Vorkurs UZH 2020

Mathematik Rechenfertigkeiten

Skript Donnerstag

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich
Skript: Dr. Irmgard Bühler (Überarbeitung: Dr. Dominik Tasnady)

August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Kurvendiskussion

1.1 Extrema einer Funktion

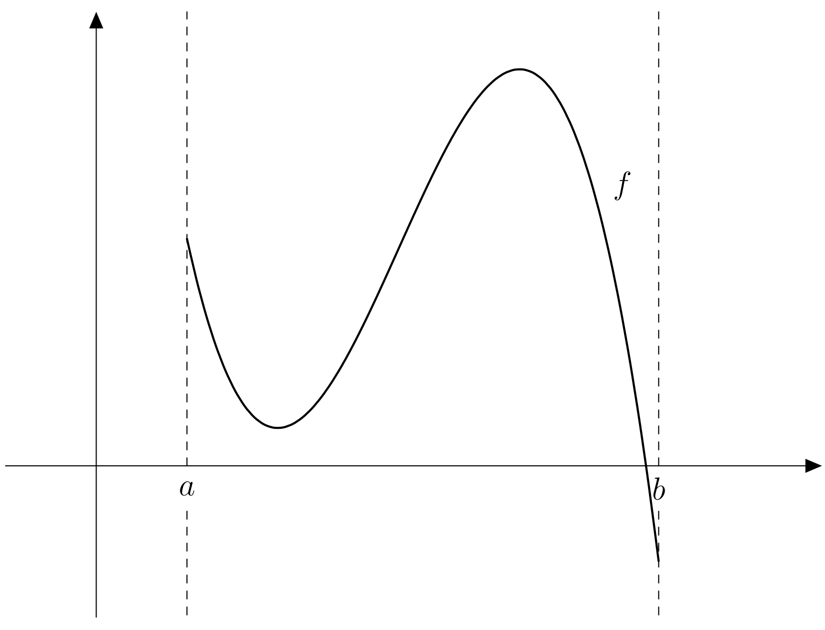
Wie sieht die Kurve einer gegebenen Funktion $f(x)$ aus? Um eine Funktion aufzeichnen zu können, hilft es,

1. die Nullstellen der Funktion sowie
2. die Minima und Maxima der Funktion

zu kennen. Wir wissen bereits, dass die Nullstellen bestimmt werden, indem die Funktion gleich Null gesetzt,

$$f(x) = 0\,,$$

und dann nach x aufgelöst wird. Wie sieht es aber mit den Minima, respektive den Maxima aus? Wir betrachten die folgende Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{D} = [a, b]$:



Wo liegen die Maxima und Minima? Gibt es unterschiedliche Typen von Maxima respektive Minima?

Definition (Extrema)

Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_{max} \in D$ ein **absolutes Maximum**, falls gilt

$$f(x_{max}) \geq f(x) \qquad \text{für alle } x \in D$$

und ein **absolutes Minimum** in $x_{min} \in D$, falls

$$f(x_{min}) \leq f(x) \qquad \text{für alle } x \in D.$$

Weiter hat die Funktion f an der Stelle x_{max} ein **relatives Maximum**, falls ein beliebig kleines (offenes) Intervall $I \subset D$ um x_{max} herum existiert (also $x_{max} \in I$), so dass

$$f(x_{max}) \geq f(x) \qquad \text{für alle } x \text{ im Intervall } I\,.$$

f hat ein **relatives Minimum** $x_{min} \in I$, falls

$$f(x_{min}) \leq f(x) \qquad \text{für alle } x \text{ im Intervall } I.$$

Zusammengefasst:

absolutes Maximum x_{max}	:	$f(x_{max})$	$\geq$	$f(x)$	für alle $x \in D$
absolutes Minimum x_{min}	:	$f(x_{min})$	$\leq$	$f(x)$	für alle $x \in D$
relatives Maximum x_{max}	:	$f(x_{max})$	$\geq$	$f(x)$	für alle $x \in I$
relatives Minimum x_{min}	:	$f(x_{min})$	$\leq$	$f(x)$	für alle $x \in I$

Minima und Maxima werden zusammen auch als **Extrema** oder **Extremalwerte** bezeichnet.

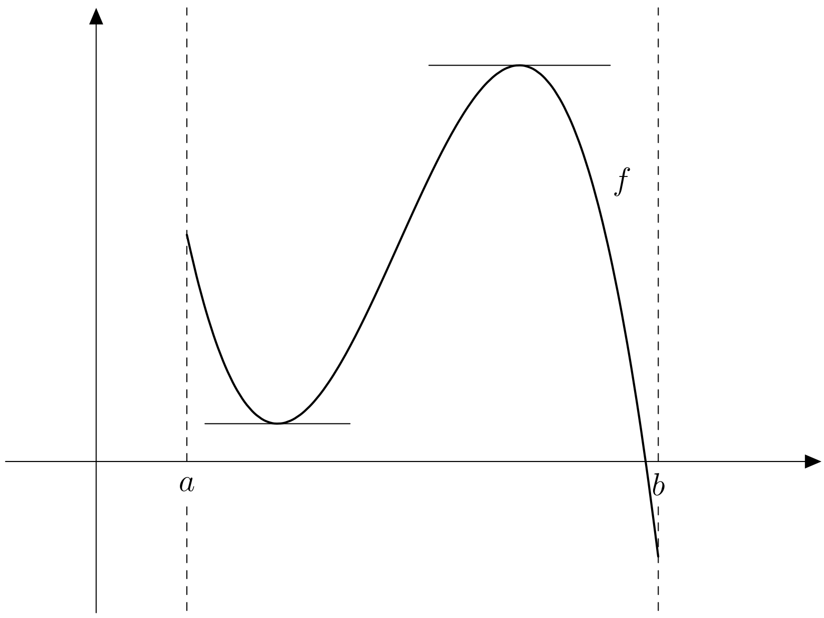
Bemerkung. Die relativen/absoluten Extrema werden auch **lokale/globale** Extrema genannt.

Theorem (Kriterien für Extrema)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$. Dann kann f nur Extremalwerte haben

1. an den Randpunkten a und b oder
2. falls $f'(x) = 0$.

Um dies einzusehen, betrachten wir wiederum die folgende Funktion



Die Randpunkte müssen immer extra betrachtet werden, da sie immer Extremalwerte sind. In diesem Fall ist a ein relatives Maximum, während b ein absolutes Minimum ist.

Wenden wir uns nun den Punkten innerhalb des Intervalls (a, b) zu, wobei wir uns im Moment nicht darauf konzentrieren, ob es sich um relative oder um absolute Extrema handelt.

