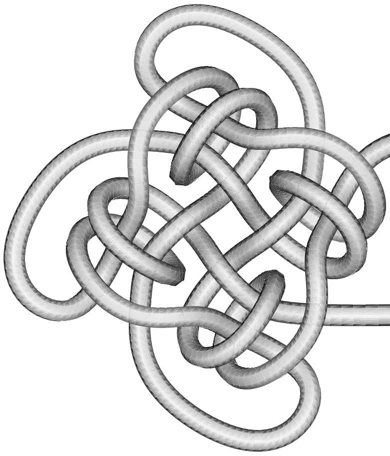
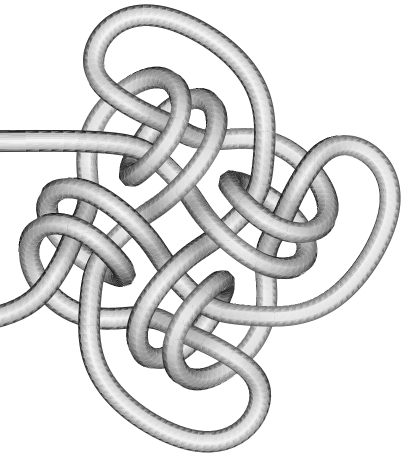
Anna Beliakova



Knoten



Alexander Schumakovitch

O time! thou must untangle this, not I;
It is too hard a knot for me to untie!

William Shakespeare, *Twelfth Night*

Von Gordischen zu Mathematischen Knoten

Einen Knoten aufzulösen galt schon in der Zeit Alexanders des Grossen als eine Herausforderung. Alexander hatte mit seiner Technik einen so durchschlagenden Erfolg, dass das Problem über 2000 Jahre lang als gelöst galt. Erst im 19. Jahrhundert haben die Wissenschaftler damit begonnen, die königliche Methode zu verfeinern.

Die ersten waren die Physiker. Lord Kelvin hat 1867 die Vermutung geäussert, dass Atome verknotete Fäden aus Äther sind. Um also Materie zu verstehen, benötigte man eine vollständige Liste aller möglichen Knoten. P. G. Tait, Lord Kelvins Mitarbeiter, hat viele Jahre daran gearbeitet. Das Resultat war vor allem die Einsicht, dass das Problem schwierig ist. Tait hat viele interessante Vermutungen und eine Liste weniger einfacher Knoten hinterlassen. Er konnte aber weder beweisen, dass die aufgelisteten Knoten wirklich verschieden sind, noch dass die Liste in irgendeinem Sinn vollständig ist.

Nach dem Niedergang der Kelvinschen Atomtheorie ist das Studium der Knoten zu einem exotischen Zweig der reinen Mathematik namens Knotentheorie geworden. Das erste, was die Mathematiker machten war, das Objekt der Untersuchungen exakt zu definieren. So sind die *mathematischen* Knoten entstanden. Das sind idealisierte Objekte, die nur die wesentlichen Eigenschaften eines Knotens behalten. Ein mathematischer Knoten unterscheidet sich von einer verknoteten Schnur *erstens* dadurch, dass seine Enden festgehalten oder zusammengebunden sind (ansonsten könnte man den Knoten durch das freie Bewegen eines seiner Enden immer entknoten); und *zweitens* dadurch, dass die Schnur durch eine unendlich dünne Linie (die Schnurachse) ersetzt wird. Im folgenden beschäftigen wir uns nur mit mathematischen Knoten.

Zwei Knoten heissen *äquivalent* wenn man einen in den anderen deformieren kann. Die Deformation bedeutet das Ziehen und Drehen der Schnur an allen möglichen Stellen, ohne sie zu zerreissen. Ein Knoten heisst *trivial*, wenn er zu einem Kreis äquivalent ist. Der Knoten im Bild 2 links oben ist erstaunlicherweise trivial.

