}$ folgt daher, daß $p_W - p \in H^k(A^{in}, \gamma)$ gilt, und schließlich auch $p_W - p \in H^k(A^{out}, \gamma)$. Damit ist die Hilfsbehauptung bewiesen.

Sei nun $u \in H^k(A^{in})$, und ein Polynom $p \in P_{k-1}$ durch

$$\int_{A^{in}} D^\alpha (u - p) dx = 0, \quad \forall |\alpha| \leq k - 1$$

definiert. Mit Hilfe der verallgemeinerten Poincaré-Ungleichung (siehe [33, Satz 1.5]) erhalten wir

$$\|u - p\|_{k,A^{in}} \leq \mathcal{P}_{A^{in}} |u - p|_{k,A^{in}} = \mathcal{P}_{A^{in}} |u|_{k,A^{in}}.$$

Mit Hilfe von Lemma 84 erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned} \left| E_{A^{in},A} [u] \right|_{k,A} &= \left| E_{A^{in},A} [u] - p \right|_{k,A} = \left| E_{A^{in},A} [u - p] \right|_{k,A} \\ &\leq (1 + \mathcal{W}_{A^{in}} (1 + \mathcal{F}_{A^{out},\gamma})) \|u - p\|_{k,A^{in}} \\ &\leq (1 + \mathcal{W}_{A^{in}} (1 + \mathcal{F}_{A^{out},\gamma})) \mathcal{P}_{A^{in}} |u|_{k,A^{in}}. \end{aligned}$$

■ Wir sind nun in der Lage, den angekündigten Fortsetzungsoperator $E_j : H^k(\Omega_{j-1}) \rightarrow H^k(\Omega_j)$ zu definieren. Dazu werden lokal die Fortsetzungsoperatoren $E_{A^{in},A}[u]$ angewendet. Sei dazu $u \in H^k(\Omega_{j-1})$ und $\omega_i \in \mathcal{C}_j$. Die Einschränkung von u auf ω_i^{in} wird mit $u_i^{in} := u|_{\omega_i^{in}}$ bezeichnet. Die skalierte Funktion $\hat{u}_i^{in} : \widehat{\omega}_i^{in} \rightarrow R$ ist durch

$$\hat{u}_i^{in}(\hat{x}) := u_i^{in}(\varepsilon_i \hat{x})$$

gegeben. Mit diesen Bezeichnungen können wir den Fortsetzungsoperator definieren

$$E_j[u] = \begin{cases} u & \text{auf } \Omega_{j-1}, \\ E_{\widehat{\omega}_i^{in}, \widehat{\omega}_i}[\hat{u}_i^{in}](x/\varepsilon_i) & \text{auf } \omega_i. \end{cases} \quad (5.16)$$

Damit sind wir nun in der Lage, Satz 83 zu beweisen.

Beweis von Satz 83.

Wir werden die Norm des Fortsetzungsoperators $E := \mathcal{E}_{\Omega_M} E_M E_{M-1} \cdots E_1$ abschätzen, wobei \mathcal{E}_{Ω_M} die Fortsetzung nach Whitney bezeichnet, und E_j durch (5.16) definiert wurde. Da die Stetigkeitskonstante von \mathcal{E}_{Ω_M} in C_Ω enthalten ist, genügt es, die Norm von E_j abzuschätzen. Um die Norm $\|E_j[u]\|_{k, \Omega_j}$ abzuschätzen, betrachten wir zunächst die Seminormen. Wir beginnen mit der H^k -Seminorm. Es genügt, die Abschätzung für jedes $\omega_i \in \mathcal{C}_j$ getrennt durchzuführen. Wir definieren die Funktion $u_i : \omega_i \rightarrow R$ durch

$$u_i(x) := E_{\widehat{\omega}_i^{in}, \widehat{\omega}_i}[\hat{u}_i^{in}](x/\varepsilon_i).$$

Damit gilt

$$|u_i|_{k, \omega_i}^2 = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\omega_i} (D^\alpha u_i)^2 dx = \varepsilon_i^{d-2k} \sum_{|\alpha|=k} \int_{\widehat{\omega}_i} (\hat{D}^\alpha \hat{u}_i)^2 d\hat{x} = \varepsilon_i^{d-2k} |\hat{u}_i|_{s, \widehat{\omega}_i}^2.$$

Sei $\hat{\gamma} := \overline{\widehat{\omega}_i^{in}} \cap \overline{\widehat{\omega}_i^{out}}$. Mit Hilfe von Lemma 85 folgt daraus die Abschätzung

$$|\hat{u}_i|_{k, \widehat{\omega}_i} \leq C |\hat{u}_i^{in}|_{k, \widehat{\omega}_i^{in}}$$

mit einer Konstanten C , die nur von $\mathcal{W}_{\widehat{\omega}_i^{in}}$, $\mathcal{F}_{\widehat{\omega}_i^{out}, \hat{\gamma}}$ und $\mathcal{P}_{\widehat{\omega}_i^{in}}$ abhängt. Die Rücktransformation der Seminorm liefert

$$|u_i|_{k, \omega_i}^2 \leq C \varepsilon_i^{d-2k} |\hat{u}_i^{in}|_{k, \widehat{\omega}_i^{in}}^2 = C |u_i^{in}|_{k, \omega_i^{in}}^2 = C |u|_{k, \omega_i^{in}}^2.$$

Wir kommen nun zur Abschätzung der L^2 -Norm. Dafür gilt

$$|u_i|_{0,\omega_i}^2 = \varepsilon_i^d |\hat{u}_i|_{0,\hat{\omega}_i}^2.$$

Indem wir $|\hat{u}_i|_{0,\hat{\omega}_i} \leq \|\hat{u}\|_{k,\hat{\omega}_i}$ benutzen, erhalten wir mit Hilfe von Lemma 84

$$\begin{aligned} |u_i|_{0,\omega_i}^2 &\leq \varepsilon_i^d \|\hat{u}_i\|_{k,\hat{\omega}_i}^2 \leq C \varepsilon_i^d \|\hat{u}_i^{in}\|_{k,\omega_i^{in}}^2 \\ &= C \varepsilon_i^d \sum_{m=0}^k \sum_{|\alpha|=m} \int_{\omega_i^{in}} (\hat{D}^\alpha \hat{u}_i^{in})^2 d\hat{x} = C \varepsilon_i^d \sum_{m=0}^k \varepsilon_i^{2m-d} \sum_{|\alpha|=m} \int_{\omega_i^{in}} (D^\alpha u_i^{in})^2 d\hat{x} \\ &= C \sum_{m=0}^k \varepsilon_i^{2m} |u|_{m,\omega_i^{in}}^2 \leq C \|u\|_{k,\omega_i^{in}}^2. \end{aligned}$$

Die Abschätzung für die restlichen Seminormen geschieht mit Hilfe von Interpolation. Damit ist Satz 83 bewiesen. ■

Zusammenfassend haben wir gezeigt, daß für Gebiete, deren Mikrostrukturen durch lokale Skalierung auf Gebiete abgebildet werden können, die unabhängig von den Größe der Mikrostrukturen sind, Fortsetzungsoperatoren konstruiert werden können, deren Norm *unabhängig* ist von der Größe der Mikrostrukturen.

Wir bemerken, daß auch für allgemeinere Gebiete Fortsetzungsoperatoren konstruiert werden können (siehe [15], [26], [32, Kapitel 1.5]), jedoch hier, die Abhängigkeit der Norm des Operators von der *Größe* und *Anzahl* der Mikrostrukturen zentrale Bedeutung besitzt. In diesem Sinn waren auch die Beispiele gedacht, die illustrierten, wie Gebiete aussehen können, für die die Norm der Fortsetzungsoperatoren groß werden kann.

Nach diesem Exkurs in die Theorie von Fortsetzungsoperatoren werden wir uns in den folgenden Kapiteln mit Fehlerabschätzungen für zusammengesetzte finite Elemente beschäftigen.

5.2 Die Approximationseigenschaft für zusammengesetzte finite Elemente

Der Beweis der Approximationseigenschaft für zusammengesetzte finite Elemente wird sich in zwei Teile gliedern. Zunächst werden wir die Approximation von Funktionen aus $H^k(\Omega)$ mit CFE-Räumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind, beweisen. Danach wird der Fall von wesentlichen

Randbedingungen analysiert. In [20] und [24] wurde ein Beweis der Approximationseigenschaft (globale Version) für lineare, zusammengesetzte finite Elemente auf zweidimensionalen, quasi-uniformen Gittern gegeben. Die im folgenden erzielten Aussagen sind wesentlich allgemeiner und beinhalten Approximationen höherer Ordnung ($p \geq 1$), dreidimensionale FE-Gitter und die lokale Approximationseigenschaft.

5.2.1 Approximation von Funktionen aus $H^k(\Omega)$

In diesem Abschnitt werden wir die Approximationseigenschaft von CFE-Räumen für Funktionen aus $H^k(\Omega)$ untersuchen. Wir betrachten den Fall, daß $p \geq 1$ der Polynomgrad ist, der den CFE-Räumen zugrunde liegt, und $k = p+1$ gilt. In Bemerkung 92 wird erklärt, wie diese Resultate auf den Fall $k = 1$ und nicht-ganzzahlige Differentiationsordnung $k \in \mathbb{R}$ verallgemeinert werden kann.

Im folgenden wird gezeigt, daß für alle $u \in H^k(\Omega)$ ein $u_\ell \in S_\ell^{CFE}$ existiert, so daß

$$\|u - u_\ell\|_{m, \sigma_\ell^{\max}(K)} \leq Ch_K^{p+1-m} \|u\|_{p+1, I_{\ell, \ell}(K)}, \quad m = 0, 1,$$

für alle $K \in \tau_\ell$ gilt. Daraus wird dann die globale Approximationseigenschaft

$$\|u - u_\ell\|_{m, \Omega} \leq Ch_\ell^{p+1-m} \|u\|_{p+1, \Omega}, \quad m = 0, 1$$

folgern. Wir nehmen an, daß Ω glatt genug ist, damit ein Fortsetzungsoperator $E : H^k(\Omega) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^d)$ existiert, der stetig ist. Die Fortsetzung $E[u]$ einer Funktion u wird wiederum mit u bezeichnet.

Da in zwei und drei Raumdimensionen Funktionen aus $H^k(\Omega)$ wegen $k \geq p+1 \geq 2$ stetig sind, lassen sich Punktauswertungen definieren. Sei dazu $u \in H^{p+1}(\Omega)$ und $\beta_\ell := R_\ell[u]$, wobei R_ℓ den Restriktionsoperator aus (5.2) bezeichnet. Wir werden zeigen, daß die zugehörige CFE-Funktion

$$u_\ell := I_{\ell_{\max}} P_{\ell_{\max}, \ell}[\beta_\ell]$$

die obige Approximationseigenschaft besitzt. Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \beta_\ell &:= R_\ell[u], & u_\ell^{int} &:= I_\ell[\beta_\ell], \\ \beta_{\ell, \ell-1} &:= P_{\ell, \ell-1}[\beta_{\ell-1}], & u_{\ell, \ell-1}^{int} &:= I_\ell[\beta_{\ell, \ell-1}]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Da die Bezeichnung $\sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K)$ in den folgenden Abschätzungen sehr häufig vorkommen wird, führen wir die Abkürzung $\sigma(K) := \sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K)$ ein. Auf dem Raum der Gitterfunktionen lassen sich die folgenden Normen definieren. Für Indizes $k \in Z$, $q \in [1, \infty]$ gelte $S_\tau^{p,r} \subset W^{k,q}(\Omega_\tau)$. Für eine Gitterfunktion $\beta \in R^{\Theta_\tau}$ setzen wir dann

$$\|\beta\|_{W^{k,q}(\Omega_\tau)} := \|I_\tau[\beta]\|_{W^{k,q}(\Omega_\tau)}.$$

Die entsprechende Seminorm wird mit $|\cdot|_{W^{k,q}(\Omega_\tau)}$ bezeichnet, und für $q = 2$ schreiben wir $\|\beta\|_{k,\Omega_\tau}$. Falls keine Verwechslungsgefahr besteht, verzichten wir auf die explizite Angabe des Gebiets Ω_τ .

Der Beweis der Approximationseigenschaft gliedert sich in zwei Teile. Einmal muß die Stabilität der iterierten Prolongation in der L^2 - und H^1 -Norm gezeigt werden. Diese ist wie folgt definiert.

Definition 86 Sei $m \in \{0, 1\}$ und $K \in \tau_\ell$. Für $j \geq \ell$ definieren wir die Konstante $\Lambda_{j,\ell}^{(m)}(K)$, welche die Stabilität der iterierten Prolongation beschreibt, als kleinste Konstante, für die

$$|P_{\ell_{\max},j}[\beta]|_{m,\sigma(K)} \leq C |\beta|_{m,I_{j,\ell}(K)}, \quad \forall \beta \in R^{\Theta_j} \quad (5.18)$$

gilt.

Der andere Teil der Fehlerabschätzung wird aus dem Beweis der Approximationseigenschaft für die Einschnittprolongation, d.h. für $u_{\ell,\ell-1}^{int}$, bestehen. Der Rahmen dazu wird durch die folgenden Abschätzungen gegeben. Es gilt

$$|u - u_\ell|_{m,\sigma(K)} \leq |u - u_{\ell_{\max}}|_{m,\sigma(K)} + \sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} |u_j - u_{j-1}|_{m,\sigma(K)}. \quad (5.19)$$

Wegen $u_{\ell_{\max}} = u_{\ell_{\max}}^{int}$ können wir für den ersten Term die Standard-Fehlerabschätzungen für die Finite-Elemente-Interpolierende anwenden (siehe [11]):

$$\begin{aligned} |u - u_j^{int}|_{m,K} &\leq Ch_K^{p+1-m} |u|_{p+1,K}, \\ |u - u_j^{int}|_{W^{0,\infty}(K)} &\leq Ch_K^{p+1-d/2} |u|_{p+1,K}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Daher beschäftigen wir uns nur noch mit dem zweiten Term von (5.19). Wir benutzen die folgende Darstellung

$$u_j - u_{j-1} = I_{\ell_{\max}} P_{\ell_{\max},j} (R_j - P_{j,j-1} R_{j-1}) u$$

zur Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} |u_j - u_{j-1}|_{m,\sigma(K)} &\leq \Lambda_{j,\ell}^{(m)}(K) \left| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right|_{m,I_{j,\ell}(K)} \\ &\leq \Lambda_{j,\ell}^{(m)}(K) \left(\left| u_j^{int} - u \right|_{m,I_{j,\ell}(K)} + \left| u - u_{j,j-1}^{int} \right|_{m,I_{j,\ell}(K)} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (5.21) kann wieder mit (5.20) abgeschätzt:

$$\left| u_j^{int} - u \right|_{m,I_{j,\ell}(K)} \leq Ch_{j,\ell}^{p+1-m}(K) |u|_{p+1,I_{j,\ell}(K)}.$$

Die Abschätzung des zweiten ist Gegenstand des folgenden Lemmas.

Lemma 87 *Sei $u_{j,j-1}^{int}$ durch (5.17) definiert. Dann gelten für $m = 0, 1$ die Fehlerabschätzungen*

$$\begin{aligned} \left| u_{j,j-1}^{int} - u \right|_{m,I_{j,\ell}(K)} &\leq Ch_{j-1,\ell}^{p+1-m}(K) |u|_{p+1,I_{j-1,\ell}(K)}, \\ \left| u_{j,j-1}^{int} - u \right|_{m,\Omega_j} &\leq Ch_{j-1}^{p+1-m} |u|_{p+1,\Omega_{j-1}}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Beweis. Sei $K' \in I_{j,\ell}(K)$ und $x \in K'$. Der Einfachheit halber schreiben wir $I_{j,\ell}$ statt $I_{j,\ell}(K)$ und $h_{j,\ell}$ statt $h_{j,\ell}(K)$.

Mit der Standard-FE-Basis φ_y^j auf K' gilt

$$\begin{aligned} u(x) - u_{j,j-1}^{int}(x) &= u(x) - \sum_{y \in \Theta_{K'}} u_{j,j-1}^{int}(y) \varphi_y^j(x) = u(x) - \sum_{y \in \Theta_{K'}} u_{j-1}^{int}(y) \varphi_y^j(x) \\ &= u(x) - u_j^{int}(x) + \sum_{y \in \Theta_{K'}} \left(u(y) - u_{j-1}^{int}(y) \right) \varphi_y^j(x). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Fehlerabschätzung

$$\left| u - u_{j,j-1}^{int} \right|_{m,K'} \leq \left| u - u_j^{int} \right|_{m,K'} + \max_{y \in \Theta_{K'}} \left| u(y) - u_{j-1}^{int}(y) \right| \sum_{y \in \Theta_{K'}} \left| \varphi_y^j \right|_{m,K'}.$$

Indem wir φ_y^j auf das Einheitsselement transformieren und ausnützen, daß K' regulär ist, erhalten wir⁴, daß φ_y^j beschränkt ist: $\left| \varphi_y^j \right|_{W^{0,\infty}(K')} \leq C$, wobei C nur vom Polynomgrad p abhängt. Mit der Hölder-Ungleichung folgt damit $\left| \varphi_y^j \right|_{0,K'}^2 \leq Ch_{K'}^d$. Sei $F_{K'}$ der Vater von K' auf der Stufe $j-1$, der gemäß

⁴Diese Rechnung wird hier nicht ausgeführt.

Annahme 27, Bedingung 3a, nichtleeren Schnitt mit K' besitzt. Mit Hilfe der inversen Ungleichung (siehe Annahme 24) und der lokalen Graduierung (4.11) folgt daraus

$$\left| \varphi_y^j \right|_{m,K'}^2 \leq Ch_{K'}^{d-2m} \leq C \left(c_r h_{F_{K'}} \right)^{d-2m} \leq C \left(c_r h_{j-1,\ell} \right)^{d-2m}.$$

Nach Definition der Einflußmengen gilt $\Theta_{K'} \subset \text{dom } I_{j-1,\ell}$. Sei $U_{\text{int}}(K')$ eine Teilmenge von $I_{j-1,\ell}$, die $\Theta_{K'}$ überdeckt und aus minimal vielen Elementen besteht:

$$U_{\text{int}}(K') := \text{argmin} \# \left\{ \tau' \subset I_{j-1,\ell} \mid \Theta_{K'} \subset \overline{\text{dom } \tau'} \right\}.$$

Mit (5.20) folgt dann die Abschätzung

$$\max_{y \in \Theta_{K'}} \left| u(y) - u_{j-1}^{\text{int}}(y) \right| \leq Ch_{j-1,\ell}^{p+1-d/2} |u|_{p+1,U_{\text{int}}(K')}$$

Zusammen ergibt das

$$\begin{aligned} \left| u - u_{j,j-1}^{\text{int}} \right|_{m,K'} &\leq Ch_{K'}^{p+1-m} |u|_{p+1,K'} + Ch_{j-1,\ell}^{p+1-d/2} |u|_{p+1,U_{\text{int}}(K')} h_{j-1,\ell}^{d/2-m} \\ &\leq Ch_{j-1,\ell}^{p+1-m} |u|_{p+1,U_{\text{int}}(K')} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten, die unabhängig von u , K' und der lokalen Schrittweite $h_{j-1,\ell}$ ist, jedoch vom Polynomgrad p und den Konstanten, die das Gitter charakterisieren, abhängt. Um daraus eine Abschätzung auf $\text{dom } I_{j,\ell}$ zu erhalten, muß noch über alle $K' \in I_{j,\ell}$ summiert werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \left| u - u_{j,j-1}^{\text{int}} \right|_{m,I_{j,\ell}}^2 &= \sum_{K' \in I_{j,\ell}} \left| u - u_{j,j-1}^{\text{int}} \right|_{m,K'}^2 \leq C \sum_{K' \in I_{j,\ell}} h_{j-1,\ell}^{2(p+1-m)} |u|_{p+1,U_{\text{int}}(K')}^2 \\ &\leq Ch_{j-1,\ell}^{2(p+1-m)} \sum_{\tilde{K} \in I_{j-1,\ell}} |u|_{p+1,\tilde{K}}^2 \sum_{\substack{K' \in I_{j,\ell} \\ \tilde{K} \in U_{\text{int}}(K')}} 1. \end{aligned}$$

Die Anzahl $\# \left\{ K' \in I_{j,\ell} \mid \tilde{K} \in U_{\text{int}}(K') \right\}$ wurde in Lemma 45 durch $C'_\#$ abgeschätzt, woraus die lokale Fehlerabschätzung folgt.

Um die globale Abschätzung zu erhalten, müssen wir über alle $K' \in \tau_j$ summieren. In diesem Fall erhalten wir

$$\sum_{K' \in \tau_j} \left| u - u_{j,j-1}^{\text{int}} \right|_{m,K'}^2 \leq \sum_{K \in \tau_{j-1}} \left| u - u_{j,j-1}^{\text{int}} \right|_{m,I_{j,j-1}(K)}^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{K \in \tau_{j-1}} h_{j-1,j-1}^{2(p+1-m)} |u|_{p+1, I_{j-1,j-1}(K)}^2 \\
&\leq C h_{j-1}^{2(p+1-m)} \sum_{\tilde{K} \in \tau_{j-1}} |u|_{p+1, \tilde{K}}^2 \sum_{\substack{K \in \tau_{j-1} \\ \tilde{K} \in I_{j-1,j-1}(K)}} 1.
\end{aligned}$$

Die Zahl der Elemente $K \in \tau_{j-1}$, die $\tilde{K} \in I_{j-1,j-1}(K)$ erfüllen, wurde in Lemma 45 durch $C_{\#}$ abgeschätzt. Daraus folgt die globale Fehlerabschätzung. ■

Das folgende Lemma besagt, daß die iterierte Prolongation in der L^2 - und H^1 -Norm stabil ist.

Lemma 88 Sei $K \in \tau_{\ell}$ und $j \geq \ell$. $\Lambda_{j,\ell}^{(m)}(K)$ bezeichnet die Stabilitätskonstante der iterierten Prolongation aus Definition 86.