Wir sehen, dass bei den Extrema die Steigung der Funktion gleich Null ist. Da die Steigung der ersten Ableitung entspricht, bedeutet dies

$$x_e \text{ Extremum der Funktion } f \quad \Rightarrow \quad f'(x_e) = 0.$$

Wie bestimmen wir nun aber, ob x_e ein Maximum oder ein Minimum ist? Betrachten wir nochmals unsere Funktion von oben:

Wir laufen nun von links nach rechts dem Graphen der Funktion entlang. Am Anfang ist die Steigung negativ, wir müssen den Berg hinunter laufen. Unten angekommen ist sie kurz gleich Null und danach wird sie positiv, wir laufen den Berg hinauf. Die Steigung wechselt somit *von negativ zu positiv*. Die Steigung entspricht aber der ersten Ableitung der Funktion. Dies bedeutet, dass die Ableitung immer grösser wird, sie also selbst eine positive Steigung hat. Die Ableitung der ersten Ableitung entspricht der zweiten Ableitung. Diese muss also positiv sein.

Beim Maximum ist die Situation gerade umgekehrt. Zuerst laufen wir den Berg hinauf zum Maximum, das heisst die erste Ableitung ist positiv. Danach gehts den Berg hinunter, also wird die erste Ableitung negativ. Da die erste Ableitung also immer kleiner wird, muss die zweite Ableitung negativ sein.
Sei x_e ein Extremum der Funktion f, also $f'(x_e) = 0$. Wir erhalten folgendes:

$$\boxed{\begin{array}{lll} f''(x_e) > 0 & \Rightarrow & x_e \text{ ist ein Minimum} \\ f''(x_e) < 0 & \Rightarrow & x_e \text{ ist ein Maximum} \end{array}}$$

Falls $f''(x_e) = 0$ gilt, können wir keine definitive Aussage machen, ohne dass wir noch weitere Ableitungen berechnen würden. Es ist sowohl möglich, dass x_e ein Maximum oder ein Minimum ist, aber auch, dass keines von beiden der Fall ist und bei x_e ein sogenannter **Sattelpunkt** (auch **Terrassenpunkt** genannt) vorkommt. Wir werden diesen Fall weiter unten betrachten.

Wollen wir nun noch bestimmen, ob es sich um ein absolutes oder ein relatives Extremum handelt, müssen wir die y-Koordinaten der oben berechneten Extremalwerte im Intervall (a, b) und die Funktionswerte $f(a)$ sowie $f(b)$ vergleichen. So können wir bestimmen, welcher von diesen Werten am grössten, respektive am kleinsten ist. Es können auch mehrere absolute Extrema auftreten, falls die Werte übereinstimmen.

Wir gehen also wie folgt vor, um die Extrema von f zu finden:

1. Berechne zunächst $f(a)$ und $f(b)$.

2. Berechne die Nullstellen x_e der Ableitung f' in (a, b).

3. Berechne die zweite Ableitung $f''(x)$ und setze jede Nullstelle x_e von f' in f'' ein. Durch vergleichen von $f''(x_e)$ mit 0 erfahren wir, ob f in x_e ein Minimum oder ein Maximum hat, oder ob keines von beidem der Fall ist.

4. Berechne alle Funktionswerte an den Stellen x_e, das heisst alle $f(x_e)$.

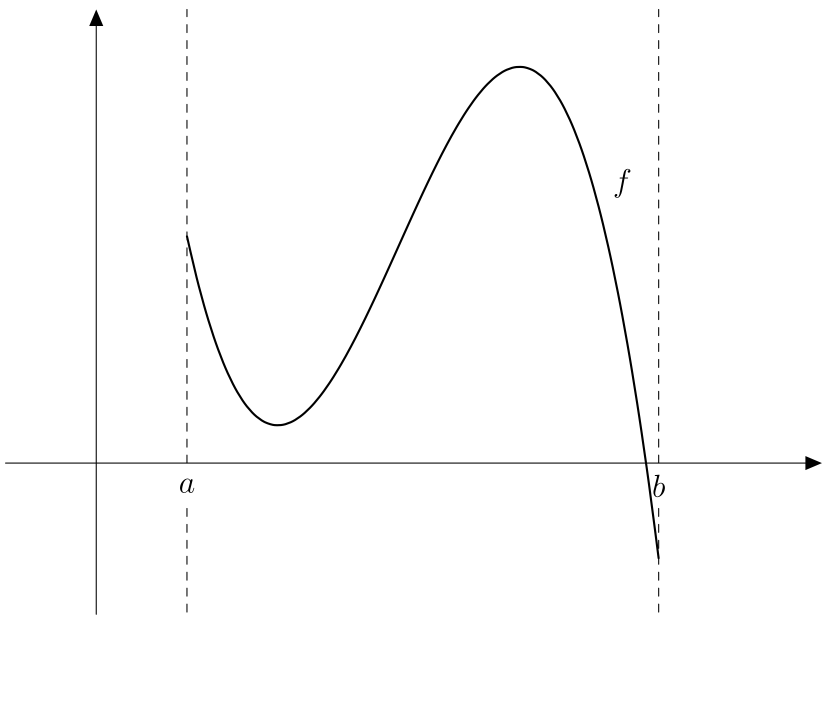
5. Vergleiche alle gefundenen Maxima und Minima in (a, b) – das heisst die $f(x_e)$ – miteinander sowie mit den Werten $f(a)$ und $f(b)$, um zu entscheiden, welche Extrema nur relativ sind und

welche absolut.

Bemerkung. Es ist bei dieser Diskussion wichtig, dass die Funktion überall differenzierbar ist. Ist dies nicht der Fall, funktioniert das Verfahren nicht mehr. So hat beispielsweise die Betragsfunktion in 0 ein absolutes Minimum, ist dort aber nicht differenzierbar ("Ecke"), also kann die Ableitung insbesondere nicht 0 sein. Ebenso gibt es Funktionen, die in den Randpunkten nicht differenzierbar und deren Randpunkte keine Extrema sind.

1.2 Wendepunkte

Um festzustellen, ob ein Extremum ein Maximum oder ein Minimum ist, haben wir die zweite Ableitung betrachtet. Welche geometrische Bedeutung hat die zweite Ableitung? Die erste Ableitung ist ein Mass dafür, wie steil die Kurve ist. Zudem gibt uns das Vorzeichen der Ableitung an, ob die Kurve steigend ist ($f' > 0$) oder fallend ($f' < 0$). Um die zweite Ableitung zu verstehen, betrachten wir nochmals den Graphen aus dem letzten Abschnitt.