Mathematiker stellen Knoten mit Hilfe von *Diagrammen* dar. Dafür schaut man den Knoten aus der Entfernung an und zeichnet eine Linie, die die Schnurachse darstellt. Wenn sich zwei Linien schneiden, unterbricht man diejenige, die weiter weg ist

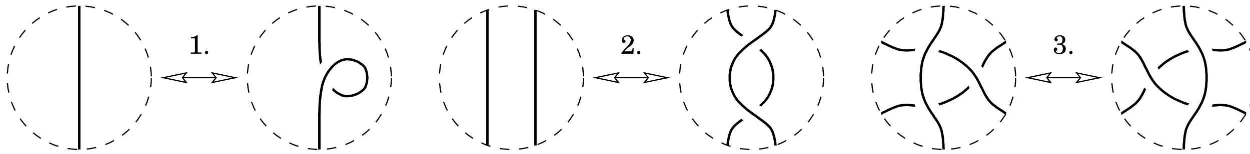


Bild 1: Reidemeister-Bewegungen

(vergleiche mit Bild 2). Man kann natürlich den Blickwinkel immer so wählen, dass man keine drei Linien sieht, die sich in einem Punkt schneiden.

Das **Hauptproblem** der Knotentheorie ist es, Knoten zu unterscheiden. Das heisst, entscheiden zu können, ob zwei Knoten, gegeben durch ihre Diagramme, äquivalent sind oder nicht. Ein verwandtes Problem ist, ein Diagramm des trivialen Knoten immer zu erkennen. Diese beiden Probleme sind zur Zeit ungelöst.

Wir wissen allerdings, dass zwei Diagramme genau dann äquivalente Knoten darstellen, wenn man ein Diagramm in das andere durch mehrfaches Anwenden der drei im Bild 1 aufgezeichneten *Reidemeister-Bewegungen* transformieren kann. Die Bewegungen sind nach dem deutschen Mathematiker Reidemeister genannt, der sie in den zwanziger Jahren einführte. Bei Reidemeister-Bewegungen bleiben die Knotendiagramme ausserhalb der punktierten Kreise unverändert. Innerhalb der Kreise darf man nur die drei gezeigte Züge in beide Richtungen ausführen.

Jede Eigenschaft eines Knotens, die sich nicht unter Reidemeister-Bewegungen ändert, heisst *Knoteninvariante*. Invarianten spielen eine zentrale Rolle in der Knotentheorie, weil sie zur Unterscheidung von Knoten dienen. Alle Invarianten äquivalenter Knoten müssen übereinstimmen. Deshalb genügt es, eine Invariante (Eigenschaft) zu finden, die für zwei Knoten verschieden ist, um die Knoten zu unterscheiden. Allerdings — selbst wenn man 2000 Invarianten hat, die für beide Knoten gleich sind, kann man daraus nicht schliessen, dass die Knoten äquivalent sind. Vielleicht gibt es eine 2001. Invariante, die sie unterscheidet.