Es existiert eine Konstante $\Lambda < \infty$ unabhängig von j , ℓ , ℓ_{\max} und K , so daß für $m = 0, 1$ und alle $0 \leq \ell \leq j \leq \ell_{\max}$ die Prolongation durch Λ beschränkt ist:

$$\Lambda_{j,\ell}^{(m)}(K) \leq \Lambda. \quad (5.23)$$

Der Beweis der Stabilität ist relativ technisch und wird daher im Anschluß an die folgende Fehlerabschätzung nachgeholt.

Satz 89 Sei $u \in H^{p+1}(\Omega)$ und $u_{\ell} := I_{\ell_{\max}} P_{\ell_{\max},\ell} R_{\ell}[u]$. Dann gelten für $m = 0, 1$ die lokalen und globalen Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned}
|u - u_{\ell}|_{m,\sigma(K)} &\leq C h_K^{p+1-m} |u|_{p+1, I_{\ell,\ell}(K)}, \quad \forall K \in \tau_{\ell}, \\
|u - u_{\ell}|_{m,\Omega} &\leq C h_{\ell}^{p+1-m} \|u\|_{p+1,\Omega},
\end{aligned}$$

wobei die Konstante C nur von den Konstanten, welche die Gitterfamilie charakterisieren, der Stetigkeitskonstanten des minimalen Fortsetzungsoperators.⁵

$$C_E := \sup_{\substack{u \in H^{p+1}(\Omega) \\ \|u\|_{p+1} = 1}} \inf_{\substack{u^* \in H^{p+1}(\Omega_0) \\ u^* = u \text{ auf } \Omega}} \|u^*\|_{p+1,\Omega_0}$$

und dem Polynomgrad p abhängt.

⁵Wir rekapitulieren die Bezeichnung $\Omega_0 := \text{dom } \tau_0$.

Beweis. Indem man (5.23) und (5.22) in (5.21) einsetzt und (5.20) benutzt, erhält man aus (5.19) und Lemma 42 die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u - u_\ell|_{m,\sigma(K)} &\leq Ch_{\ell_{\max},\ell}^{p+1-m}(K) |u|_{p+1,\sigma(K)} + C\Lambda \sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} h_{j-1,\ell}^{p+1-m}(K) |u|_{p+1,I_{j-1,\ell}(K)} \\ &\leq Ch_{\ell_{\max},\ell}^{p+1-m}(K) |u|_{p+1,I_{\ell,\ell}(K)} + C\Lambda |u|_{p+1,I_{\ell,\ell}(K)} \left(\sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} h_{j-1,\ell}(K) \right)^{p+1-m} \\ &\leq C (C_r h_{\ell,\ell}(K))^{p+1-m} |u|_{p+1,I_{\ell,\ell}(K)} + C (C_r h_{\ell,\ell}(K))^{p+1-m} \Lambda |u|_{p+1,I_{\ell,\ell}(K)} \\ &\leq C (1 + \Lambda) (C_r C_u h_K)^{p+1-m} |u|_{p+1,I_{\ell,\ell}(K)}. \end{aligned}$$

Um daraus die globale Abschätzung abzuleiten, muß über alle $K \in \tau_\ell$ summiert werden. Es gilt mit Hilfe von Lemma 45

$$\begin{aligned} |u - u_\ell|_{m,\Omega}^2 &= \sum_{K \in \tau_\ell} |u - u_\ell|_{m,\sigma(K)}^2 \leq Ch_\ell^{2(p+1-m)} \sum_{K \in \tau_\ell} |u|_{p+1,I_{\ell,\ell}(K)}^2 \\ &= Ch_\ell^{2(p+1-m)} \sum_{K \in \tau_\ell} |u|_{p+1,K}^2 \sum_{\substack{K' \in \tau_\ell \\ K \in I_{\ell,\ell}(K')}} 1 \leq CC_\# h_\ell^{2(p+1-m)} |u|_{p+1,\Omega_\ell}^2. \end{aligned}$$

Verwendet man nun die Stetigkeit des Fortsetzungsoperators, erhält man die Behauptung. ■

Es bleibt, den Beweis der Stabilität der iterierten Prolongation nachzutragen. Das folgende Beispiel illustriert die Bedeutung der Annahme 27, die gewährleistet, daß die Gitter nicht beliebig zueinander orientiert sind, sondern *fast* physikalisch geschachtelt sind.

Beispiel 90 Wir betrachten auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$ die Gittersequenz aus Abbildung 4.1. Diese Gitterfamilie erfüllt **nicht** die Voraussetzung aus Annahme 27.⁶ Auf dem größten Gitter sei eine Gitterfunktion $u_0 \in R^{\Theta_0}$ durch

$$u_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{im Mittelpunkt des Quadrats,} \\ 0 & \text{in den Ecken des Quadrats} \end{cases}$$

definiert. Man rechnet leicht nach, daß die prolongierte Funktion $u_{\ell,0} := P_{\ell,0}[u_0]$ im Mittelpunkt den Wert 1 und in allen anderen Knotenpunkten den Wert 0 besitzt. Einfache Rechnung zeigt, daß

$$|u_{\ell,0}|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \begin{cases} 2^{\ell/2+1} & \ell \text{ gerade,} \\ 2^{(\ell+1)/2} & \ell \text{ ungerade} \end{cases}$$

⁶Bedingung 1 aus Annahme 27 wäre beispielsweise verletzt.

gilt, und daher die $W^{1,\infty}$ -Seminorm nicht unabhängig von Verfeinerungsgrad beschränkt ist.

Beweis von Lemma 88.

Wir führen zunächst einige Notationen ein. Sei $\hat{K} \in \tau_\ell$ ein beliebiges, aber im folgenden festes finites Element und $\ell \leq j < i \leq \ell_{\max}$. Sei $\beta_j \in R^{\Theta_j}$ eine Gitterfunktion und $\beta_{i,j} := P_{i,j}[\beta_j]$. Die FE-Interpolation auf dem Gitter τ_j bzw. τ_i wird wieder mit u_j^{int} bzw. $u_{i,j}^{int}$ bezeichnet.

Wir betrachten einen beliebigen Sohn $K \in \sigma_\ell^j(\hat{K})$ auf der Stufe j . Im ersten Schritt zeigen wir, daß

$$|\beta_{\ell_{\max},j}|_{m,\sigma_j^{\ell_{\max}}(K)} \leq C |\beta_j|_{m,I_{i,j}(K)} \quad (5.24)$$

gilt. Falls keine Verwechslungsgefahr besteht, verzichten wir im folgenden auf die explizite Angabe der Abhängigkeit von K bei den Einflußmengen $I_{i,j}(K)$, den lokalen Schrittweiten $h_{i,j}(K)$, den Verzerrungsparametern $\varepsilon_{i,j}(K)$ aus Definition 40 und den Söhnen $\sigma_j^i(K)$ und schreiben kurz $I_{i,j}$ usw.

Die geometrischen finiten Elemente konnten als verschobene Elemente der physikalisch und logisch geschachtelten Referenzgitter $\{\tilde{\tau}_i\}$ interpretiert werden. In den Ausführungen vor Definition 40 wurde erklärt, daß der direkte Zusammenhang von τ_{i-1} und τ_i durch die Komposition $\Phi_{i-1}^{-1}\Phi_i$ gegeben ist (siehe Abbildung 4.14). Diese Abbildung wurde in Definition 40 und wird auch in diesem Beweis häufig verwendet. Sei $K' \in \tau_i$ und $F_{K'} := F_i^{i-1}(K')$ der Vater von K' auf Stufe $i-1$. Im allgemeinen gilt dann $K' \not\subset F_{K'}$. Sei \tilde{K}' der unverschobene, physikalisch geschachtelte Sohn von $F_{K'}$, der K' „entspricht“. Formal ist dieser durch $\tilde{K}' := \Phi_{i-1}^{-1}(\Phi_i(K'))$ gegeben und erfüllt $\tilde{K}' \subset F_{K'}$. Für einen Knotenpunkt $y' \in \Theta_{K'}$ verwenden wir im folgenden häufig die Kurzschreibweise $\tilde{y}' := \tilde{y}'(y') := \Phi_{i-1}^{-1} \circ \Phi_i(y')$.

Für $m = 0, 1$ werden wir zunächst $|u_{i,j}^{int}|_{W^{m,\infty}(K')}$ durch $|u_{i-1,j}^{int}|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,j})}$ abschätzen. Sei dazu $\alpha \in N_0^d$ mit $|\alpha| = m \leq 1$. Im folgenden wird die Funktion $u_{i-1,j}^{ext} : R^d \rightarrow R$ benötigt, die als analytische Fortsetzung von $u_{i-1,j}^{int}|_{F_{K'}}$ definiert ist. Damit ergibt sich für $x \in K'$ die Aufspaltung

$$\begin{aligned} D^\alpha [u_{i,j}^{int}](x) &= \sum_{y' \in \Theta_{K'}} u_{i-1,j}^{int}(y') D^\alpha [\varphi_{y'}^i](x) \\ &= \sum_{y' \in \Theta_{K'}} (u_{i-1,j}^{int}(y') - u_{i-1,j}^{int}(\tilde{y}')) D^\alpha [\varphi_{y'}^i](x) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$+ \sum_{y' \in \Theta_{K'}} \left(u_{i-1,j}^{int}(\tilde{y}') - u_{i-1,j}^{ext}(y') \right) D^\alpha \left[\varphi_{y'}^i \right] (x) \quad (5.26)$$

$$+ D^\alpha \left[u_{i-1,j}^{ext} \right] (x). \quad (5.27)$$

Sei $x_0 \in \tilde{K}'$ ein Punkt, der

$$\|x_0 - x\| = \text{dist} \left(x, \tilde{K}' \right) \quad (5.28)$$

erfüllt. Dann läßt sich $D^\alpha \left[u_{i-1,j}^{ext} \right] (x)$ durch

$$D^\alpha \left[u_{i-1,j}^{int} \right] (x_0) + \left(D^\alpha \left[u_{i-1,j}^{ext} \right] (x) - D^\alpha \left[u_{i-1,j}^{int} \right] (x_0) \right) \quad (5.29)$$

ersetzen. Daraus folgt die Darstellung

$$D^\alpha \left[u_{i,j}^{int} \right] (x) = D^\alpha \left[u_{i-1,j}^{int} \right] (x_0) + \text{Störungen}.$$

Das bedeutet, daß $\left| u_{i,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K')} \doteq \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(\tilde{K}')} + \text{Störungen}$ gilt, bis auf die $\|\cdot\|_{W^{m,\infty}(K')}$ -Norm der Störungen, die im folgenden diskutiert werden. Wir betrachten die einzelnen Terme in (5.25)-(5.27) und (5.29).

Für $D^\alpha \varphi_{y'}^i$ gilt mit Hilfe der Beschränktheit der Basisfunktionen, der inversen Ungleichung und Lemma 42 die Abschätzung

$$\left| D^\alpha \varphi_{y'}^i \right|_{W^{0,\infty}(K')} \leq C h_{K'}^{-m} \leq C (c_r)^m h_{F_{K'}}^{-m}. \quad (5.30)$$

In den Zeilen (5.26) und (5.29) traten Differenzen der Form

$$D^\mu \left[u_{i-1,j}^{ext} \right] (y') - D^\mu \left[u_{i-1,j}^{int} \right] (\tilde{y}')$$

für $|\mu| \leq 1$ auf, die im folgenden abgeschätzt werden. Da $u_{i-1,j}^{ext}$ ein Polynom vom Maximalgrad p ist und auf \tilde{K}' mit $u_{i-1,j}^{int}$ übereinstimmt, folgt mit Hilfe einer Taylorentwicklung und der inversen Ungleichung für alle $\mu \in N_0^d$, $|\mu| \leq 1$, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| D^\mu \left[u_{i-1,j}^{ext} \right] (y') - D^\mu \left[u_{i-1,j}^{int} \right] (\tilde{y}') \right| &\leq C \sum_{r=1}^{l_p} \|y' - \tilde{y}'\|^r \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{r+|\mu|,\infty}(F_{K'})} \\ &\leq C \left(\sum_{r=1}^{l_p} C_u^{r-1} \frac{\|y' - \tilde{y}'\|^r}{h_{F_{K'}}^{r-1}} \right) \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{1+|\mu|,\infty}(F_{K'})} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $l_p < \infty$, die nur von p abhängt. Die Differenz im Zähler läßt sich mit Hilfe des Verzerrungsparameters $\varepsilon_{i,j}$ durch $\frac{\|y' - \tilde{y}'\|}{h_{F_{K'}}} \leq \varepsilon_{i,j}$ abschätzen. Zusammen ergibt das

$$\left| D^\mu \left[u_{i-1,j}^{ext} \right] (y') - D^\mu \left[u_{i-1,j}^{int} \right] (\tilde{y}') \right| \leq C h_{F_{K'}}^m \varepsilon_{i,j} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m+|\mu|,\infty}(F_{K'})}. \quad (5.31)$$

Die gleiche Abschätzung ergibt sich für die Differenz, falls y', \tilde{y}' durch x, x_0 aus (5.28) ersetzt werden.

In (5.25) trat die Differenz $u_{i-1,j}^{int}(y') - u_{i-1,j}^{int}(\tilde{y}')$ auf. Wir haben bereits $\tilde{y}' \in \overline{F_{K'}}$ ausgenützt. Da $\overline{K'} \cap \overline{F_{K'}} \neq \emptyset$ gilt, existiert ein Weg von \tilde{y}' nach y' der in $D(K') := \overline{K'} \cup \overline{F_{K'}}$ verläuft (siehe Annahme 27, Bedingung 3a). Da Ω_{i-1} Lipschitz-stetig zusammenhängend vorausgesetzt war, ist $u_{i-1,j}^{int}$ Lipschitz-stetig (siehe Lemma 19). In Bemerkung 91 wird auf den Fall von Gebieten eingegangen, die nicht Lipschitz-stetig zusammenhängend sind. Wir erhalten daher

$$\left| u_{i-1,j}^{int}(y') - u_{i-1,j}^{int}(\tilde{y}') \right| \leq C \|y' - \tilde{y}'\| \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{1,\infty}(D(K'))}. \quad (5.32)$$

Da $h_{F_{K'}} \leq c_r h_{K'}$ gilt, läßt sich die inverse Ungleichung anwenden. Das ergibt

$$\begin{aligned} \left| u_{i-1,j}^{int}(y') - u_{i-1,j}^{int}(\tilde{y}') \right| &\leq C \frac{\|y' - \tilde{y}'\|}{h_{F_{K'}}^{1-m}} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,j})} \\ &\leq C h_{F_{K'}}^m \varepsilon_{i,j} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,j})}. \end{aligned}$$

Für die Summe in (5.25) ergibt sich dann

$$\left| \sum_{y' \in \Theta_{K'}} \left(u_{i-1,j}^{int}(y') - u_{i-1,j}^{int}(\tilde{y}') \right) D^\alpha \left[\varphi_{y'}^i \right] (x) \right| \leq C \varepsilon_{i,j} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,j})}.$$

Für die Summe in (5.26) gilt wegen (5.31) und (5.30)

$$\sum_{\substack{y' \in \Theta_{K'} \\ y' \neq y'_1}} \left| \left(u_{i-1,j}^{int}(\tilde{y}') - u_{i-1,j}^{ext}(y') \right) D^\alpha \left[\varphi_{y'}^i \right] (x) \right| \leq C \varepsilon_{i,j} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,j})}.$$

Schließlich läßt sich die letzte Zeile (5.27) wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| D^\alpha \left[u_{i-1,j}^{ext} \right] (x) \right| &\leq \left| D^\alpha \left[u_{i-1,j}^{int} \right] (x_0) \right| + \left| D^\alpha \left[u_{i-1,j}^{ext} \right] (x) - D^\alpha \left[u_{i-1,j}^{int} \right] (x_0) \right| \\ &\leq \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,j})} + C \frac{\|x - x_0\|}{h_{F_{K'}}^{1-m}} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{2m,\infty}(F_{K'})} \\ &\leq \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,j})} + C \varepsilon_{i,j} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(F_{K'})}. \end{aligned}$$

Zusammen haben wir die Abschätzung

$$\left| u_{i,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K')} \leq \left| u_{i,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{i,j})} \leq (1 + C\varepsilon_{i,j}) \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,j})} \quad (5.33)$$

bewiesen.

Indem $i = \ell_{\max}$ gesetzt und die Abschätzung über mehrere Stufen iteriert wird, erhält man die Abschätzung (5.24)

$$\left| u_{\ell_{\max},j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(\sigma_j^{\ell_{\max}})} \leq \left(\prod_{i=j+1}^{\ell_{\max}} (1 + C\varepsilon_{i,j}) \right) \left| u_j^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{j,j})}.$$

Das Produkt ist nach Lemma 42 unabhängig von ℓ , i , j und ℓ_{\max} beschränkt

$$\begin{aligned} \prod_{i=j+1}^{\ell_{\max}} (1 + C\varepsilon_{i,j}) &= \exp \left\{ \sum_{i=j+1}^{\ell_{\max}} \log(1 + C\varepsilon_{i,j}) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ C \sum_{i=j+1}^{\ell_{\max}} \varepsilon_{i,j} \right\} \leq e^{CC_v} \end{aligned} \quad (5.34)$$

mit C_v aus (4.12). Die Stabilität der iterierten Prolongation in der H^m -Norm, d.h. die gewünschte Abschätzung für $\Lambda_{j,\ell}^{(m)}(K)$, ist eine einfache Folgerung.

Sei dazu wieder $K \in \sigma_\ell^j(\hat{K})$. Aus $\sigma_j^{\ell_{\max}}(K) \subset \sigma_\ell^{\ell_{\max}}(\hat{K})$ folgt $I_{j,j}(K) \subset I_{j,\ell}(\hat{K})$. Mit Hilfe von Lemma 45 folgt die Stabilität der iterierten Prolongation in der H^m -Norm:

$$\begin{aligned} |P_{\ell_{\max},j}[\beta_j]|_{m,\sigma_\ell^{\ell_{\max}}(\hat{K})}^2 &= \sum_{K \in \sigma_\ell^j(\hat{K})} \sum_{K' \in \sigma_j^{\ell_{\max}}(K)} \left| u_{\ell_{\max},j}^{int} \right|_{m,K'}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \sigma_\ell^j(\hat{K})} \sum_{K' \in \sigma_j^{\ell_{\max}}(K)} |K'| \left| u_{\ell_{\max},j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K')}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \sigma_\ell^j(\hat{K})} \left| u_j^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{j,j}(K))}^2 \sum_{K' \in \sigma_j^{\ell_{\max}}(K)} |K'| \\ &\leq CC_A \sum_{K \in \sigma_\ell^j(\hat{K})} \left| u_j^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{j,j}(K))}^2 |K| \leq C \sum_{K \in I_{j,\ell}(\hat{K})} \left| u_j^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K)}^2 \sum_{\substack{K' \in \sigma_\ell^j(\hat{K}) \\ K \in I_{j,j}(K')}} |K| \\ &\leq CC_{\#} C_u^d \sum_{K \in I_{j,\ell}(\hat{K})} \left| u_j^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K)}^2 h_K^d \leq C \sum_{K \in I_{j,\ell}(\hat{K})} \left| u_j^{int} \right|_{m,K}^2 = C \left| u_j^{int} \right|_{m,I_{j,\ell}(\hat{K})}^2. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 91 *Im Beweis wurde ausgenutzt, daß Ω und Ω_ℓ Lipschitz-stetig zusammenhängend ist. Dies war notwendig, da in (5.32) die Lipschitz-Stetigkeit einer FE-Funktion ausgenutzt wurde. Falls diese Bedingung verletzt wäre, kann das Verfahren mit einer einfachen Modifikation genauso durchgeführt und analysiert werden. Bei der Anpassung des feinsten Gitters an den Rand, muß sichergestellt werden, daß alle verschobenen Punkte y die Abschätzung $L(s_{y,\tilde{y}}) \leq C_t \|\tilde{y} - y\|$ erfüllen, wobei $s_{y,\tilde{y}}$ wieder den in Definition 11 beschriebenen Weg von y nach \tilde{y} bezeichnet und $L(\cdot)$ die Länge dieses Weges ist.*

Damit ist die Analyse des Approximationsfehlers für Funktionen aus $H^k(\Omega)$, $k = p + 1$, abgeschlossen. Im folgenden wird erklärt, wie sich diese Resultate auf den Fall $k = 1$ und auf $k \notin N_0$ verallgemeinern. Um die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_\ell\|_0 \leq Ch_\ell \|u\|_1$$

zu zeigen, muß der obige Beweis an folgenden Stellen modifiziert werden. Die Restriktion $R_j[u]$ ist nun durch Mittelwertbildung definiert

$$R_j[u](x) := \frac{1}{|\text{dom } \tau_x|} \int_{\tau_x} u(y) dy \quad x \in \Theta_j,$$

wobei τ_x die Menge aller Elemente aus τ_j bezeichnet, die x berühren. Somit wird die Interpolierende u_ℓ^{int} zur Quasi-Interpolierenden $I_\ell[R_\ell[u]]$. Die Fehlerabschätzungen (5.20) werden zu (vgl. [12], [13], [19, Kapitel 9.2.2 und 9.2.3])

$$\begin{aligned} |u - u_j^{int}|_{0,K} &\leq Ch_K |u|_{L_j^1(K)}, \\ |u - u_j^{int}|_{\infty,K} &\leq C |u|_{L_j^1(K)} \end{aligned} \quad (5.35)$$

mit

$$|u|_{\infty,K} := \max_{x \in \overline{K}} |R_j[u](x)|.$$

Die Punktauswertungen, die beispielsweise im Beweis von Lemma 87 auftraten, müssen durch die Punktfunctionale $R_j[u](y)$ ersetzt werden. Ansonsten können die Beweise ohne Modifikation auf diesen Fall übertragen werden. Die Stabilität der iterierten Prolongation in der L^2 -Norm beispielsweise, welche das zentrale Bindeglied zwischen Standard-Fehlerabschätzung (5.35) und den Fehlerabschätzungen für zusammengesetzte finite Elemente darstellte, kann ohne Modifikation auch für diesen Fall verwendet werden. Diese Ausführungen sind in folgender Bemerkung zusammengefaßt.

