Universität Zürich, 10. September 2020

Vorkurs Grundlagen für das Mathematikstudium

Lösungen 4: Relationen und Reihen

Lösung zu Aufgabe 1.

(a) Die Relation erfüllt keine der drei Eigenschaften. Die Reflexivität ist verletzt, da ein Mann nicht sein eigener Bruder ist. Die Symmetrie ist verletzt, da eine Frau einen Bruder hat, sie selber aber kein Bruder dessen ist. Die Transitivität ist verletzt, da bei zwei Brüdern aus ihr die Reflexivität für beide Brüder folgt.

(b) Diese Relation ist symmetrisch. Reflexiv ist sie nicht, da ein Mensch nicht Geschwister von sich selber ist. Damit ist die Relation ebenfalls nicht transitiv: hat man zwei Geschwister, so folgt aus der Transitivität wieder die Reflexivität.

(c) Wenn wir annehmen, dass es weder Doppelbürger noch Staatenlose gibt, dann ist dies eine Äquivalenzrelation. Gibt es Staatenlose, so ist die Relation nicht reflexiv. Gibt es Doppelbürger, so ist sie nicht transitiv.

Ein weiteres Problem ist die Formulierung: «die» kann man so interpretieren, dass die Relation nur Menschen beschreibt, die genau eine Staatsangehörigkeit haben. In dem Fall ist die Relation bei Doppelbürgern auch nicht reflexiv.

(d) An diesem Beispiel lässt sich gut veranschaulichen, wie wichtig es ist, auf welcher Grundmenge man die Relation betrachtet. Ist die Grundmenge, die Menge aller Gemeinden der Schweiz, so ist die Relation symmetrisch (wir gehen davon aus, dass die Züge in beide Richtungen fahren) und transitiv (einfach den Anschlusszug nehmen). Aber die Relation ist nicht reflexiv, denn es gibt Gemeinden ohne Bahnhof. Schränken wir hingegen die Grundmenge ein auf die Gemeinden mit Bahnhof, dann wird die Relation reflexiv, denn wir können mit irgendeinem Zug wegfahren und wieder zurück. In diesem Falle ist es also eine Äquivalenzrelation.

Die für die Symmetrie getroffene Annahme, dass Züge in beide Richtungen fahren, kann sich ebenfalls zu einem Problem entwickeln. Betrachtet man etwa Busse anstelle von Zügen, so gibt es in Zürich mehrere Bushaltestellen, an denen der Bus nur in einer Richtung durchfährt: so gibt es zwar eine direkte Busverbindung von der Haltestelle Zürich, Hinterbergstrasse zum benachbarten Spyriplatz, jedoch keine direkte Verbindung in die Gegenrichtung. Mit einmal umsteigen (etwa an der Kirche Fluntern) kommt man jedoch auch per Bus vom Spyriplatz zur Hinterbergstrasse. Auch falls es bei Zügen Haltestellen geben sollte, die nur in einer Richtung angefahren werden, so ist es trotzdem möglich, mit passenden Zwischenstopps auch von der anderen Richtung dorthin zu kommen. Deswegen ist die Symmetrie hier trotzdem gegeben.

Lösung zu Aufgabe 2.

(a) reflexiv und transitiv

(b) transitiv und antisymmetrisch (da $x \sim_R y$ und $y \sim_R x$ nie zusammen eintreten kann)

(c) Ordnungsrelation

Die Ordnungsrelation in (c) ist nicht total, da zum Beispiel disjunkte Mengen nicht Teilmengen voneinander sind.

Lösung zu Aufgabe 3. Wir stellen die Approximationen in einer Tabelle auf vier Nachkommastellen genau dar. Da $e = 2.718281828...$ (nicht periodisch, da e irrational ist), wird ersichtlich, dass die Approximation der Exponentialreihe viel schneller konvergiert. So gelten zum Beispiel noch $e_{100} = 2.70481...$ und $e_{1000} = 2.71692....$

n	$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$		$s_n = \sum_{k+0}^{n} \frac{1}{k!}$	
1	2	2	2	2
2	$\frac{9}{4}$	2.25	$\frac{5}{2}$	$2,5$
3	$\frac{64}{27}$	≈ 2.3703	$\frac{8}{3}$	$2.\bar{6}$
4	$\frac{625}{256}$	≈ 2.4414	$\frac{65}{24}$	$2.708\bar{3}$
5	$\frac{7776}{3125}$	≈ 2.4883	$\frac{163}{60}$	$2.71\bar{6}$
6	$\frac{117649}{46656}$	≈ 2.5216	$\frac{1957}{720}$	≈ 2.7180

Lösung zu Aufgabe 4.

