VORKURS: MATHEMATIK
RECHENFERTIGKEITEN 2011

Mittwoch: Anwendungen der schriftlichen Polynomdivision wie «Abspalten von Nullstellen» und «Bestimmung einer Asymptoten». Rationale Funktionen, Grenzwerte, Differentialrechnung: Ableitung und Ableitungsregeln.

INHALTSVERZEICHNIS MITTWOCH

1 POLYNOME UND ABSPALTEN VON NULLSTELLEN

Die linearen und quadratischen Funktionen, denen wir in den vorigen Abschnitten begegnet sind, sind Spezialfälle einer grösseren Klasse von Funktionen: Die **Polynom-Funktionen**. Das sind Funktionen von der Form

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0,$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Die höchste Zahl m mit $a_m \neq 0$ heisst der Grad von f. Die Zahlen $a_0, \ldots, a_m$ heissen die **Koeffizienten** [1] von f.

Man kann sich fragen, ob Nullstellen von allgemeinen Polynomen genauso 'einfach' zu finden sind, wie die von linearen und quadratischen Funktionen. Die allgemeine Antwort auf diese Frage ist nein. Wie schon bemerkt, wurde sogar bewiesen, dass es für Polynome vom Grad ≥ 5 keine allgemeine Formel für die Nullstellen gibt, wie etwa die Auflösungsformel für die quadratischen Gleichungen. Aber es gibt ein Verfahren, welches das Finden von Nullstellen bei einem Polynom n-ten Grades, auf das Finden von Nullstellen eines Polynoms vom Grad $n-1$ reduziert. Dieses Verfahren heisst **schriftliche Polynomdivision** oder auch «**Abspalten von Nullstellen**». Nach einem kleinen Exkurs über die schriftliche Polynomdivision, werden wir das Verfahren an einem Beispiel erläutern.

1.1 Exkurs: Schriftliches Divisionsverfahren für Polynome

Man kann nicht nur Zahlen schriftlich dividieren, sondern auch Polynome. Wir führen dazu ein Divisionsverfahren ein. Dabei lassen wir uns durch die schriftliche Division von Zahlen inspirieren:

Beispiel: 276 : 12 =... Wir schreiben jetzt alle Zwischenschritte an, auch die, die wir normalerweise im Kopf durchführen:

276	: *12* = **23**	*12* in 27 = **2**mal
- 24		**2** ·*12* = 24 (abziehen)
36		12 in 36 = **3**mal
- 36		**3** ·*12* = 36 (abziehen)
0		Es bleibt kein Rest übrig.

Analog rechnet man mit Polynomen.

$(x^2 + 5x + 6)$	$: (x + 2) = \mathbf{x + 3}$	$x^2 : x = \mathbf{x}$
$x^2 + 2x$		$\mathbf{x} \cdot (x + 2) = x^2 + 2x$ (abziehen)
$3x + 6$		$3x : x = \mathbf{3}$
$3x + 6$		$\mathbf{3} \cdot (x + 2) = 3x + 6$ (abziehen)
0		Es bleibt kein Rest übrig.

Probe durch Ausmultiplizieren: $\underline{(x + 2) \cdot (x + 3)} = x^2 + 2x + 3x + 6 = \underline{x^2 + 5x + 6}$. O.k.!

[1] Koeffizient (*auch Beizahl genannt*) [lateinisch con «zusammen mit» und efficiens «bewirkend»]

Beispiel:
Die Zahl -1 ist eine Nullstelle der Polynomfunktion $f: x \mapsto x^3 + x^2 - x - 1$. Man teile $f(x)$ durch $x-(-1)$. Was sind die Nullstellen von $f(x)$?

Dass der Rest bei Teilung von $x^3 + x^2 - x - 1$ durch $x-(-1)$ null war, ist kein Zufall !

Satz 1

Sei f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, und a eine Nullstelle von $f(x)$. Dann ist der Rest bei Teilung von $f(x)$ durch $x-a$ null. Das heisst, man kann $f(x)$ schreiben als $(x-a)\cdot g(x)$, wobei g ein Polynom vom Grad $(n-1)$ ist. Die Nullstellen von f bestehen dann aus der Nullstelle a und aus den Nullstellen von g.

Nun kann man sich fragen: Wie errät man eine Nullstelle eines Polynoms? Nun, im Allgemeinen ist das schwierig, aber im folgenden Fall geht es relativ leicht.

Satz 2

Sei $f: x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_0$ ein Polynom mit **ganzzahligen Koeffizienten** $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Dann sind alle **ganzzahlige** Nullstellen von f Teiler von a_0.