Bemerkung 92 *Unter den gleichen Voraussetzung wie für Satz 89 gelten die lokalen und globalen Fehlerabschätzungen*

$$\begin{aligned} \|u - u_\ell\|_{0, \sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K)} &\leq Ch_K \|u\|_{1, I_{\ell, \ell}(K)}, \\ \|u - u_\ell\|_{0, \Omega} &\leq Ch_\ell \|u\|_{1, \Omega}. \end{aligned}$$

Fehlerabschätzungen für nicht-ganzzahlige Differentialtionsordnung k ergeben sich durch Interpolation (siehe [13, Kapitel 12]).

5.2.2 Approximation von Funktionen aus $H^k(\Omega)$, die wesentliche Randbedingungen erfüllen

In diesem Abschnitt werden wir beweisen, daß die in Abschnitt 4.4 definierten CFE-Räume die Approximationseigenschaft für Funktionen aus $H^k(\Omega)$, die wesentlichen Randbedingungen unterworfen sind, besitzen. Zunächst betrachten wir wieder den wichtigsten Fall, daß die Spur der Funktionen auf dem ganzen Rand verschwindet: $V = H_0^1(\Omega) \cap H^{p+1}(\Omega)$. Der Beweis der Approximationseigenschaft ist genauso aufgebaut wie im Fall von natürlichen Randbedingungen und splittet sich in eine Stabilitäts- und Konsistenzanalyse.

Ziel ist es, für eine Funktion $u \in V$ eine Approximierende $u_\ell \in S_\ell^{CFE}$ zu finden, die

$$\|u - u_\ell\|_{m, \sigma(K)} \leq Ch_\ell^{p+1-m} \|u\|_{p+1, L_\ell^q(K)}$$

erfüllt, wobei $L_\ell^q(K)$ wieder die Elementschichten um K bezeichnet. Die Approximierende wird wieder durch

$$u_\ell := I_{\ell_{\max}} P_{\ell_{\max}, \ell} R_\ell [u]$$

definiert. Wir benutzen die zu (5.19) und (5.21) analogen Aufspaltungen und führen die folgenden Hilfsfunktionen ein

$$\begin{aligned} \beta_j &:= R_j [u], & u_j^{int} &:= I_j [\beta_j], \\ \beta_{j, j-1} &:= P_{j, j-1} [\beta_{j-1}], & u_{j, j-1}^{int} &:= I_j [\beta_{j, j-1}]. \end{aligned}$$

Sei $K \in \tau_\ell^{NM}$, wobei $\{\tau_\ell^{NM}\}$ wieder die überlappenden Gitter für Neumann-Randbedingungen bezeichnen. Die Fehlerabschätzung

$$|u - u_\ell|_{m, \sigma(K)} \leq |u - u_{\ell_{\max}}|_{m, \sigma(K)} + \sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} |u_j - u_{j-1}|_{m, \sigma(K)} \quad (5.36)$$

stimmt formal mit (5.19) überein. Die Funktion $u_{\ell_{\max}}$ ist die Finite-Elemente-Interpolierende auf dem feinsten Gitter und kann daher mit der Standardabschätzung (5.20) abgeschätzt werden. Die Teleskopsumme wurde in (5.21) mit Hilfe der Stabilitätskonstante $\Lambda_{j,\ell}^{(m)}(K)$ auf eine Abschätzung des Fehlers $\left|u_j^{\text{int}} - u_{j;j-1}^{\text{int}}\right|_{m,I_{j,\ell}(K)}$ zurückgeführt. Die Konstante $\Lambda_{j,\ell}^{(m)}(K)$ war in Definition 86 bezüglich der H^m -Seminormen definiert. Im Fall von Dirichlet-Randbedingungen können wir jedoch nicht erwarten, daß $|P_{j+1,j}[\beta]|_1 \leq C|\beta|_1$ gilt. Falls beispielsweise $\beta \equiv 1$ auf Θ_j gilt (siehe Abbildung 5.3), folgt

Abbildung 5.3: Prolongation für Dirichlet-Randbedingungen. Eine konstante Grobgitterfunktion wird zu einer nicht-konstanten Feingitterfunktion prolongiert.

zwar $|\beta|_1 = 0$ aber wegen der modifizierten Prolongation in Randnähe nicht $|P_{j+1,j}[\beta]|_1 = 0$. Dieses Problem kann vermieden werden, indem die H^1 -Seminorm in der Nähe des Randes modifiziert wird. Sei $u \in S_\ell$ und $K \in \tau_\ell$. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,K} & : = \|u\|_{0,K} \\ \|u\|_{1,K} & : = \begin{cases} |u|_{1,K} & \text{falls } \overline{K} \cap \overline{\Omega_\ell^\Gamma} = \emptyset, \\ \sqrt{|u|_{1,K}^2 + h_K^{d-2} \|u\|_{0,\infty,K}^2} & \text{sonst,} \end{cases} \\ \|u\|_{1,\infty,K} & : := \begin{cases} |u|_{1,\infty,K} & \text{falls } \overline{K} \cap \overline{\Omega_\ell^\Gamma} = \emptyset, \\ \max\{|u|_{1,\infty,K}, h_K^{-1} \|u\|_{0,\infty,K}\} & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die globale Norm auf einer Menge von Elementen $\tau'_\ell \subset \tau_\ell$ ist dann durch

$$\|u\|_{m,\tau'_\ell}^2 := \sum_{K \in \tau'_\ell} \|u\|_{m,K}^2$$

definiert. Für eine Gitterfunktion $\beta \in R^{\Theta_\ell}$ ist die $\|\cdot\|$ -Norm als Norm der Interpolierenden definiert:

$$\|\beta\|_m := \|I_\ell[\beta]\|_m.$$

Die Stabilität der Prolongation wird dann wieder durch die Konstante $\Lambda_{j,\ell}^{(m)}(K)$ beschrieben, wobei auf der rechten Seite von (5.18) die Norm $|\beta|_{m,I_{j,\ell}(K)}$ durch $\|\beta\|_{m,I_{j,\ell}(K)}$ und formal τ_ℓ durch τ_ℓ^{NM} ersetzt werden muß. Damit lassen sich die Summanden in der Teleskopsumme (5.36) durch

$$|u_j - u_{j-1}|_{m,\sigma(K)} \leq \Lambda_{j,\ell}^{(m)}(K) \left(\|u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int}\|_{m,I_{j,\ell}(K)} \right). \quad (5.37)$$

Wiederum ist daher der Approximationsfehler $u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int}$ der Einschrittprolongation abzuschätzen und die Stabilität der iterierten Prolongation in der H^1 - und L^2 -Norm.

Wir beginnen mit der Abschätzung des Fehlers $u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int}$. Für $x \in K' \in I_{j,\ell}(K)$ gilt dann die Darstellung

$$\left(u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right) (x) = \sum_{y \in \Theta_{K'}} \left(u - u_{j,j-1}^{int} \right) (y) \varphi_y^j(x).$$

Daraus folgt

$$\left| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right|_{m,K'} \leq \max_{y \in \Theta_{K'}} \left| u(y) - u_{j,j-1}^{int}(y) \right| \sum_{y \in \Theta_{K'}} \left| \varphi_y^j \right|_{m,K'}.$$

Indem wir die Abschätzung für die Norm der Basisfunktionen aus dem Beweis von Lemma 87 einsetzen und die Definition der $\|\cdot\|$ -Norm verwenden, ergibt sich⁷

$$\left\| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right\|_{m,K'} \leq Ch_{j-1,\ell}^{d/2-m}(K) \max_{y \in \Theta_{K'}} \left| u(y) - u_{j,j-1}^{int}(y) \right|. \quad (5.38)$$

Es bleibt, den Fehler $\left(u - u_{j,j-1}^{int} \right) (y)$ in den Knotenpunkten $y \in \Theta_{K'}$ abzuschätzen. Dazu werden die Funktionen $\pi_j^j : \Theta_j \rightarrow \tau_j$ und $\pi_j^{j-1} : \Theta_j \rightarrow \tau_{j-1} \cup \{\emptyset\}$ aus Definition 59 benötigt. Die Funktion π_j^j ordnet einem Knotenpunkt y das Element zu, welches die Prolongationsmethode bestimmt, und π_j^{j-1} das Grobgitterelement, welches zum Prolongieren verwendet wird. Im folgenden Lemma wird der punktweise Fehler der Einschritt-Prolongation abgeschätzt.

⁷Hier haben wir benutzt, daß für alle $u \in S_j$ die Abschätzung $\|u\|_{0,\infty,K} \leq C \max_{y \in \Theta_K} |u(y)|$ gilt.

Lemma 93 Sei $K' \in \tau_j$ und $y \in \Theta_{K'}$. Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| u(y) - u_{j,j-1}^{int}(y) \right| \leq Ch_{K'}^{p+1-d/2} |u|_{p+1, L_j^{n_L}(K')},$$

wobei $n_L := \max(b_\Gamma, n_d + 5, n_T) = 6$ in Lemma 75 definiert war.

Beweis. Wir betrachten die unterschiedlichen Prolongationsmethoden wieder getrennt. Sei $K'' = \pi_j^j(y)$ und $\tilde{K} = \pi_j^{j-1}(y)$.

a) $\tilde{K} = \emptyset$.

In diesem Fall gilt per Definition $Null(K'') = \text{zulässig}$. Daraus folgt, daß ein Dreieck T_y (Tetraeder in 3d) existiert, das die Voraussetzungen aus Definition 48 erfüllt. Da alle Ecken von T_y auf Γ liegen, und u auf Γ verschwindet, ist die lineare Interpolierende von u auf T_y die Nullfunktion. In [7, Corollary 4.4.7] wird gezeigt, daß daraus

$$|u(y)| \leq Ch_{T_y}^{2-d/2} |u|_{2, T_y}$$

folgt. In Definition 48 wurde $T_y \subset \text{dom } L_j^{n_T}(y)$ gefordert. Offensichtlich gilt $L_j^{n_T}(y) \subset L_j^{n_T}(K')$. Im Beweis der ersten Aussage von Lemma 45 wurde $\text{diam}(\text{dom } L_j^{n_T}(K')) \leq Ch_{K'}$ gezeigt, woraus $h_{T_y} \leq Ch_{K'}$ folgt. Da diese Situation ($\tilde{K} = \emptyset$) lediglich bei linearen Elementen $p+1 = 2$ auftreten kann, folgt daraus für diesen Fall die Behauptung.

b) $\tilde{K} \neq \emptyset$ und $y \in \text{dom } \tau_j^\Gamma$.

Dann ist Prolongation in y durch

$$u_{j,j-1}^{int}(y) = E_{\ell+1, \ell}^{K''} [u_{j-1}^{int}](y) = u_{j-1, \tilde{K}}^{ext}(y) - u_{j-1, \tilde{K}}^{ext}(y^0)$$

gegeben, wobei y^0 durch

$$y^0 = \begin{cases} \gamma_{K''} & \text{falls } j < \ell_{\max} \text{ oder } \overline{K''} \cap \Gamma = \emptyset, \\ \gamma_y & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert war (siehe Definition 57) und $u_{j-1, \tilde{K}}^{ext}$ die analytische Fortsetzung von $u_{j-1}^{int}|_{\tilde{K}}$ auf R^d bezeichnet. Da y , y^0 und \tilde{K} in $\text{dom } L_j^{n_L}(K')$ enthalten sind, ergibt sich daraus mit $u(y^0) = 0$ die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \left| u_{j,j-1}^{int} - u(y) \right| &\leq \left| u_{j-1, \tilde{K}}^{ext}(y) - u(y) \right| + \left| u(y^0) - u_{j-1, \tilde{K}}^{ext}(y^0) \right| \\ &\leq 2 \left| u_{j-1, \tilde{K}}^{ext} - u \right|_{W^{0, \infty}(L_j^{n_L}(K'))}. \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, daß der Durchmesser des Gebiets dom $L_j^{nL}(K')$ nach oben durch $Ch_{K'}$ beschränkt ist. Da $L_j^{nL}(K')$ quasi-uniform ist, und die geometrischen Elemente regulär sind, ist die Anzahl $\#L_j^{nL}(K')$ durch eine Konstante $C = O(1)$ beschränkt. Da $u_{j-1, \tilde{K}}^{ext}$ die analytische Fortsetzung von $u_{j-1}^{int} |_{\tilde{K}}$ ist, folgt daraus wie im Beweis von [13, Theorem 7.1]

$$\left| u_{j-1, \tilde{K}}^{ext} - u \right|_{W^{0, \infty}(L_j^{nL}(K'))} \leq Ch_{K'}^{p+1-d/2} |u|_{p+1, L_j^{nL}(K')}.$$

c) $\tilde{K} \neq \emptyset$ und $y \in \text{dom } \overset{\circ}{\tau}_j$.

Dann ist die Prolongation in y durch Interpolation gegeben: $u_{j, j-1}^{int}(y) = u_{j-1}^{int}(y)$. In Lemma 75 wurde gezeigt, daß $\tilde{K} \subset \text{dom } L_j^{nL}(K')$ gilt. Daraus folgt die Abschätzung

$$\left| u_{j, j-1}^{int}(y) - u(y) \right| \leq \left| u_{j-1}^{int} - u \right|_{W^{0, \infty}(\tilde{K})} \leq Ch_{K'}^{p+1-d/2} |u|_{p+1, L_j^{nL}(K')}.$$

■

Die Fehlerabschätzung auf dom $I_{j, \ell}(K)$ kann jetzt mit Hilfe dieses Lemmas erfolgen.

Lemma 94 Sei $K \in \tau_\ell^{NM}$ ein Element des Gitters für Neumann-Randbedingungen. Sei $u_{j, j-1}^{int}$ wie oben definiert. Dann gilt mit n_I aus Lemma 75 die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \left\| u_j^{int} - u_{j, j-1}^{int} \right\|_{m, I_{j, \ell}(K)} &\leq Ch_{j-1, \ell}^{p+1-m}(K) |u|_{p+1, L_\ell^{n_I}(K)}, \\ \left\| u_j^{int} - u_{j, j-1}^{int} \right\|_{m, \Omega_j} &\leq Ch_{j-1}^{p+1-m} \|u\|_{p+1, \Omega}. \end{aligned}$$

Beweis. Im folgenden schreiben wir $I_{j, \ell}$ statt $I_{j, \ell}(K)$ und $h_{j, \ell}$ für $h_{j, \ell}(K)$. Indem wir die Fehlerabschätzung aus vorigem Lemma in (5.38) einsetzen, ergibt sich

$$\left\| u_j^{int} - u_{j, j-1}^{int} \right\|_{m, K'} \leq Ch_{j-1, \ell}^{p+1-m} |u|_{p+1, L_j^{nL}(K')}.$$

Um daraus eine Abschätzung auf dom $I_{j, \ell}$ zu bekommen, muß über alle $K' \in I_{j, \ell}$ summiert werden. Wegen

$$L_j^{nL}(I_{j, \ell}) = \bigcup_{K' \in I_{j, \ell}} L_j^{nL}(K')$$

gilt

$$\begin{aligned} \left\| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right\|_{m,I_{j,\ell}}^2 &= \sum_{K' \in I_{j,\ell}} \left\| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right\|_{m,K'}^2 \leq C \sum_{K' \in I_{j,\ell}} h_{j-1,\ell}^{2(p+1-m)} |u|_{p+1,L_j^{nL}(K')}^2 \\ &\leq C h_{j-1,\ell}^{2(p+1-m)} \sum_{\hat{K} \in L_j^{nL}(I_{j,\ell})} |u|_{p+1,\hat{K}}^2 \sum_{\substack{K' \in I_{j,\ell} \\ \hat{K} \in L_j^{nL}(K')}} 1. \end{aligned}$$

In Lemma 15 wurde gezeigt, daß die Anzahl aller $K' \in I_{j,\ell}$, die $L_j^{nL}(K') \cap \hat{K} \neq \emptyset$ erfüllen, durch die Konstante $C_\#$ aus besagtem Lemma beschränkt ist. Daraus folgt

$$\left\| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right\|_{m,I_{j,\ell}} \leq C h_{j-1,\ell}^{p+1-m} |u|_{p+1,L_j^{nL}(I_{j,\ell})}.$$

In Lemma 75 wurde gezeigt, daß $\text{dom } L_j^{nL}(I_{j,\ell})$ in $\text{dom } L_\ell^{nI}(K)$ enthalten sind. Das ergibt die gewünschte Fehlerabschätzung

$$\left\| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right\|_{m,I_{j,\ell}} \leq C h_K^{p+1-m} |u|_{p+1,L_\ell^{nI}(K)}.$$

Wir kommen nun zur globalen Abschätzung. Dazu summieren wir über alle $K' \in \tau_j$. Das ergibt

$$\begin{aligned} \left\| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right\|_{m,\Omega_j}^2 &= \sum_{K' \in \tau_j} \left\| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right\|_{m,K'}^2 \leq \sum_{K \in \tau_{j-1}^{NM}} \left\| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right\|_{m,I_{j,j-1}(K)}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \tau_{j-1}^{NM}} h_{j-1,j-1}^{2(p+1-m)}(K) |u|_{p+1,L_j^{nL}(I_{j,j-1}(K))}^2. \end{aligned}$$

Diese Summe läßt sich wiederum umschreiben:

$$\left\| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right\|_{m,\Omega_j}^2 \leq C h_{j-1}^{2(p+1-m)} \sum_{\hat{K} \in L_j^{nL}(\tau_j)} |u|_{p+1,\hat{K}}^2 \sum_{\substack{K \in \tau_{j-1}^{NM} \\ \hat{K} \in L_j^{nL}(I_{j,j-1}(K))}} 1.$$

Aus Lemma 15 und 75 folgt, daß die Anzahl aller $K \in \tau_{j-1}^{NM}$, die $\hat{K} \in L_j^{nL}(I_{j,j-1}(K))$ erfüllen, durch eine Konstante $C'_\#$ beschränkt ist. Das ergibt

$$\left\| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right\|_{m,\Omega_j} \leq C h_{j-1}^{p+1-m} |u|_{p+1,L_j^{nL}(\tau_j)}.$$

Indem noch die Stetigkeit des Fortsetzungsoperators $\mathcal{E} : H^{p+1}(\Omega) \rightarrow H^{p+1}(R^d)$ ausgenutzt wird, erhält man daraus die behauptete globale Abschätzung. ■

Das folgende Lemma besagt, daß die Prolongation für Dirichlet-Randbedingungen in der L^2 - und H^1 -Norm stabil ist.

Lemma 95 Sei $K \in \tau_\ell$ und $j \geq \ell$. $\Lambda_{j,\ell}^{(m)}(K)$ bezeichnet die Stabilitätskonstante der iterierten Prolongation für Dirichlet-Randbedingungen. Es existiert eine Konstante $\Lambda < \infty$ unabhängig von j , ℓ , ℓ_{\max} und K , so daß für $m = 0, 1$ und alle $0 \leq \ell \leq j \leq \ell_{\max}$ die Prolongation durch Λ beschränkt ist:

$$\Lambda_{j,\ell}^{(m)}(K) \leq \Lambda. \quad (5.39)$$

Der Beweis dieses Lemmas ist wieder verhältnismäßig technisch und wird daher im Anschluß an die folgende zentrale Fehlerabschätzung nachgeholt.

Satz 96 Sei $u \in H^{p+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $u_\ell := I_{\ell_{\max}} P_{\ell_{\max},\ell} R_\ell[u]$. Für $m = \{0, 1\}$ gelten die lokalen und globalen Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} |u - u_\ell|_{m,\sigma(K)} &\leq Ch_K^{p+1-m} |u|_{p+1,L_\ell^{n_I}(K)}, \quad \forall K \in \tau_\ell^{NM}, \\ |u - u_\ell|_{m,\Omega} &\leq Ch_\ell^{p+1-m} \|u\|_{p+1,\Omega} \end{aligned}$$

mit n_I aus Lemma 75.

Beweis. Wir beginnen mit der lokalen Abschätzung und setzen in die Aufspaltung (5.36) die Abschätzung des Interpolationsfehlers (5.20) und die Stabilitätsabschätzung aus Lemma 95 ein

$$|u - u_\ell|_{m,\sigma(K)} \leq Ch_{\ell_{\max},\ell}^{p+1-m}(K) |u|_{p+1,\sigma(K)} + \Lambda \sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} \left\| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right\|_{m,I_{j,\ell}(K)}. \quad (5.40)$$

Der Term $\left\| u_j^{int} - u_{j,j-1}^{int} \right\|_{m,I_{j,\ell}(K)}$ wurde in Lemma 94 abgeschätzt. Das ergibt

$$\begin{aligned} |u - u_\ell|_{m,\sigma(K)} &\leq Ch_{\ell_{\max},\ell}^{p+1-m}(K) |u|_{p+1,\sigma(K)} + C\Lambda \sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} h_{j-1,\ell}^{p+1-m}(K) |u|_{p+1,L_\ell^{n_I}(K)} \\ &\leq C |u|_{p+1,L_\ell^{n_I}(K)} \left(h_{\ell_{\max},\ell}^{p+1-m}(K) + C\Lambda \sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} h_{j-1,\ell}^{p+1-m}(K) \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Mit Lemma 42 folgt daraus die lokale Fehlerabschätzung

$$|u - u_\ell|_{m,\sigma(K)} \leq Ch_{\ell,\ell}^{p+1-m}(K) |u|_{p+1,L_\ell^{n_I}(K)} \leq CC_u h_K^{p+1-m} |u|_{p+1,L_\ell^{n_I}(K)}.$$

Um daraus die globale Abschätzung abzuleiten, muß über alle $K \in \tau_\ell$ summiert werden. Aus (5.41) ergibt sich

$$|u - u_\ell|_{m,\Omega}^2 = \sum_{K \in \tau_\ell^{NM}} |u - u_\ell|_{m,\sigma(K)}^2 \leq Ch_\ell^{2(p+1-m)} \sum_{K \in \tau_\ell} |u|_{p+1,L_\ell^{n_I}(K)}^2.$$

Es kann nun wieder wie im Beweis von Lemma 94 die Summation umsortiert werden. Das ergibt

$$|u - u_\ell|_{m,\Omega}^2 \leq Ch_\ell^{2(p+1-m)} \sum_{\hat{K} \in \tau_\ell^\infty} |u|_{p+1,\hat{K}}^2 \sum_{\substack{K \in \tau_\ell \\ \hat{K} \in L_\ell^{n_I}(K)}} 1.$$

In Lemma 15 wurde gezeigt, daß die Anzahl der Elemente $K \in \tau_\ell$, die $\hat{K} \in L_\ell^{n_I}(K)$ erfüllen, durch $C_\#$ beschränkt ist. Das ergibt

$$|u - u_\ell|_{m,\Omega} \leq Ch_\ell^{p+1-m} |u|_{p+1,\tau_\ell^\infty}.$$

Verwendet man nun die Stetigkeit des Fortsetzungsoperators $\mathcal{E} : H^{p+1}(\Omega) \rightarrow H^{p+1}(R^d)$ erhält man die gewünschte globale Abschätzung. ■

Es bleibt, den Beweis von Lemma 95 nachzutragen.

