Vorkurs Grundlagen Mathematik
Relationen & Reihen

Dr. Sandra König

Universität Zürich

10.09.2020

Inhalt

Konstruktion der reellen Zahlen

Problem:
wie definiert man irrationale Zahlen mathematisch präzise?

Mehrere Ansätze, einer der einfachsten verwendet Cauchy Folgen:
jeder Cauchy-Folge von *rationalen* Zahlen s_n wird eine reelle Zahl zugeordnet

Schwierigkeiten:

- Verschiedene Cauchy-Folgen können die selbe reelle Zahl repräsentieren
- Wie sehen algebraische Relationen für diese neuen Objekte aus?
- Cauchys Theorem muss bewiesen werden; die Terme s_n können selbst reelle Zahlen sein (und somit rationale Cauchy-Folgen).

Äquivalenzrelation I

Angenommen

$$\begin{array}{llll} \sqrt{2} & \text{ist der Folge} & \{1.4, 1.41, 1.414, \ldots\} & \text{zugeordnet, und} \\ \sqrt{3} & \text{ist der Folge} & \{1.7, 1.73, 1.732, \ldots\} & \text{zugeordnet.} \end{array}$$

dann muss $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ der Folge der Produkte

$$\{2.38, 2.4393, 2.449048, \ldots\}$$

zugeordnet sein. Andererseits ist $\sqrt{6}$ auch der Folge

$$\{2.4, 2.44, 2.449, \ldots\}$$

zugeordnet
$\rightarrow$ diese zwei Folgen müssen miteinander identifiziert werden

Äquivalenzrelation II

Definition

Zwei rationale Cauchy-Folgen $\{s_n\}$ und $\{v_n\}$ heissen *äquivalent*, falls

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - v_n) = 0,$$

das heisst

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \geq 1, \quad \text{so dass } \forall\, n > N \text{ gilt:} \quad |s_n - v_n| < \varepsilon.$$

Ist dies der Fall, so schreibt man $\{s_n\} \sim \{v_n\}$.

Eine Äquivalenz zwischen Objekten muss gewisse Eigenschaften erfüllen, um nützlich zu sein.

Definition (Äquivalenzrelation)

Eine *Äquivalenzrelation* ist eine Relation $x \sim y$, so dass

Reflexitivtät	$x \sim x$
Symmetrie	$x \sim y \Longrightarrow y \sim x$
Transitivität	$x \sim y \wedge y \sim z \Longrightarrow x \sim z$

Die oben definierte Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der rationalen Cauchy-Folgen, das heisst $\sim$ erfüllt die entsprechenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} \{s_n\} \sim \{s_n\} & (\sim \text{ ist reflexiv}), \\ \{s_n\} \sim \{v_n\} \Longrightarrow \{v_n\} \sim \{s_n\} & (\sim \text{ ist symmetrisch}), \\ \{s_n\} \sim \{v_n\} \wedge \{v_n\} \sim \{w_n\} \Longrightarrow \{s_n\} \sim \{w_n\} & (\sim \text{ ist transitiv}). \end{array}$$

(dies muss noch überprüft werden)

Äquivalenzrelation IV

Definition (Äquivalenzklasse)

Eine Äquivalenzrelation $\sim$ erlaubt das Zusammenfassen von äquivalenten Elementen zu *Äquivalenzklassen*:

$$\overline{x} = \left\{ y \;\middle|\; y \sim x \right\}.$$

Ein Element $y \in \overline{x}$ wird *Repräsentant* genannt.

Die Menge der rationalen Cauchy-Folgen kann also durch $\sim$ in Äquivalenzklassen unterteilt werden:

$$\overline{\{s_n\}} = \left\{ \{v_n\} \;\middle|\; \{v_n\} \text{ ist eine rationale Cauchy-Folge und } \{v_n\} \sim \{s_n\} \right\}.$$

Äquivalenzrelation V

Definition

Die *reellen Zahlen* sind Äquivalenzklassen von rationalen Cauchy-Folgen, das heisst

$$\mathbb{R} = \left\{ \overline{\{s_n\}} \;\middle|\; \{s_n\} \text{ ist eine rationale Cauchy-Folge} \right\}.$$

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ können als Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ betrachtet werden, indem ein Element $r \in \mathbb{Q}$ als die Äquivalenzklasse $\overline{\{r, r, r, \ldots\}}$ der konstanten Folge $\{r, r, r, \ldots\}$ betrachtet wird.