Der Beweis dieser Aussage ist nicht so schwierig:

Sei nämlich m eine ganzzahlige Nullstelle von f, so gilt $a_n m^n + \ldots + a_1 m + a_0 = 0$.

Dies lässt sich durch Ausklammern von m auch so schreiben: $m \cdot \underbrace{(a_n m^{n-1} + \ldots + a_2 m + a_1)}_{:=\, k \in Z} = -a_0$.

Der Ausdruck $m \cdot k = -a_0$ mit m und k ganzzahlig, bedeutet nun aber nichts anderes, dass m ein Teiler von a_0 ist! *q.e.d.*

Beispiel:
Finden Sie die Nullstellen von $6x^3 - 73x^2 + 79x - 22$.

Antwort zur Kontrolle: 11, 1/2, 2/3.

2 RATIONALE FUNKTIONEN

Eine Funktion $h : x \mapsto f(x)/g(x)$, bei der f und g Polynome sind, heisst eine **rationale Funktion**.

In den Nullstellen von g ist h nicht definiert; diese Stellen heissen **Definitionslücken** von h.

Falls eine Nullstelle x_1 von g **keine** Nullstelle von f ist, so heisst x_1 eine **Polstelle** von h.

Falls x_1 aber Nullstelle von g **und** f ist, so kann man beide Funktionen durch $x - x_1$ dividieren. Man erhält dann eine neue Funktion $h_1 = f_1 / g_1$, die für alle $x \neq x_1$ gleich h ist. Wenn h_1 in x_1 definiert ist (d.h. wenn $g_1(x_1) \neq 0$ ist), so heisst x_1 **eine aufhebbare Definitionslücke von** h.

Eine rationale Funktion kann auch mehrere Polstellen und aufhebbare Definitionslücken haben.

Beispiel:
Sei h die Funktion gegeben durch

$$h(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$$

mit **Definitionslücken** $\boxed{x = \pm 1}$. Mit Hilfe einer binomischen Formel lässt sich der Nenner zerlegen, und mit Hilfe einer Polynomdivision auch der Zähler. Somit gilt:

$$h(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(2x^2 + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)}.$$

Zähler und Nenner von h sind also beide teilbar durch $x-1$, und nach der Teilung erhalten wir

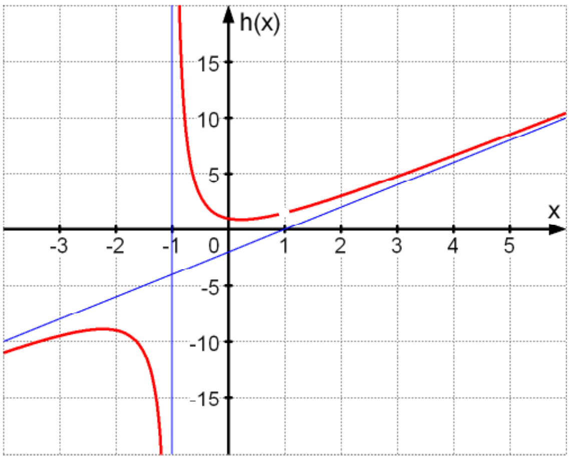
$h_1(x)=\dfrac{(2x^2+1)}{(x+1)}$ [$h(x)$ und $h_1(x)$ unterscheiden sich nur durch die aufhebbare Lücke bei (1 | 1.5)]

Nun ist 1 keine Nullstelle vom Nenner mehr, also war 1 eine **aufhebbare** Definitionslücke von h. Die Lücke –1 ist jetzt Nullstelle vom Nenner, aber nicht vom Zähler, also ist –1 eine Polstelle von h. Im Graph von h erkennt man das an der Tatsache, dass die vertikale Gerade mit Gleichung $x=-1$ eine sogenannte [1]**Asymptote** von h ist.

Um das Verhalten von $h(x)$ für $x\to\infty$ zu bestimmen, führen wir eine Polynomdivision mit Rest durch und finden

$$h_1(x)=2x-2+\frac{3}{x+1},$$

also hat $h(x)$ für $x\to\infty$ eine sogenannte **schiefe Asymptote** mit Gleichung $y=2x-2$.



Merke: Der Term $\dfrac{3}{x+1}$ gibt (in Abhängigkeit von x) den Unterschied zwischen den Funktionswerten von $h_1(x)=2x-2+\dfrac{3}{x+1}$ und $y=2x-2$ an.

Für «sehr grosse» und «sehr kleine» x-Werte wird dieser Unterschied verschwindend klein.
Die Kurve schmiegt sich also immer besser der schiefen Asymptote an.