Beweis von Lemma 95.

Der Beweis dieses Lemmas ist genauso aufgebaut, wie der Beweis des entsprechenden Lemmas für Neumann-Randbedingungen. Wir betrachten die folgende Situation. Sei $\hat{K} \in \tau_\ell$ ein beliebiges, aber im folgenden fest gewähltes Element und $\ell \leq j < i \leq \ell_{\max}$. Sei $\beta_j \in R^{\Theta_j}$ eine Gitterfunktion und $\beta_{i,j} := P_{i,j}[\beta_j]$ die prolongierte Funktion. Die FE-Interpolation auf dem Gitter τ_j bzw. τ_i wird mit u_j^{int} bzw. $u_{i,j}^{int}$ bezeichnet. Wir wollen die Norm $|\beta_{i,j}|_{m,I_{i,\ell}(\hat{K})}$ durch $|\beta_j|_{m,I_{j,\ell}(\hat{K})}$ abschätzen. Falls keine Verwechslungsgefahr besteht, verzichten wir im folgenden auf die explizite Angabe der Abhängigkeit von \hat{K} bei den Einflußmengen $I_{i,j}(\hat{K})$, den lokalen Schrittweiten $h_{j,\ell}(\hat{K})$, den Verzerrungsparametern $\varepsilon_{i,j}(\hat{K})$ aus Definition 40 und den Söhnen $\sigma_j^i(\hat{K})$ und schreiben kurz $I_{j,\ell}$ usw.

Sei $K' \in I_{i,\ell}$ und $\alpha \in N_0^d$ mit $|\alpha| = m \leq 1$. Dann gilt für $x \in K'$ die Darstellung

$$D^\alpha [u_{i,j}^{int}](x) = \sum_{y \in \Theta_{K'}} u_{i,j}^{int}(y) D^\alpha [\varphi_y^i](x). \quad (5.42)$$

Die Werte $u_{i,j}^{int}(y)$ werden mit Hilfe der Prolongation aus der Grobgitterfunktion $u_{i-1,j}^{int}$ berechnet. Dafür gab es je nach Lage von K' unterschiedliche Strategien. Diese werden im folgenden kurz wiederholt. Wir setzen voraus, daß die Gitter in Randnähe regelmäßig verfeinert wurden, d.h. mit Hilfe der Prozedur `generiereReferenzgitter` erzeugt wurden. Dies impliziert gemäß Lemma 71, daß $\tau_i^{int} \subset \tau_i^\Gamma$ gilt.

1) $K' \in \tau_i^{int}$ und $\kappa_i^{i-1}(K') = \emptyset$. Dann wurde $u_{i,j}^{int}(y) = 0$ gesetzt für alle $y \in \Theta_{K'}$.

2) $K' \in \tau_i^{int}$ und $K = \kappa_i^{i-1}(K') \neq \emptyset$. Dann wurde $u_{i,j}^{int}(y) = E_{\ell+1,\ell}^{K'}[u_{i-1,j}^{int}](y)$ gesetzt für alle $y \in \Theta_{K'}$. Es ist wichtig, hier zu bemerken, daß die Werte in allen Knotenpunkten y mit Hilfe desselben Grobgitterelements K berechnet werden.

3) $K' \in \tau_i^\circ$ und $\overline{K'} \cap \overline{\Omega_i^\Gamma} = \emptyset$. Dann wurde $u_{i,j}^{int}(y) = u_{i-1,j}^{int}(y)$ gesetzt für alle $y \in \Theta_{K'}$.

4) In allen anderen Fällen, kann es auftreten, daß $u_{i,j}^{int}(y)$ in unterschiedlichen Knotenpunkten $y \in \Theta_{K'}$ mit unterschiedlichen Strategien 1-3 oder unterschiedlichen Grobgitterelementen berechnet wird.

Wir sagen, daß im Fall 4 die Funktion $u_{i,j}^{int}$ gemittelt wird, und dies in den anderen Fällen nicht der Fall ist. Da zur Berechnung der prolongierten Werte auf $\overline{\text{dom } \Omega_i^\Gamma}$ lediglich die Grobgitterfunktion auf dem Teilgitter τ_i^{int} herangezogen wird, spielen für die Stabilität der *iterierten* Prolongation nur die ersten drei Fälle eine Rolle. Für den vierten Fall muß lediglich gezeigt werden, daß das *einmalige* Mitteln die Stabilitätskonstanten nicht zu sehr beeinflußt. Der Extrapolationsoperator war auf dem feinsten Level anders definiert als auf den gröberen. Für die *iterierte* Prolongation spielt natürlich nur die Version, die für die gröberen Gitter angewendet wird, eine Rolle. Für die Prolongation auf das feinste Gitter genügt es, Stabilität zu zeigen.

Sei im folgenden immer $m = 0, 1$ und $|\alpha| = m$ ein Multiindex. Wir benutzen die Formel (5.42) zur Fehlerabschätzung und unterscheiden die oben dargestellten Fälle.

1) $K' \in \tau_i^{int}$ und $\kappa_i^{i-1}(K') = \emptyset$. Dann gilt $|u_{i,j}^{int}|_{m,K'} = 0$, und es ist nichts zu zeigen.

2) $K' \in \tau_i^{int}$ und $K = \kappa_i^{i-1}(K') \neq \emptyset$. Der Operator $E_{\ell+1,\ell}^{K'}[u_{i-1,j}^{int}]$ war mit Hilfe der analytischen Fortsetzung von $u_{i-1,j}^{int}|_K$ auf R^d definiert, die im folgenden mit u_K^{ext} bezeichnet wird. Sei $i < \ell_{\max}$ oder $\overline{K'} \cap \Gamma = \emptyset$. Dann gilt mit $|\alpha| = m$

$$D^\alpha [u_{i,j}^{int}]|_{K'} = D^\alpha [u_K^{ext}]|_{K'} - \delta_{0,m} u_K^{ext}(\gamma_{K'}),$$

und daher stimmen alle $W^{1,q}(K')$ -Seminormen von $u_{i,j}^{int}$ und u_K^{ext} überein. Mit Hilfe einer Taylorreihe und der inversen Ungleichung beweist man, daß daraus

$$|u_{i,j}^{int}|_{W^{m,\infty}(K')} \leq |u_K^{ext}|_{W^{m,\infty}(K')} + \delta_{0,m} |u_K^{ext}(\gamma_{K'})| \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{r=m}^{l_p} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{r,\infty}(K)} (\text{dist}(K', K) + \text{dist}(K', \gamma_{K'}))^{r-m} \\
&\leq C \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K)} \sum_{r=m}^{l_p} \left(\frac{\text{dist}(K', K) + \text{dist}(K', \gamma_{K'})}{h_K} \right)^{r-m} \quad (5.44)
\end{aligned}$$

folgt, wobei l_p wieder nur vom Polynomgrad p der Ansatzfunktionen abhängt. In Lemma 75 wurde gezeigt, daß $K, K', \gamma_{K'}$ in $\text{dom } L_i^{n_L}(K')$ enthalten sind. Daraus folgt wie im Beweis von Lemma 15, daß

$$\text{diam}(\text{dom } L_i^{n_L}(K')) \leq Ch_{K'}$$

gilt. Das bedeutet, daß beide Distanzen in (5.44) durch $Ch_{K'}$ abgeschätzt werden können. Die Abschätzung $h_K \geq ch_{K'}$ folgt aus Lemma 75. Zusammen haben wir bewiesen, daß die Summe in (5.44) durch eine Konstante nach oben abgeschätzt werden kann. Das ergibt

$$\left| u_{i,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K')} \leq C \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K)}. \quad (5.45)$$

Die Abschätzung $|K'| \leq C|K|$ folgt aus der gerade bewiesenen Abschätzung $h_K \geq ch_{K'}$ mit der Voraussetzung, daß $\{\tau_\ell\}$ keine degenerierten Elemente enthält. Daraus folgt

$$\left| u_{i,j}^{int} \right|_{m,K'} \leq C \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{m,K}. \quad (5.46)$$

Um die $\left\| u_{i,j}^{int} \right\|_{1,K'}$ -Norm abzuschätzen, müssen wir wegen $\overline{K'} \cap \overline{\Omega_i^\Gamma} \neq \emptyset$ den Zusatzterm $Z := h_{K'}^{d/2-1} \left\| u_{i,j}^{int} \right\|_{0,\infty,K'}$ betrachten. In Lemma 71 wurde bewiesen, daß K ebenfalls $\overline{K} \cap \overline{\Omega_{i-1}^\Gamma} \neq \emptyset$ erfüllt. Daher können wir mit Hilfe von (5.45) Z durch

$$Z \leq Ch_{K'}^{d/2-1} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{0,\infty}(K)} \leq \tilde{C} h_K^{d/2-1} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{0,\infty}(K)} \leq \tilde{C} \left\| u_{i-1,j}^{int} \right\|_{1,K} \quad (5.47)$$

abschätzen.

Es bleibt, den Fall $i = \ell_{\max}$ und $\overline{K'} \cap \Gamma \neq \emptyset$ zu diskutieren. Für $x \in K'$ gilt dann

$$\begin{aligned}
D^\alpha \left[u_{i,j}^{int} \right] (x) &= \sum_{y \in \Theta_K} \left(u_K^{ext}(y) - u_K^{ext}(\gamma_y) \right) D^\alpha \left[\varphi_y^i \right] (x) \\
&= - \sum_{y \in \Theta_K} D^\alpha \left[\varphi_y^i \right] (x) \sum_{r=1}^{l_p} \sum_{|\beta|=r} \frac{1}{\beta!} D^\beta \left[u_K^{ext} \right] (y) (\gamma_y - y)^\beta.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der inversen Ungleichung und der Abschätzung für die Basisfunktionen (5.30) ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| u_{i,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K')} &\leq Ch_{K'}^{-m} \sum_{r=1}^{l_p} \left| u_K^{ext} \right|_{W^{r,\infty}(K')} \|y - \gamma_y\|^r \\ &\leq Ch_{K'}^{-m} \left| u_K^{ext} \right|_{W^{m,\infty}(K')} \sum_{r=1}^{l_p} h_{K'}^{m-r} \|y - \gamma_y\|^r. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Diese Ungleichung kann nun genauso wie (5.44) behandelt werden. Auch hier erhalten wir

$$\left| u_{i,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K')} \leq C \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K)}.$$

Die Abschätzung des Zusatzterms für die modifizierte H^1 -Seminorm erfolgt wie oben.

3) $K' \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}_i$ und $\overline{K'} \cap \overline{\Omega_i^F} = \emptyset$. Dieser Fall wurde bereits bei der Approximationseigenschaft für Neumann-Randbedingungen diskutiert. Es wurde gezeigt, daß

$$\left| u_{i,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K')} \leq (1 + C\varepsilon_{i,j}) \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,j})}$$

gilt. Für die betrachteten Elemente K' gilt $\left\| \left| u_{i,j}^{int} \right| \right\|_{W^{m,\infty}(K')} = \left| u_{i,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K')}$, so daß kein Zusatzterm abzuschätzen ist.

4) In diesem Fall werden die Knotenwerte von $u_{i,j}^{int}$ nicht einheitlich berechnet. Für $x \in K'$ gilt

$$D^\alpha \left[u_{i,j}^{int} \right] (x) = \sum_{y \in \Theta_{K'}} u_{i,j}^{int} (y) D^\alpha \left[\varphi_y^i \right] (x).$$

Die Werte in den Knotenpunkten könnten nach den folgenden Schemata zu berechnen sein. Wir benutzen die obigen Bezeichnungen und setzen $K'' := \pi_i^i(y)$ und $K_y := \pi_i^{i-1}(y)$. Die folgenden drei Fälle werden unterschieden.

- a) $u_{i,j}^{int}(y) = u_{K_y}^{ext}(y) - u_{K_y}^{ext}(y^0)$ mit y^0 entweder γ_y oder $\gamma_{K''}$.
- b) $u_{i,j}^{int}(y) = 0$, da $K_y = \emptyset$.
- c) $u_{i,j}^{int}(y) = u_{i-1,j}^{int}(y)$, falls $y \in \overset{\circ}{\Omega}_i$.

Diese Fallunterscheidung motiviert die Definition der folgenden Teilmengen von $\Theta_{K'}$

$$\begin{aligned} \Theta_{K'}^{ext} &: = \left\{ y \in \Theta_{K'} \mid u_{i,j}^{int}(y) \text{ wird gemäß (a) berechnet} \right\}, \\ \Theta_{K'}^N &: = \left\{ y \in \Theta_{K'} \mid u_{i,j}^{int}(y) \text{ wird gemäß (b) berechnet} \right\}, \\ \Theta_{K'}^{int} &: = \left\{ y \in \Theta_{K'} \mid u_{i,j}^{int}(y) \text{ wird gemäß (c) berechnet} \right\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst, daß die Fälle (b) und (c) nicht simultan auftreten können. Wir nehmen dazu das Gegenteil an. Dann berührt K' ein Element $K'' \in \tau_{\ell+1}$, welches $\text{dist}(K'', \Omega_\ell, \tau_{\ell+1}^\infty) > n_d$ erfüllt. Genauso berührt K' wegen $\Theta_{K'}^{int} \neq \emptyset$ auch Ω_ℓ . Daraus folgt $\text{dist}(K'', \Omega_\ell, \tau_{\ell+1}^\infty) \leq 1$ und damit ein Widerspruch.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $\Theta_{K'}^{int} = \emptyset$ gilt. Die Stabilität der Prolongation kann genauso wie Ungleichung (5.44) bewiesen werden. Lediglich wird dieses Mal nicht über alle $y \in \Theta_{K'}$ summiert, sondern nur über $\Theta_{K'}^{ext}$. Da jedoch die Elemente $\pi_i^{i-1}(y)$, mit Hilfe derer extrapoliert wird, für alle $y \in \Theta_{K'}^{ext}$ unterschiedlich sein können, ergibt sich dieses Mal die Abschätzung

$$\| \| u_{i,j}^{int} \| \|_{m,K'} \leq C \max_{y \in \Theta_{K'}^{ext}} \| \| u_{i-1,j}^{int} \| \|_{m,K_y}.$$

Sei nun $\Theta_{K'}^{int} \neq \emptyset$ und daher $\Theta_{K'}^N = \emptyset$. Die folgende Situation ist in Abbildung 5.4 illustriert. Aus $\Theta_{K'}^{ext} \neq \emptyset$ folgt, daß $K' \in \overset{\circ}{\tau}_i$ und $\overline{K'} \cap \overline{\Omega_i} \neq \emptyset$

Abbildung 5.4: Konstellation, für die mit verschiedenen Techniken prolongiert wird. Im Punkt y wird extrapoliert und in \hat{y} interpoliert.

gelten muß. Insbesondere ist $\overline{K'} \cap \Gamma = \emptyset$, und die Prolongation wird für alle $y \in \Theta_{K'}^{ext}$ gemäß

$$u_{K'}^{ext}(y) - u_K^{ext}(y^0)$$

mit $y^0 = \gamma(\pi_i^i(y))$ berechnet. Sei $\hat{y} \in \Theta_{K'}^{int}$ ein fest gewählter Knotenpunkt und $z_y := z(y) \in \overline{K_y} := \overline{\pi_i^{i-1}(y)}$ ein Punkt, der $\|z_y - \hat{y}\| = \text{dist}(K_y, \hat{y})$ erfüllt. Dann gilt

$$D^\alpha [u_{i,j}^{int}](x) = \sum_{y \in \Theta_{K'}} (u_{i,j}^{int}(y) - u_{i-1,j}^{int}(\hat{y})) D^\alpha [\varphi_y^i](x) + \delta_{0,m} u_{i-1,j}^{int}(\hat{y})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{y \in \Theta_{K'}^{int}} \left(u_{i-1,j}^{int}(y) - u_{i-1,j}^{int}(\hat{y}) \right) D^\alpha [\varphi_y^i](x) + \delta_{0,m} u_{i-1,j}^{int}(\hat{y}) \\
&\quad + \sum_{y \in \Theta_{K'}^{ext}} \left(u_{K_y}^{ext}(y) - u_{i-1,j}^{int}(\hat{y}) \right) D^\alpha [\varphi_y^i](x) - \sum_{y \in \Theta_{K'}^{ext}} u_{K_y}^{ext}(y^0) D^\alpha [\varphi_y^i](x) \\
&= \sum_{y \in \Theta_{K'}^{int}} \left(u_{i-1,j}^{int}(y) - u_{i-1,j}^{int}(\hat{y}) \right) D^\alpha [\varphi_y^i](x) + \delta_{0,m} u_{i-1,j}^{int}(\hat{y}) \\
&\quad + \sum_{y \in \Theta_{K'}^{ext}} \left(u_{K_y}^{ext}(y) - u_{K_y}^{ext}(z_y) \right) D^\alpha [\varphi_y^i](x) - \sum_{y \in \Theta_{K'}^{ext}} u_{K_y}^{ext}(y^0) D^\alpha [\varphi_y^i](x) \\
&\quad + \sum_{y \in \Theta_{K'}^{ext}} \left(u_{K_y}^{ext}(z_y) - u_{i-1,j}^{int}(\hat{y}) \right) D^\alpha [\varphi_y^i](x).
\end{aligned}$$

Diese fünf Terme werden im folgenden einzeln abgeschätzt. Da $u_{i-1,j}^{int}$ auf K' Lipschitz-stetig ist, gilt mit Hilfe der inversen Abschätzung für den ersten Summanden

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{y \in \Theta_{K'}^{int}} \left(u_{i-1,j}^{int}(y) - u_{i-1,j}^{int}(\hat{y}) \right) D^\alpha [\varphi_y^i](x) \right| &\leq C h_{K'}^{-m} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{1,\infty}(K')} h_{K'} \\
&\leq C \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,\ell})}.
\end{aligned}$$

Für die letzte Summe bemerken wir, daß $u_{K_y}^{ext}(z_y) = u_{i-1,j}^{int}(z_y)$ gilt. Da wir angenommen hatten, daß Ω_{i-1} Lipschitz-stetig zusammenhängend ist, folgt mit Lemma 19, daß

$$\left| u_{K_y}^{ext}(z) - u_{i-1,j}^{int}(\hat{y}) \right| \leq C \|z_y - \hat{y}\| \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{1,\infty}(s)}$$

gilt, wobei s wieder den Lipschitz-stetigen Weg bezeichnet, der z_y und \hat{y} verbindet, und in $\text{dom } I_{i-1,j}$ verläuft (siehe Annahme 73). Mit Hilfe von Lemma 75 und der inversen Ungleichung läßt sich daher die letzte Summe ebenfalls durch $C \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,\ell})}$ abschätzen. In Bemerkung 97 wird wieder eine Modifikation angegeben, die ohne die Zusammenhangsvoraussetzung auskommt.

Mit Hilfe einer Taylorentwicklung von $u_{K_y}^{ext}$ um den Schwerpunkt von K_y und der inversen Ungleichung läßt sich auch die dritte Summe wie im Beweis von (5.46) durch $C \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,\ell})}$ abschätzen. Wir betrachten nun den vierten Term. Wie zuvor zeigt man, daß $\left| u_{K_y}(y^0) \right| \leq C \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{0,\infty}(K_y)}$ gilt.

Wegen $\overline{K_y} \cap \overline{\Omega_{i-1}^\Gamma} \neq \emptyset$ trat in der modifizierten H^1 -Seminorm der Zusatzterm auf. Daher läßt sich auch die vierte Summe durch $C \left\| \| u_{i-1,j}^{int} \| \|_{W^{m,\infty}(K)}$ abschätzen. Die Abschätzung des zweiten Terms $|u_{i-1,j}^{int}(\hat{y})| \leq |u_{i-1,j}^{int}|_{W^{0,\infty}(K_{\hat{y}})}$ ist trivial. Zusammen haben wir bewiesen, daß

$$|u_{i,j}^{int}|_{W^{m,\infty}(K')} \leq C \left\| \| u_{i-1,j}^{int} \| \|_{W^{m,\infty}(I_{i-1,\ell})}$$

gilt. Die Abschätzung des Zusatzterms, der bei der modifizierten H^1 -Seminorm auftritt, erfolgt wie im Beweis von (5.47). Damit ist gezeigt, daß die einstufige Prolongation $P_{i,i-1}$ in der modifizierten $W^{m,\infty}$ -Norm stabil ist.

Zum Beweis der Stabilität der *iterierten* Prolongation gehen wir wie folgt vor.