Die Steigung ist zu Beginn negativ. Die Kurve wird immer weniger steil, d.h. die Steigung nimmt zu. (f' ist immer weniger negativ.) Die Steigung wird schliesslich Null und dann sogar positiv. Sie erreicht eine steilste Stelle. (f' ist hier am grössten.) Danach nimmt die Steigung wieder ab. Dort, wo die erste Ableitung immer grösser wird ($f'' > 0$), ist die Kurve eine **Linkskurve**. Wenn sie ansteigt, wird sie dabei immer steiler. Wenn sie hingegen fällt, so wird sie immer weniger steil. Dort, wo die erste Ableitung immer kleiner wird ($f'' < 0$), ist die Kurve eine **Rechtskurve**. Wenn sie also ansteigt, wird sie immer weniger steil. Wenn sie hingegen fällt, wird sie immer steiler. Die zweite Ableitung alleine sagt also nichts darüber aus, ob die Kurve steigend oder fallend ist.

Zusammengefasst:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f'' > 0 & \Rightarrow & \text{Kurve ist eine Linkskurve} \\ f'' < 0 & \Rightarrow & \text{Kurve ist eine Rechtskurve} \end{array}}$$

Wenn eine Rechtskurve zu einer Linkskurve wird – oder umgekehrt – , muss die Kurve "wenden". An diesen Wendepunkten muss gemäss der obigen Regel zwangsläufig $f'' = 0$ gelten. Wendepunkte sind jeweils die Punkte, an welchen die Kurve (zumindest lokal) am steilsten ist.

$$\boxed{x \text{ ist Wendepunkt} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 0}$$

Bemerkung. $f''(x) = 0$ ist eine **notwendige** Bedingung für einen Wendepunkt. D.h. an einem Wendepunkt ist die zweite Ableitung gleich Null. Es ist jedoch keine **hinreichende** Bedingung. Es ist also möglich, dass ein Punkt kein Wendepunkt ist, obschon die zweite Ableitung gleich Null ist, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$f(x) = x^4 \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = 12x^2 \quad \Longrightarrow \quad f''(0) = 0$$

0 ist aber ein Minimum und kein Wendepunkt. Ein ähnliches Phänomen haben wir schon bei den Extrema angetroffen. $f'(x) = 0$ ist notwendig (ausser bei den Randpunkten), aber nicht hinreichend für ein Extremum.

Um festzustellen, dass ein Punkt x_0 mit $f''(x_0) = 0$ tatsächlich ein Wendepunkt ist, kann man entweder überprüfen, dass f'' dort wirklich das Vorzeichen wechselt, indem man Punkte ein wenig rechts und links von x_0 in f'' einsetzt und das Vorzeichen vergleicht. Oder aber man zeigt, dass $f''' \neq 0$. (Dies bedeutet auch, dass f'' an ihrer Nullstelle x_0 wirklich das Vorzeichen ändert.)

Definition (Wendepunkte)

Ein **Wendepunkt**, der auch ein kritischer Punkt ist (d.h. $f'(x) = 0$), heisst **Sattelpunkt** (oder Terrassenpunkt).

Beispiel. Bestimme die Extremalwerte der Funktion $f(x) = x^3(x-1)^2$ im Intervall $[-1, 2]$.

1. $f(-1) = -4$ und $f(2) = 8$.

2. Erste Ableitung f':

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(x-1)^2 + x^3 \cdot 2(x-1) \\ &= x^2(3(x-1)^2 + 2x(x-1)) \\ &= x^2(x-1)(3(x-1) + 2x) \\ &= x^2(x-1)(5x-3); \end{aligned}$$

also sind $0, \frac{3}{5}$ und 1 Nullstellen von f'. Diese liegen alle im Interval $(-1, 2)$.

3. Zweite Ableitung $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x(x-1) + x^2)(5x-3) + x^2(x-1)5 \\ &= (2x^2 - 2x + x^2)(5x-3) + 5x^3 - 5x^2 \\ &= (3x^2 - 2x)(5x-3) + 5x^3 - 5x^2 \\ &= 15x^3 - 19x^2 + 6x + 5x^3 - 5x^2 \\ &= 20x^3 - 24x^2 + 6x \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0 \\ f''\left(\frac{3}{5}\right) &= 20 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 - 24 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{5^3} \cdot (20 \cdot 27 - 24 \cdot 9 \cdot 5 + 6 \cdot 3 \cdot 25) = -\frac{90}{125} < 0 \\ f''(1) &= 20 - 24 + 6 = 2 > 0 \end{aligned}$$

Also hat f in $\frac{3}{5}$ ein Maximum und in 1 ein Minimum. Was ist nun bei 0? Wir betrachten die Funktion f links und rechts von der Null. Sei ε eine ganz kleine Zahl > 0. Dann gilt:

$$f(-\varepsilon) < 0; \qquad f(\varepsilon) > 0$$

Also hat f *keinen* Extremwert in 0 (sondern einen Sattelpunkt).

4. Berechne die $f(x_e)$:

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = 0 \qquad f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3^3 \cdot 2^2}{5^5}$$

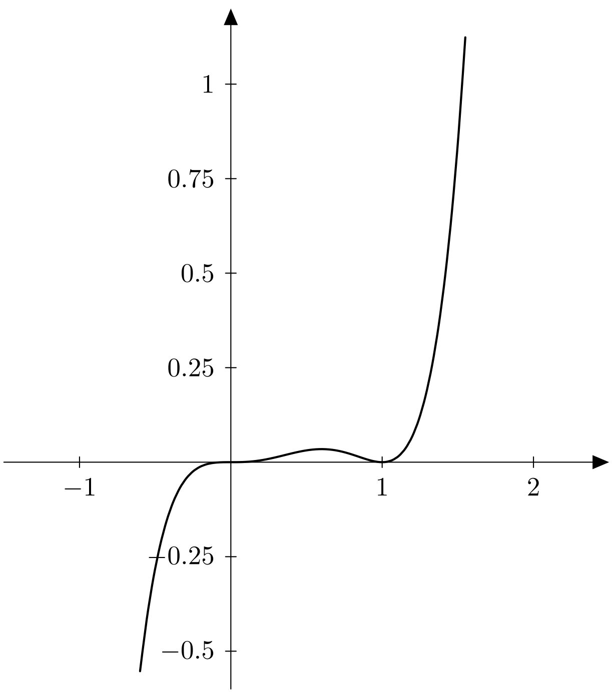
5. Vergleichen wir die gefundenen Extremalwerte in $(-1, 2)$ mit $f(-1)$ und $f(2)$, so sehen wir, dass diese nur relative Extrema sind, während $f(-1)$ und $f(2)$ absolute Extrema sind.