Noch eine Bemerkung zum Begriff «aufhebbare Definitionslücke»: Der Graph von h(x) hat an der Stelle x = 1 ein «kleines Loch» ; eben eine Definitionslücke; die sich aber so aufheben lässt:

$$\tilde{h}(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^2-1} & ,\ \textit{für } x\neq 1\\[2ex] \dfrac{3}{2} & ,\ \textit{für } x=1\end{cases}$$

---

1 Asymptote [griechisch «nicht zusammenfallend»]: eine Gerade, an die sich eine Kurve «anschmiegt», ohne sie zu berühren

3 GRENZWERTE

3.1 Folgen

Definition

Unter einer Folge reeller Zahlen versteht man eine Abbildung von ℕ nach ℝ. Jedem n ∈ ℕ ist also ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Man schreibt hierfür $(a_n)_{n\in N}$ oder $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

In der Mathematik ist eine Indexierung ab Null ebenfalls gebräuchlich: $(a_n)_{n\in N_0}$ oder $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Besonders übersichtlich sind Folgen für die es ein explizites Bildungsgesetz gibt, d.h. eine Zuordnungsvorschrift durch einen Term.

Beispiele:

(1) $a_n = \frac{1}{n}$: $(\underbrace{1}_{a_1}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_2}, \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_3}, \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_4}, \ldots)$, sog. Folge der Stammbrüche.

(2) $a_n = (-1)^n$: $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$, sog. **alternierende** Folge. (Das Vorzeichen alterniert.)

(3) $a_n = \frac{n}{n+1}$: $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$

(4) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$, sog. **geometrische** Folge.

3.2 Konvergente Folge und Grenzwert

Definition

Ein **Grenzwert** einer Zahlenfolge $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ist eine Zahl a mit der Eigenschaft, dass der Abstand $|a - a_n|$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn n hinreichend gross gewählt wird. Genauer meint man damit folgendes: Für jede (noch so kleine) Zahl $\varepsilon > 0$ findet man eine natürliche Zahl n_ε, so dass für alle Zahlen $n > n_\varepsilon$ die Ungleichung $|a - a_n| < \varepsilon$ gilt. Existiert eine solche Zahl a, dann wird die Folge **konvergent** genannt und wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (lies: «Limes von a_n für n gegen unendlich gleich a»), andernfalls nennt man die Folge **divergent**.

Beispiele:

(1) Für die Folge $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ aus Bsp. (4) oben gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Denn für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\left| 0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \text{, falls } 2^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$ Dies lässt sich noch umformen zu: $n > \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log 2}$.

Ist etwa $\varepsilon = \frac{1}{1'000'000}$, so muss $2^n > 1'000'000$ gefordert werden, dies ist für $n \geq 20$ erfüllt.

(2) Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist divergent. Sie hat aber zwei sog. **Häufungspunkte**: -1 und $+1$.

(3) Für die Folge $a_n = \frac{1}{n} : (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ gilt offensichtlich $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(4) $a_n = \frac{n}{n+1}$ hat den Grenzwert 1. Durch folgende **Umformung** und Anwendung von Bsp.(3) wird dies klar: $a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+(1/n)}$. (Es wurde mit n gekürzt).

> ⓘ Vermeiden Sie diesen häufigen Fehler: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n}\right) = \frac{\infty}{\infty} = 1$??!!
>
> $\frac{\infty}{\infty}$ ist ein **unbestimmter Ausdruck** und dieser lässt sich nicht einfach kürzen! Hier sollte man so vorgehen: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(n) = \infty$.
>
> Kurz gesagt: **Formen Sie den Term um, bis Sie den Grenzwert sehen**!

3.2.1 Grenzwertsätze für Folgen

Die Folge a_n und die Folge b_n seien konvergent. Dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) - \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$, sofern $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) \neq 0$ ist.

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$

3.2.2 Grenzwert einer Funktion

Den Grenzwertbegriff für eine Funktion kann man auf den Grenzwertbegriff für Folgen zurückführen. Auf eine formale Definition verzichten wir hier. Es soll jedoch eine «anschauliche» Beschreibung gegeben werden:

> $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$ bedeutet, dass der Funktionswert $f(x)$ beliebig nahe bei c liegt, falls x hinreichend nahe bei x_0 gewählt wird.

Beispiele:

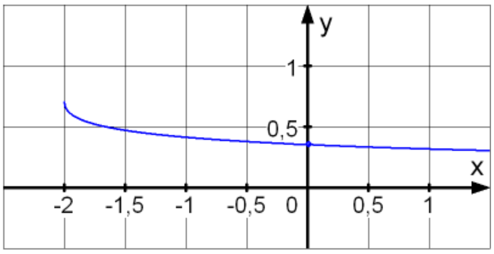
1. Wir betrachten die Funktion $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$. Gesucht ist: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\right)$.

