Markus Brodmann

Algebraische Geometrie – eine Einführung

Basler Lehrbücher Band 1 (1989) Birkhäuser Verlag Basel-Boston-Berlin
ISBN 3-7643-1779-5

Diese Einführung in die algebraische Geometrie richtet sich an Studierende mittlerer und höherer Semester. Vorausgesetzt werden lediglich die im ersten Studienjahr erworbenen Grundkenntnisse. Ausgehend von den affinen Hyperflächen werden beliebige affine und schliesslich projektive Varietäten untersucht. Die benötigte Algebra wird dabei laufend entwickelt. Schwerpunkte des Buches sind die Dimensions- und Morphismentheorie, die Multiplizitätstheorie sowie der Gradbegriff. Zahlreiche Beispiele sollen dem Leser helfen, sich über die konkrete Bedeutung des Stoffes klar zu werden.

470 Seiten, 79 Illustrationen.

Inhalt:

Noethersche Moduln. Ganze Erweiterungen. Ideale und ganze Erweiterungen. Primidealketten und ganze Erweiterungen. Normale Ringe. Ganze Erweiterungen von normalen Ringen. Endliche Morphismen.

10. *Dimensionstheorie:* Der Transzendenzgrad. Das Normalisationslemma. Der Kettensatz. Die Dimension. Moduln endlicher Länge. Höhen und Kodimension. Zur Dimenstheorie noetherscher Ringe.
11. *Topologische Eigenschaften von Morphismen:* Der Haupsatz über Morphismen. Konstruiebare Mengen. Parametersysteme. Die Faserdimension. Normale Varietäten. Morphismen und starke Topologie.
12. *Quasiendliche und birationale Morphismen:* Quasiendliche Morphismen. Rationale Funktionenkörper. Der Grad eines quasiendlichen Morphismus. Die Diskriminante. Fasern von quasiendlichen Morphismen. Birationale Morphismen. Die Normalisierung einer Varietät. Der normale Ort einer Varietät. Reduziertheit von Fasern. Verzweigtheit von Morphismen.

IV. Tangentialraum und Multiplizität

13. *Der Tangentialraum:* Tangentialvektoren und Richtungsableitungen. Tangentialraum und Differentiale. Die Einbettungsdimension. Die Rolle des lokalen Ringes. Tangentialräume von Fasern. Reguläre und singuläre Punkte. Normale und reguläre Punkte. Das Normalitätskriterium.
14. *Stratifikation:* Strata von Varietäten. Strata als analytische Mannigfaltigkeiten. Determinantenvarietäten.
15. *Hilbert-Samuel-Polynome:* Graduierte Ringe und Moduln. Homogene Ringe. Assoziierte Primideale. Torsionsmoduln und Quasi-Nichtnullteiler. Homogene *K*-Algebren. Das Hilbert-Polynom. Rees-Ringe und graduierte Ringe zu Idealen. Hilbert-Samuel-Polynome und Multiplizität. Dimension und Additivität.
16. *Multiplizität und Tangentialkegel:* Das Hilbert-Samuel-Polynom für einen Punkt. Der Multiplizitätsbegriff für Punkte. Multiplizität und Regularität. Affine algebraische Kegel. Tangentialkegel. Tangenten und deren Vielfachheit.

V. Projektive Varietäten

17. *Der projektive Raum:* Der Begriff des projektiven Raums. Der kanonische affine Atlas. Zariski-Topologie und affine Kegel. Projektiver Abschluss und Fernpunkte. Homogener Koordinatenring und graduierte Verschwindungsideale. Homogenisierung und Dehomogenisierung. Dimensionstheorie im projektiven Raum.
18. *Morphismen:* Reguläre Funktionen. Quasiprojektive Varietäten und Morphismen. Topologische Eigenschaften quasiprojektiver Varietäten. Morphismen aus projektiven Varietäten. Die lokale Struktur quasiprojektiver Varietäten. Segre-Einbettungen und Produkte. Verones-Einbettungen. Elementare affine Teilmengen projektiver Varietäten. Lokale Ringe in irreduziblen Mengen. Endliche Morphismen und affine Kegel. Normalisierung Quasiprojektiver Varietäten.
19. *Grad und Schnittvielfachheit:* Der Grad einer projektiven Varietät. Das homogene Normalisationslemma, generische Projektionen. Grad und generische Projektionen. Der Begriff der Schnittvielfachheit. Der Zusammenhang zwischen Grad und Schnittvielfachheit.
20. *Ebene projektive Kurven:* Der Satz von Bézout für zwei homogene Polynome. Die Verzweigungsordnung. Eine ebene Kubik. Tangenten und Wendepunkte. Die Hesse-Form. Die Gruppenstruktur der kubischen Kurven.

VI. Garben

21. *Grundbegriffe der Garbentheorie:* Der Garbengegriff. Halme. Homomorphismen. Untergarben und Restklassengarben. Exakte Sequenzen. Einschränkung auf offene Untermengen. Direkte Bilder.
22. *Kohärente Garben:* Moduln und Nenneraufnahme. Induzierte Garben über affinen Varietäten. Quasikoheränte und kohärente Garben. Kriterien für die Kohärenz. Lokal freie Garben.
23. *Tangentialfelder und Kähler-Differentiale:* Homomorphismen-Garben. Duale Garben. Die Tangentialgarbe. Die Garbe der Kähler-Differentiale. Die Beziehung zur Tangentialgarbe.
24. *Die Picard-Gruppe:* Tensorprodukte von Moduln. Tenserprodukte von Garben. Invertierbare Garben und die Picard-Gruppe. Zur Picard-Gruppe affiner Varietäten.
25. *Kohärente Garben über projektiven Varietäten:* Verdrehte Strukturgarben. Einbettung in die Picard-Gruppe. Verdrehte kohärente Garben. Totale Schnittmoduln. Induzierte Garben. Schnittmoduln induzierter Garben. Der Endlichkeitssatz. Hilbertpolynom und Grad für kohärente Garben. Ein lokales Verschwingungskriterium für die globalen Schnitte hinreichend negativ verdrehter kohärenter Garben.