Universität Zürich, 7. - 11. September 2009

Vorkurs Grundlagen für das Mathematikstudium

Übungsblatt 1: Algebra

Aufgabe 1 Finde die zweite Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 10x + 21 = 0$ (siehe Beispiel auf Seite 2 im Skript) mit Hilfe geometrischer Überlegungen.

Aufgabe 2 Finde das Polynom $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, welches für $x = m$ den Wert $1^3 + 2^3 + \cdots + m^3$ hat. Ähnlich, betrachte die Polynome mit den entsprechenden Werten $1^q + 2^q + \cdots + m^q$ für $q = 1, 2, 3, 4, 5$. Was fällt auf?

Aufgabe 3 Johannas Katze niest immer bevor es regnet. Heute hat sie geniest. "Also wird es regnen", denkt Johanna. Hat sie recht?

Aufgabe 4 Verneine die folgenden Aussagen:

a) Alle Frauen sind schön.

b) Es gibt keine reelle Zahl x mit $\sqrt{x} = -1$.

c) Es gibt eine rationale Zahl q mit $q^2 = 2$.

Aufgabe 5 "Meiers werden uns heute abend besuchen", kündigt Frau Müller an. "Die ganze Familie, also Herr und Frau Meier mit ihren drei Kindern Franziska, Kathrin und Walter?" fragt Herr Müller bestürzt. Darauf Frau Müller, die keine Gelegenheit vorübergehen lässt, ihren Mann zu logischem Denken anzuregen: "Nun, ich will es dir so erklären: Wenn Herr Meier kommt, dann bringt er auch seine Frau mit. Mindestens eines der beiden Kinder Walter und Kathrin kommt. Entweder kommt Frau Meier oder Franziska, aber nicht beide. Entweder kommt Franziska und Kathrin oder beide nicht. Und wenn Walter kommt, dann auch Kathrin und Herr Meier. So, jetzt weisst du, wer uns heute abend besuchen wird."
Wer kommt und wer kommt nicht?

Aufgabe 6 Dem bekannten französischen Forscher E.R. Reur ist es endlich gelungen, die erste These der Julirevolution ("Alle Menschen sind gleich") wissenschaftlich zu beweisen. Ist nämlich M eine Menge mit endlich vielen Elementen, so gilt $a = b$ für $a, b \in M$.
Beweis durch Induktion:

(i) Induktionsanfang: Hat M genau ein Element, $M = \{a\}$, so ist die Aussage richtig.

(ii) Induktionsschluss: (α): Die Aussage sei richtig für alle Mengen mit genau n Elementen. (β): Es sei M' eine Menge mit genau $n+1$ Elementen. Für $b \in M'$ sei $N := M' \setminus \{b\}$. Die Elemente von N sind nach (α) einander gleich. Es bleibt zu zeigen: $b = c$, wenn $c \in M'$. Dazu entfernt man ein anderes Element d aus M' und weiss dann: $b \in M' \setminus \{d\}$. Die Elemente dieser Menge sind nach (α) wiederum einander gleich. Wegen der Transitivität der Gleichheitsbeziehung folgt dann die Behauptung.

Was ist falsch an diesem Schluss?

Aufgabe 7 Folgende Identitäten sind durch vollständige Induktion zu verifizieren:

a) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$.

Extra-Aufgaben

a) Peter hat gesagt: "Vorgestern war ich 10, aber im nächsten Jahr werde ich 13." Ist das möglich?

b) Drei Schildkröten krabbeln auf einer geraden Strasse in dieselbe Richtung. "Zwei Schildkröten sind hinter mir", sagt die erste Schildkröte. "Eine Schildkröte ist hinter mir und eine vor mir", sagt die zweite. "Zwei Schildkröten sind vor mir und eine ist hinter mir", sagt die dritte Schildkröte. Wie ist das möglich?