   Einfach 0 für x einzusetzen, bringt uns nicht weiter. Wir müssen umformen und zwar durch Erweiterung des Bruchterms mit Hilfe der dritten binomischen Formel:

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{x+2-2}{x\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$

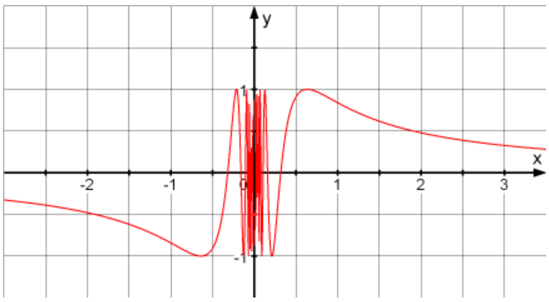
   Jetzt lässt sich der Grenzwert ablesen:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right)=\underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}}\approx 0.354$$



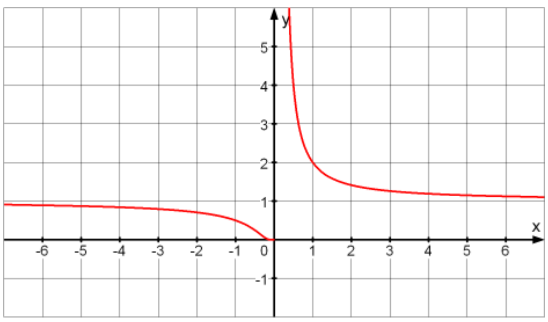
2. Wir betrachten die Funktion $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Gesucht ist: $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   Dieser **Grenzwert existiert nicht**. Wie aus dem Graphen ersichtlich ist, oszillieren die Funktionswerte sehr stark, falls die Argumente x nahe bei Null liegen.



3. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$. Es gilt: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \text{von links}}}\left(2^{\frac{1}{x}}\right)=0}$, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \text{von rechts}}}\left(2^{\frac{1}{x}}\right)=+\infty}$ und $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2^{\frac{1}{x}}\right)=1}$.

   Diese Grenzwerte lassen sich nicht nur aus dem Graphen ablesen, sondern auch durch geschickte Überlegungen herleiten! Versuchen Sie's!



3.2.3 Die eulersche Zahl e

Der Schweizer Mathematiker [1]Leonhard Euler hat im 18. Jahrhundert eine Zahl in die Mathematik eingeführt, die mit « **e** » bezeichnet wird und seither nicht mehr wegzudenken ist. Wie π ist sie eine irrationale Zahl, und ihre Dezimaldarstellung beginnt folgendermassen:

Eulersche Zahl: e = 2.71828182845904523536028747135266...

Die Zahl **e** ist folgendermassen definiert: $\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

Der Grenzwert lässt sich nicht so einfach wie bei den obigen Beispielen durch Umformen erkennen. Wir sind auf die numerische Unterstützung des TR angewiesen:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000
10	2.59374
1'000	2.71692
1'000'000	2.71828
usw.	usw.

3.2.3.1 Zusammenhang zu den Logarithmen:

🛈 Logarithmen zur Basis e=2,718... bezeichnet man als **natürliche Logarithmen**. Statt $\log_e a$ schreibt man $\ln a$.

Da der natürliche Logarithmus «ln» in der Mathematik und Technik eine grosse Rolle spielt, ist heutzutage auf den meisten Taschenrechnern eine [LN]-Taste vorhanden.

Ein Beispiel dazu: [LN]100 = 4.6052 $\Leftrightarrow$ $e^{4.6052} = 100$.

Bemerkung:

Da die Rechenregeln für Logarithmen für beliebige Basen gelten, kann man eine Exponentialgleichung anstatt mit dem Zehnerlogarithmus [LOG] auch mit Hilfe des natürlichen Logarithmus lösen.

Beispiel: $5^x = 7$.
Wir bilden auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus «ln», und wenden die Rechenregel (3) für Logarithmen an: $5^x = 7 \Rightarrow x \cdot \ln 5 = \ln 7$

Die Lösung lautet somit: $\underline{\underline{x}} = \frac{\ln 7}{\ln 5} = \underline{\underline{1.2091}}$.

