AUFBLASUNGEN VON FLÄCHEN

WAS IST EINE AUFBLASUNG ?

Der Prozess der Aufblasung ist eine Grundkonstruktion der *Algebraischen Geometrie.*

Wir veranschaulichen diesen Prozess am Beispiel der *Aufblasungen einer Kreisscheibe*

AUFBLASUNGEN EINER KREISSCHEIBE

Wir betrachten eine Kreischeibe *D* in der Ebene *E.* Wir versehen *E* mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem, bestehend aus einer *x*-Achse und einer *y*-Achse. Jeder Punkt *p* in *E* wird also durch zwei Zahlen *x* und *y* be- schrieben, den *Koordinaten* von *p.*

Zu je zwei Gleichungen

$$f = f(x,y) = 0 \text{ und } g = g(x,y) = 0.$$

ist die *Aufblasung Bl(f,g) von D bezüglich f und g* definiert.

WAS GESCHIEHT BEIM AUFBLASEN ?

Jeder Punkt $p = (x,y)$ in der Scheibe D, welcher den beiden Gleichungen

$$f(x,y) = 0 \quad \textit{und} \quad g(x,y) = 0$$

genügt, wird ersetzt durch eine *projektive Gerade,* die man auch als *Kreis(linie)* realisieren kann. Der Punkt p wird also zu einem Kreis “aufgeblasen”.

Wie dieser Kreis anstelle des Punktes p in die Scheibe D eingesetzt wird, hängt von f und g ab. Damit der Kreis richtig in die Scheibe D eingesetzt werden kann, muss die Scheibe geeignet verformt werden.

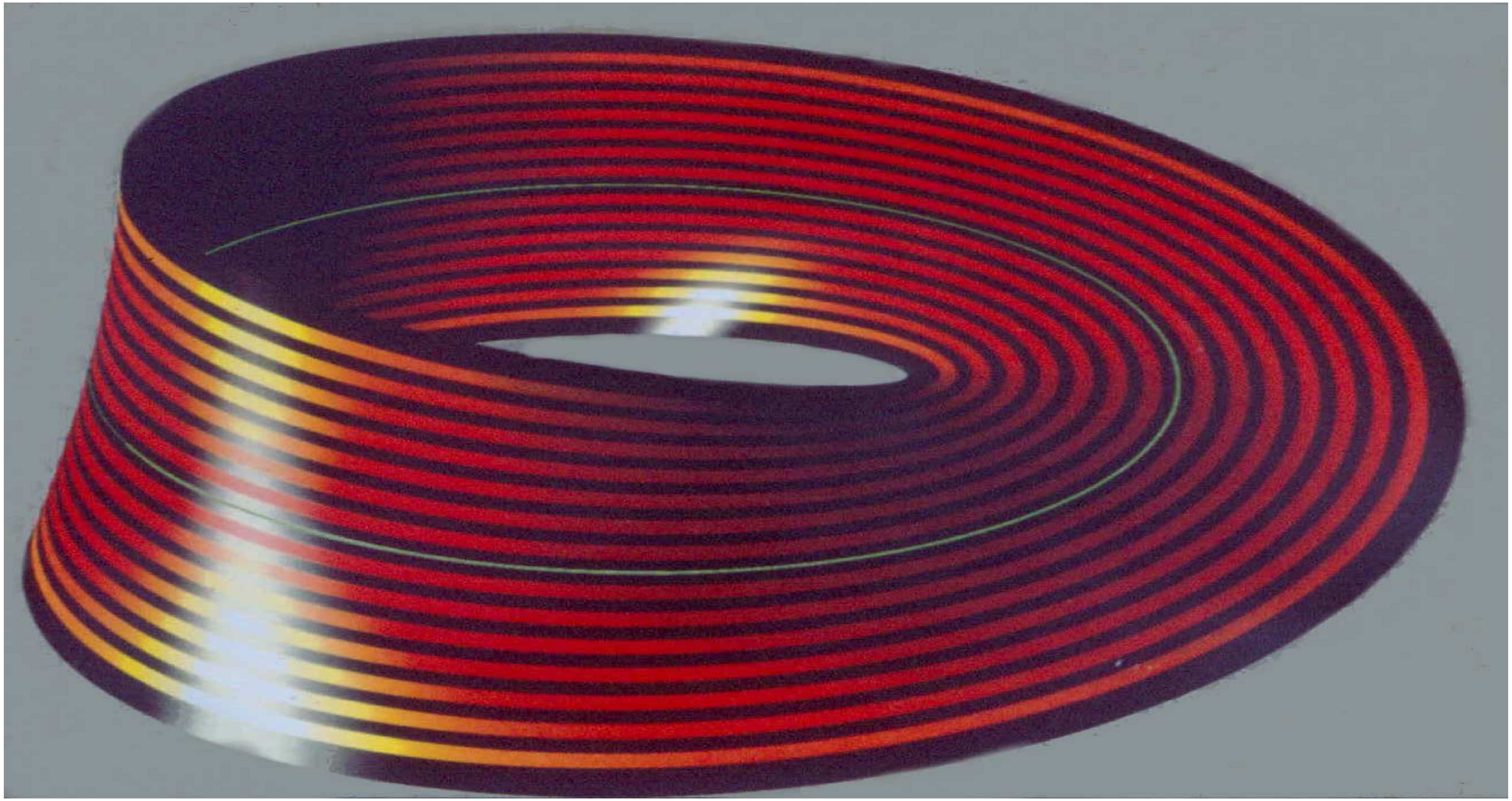
VISUALISIERUNG VON AUFBLASUNGEN

Die Aufblasungen der Kreisscheibe lassen sich mit einem Standard-Verfahren in den dreidimensionalen Raum einbetten (*stereographische Projektion*). Also:

Die Aufblasungen *Bl(f,g)* der Kreisscheibe *D* lassen sich als Flächen im Raum realisieren. Die Gestalt der Fläche *Bl(f,g)* hängt von *f* und *g* ab. Durch verschiedene Wahl von *f* und *g* erhält man eine grosse Vielfalt von Flächen.

