

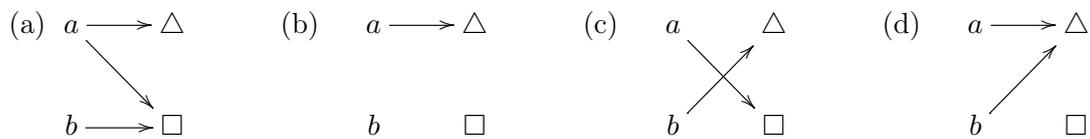
Vorkurs Grundlagen für das Mathematikstudium
Übungsblatt 5: Abbildungen und reelle Funktionen

Aufgabe 1. Studiere den Abschnitt 3.1 des Skripts.

Aufgabe 2. Sei $X = \{a, b\}$, $Y = \{\triangle, \square\}$.

Definieren die unten aufgeführten Vorschriften eine Funktion von X nach Y ?

Falls ja, sind sie injektiv, surjektiv, bijektiv?



Was passiert, wenn links (Buchstaben) und rechts (Figuren) nicht mehr die gleiche Anzahl von Objekten steht? Gibt es injektive, surjektive Funktionen?

Aufgabe 3. Finde einen möglichst grossen Definitionsbereich A und den zugehörigen Bildbereich B , so dass

$$f : A \rightarrow B, \quad x \mapsto \tan(x)$$

eine Bijektion ist.

Aufgabe 4.

(a) Bestimme den grösstmöglichen Definitionsbereich für die folgenden Funktionen:

$$f(x) := \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{4 - x^2}, \quad g(x) := \sqrt{1 - |x|}, \quad \text{und} \quad h(x) := \frac{1}{[x]}.$$

Dabei bezeichnet $[x]$ die sogenannte **Gaussklammer**, welche folgendermassen definiert ist:

$$[x] := \text{grösstes Element der Menge } \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

(b) Gib eine möglichst grosse Teilmenge von \mathbb{R} an, auf der $f(x) := x + [x]$ injektiv ist.

(c) Zeige, dass $f(x) := 3x^2 + 6x + 13$ auf $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ injektiv ist.

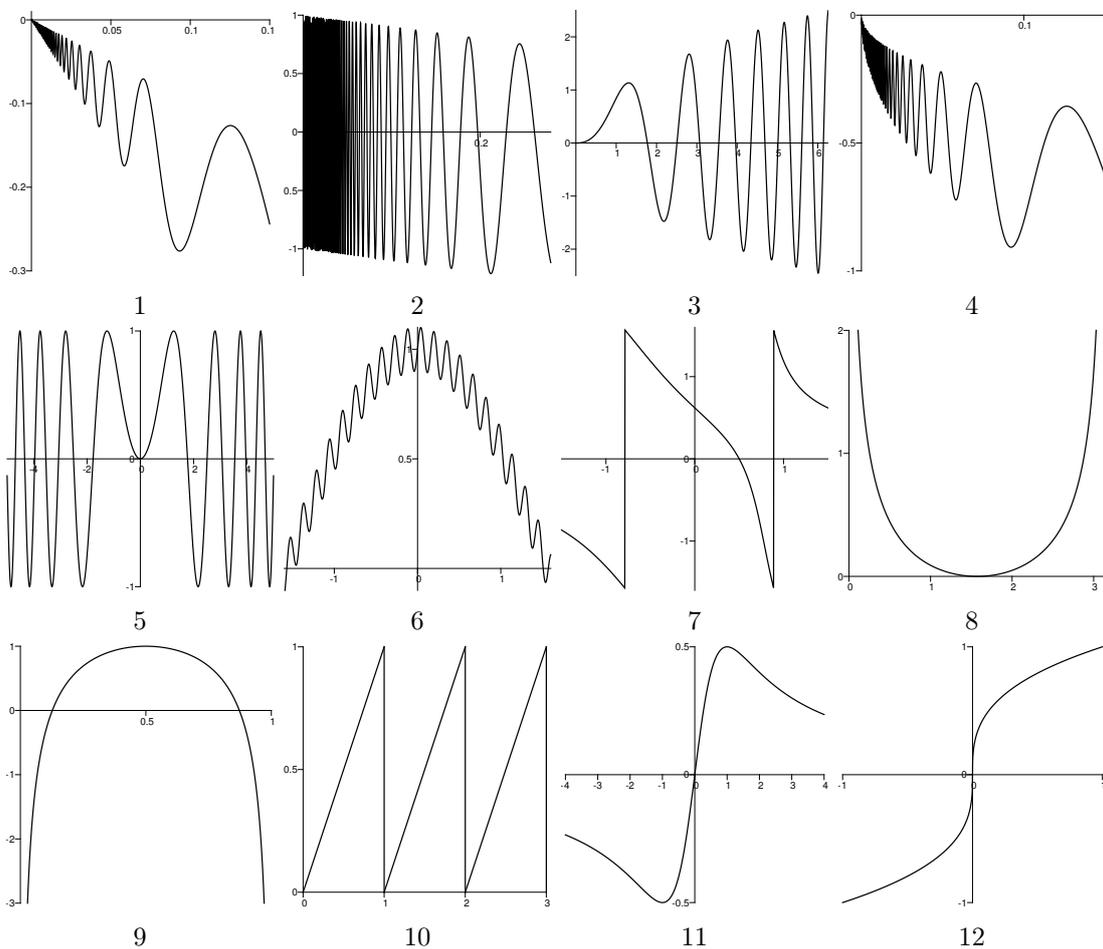
Aufgabe 5. Zeichne den Graphen einer reellen Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften (falls möglich!):

- (a) monoton steigend und surjektiv;
- (b) streng monoton fallend und nicht injektiv;
- (c) monoton steigend und monoton fallend;

- (d) surjektiv, aber nicht injektiv;
- (e) injektiv, aber nicht surjektiv;
- (f) streng monoton fallend und nicht surjektiv.

Aufgabe 6. Ordne die folgenden Funktionen den unten stehenden Graphen zu:

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $f(x) := x - [x]$ | (b) $f(x) := \cos(x) + 0.1 \sin(40x)$ | (c) $f(x) := x^{\frac{1}{3}}$ |
| (d) $f(x) := x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - 2x$ | (e) $f(x) := \sqrt{x} \cdot \sin(\frac{1}{x}) - 2\sqrt{x}$ | (f) $f(x) := \sin(x^2)$ |
| (g) $f(x) := \sin(\frac{5}{x}) - x$ | (h) $f(x) := \sqrt{x} \cdot \sin(x^2)$ | (i) $f(x) := \frac{x}{x^2+1}$ |
| (j) $f(x) := \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} - 1$ | (k) $f(x) := \arctan(\frac{x-0.5}{x^2-0.1x-0.7})$ | (l) $f(x) := 3 - \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ |



Aufgabe 7. Stimmt es, dass $n^2 + n + 41$ für jede natürliche Zahl n eine Primzahl ist?

Aufgabe 8. Man verteilt 25 Quadrate auf einem karierten Brett der Größe 25×25 , und zwar so, dass sie bezüglich einer Diagonale symmetrisch verteilt sind und keine zwei Quadrate aufeinander liegen. Beweise durch Widerspruch, dass mindestens eines der Quadrate auf der Diagonalen liegt.