---

[1] Leonhard Euler (* 15. April 1707 in Basel; † 18. September 1783 in St. Petersburg)

4 DIFFERENTIALRECHNUNG

4.1 Einführung

Betrachten Sie auf einem Hügel einen Weg, dessen Seitenansicht durch den Graphen der Funktion

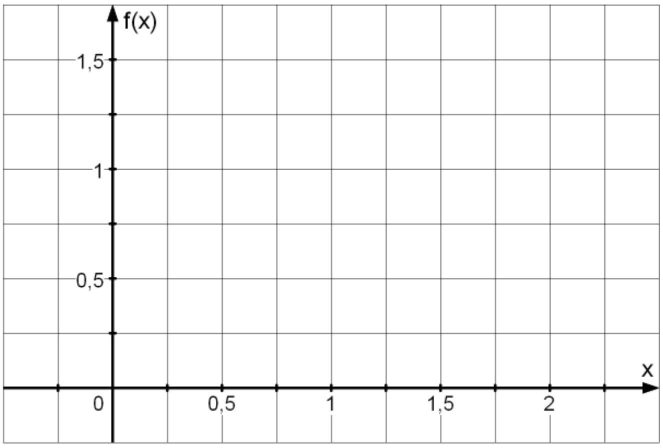
$$g(x) = 2x\,, \quad x \in [0, 2]$$

gegeben ist; zeichnen Sie diesen Graphen. Was ist der **Anstieg** dieses Weges? Das heisst: Wenn man sich dem Graphen entlang bewegt, und dabei 1 (oder h) (sagen wir Meter) in waagrechte Richtung zurücklegt, wie viel (Meter) legt man dann in senkrechte Richtung zurück? In diesem Beispiel ist es klar, dass die Antwort 2 (bzw. $2h$) ist.

Betrachten Sie nun aber den Weg, gegeben durch

$$f(x) = 1 - (x-1)^2\,, \quad x \in [0, 2]$$

und zeichnen Sie diesen Graphen. 🖉



Was soll nun der **Anstieg** sein? Oder: wie steil ist dieser Weg? Es ist Ihnen wohl klar, dass diese Frage, so formuliert, keinen Sinn macht: Ganz unten ist der Weg steiler als ganz oben. Also müssen wir den Punkt auf dem Weg spezifizieren, in dem wir den Anstieg bestimmen möchten:

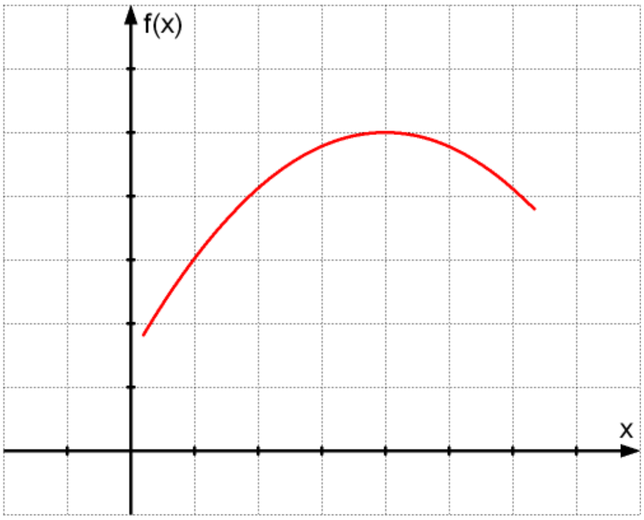
Was ist der Anstieg des Weges im Punkt $(x, f(x))$, für ein bestimmtes $x \in [0, 2]$?

Betrachten Sie zum Beispiel den Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. Um dort den Anstieg zu bestimmen, scheint es vernünftig, eine **Tangente** an den Graphen von f in diesem Punkt zu zeichnen, und den Anstieg dieser Tangente zu bestimmen. Mit einem Lineal lässt sich das einfach ausführen, und wenn wir genau gezeichnet haben, messen wir als Anstieg der Tangente: 1.

Die **intuitive** Definition des Anstieges einer Funktion an einer Stelle ist also:

Der Anstieg einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, an der Stelle $x_0 \in D$ ist der Anstieg der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Wie **berechnet** man nun diesen Anstieg, ohne sich auf Messwerte zu verlassen? Für diesen Zweck haben sich verschiedene berühmte Personen aus der Mathematik den folgenden Grenzwertprozess ausgedacht: Statt der noch nicht richtig definierten Tangente betrachtet man folgende Geraden: Für jedes h, die Gerade durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$, welche beide auf dem Graphen von f liegen. (Zeichnen Sie 🖉).