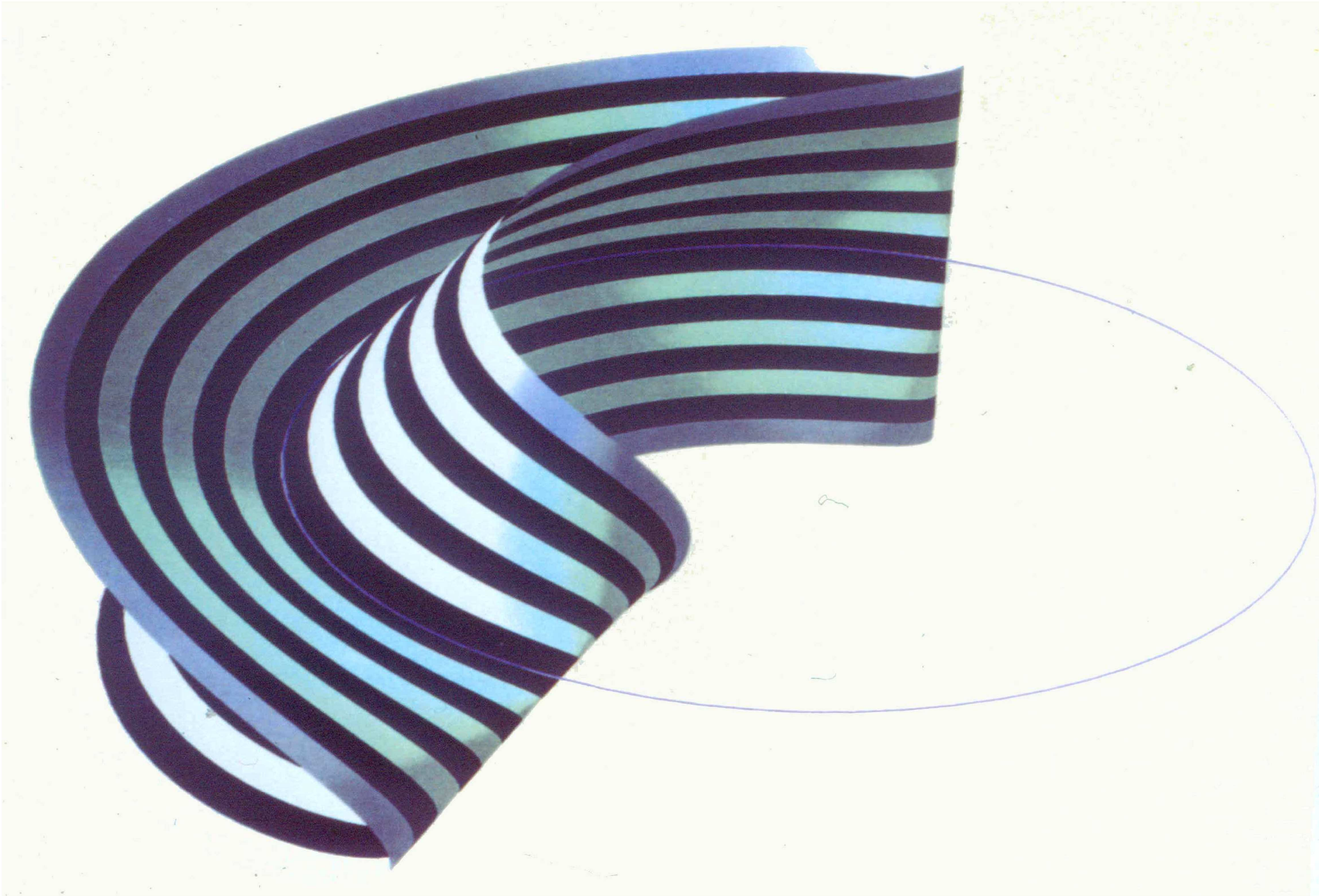
EIN ERSTES BEISPIEL

Wir wählen $f = x$ *und* $g = y$, d.h. wir betrachten die Aufblasung $Bl(x,y)$. Es handelt sich um ein *Möbiusband.*



EIN WENIGER BEKANNTES BEISPIEL

Wir wählen $f = x^2$ *und* $g = y^2$. Es entsteht ein (gekrümmter) *Whitney-Doppelschirm.*



NEUGIERIG GEWORDEN ?

Auf Möbiusbänder, Whitney-Doppelschirme.....
Dann wagen Sie einen Blick auf die Präsentationen von Flächen auf dem zweiten Bildschirm !

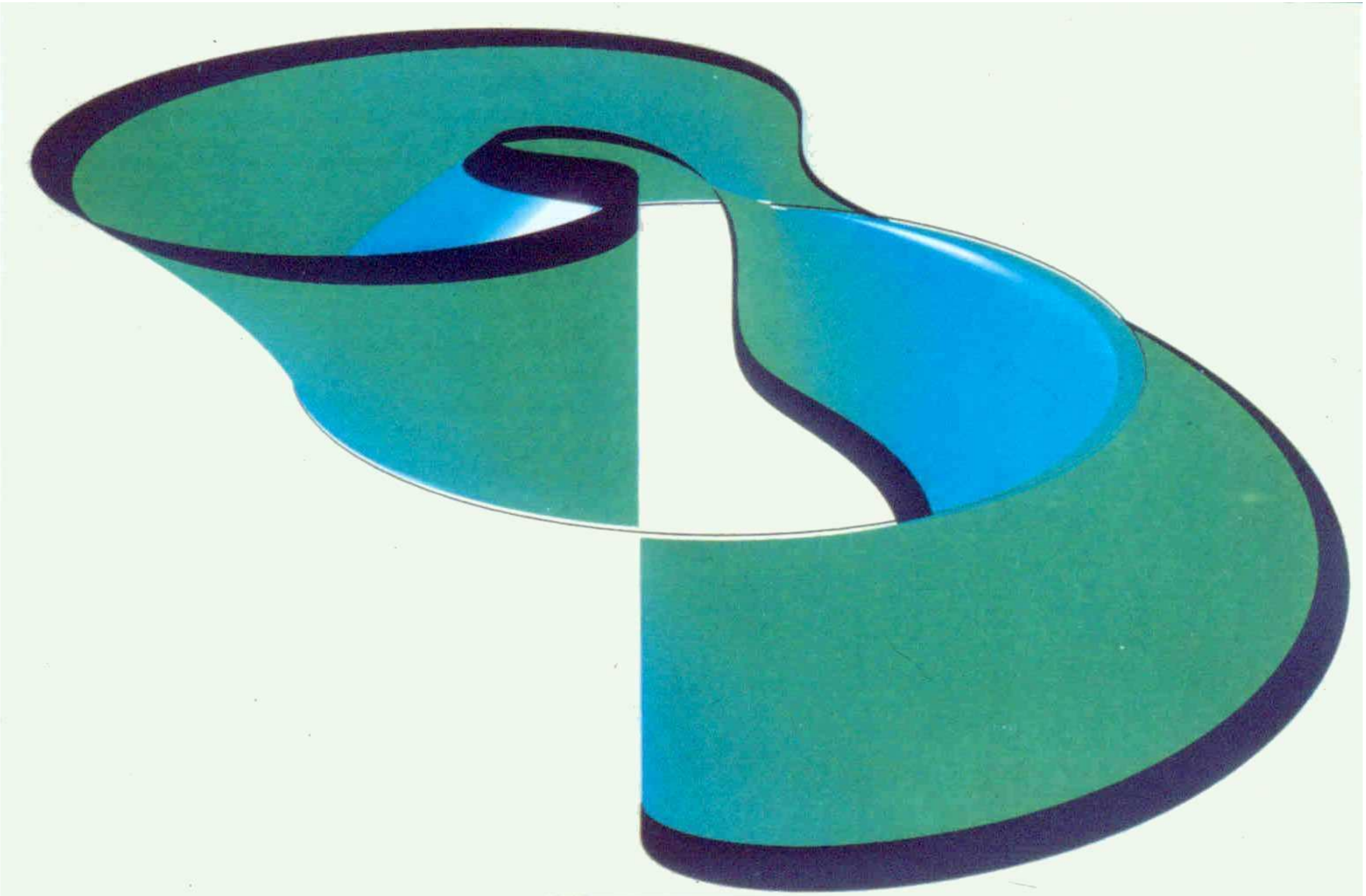
Wenn Sie etwas tiefer in das Thema eindringen möchten, und auch vor Formeln nicht gleich zurückschrecken, nehmen Sie eine Kopie der aufliegenden Arbeiten "Computerbilder von Aufblasungen" oder "Strips, Tubes, Bottles, Caps, Umbrellas – A Few Examples of Visualizations of Surfaces" mit !

