

VORKURS MATHEMATIK, ÜBUNGEN

MONTAG

Block 1

1. Berechnen Sie von Hand:

$$\text{a) } ((4/3 + 5/2) \cdot 6/5) - 2/5 \quad \text{und} \quad \text{b) } \frac{2}{9} : \left(\frac{17}{18} - \frac{2}{9} \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{14} \right) \right) + \frac{15}{2}$$

2. Berechnen Sie von Hand:

$$\text{a) } \frac{1}{\left(\frac{2}{(3/4)} \right)} \quad \text{b) } \frac{1}{\left(\frac{(2/3)}{4} \right)} \quad \text{c) } \frac{\left(\frac{1}{2} \right)}{\left(\frac{3}{4} \right)}$$

3. Zu welchen Zahlenmengen (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}) gehören:

$$\text{a) } \pi \quad \text{b) } \sqrt{2} \quad \text{c) } \sqrt[4]{1} \quad \text{d) } \frac{(-100) \cdot (-99) \cdot (-98) \cdot (-97)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} ?$$

4. Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl 0.7333... in einen Bruch um!

5. Vereinfachen Sie:

$$\text{a) } (4a - 3b)(a + 2b)(5a + 6b) \quad \text{b) } 1 - x(1 - x(1 - x(1 - x(1 - x(1 - x))))$$

$$\text{c) } (4ax - 3by)(4ax + 3by) - 16(ax + by)^2 \quad \text{d) } -(u - 1)(2u - 1)(3u - 1) - 1 + 6u(u^2 - u + 1)$$

6. Eliminieren Sie die Klammern (*Tipp: Binomische Formeln für höhere Potenzen*):

$$\text{a) } (x + y)^7 \quad \text{b) } (-m + 10)^5$$

7. Zerlegen Sie (vollständig und so weit wie möglich!) in Faktoren.

$$\text{a) } 42ab - 56bd - 48ac + 64cd \quad \text{b) } x^4 - x^3 - 12x^2 \quad \text{c) } 2(r + 2)(3r + 1) - 5(r + 2)^2$$

$$\text{d) } 256n^3 - 4 \quad \text{e) } r^4 - 3r^2 + 1 \quad \textit{Tipp: Versuchen Sie's mit einem Trick}$$

8. Kürzen Sie die folgenden Bruchterme so weit wie möglich:

$$\text{a) } \frac{a-5}{5-a} \quad \text{b) } \frac{4xy-20}{30-6xy} \quad \text{c) } \frac{3x+3}{2x^3+2} \quad \text{d) } \frac{9x^2-12xy+4y^2}{12x^2-11xy+2y^2}$$

9. Erweitern Sie die folgenden Brüche:

$$\text{a) } \frac{2a}{3b} = \frac{?}{15ab} \quad \text{b) } \frac{9x}{7y} = \frac{?}{7ay-7by} \quad \text{c) } \frac{a-3b}{3x-1} = \frac{?}{2-6x}$$

10. *Zeigen Sie: Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\frac{m^3}{6} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{3}$ eine ganze Zahl. Hinweis: Klammern Sie aus!

Block 2

1. Brüche addieren / subtrahieren

$$\text{a) } \frac{4x-5y}{2x} - \frac{5x-5y}{2x}$$

$$\text{b) } \frac{a}{a+b} - 1$$

$$\text{c) } \frac{7}{x-1} + \frac{6}{1-x}$$

$$\text{d) } \frac{5a-b}{a^2b} - \frac{3a+b}{ab^2} - \frac{4a^2-7ab-b^2}{a^2b^2}$$

$$\text{e) } \frac{2x}{x^2-y^2} - \frac{2y}{y^2-x^2}$$

$$\text{f) } \frac{a-2}{(a-4)^2} - \frac{a-2}{a^2-7a+12}$$

2. Brüche multiplizieren / dividieren

$$\text{a) } \frac{4m-8n}{ax+3ay} \cdot \frac{2bx+6by}{6n-3m}$$

$$\text{b) } (5a+5b) : \frac{a^2-b^2}{15xy}$$

$$\text{c) } \frac{c-2d}{5x} : (2d-c)$$

3. Vermischtes

$$\text{a) } \left(x - \frac{y}{x}\right) \cdot \left(x + \frac{y}{x}\right)$$

$$\text{b) } \frac{21a^2b}{10c^2} : \left(\frac{5ab}{3c} + \frac{ab}{5c}\right)$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot (x-y) + (x+y) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

4. Doppelbrüche

$$\text{a) } \frac{a}{a - \frac{a}{1 + \frac{1}{a}}} =$$

$$\text{b) } \frac{\frac{x-y}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{(x-y)^2}{4xy} + 1} =$$

5. Machen Sie den Nenner wurzelfrei und vereinfachen Sie:

$$\text{a) } \frac{6}{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}$$

$$\text{b) } * \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

6. Berechnen Sie:

$$\text{a) } (5 - \sqrt{5x+9})^2$$

$$\text{b) } (c \cdot \sqrt{x-1})^2$$

$$\text{c) } \sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

Block 3

1. Vereinfachen Sie:

a) $\frac{a^{-3}}{a}$ b) $\frac{b}{b^{-3}}$ c) $(-a)^2 \cdot (-a)^5$ d) $b^{x-1} \cdot b^{x-2} \cdot b^x$ e) $\left(\frac{3^{1+\sqrt{2}}}{3^{1-\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$