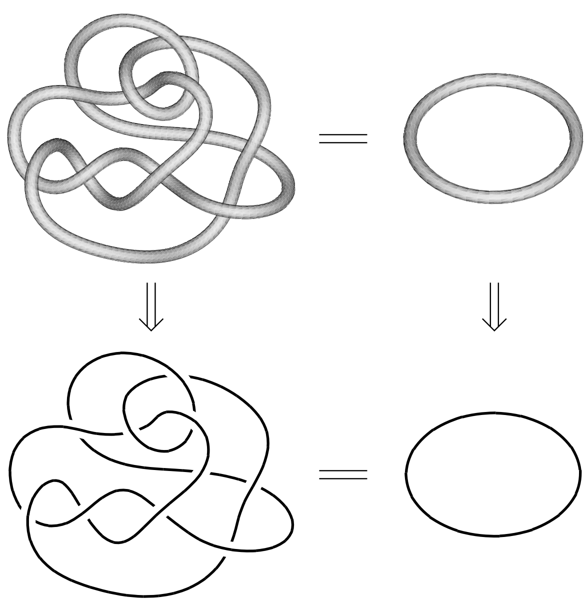


Bild 2: Trivialer Knoten und sein Diagramm

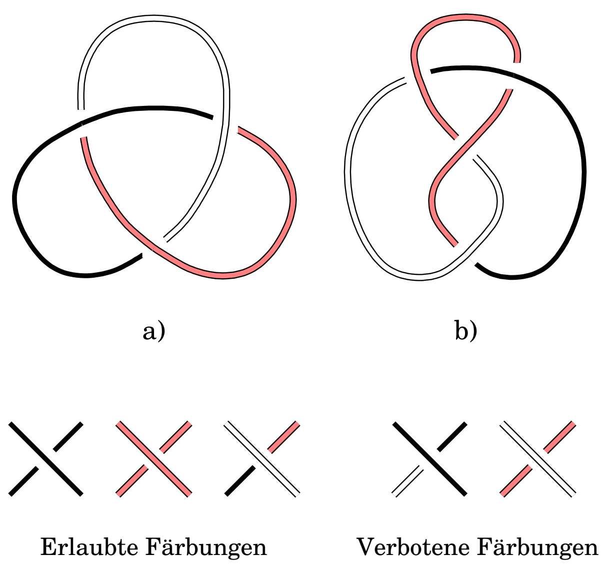


Bild 3: Gefärbte Diagramme

Wir führen nun eine Invariante ein, die die Knoten in den Titeln der beiden ersten Kapitel unterscheidet. Trotz ihrer Einfachheit kennt man diese Invariante erst seit zwanzig Jahren. Sie wurde 1980 von dem amerikanischen Mathematiker Fox entdeckt.

Versuchen wir, ein Knotendiagramm mit drei Farben zu färben. Jedes Knotendiagramm besteht aus mehreren sich miteinander nicht schneidenden Intervallen, die wir Brücken nennen. Wir färben jede Brücke in einer der drei Farben — Weiss, Schwarz oder Grau — wie es in Bild 3.a und 3.b gezeigt ist.

Dabei betrachten wir nur solche Färbungen, bei denen die drei Brücken, die an jeder Kreuzung zusammen kommen, entweder die gleiche oder verschiedene Farben haben. Solche Färbungen werden als *erlaubt* bezeichnet (siehe Bild 3 unten). Zum Beispiel ist die Färbung in Bild 3.a erlaubt und in Bild 3.b nicht.

Definition der ersten Knoteninvariante. *Die Anzahl der möglichen erlaubten Färbungen eines Knotendiagramms ist eine Knoteninvariante.*

Zuerst überlegen wir uns, wozu wir eine solche Invariante brauchen können. Jedes Knotendiagramm hat mindestens drei Färbungen. Man kann immer das ganze Diagramm entweder Weiss oder Schwarz oder Grau färben. Der triviale Knoten hat nur diese drei erlaubten Färbungen. Der Knoten in Bild 3.a hat eine Färbung mehr. Das ist unser erster nichttrivialer Knoten! Er heisst Kleeblattschlinge und nimmt immer den ersten Platz in jeder Knotenliste ein. In der Tat hat die Kleeblattschlinge neun erlaubte Färbungen. Können Sie die anderen fünf finden?

Wir müssen noch zeigen, dass die Anzahl der Färbungen wirklich eine Invariante ist. Das bedeutet, wir müssen überprüfen, dass sie sich unter keiner der drei Reidemeister-Bewegungen ändert. Mit anderen Worten, die Anzahl der erlaubten Färbungen des Diagramms soll vor und nach jeder Bewegung gleich bleiben. Wir legen eine Färbung ausserhalb der Kreise fest, so dass die ungeänderten Brücken in den Diagrammen vor und nach der Bewegung gleich gefärbt sind. Dann macht die erste Reidemeister-Bewegung gar keine Probleme. Die Färbung ist links und rechts eindeutig festgelegt. Die zweite Bewegung ist fast genauso einfach: Wenn die zwei Brücken auf der linken Seite gleiche Farbe haben, dann muss auch die neue kleine Brücke diese Farbe erhalten. Andererseits, wenn sie verschieden gefärbt sind (z.B. wie in Bild 4.a schwarz und weiss), dann erhält die kleine Brücke die dritte komplementäre Farbe (grau).

Nur die dritte Reidemeister Bewegung ist schwieriger zu behandeln. Hier hat man viel mehr (sechs) Brücken, die noch mehr (27) verschiedene Färbungen erlauben. Glücklicherweise, kann man diese 27 Fälle auf fünf Grundtypen reduzieren. Diese fünf Möglichkeiten muss man aber direkt eine nach der anderen überprüfen. Für zwei davon ist es im Bild 4.b und 4.c gemacht.