Addition und Multiplikation I

Damit wir mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ rechnen können, müssen wir die üblichen Verknüpfungen definieren.

Definition

Es seien $s = \overline{\{s_n\}}$ und $v = \overline{\{v_n\}}$ zwei reelle Zahlen. Wir definieren die Summe (und die Differenz) sowie das Produkt (und den Quotienten) durch

$$s + v := \overline{\{s_n + v_n\}}, \qquad \text{und} \qquad s \cdot v := \overline{\{s_n \cdot v_n\}}.$$

Addition und Multiplikation II

Diese Definition ist mit Vorsicht zu geniessen:

- Sind $\{s_n + v_n\}$ sowie $\{s_n \cdot v_n\}$ überhaupt Cauchy-Folgen?
- Sind $s + v$ und $s \cdot v$ unabhängig von den Repräsentanten, mit denen sie definiert sind? Das heisst, gilt auch $s + v = \overline{\{s'_n + v'_n\}}$ und $s \cdot v = \overline{\{s'_n \cdot v'_n\}}$ für andere Repräsentanten $\{s'_n\}$ und $\{v'_n\}$ von s und v?
- Gelten die bekannten Regeln für reelle Zahlen (Kommutativität, Assoziativität und Distributivität) überhaupt?

Bei den ersten beiden Punkten spricht man von der *Wohldefiniertheit* der Definition

Ordnungsrelation I

Definition

Es seien $s = \overline{\{s_n\}}$ und $v = \overline{\{v_n\}}$ zwei reelle Zahlen.

$$s < v \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \varepsilon' \in \mathbb{Q}^+ \text{und } \exists M \geq 1, \text{ so dass } \forall\ m \geq M : s_m \leq v_m - \varepsilon' \ .$$
$$s \leq v \quad :\Longleftrightarrow \quad s < v \text{ oder } s = v.$$

(ε' muss rational sein, da $v > 0$ für $v \notin \mathbb{Q}$ noch nicht definiert ist)

Diese Definition von $s < v$ bedeutet folgendes: Für ein genügend grosses m müssen die Elemente s_m und v_m genügend weit auseinander liegen. Die Bedingung $s_m < v_m$ für alle m reicht nicht, wie das Gegenbeispiel $\{0, 0, 0, \ldots\} \sim \{1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots\}$ zeigt.

Ordnungsrelation II

Definition (Ordnungsrelation)

Eine *Ordnungsrelation* ist eine Relation $x \leq y$, so dass für alle u, v, w die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{array}{lccc} \text{Reflexitivtät} & u \leq u & & \\ \text{Antisymmetrie} & u \leq v,\ v \leq u & \Longrightarrow & u = v \\ \text{Transitivität} & u \leq v,\ v \leq w & \Longrightarrow & u \leq w \end{array}$$

Eine Ordnungsrelation ist *total* wenn es für zwei gegebene Elemente u und v mit $u \neq v$ entweder $u < v$ oder $v < u$ gilt.

Lemma

Die oben definierte Relation $\leq$ auf der Menge der reellen Zahlen ist eine totale Ordnungsrelation.

Reihen I

Definition

Eine unendliche Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *konvergiert*, falls die Folge der Partialsummen $\{s_n\} = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i\right\}$ konvergiert:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i := \lim_{n\to\infty} s_n \quad \text{oder} \quad \sum_{i\geq 0} a_i := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Eine unendliche Reihe *divergiert*, falls die Folge der Partialsummen divergiert.

Reihen II

Beispiel

Die n-te Teilsumme der geometrischen Reihe $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$ *ist* $s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. *Multiplizieren mit* $(1-q)$ *ergibt*

$$s_n = \frac{(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^n)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Daher gilt

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{falls } |q| < 1, \\ \text{divergiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. die geometrische Reihe konvergiert nur für $|q| < 1$.

Reihen III

Lemma

Die Reihe

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \cdots$$

konvergiert für alle $\alpha > 1$ *und divergiert für* $\alpha \leq 1$.