2. Korrigieren Sie die Fehler:

$$\frac{xz^n}{y^n} = \left(\frac{xz}{y}\right)^n, \quad \frac{x^n}{y^n} = \frac{x}{y},$$

$$x^{(m+n)} = (x^m)^n, \quad \frac{1}{y^n} = y^{1-n},$$

$$x^n y^n = (xy)^{2n}, \quad y^0 = 0.$$

3. Für welches x nimmt der folgende Ausdruck den Wert 16 an? $\frac{8^{1-x} \cdot 4^{5x+3} \cdot 2^{3x+1}}{2^{2x+3} \cdot 8^{x-1} \cdot 4^{x+3}}$

4. Vereinfachen Sie möglichst weitgehend und schreiben Sie das Endergebnis als Wurzel-

ausdruck: $\frac{\sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt[10]{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}}$

5. Vereinfachen Sie: a) $\left(\frac{a^3 \cdot b^3}{b^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a \cdot b^2}{a^2}\right)^3$ b) $\left[\frac{a^5 (a^3)^2 b}{3a^8 b^2 a^4}\right]^{-1}$

6. Vereinfachen Sie: a) $\frac{b^{m+1}}{b^{m-1}} - b$ b) $\frac{m^{-n} - n^{-m}}{n^m - m^n} - \frac{1}{n^m m^n}$

7. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x in der Grundmenge \mathbb{R} .

a) $-(27x - 3) = -[(22x - 19) - (2 - 11x)]$ b) $(9 - 2x)^2 = (4x - 1)(5 + x) - 24$

c) $\frac{7x+5}{8} + \frac{4x+1}{3} = 7x - \frac{1+9x}{2}$ d) $\frac{x(a^2+1)}{2} + 1 = a(x+1)$

8. Lösen Sie die folgenden Gleichungen in der Grundmenge \mathbb{N} .

a) $x^2 - 4 > (x - 5)(x + 5)$ b) $1 - 3(x - 4) \geq 2(5 - x)$

9. * Zwei Gläser stehen vor Ihnen; Rotwein im 1., Weisswein im 2.

Schütten Sie einen Löffel voll Rotwein aus dem 1. Glas ins 2., und nehmen Sie dann einen Löffel voll Wein aus dem 2. Glas und schütten Sie ihn ins 1. Befindet sich nun mehr Rotwein im 2. oder mehr Weisswein im 1. Glas? Oder gleich viel?

Block 4

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen in der Grundmenge \mathbb{R} und geben Sie jeweils die Definitionsmenge \mathbb{D} an.

a) $\frac{5}{x+1} = \frac{8}{x} - \frac{3}{x-1}$

b) $\frac{x+2}{x-4} - \frac{14}{3x-12} - \frac{3}{2x-8} = \frac{5}{6}$

c) $\frac{2x+60}{x^2-25} = \frac{6}{x+5} + \frac{7}{x-5}$

d) $\frac{2}{x+2} - \frac{2}{x-2} = \frac{x+3}{4-x^2}$

e) $\frac{x-4}{x-1} + \frac{3x-5}{5x-5} = 2 - \frac{5x-1}{7x-7}$

f) $\frac{1}{x-16} - \frac{1}{x-9} = \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+16}$

2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen in der Grundmenge \mathbb{R} und geben Sie jeweils die Definitionsmenge \mathbb{D} an.

a) $\frac{\frac{27x}{5} - 21}{12} = \frac{3x}{5}$

b) $\frac{1 - \frac{2}{x}}{2 + \frac{2}{x}} - \frac{1 - \frac{3}{x}}{3 + \frac{3}{x}} = \frac{1 - \frac{4}{x}}{4 + \frac{4}{x}}$

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen in der Grundmenge \mathbb{R} und geben Sie jeweils die Definitionsmenge \mathbb{D} an.

a) $\frac{3}{2x-1} - \frac{1}{x-2} = 0$

b) $\left(\frac{24}{x-3} - 1\right)\left(\frac{24}{x-1} - 3\right) = 0$

4. Für welche Werte von x ist $\frac{x^2 + 2x + 3}{2}$ eine ganze Zahl?

Stellen Sie zunächst eine Behauptung auf und beweisen Sie dann Ihre Behauptung!

5. Lösen Sie die folgende Bruchgleichung mit Parameter (ohne Diskussion von Sonderfällen)

nach x auf: $\frac{3x+p}{3x-1} = \frac{x+1}{x-p}$

6. Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen

a) $\sqrt{13-4x} + x + 2 = 0$

b) $\sqrt{3x+4} = 5 - \sqrt{5x+9}$

c) $\sqrt{2x-3} = -5$

d) $2\sqrt{x-1} = \sqrt{3x+6}$

7. Die folgenden Gleichungen führen auf quadratische Gleichungen zurück:

a) $3x^4 - 51x^2 + 48 = 0$

b) $1/8x^4 - x^2 + 2 = 0$

c) $\frac{x}{2(x-4)} - \frac{3}{x+4} = \frac{2}{x-4}$

d) $\sqrt{13+x} + \sqrt{13-x} = 6$

e)* $\frac{x-a}{1-a} + \frac{1}{x} = 2$