(a) Dies ist eine geometrische Reihe mit $q = -\frac{1}{2}$. Also ist der Wert der Reihe (siehe Beispiel 2.17 auf Seite 29 des Skripts)

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

(b) Es gilt $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Daher sind die Partialsummen der Reihe gegeben durch

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Da wir schon wissen, dass $\frac{1}{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, können wir schliessen, dass $s_n \to 1$. Also gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Lösung zu Aufgabe 5. Seien $a_i = -i$ und $b_i = \frac{1}{i^2}$. Dann ist $a_i \le b_i$ und $\sum_i b_i$ konvergiert. Aber offensichtlich ist $\sum_i a_i = -\infty$. Dies liefert ein Gegenbeispiel für beide Aussagen.
Die Bedingung $0 \le |a_i| \le b_i$ ist auch schon hinreichend. Dies kann man beispielsweise folgendermassen mit dem Cauchy-Kriterium (Lemma 2.18 auf Seite 30 im Skript) sehen:

Sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es nach Lemma 2.18 zu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ein $N \ge 0$ so, dass für alle $n \ge N$ und $k \ge 1$ gilt $\left|\sum_{\ell=n+1}^{n+k} b_\ell\right| < \varepsilon$. Nun ist $\left|\sum_{\ell=n+1}^{n+k} b_\ell\right| = \sum_{\ell=n+1}^{n+k} b_\ell$, da alle $b_\ell \ge 0$ sind.

Nun gilt für jedes $n \ge N$ und $k \ge 1$ mit der Dreiecksungleichung aber auch

$$\left|\sum_{\ell=n+1}^{n+k} a_\ell\right| \le \sum_{\ell=n+1}^{n+k} |a_\ell| \le \sum_{\ell=n+1}^{n+k} b_\ell < \varepsilon,$$

womit nach Lemma 2.18 die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Analog sieht man, dass die Bedingung auch für die zweite Aussage hinreichend ist.

Lösung zu Aufgabe 6.

(a) Für eine Reihe $\sum_k a_k$, die konvergiert, muss gelten, dass $a_k \to 0$. In diesem Falle ist aber

$$a_k = \frac{k^3 + 4k^2 - 2}{7k^3 + 1} \longrightarrow \frac{1}{7}.$$

Daher kann die Reihe nicht konvergieren.

(b) Für $k \geq 2$ gilt die Ungleichung

$$\frac{k}{k^2 - 1} \geq \frac{1}{k} \geq 0.$$

Ausserdem divergiert die harmonische Reihe $\sum_k \frac{1}{k}$. Daher können wir das Majorantenkriterium anwenden und schliessen, dass die Reihe divergiert.

Lösung zu Aufgabe 7. Wir bezeichnen mit x_k den Anteil des Gummibandes, welchen die Schnecke in der k-ten Stunde zurücklegt. Dann gilt $x_k = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{20k}$. Nun betrachten wir die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Dies sind bis auf den Faktor $\frac{1}{20}$ gerade die Partialsummen der harmonischen Reihe. Diese Reihe aber divergiert. Daher gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $s_{n_1} \geq 1$. Also hat die Schnecke das ganze Band (= 1 Anteil) nach n_1 Stunden überquert.
Bemerkung: $n_1 \approx 272400600 \approx$ 7-mal Erdumfang.

Lösung zu Aufgabe 8. Das Vorgehen ist folgendes: Zuerst addieren wir positive Werte, bis die Summe ≥ 1.5 ist. Dann addieren wir wieder negative Werte, bis die Summe wieder < 1.5 ist. Nun wiederhole dieses Vorgehen iterativ.
Einige Bemerkungen, die begründen, weshalb dies tatsächlich die Lösung liefert:

- Es ist immer möglich genügend positive bzw. negative Werte zu addieren, so dass die Summe $\geq$ bzw. $<$ als der Wert 1.5 ist, da die Reihen

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$
$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \dots$$

  divergieren (sie sind im Wesentlichen harmonische Reihen).

- Die so umgeordnete Reihe konvergiert tatsächlich gegen 1.5, da nach jedem 'Überschreiten' der 1.5-Marke (von oben oder von unten) der Abstand zu 1.5 immer kleiner (beliebig klein) wird und gegen 0 konvergiert. (Der Abstand ist $\sim \frac{1}{n}$.)