VORKURS: MATHEMATIK RECHENFERTIGKEITEN, ÜBUNGEN

Dienstag

Block 1 **(Die Musterlösungen werden am Abend auf der Vorkurs-Homepage aufgeschaltet!)**

1. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit einer Methode Ihrer Wahl:

   a) $\begin{aligned}&(1)\ -4x+3y=6\\&(2)\ 3x-6y=3\end{aligned}$ b) $\begin{aligned}&(1)\ 5x-3y=24\\&(2)\ -2x+y=9\end{aligned}$ c) $\begin{aligned}&(1)\ 5x+y=10\\&(2)\ 12.5x+2.5y=25\end{aligned}$

2. Im Theorieskript haben wir folgendes gesehen: $\begin{aligned}&(1)\ a_1x+b_1y=c_1\\&(2)\ a_2x+b_2y=c_2\end{aligned}$ hat die Lösung:

   $x=\dfrac{c_1\cdot b_2-c_2\cdot b_1}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}$ und $y=\dfrac{a_1\cdot c_2-a_2\cdot c_1}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}$. Beweisen Sie das!

3. Lösen Sie das Beispiel Nr. 4 zu den Aufgaben "Verschiedene Gleichungssysteme, verschiedene Lösungswege" aus dem Theorieskript mit der Substitutionsmethode: (1) $\dfrac{2}{5x}+\dfrac{10}{3y}=1$

   (2) $\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{3y}=-1$

4. Leiten Sie die Rechenregel $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$ aus den Rechenregeln fürs Potenzieren her!

5. Ohne Taschenrechner: a) $\log_7 49$, b) $\log_3 1$, c) $\log_5 \sqrt[6]{25}$, d) $\log_{10}\left(\dfrac{1}{10}\right)$

6. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

   a) $\log_a(b+c)+\log_a\left(\dfrac{1}{b+c}\right)$ b) $\log_{a-b}(a^2-2ab+b^2)$

   c) $\dfrac{\log_c(b^2)}{\log_c(a)}$ d) $\log_c(a^4-b^4)-\log_c(a^2+b^2)-\log_c(a+b)$

7. Finden Sie x, so dass folgendes gilt: a) $\log_x 1024 = 10$ b) $\log_3 x = 5$.

8. * Wie viele Stellen hat die Zahl $19^{10'000}$? Wie lautet die erste Ziffer ?

   (Hinweis: Schreiben Sie die Zahl als 10er-Potenz! Der Exponent "gibt dann Auskunft" über die Anzahl Stellen der Zahl.)

Dienstag – Block 1, Endresultate zur Kontrolle

1. a) IL = { (-3 | -2) }   b) IL = { (-51 | -93) }   c) IL = { (x | y) | y = 10 – 5x }

2. Mit der Additionsmethode sind die Lösungen schnell gefunden. Um etwa y herauszufinden, rechnet man $\boxed{a_2 \cdot (1) - a_1 \cdot (2)}$ und isoliert dann y. Analog berechnet man x.

3. Die Lösungen sind im Theorieskript angegeben.

4. Schauen Sie sich nochmals den Beweis der dritten Logarithmus-Regel im Theorieskript an...

5. a) x = 2   b) x = 0   c) x = 1/3   d) x = –1

6. a) 0   b) 2   c) 2 $\log_a(b)$ d) $\log_c(a - b)$

7. a) x = 2   b) x = 243

8. Sie hat 12'788 Stellen und beginnt mit 343...

Auswahl an Musterlösungen

1c)

$(1)\ \ 5x + y = 10$ $(2)\ \ 12.5x + 2.5y = 25$	Sämtliche Lösungsmethoden liefern hier wahre Aussagen. Zum Beispiel « 0 = 0 ». Bedeutung: Die zweite Gleichung ist das 2.5-fache der ersten Gleichung und liefert somit «keine neue Information». D.h.: Sämtliche Lösungspaare (x | y), welche die erste Gleichung erfüllen, erfüllen auch die zweite Gleichung: (1 | 5); (0 | 10); (4 | -10); ... usw. Die Lösungsmenge lässt sich schreiben als: IL = { (x | y) | y = 10 – 5x }

5c) $$\log_5(\sqrt[6]{25}) = x \Leftrightarrow 5^x = 25^{1/6} \Leftrightarrow 5^x = (5^2)^{1/6} \Leftrightarrow 5^x = 5^{1/3} \Rightarrow x = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

6c) $$\frac{\log_c(b^2)}{\log_c(a)} = \frac{\log_a(b^2)}{\log_a(a)} = \frac{\log_a(b^2)}{1} = \underline{\underline{2 \cdot \log_a(b)}}$$ (Beim ersten Schritt: Basiswechsel.)

