



Dr. Tatiana Samrowski
Institut für Mathematik
Universität Zürich

Übungen zum Vorkurs Mathematik

Mengenlehre

Aufgabe 1: Stellen Sie die folgenden Menge durch Aufzählen ihrer Elemente dar:

- a) $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist Primzahl und } x < 20\}$
- b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 6 = 0\}$
- c) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$

Aufgabe 2: Schreiben Sie die folgenden Mengen in aufzählender und in beschreibender Form:

- a) A : Die Menge der Teiler von 12
- b) B : Die Menge der ungeraden Zahlen
- c) C : Die natürlichen Zahlen, die gröser als 5 und kleiner als 12 sind

Aufgabe 3: Geben Sie alle Teilmengen der Menge $M = \{o; m; a\}$ an.

Aufgabe 4: Bilden Sie die Mengen $A \cup B$, $A \setminus B$, \overline{A} , $A \cap B$ der Mengen

A : die Menge der Primzahlen zwischen 1 und 10.

B : die Menge der Teiler der Zahl 10.

Die Grundmenge ist die Menge G der Zahlen von 1 bis 10.

Aufgabe 5: Es sei $M_1 = \{5; 9; 13\}$, $M_2 = \{4; 7; 10\}$, $M_3 = \{1; 3; 5; 7\}$ und $M_4 = \{7; 13; 19\}$. Bilden Sie die Menge $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$.

Aufgabe 6: Bilden Sie die folgenden Mengen:

- a) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$
- b) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$
- c) $\emptyset \setminus M$

Termumformungen und Lineare Gleichungen

Aufgabe 7: Geben Sie an, für welche Werte von $a, x, y, z \in \mathbb{R}$ der Bruchterm existiert:

a) $\frac{1}{x^2}$ b) $\frac{1}{x-1}$ c) $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$ d) $\frac{3-x}{9-3x}$ e) $\frac{14}{z^2+1}$ f) $\frac{9}{a^2-1}$

Aufgabe 8: Kürzen Sie soweit wie möglich:

a) $\frac{42ab^2c}{22a^2bc}$ für $a, b, c \neq 0$ b) $\frac{-x+2y}{-2y+x}$ für $x \neq 2y$
c) $\frac{3xu-4xv+6yu-8yv}{xv-3xu+2yv-6yu}$ für $x \neq -2y$ und $v \neq 3u$

Aufgabe 9: Vereinfachen Sie:

a) $3, 2x - 4y + 8z - 0, 5x + 1, 5y - (-3z)$
b) $\frac{3}{5} \left(\frac{8}{9}a \left(-\frac{7}{2} \right) + \frac{7}{15}a \right) - \frac{11}{60} \left(\left(-\frac{12}{11}a \right) + \frac{14}{15}a \right)$
c) $5(x + 2(x - y - 3(x - y))) + 4(x - y) - 2x$
d) $2y \cdot \frac{1}{6}y - \left(\frac{3}{4}y \cdot \frac{10}{27} - \frac{7}{12}y^2 \cdot \frac{5}{14} \right)$
e) $\frac{5}{12} \left(\frac{8}{15}b \left(-\frac{5}{4} \right) + \frac{8}{15}b \right) - \left(\frac{13}{120} \left(-\frac{15}{13}b \right) + \frac{7}{12}b \right)$
f) $\frac{x}{1 - \frac{1}{1-x}}$ für $x \neq 0; 1$
g) $\left(\frac{25ax}{12by} + \frac{16bx}{3ay} \right) : \frac{8x}{21y}$ für $a, b, x, y \neq 0$

Aufgabe 10: Geben Sie die Lösungen der linearen Gleichung an.

a) $b \left(2b + \frac{1}{4} - b \right) = b^2 + \frac{13}{2}b - 8$
b) $-\frac{3}{4}(17x + (-2)) = \frac{18}{5} - \frac{3}{2}x + \frac{5}{7}x$

Lineare Ungleichungen und Betrag

Aufgabe 16: Bestimmen Sie alle x , für die gilt:

$$a) \quad \frac{x-2}{2} - \frac{3(2-x)}{10} + \frac{7x+1}{4} \leq \frac{x+11}{3} + \frac{13+16x}{20}$$

$$b) \quad 3 \left(x - 1 + \frac{4-3x}{4} - \left(1 - 2 \left(x - 1 - \frac{x+2}{5} \right) \right) \right) > 5x - 7$$