6. 0 ist ein Wendepunkt (siehe Punkt 3). Gibt es weitere Wendepunkte? Setze dazu $f'' = 0$

$$f''(x) = 20x^3 - 24x^2 + 6x \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0\,,\; x_2 = 0.36\,,\; x_3 = 0.84$$

Dass es sich tatsächlich um Wendepunkte handelt, zeigen wir, indem wir nachweisen, dass die dritte Ableitung nicht Null ist.

$$f'''(x) = 60x^2 - 48x + 6 \quad \Longrightarrow \quad f'''(0.36) \neq 0\,,\; f'''(0.84) \neq 0$$



1.3 Asymptotisches Verhalten

In der bisherigen Diskussion haben wir uns auf das Auffinden spezieller Punkte (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte) konzentriert. Eine weitere Frage, die sich im Zusammenhang mit der Kurvendiskussion stellt, ist die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Funktion. Was passiert, wenn man immer grössere Werte für x einsetzt? Oder anders ausgedrückt: Was ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$?
Die folgenden drei Beispiele illustrieren die unterschiedlichen Situationen, die bei dieser Fragestellung auftreten können.

1. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 1$ (Polynome)
2. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ (Rationale Funktionen)
3. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

Bei allen drei Beispielen entsteht das Problem dadurch, dass man nicht einfach ∞ für x einsetzen kann. Wenn man es ganz naiv einmal versucht, so erhält man wenig sinnvolle Ausdrücke wie $\infty - \infty$ oder $\frac{\infty}{\infty}$. Um das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ zu verstehen, muss man also die **Grenzwerte** untersuchen. Je nach Situation sind dabei andere Methoden und Überlegungen hilfreich. Grenzwerte sind mathematisch nicht ganz einfach. Wir werden uns daher hier auf anschauliche Überlegungen beschränken.

1. Polynome

Für Polynome gibt es eine einfache Regel:

Ein Polynom verhält sich asymptotisch wie seine höchste Potenz (mit Vorzeichen).

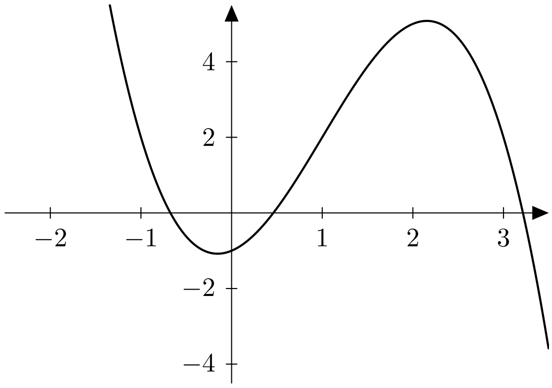
Für das obige Beispiel bedeutet das, dass sich $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 1$ asymptotisch wie $y = -x^3$ verhält, d.h.

$$\lim_{x\to\infty} -x^3 + 3x^2 + x - 1 = \lim_{x\to\infty} -x^3 = -\infty$$

Um zu verstehen, weshalb diese Regel gilt, formen wir das Polynom folgendermassen um:

$$-x^3 + 3x^2 + x - 1 = -x^3\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

Für sehr grosse (oder sehr negative) Werte von x wird der Ausdruck in der Klammer nahezu 1, da die Brüche jeweils sehr klein werden. Wir können nun schliessen, dass für sehr grosse (oder sehr negative) Werte das Polynom sich in gewisser Weise immer mehr der Funktion $y = -x^3$ annähert.



2. Rationale Funktionen

Eine rationale Funktion ist ein Bruch von Polynomen. Bei solchen Funktionen hilft ein Trick, um das asymptotische Verhalten zu verstehen. Wir kürzen den Bruch mit der höchsten Potenz von x:

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}}$$

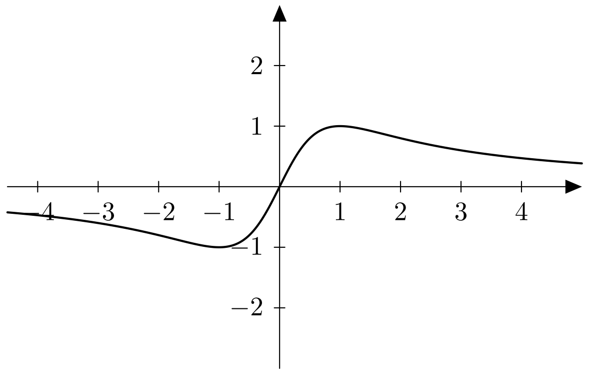
Wieder sieht man, dass alle die Brüche mit einer Potenz von x im Nenner für $x \to \pm\infty$ gegen Null gehen. Wiederum ist also nur die höchste Potenz von x relevant. Wir bezeichnen die höchste Potenz eines Polynoms $P(x)$ als seinen **Grad**, $\deg(P)$. Für die rationale Funktion $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sind somit folgende drei Fälle zu unterscheiden:

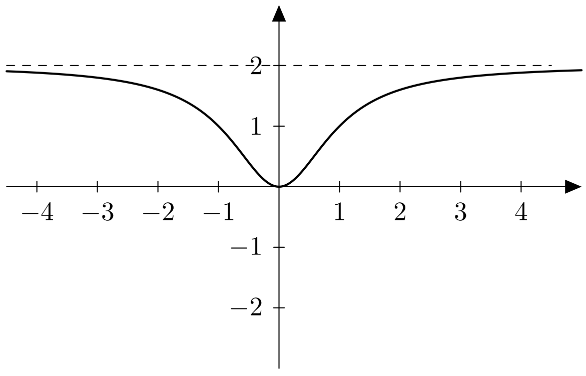
(a) $\deg(P) < \deg(Q)$:
In diesem Fall nähert sich die Funktion asymptotisch 0 an.
Beispiel:

$$\frac{2x}{x^2+1} = \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty$$

(b) $\deg(P) = \deg(Q)$:
In diesem Fall nähert sich die Funktion asymptotisch einem konstanten (endlichen) Wert an.
Beispiel:

$$\frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} \to 2 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty$$





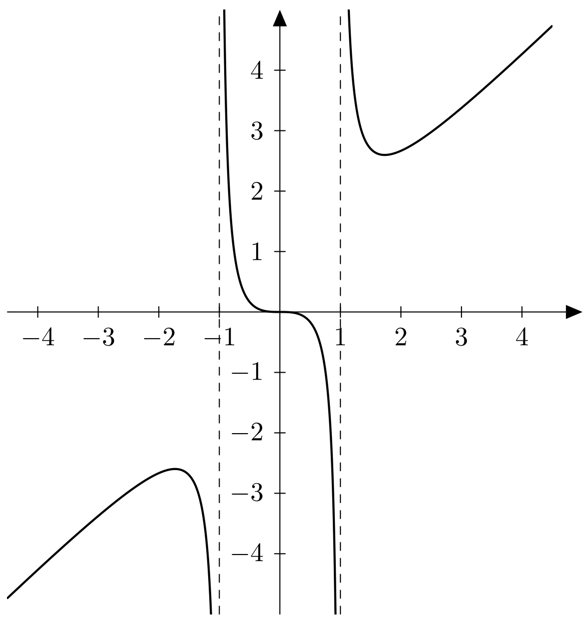
(c) $\deg(P) > \deg(Q)$:

In diesem Fall geht die Funktion für $x \to \pm\infty$ gegen ∞ oder $-\infty$. Welcher der beiden Fälle auftritt, hängt von den Vorzeichen von Zähler und Nenner ab.