(a) Sei zunächst $\ell \leq j < i < \ell_{\max}$. Wir betrachten ein Element $K' \in I_{i,\ell} \cap \tau_i^{int}$. Wir bilden eine Folge $K = \{K_r\}_{r=j}^i$ durch die folgende Rekursion

$$\begin{aligned} K_i &= K', \\ K_r &= \begin{cases} \kappa_{r+1}^r(K_{r+1}) & \text{falls } K_{r+1} \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases} \quad r = i-1, i-2, \dots, j. \end{aligned}$$

Da auf τ_r^{int} nicht gemittelt wird, folgt daher

$$u_{i,j}^{int}|_{K'} \equiv \begin{cases} 0 & \text{falls } K_j = \emptyset, \\ u_{K_j}^{ext}|_{K'} - u_{K_j}^{ext}(\gamma_{K'}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Stabilität

$$\left\| \| u_{i,j}^{int} \| \|_{W^{m,\infty}(K')} \leq C \left\| \| u_j^{int} \| \|_{W^{m,\infty}(I_{j,\ell})}$$

ergibt sich dann wie zuvor mit Hilfe einer Taylorentwicklung, wobei C unabhängig ist von i, j, ℓ und ℓ_{\max} .

(b) Wir betrachten nun alle $K' \in \tau_i$, $\ell \leq j < i \leq \ell_{\max}$, die $\overline{K'} \cap \overline{\Omega_i^\Gamma} \neq \emptyset$ erfüllen. Die Voraussetzung, daß die Gitter in Randnähe regelmäßig verfeinert sind (siehe **procedure generiere_Referenzgitter**), impliziert, daß zur Prolongation von K' nur Elemente aus τ_{i-1}^{int} herangezogen wurden. Die zuvor gezeigte Stabilität der Einschnitt-Prolongation und die Stabilität der iterierten Prolongation für Elemente aus τ_{i-1}^{int} sichert die Stabilität der iterierten Prolongation auch für die betrachteten Elemente K' .

(c) Es bleibt, die Elemente $K' \in I_{i,\ell}$ zu betrachten, die $K' \cap \overline{\Omega_i^\Gamma} = \emptyset$ erfüllen. Insbesondere stimmt für diese Elemente die modifizierte Seminorm mit der ursprünglichen überein. Für ein beliebiges Element $K \in \tau_r$ bezeichnen wir die Menge der Grobgitterelemente, die zur Prolongation herangezogen werden, mit U_K . Diejenigen Elemente aus U_K , auf denen die Prolongation (vom Gitter τ_{i-2}) durch Interpolation erklärt war, bezeichnen wir mit U_K^{int} und das Komplement mit U_K^{ext} :

$$\begin{aligned} U_K & : = \left\{ \tilde{K} = \pi_r^{r-1}(y) : y \in \Theta_K^{int} \cup \Theta_K^{ext} \right\}, \\ U_K^{int} & : = \left\{ \tilde{K} \in U_K \mid \tilde{K} \cap \overline{\Omega_{r-1}^\Gamma} = \emptyset \right\}, \\ U_K^{ext} & : = U_K \setminus U_K^{int}. \end{aligned}$$

Wir bemerken an dieser Stelle, daß für alle $\tilde{K} \in U_K^{int}$ die modifizierte Seminormen mit den üblichen H^m -Seminormen übereinstimmt. Mit Hilfe des Verzerrungsparameters $\varepsilon_{i,\ell}$ und der Stabilität der Prolongation für Neumann-Randbedingungen aus (5.33) ergibt sich

$$\left| u_{i,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K')} \leq (1 + C\varepsilon_{i,\ell}) \max \left(\max_{K \in U_K^{int}} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K)}, \max_{K \in U_K^{ext}} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K)} \right).$$

Die Stabilität der iterierten Prolongation auf Elementen $K \in U_{K'}^{ext}$ wurde bereits gezeigt, und wir erhalten

$$\left| u_{i,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K')} \leq (1 + C\varepsilon_{i,\ell}) \max \left(\max_{K \in U_K^{int}} \left| u_{i-1,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K)}, C \left\| \left\| u_j^{int} \right\| \right\|_{W^{m,\infty}(I_{j,\ell})} \right).$$

Iteration dieses Arguments ergibt mit $\varepsilon := \prod_{r=i}^j (1 + \varepsilon_{r,\ell})$ die Abschätzung

$$\left| u_{i,j}^{int} \right|_{W^{m,\infty}(K')} \leq C\varepsilon \left\| \left\| u_j^{int} \right\| \right\|_{W^{m,\infty}(I_{j,\ell})}.$$

In (5.34) wurde gezeigt, daß die Konstante ε unabhängig von den Parametern i, j, ℓ und ℓ_{\max} beschränkt ist. Damit ist der Stabilität der iterierten Prolongation in allen Fällen bewiesen.

Bemerkung 97 Falls Ω bzw. Ω_ℓ nicht Lipschitz-stetig zusammenhängend sind, muß die Extrapolation leicht modifiziert werden. Bisher wurde zur Extrapolation ein Element aus τ_{i-1}^{int} herangezogen, welches hinreichend nahe

am Feingitterelement liegt. Falls das Gebiet nicht Lipschitz-stetig zusammenhängend ist, muß zusätzlich gefordert werden, daß vom Feingitterelement zum Grobgitterelement, welches zur Extrapolation verwendet wird, ein Lipschitz-stetiger Weg existiert. Anschaulich gesprochen bedeutet das, daß nicht über kleine Euklidische Entfernungen prolongiert werden darf, falls der kürzeste Weg im Gebiet wesentlich länger ist.

Kapitel 6

Implementierung von zusammengesetzten finiten Elementen

In diesem Kapitel wird die effiziente Realisierung von CFE-Diskretisierungen erklärt und Komplexitätsabschätzungen durchgeführt. Es wurde bereits in Kapitel 4.3 erklärt, wie die linearen Gleichungssysteme rekursiv über das Galerkinprodukt definiert sind. Das Gleichungssystem auf dem feinsten Gitter $\tau_{\ell_{\max}}$ wurde dabei wie bei der Standard-FEM definiert. Die gröberen Systeme sind dann durch

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\ell &= R_{\ell,\ell+1}\mathbf{A}_{\ell+1}P_{\ell+1,\ell}, \\ \mathbf{F}_\ell &= R_{\ell,\ell+1}\mathbf{F}_{\ell+1}\end{aligned}\tag{6.1}$$

mit der Restriktion $R_{\ell,\ell+1}$ gegeben (siehe (4.15)). Falls die Matrix $\mathbf{A}_{\ell_{\max}}$ tatsächlich zur Diskretisierung benötigt wird, ist diese Definition hinreichend effizient. Es wird sich herausstellen, daß der Aufwand, die ganze Sequenz von Matrizen $\{\mathbf{A}_\ell\}_{0 \leq \ell \leq \ell_{\max}}$ aufzustellen, von gleicher Größenordnung ist wie der Aufwand, die Feingittermatrix $\mathbf{A}_{\ell_{\max}}$ zu generieren. Eine völlig andere Situation tritt auf, falls man lediglich an einer sehr moderaten, d.h. zum Gitter τ_ℓ mit $\ell \ll \ell_{\max}$ gehörenden Genauigkeit interessiert ist. Dann würde die Feingittermatrix $\mathbf{A}_{\ell_{\max}}$ lediglich benötigt, um die Grobgittermatrix \mathbf{A}_ℓ zu erzeugen. Das bedeutet, daß der Aufwand, um \mathbf{A}_ℓ zu erzeugen, proportional zur Dimension der Feingittermatrix ist. Indem das Galerkin-Produkt nur in Randnähe angewendet wird, kann dieser Aufwand beträchtlich reduziert

werden. Die Feingittermatrix wird nur in randnahen Bereichen aufgestellt und vergrößert. Im Innern wird die Grobgittermatrix direkt aufgestellt.

Eine ähnliche Situation tritt auf, falls à-posteriori-Fehlerschätzer verwendet werden, um die Verfeinerung zu steuern. In diesem Fall will man auf der Stufe $\ell \ll \ell_{\max}$ noch nicht festlegen, wie das feine Gitter $\tau_{\ell_{\max}}$ auszusehen hat. Die Feingittermatrix, die benötigt wird, um \mathbf{A}_ℓ (durch Vergrößerung) zu erzeugen, wird im allgemeinen bezüglich eines anderen (Fein-) Gitters definiert sein als die Feingittermatrix, die zu dem durch à-posteriori-Fehlerschätzer erzeugten Gitter $\tau_{\ell_{\max}}$ gehört, und dann zur Diskretisierung auf der Stufe ℓ_{\max} verwendet wird. Der Aufwand, die Grobgittermatrix gemäß (6.1) zu erzeugen, wäre dann wiederum proportional zur Zahl der Feingitterpunkte. Auch in diesem Fall kann der Aufwand wesentlich reduziert werden, wenn das Galerkin-Produkt nur lokal angewendet wird. Die Idee dabei ist, daß in Bereichen, in denen das grobe Gitter τ_ℓ nicht verzerrt wird, die Matrix \mathbf{A}_ℓ mit der üblichen Finite-Elemente-Matrix übereinstimmt. In diesem Bereichen läßt sich die Matrix \mathbf{A}_ℓ direkt aufstellen, ohne die iterierte Prolongation bis zum feinsten Gitter zu benutzen. Wir werden im folgenden einige Definitionen und Prozeduren in einer Pseudo-Programmiersprache formulieren, die mit PASCAL verwandt ist, damit der Aufwand der einzelnen Phasen besser gezählt werden kann. Desweiteren wird dadurch ein Überblick über die Anforderungen an die Datenstruktur geschaffen, die für eine Implementierung erforderlich ist.

Wir beginnen damit, einen Algorithmus anzugeben, um CFE-Gitter zu erzeugen. Danach geben wir auch eine lokale Variante an, die es erlaubt, auf Grobgittern die linearen Gleichungssysteme aufzustellen ohne die komplette Feingittermatrix zu erzeugen.

6.1 Gittergenerierung für zusammengesetzte finite Elemente

Die Definition der Gitter für zusammengesetzte finite Elemente in Kapitel 4.1 gliederte sich in die folgenden Phasen.

1. Zunächst wird eine Hierarchie von FE-Gittern benötigt, die sowohl physikalisch wie auch logisch geschachtelt ist, und aus den Referenzgittern $\tilde{\tau}_\ell$ besteht. Wir wollen uns in diesem Abschnitt auf Gebiete Ω, Ω_ℓ beschränken, die Lipschitz-stetig zusammenhängend sind (siehe

Definition 11). Die erforderlichen Modifikationen im Fall, daß diese Bedingung verletzt ist, wurden in den Bemerkungen 91 und 97 erklärt.

2. Mit Hilfe der Gitter $\tilde{\tau}_\ell$ werden die Gitter für Neumann-Randbedingungen τ_ℓ^{NM} definiert, indem zunächst randnahe Gitterpunkte auf den Rand geschoben werden, und dann Elemente, die außerhalb des Gebiets liegen, gelöscht werden.
3. Um die Gitter für Dirichlet-Randbedingungen zu erzeugen, können eventuell randnahe Elemente aus τ_ℓ^{NM} weggelassen werden.

Die Erzeugung der Referenzgitter wurde bereits in Kapitel 4.1 und **procedure generiereReferenzgitter** diskutiert. Wir nehmen an, daß die Referenzgitter die Voraussetzungen aus Annahme 27 erfüllen.

Im zweiten Schritt mußte das feinste Referenzgitter $\tilde{\tau}_{\ell_{\max}}$ dem Rand durch Verschieben von Punkten angepaßt werden. Das entstehende Gitter wurde $\tau_{\ell_{\max}}^\infty$ genannt. Für die Realisierung dieses Anpassungsprozesses stehen eine beträchtliche Anzahl von verfeinerten Techniken (auch implementiert) zur Verfügung.¹ Das liegt daran, daß die Strategie, ein Referenzgitter hinreichend lange zu verfeinern und dann dem Rand anzupassen, eine verbreitete Methode ist, Gitter vor allem in drei Dimensionen zu konstruieren, ganz unabhängig von der darauf aufbauenden Diskretisierung. Im folgenden wird ein heuristischer Algorithmus angegeben, der typischerweise zu Gittern führt, die Annahme 27 erfüllen. Es sei hier bemerkt, daß die geforderten Bedingungen alle lokal sind. Das bedeutet, daß in Fällen, bei denen ein Kriterium verletzt ist, lokal durch verfeinerte Techniken nachgebessert werden kann.

Um den Algorithmus zu formulieren, müssen Elemente, Elementkanten und Elementecken noch mit geeigneten Attributen versehen werden. Die Menge der Ecken eines geometrischen finiten Elements werden mit \mathbf{V}_K bezeichnet und die Menge der Kanten mit \mathbf{E}_K . Für Punkte $x \in \mathbf{V}_K$ setzen wir

$$\mu(x) := \begin{cases} \text{innen} & \text{falls } x \in \overline{\Omega}, \\ \text{außen} & \text{falls } x \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Für Kanten $e = \overline{xy} \in \mathbf{E}_K$ definieren wir

$$\mu(e) := \begin{cases} \text{Rand} & \text{falls } \mu(x) \neq \mu(y), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

¹Literatur zu diesem Thema findet sich unter der WWW-Adresse: <http://www-users.informatik.RWTH-Aachen.de/~roberts/meshgeneration.html>.

und schließlich für Elemente K

$$\mu(K) := \begin{cases} Rand & \text{falls } \mu(e) = Rand \text{ für ein } e \in \mathbf{E}_K, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls eine Kante $e = \overline{xy}$ das Attribut $\mu(e) = Rand$ besitzt, wird e von Γ in mindestens einem Punkt geschnitten. Die Idee ist nun, einen der beiden Punkte x, y durch einen „günstigen“ Oberflächenpunkt zu ersetzen. Günstig heißt in diesem Fall, daß die dadurch entstehenden, verschobenen Gitter in einer Umgebung der Kante e regulär bleiben. Wir führen dazu ein Maß für die lokale Güte des Gitters ein. Seien dazu $x \in \Theta_{\ell_{\max}}$ und $\tau_x := \{K \in \tilde{\tau}_{\ell_{\max}} \mid x \in \overline{K}\}$ die Menge aller Elemente aus $\tilde{\tau}_{\ell_{\max}}$, die x berühren. Dann ist das Punktfunktional $Q(x)$ durch

$$Q(x) = \min_{K \in \tau_x} \min_{e \in \mathbf{E}_K} \frac{|K|}{|e|^d}$$

gegeben, wobei $d = 2, 3$ die Raumdimension bezeichnet. Falls $Q(x)$ sehr klein wird, ist die minimale Winkelbedingung im Teilgitter τ_x verletzt. Wir ersetzen also denjenigen Endpunkt $z \in \{x, y\}$ der Kante e durch einen Oberflächenpunkt $z_\Gamma \in \Gamma$, der zu einem größerem Wert von $Q(z_\Gamma)$ führt. Dies definiert eine Funktion $\chi(e) \in R^d \times R^d$:

$$\chi(e) = \begin{cases} (x, z_\Gamma) & \text{falls } y \text{ durch } z_\Gamma \text{ ersetzt wird,} \\ (z_\Gamma, y) & \text{falls } x \text{ durch } z_\Gamma \text{ ersetzt wird.} \end{cases}$$

Mögliche Wahlen von z_Γ sind Punkte aus $e \cap \Gamma$ oder ein nächstgelegener Randpunkt von x bzw. y . Einige dieser Möglichkeiten sind in Abbildung 6.1 illustriert. Die algorithmischen Details finden sich in der Prozedur **adapt**, die durch

for all $K \in \tilde{\tau}_{\ell_{\max}}$ mit $\mu(K) = Rand$ **do begin**

aufgerufen wird, und wie folgt definiert ist.

procedure **adapt**(K);

begin

for all $e = \overline{x_1x_2} \in \mathbf{E}_K$ **do**

if $\mu(e) = Rand$ **then** $(x_1, x_2) := \chi(e)$;

end;

Abbildung 6.1: Oberes Bild: Das Ersetzen von x_2 durch z_Γ führt auf günstigere Innenwinkel als das Ersetzen von x_1 durch z_Γ . Zweites Bild: Die Projektion auf den nächstgelegenen Randpunkt (z_Γ^1) kann vorteilhafter als auf den Schnittpunkt $z_\Gamma^2 \in e \cap \Gamma$ sein.

Wir unterstreichen hier nochmals, daß das Ersetzen der randnahen Punkte x durch die Randpunkte x^Γ auch alle größeren Gitter beeinflußt, die diese Punkte enthalten. Weiterhin ist wichtig zu bemerken, daß nur Punkte des Referenzgitters verschoben wurden, von denen eine Kante ausgeht, die den Rand schneidet.

Das Ergebnis dieser Anpassungsprozedur definiert das Gitter $\tau_{\ell_{\max}}^\infty$. Dieses Gitter kann Elemente enthalten, die (im wesentlichen) außerhalb des Gebiets liegen, und weggelassen werden können. Ein Beispiel hierfür stellt das Dreieck K_4 aus Abbildung 6.2 dar. Sei dazu δ eine benutzerdefinierte Konstante, die von der gewünschten Approximationsgenauigkeit abhängt, und besagt, daß ein Element $K \subset \tau_{\ell_{\max}}^\infty$ weggelassen werden kann, falls $|K \cap \Omega| < \delta$ gilt. Hier bezeichnet $|A|$ wieder das (Lebesgue-) Maß einer Menge $A \subset R^d$. Der folgende Algorithmus beseitigt derartige Elemente aus $\tau_{\ell_{\max}}^\infty$.

procedure reduce_mesh;

begin

$\tau_{\ell_{\max}} := \tau_{\ell_{\max}}^\infty$;

```

for all  $K \in \tau_{\ell_{\max}}$  do
  if  $\mathbf{V}_K \notin \overline{\Omega}$  or  $|K \cap \Omega| < \delta$  then
     $\tau_{\ell_{\max}} := \tau_{\ell_{\max}} \setminus K$ ;
  for  $\ell = \ell_{\max} - 1$  downto 0 do
     $\tau_{\ell} := \{K \in \tau_{\ell} \mid \sigma_{\ell}^{\ell+1}(K) \cap \tau_{\ell+1} \neq \emptyset\}$ 
     $\cup \{K \in \tau_{\ell} \mid K \cap \Theta_{\ell+1} \neq \emptyset\}$ 
end;

```

Das resultierende Gitter wird $\tau_{\ell_{\max}}$ genannt. Dieses Gitter muß jedoch noch nicht zwingend $\Omega = \text{dom } \tau_{\ell_{\max}}$ erfüllen, und auch die minimale Winkelbedingung kann verletzt sein. Das macht einen Nachbesserungsprozeß erforderlich. Wir diskutieren im folgenden einige typische Probleme und zugehörige Verbesserungsmöglichkeiten.

Die folgende Situation kann bei Viereckselementen auftreten (vgl. Abbildung 6.2). Sei K ein Viereck mit Ecken $\{x_i\}_{i=1}^4$ gegen den Uhrzeigersinn

Abbildung 6.2: Illustration der Funktion μ . In den dargestellten Fällen gilt $\mu(e_1) = \mu(K_2) = \mu(K_3) = \text{Rand}$ und $\mu(e_2) = \mu(e_3) = \mu(K_1) = \mu(K_4) = 0$. Das Dreieck K_4 liegt im wesentlichen außerhalb des Gebiets, so daß $|K \cap \Omega| < \delta$ gelten würde und **procedure reduce_mesh** K eliminiert.

gezählt. Falls $x_1 \in \Omega$, $x_3 \notin \overline{\Omega}$ und $x_2, x_4 \in \Gamma$ gilt, wird K durch die Prozedur **adapt** nicht verändert, aber auch durch **reduce_mesh** nicht entfernt. Dieses Problem kann einfach beseitigt werden, indem K durch das Verbinden von

x_2 und x_3 in zwei Dreiecke zerlegt wird, oder daß in Randnähe generell nur Dreiecke verwendet werden. In drei Dimensionen ist die Situation analog. Das beschriebene Problem tritt nicht auf, falls in Randnähe Tetraedergitter verwendet werden.

Falls Ω ein einfaches Polygon ist, beispielsweise ein Rechteck, garantieren die Prozeduren **adapt** und **reduce_mesh** nicht, daß $\Omega = \text{dom } \tau_{\ell_{\max}}$ gilt. Es kann passieren, daß Ecken von Ω abgeschnitten werden (siehe Abbildung 6.3). Dieses Problem kann beseitigt werden, wenn beim Adaptionprozeß

Abbildung 6.3: Falls verschobene Punkte nicht auf physikalische Eckpunkte von Ω geschoben werden, können diese abgeschnitten werden.

zunächst für Elementkanten mit $\mu(e) = \text{Rand}$ überprüft wird, ob es möglich ist, einen Eckpunkt von Ω als verschobenen Gitterpunkt zu verwenden. Im dreidimensionalen Fall müßte zunächst nach geeigneten Eckpunkten, dann nach geeigneten Kantenpunkten gesucht werden und, falls keine vorhanden sind, wie in Prozedur **adapt** vorgegangen werden (siehe [38], [27]).