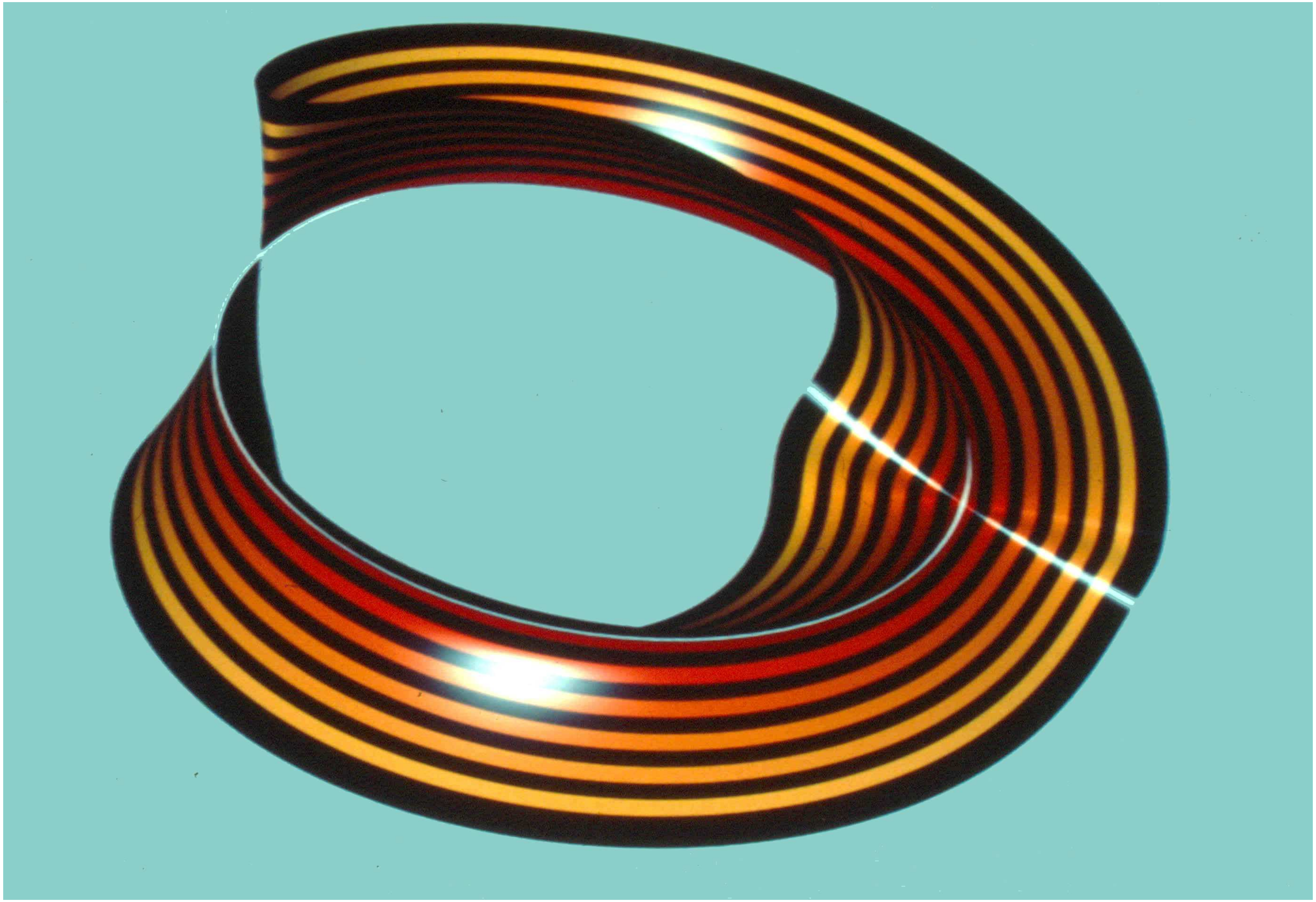
WEITERE BEISPIELE

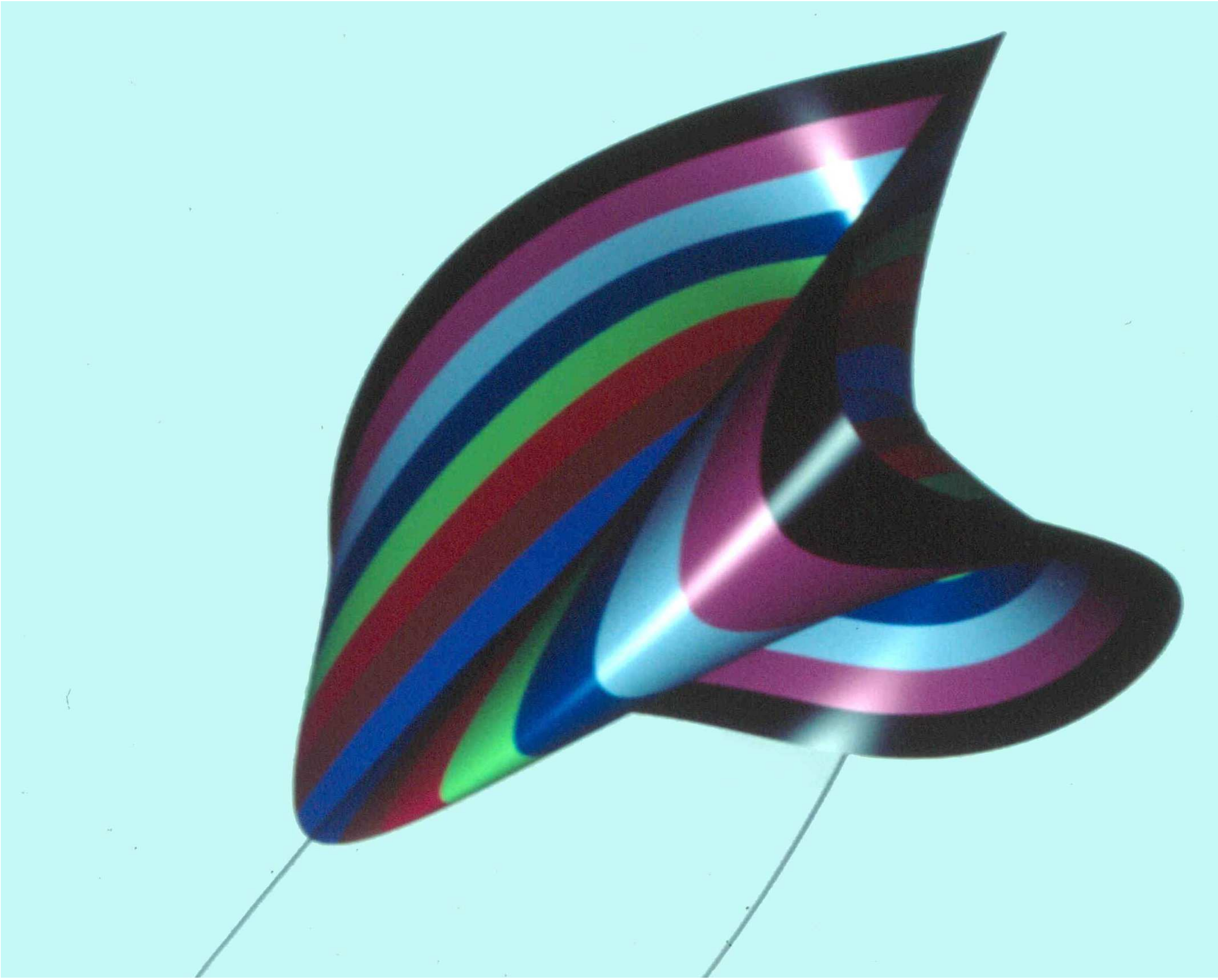
Wählt man kompliziertere *Polynome f* und *g,* so erhält man erwartungsgemäss auch kompliziertere Flächen *Bl(f,g).*