Diese Geraden nennt man Sekanten an den Graphen von f. Der Anstieg einer solchen **Sekante** ist gleich

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Dieser Quotient heisst **Differenzenquotient**. Die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ erhält man aus den Sekanten, indem man h 'immer kleiner' macht, oder genauer, durch den Grenzübergang $h \to 0$. Der Anstieg, der auf diese Weise erhaltenen Gerade ist gleich

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

und dieser Ausdruck heisst **Differentialquotient**. Achtung: Dieser Grenzwert lässt sich nicht berechnen, indem man einfach oben und unten $h=0$ setzt, da sonst oben und unten Null steht! Also muss man bei der Berechnung eines solchen Differentialquotienten vorsichtiger vorgehen, wie wir in verschiedenen Beispielen sehen werden. Wir definieren nun:

4.2 Die Ableitung

Definition (Ableitung an der Stelle x_0)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und sei $x_0 \in D$. Dann heisst f **differenzierbar** in x_0, falls der Differentialquotient

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert.

In diesem Fall wird dieser Quotient mit $f'(x_0)$ oder auch mit $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet, und heisst **Ableitung** von f an der Stelle x_0.

<u>Beispiel</u>:
Kehren wir zurück zur Funktion $f(x)=1-(x-1)^2, \quad x\in[0,2]$ und betrachten wir wieder die Stelle $x_0=1/2$. An dieser Stelle ist der Differenzenquotient von f gleich

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=\frac{\left[1-\left(\frac{1}{2}+h-1\right)^2\right]-\left[\frac{3}{4}\right]}{h}=\frac{1-\left(h-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}{h}=\frac{1-h^2+h-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{h}=\frac{h-h^2}{h}$$

Nun teilen wir oben unten durch h, was wir machen dürfen, da wir ja für h nie null einsetzen.

$$\frac{h-h^2}{h}=\frac{1-h}{1}.$$

Der Differentialquotient ist nun gleich $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-h}{1}=1$ ...Wie wir schon geahnt hatten!

<u>Bemerkung</u>
Im Differenzenquotienten sollen nur solche Werte von h eingesetzt werden, für welche x_0+h im Definitionsbereich D liegen, und entsprechend durchläuft das h bei der Berechnung des Grenzwertes alle solche erlaubte Werte.

Im Normalfall enthält D ein offenes Intervall um x_0; es sind also sowohl positive als auch negative Werte von h im Differenzenquotienten erlaubt. Es kann aber auch vorkommen, dass z.B. D = $[x_0$, b) ist. In diesem Fall beschränkt man sich bei der Grenzwertbildung

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \text{von rechts}}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{auf} \quad h>0.$$

Man «nähert sich also dem Grenzwert von rechts». Deshalb spricht man bei einem solchen Differentialquotienten von der **Rechtsableitung** an der Stelle x_0. Analog definiert man die **Linksableitung**. (Als Beispiel betrachte man die obige Funktion $f(x)=1-(x-1)^2, \quad x\in[0,2]$ in den Grenzpunkten des Intervalls: $x_0=0$ und $x_0=2$.)

Wenn D doch ein offenes Intervall um x_0 enthält, so gilt:

f ist an der Stelle x_0 **differenzierbar** $\Leftrightarrow$ die Linksableitung als auch die Rechtsableitung existieren, und die beiden Ableitungen sind gleich.

<u>Definition</u> (Ableitung einer Funktion)

Ist die Funktion f an <u>allen</u> Stellen ihres Definitionsbereichs differenzierbar, so nennt man die Funktion f **differenzierbar**. Die reelle Funktion $x\mapsto f'(x)$ wird dann mit f' oder auch mit $\frac{df}{dx}$ bezeichnet, und heisst **Ableitung von f**.

Beispiel 1:
Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitung der Funktion $f : y = x^2$.

Beispiel 2: Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = 0$ (und nur dort) **nicht differenzierbar**. Die **Rechtsableitung** beträgt **+1** die **Linksableitung** beträgt **-1**. (Keine eindeutige Tangensteigung!)

Bemerkung: Allgemein kann man (salopp ausgedrückt) sagen: Überall dort wo der Graph von f(x) «**Ecken**» hat, ist f(x) **nicht differenzierbar**. Da solche Probleme bei Graphen von **Polynomfunktionen** nicht auftreten (weder Ecken noch Definitionslücken) sind diese **überall differenzierbar**.

4.2.1 Rechenregeln

Damit wir nicht immer einen Grenzwert ausrechnen müssen, nennen wir einige Regeln, mit deren Hilfe man die Ableitung einer komplizierteren Funktion ausrechnen kann. Diese Regeln können mit Hilfe des Differentialquotienten hergeleitet werden.