Beispiel:

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} \to \infty \quad \text{für} \quad x \to \infty\ ,$$

da der Nenner (und somit der Bruch) für grosse Werte von x positiv ist. Analog geht man für $x \to -\infty$ vor. Tatsächlich kann man noch genauere Aussagen machen, indem man eine Asymptote bestimmt. Wir lassen diese Diskussion hier aber weg. (Siehe Unterlagen vom Mittwoch; Polynomdivision.)



Dieses letzte Beispiel zeigt, dass bei rationalen Funktionen noch eine andere Art von asymptotischem Verhalten vorkommen kann. Bei den Nullstellen des Nenners (d.h. $x = -1$ und $x = 1$) ist die Funktion nicht definiert. Würde man $x = 1$ einsetzen, so erhielte man den unbestimmten Ausdruck $\frac{1}{0}$. Es ist also wieder ein Grenzwert gesucht, der diesem Ausdruck Sinn verleiht.

Da $x = 1$ keine Nullstelle des Zählers ist, was ja zum Ausdruck $\frac{0}{0}$ führen würde (siehe nächster Abschnitt), liegt die Vermutung nahe, dass die Funktion für $x \to 1$ gegen ∞ geht. Im Gegensatz zur bisherigen Diskussion (Grenzwerte für $x \to \infty$) kann man die Definitionslücke aber von *zwei* Seiten annähern. In der Tat zeigt der Graph oben, dass die Funktion links von der Lücke $x = 1$ gegen $-\infty$ und rechts davon gegen ∞ konvergiert. Man muss also unterscheiden, ob man sich der Lücke von links oder von rechts nähert. Entscheidend ist dabei das Vorzeichen. Setzt man beispielsweise für x einen Wert ein, der ein kleines bisschen grösser ist als 1, so sind sowohl Zähler als auch Nenner – und somit der ganze Ausdruck – positiv. Das bedeutet aber, dass die Funktion von rechts gegen $x = 1$ kommend gegen ∞ geht (wie auch der Graph zeigt). Man schreibt dafür

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty.$$

Mit analogen Überlegungen findet man auch

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty.$$

3. Die Regeln von de l'Hôpital

Im dritten Beispiel ist folgender Grenzwert gesucht:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$$

Da sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen ∞ konvergieren, führt naives "Einsetzen" wiederum zum unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$. Die Diskussion der rationalen Funktionen hat nun aber gezeigt, dass dieser Ausdruck als Grenzwert aufgefasst alles Mögliche sein kann, 0, eine endliche Zahl, aber auch ∞. Der Trick mit dem Kürzen funktioniert hier nicht mehr. Folgender Satz liefert aber das nötige Werkzeug, um solche Fälle zu untersuchen.

Theorem (Regel von de L'Hôpital)

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, wobei $a, b \in [-\infty, \infty]$. Falls

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

oder

(ii) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (oder $-\infty$)

und der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so gilt

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Analoge Aussagen gelten für b.

Anschaulich ist es einleuchtend, dass diese beiden Grenzwerte übereinstimmen sollten. Denn *in der Nähe eines Punktes* wird die Funktion sehr gut durch ihre Tangente (oder eben die Ableitung) angenähert. Zoomt man lange genug hinein, ist der Unterschied von blossem Auge nicht mehr zu erkennen. Es ist daher naheliegend, dass das Verhältnis zweier Funktionen nahezu gleich dem Verhältnis ihrer Ableitungen ist – in der Nähe eines Punktes! Somit sind die beiden Grenzwerte, wie im obigen Satz formuliert, gleich. Vorsicht: Es handelt sich dabei aber nicht um die Ableitung des Bruches der beiden Funktionen.
Wir illustrieren nun das Vorgehen anhand zweier Beispiele.

Beispiel. Wir möchten $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$ berechnen. Sowohl Nenner wie auch Zähler konvergieren für $x \to \infty$ gegen unendlich. Formal erhalten wir $\frac{\infty}{\infty}$. Mit der Regel von de L'Hôpital folgern wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}.$$

Dies ist formal immer noch ein Term der Form $\frac{\infty}{\infty}$. Wenden wir die Regel nochmals an, so ergibt dies

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Beispiel. Hat $\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}$ in $x = 0$ eine Polstelle oder lässt sich die Funktion dort fortsetzen? Mit der Regel von de L'Hôpital berechnen wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = 0\,.$$

Also handelt es sich um keine Polstelle.

Mit der Regel von de l'Hôpital lassen sich die folgenden Grenzwerte bestimmen. Für jede positive Zahl $r > 0$ gelten:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^r}{e^x} & = & 0 \\[2ex] \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^r} & = & 0 \end{array}}$$

In Worten bedeutet dies, dass die Exponentialfunktion schneller und die Logarithmusfunktion langsamer wächst als jede Potenzfunktion.

Zum Abschluss dieses Kapitels führen wir nochmals eine Kurvendiskussion durch, diesmal mit der Bestimmung des asymptotischen Verhaltens.

Beispiel. Diskutiere die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

auf ganz $\mathbb{R}$.

1. Da wir die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ betrachten, haben wir keine Funktionsgrenzen wo Extrema auftreten können.

2. Erste Ableitung $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= \frac{1-x}{e^x} \end{aligned}$$

   Somit hat f' nur an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle.

3. Zweite Ableitung $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= \frac{-1-(1-x)}{e^x} = \frac{x-2}{e^x} \end{aligned}$$

   Somit ist $f''(1) = -\frac{1}{e^1} < 0$ und somit hat die Funktion in 1 ein Maximum.

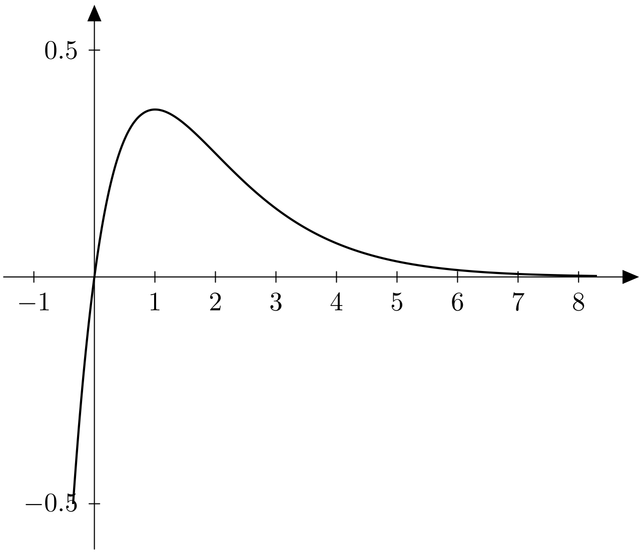
4. Die Funktion f hat in 1 ein absolutes Maximum (siehe asymptotisches Verhalten).