Aufgabe 17: Bestimmen Sie:

$$a) \quad |11 - 23|$$

$$b) \quad |a^2 - 13a + 14 - 4 + 3a^2 + 2 \cdot (11a - 3) - 9a|$$

$$c) \quad |34a - 2 \cdot (345a - 12)| \quad (a < 0)$$

$$d) \quad |34a - 2 \cdot (345a + 12)| \quad (a > 0)$$

Aufgabe 18: Schreiben Sie mit Hilfe von Betragszeichen:

$$a) \quad \sqrt{a^2}$$

$$b) \quad \sqrt{x^2 + 4x + 4}$$

$$c) \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n : 4 \leq x \leq 16\}$$

$$d) \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n : 7 \leq x \leq 23\}$$

Aufgabe 19: Bestimmen Sie alle x , für die gilt:

$$a) \quad 2 < |x - 3| \leq 5$$

$$b) \quad 0 < |2 - 3x| < 1$$

$$c) \quad |x - 1| + |x - 3| < x + 1$$

$$d) \quad |x - 2| + |x - 3| < 6 - 3x$$

Fakultät, Binomialkoeffizient, binomischer Lehrsatz

Aufgabe 20: Berechnen Sie nach der allgemeinen binomischen Formel $(x + 2)^5$.

Aufgabe 21: Berechnen Sie:

$$a) \quad \binom{50}{3} \quad b) \quad \binom{200}{4} \quad c) \quad \binom{1000}{998}$$

Aufgabe 22: Berechnen Sie:

$$a) \quad (2 + 3x)^5 \quad b) \quad (2a - 4)^3 \quad c) \quad (xyz - 2a)^4$$

Aufgabe 23: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 26 Postkarten 15 auszuwählen?

Exponenten und Wurzeln

Aufgabe 24: Für welche Werte von $a, x, z \in \mathbb{R}$ existiert die Wurzel?

$$\begin{array}{lll} a) \sqrt{x} & b) \sqrt{4+a} & c) \sqrt{-3-3z} \\ d) \sqrt{x^2-1} & e) \sqrt{-x^2-1} & f) \sqrt{1-a^2} \end{array}$$

Aufgabe 25: Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

$$\begin{array}{lll} a) \sqrt{9 \cdot 16 \cdot 25} & b) \sqrt{9a^2c} & c) \sqrt{\frac{625}{64}} \\ d) 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{16}{7}} & e) \sqrt{8a+4}, \quad a \geq -\frac{1}{2} & f) \sqrt{5} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3}) \end{array}$$

Aufgabe 26: Zeigen Sie:

$$a) \sqrt{5\frac{1}{2}} \neq 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \quad b) \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b} \quad \text{für } a, b \geq 0$$

Aufgabe 27: Berechnen Sie:

$$\begin{array}{l} a) \left(\frac{2a^{n+1}}{b^{n-2}}\right)^6 (0,25a^{3-2n}b^{2n+1})^3 \\ b) \left(\frac{a^{2n-1}b^{3n+2}}{c^{3-n}}\right)^4 \left(\frac{a^{1-n}b^{2-2n}}{c^{3n+1}}\right)^3 \left(\frac{1}{b^{2n-1}}\right)^3 \left(\frac{c^{n+3}}{a^{n-1}}\right)^5 \\ c) \frac{9b^{\frac{4}{3}} - \frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^2}}{\sqrt{a^{\frac{3}{2}}b^{-2} + 6a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}}}} \cdot \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}} \\ d) \left(\frac{(a+b)^{-\frac{n}{4}}c^{\frac{1}{2}}}{a^{2-n}b^{-\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{4}{3}} : \left(\frac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}a^{16-8n}}\right)^{\frac{1}{6}} \\ e) \left(\frac{\left(z^{\frac{2}{p}} + z^{\frac{2}{q}}\right)^2 - 4z^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}}}{\left(z^{\frac{1}{p}} - z^{\frac{1}{q}}\right)^2 + 4z^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 28: Für welche $u \in \mathbb{R}^n$ besitzt die Gleichung $x^2 - 6x + u = 0$ genau eine, zwei oder gar keine Lösung?

Aufgabe 29: Geben Sie eine quadratische Gleichung an, deren Lösungen $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ und $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ sind.