Satz
Seien f, g und h reelle Funktionen. Weiter seien f und g an der Stelle x_0 differenzierbar und h an der Stelle $f(x_0)$ differenzierbar. Dann gilt:

1. $(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ für alle Konstanten c ∈ ℝ (Konstantenregel)
2. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (Summenregel)
3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Produktregel)
4. Wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, so gilt $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ (Quotientenregel)
5. $h(f(x))'(x_0) = h'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ (Kettenregel: «äussere Ableitung mal innere Ableitung»)

Bemerkung (Beweis als Übung)
Eine weitere Regel (in der Literatur auch als Potenzregel bezeichnet) lautet folgendermassen:

Die Ableitung einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$,(n ∈ ℕ) lautet $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Man kann zeigen (siehe weiter unten), dass diese Regel auch für reelle Exponenten gültig ist.

<u>Beispiele</u>: Zu Bestimmen ist jeweils die Ableitung der gegebenen Funktion:

1. $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$.

   Die Ableitung einer konstanten Funktion ist null. Das sieht man entweder mit Hilfe des Differentialquotienten: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$,
   oder aus der Tatsache, dass die Steigung einer konstanten Funktion überall gleich null ist und somit $f'(x) = 0$ gelten muss.

2. $f(x) = (x^2+2)^3$
   Die Potenz als Summe auszuschreiben und dann die Summanden einzeln abzuleiten, wäre hier ein möglicher Weg, aber zu aufwendig! Effizienter geht es mit der Kettenregel:

3. $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$
   Die Ableitung erfolgt hier mit Hilfe einer Kombination «Produktregel – Kettenregel»:

4. $f(x) = \frac{5x^3 - x}{x^2}$
   Eine erste Möglichkeit wäre hier die Quotientenregel anzuwenden:

   Eine zweite Möglichkeit ergibt sich durch Umformung des Funktionsterms:

$$f(x) = \frac{5x^3 - x}{x^2} = 5x - \frac{1}{x} = 5x - x^{-1} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 5 - (-1)\cdot x^{-2} = 5 + \frac{1}{x^2} = \frac{5x^2+1}{x^2}$$

4.2.2 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

Wir möchten die Ableitung der Funktion $f(x) = e^x$ ermitteln.

Wir bilden zuerst den Differenzenquotienten $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ und formen ihn um:

$$\frac{e^{(x_0+h)}-e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0}\cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0}\cdot(e^h-1)}{h} = e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{h}$$

Nun betrachten wir den Differentialquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}}_{=1} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} = e^{x_0}$$

(Wie schon in den Übungen gesehen gilt: $\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1}$) Somit haben wir folgendes erhalten:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Aus dieser Erkenntnis, aus der Tatsache dass $\boxed{e^{\ln(a)} = a}$ ist und mit Hilfe der Kettenregel lässt sich nun auch die Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, $a > 0$ ermitteln (**nicht** zu verwechseln mit der Potenzfunktion $f(x) = x^n$) :

$$(a^x)' = [(\underbrace{e^{\ln(a)}}_{a})^x]' = (e^{x\cdot\ln(a)})' = \underbrace{e^{x\cdot\ln(a)}}_{\text{äussere Abl.}}\cdot\underbrace{\ln(a)}_{\text{innere Abl.}} = \underbrace{\left(e^{\ln(a)}\right)}_{a}^{x}\cdot\ln(a) = a^x\cdot\ln(a) = \ln(a)\cdot a^x .$$

Auf ähnliche Weise lässt sich die Ableitung der Logarithmusfunktion aus der Identität $a^{\log_a(x)} = x$ durch Ableiten auf beiden Seiten und durch Umformungen ermitteln *(Beweis als Übung)* :

$$k(x) = \log_a(x) \quad\Rightarrow\quad k'(x) = \frac{1}{\ln(a)\cdot x}$$

Wir fassen unsere Resultate zusammen:

Satz

Ist $a > 0$ und h die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$, so ist h überall differenzierbar, mit der Ableitung $h'(x) = \ln(a)\cdot a^x$. Ist insbesondere $a = e$, so gilt $h'(x) = h(x) = e^x$. Also: $(e^x)' = e^x$.