5. $f''(x) = 0$ hat die einzige Lösung $x = 2$. Da f'' dort das Vorzeichen wechselt, ist $x = 2$ ein Wendepunkt.

6. Es gelten

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} &= 0 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} &= -\infty \end{aligned}$$

Der erste Grenzwert folgt mit der Regel von de L'Hôpital, der zweite, da der Zähler gegen $-\infty$ geht und der Nenner gegen 0, wobei der Nenner immer positiv ist.



2 Optimierungsprobleme

In diesem Kapitel diskutieren wir eine Klasse von Problemen, die wir mit den bisher entwickelten Methoden lösen können. In vielen Situationen ist es von besonderem Interesse, eine Konfiguration zu finden, bei welcher eine bestimmte Grösse optimal ist: minimal oder maximal. Diese Grösse kann der Profit einer Firma sein, die Menge Blech bei der Produktion einer Dose oder aber auch die Zeit, welche ein Lichtstrahl von einem Punkt im Raum zu einem anderen braucht.
Mathematisch gesprochen geht es bei solchen Aufgaben darum, das Maximum oder das Minimum einer Funktion zu berechnen. Es ist jedoch ein wichtiger Bestandteil solcher Probleme, diese Funktion selbst zu bestimmen. Diese Funktionsbestimmung besteht aus zwei Schritten. Zuerst stellt man eine Formel auf, die die zu optimierende Grösse beschreibt, die sogenannte **Zielfunktion**. Es ist die Antwort auf die Frage: 'Was soll optimal sein?' Besteht die Aufgabe zum Beispiel darin, ein Rechteck mit maximaler Fläche bei gegebenem Umfang zu bestimmen, so ist die Zielfunktion die Fläche:

$$A = xy \quad \longrightarrow \quad \text{max.}$$

Offensichtlich hängt die Zielfunktion von zwei Variablen ab, der Länge x und der Breite y. An dieser Stelle ist nun nicht klar, wie man den maximalen Wert von A bestimmen soll. Dies ist konsistent mit der Tatsache, dass die Aufgabe, ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt zu bestimmen, so nicht wohl gestellt ist. Nur die zusätzliche Bedingung, dass der Umfang gegeben ist, z.B. 10 cm, macht solch ein Problem lösbar. Eine solche zusätzliche Bedingung nennt man **Nebenbedingung**, es ist eine Gleichung, die die Variablen der rechten Seite der Zielfunktion zueinander in Beziehung setzt. Damit lässt sich dann (wie bei einem Gleichungssystem) eine der Variablen eliminieren. Allgemein formuliert sagt uns die Nebenbedingung, wo man nach der optimalen Lösung suchen muss, indem die Menge der zulässigen Lösungen eingeschränkt wird. In unserem Beispiel sagt uns die Nebenbedingung, dass nicht jedes Rechteck zulässig ist, sondern nur diejenigen Rechtecke mit dem vorgegebenen Umfang. Als Gleichung formuliert bedeutet dies

$$2x + 2y = 10 \quad \Longrightarrow \quad y = 5 - x \quad \Longrightarrow \quad A = x(5-x) = -x^2 + 5x \quad \longrightarrow \quad \text{max.}$$

Nun haben wir eine Zielfunktion, die nur von einer Variablen abhängt: $A(x)$. Damit besteht die Aufgabe nun einfach darin, das Maximum der Funktion A zu bestimmen, wobei $x \in \; [0,5]$ gelten muss. Denn andererseits wird der Ausdruck für die Fläche negativ. An den Randpunkten gilt, $A(0) = A(5) = 0$, woraus folgt, dass das Maximum in einer Stelle mit Ableitung gleich Null ist. Also gilt:

$$A' = -2x + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2.5 \in [0,5]$$

Der Graph von A ist eine nach unten geöffnete Parabel. Daher muss an der Stelle mit Ableitung Null tatsächlich ein Maximum sein. Damit ist das Rechteck mit maximaler Fläche bei Umfang 10

cm ist ein Quadrat mit Seitenlänge 2.5 cm.

Fassen wir also nochmals zusammen:

1. **Zielfunktion**: Bestimme eine Formel, die die zu optimierende Grösse beschreibt.
2. **Nebenbedingung**: Finde so viele Gleichungen, die die Variablen in der Zielfunktion zueinander in Beziehung setzen, wie es braucht, um alle bis auf eine Variable eliminieren zu können. Drücke dann die Zielfunktion als Funkion einer Variablen aus und vereinfache soweit wie möglich.
3. **Absolutes Extremum**: Bestimme das absolute Maximum im Definitionsbereich, welcher durch das Problem vorgegeben ist (z.B. sind geometrische Grössen nie negativ). Zeige schliesslich, dass das gefundene Optimum vom gewünschten Typ ist (Maximum, Minimum).
4. **Frage beantworten**: Lese die Aufgabe nochmals durch und beantworte die gestellte Frage.

Die folgenden Beispiele illustrieren typische Nebenbedingungen und Tricks, wie man solche Optimierungsprobleme löst.

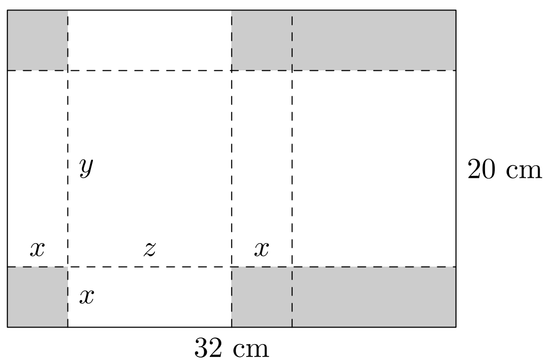
Beispiel. Bestimmen Sie Breite, Länge und Höhe der Schachtel (ohne Deckel) mit maximalem Volumen, welche aus einem rechteckigen Stück Karton mit Grössen wie in der Figur rechts gefaltet werden kann.

Zielfunktion: $V = xyz \longrightarrow$ max.
Nebenbedingungen: $y = 20 - 2x$, $z = 16 - x$

Daher gilt

$V = x(20 - 2x)(16 - x) = 2x^3 - 52x^2 + 320x$

mit dem Definitionsbereich $D = [0, 10]$.