Aufgabe 30: Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

$$\begin{array}{lll} a) \quad \frac{x-2}{2x+2} + \frac{x}{x+1} = \frac{x^2-x-1}{x+1} & b) \quad \frac{x-3}{x^2-1} + \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} & c) \quad \frac{x^2+x+1}{x-2} + 2 = \frac{10x-13}{x-2} \\ d) \quad (5x-2)(4x+3) \leq 0 & e) \quad 3x^2 + 5x - 8 < 0 & f) \quad (x^2+1)^3 < (3-x)^3 \\ g) \quad \frac{7x+4}{3-2x} \geq 2 & h) \quad 3-x \geq \frac{1}{2-x} & i) \quad \frac{8-x}{x-10} \leq \frac{2}{2-x} \end{array}$$

Wurzelgleichungen, Wurzelungleichungen

Aufgabe 31: Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

$$\begin{array}{ll} a) \quad \frac{1}{x-\sqrt{2x^2-4x}} - \frac{1}{x+\sqrt{2x^2-4x}} = \frac{8}{4x-x^2} & b) \quad 3\sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x^2-3x}{x+1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \\ c) \quad \frac{3}{2x-\sqrt{x^2+x}} - \frac{5}{2x+\sqrt{x^2+x}} = \frac{4}{3x^2-x} & d) \quad \sqrt{9x + \frac{1}{2x+1}}(9-25x^2) \geq 0 \\ e) \quad \frac{2}{3}\sqrt{x+9} - \sqrt{\frac{x^2+8x}{x+9}} = \frac{3}{\sqrt{x+9}} & f) \quad \sqrt{4x+7} < \sqrt{x^2-2x} \end{array}$$

Partialbruchzerlegung

Aufgabe 32: Zerlegen Sie in Partialbrüche.

$$\begin{array}{lll} a) \quad \frac{3-2x}{x^2+3x+2} & b) \quad \frac{5x+1}{x^2-1} & c) \quad \frac{5}{x^2-9} \\ d) \quad \frac{-4x+22}{x^3-2x^2-5x+6} & e) \quad \frac{2x^2-9x+85}{x^3-8x^2+5x+14} & f) \quad \frac{3x^3-3x^2-3x+24}{x^4+3x^3-4x^2-12x} \end{array}$$

Aufgabe 33: Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} x + z & = & 4 \\ x + 2y + z & = & 5 \\ x + 2y + 4z & = & 17 \end{array}$$

Logarithmen

Aufgabe 34: Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a) $\log_5 25$ b) $\lg 0,001$ c) $\log_{17} 1$ d) $\ln(e \cdot \sqrt[3]{e})$ e) $\log_8 \frac{1}{\sqrt[3]{8}}$

Aufgabe 35: Entscheiden Sie ohne Taschenrechner, ob die gegebene Zahl positiv, negativ oder null ist.

a) $\lg 3,8$ b) $\lg 3415,8$ c) $\lg 0,085$ d) $\lg \sqrt[3]{0,052}$
e) $\lg \frac{1}{\sqrt[3]{2,715}}$ f) $\lg \frac{2,6^3}{\sqrt{0,75}}$ g) $\lg(\lg 10)$ h) $\log_2 \left(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2^3} \right)$

Aufgabe 36: Schreiben Sie folgende Logarithmen als Summen (Differenzen):

a) $\log_3 3x$ b) $\log_5 \frac{5a}{x}$ c) $\lg \frac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt[4]{c}}$ d) $\lg \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}} \right)^{10}$ e) $\lg \frac{\sqrt[5]{x^2} \cdot (\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{v}}$

Aufgabe 37: Schreiben Sie mit einem Logarithmus:

a) $2 \lg u + 3 \lg v$ b) $\lg(u + v) + \lg(u + v)^2 - \frac{1}{2} \lg u - \frac{1}{3} \lg v$
c) $\frac{1}{3} \ln x + \frac{2}{3}$ d) $\lg(a^2 - 1) - \lg(a - 1) - \lg((a + 1)^2)$
e) $(\log_4 x^2) : (\log_4 x) - 2$ f) $[(\lg \sqrt{b}) : (0,5 \lg b)] \cdot \lg \frac{1}{\sqrt{b}}$

Exponentielle und logarithmische Gleichungen

Aufgabe 38: Bestimmen Sie die reellen Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $x^3 + \frac{1}{8} = 0$ b) $12x^3 - 0,768 = 0$ c) $\sqrt[5]{x^2} = 2$
d) $x^{-2,3} = 10$ e) $x^{1,4} = 5$ f) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} = 3$

Aufgabe 39: Lösen Sie die folgenden Gleichungen durch Logarithmieren:

a) $4^x = 12$ b) $5^x = 10$ c) $3^{x-1} = 1,4$
d) $2^{x-2} = 2^{x+1} - 14$ e) $0,1^x - 10^x = 10^{x+2} - 0,1^{x+2}$ f) $0,1^x \geq 10$