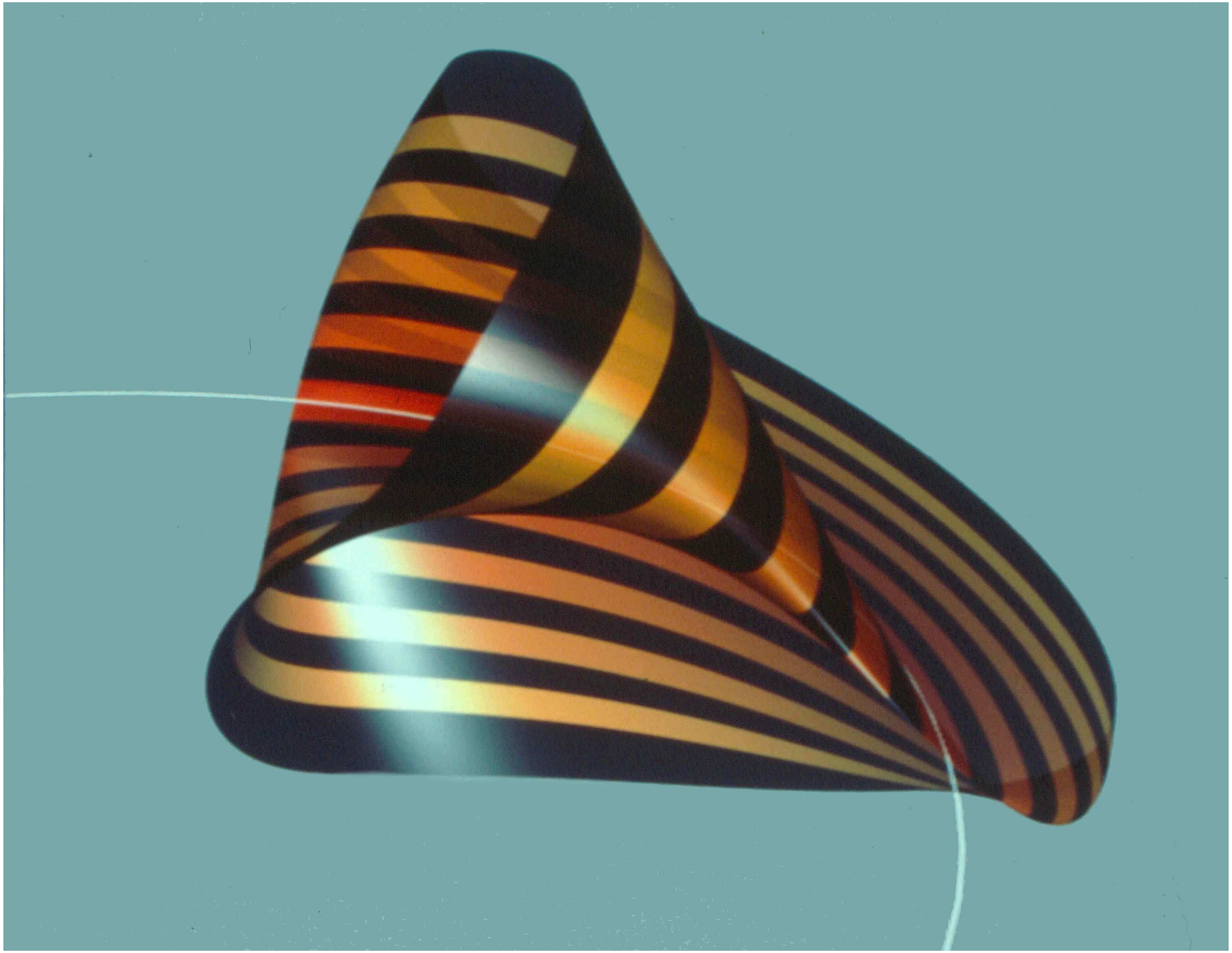
Dabei stösst man allerdings bald einmal an die Grenzen der Leistungsfähigkeit des Computers, und die Bildqualität nimmt ab...

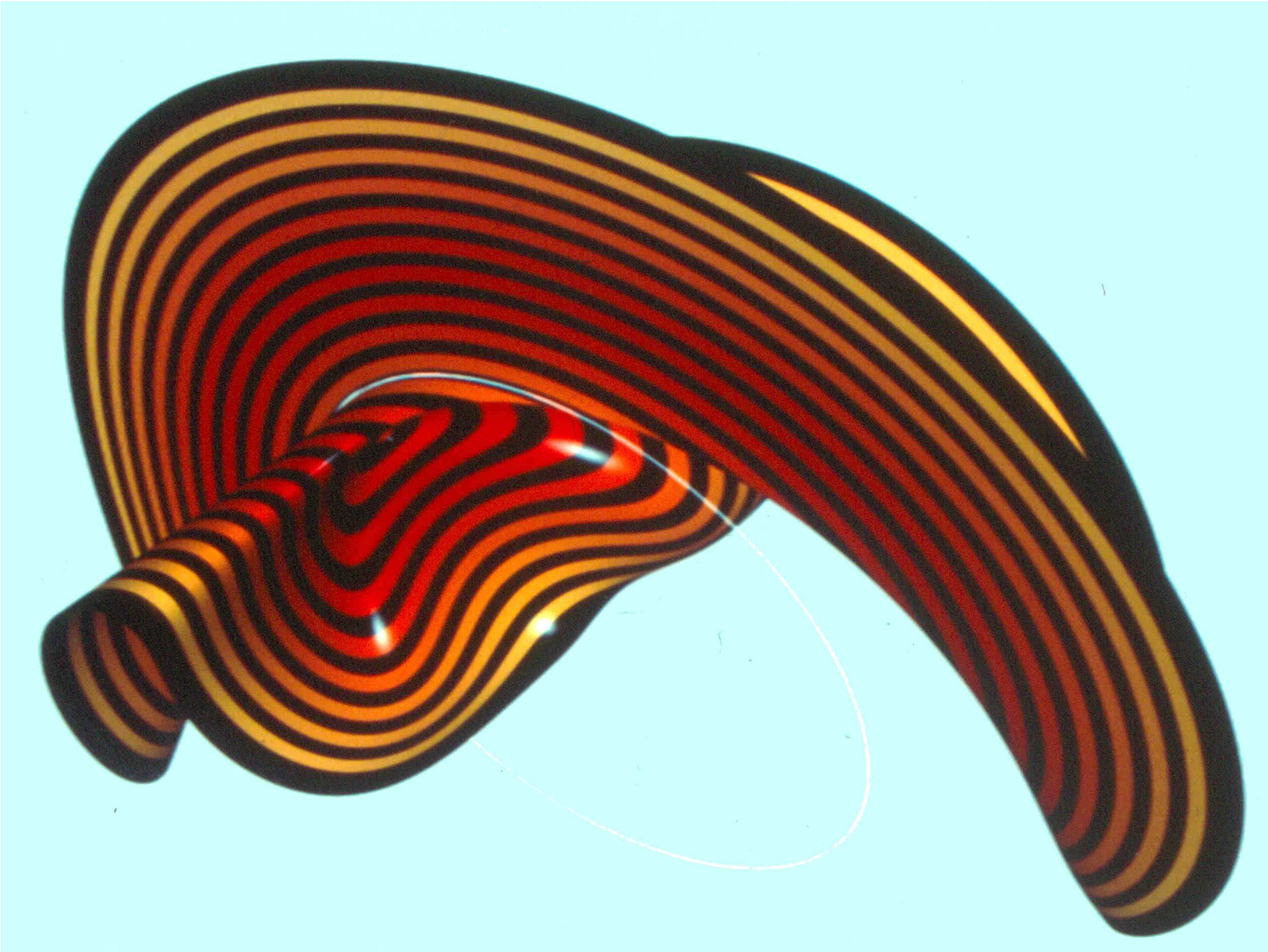
Es folgt nun eine Auswahl weiterer Beispiele, realisiert im Jahre 1991 (!) in Zusammenarbeit mit Dr. M. Hafner vom Institut für Informatik der Universität Zürich. (Die hohe Bildqualität fand später international Beachtung).

