Vorkurs UZH 2019

Mathematik Rechenfertigkeiten

Übungen Freitag

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich
Erstellt von Dr. Irmgard Bühler

16. August 2019

Integration, Teil 1

1. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

   (a) $\int 3x^2 \, dx$

   (b) $\int x^2 + 3 \, dx$

   (c) $\int x^3 + ax \, dx$ für a konstant.

2. Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

   (a) $\int_{-2}^{1} x^4 - 5 \, dx$

   (b) $\int_{1}^{3} x^2 - 4x \, dx$

   (c) $\int_{5}^{10} \frac{1}{x} \, dx$

   (d) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \, dx$

3. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

   (a) $\int x(x^2 + 3) \, dx$

   (b) $\int 3 \sin(x) \, dx$

   (c) $\int \cos(x) + \frac{1}{x} + e^x \, dx$

   (d) $\int \sqrt{x} \, dx$

   (e) $\int \frac{1}{x} \, dx$

   (f) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

4. Integrieren Sie ein allgemeines Polynom von der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

   wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen sind.

5. Berechnen Sie die Fläche, welche vom Graphen der Funktion f sowie der x-Achse eingeschlossen wird.

   (a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

   (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

6. Berechnen Sie die Fläche, welche von den Graphen der beiden Funktionen f und g eingeschlossen wird.

   (a) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$

   (b) $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x^3 - 9x$

7. Gesucht ist der Flächeninhalt der Fläche, welche durch den Graphen der Funktion, der x–Achse und den vertikalen Linien $x = a$ und $x = b$ beschränkt wird.

   (a) $f(x) = e^x, \quad a = -1, \quad b = 1$

   (b) $g(x) = 2\cos(x), \quad a = -\pi, \quad b = \pi$

8. Zeichnen Sie die Kurve mit der Gleichung $y = 3x^2$ und betrachten Sie die Fläche, die begrenzt wird durch diese Kurve, die x-Achse und die Geraden $x = 0$ und $x = 1$. Zerlegen Sie die Fläche in n Streifen der Breite $\frac{1}{n}$ und berechnen Sie die Ober– und Untersummen O_n und U_n für $n = 1, 2$ und 3 sowie für ein allgemeines n. Was ist der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} O_n$, respektive $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$?

Integration, Teil 2

1. Berechnen Sie mit der partiellen Integration die folgenden Integrale:
   (a) $\int x\cos(x)\,dx$
   (b) $\int u\ln(|u|)\,du$
   (c) $\int \frac{(\ln(|x|))^2}{x}\,dx$
   (d) $\int \sin^3(t)\,dt$

2. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Zusatzbedingung aus der Gleichung der ersten Ableitung einer Funktion diejenige der Funktion selber:
   (a) $f'(x) = \sin(x),\ f(-\pi) = 1$
   (b) $g'(x) = x\sin(x),\ g(\frac{\pi}{2}) = 2$
   (c) $h'(x) = x^2e^x,\ h(0) = 0$

3. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:
   (a) $\int_1^7 \ln(t)\,dt$
   (b) $\int_0^h e^x(x-h)\,dx$
   (c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,dx$
   (d) $\int_0^{2\pi} e^{-t}\cos(t)\,dt$

4. Berechnen Sie die Fläche, welche vom Graphen von $f(x) = (x-1)\cdot\ln(x)$, der x-Achse und der Geraden $x = 4$ eingeschlossen wird.

5. Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen von $f(x) = e^x$ und $g(x) = x^2e^x$ eingeschlossen wird.

Integration, Teil 3

1. Berechnen Sie mit der Substitutionsregel die folgenden Integrale:
   (a) $\int (2x+1)e^{x^2+x}\,dx$
   (b) $\int \frac{e^{2t}}{e^{2t}+4}\,dt$
   (c) $\int \frac{\sqrt{1+\ln(|x|)}}{x}\,dx$
2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Substitutionsregel:
   (a) $\int_{-1}^{0} \frac{3t}{t^2+1}\,dt$
   (b) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3x^2-2)(x^3-2x)^5\,dx$
   (c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)e^{\sin(2t)}\,dt$
   (d) $\int_{3}^{5} \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx$
   (e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$
   (f) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 6\sin(x)\cos(x)\,dx$
3. Wann wird welche Methode angewandt? Bestimmen Sie die Integrale.
   (a) $\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx$
   (b) $\int \frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\,dz$
   (c) $\int \sin^4(x)\,dx$
4. Bestimmen Sie die Integrale im Freitags-Skript auf Seite 16.

Integration, Teil 4

1. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren:

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx$

2. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren:

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x \sin(x)\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3. Welchen Inhalt hat die Fläche, die alle Punkte enthält, deren Koordinaten den folgenden Bedingungen genügen?

   (a) $0 \leq y \leq \dfrac{1}{(2x-4)^2}$ und $x \geq 3$

   (b) $0 \leq y \leq xe^{-x}$ und $x \geq 0$