Aufgabe 40: Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $\lg x = 2$ b) $\lg x = 0,5$ c) $\log_2 x = \frac{3}{2}$
d) $2 \lg x = 1$ e) $\lg 2x = 0,5$ f) $\lg x - \lg \sqrt{x} = 2 \lg 2$

Fortsetzung von exponentiellen und logarithmischen Gleichungen

Aufgabe 41: Lösen Sie die folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

- a) $\frac{1}{\log_7(5-x)} + \frac{3 \log_{0,125}(x+3)}{\log_2(5-x)} = 1$ b) $(1 + \log_5 3) \log_{15} x = \log_5 28 + \log_{0,2}(x-3)$
c) $\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)} \cdot \log_5 x = -2$ d) $\log_{\frac{1}{1+x^2}}(4x-2) > -1$
e) $\log_{x^2+2}(3x+6) \leq 1$ f) $(3 - 10x - 8x^2) \lg(1 - \frac{7}{9(x^2+x+1)}) \leq 0$
g) $\log_3 x \geq 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x+8)$ h) $\log_2(x+1) < 1 - 2 \log_4 x$

Elementare Untersuchung von Funktionen

Aufgabe 42: Geben Sie die explizite Darstellung der folgenden implizit definierten Funktionen $y = f(x)$ an:

- a) $6x - 10y = 15$ b) $x + \frac{y}{3} = 5$ c) $2x^2 - 3y + 3 = 0$ d) $x^2 - 4x + 2y - 8 = 0$

Aufgabe 43: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Monotonie und zerlegen Sie gegebenenfalls die Definitionsbereiche in Monotonieintervalle:

- a) $y = -2x + 3$ b) $y = -2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

Aufgabe 44: Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen gerade, ungerade oder keine von beiden sind.

- a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = 2x^2$ d) $y = 2x^2 + 1$
e) $y = (x-1)^2$ f) $y = \frac{1}{2}x^4$ g) $y = x^5$ h) $y = |x|$

Aufgabe 45: Bilden Sie die Umkehrfunktionen zu folgenden Funktionen:

- a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1, D = [0, \infty), W = [1, \infty)$
c) $y = (x+1)^2, D = [-1, \infty), W = [0, \infty)$ d) $y = \frac{1}{2}x^3, D = [0, \infty), W = [0, \infty)$

Aufgabe 46: Man skizziere die Geraden, bestimme den Anstiegswinkel α und die Nullstellen der folgenden linearen Funktionen

- a) $y = 0, 4x - 1, 6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = \frac{1}{5}(3x + 1, 5)$
d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

Fortsetzung von der elementaren Funktionsuntersuchung

Aufgabe 47: Welche Gerade geht durch die zwei Punkte

- a) $(2, 3)$ und $(5, 5)$ b) $(1, 1)$ und $(3, 7)$ c) $(-1, 0)$ und $(-2, -3)$?

Aufgabe 48: Gegeben sind die folgenden quadratischen Funktionen:

- a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$
d) $y = (x - 5)(x - 1)$ e) $y = 2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$
g) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ h) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

Man bestimme die Scheitelkoordinaten, berechne die Nullstellen und skizziere die Parabeln!

Aufgabe 49: Für die folgenden ganzrationalen Funktionen sind zu den angegebenen x -Werten die Funktionswerte unter Verwendung des Hornerchemas zu berechnen. Die Funktionen sind in Produktform darzustellen.

- a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5;$ $x_1 = 1$ $x_2 = -1$
b) $y = f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{13}{2}x - 5;$ $x_1 = \frac{1}{5}$ $x_2 = 5$
c) $y = f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x;$ $x_1 = -2$ $x_2 = 0, 2$
d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 + 32x + 40$ $x_1 = 2$ $x_2 = 5$
e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 5x + 6$ $x_1 = 1, 5$ $x_2 = 2$

Aufgabe 50: Gegeben sind die gebrochen rationalen Funktionen:

- a) $y = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y = \frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$
c) $y = \frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y = \frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$
e) $y = \frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$

Untersuchen Sie sie hinsichtlich Nullstellen, Pole, Lücken und Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$.