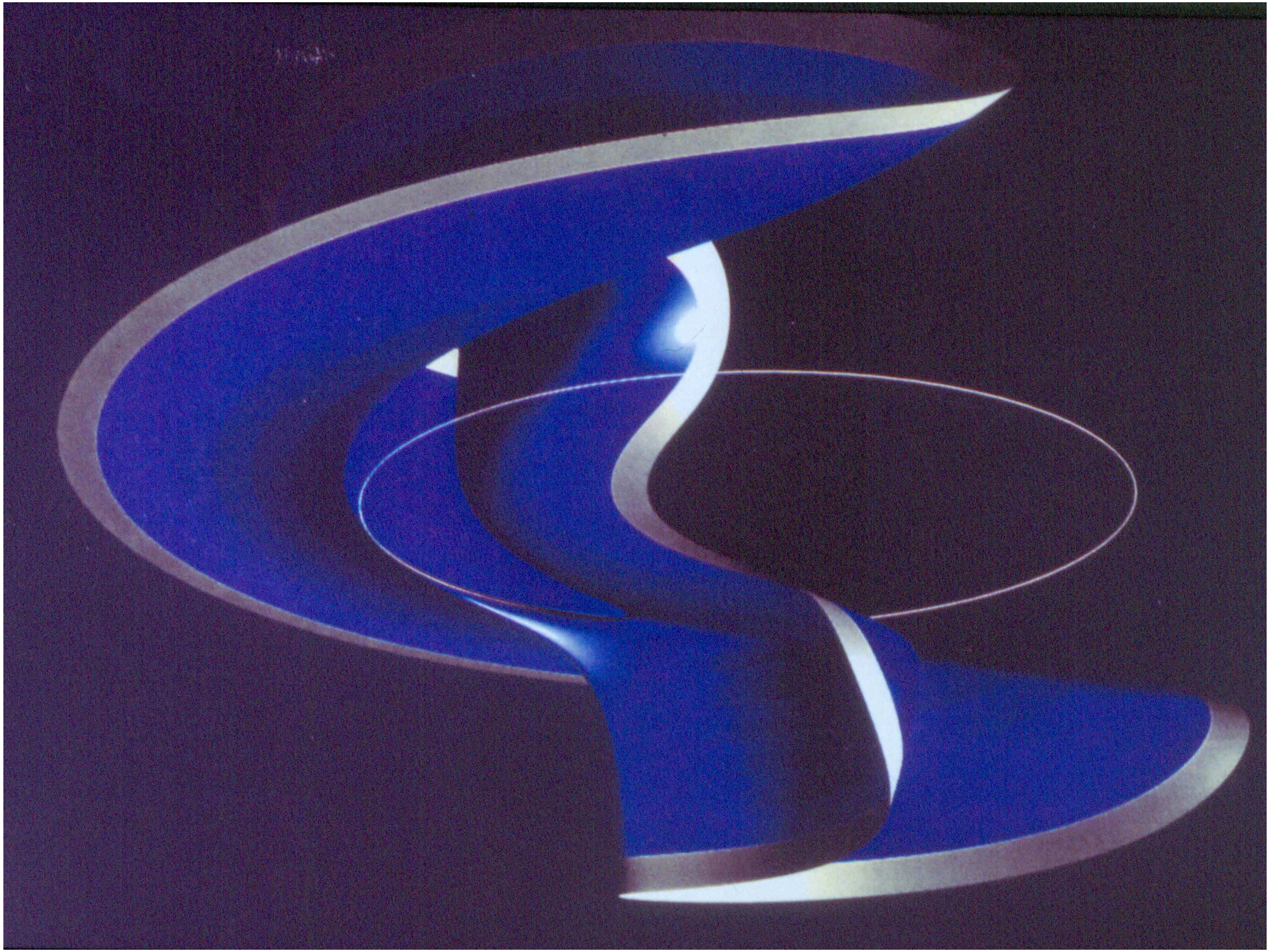












ERLÄUTERUNG ZU DEN BILDERN

Die aufzublasende Scheibe wurde zunächst mit einem Farbmuster versehen. Bei der durch das Aufblasen der Scheibe bedingten Verformung behält jeder Punkt (der beim Aufblasen nicht entfernt werden muss) seine Farbe.

In den gezeigten Beispielen ist immer nur ein Punkt der Scheibe zu entfernen und aufzublasen.

Der auf den Bildern zu sehende Kreis ist der einzige aufgeblasene Punkt.

MEHRPUNKTAUFBLASUNGEN

Natürlich will man auch solche Aufblasungen betrachten, bei denen mehrere Punkte der Scheibe *D* entfernt und zu Kreisen aufgeblasen werden. Man redet dann von *Mehrpunktaufblasungen.*

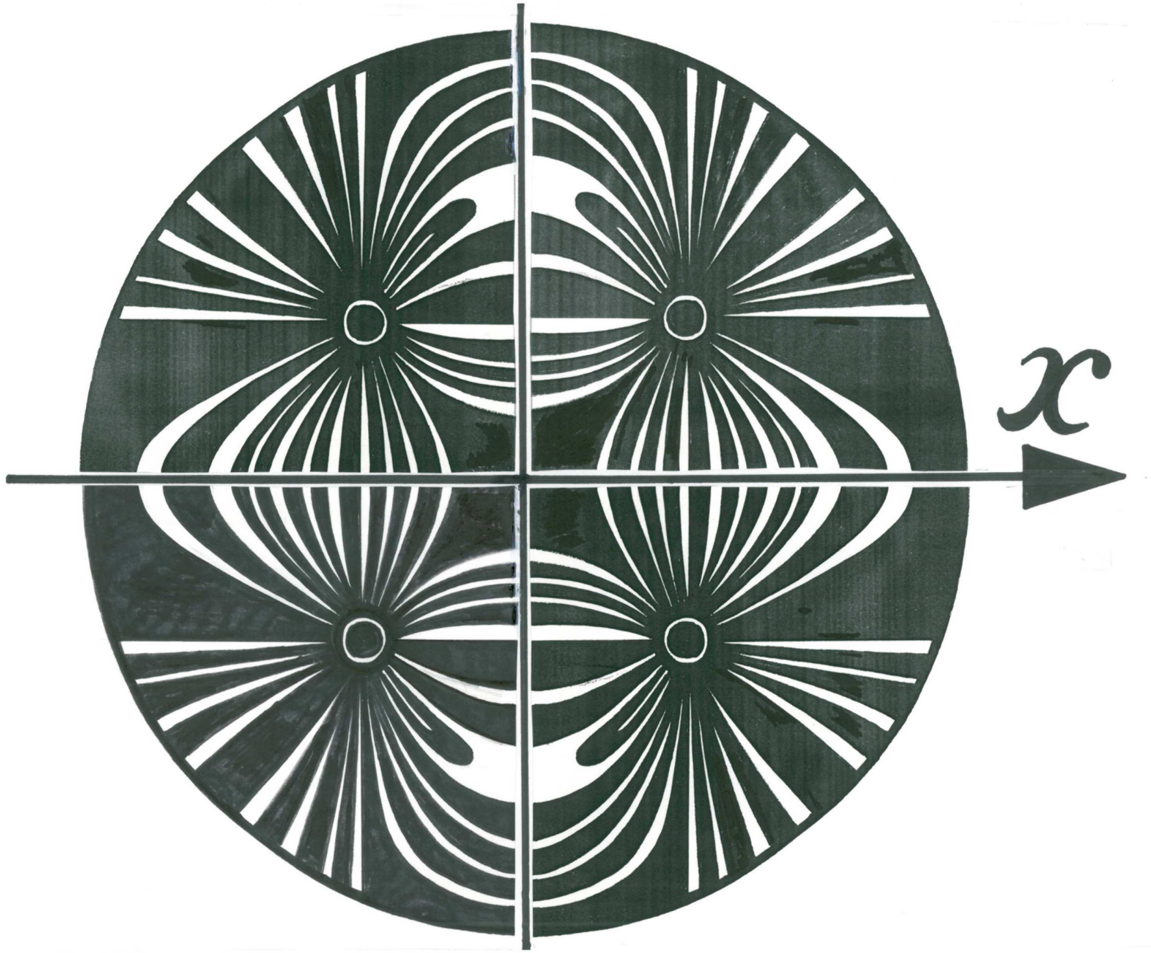
Schon bei nur zwei aufgeblasenen Punkten gelangt man aber schnell an die Kapazitätsgrenze des Computers, und die Bildqualität leidet.

Man kann aber (immer noch) den Versuch wagen, eine solche Mehrpunktaufblasung zu skizzieren...

WIR BLASEN IN VIER PUNKTEN AUF...

Wir blasen den gemusterten Kreis in den vier markierten Punkten auf, indem wir wählen:

$f = x^2 - 1$
$g = y^2 - 1$



... UND ERHALTEN

WOZU AUFBLASUNGEN ?