Beachte, dass die Randpunkte $x = 0$ und $x = 10$ zu flachen 'Schachteln' ohne Volumen führen. Wir bestimmen nun das Maximum der Funktion V:

$$V' = 6x^2 - 104x + 320 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 4\,,\; x_2 = \frac{40}{3} \notin D$$

Der einzige zulässige Kandidat ist somit $x = 4$. Wegen

$$V'' = 12x - 104 \quad \Longrightarrow \quad V''(4) < 0$$

ist dies auch tatsächlich ein Maximum. Da das Volumen für die Randwerte $x = 0$ und $x = 10$ jeweils Null ist, ist $x = 4$ das absolute Maximum. Die Schachtel hat also die Dimensionen $x = 4$ cm, $y = 12$ cm, $z = 12$ cm.

Beispiel. Bestimmen Sie die Höhe des Kegels mit maximalem Volumen, dessen Mantellinie 9 cm lang ist.

Zielfunktion: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h \longrightarrow$ max.
Nebenbedingung: $r^2 = 9^2 - h^2 = 81 - h^2$ (Pythagoras)

Daraus folgt

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi(81 - h^2)h = \frac{1}{3} \cdot \pi(81h - h^3)$$

mit Definitionsbereich $D = [0, 9]$. Wiederum sind die Randpunkte mit Sicherheit nicht optimal, da der Kegel für diese Werte entartet ist (eine Kreisscheibe $h = 0$ und eine Strecke für $h = 9$), das Volumen ist also Null. Somit muss das Maximum an einer Stelle mit Ableitung gleich Null zu finden sein:

$$V' = \frac{1}{3} \cdot \pi(81 - 3h^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_{1,2} = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$$

Nur die positive Lösung liegt im Definitionsbereich. Ausserdem zeigt eine kurze Rechnung mit der zweiten Ableitung, dass es tatsächlich ein Maximum ist:

$$V'' = -2\pi h \quad \Longrightarrow \quad V''(\sqrt{27}) < 0$$

Somit ist die Höhe des gesuchten Kegels $h = 3\sqrt{3}$ cm.

Wenn man die Nebenbedingung nach einer Variablen auflöst, so muss man entscheiden, nach welcher Variable man auflösen will. Grundsätzlich spielt es keine Rolle, wie man sich entscheidet. Das Resultat ist unabhängig von dieser Wahl. Die Rechnungen, die dahin führen, hingegen können je nach Wahl sehr unterschiedlich kompliziert werden. Im obigen Beispiel haben wir nach r^2 aufgelöst, da dieser Ausdruck in der Zielfunktion auftaucht. Hätten wir die Nebenbedingung stattdessen nach h aufgelöst, dann wäre die Zielfunktion als Funktion von r wesentlich komplizierter: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{81 - r^2}$. In anderen Fällen sind die Rechnungen ähnlich für jede Wahl, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel. Gegeben ist ein gerader Kreiskegel mit Radius $R = 3\ \mathrm{cm}$ und Höhe $H = 6\ \mathrm{cm}$. Bestimmen Sie die Höhe h des Zylinders mit maximalem Volumen, der dem Kegel einbeschrieben ist.

Zielfunktion: $V = \pi r^2 h \ \longrightarrow$ max.
Nebenbedingung: $r : R = (H - h) : H$, d.h., $r : 3 = (6 - h) : 6$ (Strahlensatz oder Ähnlichkeit)

Wir lösen die Nebenbedingung nach r auf:

$$r = \frac{6-h}{2} \quad \Longrightarrow \quad V = \pi h \left(\frac{6-h}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}h^3 - 3\pi h^2 + 9\pi h \ \longrightarrow \ \text{max.}$$

Der Definitionsbereich ist $D = [0, 6]$, und wiederum sind die Randwerte sicherlich keine Maxima, da sie entarteten Zylindern ohne Volumen entsprechen. Somit muss das Maximum an einer Stelle mit Ableitung gleich Null liegen.

$$V' = \frac{3\pi}{4}h^2 - 6\pi h + 9\pi = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3h^2 - 24h + 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_1 = 2\,,\ h_2 = 6$$

Wie oben bemerkt, ist h_2 kein Maximum, da das entsprechende Volumen Null ist. Wir berechnen die zweite Ableitung, um zu zeigen, dass h_1 ein Maximum ist:

$$V'' = \frac{3\pi}{2}h - 6\pi \quad \Longrightarrow \quad V''(2) = -3\pi < 0$$

Dies zeigt, dass der optimale Zylinder die Höhe $2\ \mathrm{cm}$ hat.

Wir lösen das Problem nun ein zweites Mal. Wenn wir die Nebenbedingung nach h statt nach r auflösen, erhalten wir

$$h = 6 - 2r \quad \Longrightarrow \quad V = \pi r^2(6 - 2r) = -2\pi r^3 + 6\pi r^2 \ \longrightarrow \ \text{max.}$$

In diesem Fall ist der Definitionsbereich $D = [0, 3]$. Und wieder können wir die Randpunkte vernachlässigen. Also folgt

$$V' = -6\pi r^2 + 12\pi r = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = 0\,,\ r_2 = 2$$

Nur r_2 ist ein möglicher Kandidat für das Maximum. Wir überspringen hier die Rechnung, die zeigt, dass es tatsächlich ein Maximum ist. Schliesslich folgt $h = 6 - 2r_2 = 2$, was – wie erwartet – dasselbe Resultat ist, wie bei der ersten Rechnung.

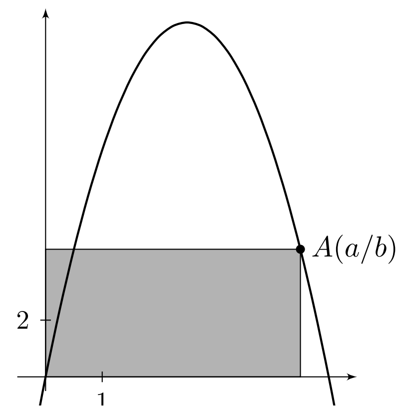
Beispiel. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 10x - 2x^2$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $A(a/b)$ im ersten Quadranten, sodass der Umfang des Rechtecks (siehe Figur unten) maximal ist.

Zielfunktion: $U = 2a + 2b \longrightarrow$ max.
Nebenbedingung: $b = 10a - 2a^2$

Daraus folgt

$$U = 2a + 2(10a - 2a^2) = -4a^2 + 22a$$

mit dem Definitionsbereich $D = [0, 5]$, wobei der linke Randpunkt $a = 0$ auf den Umfang $U = 0$ führt, was sicherlich kein maximum ist. Der rechte Randpunkt mit $U(5) = 10$ kann nicht ohne Weiteres vernachlässigt werden. Er muss noch mit den anderen Kandidaten verglichen werden.