Aufgabe 51: Bilden Sie die Umkehrfunktionen zu den folgenden Funktionen:

- a) $y = 2^{x-1}$, $D = \mathbb{R}$, $W = (0, \infty)$ b) $y = 2^x - 1$, $D = \mathbb{R}$, $W = (-1, \infty)$
c) $y = \log_3 x$, $D = (0, \infty)$, $W = \mathbb{R}$ d) $y = \ln(x - 1)$, $D = (1, \infty)$, $W = \mathbb{R}$

Monotonieverhalten und verkettete Funktionen

Aufgabe 52: Geben Sie zu den folgenden Funktionen die Monotonieintervalle und die Teilumkehrfunktionen an:

$$\begin{array}{lll} a) & y = (x - 1)^2 & b) & y = x^2 - 1 & c) & y = (x + 1)^2 + 1 \\ d) & y = x^2 - 4x + 5 & e) & y = 4x^2 & f) & y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \end{array}$$

Aufgabe 53: Die mittelbaren Funktionen $y = f(h(g(x)))$ sind äussere und innere Funktionen $y = f(w)$, $w = h(z)$, $z = g(x)$ zu zerlegen (auf die Angabe der Definitions- und Wertebereiche kann verzichtet werden).

$$\begin{array}{lll} a) & y = e^{(x+1)^2} & b) & y = (e^{x+1})^2 & c) & y = \lg(\sqrt{2x-3}) \\ d) & y = \sqrt{\lg(2x-3)} & e) & y = \tan \sqrt{x-3} & f) & y = \sqrt{\tan(x-3)} \\ g) & y = \sqrt{\tan(x)-3} & h) & y = \tan \sqrt{x} - 3 & i) & y = \arcsin x^2 + 4 \\ j) & y = (\arccos(3x-2)k)^{\frac{1}{2}} & k) & y = \ln\left(\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right) & l) & y = \sin\left(\ln\left(x + \frac{1}{3}\right)\right) \\ m) & y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}} & n) & y = \frac{1}{\sin x} & o) & y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}} \\ p) & y = \operatorname{arccot} e^{2x+1} & & & & \end{array}$$

Aufgabe 54: Die mittelbaren Funktionen $y = f(h(g(x)))$ sind in äussere und innere Funktionen $y = f(v)$, $v = h(w)$, $z = k(x)$ zu zerlegen (auf die Angabe der Definitions- und Wertebereiche kann verzichtet werden).

$$\begin{array}{lll} a) & y = [\operatorname{arccot}(e^x + 1)]^{\frac{1}{2}} & b) & y = e^{\operatorname{arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}} & c) & y = \sin\left(\cos \frac{x-4}{3}\right)^2 \\ d) & y = \sqrt{5 - \tan \sqrt{x}} & e) & y = \cos(\ln(x^2 - 1) + 1) & f) & y = \log_3(\sqrt{2^x + 1}) \\ g) & y = e^{\tan \sqrt{7x-1}} & h) & y = \tan e^{\sqrt{7x-1}} & & \end{array}$$

Aufgabe 55: Für die folgenden Funktionen sind die Definitionsbereiche zu ermitteln:

$$\begin{array}{lll} a) & y = \sqrt{x-3} & b) & y = \sqrt{3-x^2} & c) & y = \sqrt{x^2-9} \\ d) & y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} & e) & y = \frac{1}{x^2+x-6} & f) & y = \ln(2x+5) \\ g) & y = \arccos(2x-4) & h) & y = \sqrt{x} + \frac{1}{x} & i) & y = \ln x + \frac{1}{x-1} \end{array}$$

Trigonometrie

Aufgabe 56: Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a) \quad 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} & b) \quad 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\ c) \quad \cos \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} &= 1 & d) \quad 1 + 2 \cos \alpha &= 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 57: Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a) \quad \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} & b) \quad \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ c) \quad \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} & d) \quad \cot \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Aufgabe 58: Berechnen Sie die jeweils drei andere Funktionswerte ohne Verwendung der Tafel oder des Taschenrechners, wenn folgendes gegeben ist ($0 < \alpha < 2\pi$)

$$a) \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad b) \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad c) \quad \tan \alpha = \sqrt{3} \quad d) \quad \cot \alpha = -\sqrt{3}$$

Aufgabe 59: Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a) \quad \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha & b) \quad \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ c) \quad \tan 3\alpha &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} & d) \quad \cot 3\alpha &= \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1} \end{aligned}$$

Aufgabe 60: Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a) \quad \cos 2\alpha &= \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha & b) \quad \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ c) \quad \cos 2\alpha &= 1 - 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} & d) \quad \cos 2\alpha &= \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$