Es kann passieren, daß die Winkel der verschobenen Dreiecke ungünstig sind. In diesem Fall kann ein Relaxationsprozeß nachgeschaltet werden, bei dem Gitterpunkte, die auf dem Rand, bzw. in der Nähe des Randes liegen, verschoben werden. Wir erklären die Strategie im dreidimensionalen Fall. Sei das Funktional $Q(x)$, welches die lokale Güte des Gitters mißt, wie zuvor definiert. Sei tol eine minimale Schranke, die $Q(x)$ annehmen darf. Falls $Q(x) < tol$ gilt, wird der Punkt x so verschoben, daß $Q(x)$ möglichst groß ist. Allerdings ist der Bereich, in dem x verschoben werden darf, restringiert. Generell darf ein Gitterpunkt des Referenzgitters lediglich um eine Entfernung von $O(\tilde{h}_{\ell_{\max}}^\Gamma(\tilde{x}))$ verschoben werden. Wenn x ein Eckpunkt von Ω ist, darf nicht verschoben werden. Falls der Punkt x auf einer Kante von Ω liegt, darf er genau auf dieser Kante verschoben werden, falls x auf einer Fläche von Ω liegt, darf er genau auf dieser Fläche verschoben werden, und schließlich muß ein Gebietspunkt $x \in \Omega$ auch Gebietspunkt bleiben. Die Prozedur sieht

dann formal wie folgt aus. Sei $\mathbf{V}_{\ell_{\max}}$ die Menge der Ecken des Gitters $\tau_{\ell_{\max}}$. Sei $S(x, \Omega)$, der oben beschriebene Bereich, in dem x verschoben werden darf.

```

procedure relax;
begin
  for all  $x \in \mathbf{V}_{\ell_{\max}} \cap \overline{\text{dom } L_{\ell_{\max}}^1(\Gamma)}$  do
    if  $Q(x) < \text{tol}$  then
       $x \leftarrow \underset{y \in S(x, \Omega)}{\text{argmax}} Q(y)$ ;
    end if;
  end for;
end;

```

Dieses Verfahren kann auch iteriert werden, bis die globale Güte des randnahen Gitters

$$\min \left\{ Q(x) : x \in \mathbf{V}_{\ell_{\max}} \cap \overline{\text{dom } L_{\ell_{\max}}^1(\Gamma)} \right\}$$

einen hinreichend großen Wert hat. Eine andere Strategie zur Verbesserung der Gitter wäre es, die lokale Gitterstruktur durch sogenanntes Klappen von Kanten und Flächen zu verbessern. Eine derartige Situation ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

Mit Hilfe der Prozeduren **adapt**, **reduce_mesh** und **relax** wird eine Sequenz von Gittern $\{\tau_\ell\}_{0 \leq \ell \leq \ell_{\max}}$ erzeugt, von denen wir annehmen, daß sie die Bedingungen aus Annahme 27 erfüllt. Offensichtlich werden bei der vorgestellten Adaptionsmethode lediglich Punkte verschoben, die zum Gitter $L_\ell^1(\Gamma)$ gehören. Daher werden nur Elemente verändert, die zu $L_\ell^2(\Gamma)$ gehören.

Im Fall von Dirichlet-Randbedingungen konnten bei einer Diskretisierung mit linearen Elementen geeignete Elemente am Rand weggelassen werden. Wir haben eine algorithmische Form dieses Algorithmus bereits in Definition 51 angegeben. In diesem Algorithmus muß entschieden werden, ob auf einem Element mit Null prolongiert werden kann, d.h. $\text{Null}(K) = \text{zulässig}$ erfüllt ist. Wir rekapitulieren, daß $\text{Null}(K) = \text{zulässig}$ gilt, falls für jeden Knotenpunkt $y \in \Theta_K$ ein Dreieck (Tetraeder in 3D) T_y existiert, welches die Kriterien aus Annahme 27 erfüllt. Der folgende Algorithmus wird für diese Entscheidung verwendet. Die Konstante n_T , die darin auftritt, hing mit T_y über die Forderung $T_y \subset \text{dom } L_\ell^{n_T}(y)$ zusammen und beträgt $n_T = 5$. Die im folgenden Algorithmus verwendete Variable *Wert* kann die Werte *zulässig* und *unzulässig* annehmen, und $d = 2, 3$ bezeichnet wieder die Raumdimension. Der folgende Algorithmus ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Sei $K' \in \tau_\ell$.

Abbildung 6.4: Das Referenzgitter ist im obersten Bild dargestellt. Durch Verschieben der Punkte in Pfeilrichtung entsteht die mittlere Triangulierung. Das mit * markierte Dreieck besitzt ungünstige Innenwinkel. Indem die gestrichelte Kante aus der unteren Abbildung umgeklappt wird, verbessert sich die Situation.

```

function Null( $K'$ ):Wert;
begin Null( $K'$ ) := zulässig;
  for all  $y \in \Theta_{K'}$  do begin
     $T_y := \emptyset$ ;  $L := 1$ ;  $n := 0$ ;
    while ( $L \leq n_T$  or  $n < d + 1$ ) do begin
      for all  $K \in L_\ell^L(y)$  do
        if  $\overline{K} \cap \Gamma_D \neq \emptyset$  2 then
          for all  $x \in \overline{K} \cap \Gamma$  do3
            if  $T_y := \emptyset$  then begin  $T_y := \{x\}$ ;
               $n := n + 1$ ; end
            else if  $T_y \cup \{x\}$  erfüllt die Bedingungen
              aus Definition 48 then begin
                 $T_y := T_y \cup \{x\}$ ;  $n := n + 1$ ; end;
           $L := L + 1$ ;
        end;
  end;

```

² Γ_D bezeichnet wieder den Rand, auf dem Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben sind.

³Diese Schleife muß bei einer praktischen Realisierung der Funktion **Null** ersetzt werden durch eine Schleife, bei der x nur aus einer diskreten Teilmenge von $\overline{K} \cap \Gamma$ gewählt wird.

Abbildung 6.5: Illustration des Suchalgorithmus zur Realisierung der Funktion $Null(K')$. Die Punkte $\{x_i\}_{i=1}^3$ bilden ein nicht-entartetes Dreieck, welches gestrichelt gezeichnet wurde.

end; if $n < d + 1$ then $Wert := unzulässig$;
end;end;

Diese Prozedur ist keine äquivalente Darstellung der Funktion $Null$ aus Definition 48. Aus $\mathbf{Null}(K) = zulässig$ folgt jedoch in jedem Fall $Null(K) = zulässig$, und daher kann es höchstens passieren, daß auf einem Element nicht mit $Null$ prolongiert wird, obwohl dies möglich wäre. Auf die Approximationseigenschaft hat dies natürlich keine Auswirkung, da wir gezeigt haben, daß auch das ganze Gitter τ_ℓ^{NM} für Dirichlet-Randbedingungen verwendet werden kann. Diese Routine könnte noch verfeinert werden (mit erhöhtem Aufwand), wenn statt in Schichten L_ℓ^n um y in feineren Schichten L_j^n , $j > \ell$, um y nach Schnittpunkten mit Γ gesucht wird.

Damit sind die Algorithmen definiert, um die Gittersequenz $\{\tau_\ell\}_{\ell=0}^{\ell_{\max}}$ zu erzeugen. Bevor wir erklären, wie die Diskretisierung auf diesen Gittern effizient realisiert werden kann, soll eine lokale Variante der Gittergenerierung angegeben werden, die vorteilhaft angewendet werden kann, falls man lediglich an einer Diskretisierung auf der Verfeinerungsstufe τ_ℓ , $\ell \ll \ell_{\max}$, interessiert ist. Die Idee dabei besteht darin, daß Elemente auf dem Gitter $\tau_\ell \setminus L_\ell^2(\Gamma)$ durch den Anpassungsprozeß nicht verändert werden, d.h. $\tau_\ell \setminus L_\ell^2(\Gamma) \subset \tilde{\tau}_\ell$ gilt. Falls also $K \in \tau_\ell \setminus L_\ell^2(\Gamma)$ ein Element ist, welches nicht zu τ_ℓ^Γ gehört,

gilt für jede Finite-Elemente-Funktion $u \in S_\ell^{CFE}$:

$$u|_K(x) = \sum_{y \in \Theta_K} u(y) \varphi_y^\ell(x)$$

mit den Standard-Hutfunktionen φ_y^ℓ auf K . Wir hatten gezeigt, daß im Fall von Dirichlet-Randbedingungen zur Prolongation auf τ_ℓ^Γ die Werte der Grobgitterfunktion auf $\tau_{\ell-1}^\Gamma$ benötigt werden. Per Definition gilt $\tau_\ell^\Gamma \subset L_\ell^{b_\Gamma}(\Gamma_D)$, wobei Γ_D wieder den Teil des Randes bezeichnet, auf dem Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben sind. Für Elemente aus τ_ℓ^Γ ist die Prolongation durch Extrapolation definiert.

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich die lokale Variante der Gittergenerierung angeben. Ziel sei es, auf einer Stufe $\ell \leq \ell_{\max}$ zu diskretisieren. Dann werden die Referenzgitter nur bis zur Stufe ℓ erzeugt. Um den Rand weiter aufzulösen, werden danach jedoch nur noch randnahe Schichten weiterverfeinert. Um das Verfeinern in den übrigen Bereichen zu vermeiden, muß die Information, ob Gitterpunkte auf dem feinsten Gitter verschoben werden, bereits auf der Stufe ℓ bekannt sein. Genauer nehmen wir an, daß für alle Elemente $K \in \tau_\ell$ entschieden werden kann, ob K den Rand schneidet, bzw. ob K in oder außerhalb von Ω liegt. Die gleiche Frage muß auch für alle Kanten der Elemente entschieden werden können. Der Aufwand, um diese Information zu generieren, hängt stark davon ab, wie die Geometrie des Gebiets vom Benutzer zur Verfügung gestellt wird. Diese Phase im Algorithmus ist eher der Geometriebeschreibung zuzuordnen als der Diskretisierung des Problems und sollte am Anfang in einem Preprocessing-Schritt erzeugt werden. In [23] wird ein Algorithmus angegeben, der diese Information effizient generiert (siehe auch [34]).

Die folgende Prozedur stellt eine Modifikation der **procedure generiere_Referenzgitter** dar, bei der lediglich in Randnähe verfeinert wird.

```

procedure generiere_lokales_Referenzgitter( $\tilde{\tau}_0, b_\Gamma, \ell, \ell_{\max}$ );
begin
  generiere_Referenzgitter( $\tilde{\tau}_0, b_\Gamma, \ell$ );
  for  $j := \ell + 1$  to  $\ell_{\max}$  do begin
    for all  $K \in (L_{j-1}^2(\Gamma) \cup L_{j-1}^{b_\Gamma+1}(\Gamma_D)) \cap \tau_{j-1}$  do begin
      generiere alle Söhne  $\sigma_{j-1}^j(K)$  durch regelmäßige Verfeinerung;
      for all  $K' \in \sigma_{j-1}^j(K)$  do  $F_j^{j-1}(K') := K$ ;
       $\tilde{\tau}_j := \tilde{\tau}_j \cup \sigma_{j-1}^j(K)$ ;
    end
  end

```

end end end;

Wir betonen hier, daß die durch diese Prozedur erzeugten Referenzgitter $\tilde{\tau}_j$ für $j > \ell$ das Gebiet nicht überdecken, sondern nur aus randnahen Schichten bestehen. Die Prozeduren **adapt**, **reduce_mesh** und auch procedure **generiere_Dirichlet_Gitter** (Definition 51) können ohne Modifikation angewendet werden. Eine Folge derartiger randnaher Gitter ist in Abbildung 6.6 dargestellt.

Abbildung 6.6: Oberes Bild: Folge von randnahen Gittern. Es werden jeweils nur die Dreiecke verfeinert, die randnah sind. Unteres Bild: Angepaßtes, randnahes Feingitter und überlappendes Grobgitter.

Im folgenden Abschnitt wird erklärt, wie auf diesen Gittern die Systemmatrix aufgestellt werden kann.

6.2 Erzeugung des linearen Gleichungssystems

Im Abschnitt 4.3 wurden die CFE-Basisfunktionen $\{b_x^\ell\}_{x \in \Theta_\ell}$ definiert. Um die Matrixelemente $\mathbf{A}_\ell(x, y)$ zu berechnen, müssen die Integrale

$$\mathbf{A}_\ell(x, y) := \int_{\Omega} \left(\langle \nabla b_x^\ell(z), A(z) \nabla b_y^\ell(z) \rangle + c(z) b_x^\ell(z) b_y^\ell(z) \right) dz \quad (6.2)$$

ausgewertet werden. Für das folgende spielen die Koeffizienten A und c keine Rolle, so daß wir $A = I$ und $c = 1$ setzen. Der allgemeine Fall kann genauso behandelt werden. In Kapitel 4.3 wurde bereits erklärt, wie die Systemmatrix durch (globale) Vergrößerung aus der Feingittermatrix erzeugt werden kann.

Wir werden in diesem Abschnitt das Hauptaugenmerk auf die Formulierung einer lokalen Variante legen, die vorteilhaft angewendet werden kann, falls zur Stufe $\ell \ll \ell_{\max}$ diskretisiert werden soll, und die Feingittermatrix nicht zur Diskretisierung benötigt wird.

Um (6.2) auszuwerten, kann man das Integrationsgebiet offensichtlich auf den Schnitt der Träger der Basisfunktionen $\Omega_{x,y}^\ell := \text{supp } b_x^\ell \cap \text{supp } b_y^\ell$ beschränken. Diese Träger setzen sich zusammen aus Elementen auf unterschiedlichen Stufen. Falls beispielsweise x und y hinreichend weit vom Rand des Gebiets entfernt sind, besteht $\Omega_{x,y}^\ell$ lediglich aus Grobgitterelementen $K \in \tau_\ell$. Aus diesem Grund definieren wir noch eine lokale Version der Bilinearform. Für ein FE-Gitter τ , definieren wir a_τ durch

$$a_\tau(u, v) := \int_{\text{dom } \tau} (\langle \nabla u, \nabla v \rangle + uv) dz.$$

Sei $K \in \tau_j$. Falls für alle $x \in \Theta_K$ die CFE-Basisfunktion aus K mit den üblichen Hutfunktionen übereinstimmen, d.h.

$$b_x^j|_K = \varphi_x^j|_K, \quad \forall x \in \Theta_K \quad (6.3)$$

gilt, nennen wir K **zulässig** und sonst **unzulässig**. Die Menge der zulässigen Elemente wird τ_j^{makro} und die Menge der unzulässigen τ_j^{mikro} genannt. Für $j < \ell_{\max}$ setzen wir

$$\tau_j^{\text{makro}} := \{K \in \tau_j \mid \text{Bedingung (6.3) ist erfüllt.}\}$$

und $\tau_j^{\text{makro}} = \tau_{\ell_{\max}}$ für $j = \ell_{\max}$. Im folgenden soll Bedingung (6.3) geometrisch charakterisiert werden. Damit die durch Interpolation erklärte Prolongation auf K die Identität ist, müssen alle Söhne von K mit den Söhnen im Referenzgitter übereinstimmen:

$$\sigma_j^{\ell_{\max}}(K) = \sigma_j^{\ell_{\max}}(\Phi_j(K)).$$

Dies ist sichergestellt, falls $K \notin L_j^2(\Gamma)$ erfüllt. Damit Finite-Elemente-Funktionen auf K nicht durch Extrapolation verändert werden, darf kein Sohn von K im randnahen Gitter τ_i^Γ liegen. Diese Bedingung wird durch $K \notin L_j^b(\Gamma_D)$ garantiert. Wir haben also gezeigt, daß aus $K \notin L_j^2(\Gamma) \cup L_j^b(\Gamma_D)$ die Beziehung (6.3) folgt und K zulässig ist.

Der folgende Algorithmus eliminiert Elemente aus den Gittern τ_j , bezüglich derer die Systemmatrix bereits auf der größeren Verfeinerungsstufe erzeugt wird.

```

procedure reduce_mesh_local;
begin
  for  $j = \ell$  to  $\ell_{\max} - 1$  do begin
    for all  $K \in \tau_j$  do
      if  $K = \text{zulässig}$  then begin
        for  $k := j + 1$  to  $\ell_{\max}$  do  $\tau_k := \tau_k \setminus \sigma_j^k(K)$ ;
         $\tau_j^{\text{makro}} := \tau_j^{\text{makro}} \cup K$ 
      end end end;

```

Die globale Variante, die in Abschnitt 4.3 beschrieben wurde, erhält man, indem $\tau_j^{\text{makro}} = \emptyset$ für alle $\ell \leq j < \ell_{\max} - 1$ und $\tau_{\ell_{\max}}^{\text{makro}} = \tau_{\ell_{\max}}$ gesetzt wird. Der folgende Vergrößerungsalgorithmus besitzt für beide Varianten die gleiche Form. Auf den Elementen $K \in \tau_j^{\text{makro}}$ kann die Systemmatrix direkt aufgestellt werden und auf den übrigen Elementen durch Vergrößerung gewonnen werden. Das Prinzip ist das folgende. Sei $\mathbf{e}_x^j \in R^{\Theta_j}$ wieder eine Einheitsgitterfunktion. Dann gilt für alle $K \in \tau_j^{\text{makro}}$

$$b_x^j|_K = \varphi_x^j|_K,$$

und daher kann der zu K gehörende Anteil der Systemmatrix ohne Verwendung der Prolongation direkt mit Hilfe der Standard-FE-Basis $\varphi_x^j|_K$ aufgestellt werden. Die Systemmatrix, die zum „randfernen“ Gitter τ_j^{makro} gehört, wird mit $\mathbf{A}_j^{\text{makro}}$ bezeichnet:

$$\mathbf{A}_j^{\text{makro}}(x, y) := a_{\tau_j^{\text{makro}}}(\varphi_x^j, \varphi_y^j), \quad \forall x, y \in \Theta_j \cap \overline{\text{dom } \tau_j^{\text{makro}}}.$$

Es hier wichtig zu bemerken, daß $\mathbf{A}_j^{\text{makro}}$ mit Hilfe der üblichen Formfunktionen φ_x^ℓ definiert ist. Auf der feinsten Stufe ℓ_{\max} gilt $\tau_{\ell_{\max}}^{\text{makro}} = \tau_{\ell_{\max}}$ und daher $\mathbf{A}_{\ell_{\max}} = \mathbf{A}_{\ell_{\max}}^{\text{makro}}$. Die Matrizen zu den größeren Gittern lassen sich mit Hilfe der Prolongation $P_{j+1,j}$ gemäß

$$\mathbf{A}_j(x, y) = \mathbf{A}_j^{\text{makro}}(x, y) + \langle P_{j+1,j} \mathbf{e}_y^j, \mathbf{A}_{j+1} P_{j+1,j} \mathbf{e}_x^j \rangle_{j+1}$$

darstellen (vgl. (4.15)). Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_j : R^{\Theta_j} \times R^{\Theta_j} \rightarrow R$ ist durch

$$\langle \beta, \gamma \rangle_j := \sum_{x \in \Theta_j} \beta(x) \gamma(x)$$

definiert. Anschaulich gesprochen, bedeutet diese Darstellung, daß die Grobgittermatrizen mit den üblichen FE-Matrizen auf den „randfernen“ Gittern

τ_j^{makro} übereinstimmen, und die Modifikation in Randnähe über eine lokale Vergrößerung der Feingittermatrix \mathbf{A}_{j+1} erfolgt. Indem wir den zu $P_{j+1,j}$ adjungierten Operator $R_{j,j+1} : R^{\Theta_{j+1}} \rightarrow R^{\Theta_j}$ über die Relation

$$\langle P_{j+1,j}\beta, \gamma \rangle_{j+1} = \langle \beta, R_{j,j+1}\gamma \rangle_j, \quad \forall \beta \in R^{\Theta_j}, \gamma \in R^{\Theta_{j+1}}$$

einführen, können wir für die vergrößerten Matrizen auch die kompaktere Darstellung

$$\mathbf{A}_j := \mathbf{A}_j^{makro} + R_{j,j+1}\mathbf{A}_{j+1}P_{j+1,j}, \quad j = \ell_{\max} - 1, \ell_{\max} - 2, \dots, \ell. \quad (6.4)$$

verwenden. Da wir hier lediglich die Definition der CFE-Basisfunktionen und des Galerkin-Produkts (4.15) angewendet haben, stimmt \mathbf{A}_ℓ offensichtlich mit der Darstellung (6.2) überein.

Die algorithmische Formulierung des Vergrößerungsalgorithmus lautet wie folgt. Die Prozedur **coarsen** wird durch

for $j = \ell_{\max}$ **downto** ℓ **do** **coarsen**(j, τ_j, \mathbf{A}_j);

aufgerufen und ist wie folgt definiert.

```

procedure coarsen( $j, \tau, \mathbf{A}$ );
begin
  if  $j \neq \ell_{\max}$  do
    for all  $x \in \Theta_\tau$  do
      berechne  $\mathbf{A}(\cdot, x) := R_{j,j+1}\mathbf{A}_{j+1}P_{j+1,j}\mathbf{e}_x^j$ ;
    for all  $K \in \tau_j^{makro}$  do
      for all  $x, y \in \Theta_K$  do
         $\mathbf{A}(x, y) := \mathbf{A}(x, y) + a_K(\varphi_y^j, \varphi_x^j)$ ;
end;

```

Das Ergebnis dieser Prozedur ist eine Sequenz von Matrizen $\{\mathbf{A}_j\}_{\ell \leq j \leq \ell_{\max}}$ mit den folgenden Eigenschaften. Die größte Matrix \mathbf{A}_ℓ ist die CFE-Systemmatrix zur Stufe ℓ , und die Matrizen \mathbf{A}_j für $j > \ell$ sind die CFE-Steifigkeitsmatrizen zu den Gittern τ_j . Falls τ_j vollständige Gitter sind (globale Variante), d.h. beim Verfeinern von τ_ℓ alle Elemente verfeinert wurden, sind die Operatoren \mathbf{A}_j die CFE-Systemmatrizen zur Stufe j . Falls τ_ℓ sukzessive nur in Randnähe verfeinert wurde (lokale Variante), ist \mathbf{A}_j derjenige Anteil der CFE-Systemmatrix zur Stufe j , der zum randnahen Gitter τ_j gehört. Falls in einem späteren Schritt auch die komplette Steifigkeitsmatrix zur Stufe j

assembliert werden soll, kann der bereits berechnete randnahe Anteil verwendet werden. Es ist dann nur der Anteil zum (vervollständigten) inneren Gitter geeignet aufzuaddieren.

Damit ist erklärt, wie die Systemmatrizen für Diskretisierungen mit zusammengesetzten finiten Elementen aufgestellt werden können. Eine wesentliche Frage ist nun, wie aufwendig diese Diskretisierung typischerweise ist, in Abhängigkeit der Zahl der Freiheitsgrade. Die zugehörige Komplexitätsanalyse findet sich im nächsten Abschnitt.