Die Aufblasungen entsprechen den *eigentlichen birationalen Morphismen* der Algebraischen Geometrie. Dieser Aspekt der Aufblasung ist für die *(birationale) Klassifikation algebraischer Varietäten* von grosser Bedeutung.

Eine ebenso wichtige Eigenschaft der Aufblasungen ist deren *auflösender Effekt.* Dieser Effekt lässt sich an einfachen Beispielen veranschaulichen.

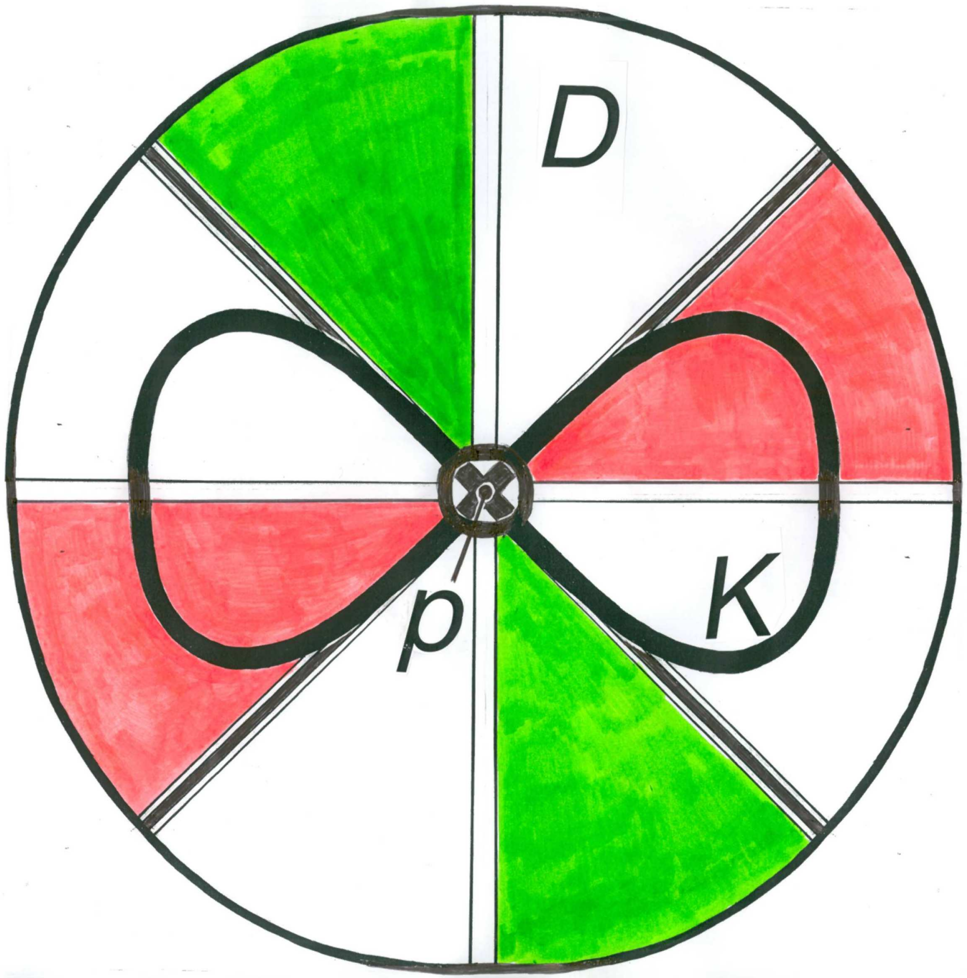
ZUM AUFLÖSENDEN EFFEKT

Wir betrachten in der Kreisscheibe *D* eine Kurve *K* mit einer *Singularität* im Zentrum von *D.* Genauer soll die Kurve dort einen *einfachen Doppelpunkt* haben, also einen Selbstschnitt mit zwei verschiedenen Tangenten.

Wir blasen nun die Kreisscheibe *D* bezüglich *x* und *y* auf und *ziehen die Kurve K auf die Aufblasung Bl(x,y) hoch*. Die so entstehende Kurve auf der Aufblasung bezeichnen wir mit *K'.* Nun tritt *K'* in Erscheinung als Kurve auf dem Möbiusband *Bl(x,y)*.

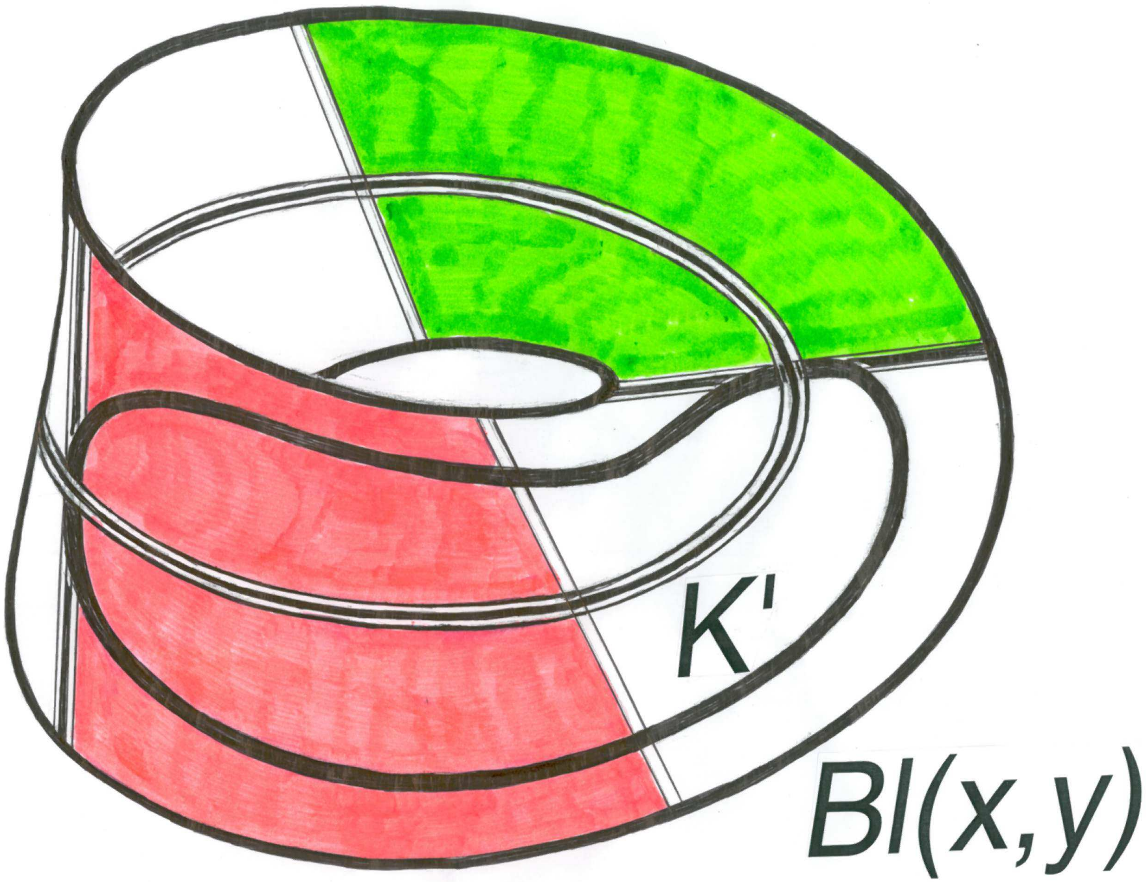
EINE KURVENSINGULARITÄT...

Der Punkt *p* ist eine *Singularität* (oder ein *singulärer Punkt*) der Kurve *K.* Die Kurve verhält sich in *p* anders als in den übrigen Punkten (den *regulären Punkten)*: sie hat nämlich in *p* einen Selbstschnitt, genauer einen einfachen Doppelpunkt.



... WIRD WEGGEBLASEN

Die aufgeblasene Kurve K' ist *singularitätenfrei* !