Zweite Lösungsvariante: $$\frac{\log_c(b^2)}{\log_c(a)} = \frac{2 \cdot \log_c(b)}{\log_c(a)} = \frac{2 \cdot \frac{\log(b)}{\log(c)}}{\frac{\log(a)}{\log(c)}} = \frac{2 \cdot \log(b)}{\log(a)} = \underline{\underline{2 \cdot \log_a(b)}}$$

<u>Block 2</u> (Die Musterlösungen werden am Abend auf der Vorkurs-Homepage aufgeschaltet!)

1. Die folgenden Exponentialgleichungen sind mit einem Exponentenvergleich zu lösen:

   a) $2^x = 0.25$ b) $3^{2x+1} = 81$ c) $3^x \cdot 27 = \frac{1}{9}$ d) $\sqrt[x+1]{16} = 8$

2. Lösen Sie die folgende Logarithmusgleichung: $2 \cdot \log(x+3) - \log(x+1) = 1$
   (Hinweis: Logarithmen-Regel anwenden.)

3. Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen:

   a) $4 \cdot 5.2^x = 3 \cdot 0.75^x$ b) $10^{\frac{x}{x+1}} = 0.8$

   c) $5^{2x} - 27 \cdot 5^x = 0$ d) $2^{4x} + 2^{4x+5} = 99$

4. Ich kaufe Wasserpflanzen für meinen Teich, die so schnell wachsen, dass sich die von ihnen bedeckte Fläche jeden Tag verdoppelt. Kaufe ich ein Exemplar, so ist der Teich nach 20 Tagen völlig bedeckt. Wie lange dauert das, falls ich gleich zwei Pflanzen kaufe?

5. Zu welcher Grösse wird mein Anfangskapital von 100 Franken nach 10 Jahre gewachsen sein, wenn der Zinssatz 1.5 Prozent bleibt? Und wie lange dauert es, bis es sich verdreifacht hat?

Trigonometrie

6. Geben Sie die Winkel in Bogenmass an: a) 15° b) 225° c) 105° d) 277.5°.

7. Berechnen Sie mit Hilfe der Additionsformeln und der Tabelle für spezielle Winkel aus dem Skript den Wert für $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos(15^\circ)$ exakt (d.h. nicht als Dezimalzahl, sondern als Wurzelterm).

8. * Überlegen Sie am Einheitskreis, dass $\tan(\alpha)$, α und $\sin(\alpha)$ für kleine positive Werte von α fast gleich sind, dass aber stets $\tan(\alpha) \geq \alpha \geq \sin(\alpha)$ gilt.

Dienstag – Block 2, Endresultate zur Kontrolle

1. a) IL = { -2 } b) IL = { 1.5 } c) IL = { –5 } d) IL = { 1/3 }

2. $x_1 = 4.2361$; $x_2 = -0.2361$

3. a) $x = -0.1486$ b) $x = -0.0884$ c) $x = 2.0478$ d) $x = 0.3962$

4. Es dauert 19 Tage.

5. $K_{10} = 116.05.-.$ Verdreifachung des Kapitals: Erstmals nach 74 Jahren.

6. a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{5\pi}{4}$ c) $\frac{7\pi}{12}$ d) $\frac{37\pi}{24}$

7. $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \approx 0.9659...$

8. Einheitskreis zeichnen (1. Quadrant reicht aus) und passende Flächeninhalte vergleichen.

Auswahl an Musterlösungen

1d) $\sqrt[x+1]{16} = 8 \Leftrightarrow 16^{\frac{1}{x+1}} = 8 \Leftrightarrow (2^4)^{\frac{1}{x+1}} = 2^3$; Exponentenvergleich: $\frac{4}{x+1} = 3$; **IL = { 1/3 }**

2) $2 \cdot \log(x+3) - \log(x+1) = 1 \Leftrightarrow \log_{10}\left[\frac{(x+3)^2}{x+1}\right] = 1 \overset{Def.}{\Leftrightarrow} 10^1 = \left[\frac{(x+3)^2}{x+1}\right] \Leftrightarrow 10x + 10 = x^2 + 6x + 9$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x - 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 4.2361}}; \underline{\underline{x_2 = -0.2361}}$ (mit der Lösungsformel für quadr.Gl. gelöst).