Wir berechnen nun das Maximum. Da U eine quadratische Funktion ist (mit negativen Koeffizient beim quadratischen Term), liegt das Maximum beim Scheitelpunkt. (Aber Vorsicht, es handelt sich nicht um die Funktion f, die in der Figur oben eingezeichnet ist.) Die Nullstellen von U sind

$$-4a^2 + 22a = 2a(-2a + 11) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 0\,,\ a_2 = 5.5$$

Somit ist die a-Koordinate des Scheitelpunktes $a = 2.75$. Wegen $U(2.75) = 30.25 > 10$ ist dies auch das absolute Maximum. Tatsächlich wäre das in unserem Fall auch ohne Vergleich mit dem Randpunkt klar gewesen. Denn für eine nach unten geöffnete Parabel gilt, dass ihr (absolutes) Maximum immer im Scheitelpunkt angenommen wird, sofern dieser im betrachteten Definitionsbereich liegt, was hier der Fall ist. Insgesamt können wir folgern, dass der gesuchte Punkt $A(2.75/30.25)$ ist.

Wir haben bisher lauter Beispiele betrachtet, bei welchen die Zielfunktion ein Polynom war, um die Rechnungen nicht unnötig kompliziert zu machen. Ist die nicht der Fall, werden die Berechnung der Ableitung und das Auflösen der Gleichung komplizierter. Das grundsätzliche Vorgehen bleibt gleich. Das folgende Beispiel illustriert noch einen Trick, den man in einigen Fällen anwenden kann, um die Zielfunktion zu vereinfachen.

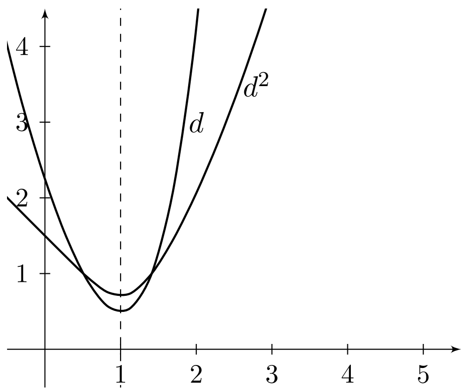
Beispiel. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0.5x^2$. Welcher Punkt $Q(x/y)$ auf dem Graphen von f hat die kürzeste Distanz zum Punkt $P(1.5/0)$?

Zielfunktion: $d = \sqrt{(1.5-x)^2 + y^2} \longrightarrow$ min.
Nebenbedingung: $y = 0.5x^2$

Daraus folgt

$$d = \sqrt{(1.5-x)^2 + (0.5x^2)^2} = \sqrt{0.25x^4 + x^2 - 3x + 2.25} \longrightarrow \text{min.}$$

Eine hilfreiche Beobachtung ist nun, dass d für denselben x-Wert minimal wird, der auch d^2 minimiert. Der Grund dafür ist, dass bei zwei positiven Zahlen a und b mit $a < b$ auch $a^2 < b^2$ (und umgekehrt) gilt. (Ist eine der beiden Zahlen negativ, so trifft dies nicht mehr zu: $-2 < 1$, aber $(-2)^2 > 1^2$.) In unserer Situation bedeutet dies, dass d zu minimieren zum selben Resultat führt, wie wenn man d^2 minimiert. Dies wird klar, wenn man die Graphen von d und d^2 vergleicht.



Wir können nun also mit der neuen Zielfunktion d^2 arbeiten:

$$d^2 = 0.25x^4 + x^2 - 3x + 2.25 \longrightarrow \text{min.}$$

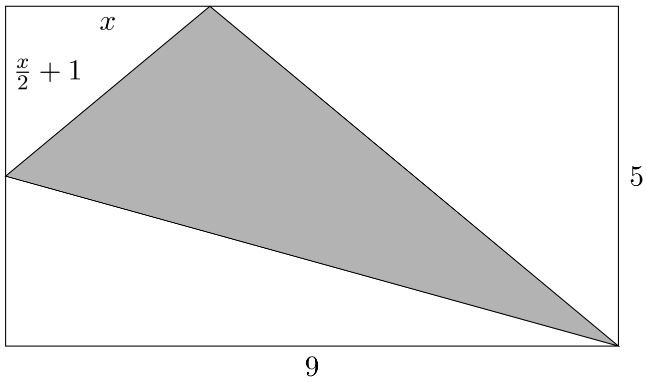
Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$. Es gibt also keine Randpunkte.

$$(d^2)' = x^3 + 2x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

Wegen $(d^2)'' = 3x^2 + 2 > 0$ ist dies ein Minimum. Der Punkt Q hat also die Koordinaten $Q(1/0.5)$.

In allen bisherigen Beispielen konnten wir die Randpunkte ignorieren, da das Extremum nie am Rand des Definitionsbereichs lag. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. In einem letzten Beispiel wollen wir also eine Situation betrachten, wo das Extremum am Randliegt.

Beispiel. Das Rechteck hat die Seitenlängen 5 und 9. Bestimmen Sie x, sodass das schattierte Dreieck maximalen Flächeninhalt hat.



Wir können die Zielfunktion direkt hinschreiben als Funktion von x (die graue Fläche ist die Fläche des Rechtecks ohne die Fläche der weissen Dreiecke):

$$A = 45 - \frac{1}{2}\cdot 5\cdot(9-x) - \frac{1}{2}\cdot x\left(\frac{x}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\cdot 9\left(5-\left(\frac{x}{2}+1\right)\right) = -\frac{x^2}{4} + \frac{17x}{4} + \frac{9}{2} \longrightarrow \text{max.}$$

Der Definitionsbereich ist $D = [0,8]$. Die Randwerte sind: $A(0) = 4.5$, $A(8) = 22.5$. Weiter gilt

$$A' = -\frac{x}{2} + \frac{17}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 8.5 \notin D$$

Da der Scheitelpunkt der quadratischen Zielfunktion nicht im Definitionsbereich liegt, muss das Maximum am Rand angenommen werden: $x = 8$.

Zum Abschluss dieses Kapitels listen wir nochmals die verschiedenen (geometrischen) Formeln auf, die wir als Nebenbedingungen verwendet haben.

1. Formeln für Volumen, Fläche, etc.
2. Pythagoras
3. Strahlensatz, Ähnlichkeit
4. Funktionsgleichung

Alle unsere Beispiele waren geometrische Probleme. In der Vorlesung werden im zweiten Block einige Beispiele von Optimierungsproblemen vorgestellt, in welchen nicht eine geometrische Grösse optimiert werden soll (wenn auch dort oft geometrische Überlegungen hineinspielen).