DESINGULARISIERUNG

Was wir am obigen Beispiel gesehen haben gilt in der Tat viel allgemeiner. Ein fundamentaler Satz der Algebraischen Geometrie besagt (Hironaka, 1964):

Jede komplexe algebraische Varietät lässt sich durch aufblasen desingularisieren (also so aufblasen, dass eine Varietät ohne Singularitäten entsteht).

Es ist allerdings noch nicht bekannt, ob dieses Ergebnis für beliebige, d.h. nicht notwendigerweise komplexe, Varietäten in jeder Dimension gilt.

AUFBLASUNGEN UND ALGEBRA

Ähnlich wie die Aufblasungen unserer Kreisscheibe durch zwei Gleichungen definiert werden, kann man überhaupt jede Aufblasung durch eine algebraische Struktur definieren: eine *Rees-Algebra.*

Man kann Aufblasungen auch untersuchen, indem man die ihnen zugrunde liegenden Rees-Algebren studiert.

Aus diesem Grund ist die Theorie der Rees-Algebren ein wichtiges Teilgebiet der *Kommutativen Algebra...*

... und man sollte sich deshalb nicht wundern, wenn man auch AlgebraikerInnen beim Aufblasen vorfindet...

ALGEBRAIKER-INNEN MIT AUFBLASUNG

VISUALISIERUNG VON AUFBLASUNGEN ALS FORSCHUNGSPROJEKT

Das Projekt *Visualisierung von Aufblasungen* entstand als Seitenzweig unserer Untersuchung der *lokalen Kohomologie von Rees-Ringen.*

Im Bereich dieses auf Veranschaulichung ausgerichteteten Seitenzweiges sind bis jetzt drei Diplomarbeiten und einige, zum Teil populärwissenschaftliche, Veröffentlichungen entstanden.

EIN AKTUELLES VORHABEN

Gemeisam mit der Arbeitsgruppe von Professor P. Schenzel an der Martin-Luther-Universität Halle (Saale) wird versucht, Computerbilder von Aufblasungen mit höherer Auflösung in kürzerer Rechenzeit zu generieren.

Ein erstes Ziel ist die Herstellung von qualitativ hochstehenden Bildern von Mehrpunktaufblasungen.

Ein weiteres Ziel ist die Herstellung hochauflösender animierter Bilder, zur Veranschaulichung von *Deformationen einer Aufblasung innerhalb einer Isotopieklasse.*

DAS NUMERISCHE PROBLEM

Hinter der Frage nach der schnellen Erzeugung von guten Bildern von Aufblasungen verbirgt sich ein Grundproblem der Numerik: *Die genaue und effiziente Berechnung der Werte einer rationalen Funktion in der Nähe einer Unbestimmtheitstelle.*

Das Problem soll mit Hilfe von leistungsfähigen Algorithmen zur *Berechnung der Nullstellen einer algebraischen Gleichung in der Nähe einer Singularität* angegangen werden. Solche Algorithmen werden oft eingesetzt, um Bilder von *algebraischen Flächen mit vielen Singularitäten* zu erzeugen.

SINGULÄRE ALGEBRAISCHE FLÄCHEN

Eine *algebraische Fläche* (im Raum) ist die Menge aller Punkte *(x,y,z)* im Raum, welche einer vorgegebenen algebraischen Gleichung *f(x,y,z) = 0* genügen.

Die *Anzahl der Singularitäten* einer *normalen* algebraischen Fläche ist durch den *Grad der Fläche beschränkt,* im Wesentlichen also durch den *Grad* des *Polynoms f.* (Normal bedeutet hier, dass nur endlich viele Singularitäten vorhanden sind.)

Die Darstellung von normalen Flächen mit vielen Singularitäten ist ein Test für die numerische Leistungsfähigkeit eines Visualisierungsprogramms.

DREI BEISPIELE

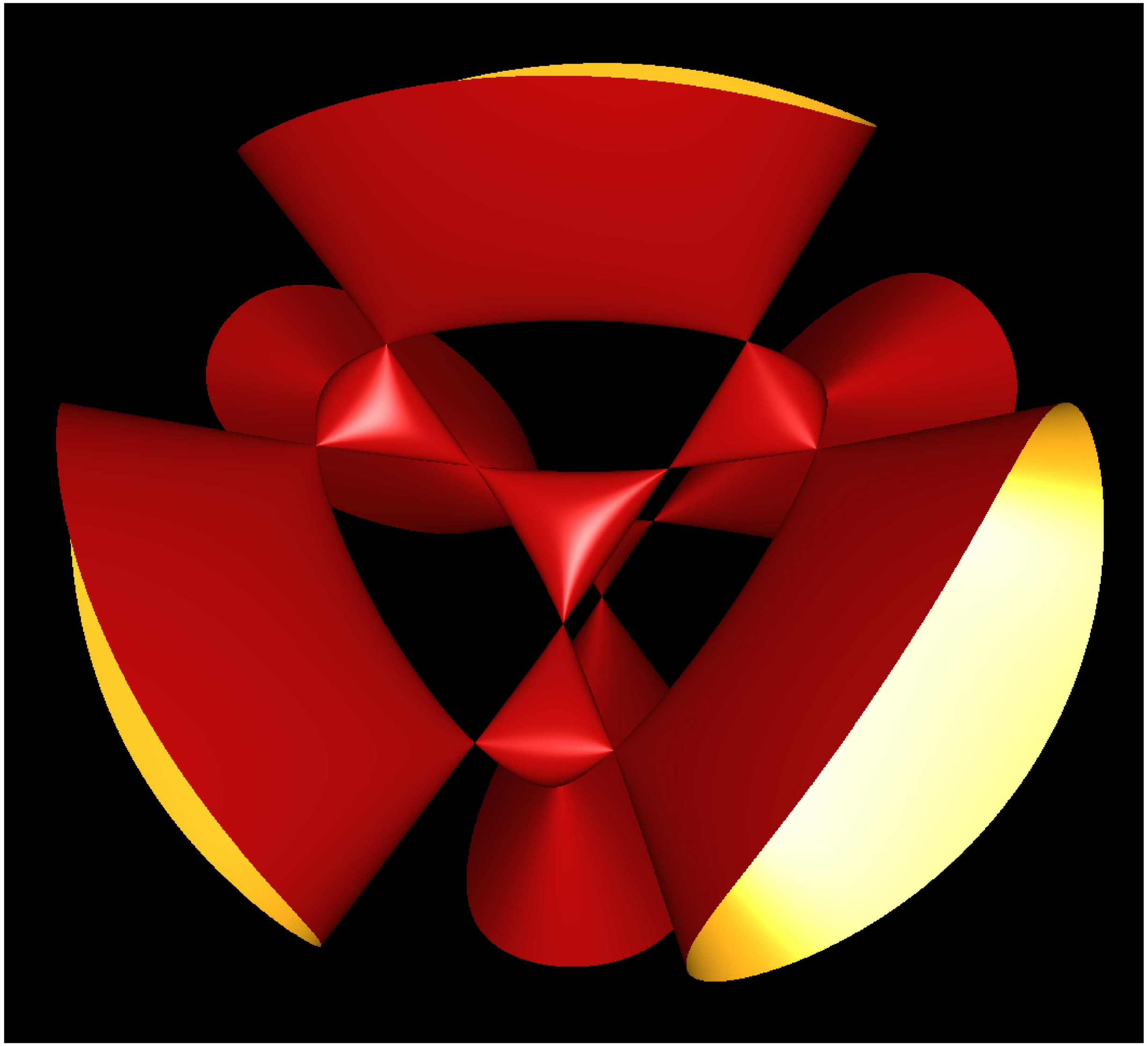
Wir präsentieren drei Beispiele von *hochsingulären normalen algebraischen Flächen,* genauer von Flächen, deren (endliche) Singularitätenzahl beim gegebenen Grad maximal ist:

Die Kummersche Quartik: eine Fläche vom Grad 4 mit 16 Singularitäten.