Jetzt sind wir in der Lage, eine beeindruckende Liste aus einem Satz und zwei Korollaren aufzustellen.

1. Satz. *Wenn zwei Knoten eine verschiedene Zahl erlaubter Färbungen haben, dann sind sie nicht äquivalent.*

2. Korollar. *Die Kleeblattschlinge ist kein trivialer Knoten.*

3. Korollar. *Die Kleeblattschlinge ist nicht äquivalent zum Knoten im Titel des nächsten Kapitels.*

Der Knoten im Titel des nächsten Kapitels heisst Achterknoten und nimmt die zweite Stelle in jeder Knotenliste ein, direkt nach der Kleeblattschlinge. Der Achterknoten hat nicht mehr als drei erlaubte Färbungen, und ist deshalb von der Kleeblattschlinge verschieden. (Wenn Sie die vierte Färbung ent-

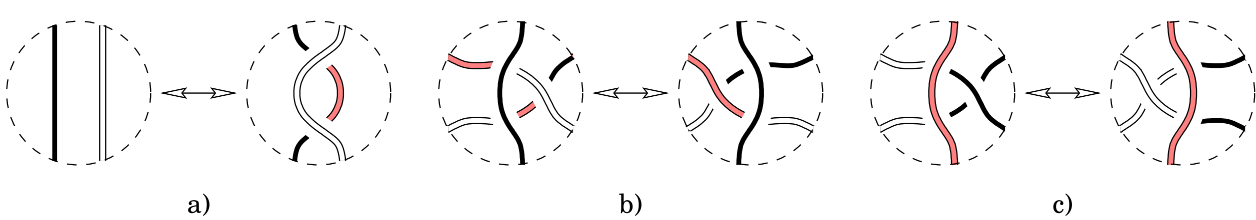


Bild 4: Gefärbte Reidemeister-Bewegungen

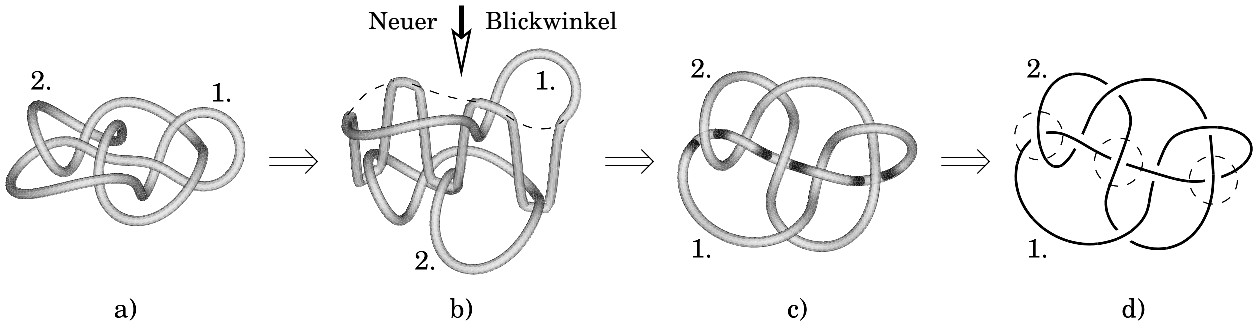


Bild 5: Begründung der Definition der Verschlingungszahl

decken, können Sie die ganze Knotentheorie widerlegen!) Was uns noch fehlt ist der Beweis, dass der Achterknoten nicht trivial ist. Das können wir mit unseren bescheidenen Methoden leider nicht tun. Die Erfahrung sagt uns aber, dass es stimmt.

Verschlingungszahl

Unsere nächste Invariante war schon dem deutschen Mathematiker Gauss (1777–1855) bekannt. Sie hat mindestens zehn sehr verschiedene Definitionen. Eine davon werden wir jetzt diskutieren.