3c) Substitution: $5^x = a$

$5^{2x} - 27 \cdot 5^x = 0 \Rightarrow a^2 - 27a = 0 \Leftrightarrow a(a-27) = 0 \Rightarrow a_1 = 0;\ a_2 = 27$

$a_1 = 0 \Rightarrow 5^x = 0 \Rightarrow \{\};\quad a_2 = 27 \Rightarrow 5^x = 27 \Rightarrow \underline{\underline{x = 2.0478}}$

7) $$\boxed{\begin{aligned}&\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \overset{Add.Theorem}{=} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}} \approx 0.9659...\end{aligned}}$$

Block 3 **(Die Musterlösungen werden am Abend auf der Vorkurs-Homepage aufgeschaltet!)**

1. Lineare Funktionen:

   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt C(2 / -3) verläuft und die Steigung m = -2 hat.

   b) Geben Sie die Gleichung der Geraden an, die durch den Punkt R(-2 / 1) verläuft und zu der Geraden g: y = 2x – 3 parallel ist.

   c) Prüfen Sie durch Rechnung, ob die Punkte P(2 / 1), Q(-3 / 6) und R(5 / -2) zu einer Geraden gehören. (Hier gibt es mehrere Losungsansätze... Welcher Ansatz ist der beste?)

   d) Wir betrachten eine Gerade g mit der Steigung m_g. Eine Gerade n, die senkrecht zu g steht, ist eine sogenannte Normale zu g (man sagt auch: n ist normal zu g). Es sei nun die Gerade n (mit der Steigung m_n) eine Normale zu g. Beweisen Sie, dass dann $\boxed{m_g \cdot m_n = -1}$ gilt. Fertigen Sie dazu eine Zeichnung an!

   e) Geben Sie die Gleichung der Geraden an, die durch den Punkt R(-2 / 1) verläuft und zu der Geraden g: y = 2x – 3 normal ist.

2. Bei einer Telefonfirma kostet ein Mobil-Abonnement monatlich 15 Franken, man hat monatlich 10 Gratisminuten, und jede weitere Minute kostet 1 Franken. Bei einer anderen kostet zwar das Abo monatlich 25 Franken, aber jede Minute kostet nur 50 Rappen. Ab wie vielen Minuten ist das zweite Angebot günstiger? Rechnerische und grafische Untersuchung im Koordinatensystem!

3. Lösen Sie zuerst graphisch und dann rechnerisch mit einer Fallunterscheidung: $|x+1| = x+2$

4. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit dem Scheitel im Ursprung und der y-Achse als Symmetrieachse, die durch den Punkt (2 / 3) geht.

5. Welche der folgenden Parabeln $y = 0.1x^2$, $y = 1.4x^2$, $y = -\frac{5}{8}x^2$, $y = 3x^2$, $y = -5x^2$ und $y = -\frac{1}{3}x^2$ verlaufen <u>zwischen</u> den Parabeln $y = 1.2x^2$ und $y = -1.4x^2$?

6. Für welche Werte a hat die Gleichung $(x-1)^2 + 1 = a\,x$ genau eine Lösung? Zeichnen und erklären Sie was das heisst!

7. *(Spass): Man hat 2 Seile, die je genau eine Stunde brennen, wenn man sie an einem Ende anzündet. Das Brennen muss aber nicht gleichmässig erfolgen: an gewissen Stellen sind die Seile dicker als an anderen, und dort brennen sie entsprechend langsamer. Man hat aber einen Kuchen, der genau 3/4 Stunden gebacken werden muss. Wie misst man diese Zeit mit Hilfe der Seile?

Dienstag – Block 3, Endresultate zur Kontrolle

1. a) y = -2 x + 1 b) y = 2x + 5

   c) P, Q und R liegen auf einer Geraden. d) Hinweis: Steigungsdreieck um 90° drehen.

   e) $y = -\frac{1}{2}x$

2. Ab 40 Minuten ist das zweite Angebot günstiger.

3. $x = -1.5$

4. $y = \frac{3}{4} \cdot x^2$

5. Dies trifft zu bei den Parabeln: $y = 0.1x^2$; $y = -\frac{5}{8}x^2$ und $y = -\frac{1}{3}x^2$.

6. $a_1 = -2 + 2\sqrt{2}$ und $a_2 = -2 - 2\sqrt{2}\,_{\doteq}$

7. Geduld... die Lösung wird heute Abend aufgeschaltet.

Auswahl an Musterlösungen

1c) Falls die 3 Punkte P, Q und R auf einer Geraden liegen, dann müssen die Steigungen von PQ und PR gleich sein! (Fertigen Sie eine Skizze an, falls Ihnen das nicht klar sein sollte!)