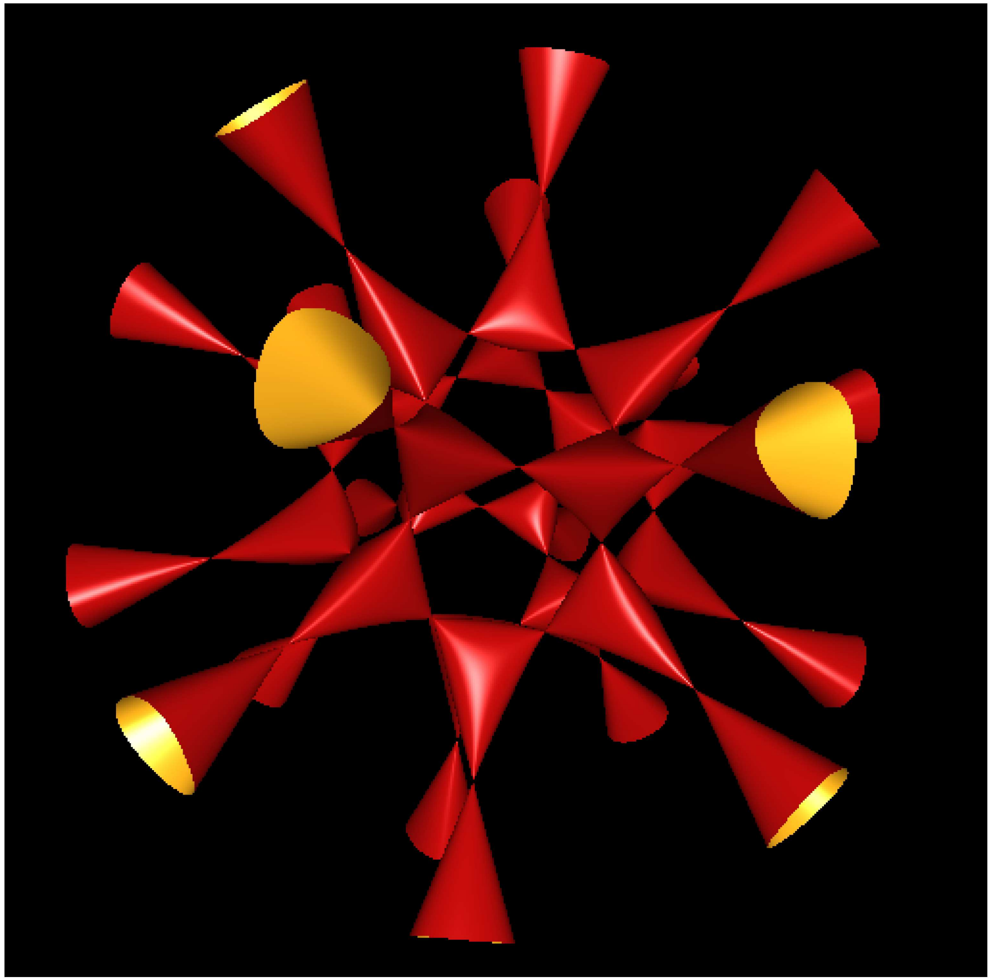
Die Barth'sche Sextik: eine Fläche vom Grad 6 mit 65 Singularitäten.

Die Barth'sche Dezik: eine Fläche vom Grad 10 mit 145 Singularitäten.

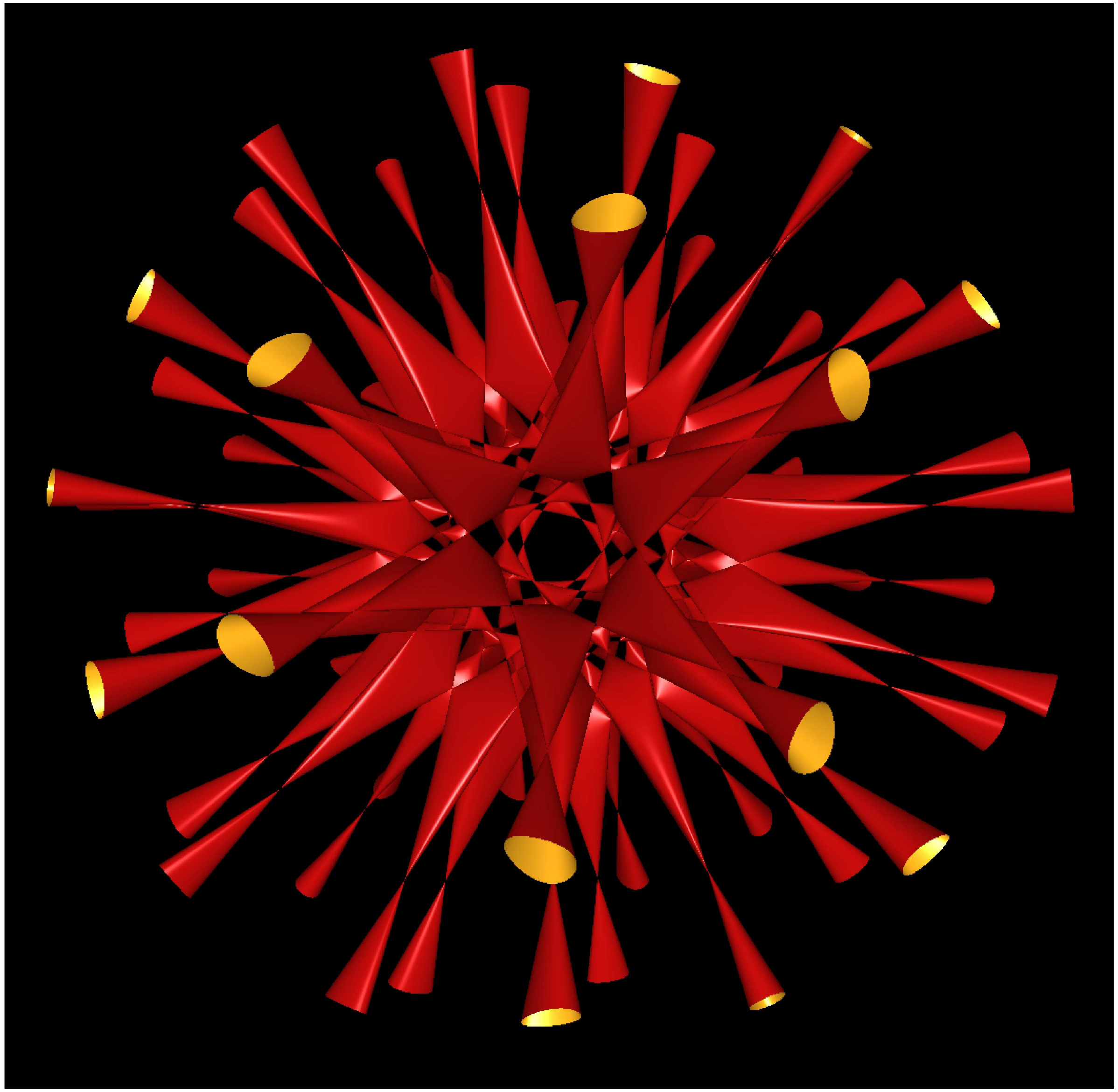
KUMMER'SCHE QUARTIK



BARTH'SCHE SEXTIK



BART'SCHE DEZIK



ANMERKUNG ZU DEN BEISPIELEN

Die drei eben gezeigten Flächen wurden dargestellt mit Hilfe das Programmes *SURF.*

Das Programm SURF ist gekoppelt mit dem Programm *SINGULAR*, einem Hochleistungsprogramm, das speziell für die Bedürfnisse der Algebraischen Geometrie entwickelt wurde. Das Programm SINGULAR ist in der Lage, algebraische Varietäten in höheren Dimensionen “zu berechnen”.

Damit verlässt man (wie in der Algebraischen Geometrie üblich) den Rahmen dessen, was der Anschauung zugänglich ist, und muss das “Auge durch algebraische Hilfsmittel ersetzen”.