Dafür müssen wir *mehrere* Knoten gleichzeitig betrachten, die sich nicht schneiden, aber ineinander verschlungen sein können. Solche Objekte nennt man *Verschlingungen.* Die einzelnen Knoten, aus denen eine Verschlingung besteht, heissen *Verschlingungskomponenten.* Für Verschlingungen kann man auch Diagramme, Reidemeister-Bewegungen, Invarianten usw. definieren. Sie sind eigentlichen Knoten so verwandt, dass man oft über Knoten spricht und dabei Verschlingungen meint. Äquivalente Verschlingungen haben sicher die gleiche Anzahl von Komponenten. Eine triviale Verschlingung ist äquivalent zu einer Vereinigung unverknoteter Kreise. Zum Beispiel sind die Verschlingungen in den Bildern 6.a und 6.b trivial aber in Bild 6.c nicht.

Wir beschränken uns auf Verschlingungen mit zwei Komponenten. Es stellt sich eine natürliche Frage: Wie kompliziert können die beiden Komponenten miteinander verknotet sein?

Betrachten wir das Beispiel in Bild 5.a. Wir versuchen die erste Komponente von der zweiten wegzuziehen und dabei die zweite festzuhalten. Irgendwann werden die Stückchen der zweiten Komponente das weitere Bewegen blockieren. Wir können die Stückchen nicht überspringen, aber wir dehnen die erste Komponente so aus, dass das weitere Ziehen möglich wird. Schliesslich wird die erste Komponente an manchen Stellen durch die zweite Komponente geklemmt. Die Situation ist im Bild 5.b gezeigt. Die Anzahl solcher "Klemmen" spiegelt die Komplexität der Verschlingung wider. Wenn wir jetzt auf die Verschlingung einen Blick entgegen der Ziehrichtung werfen, dann sehen wir, dass die Klemmen Stellen entsprechen, an denen die zweite Komponente *über* die erste läuft (sehe Bild 5.c). Das kann man auch auf dem Diagramm beobachten (Bild 5.d). Übrigens, wenn die Zieh- und Blickrichtungen übereinstimmen, dann ändert sich das Diagramm beim Ziehen überhaupt nicht.

Die Anzahl der Stellen auf dem Verschlingungsdiagramm, an denen die zweite Komponente *über* die erste läuft, scheint ein guter Kandidat zu sein, um