6.3 Komplexitätsanalyse

Der Aufwand, die Systemmatrix zu generieren, hängt stark von der Komplexität des Randes ab. Falls der Rand vom Gitter τ_ℓ bereits aufgelöst wird und die üblichen Finite-Elemente-Räume zur Diskretisierung verwendet werden, ist der Aufwand, die Systemmatrix auf der Stufe ℓ zu generieren, bekanntermaßen proportional zur Zahl der Freiheitsgrade. Für zusammengesetzte finite Elemente entsteht durch die Auflösung der Mikrostrukturen am Rand ein zusätzlicher Aufwand, der im folgenden für typische Situationen untersucht werden soll. Wir nehmen an, daß in einem Vorbereitungsschritt die Information über den Rand Γ so organisiert wurde bzw. vom Benutzer direkt derart zur Verfügung gestellt wurde, daß in den obigen Algorithmen die Frage, ob $K \in L_\ell^m(\Gamma)$ gilt, in $O(1)$ Operationen entscheidbar ist. Genauso nehmen wir an, daß für jeden randnahen Punkt des Referenzgitters in $O(1)$ Schritten ein Randpunkt gefunden werden kann, auf den der Referenzpunkt projiziert wird (siehe **procedure adapt**). Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Die Familie der Referenzgitter wird wieder mit $\{\tilde{\tau}_j\}_{j=0}^{\ell_{\max}}$ bezeichnet und sei durch die Prozeduren **generiere_Referenzgitter** bzw. **generiere_lokales_Referenzgitter** erzeugt. Die Zahl der Elemente des Gitter $\tilde{\tau}_j$ wird mit N_j bezeichnet:

$$N_j := \#\tilde{\tau}_j.$$

Die Zahl der Freiheitsgrade auf dem Gitter τ_j ist proportional zu N_j :

$$N_j \sim \#\Theta_j,$$

wobei die Proportionalitätskonstante lediglich vom verwendeten Polynomgrad p abhängt. Dann folgt direkt aus der Definition der Prozeduren

- **procedure generiere_Referenzgitter,**
- **procedure generiere_lokales_Referenzgitter,**
- **procedure adapt,**
- **procedure reduce_mesh,**
- **procedure relax,**
- **procedure generiere_Dirichlet_Gitter,**
- **procedure reduce_mesh_local,**

daß der Aufwand zur Erzeugung der Gittersequenz $\{\tau_j\}_{j=0}^{\ell_{\max}}$ proportional zu

$$N_{total} := \sum_{j=0}^{\ell_{\max}} N_j$$

ist. Im folgenden soll nun untersucht werden, wie aufwendig es ist, die Sequenz der Systemmatrizen \mathbf{A}_j zu erzeugen. Wir betonen, daß die folgenden Aufwandsabschätzungen sich sowohl auf die globale Variante beziehen, bei der alle Gitter τ_j die „vollen“ Gitter darstellen, als auch auf die lokale Variante, bei der die Gitter τ_j für $j > \ell$ lediglich die randnahen Verfeinerungen aus **procedure generiere_lokales_Referenzgitter** und **procedure reduce_mesh_local** darstellen. Der wesentliche Schritt dabei ist, den Aufwand der Vergrößerung mit Hilfe des Galerkin-Produkts (6.4) abzuschätzen. Gemäß **procedure coarsen** muß für alle Einheitsgitterfunktionen die Größe $R_{j,j+1} \mathbf{A}_{j+1} P_{j+1,j} \mathbf{e}_y^j$ ausgewertet werden. Zur Auswertung der Prolongation in einem Feingitterpunkt $x \in \Theta_{j+1}$, wird die Grobgitterfunktion lediglich im Element $K := \pi_{j+1}^j(x)$ benötigt. Da die Prolongation linear ist, gilt

$$P_{j+1,j} [\mathbf{e}_y^j](x) = \sum_{z \in \Theta_K} \alpha_z(x) \mathbf{e}_y^j(z).$$

Die Gewichte $\{\alpha_z(x)\}_{z \in \Theta_K}$ sollten für jeden Knotenpunkt berechnet und abgespeichert werden. In Satz 98 wird gezeigt, daß die prolongierte Einheitsgitterfunktion nur in $O(1)$ Feingitterpunkten von Null verschieden ist. Daher ist der Aufwand, die Prolongation für *alle* Funktionen $\{\mathbf{e}_y^j\}_{y \in \Theta_j}$ auszuwerten, proportional zu N_j . Analoge Überlegungen zeigen, daß der Aufwand

zur Restriktion von gleicher Größenordnung ist. Im folgenden wird gezeigt, daß die vergrößerten Matrizen \mathbf{A}_j pro Zeile und Spalte lediglich $O(1)$ Nicht-Nullelemente besitzen. Dazu wird der Träger einer Gitterfunktion $\beta \in R^{\Theta_\ell}$ benötigt, der durch

$$\text{supp } \beta := \{x \in \Theta_\ell \mid \beta(x) \neq 0\}$$

gegeben ist. Die Lokalität der Prolongation, des Operators \mathbf{A}_ℓ und der Restriktion ist Gegenstand des folgenden Satzes.

Satz 98 *Die Zahl der Nicht-Nulleinträge pro Zeile und Spalte der Matrix \mathbf{A}_ℓ ist durch eine Konstante beschränkt, die unabhängig von ℓ und ℓ_{\max} ist.*

Beweis. Seien $\{\tau_\ell\}_{\ell=0}^{\ell_{\max}}$ die „vollständigen“ CFE-Gitter und \mathbf{A}_ℓ die zugehörigen CFE-Systemmatrizen. Dann gilt mit Hilfe des Galerkin-Produkts für die Spalte $\mathbf{A}_\ell(\cdot, y)$

$$\mathbf{A}_\ell(\cdot, y) = R_{\ell, \ell_{\max}} \mathbf{A}_{\ell_{\max}} P_{\ell_{\max}, \ell} [\mathbf{e}_y^\ell],$$

wobei \mathbf{e}_y^ℓ wieder die Einheitsgitterfunktion zum Knoten $y \in \Theta_\ell$ bezeichnet. Zunächst wird der Träger der prolongierten Funktion $\mathbf{e}_y^{\ell_{\max}, \ell} := P_{\ell_{\max}, \ell} [\mathbf{e}_y^\ell]$ abgeschätzt. Sei dazu

$$U(y) := \{K \in \tau_\ell \mid y \in Y_{\ell, \ell}(K)\},$$

wobei $Y_{\ell, \ell}(K)$ wieder die Punkte der Einflußmenge von K auf der Stufe ℓ bezeichnen (siehe Definition 38 bzw. Definition 72). Wir rekapitulieren die Definition der Knotenpunkte der Söhne eines Elements: $\Theta_\ell^{\ell_{\max}}(K) := \Theta_{\ell_{\max}} \cap \overline{\text{dom } \sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K)}$. Die Knoten der Söhne von $U(y)$ auf dem feinsten Gitter werden $U'(y)$ genannt:

$$U'(y) := \{\Theta_\ell^{\ell_{\max}}(K) \mid K \in U(y)\}.$$

Wir zeigen $\text{supp } \mathbf{e}_y^{\ell_{\max}, \ell} \subset U'(y)$. Sei dazu $x \in \Theta_{\ell_{\max}} \setminus U'(y)$ und $K' \in \tau_{\ell_{\max}}$ ein Element, welches $x \in \overline{K'}$ erfüllt. Der Vater von K' auf Stufe ℓ wird $K := F_{\ell_{\max}}^\ell(K')$ genannt und erfüllt $y \notin Y_{\ell, \ell}(K)$. Aus $\mathbf{e}_y^\ell|_{Y_{\ell, \ell}(K)} \equiv 0$ folgt $\mathbf{e}_y^{\ell_{\max}, \ell}(x) = 0$, was zu zeigen war.

Wir kommen nun zur Lokalität von $\mathbf{A}_{\ell_{\max}}$. Die Interpolierende von $\mathbf{e}_y^{\ell_{\max}, \ell}$ auf $\tau_{\ell_{\max}}$ ergibt die CFE-Basisfunktion $b_y^\ell := I_{\ell_{\max}} [\mathbf{e}_y^{\ell_{\max}, \ell}]$. Offensichtlich gilt daher

$$\text{supp } b_y^\ell \subset \overline{\text{dom } L_{\ell_{\max}}^1(U'(y))}.$$

Sei $\hat{\mathbf{e}}_y^{\ell_{\max}, \ell} := \mathbf{A}_{\ell_{\max}} \mathbf{e}_y^{\ell_{\max}, \ell}$. Auf Grund der Definition von $\mathbf{A}_{\ell_{\max}}$ gilt

$$\hat{\mathbf{e}}_y^{\ell_{\max}, \ell}(x) = a(b_y^\ell, \varphi_x^{\ell_{\max}})$$

mit der üblichen Hutbasis $\varphi_x^{\ell_{\max}}$ zum Knoten x . Auf Grund der Definition der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ gilt daher $\hat{\mathbf{e}}_y^{\ell_{\max}, \ell}(x) = 0$ für

$$x \notin \overline{\text{dom } b_y^\ell} \subset \overline{\text{dom } L_{\ell_{\max}}^1(U'(y))}.$$

Daher gilt für den Träger von $\hat{\mathbf{e}}_y^{\ell_{\max}, \ell}(x)$ die Inklusion

$$\text{supp } \hat{\mathbf{e}}_y^{\ell_{\max}, \ell}(x) \subset \overline{\text{dom } L_{\ell_{\max}}^1(U'(y))}.$$

Schließlich muß die Funktion $\hat{\mathbf{e}}_y^{\ell_{\max}, \ell}$ noch restringiert werden. Die Restriktion von $\hat{\mathbf{e}}_y^{\ell_{\max}, \ell}$ definiert die y te Spalte des Operators \mathbf{A}_ℓ und wird $\mathbf{s}_y^\ell := R_{\ell_{\max}, \ell} \hat{\mathbf{e}}_y^{\ell_{\max}, \ell}$ genannt. Diejenigen Grobgitterelemente, deren Söhne nichtleeren Schnitt mit $\text{supp } \hat{\mathbf{e}}_y^{\ell_{\max}, \ell}$ besitzen, definieren die Menge

$$V'(y) := \left\{ K \in \tau_\ell^{NM} \mid \sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K) \cap L_{\ell_{\max}}^1(U'(y)) \neq \emptyset \right\}.$$

Die Menge $V(y)$ besteht aus den Knotenpunkten der Einflußmengen von $V'(y)$:

$$V(y) := \{Y_{\ell, \ell}(K) \mid K \in V'(y)\}.$$

Wir zeigen $\text{supp } \mathbf{s}_y^\ell \subset V(y)$. Sei dazu $x \in \Theta_\ell \setminus V(y)$. Dann gilt für alle $K \in \tau_\ell$, die $x \in Y_{\ell, \ell}(K)$ erfüllen, $K \notin V'(y)$. Da zur Auswertung der Prolongation in den Knotenpunkten $\Theta_{\ell_{\max}} \cap \overline{\text{dom } \sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K)}$ lediglich die Knotenwerte in $Y_{\ell, \ell}(K)$ benötigt werden, folgt

$$P_{\ell_{\max}, \ell}[\mathbf{e}_x^\ell](z) = 0, \quad \forall z \in \Theta_{\ell_{\max}} \cap \overline{\text{dom } L_{\ell_{\max}}^1(U'(y))}.$$

Diese Relation impliziert umgekehrt $R_{\ell, \ell_{\max}}[\hat{\mathbf{e}}_y^{\ell_{\max}, \ell}](x) = 0$, was zu zeigen war.

Im letzten Schritt ist nun die Anzahl $\#V(y)$ abzuschätzen. Wir beginnen mit der Menge $V'(y)$. Seien $K', K'' \in L_{\ell_{\max}}^1(U'(y))$ derart gewählt, daß $K' \in \sigma_\ell^{\ell_{\max}}(K)$ für ein $K \in U(y)$ gilt und $\overline{K' \cap K''} \neq \emptyset$. Aus Lemma 29 folgt, daß $\overline{F_{\ell_{\max}}^\ell(K'')} \cap \overline{K} \neq \emptyset$ gilt. Das bedeutet

$$V'(y) \subset \overline{\text{dom } L_\ell^1(U(y))}.$$

Mit Hilfe von Lemma 75 ergibt sich daraus

$$V(y) \subset \text{dom } L_\ell^{1+2n_l}(y).$$

Damit ist die Zahl der Nicht-Nulleinträge von \mathbf{A}_ℓ pro Spalte und Zeile durch eine Konstante beschränkt, die von den Konstanten, welche die Gitterfamilie charakterisieren, und dem Polynomgrad p abhängt, aber unabhängig von den Verfeinerungsstufen ist. ■

Aus diesem Satz folgt, daß der Aufwand, die Folge der Matrizen $\{\mathbf{A}_j\}_{j=0}^{\ell_{\max}}$ zu erzeugen, proportional zu N_{total} ist. Im folgenden soll die Größe N_{total} für zwei typische Beispiele abgeschätzt werden. Um die Aufwandsabschätzungen möglichst übersichtlich zu halten, nehmen wir an, daß die Gitter quasi-uniform sind, d.h. eine Konstante C_u existiert, so daß für alle ℓ und alle $K \in \tau_\ell$ die Abschätzung

$$h_\ell \leq C_u h_K$$

gilt. Desweiteren sollen eine Konstante $c_{ref} < 1$ existieren, so daß

$$h_{\ell+1} \leq c_{ref} h_\ell$$

erfüllt ist.

Im ersten Beispiel betrachten wir den Fall, daß die (volle) Feingittermatrix $\mathbf{A}_{\ell_{\max}}$ zur Diskretisierung aufgestellt werden soll, und die grobskaligeren Diskretisierungen \mathbf{A}_j benötigt werden, um beispielsweise Mehrgitterverfahren als Löser des linearen Gleichungssystems einsetzen zu können. Der Aufwand, die Feingittermatrix aufzustellen, ist proportional zur Zahl der Freiheitsgrade auf dem feinsten Gitter und daher proportional zu $N_{\ell_{\max}}$. Der Zusatzaufwand, um die Matrizen $\{\mathbf{A}_j\}_{j=0}^{\ell_{\max}-1}$ mit Hilfe der **procedure coarsen** aufzustellen, beträgt gemäß der obigen Komplexitätsanalyse und der Annahme über die Quasiuniformität der Gitter

$$\begin{aligned} N_{total} &= \sum_{j=0}^{\ell_{\max}-1} N_j \leq C \sum_{j=0}^{\ell_{\max}-1} h_j^{-d} \leq C \sum_{j=0}^{\ell_{\max}-1} c_{ref}^{(\ell_{\max}-j)d} h_{\ell_{\max}}^{-d} \\ &\leq C \frac{c_{ref}^d}{1 - c_{ref}^d} N_{\ell_{\max}}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Das bedeutet, daß der Aufwand die *ganze* Sequenz $\{\mathbf{A}_j\}_{j=0}^{\ell_{\max}}$ zu erzeugen, proportional zum Aufwand ist, allein die Feingittermatrix zu generieren.

Im zweiten Beispiel wird eine Situation diskutiert, für die die lokale Variante der Matrixgenerierung vorteilhaft angewendet werden kann. Wir nehmen an, daß die Matrix zur Stufe ℓ aufgestellt werden soll, und die Feingittermatrix $\mathbf{A}_{\ell_{\max}}$ lediglich als Hilfsmatrix benötigt wird, um die Vergrößerung über das Galerkin-Produkt zu realisieren. Wie erwähnt, sollte dann die **procedure generiere_lokales_Referenzgitter** angewendet werden. Die Frage ist nun, wieviele Elemente die randnah verfeinerten Gitter τ_j für $j > \ell$ enthalten. Sei dazu $c_\Omega := \int_\Omega 1 dx$ die Fläche (Volumen) von Ω und $c_\Gamma := \int_\Gamma 1 dx$ die Länge (Fläche) des Randes. Per Definition werden für $j \geq \ell$ lediglich die randnahen Schichten $(L_j^2(\Gamma) \cup L_j^{b_\Gamma+1}(\Gamma_D)) \cap \tau_j$ weiterverfeinert. Auf Grund der Quasiuniformität der Gitter folgt dann, daß $N_\ell = O(c_\Omega h_\ell^{-d})$ gilt, und für $j > \ell$ die Abschätzung $N_j = O(c_\Gamma h_j^{1-d})$ erfüllt ist. Daher kann die Größe N_{total} wie folgt abgeschätzt werden (vgl. (6.5))

$$\begin{aligned} N_{total} &= \sum_{j=0}^{\ell} N_j + \sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} N_j \leq c_\Omega \frac{c_{ref}^d}{1 - c_{ref}^d} N_\ell + c_\Gamma \sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} h_j^{1-d} \\ &\leq c_\Omega \frac{c_{ref}^d}{1 - c_{ref}^d} N_\ell + c_\Gamma \sum_{j=\ell+1}^{\ell_{\max}} c_{ref}^{(\ell_{\max}-j)(d-1)} h_{\ell_{\max}}^{1-d} \\ &\leq c_\Omega \frac{c_{ref}^d}{1 - c_{ref}^d} N_\ell + c_\Gamma \frac{c_{ref}^{d-1}}{1 - c_{ref}^{d-1}} N_{\ell_{\max}}^{\frac{d-1}{d}}. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung läßt sich (in zwei Dimensionen) wie folgt interpretieren. Der Aufwand, die Matrix \mathbf{A}_ℓ zu erzeugen, ist proportional zu der Zahl der Freiheitsgrade auf der Stufe ℓ plus einem Zusatzaufwand der Größenordnung $\sqrt{N_{\ell_{\max}}}$ zur Auflösung der Mikrostrukturen.

Wir bemerken, daß diese Abschätzung zu pessimistisch ist, falls die Mikrostrukturen nur in lokalen Bereichen des Randes auf feineren Gittern aufgelöst werden müssen und in anderen Bereichen bereits vom Grobgitter aufgelöst werden. Dann müßte nur in nichtaufgelösten, *kritischen* Randbereichen $\Gamma_{mikro}, \Gamma_D^{mikro} \subset \Gamma$ weiterverfeinert werden. Dies wäre beispielsweise der Fall, falls das Gebiet nur wenige, sehr kleine Löcher enthielte.

Auf der anderen Seite ist die Abschätzung zu optimistisch, falls beispielsweise poröse Medien behandelt werden sollen. Für derartige Anwendungen ist die Zahl der Mikrostrukturen typischerweise proportional zu $h_{\ell_{\max}}^{-d}$. Dann wäre die Länge des Randes c_Γ wesentlich größer als das Volumen c_Ω des Gebiets und somit der Zusatzaufwand deutlich höher.

Im folgenden Kapitel werden Ergebnisse von numerischen Experimenten vorgestellt, die u.a. den Aufwand für typische Anwendungen von zusammengesetzten finiten Elementen illustrieren.

6.4 Numerische Experimente

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse numerischer Testrechnungen mit zusammengesetzten finiten Elementen diskutiert. Es wurden generell CFE-Räume verwendet, die auf linearen finiten Elementen basieren. Die folgenden Tests wurden durchgeführt.

1. Approximationseigenschaft der CFE-Räume für H^2 -Funktionen,
2. Konvergenzraten von Mehrgitterverfahren basierend auf CFE-Diskretisierungen,
3. Verhalten der Koeffizienten von numerisch homogenisierten Differentialoperatoren in Abhängigkeit der Mikrostrukturen.

Es wurden sowohl Probleme mit Dirichlet-Randbedingungen als auch mit Neumann-Randbedingungen betrachtet und zwei- und dreidimensionale Probleme untersucht. Wir beginnen mit der Approximationseigenschaft.

6.4.1 Approximationseigenschaft

Wir haben gezeigt, daß CFE-Räume, basierend auf linearen finiten Elementen, unter moderaten Annahmen die Approximationseigenschaft für H^2 -Funktionen besitzen. Genauer existiert für jede Funktion $u \in H^2(\Omega)$ eine Funktion $u_\ell \in S_\ell^{CFE}$, so daß für $m = 0, 1$

$$|u - u_\ell|_m \leq Ch_\ell^{2-m} \|u\|_2$$

gilt, wobei die Konstante C unabhängig von u , ℓ und ℓ_{\max} ist. Wir haben weiter gezeigt, daß C unabhängig von der Größe und Anzahl der Mikrostrukturen ist. Als Testproblem haben wir das Kreisgebiet (bzw. Einheitskugel in 3D) um den Ursprung mit Radius 1 gewählt. Vom mathematischen Standpunkt her ist dieses Gebiets geeignet, die theoretischen Untersuchungen zu illustrieren, da die groben Gitter keine Approximation des Gebiets darstellen. Um die Abhängigkeit von Größe und Anzahl der geometrischen Details zu

untersuchen, wird im Anschluß daran ein realistischeres Testgebiet betrachtet. Die Gitterfamilie wurde gemäß der oben beschriebenen Algorithmen erzeugt. Da auf den größten Gittern alle Elemente den Rand schneiden, werden alle Elemente bei der Behandlung von Dirichlet-Randbedingungen weggelassen. Daher besteht die Sequenz von Gittern für Probleme mit Dirichlet-Randbedingungen aus weniger Gittern. Diese sind in Abbildung 6.7 und 6.8

Abbildung 6.7: Überlappende Gitter für Neumann-Randbedingungen. Es sind die Gitter auf den Stufen 1,3,5,8 dargestellt.

dargestellt. Die zu approximierende Funktion lautet $u(x) = e^{-10\|x\|^2} - e^{-10}$.

Abbildung 6.8: Gittersequenz für Dirichlet-Randbedingungen. Das feinste Gitter ist nicht dargestellt, da es mit dem feinsten Gitter für Neumann-Randbedingungen übereinstimmt.