Konvergenzkriterien I

Oft ist es nicht möglich, s_n explizit zu bestimmen und den Grenzwert von $\{s_n\}$ zu berechnen $\rightarrow$ verwende Konvergenzkriterien

Erster Ansatz: wende das Kriterium von Cauchys Theorem auf die Folge der Teilsummen $s_{n+k} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}$ an

Lemma

Eine unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ konvergiert gegen eine reelle Zahl genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N \geq 0, \quad \textit{so dass} \,\forall\, n \geq N \quad \textit{und} \quad \forall\, k \geq 1 : |a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Setzt man in diesem Lemma $k = 1$, so ergibt sich

$$\lim_{i \to \infty} a_i = 0.$$

Konvergenzkriterien II

Dies ist ein *notwendiges* Kriterium für Konvergenz, aber kein *hinreichendes* Kriterium.

Beispiel

Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \to \infty.$$

divergiert, aber $\lim_{i \to \infty} a_i = 0$.

Es gibt auch hinreichende Bedingungen für Konvergenz. Nicht alle Kriterien sind allgemein gültig, einige sind spezifisch für besondere Reihen.

Konvergenzkriterien III

Definition (Alternierende Reihe)

Eine unendliche Reihe, in welcher die Terme alternierende Vorzeichen haben,

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots = \sum_{i \geq 0} (-1)^i a_i,$$

wird *alternierende* Reihe genannt.

Theorem (Leibniz 1682)

Eine alternierende Reiche mit

$$a_i > 0, \quad a_{i+1} \leq a_i, \quad \lim_{i \to \infty} a_i = 0;$$

konvergiert gegen eine reelle Zahl s *und es gilt* $|s - s_n| \leq a_{n+1}$.

Konvergenzkriterien IV

Beispiel

Die alternierende Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

konvergiert gegen $\ln(2)$*, aber die harmonische Reihe*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

divergiert.

Konvergenzkriterien V

Die Divergenz der harmonischen Reihe lässt sich zeigen mit Hilfe einer Abschätzung der Folgeglieder. Für

$$\begin{aligned} \sum b_i &:= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \\ \sum a_i &:= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + + \cdots \end{aligned}$$

gilt $\sum b_i > \sum a_i \to \infty$, so, dass auch $\sum b_i \to \infty$

Bemerkung

Diese Argumentation verwendet das Majoranten-Kriterium bzw. das Minoranten-Kriterium (vergleiche Aufgabe 5 auf Blatt 4).

Absolute Konvergenz I

Der Begriff der Konvergenz von Reihen kann noch verfeinert werden

Beispiel

Die alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \pm \cdots .$$

konvergiert, aber durch Umgruppieren der Terme ergibt sich

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{\frac{1}{10}} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\right),$$

was der Hälfte des Grenzwertes der ursprünglichen Reihe entspricht. Der Wert einer unendlichen Summe hängt also von der Reihenfolge der Summation ab!

Absolute Konvergenz II

Definition

Eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a'_i$ ist eine *Umordnung* von $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, falls jeder Term von $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ genau einmal in $\sum_{i=0}^{\infty} a'_i$ auftritt und umgekehrt.

Eine elegante Erklärung für dieses Phänomen gab B. Riemann 1854: für jede beliebige reelle Zahl A existiert eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe, so dass diese gegen A konvergiert. Der Grund dafür ist, dass die Summe der positiven Terme und die Summe der negativen Terme

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \cdots,$$

als auch die harmonische Reihe divergieren.

Absolute Konvergenz III

Dieses Problem motiviert folgende Definition

Definition

Die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ heisst *absolut* konvergent falls

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

konvergiert.

Beispiel

Die alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ *ist nicht absolut konvergent.*

Man kann zeigen, dass jede absolut konvergente Reihe bereits konvergiert.

Absolute Konvergenz IV

Absolut konvergente Reihen kann man beliebig umordnen, ohne den Grenzwert zu verändern:

Theorem (P. G. L. Dirichlet 1837)

Falls die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *absolut konvergiert, dann konvergieren alle ihre Umordnungen gegen denselben Grenzwert.*

Die Aussage von Riemann zur alternierenden harmonischen Reihe lässt sich auf alle Reihen ausweiten, die zwar konvergieren, aber nicht absolut konvergieren:

Theorem (B. Riemann 1854)

Falls die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, dann gibt es zu jedem* $S \in \mathbb{R}$ *eine Umordnung der Reihe, welche gegen* S *konvergiert.*