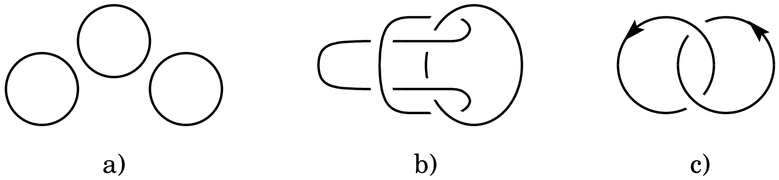


Bild 6: Beispiele von Verschlingungen

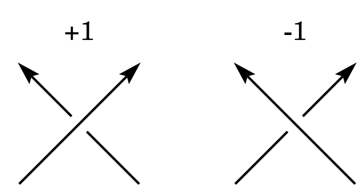


Bild 7: Regel für Vorzeichen

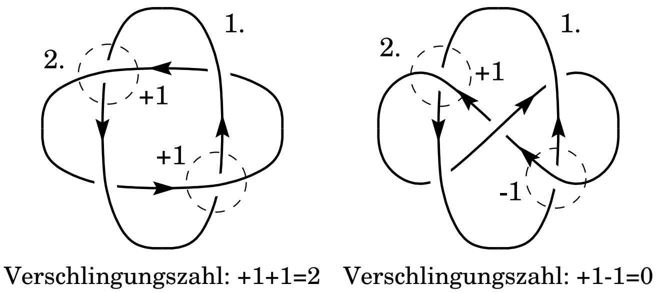


Bild 8: Berechnung der Verschlingungszahl

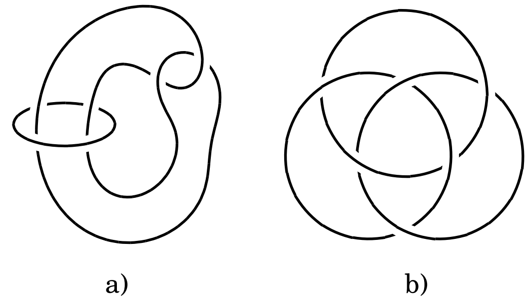


Bild 9: Interessante Verschlingungen

die Komplexität der Verschlingung zu messen. Leider ist es keine Invariante. Sie kann sich unter der zweiten Reidemeister-Bewegung um zwei ändern. Dieses Problem kann man aber relativ einfach beseitigen. Wir wählen eine der zwei Richtungen, in welche wir unsere Komponenten durchlaufen wollen. Wir markieren unsere Wahl mit einem kleinen Pfeil auf jeder Komponente wie im Bild 6.c. Jetzt ist unsere Verschlingung *orientiert*. Wir blicken nun auf jede Kreuzung so, dass die beiden Linien nach oben orientiert sind, und definieren dann das Vorzeichen der Kreuzung nach der Regel in Bild 7.

Sei jetzt ein orientiertes Verschlingungsdiagramm mit zwei numerierten Komponenten gegeben. Wir summieren über alle Vorzeichen solcher Kreuzungen, an denen die zweite Komponente *über* die erste läuft. Das Resultat heisst *Verschlingungszahl.* Beispiele der Berechnung der Verschlingungszahl sind in Bild 8 gezeigt. Beim Umdrehen der Orientierung einer der Komponenten ändert sich das Vorzeichen jeder Kreuzung und als Resultat das Vorzeichen der Verschlingungszahl.

4. Satz. *Die Verschlingungszahl ist eine Invariante der orientierten Verschlingung mit zwei Komponenten.*

5. Korollar. *Die Verschlingungen in Bild 8 sind nicht äquivalent, obwohl sie ähnlich aussehen.*

Der Beweis dieses Satzes ist analog zum vorherigen. Man muss alle Reidemeister-Bewegungen überprüfen. Übrigens haben die zwei neuen Kreuzungen bei der zweiten Reidemeister-Bewegung immer verschiedene Vorzeichen. Wir überlassen Ihnen, aufmerksamer Leser, den Rest des Beweises. Dies werden Ihre erste Schritte in die bezaubernde Welt der Knotentheorie sein!

Einige Bemerkungen müssen wir trotzdem noch machen. Erstens ändert sich beim Vertauschen der Rollen der beiden Komponenten die Verschlingungszahl nicht. Zweitens kann man die Regel in Bild 7 auch dazu benutzen, um das Vorzeichen jeder Kreuzung eines orientierten Knotendiagramms zu definieren. Leider ist die Summe über alle Vorzeichen keine Knoteninvariante, weil sie schon die erste Reidemeister-Bewegung nicht überlebt.

Drittens, wenn die Verschlingungszahl Null ist, heisst es noch nicht, dass man die Komponenten auseinanderziehen kann. Die sogenannte Whitehead-Verschlingung ist ein gutes Beispiel dafür (siehe Bild 9.a).

Ein sonderbares Beispiel ist in Bild 9.b gezeigt. Diese Verschlingung (mit dem Namen Borromäische Ringe) hat drei Komponenten, wobei je zwei davon die Verschlingungszahl Null haben. Die drei Komponenten kann man aber nicht auseinanderziehen. Allerdings: wenn wir eine Komponente weglassen, ist der Rest eine triviale Verschlingung aus zwei Komponenten.

Die Verschlingungszahl ist die erste Invariante aus einer unendlichen Reihe der sogenannten *Invarianten des endlichen Typs.* Die Theorie dieser Invarianten ist erst zehn Jahre alt. Sie entwickelt sich aber sehr rasch. Zu Zeit sind nur einige Invarianten des endlichen Typs berechnet. Die zweite Invariante dieser Reihe kann den Achterknoten vom trivialen Knoten unterscheiden. Die dritte Invariante trennt beiden Knoten im Titel des zweiten Kapitels (sie heissen *rechte* und *linke* Kleeblattschlinge). Es gibt viele Gründe zu glauben, dass mit Hilfe der Invarianten des endlichen Typs das Hauptproblem der Knotentheorie gelöst wird!

Danksagung. *Wir danken Gregor Fels, Hans-Christoph Im Hof und Christof Schmidhuber für ihr Interesse für Knoten und für viele nützliche Hinweise.*
Unser besonderer Dank gilt Robert Scharein, dem Autor des wunderbaren Zeichenprogramms KnotPlot (`http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/KnotPlot.html`).