Steigung von PQ: $m_{PQ} = \frac{6-1}{-3-2} = -1$ Steigung von PR: $m_{PR} = \frac{-2-1}{5-2} = -1$

Gleiche Steigungen! Deshalb gilt: P, Q und R liegen tatsächlich auf einer Geraden!

4) Da die Parabel den Scheitel im Ursprung (0 / 0) hat, ergibt sich der Ansatz: $\boxed{y = a \cdot x^2}$.

Wir **setzen** den Punkt **(2 / 3) ein**, um a zu bestimmen: $3 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$. Lösung: $\boxed{y = \frac{3}{4} \cdot x^2}$

5) Die Parabel $y = a \cdot x^2$ verläuft zwischen den Parabeln $y = 1.2x^2$ und $y = -1.4x^2$, falls $-1.4 < a < 1.2$.

Dies trifft zu bei den Parabeln: $y = 0.1x^2$; $y = -\frac{5}{8}x^2$ und $y = -\frac{1}{3}x^2$.

<u>Block 4</u> (Die Musterlösungen werden am Abend auf der Vorkurs-Homepage aufgeschaltet!)

1. Lösen Sie rechnerisch und graphisch die folgenden Ungleichungen:

   a) $3x + 8 \leq 7 - 5x$

   b) $-2 \leq -2x + 6 \leq 4$

   c) $\dfrac{3x+2}{x-1} > -3$

2. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $(\cos x)^{\sin x} = 1$, wobei $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gelten soll.

3. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$ und geben Sie die Lösungen in Bogenmass, sowie in Gradmass an.

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden quadratischen Ungleichungen unter Verwendung der grafischen Methode:

   a) $0.5x^2 + 4x > 0$

   b) $4x^2 - 3x - 27 \leq 0$

   c) $-3x^2 + 5x - 7 < 0$

5. * Für welche Werte von a hat die Gleichung $|x| = ax + 1$ genau zwei Lösungen?

Dienstag – Block 4, Endresultate zur Kontrolle

1. a) $x \in (-\infty;\ -\frac{1}{8}]$

   b) $x \in [1;\ 4]$

   c) $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{6} \text{ oder } x > 1\} = (-\infty,\ \frac{1}{6}) \cup (1,\ +\infty) = \mathbb{R} \setminus [\frac{1}{6};\ 1]$

2. $\mathbb{L} = \{ 0 \}$

3. $\mathbb{L} = \{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \}$, respektive in Gradmass ausgedrückt:

   $\mathbb{L} = \{ 90^\circ + k \cdot 360^\circ,\ -30^\circ + k \cdot 360^\circ,\ -150^\circ + k \cdot 360^\circ \}$, mit k jeweils eine beliebige ganze Zahl.

   Mögliche Lösungen sind also zum Beispiel: $x = 450^\circ$, $x = -270^\circ$, $x = 690^\circ$, $x = -510^\circ$, ... usw.

4. a) $\mathbb{L} =]-\infty; -8[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R} \setminus [-8; 0]$

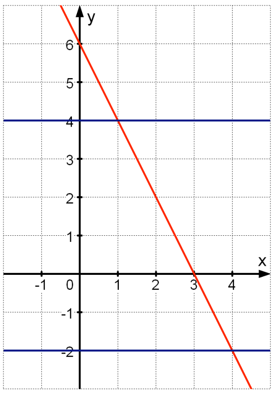
   b) $\mathbb{L} = [-2.25;\ 3]$

   c) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

5.

Auswahl an Musterlösungen

1b)



$$\begin{aligned}
-2 \le -2x + 6 \le 4 \quad & \big| -6 \\
-8 \le -2x \le -2 \quad & \big| :(-2) \quad \le \text{Zeichen umkehren} \\
4 \ge x \ge 1 \quad & \\
\underline{\underline{x \in [1;\ 4]}} &
\end{aligned}$$

2) $(\cos x)^{\sin x} = 1$. Vorüberlegung: Allgemein gilt $a^b = 1 \Rightarrow a = 1$, oder $b = 0$.

Also betrachten wir: $\cos x = 1$, oder $\sin x = 0$.

Beides ist für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nur für x = 0 erfüllt (was man am Einheitskreis schnell konstatieren kann).

Somit gilt: $\mathbb{L} = \{ 0 \}$.