Der Fehler auf der Verfeinerungsstufe ℓ wird mit

$$e_\ell := u - u_\ell^{int}$$

bezeichnet, wobei als Approximation $u_\ell^{int} \in S_\ell^{CFE}$ wieder die Funktion

$$u_\ell^{int} := I_{\ell_{\max}} P_{\ell_{\max}, \ell} R_\ell [u]$$

gewählt wurde. Die folgende Tabellen geben die beobachteten Konvergenzraten wieder. Zunächst wurde das Neumann-Problem in zwei Dimensionen

betrachtet.

Level	dim	$\ e_\ell\ _0$	$\frac{\ e_{\ell-1}\ _0}{\ e_\ell\ _0}$	$ e_\ell _1$	$\frac{ e_{\ell-1} _1}{ e_\ell _1}$
1	4	3.9e-1		1.8e+0	
2	9	4.9e-1	0.81	1.7e+0	1.04
3	23	1.1e-1	4.61	1.1e+0	1.51
4	73	6.3e-2	1.68	8.5e-1	1.33
5	247	1.7e-2	3.60	4.6e-1	1.86
6	881	4.5e-3	3.91	2.3e-1	1.97
7	3238	1.1e-3	3.99	1.2e-1	1.99
8	12324	2.6e-4	4.24	5.8e-2	2.00

Man erkennt deutlich, daß sich bereits für sehr grobskalige Diskretisierungen die erwartete quadratische Konvergenz in der L^2 -Norm und die lineare Konvergenz in der H^1 -Norm einstellt. Für das dreidimensionale Testproblem ergeben sich ähnliche Konvergenzraten:

Level	dim	$\ e_\ell\ _0$	$\frac{\ e_{\ell-1}\ _0}{\ e_\ell\ _0}$	$ e_\ell _1$	$\frac{ e_{\ell-1} _1}{ e_\ell _1}$
1	8	2.5e-1		1.4e+0	
2	27	9.3e-1	0.26	2.0e0	0.69
3	125	2.9e-1	3.27	1.89e0	1.06
4	729	7.5e-2	3.83	9.7e-1	1.95
5	1176	3.0e-2	2.42	6.2e-1	1.57
6	5885	8.2e-3	3.76	3.2e-1	1.94

Für Dirichletsche Randbedingungen wurde die Prolongation in Randnähe modifiziert. Die folgenden Tabellen enthalten die Ergebnisse der zwei- und dreidimensionalen Testrechnungen.

Level	dim	$\ e_\ell\ _0$	$\frac{\ e_{\ell-1}\ _0}{\ e_\ell\ _0}$	$ e_\ell _1$	$\frac{ e_{\ell-1} _1}{ e_\ell _1}$
1	5	9.3e-1		1.4e+1	
2	27	7.8e-2	11.8	1.2e+0	12.4
3	145	3.4e-2	2.34	7.0e-1	1.66
4	669	4.5e-3	7.39	2.3e-1	2.98
5	2844	1.1e-3	4.06	1.2e-1	2.00
6	11900	2.6e-4	4.24	5.8e-2	2.00

Wiederum ergibt sich in drei Dimensionen das gleiche qualitative Verhalten.

Level	dim	$\ e_\ell\ _0$	$\frac{\ e_{\ell-1}\ _0}{\ e_\ell\ _0}$	$ e_\ell _1$	$\frac{ e_{\ell-1} _1}{ e_\ell _1}$
1	1	4.9e-1		4.1e+0	
2	15	2.2e-1	2.17	2.7e+0	1.49
3	269	1.3e-1	1.72	2.4e+0	1.12
4	515	3.3e-2	3.96	6.6e-1	3.67
5	4197	8.2e-3	4.01	3.2e-1	2.08

Es ist zu beachten, daß die Gitter für Dirichlet-Randbedingungen nur Elemente enthalten, die innerhalb des Gebiets liegen, d.h. durch **procedure generiere_Dirichlet_Gitter** erzeugt wurden. Die Zahl der Verfeinerungsstufen ist daher niedriger, da auf den größten Gittern für Neumann-Randbedingungen *alle* Elemente den Rand Γ schneiden.

Im folgenden sollen noch Konvergenzresultate für eine praktisch relevante Geometrie vorgestellt werden. In Abbildung 2.2 ist ein triangulierter Ausschnitt der Ostsee dargestellt. Wir haben wieder die Gleichung

$$-\Delta u + u = f$$

betrachtet mit Neumann-Randbedingungen

$$\partial u / \partial n = g.$$

Die Daten f und g wurden so gewählt, daß die exakte Lösung $u = x^2 + y^2$ lautet. Die folgende Tabelle listet den beobachteten Diskretisierungsfehler.

Level	dim	$\ e_\ell\ _0$	$\frac{\ e_{\ell-1}\ _0}{\ e_\ell\ _0}$	$ e_\ell _1$	$\frac{ e_{\ell-1} _1}{ e_\ell _1}$
1	4	1.7e+6		1.6e+4	
2	9	4.2e+5	3.98	8.2e+3	1.98
3	22	9.6e+4	4.41	4.7e+3	1.74
4	62	2.4e+4	3.94	2.3e+3	2.02
5	198	6.1e+3	3.98	1.2e+3	1.99
6	657	1.5e+3	3.98	5.9e+2	1.97
7	2098	3.9e+2	3.97	3.0e+2	1.95
8	7102	9.6e+1	4.04	1.5e+2	1.95

Wir betonen, daß die asymptotisch erwartete Konvergenzraten bereits bei weniger als zehn (!) Unbekannten zu beobachten sind.

6.4.2 Zusammengesetzte finite Elemente und Mehrgitterverfahren

Wir betrachten hier das Problem, das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_{\ell_{\max}} \mathbf{u}_{\ell_{\max}} = \mathbf{F}_{\ell_{\max}}$$

mit Hilfe von Mehrgitterverfahren zu lösen. Für diesen Abschnitt setzen wir voraus, daß die grundlegenden Begriffe, die im Zusammenhang mit Mehrgitterverfahren auftreten, bekannt sind. Alle notwendigen Details finden sich beispielsweise in [18]. Um Mehrgitterverfahren zur iterativen Lösung dieser Gleichung einsetzen zu können, benötigt man eine Folge von grobskaligen Diskretisierungen des Problems und geeignete Prolongationen und Restriktionen. Mit Hilfe von zusammengesetzten finiten Elementen lassen sich über das Galerkin-Produkt diese gröberen Diskretisierungen erzeugen. Die Prolongation bzw. Restriktion ist durch $P_{\ell_{\max},\ell}$ und $R_{\ell,\ell_{\max}}$ gegeben. Als Glättungsverfahren wurde das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren gewählt mit einem Vor- und einem Nachglättungsschritt. Für das Mehrgitterverfahren wurde ein V-Zyklus benutzt. In den folgenden Tabellen werden die beobachteten Konvergenzraten aufgelistet. Um die Robustheit bezüglich vieler kleiner, geometrischer Details zu untersuchen, haben wir als Gebiet die Einheitskreisscheibe mit 576 Löchern betrachtet (siehe Abbildung 6.9) Es wurde die Gleichung

$$-\Delta u + u = 1$$

mit homogenen Neumann-Randbedingungen diskretisiert. Als Abbruchkriterium für das Mehrgitterverfahren wurde

$$\|\mathbf{r}_i\|_0 < 10^{-8}$$

gewählt, wobei \mathbf{r}_i das Residuum nach dem i ten Iterationsschritt und $\|\cdot\|_0$ die gewichtete l^2 -Norm

$$\|\mathbf{r}\|_0^2 := \frac{1}{\#\Theta_\ell} \sum_{y \in \Theta_\ell} (\mathbf{r}(y))^2$$

Abbildung 6.9: Linkes Bild: Gebiet mit 576 Löchern. Rechtes Bild: Gebiet mit zwei Löchern. Der Punkt, bezüglich dessen homogenisiert wird, ist der Mittelpunkt des äußeren Kreises und liegt genau zwischen beiden Löchern.

bezeichnet.

Level	dim	#It 2D-Neumann
1	4	direkter Löser
2	9	5
3	24	7
4	74	8
5	245	8
6	895	8
7	3323	8
8	12586	9

Man sieht deutlich, die sehr kleinen und schrittweitenunabhängige Konvergenzraten. Ein Vergleich mit den Konvergenzraten von Mehrgitterverfahren für das Poisson-Modellproblem auf dem Einheitsquadrat (siehe [18, Kapitel 4.4.1]) zeigt, daß die Konvergenzraten des auf CFE-Diskretisierungen basierten Mehrgitterverfahrens sehr nahe an den bestmöglich zu erwartenden Konvergenzraten liegen.

Wir hatten in Kapitel 6.3 bewiesen, daß der Aufwand, die vergrößerten Gleichungssysteme zu erzeugen, proportional zur Zahl der Feingitterpunkte sind. Die folgende Tabelle zeigt, daß diese Proportionalitätskonstante bei den durchgeführten numerischen Experimente sehr moderat war. Die Zeit

(in Millisekunden), um die Gittersequenz zu erzeugen, wird mit „t[Gitter]“ bezeichnet, die Zeit zum Aufstellen der Feingittermatrix mit „t[$\mathbf{A}_{\ell_{\max}}$]“, die Zeit zum Erzeugen aller Grobgittermatrizen mit „t[$\{\mathbf{A}_\ell\}_{\ell=0}^{\ell_{\max}-1}$]“ und die Zeit zur Lösung des Gleichungssystems mit „t[MG-Löser]“.

Level	dim	t[Gitter]	t[$\mathbf{A}_{\ell_{\max}}$]	t[$\{\mathbf{A}_\ell\}_{\ell=0}^{\ell_{\max}-1}$]	t[MG-Löser]
5	147	134	100	150	513
6	683	366	500	200	2187
7	2955	1450	2133	767	9140
8	12324	6083	9183	3134	43125
9	49473	2400	51116	12234	148343

Man sieht deutlich, daß der Aufwand, um alle Grobgittermatrizen zu erzeugen, lediglich 1/3-1/4 des Zeitaufwandes beträgt, der zur Erzeugung der Feingittermatrix benötigt wird. Ebenfalls erkennt man deutlich, daß der Aufwand, das Gleichungssystem auf der feinsten Stufe mit Hilfe von Mehrgitterverfahren zu lösen, linear mit der Zahl der Freiheitsgrade wächst.

Im letzten Abschnitt wird erklärt, wie sich CFE-Diskretisierungen zur diskreten Homogenisierung einsetzen läßt.

6.4.3 Homogenisierung mit zusammengesetzten finiten Elementen

Die Idee, zusammengesetzte finite Elemente zur (diskreten) Homogenisierung einzusetzen, basiert auf einer Re-Interpretation der grobskaligen Diskretisierung als kontinuierlichen Differentialoperator. Sei dazu \mathbf{A}_ℓ die Systemmatrix zum Gitter τ_ℓ , die über das Galerkin-Produkt erzeugt wurde (6.1). Im folgenden wird definiert, wie \mathbf{A}_ℓ auf eine analytische Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ wirkt:

$$\mathbf{A}_\ell[u](x) := \sum_{y \in \Theta_\ell} \mathbf{A}_\ell(x, y) u(y).$$

Indem u durch eine Taylor-Entwicklung um x ersetzt wird, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\ell[u](x) &= \sum_{y \in \Theta_\ell} \mathbf{A}_\ell(x, y) \sum_{\nu \in N_0^d} \frac{1}{\nu!} D^\nu[u](x) (y-x)^\nu \\ &= \sum_{\nu \in N_0^d} D^\nu[u](x) \frac{1}{\nu!} \sum_{y \in \Theta_\ell} \mathbf{A}_\ell(x, y) (y-x)^\nu. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Koeffizienten $c_\nu(x) := \frac{1}{\nu!} \left\{ \sum_{y \in \Theta_\ell} \mathbf{A}_\ell(x, y) (y - x)^\nu \right\}$ definieren wir den homogenisierten Differentialoperator im Knotenpunkt x auf der Skala ℓ durch

$$\mathbf{A}_\ell^{\text{hom}}(x) := \sum_{|\nu| \leq 2} c_\nu(x) D^\nu. \quad (6.6)$$

Eine wichtige Fragestellung im Rahmen der Homogenisierungstheorie ist, inwieweit die Koeffizienten c_ν des homogenisierten Differentialoperators von der Verteilung bzw. von der Größe der Mikrostrukturen abhängen, um dadurch zu sinnvollen, makroskopischen Modellen (Gleichungen) zu kommen, die das physikalische Problem beschreiben.

Wir haben die Abhängigkeit der Koeffizienten $c_\nu(x)$ von der Geometrie und der Auflösung (Schrittweite) untersucht. Als erstes Beispiel betrachten wir den Laplace-Operator, diskretisiert auf dem Gebiet

$$\Omega^\varepsilon := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon < \|x\| < 8 \right\}.$$

Ziel ist es, den homogenisierten Differentialoperator im Mittelpunkt $M_0 = (0, 0)^T$ zu berechnen. Aus Symmetriegründen nehmen wir an, daß

$$\mathbf{A}_\ell^{\text{hom}}(M_0) = c(\varepsilon) \Delta$$

gilt, mit einer zu bestimmenden Funktion $c(\varepsilon)$. Wir haben die Funktion $c(\varepsilon)$ gemäß (6.6) berechnet. Es ist interessant, daß für einen relativ großen Bereich $\varepsilon \in [0.1, 5]$ die Funktion $c(\varepsilon)$ nahezu perfekt durch ein quadratisches Polynom interpoliert werden kann. Dieses Verhalten ist in Abbildung 6.10 dargestellt.

Als zweites Beispiel haben wir die folgende anisotrope Situation betrachtet. Das Gebiet besteht aus einem Kreis um den Ursprung mit Radius 0.4, aus dem zwei Löcher mit Radius 0.09 um $(\pm 0.1, 0)^T$ herausgeschnitten sind. Das Gebiet ist in Abbildung 6.9 dargestellt. Wiederum soll der homogenisierte Differentialoperator im Ursprung M_0 berechnet werden. Diesmal soll die Abhängigkeit bezüglich der Verfeinerungsskala getestet werden. Für sehr große Schrittweite (relativ zur Größe der Löcher) erscheinen die Löcher verhältnismäßig isotrop. Mit kleiner werdender Schrittweite wird die Situation zunehmend anisotrop. Für sehr kleine Schrittweite jedoch werden die Löcher in der betrachteten Umgebung von M_0 nicht mehr vom Operator $\mathbf{A}_\ell(M_0, \cdot)$ „gesehen“, und die Situation ist wieder isotrop. Es stellt sich heraus, daß der berechnete homogenisierte Operator die Darstellung

$$\mathbf{A}_\ell^{\text{hom}}(M_0) = c_1(h_\ell) \partial_{xx} + c_2(h_\ell) \partial_{yy}$$

Abbildung 6.10: Abhängigkeit der Funktion $c(\varepsilon)$ vom Radius des Lochs.

besitzt. In Abbildung 6.11 sind die Koeffizienten $c_{1,2}(h_\ell)$ dargestellt und bestätigen genau die vorhergehenden Überlegungen.

Abbildung 6.11: Verhalten der Koeffizienten $c_1(h)$ und $c_2(h)$ des homogenisierten Operators des anisotropen Modellproblems.

Literaturverzeichnis

- [1] T. Apel and G. Lube. Anisotropic mesh refinement in stabilized Galerkin methods. *Numer. Math.*, 74(3):261–283, 1996.
- [2] I. Babuška and A. Aziz. On the Angle Condition in the Finite Element Method. *SIAM, J. Numer. Anal.*, 13(2):214–226, 1976.
- [3] R. Bank and J. Xu. An Algorithm for Coarsening Unstructured Meshes. *Numer. Math.*, 73(1):1–36, 1996.
- [4] R. E. Bank and J. Xu. A Hierarchical Basis Multi-Grid Method for Unstructured Grids. In W. Hackbusch and G. Wittum, editors, *Fast Solvers for Flow Problems, Proceedings of the Tenth GAMM-Seminar, Kiel*. Verlag Vieweg, 1995.
- [5] D. Braess. Towards Algebraic Multigrid for Elliptic Problems of Second Order. *Computing*, 55(4):379–393, 1995.
- [6] A. Brandt. Algebraic Multigrid Theory: The symmetric case. *Appl. Math. Comput.*, 19:23–56, 1986.
- [7] S. Brenner and L. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [8] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [9] T. Chan, B. Smith, and J. Zou. Overlapping Schwarz methods on unstructured meshes using non-matching coarse grids. *Numer. Math.*, 73:149–167, 1996.

- [10] T. F. Chan and B. F. Smith. Domain Decomposition and Multigrid Algorithms for Elliptic Problems on Unstructured Meshes. *ETNA*, 2:171–182, 1994.
- [11] P. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1987.
- [12] P. Clément. Approximation by Finite Element Functions using Local Regularization. *RAIRO, Sér. Rouge Anal. Numér.*, R-2:77–84, 1975.
- [13] T. Dupont and R. Scott. Polynomial Approximation of Functions in Sobolev Spaces. *Math. Comp.*, 34(150):441–463, 1980.
- [14] J. Fuhrmann. *Zur Verwendung von Mehrgitterverfahren bei der numerischen Behandlung elliptischer Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten*. PhD thesis, Universität Chemnitz-Zwickau, 1994.
- [15] V. Gol'dstein. Extension of functions with first generalized derivatives from planar domains (Russian). *Dokl. Akad. Nauk. SSR*, 257:268–271, 1981. English translation: *Soviet Math. Dokl.* 23:255–258, 1981.
- [16] W. Hackbusch. On the Multi-Grid Method Applied to Difference Equations. *Computing*, 20:291–306, 1978.
- [17] W. Hackbusch. Convergence of Multi-Grid Iterations Applied to Difference Equations. *Math. Comp.*, 34(150):425–440, 1980.
- [18] W. Hackbusch. *Multi-Grid Method and Applications*. Springer Verlag, 1985.
- [19] W. Hackbusch. *Elliptic Differential Equations*. Springer Verlag, 1992.
- [20] W. Hackbusch and S. Sauter. Composite Finite Elements for the Approximation of PDEs on Domains with Complicated Micro-Structures (extended version). Technical Report 95-05, Inst. f. Prakt. Math., Universität Kiel, Germany, 1995.
- [21] W. Hackbusch and S. Sauter. A New Finite Element Approach for Problems Containing Small Geometric Details. Technical Report 95-6, Lehrstuhl Praktische Mathematik, University of Kiel, Germany, 1995. Submitted to the proceedings of the ENUMATH 95 conference, Paris.

- [22] W. Hackbusch and S. Sauter. Adaptive Composite Finite Elements for the Solution of PDEs Containing non-uniformly distributed Micro-Scales. Technical Report 95-2, Math. Sem., Universität Kiel, Germany, 1995 (to appear in *Russ. J. Math. Model. and Numer. Anal.*).
- [23] W. Hackbusch and S. Sauter. Composite Finite Elements for Problems Containing Small Geometric Details. Part II: Implementation and Numerical Results. Technical Report 96-11, Math. Seminar, Universität Kiel, 1996 (to appear in *Computing and Visualization in Science*).
- [24] W. Hackbusch and S. Sauter. Composite Finite Elements for the Approximation of PDEs on Domains with Complicated Micro-Structures. *Numer. Math.*, 75(4):447–472, 1997.
- [25] P. Jamet. Estimations D’Erreur pour des Elements Finis Droits Presque Degeneres. *R.A.I.R.O., Analyse Numerique*, 10(3):43–61, 1976.
- [26] P. Jones. Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. *Acta Math.*, 147:71–88, 1981.
- [27] F. Kickingner. Automatic Mesh Generation for 3D Objects. Technical Report 96-1, University of Linz, Austria, Dept. of Mathematics, February 1996.
- [28] B. Koobus, M. Lallemand, and A. Dervieux. Unstructured volume-agglomeration MG: solution of the Poission equation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 18, 1994.
- [29] R. Kornhuber and H. Yserentant. Multilevel Methods for Elliptic Problems on Domains not Resolved by the Coarse Grid. *Contemporary Mathematics*, 180:49–60, 1994.
- [30] W. Krauss. *Methods and results of theoretical oceanography*. Gebr. Bornträger, Berlin, Stuttgart, 1973.
- [31] M. Křížek. On the Maximal Angle Condition for Linear Tetrahedral Elements. *SIAM, J. Numer. Anal.*, 29(2):513–520, 1992.
- [32] V. Maz’ja. *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1985.
- [33] J. Nečas. *Les Methodes Directes en Theorie des Equations Elliptiques*. Academia, Prague, 1967.

- [34] M. Ohlberger and M. Rumpf. Hierarchical and Adaptive Visualization on Nested Grids. Technical report, Inst. f. Angew. Math., Universität Bonn, 1996, to appear in Computing.
- [35] O. Oleinik, A. Shamaev, and G. Yosifian. *Mathematical Problems In Elasticity And Homogenization*. North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [36] B. Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1979.
- [37] J. Ruge and K. Stüben. Algebraic multigrid. In S. McCormick, editor, *Multigrid Methods*, pages 73–130, Pennsylvania, 1987. SIAM Philadelphia.
- [38] J. Schöberl. NETGEN - an advancing front 2d/3d-mesh generator based on abstract rules. *Computing and Visualization in Science*, 1(1), 1997.
- [39] V. Shaidurov. *Multigrid Methods for Finite Elements*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [40] G. H. Shortley and R. Weller. Numerical Solution of Laplace's Equation. *J. Appl. Phys.*, 9:334–348, 1938.
- [41] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton, University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [42] J. Synge. *The Hypercircle in Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1957.
- [43] B. Szabó and I. Babuška. *Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons, New York, 1991.
- [44] P. Vaněk, J. Mandel, and M. Brezina. Algebraic Multigrid by Smoothed Aggregation for Second and Fourth Order Elliptic Problems. *Computing*, 56(3):179–196, 1996.
- [45] H. Whitney. Analytic Extensions of Differentiable Functions in Closed Sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36:63–89, 1934.
- [46] P. D. Zeeuw. Matrix-dependent prolongations and restrictions in a black-box multigrid solver. *J. Comp. Appl. Math.*, 33:1–27, 1990.