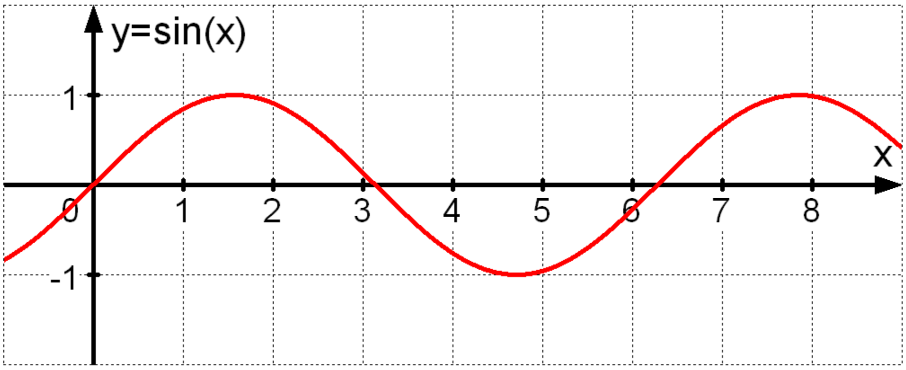
Umgekehrt ist die Funktion $k: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a(x)$ differenzierbar mit der Ableitung $k'(x) = \dfrac{1}{\ln(a)\cdot x}$. Ist insbesondere $a = e$, so gilt $k'(x) = \dfrac{1}{x}$. Also: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

4.2.3 Trigonometrische Funktionen

Schliesslich geben wir (ohne mathematischen Beweis) noch die Ableitungsregeln für Sinus und Cosinus an: sowohl $x \mapsto \sin(x)$ als auch $x \mapsto \cos(x)$ sind differenzierbar auf ℝ, und ihre Ableitungen sind:

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Zur Illustration bestimmen wir die Ableitung von $y = \sin(x)$ «grafisch»: 🖉

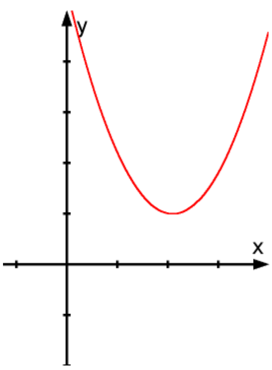


4.2.4 Bestimmung des Scheitelpunkts einer Parabel: Eine Anwendung

Wir erinnern uns an das gestrige Resultat:

> ⓘ Der Graph der quadratischen Funktion f: $y = ax^2 + bx + c$ ist die nach oben ($a > 0$) bzw. nach unten ($a < 0$) geöffnete, zu $y = ax^2$ deckungsgleiche Parabel mit dem Scheitel $(u|v)$; wobei die **Scheitelkoordinaten (u|v)** aus den Koeffizienten a, b und c zu berechnen sind:
>
> $$\mathbf{u} = -\frac{b}{2a}, \quad \mathbf{v} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Mit Hilfe der Differentialrechnung wollen wir das nun beweisen:



Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ eine quadratische Funktion.
Der Graph ist, wie wir wissen, eine Parabel. Die Steigung im Scheitelpunkt der Parabel muss null betragen, da wir dort eine horizontale Tangente haben. Somit suchen wir nach der Stelle x mit $f'(x) = 0$.
Es ist also die folgende Gleichung nach x aufzulösen: $f'(x) = 2ax + b = 0$.
Die Lösung lautet: $x = \frac{-b}{2a}$ und wir haben die x-Koordinatenformel des Scheitelpunkts hergeleitet. Wollen wir auch noch die y-Koordinatenformel herleiten, brauchen wir nur noch $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ zu rechnen:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) + c = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

q.e.d.

4.2.5 Die Ableitung von $f(x) = x^r$ für reelle Exponenten r

Für die Ableitung einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit einem natürlichen Exponenten $n \in \mathbb{N}$ haben wir weiter oben die folgende Ableitungsregel eingeführt und in den Übungen bewiesen:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass diese Regel ganz analog auch für reelle Exponenten gilt:

<u>**Satz**</u>

Die Ableitung von $f(x) = x^r$, (mit $r \in \mathbb{R}$) lautet $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

<u>Beweis</u>:

Sei $r \in \mathbb{R}$. Der Funktionsterm $f(x) = x^r$ kann als Potenzterm zur Basis e umgeformt werden:

$$f(x) = x^r = (\underbrace{e^{\ln(x)}}_{x})^r = e^{r \cdot \ln(x)}$$

Nun leiten wir ab. Wir benutzen dabei die Kettenregel und die Tatsache, dass $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ gilt:

$$f(x)' = \underbrace{e^{r \cdot \ln(x)}}_{\text{äussere Ableitung}} \bullet \underbrace{r \cdot [\ln(x)]'}_{\text{innere Ableitung}} = e^{r \cdot \ln(x)} \bullet r \cdot \frac{1}{x} = x^r \bullet r \cdot x^{-1} = r \cdot x^{r-1}$$

Somit gilt: $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$. *q.e.d.*