Elem. Math. 58 (2003) 133 – 133
0013-6018/03/040133-1
DOI 10.1007/s00017-004-0198-8

Elemente der Mathematik

Zum 100. Geburtstag von J.J. Burckhardt

Am 13. Juli 2003 durfte Johann Jakob Burckhardt, Titularprofessor für Mathematik an der Universität Zürich, in beneidenswerter geistiger Frische seinen hundertsten Geburtstag feiern.

Zu Ehren des Jubilars lud das Mathematische Institut auf den 31. Oktober 2003 zu einem Festkolloquium ein. Das Programm dieses Kolloquiums bestand aus einer Würdigung des Jubilars durch Erwin Neuenschwander (Zürich) und aus zwei Vorträgen, deren Gegenstände das mathematische Wirken von J.J. Burckhardt umreißen: Günther Frei (Zürich) sprach über die Geschichte der Arithmetik der Algebren und Ralph Strebel (Fribourg) über die Beiträge Burckhardts zur Mathematischen Kristallographie.

J.J. Burckhardt habilitierte sich 1933 an der Universität Zürich. Er wurde 1942 zum Titularprofessor befördert und wirkte von 1945 bis zu seiner Pensionierung als Oberassistent am Mathematischen Institut der Universität Zürich. Generationen von Mathematik- und Lehramtsstudierenden haben ihn als kompetenten und gütigen Lehrer erlebt. Sein Wirken ging aber weit über die Grenzen der Universität Zürich hinaus. Für seine vielfältigen Leistungen im Dienste der Wissenschaft ist er sowohl von der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft als auch von der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich zum Ehrenmitglied ernannt worden.

Mit diesem Sonderheft möchte die Redaktion der *Elemente der Mathematik* dem Jubilar herzlich gratulieren und gleichzeitig die beiden Vorträge von G. Frei und R. Strebel einem größeren Kreis von Interessenten zugänglich machen. Beide Vorträge nehmen hauptsächlich Bezug auf die mathematischen Leistungen des jungen Burckhardt. Nicht zu vergessen sind aber auch seine zahlreichen späteren Beiträge zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften. Aus diesem Grunde wurde auch eine Arbeit von Andreas Verdun (Bern) über L. Eulers Einführung und Anwendung von Bezugssystemen in Mechanik und Astronomie in dieses Sonderheft aufgenommen, welche einen Bezug zu Burckhardts Wirken in der Euler-Edition herstellt.

Markus Brodmann
Martin Huber
Jürg Kramer

Elem. Math. 58 (2003) 134 – 140
0013-6018/03/040134-7
DOI 10.1007/s00017-004-0193-0

Elemente der Mathematik

Johann Jakob Burckhardt zum 100. Geburtstag am 13. Juli 2003

Günther Frei

1 Einleitung

Am 13. Juli feierte Johann Jakob Burckhardt seinen 100. Geburtstag. Burckhardt ist vor allem durch seine Arbeiten zur Theorie der Bewegungsgruppen und ihre Anwendung auf die Kristallographie, aber auch durch seine vielseitigen Arbeiten auf dem Gebiet der Geschichte der Mathematik bekannt geworden.

2 Biographie

J.J. Burckhardt entstammt einer alten Basler Familie, deren Stammvater Christoph (Stoffel) Burckhardt-Brand (1490–1578) 1518 aus dem Münstertal im Schwarzwald nach Basel ausgewandert war. Zu J.J. Burckhardts Vorfahren gehört Hieronymus Bernoulli-Ebneter (1669–1760), Bruder der beiden Mathematiker Jakob und Johann Bernoulli. Burckhardts Vater, Wilhelm Burckhardt, ist 102 Jahre alt geworden. Er war Advokat und u.a. Rechtskonsulent am Deutschen Konsulat in Basel. Seine Mutter war Eleonore Vischer. In seiner Geburtsstadt Basel besuchte J.J. Burckhardt von 1914 an das humanistische Gymnasium auf dem Münsterplatz, wo die klassische Bildung mit preussischem Drill vermittelt wurde, und nach der Matura an der Oberen Realschule trat er im Herbst 1922 in die dortige Universität ein, die älteste Universität der Schweiz. Im Sommer 1923 begab sich Burckhardt nach München, wo er Vorlesungen bei O. Perron, F. Hartogs, A. Sommerfeld und bei dem Experimentalphysiker W. Wien hörte, und im folgenden Sommer nach Hamburg, wo H. Rademacher und E. Hecke seine Lehrer waren.

In jenem Jahr erschien beim Springer-Verlag das bekannte Buch des Basler Mathematikers Andreas Speiser mit dem Titel *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, das auf den jungen Burckhardt einen grossen Eindruck machte, insbesondere die Abschnitte über Kristallographie. Um in die Nähe von Speiser zu rücken, immatrikulierte er sich im Herbst 1924 an der Universität Zürich, wo neben Speiser Rudolf Fueter und Eugenio G. Togliatti die Ordinariate innehatten. Astronomie hörte er bei Alfred Wolfer und Theoretische Physik bei Erwin Schrödinger. Gleichzeitig belegte Burckhardt am Eidgenössischen Polytechnikum Vorlesungen bei Hermann Weyl und beim Mineralogen Paul Niggli und das Mathematische Seminar von Pólya, dem auch Weyl und M. Plancherel beiwohnten, und aus dem Pólyas Buch *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (gemeinsam mit G. Szegö; Berlin, 1925) hervorgegangen ist. Den Kurs über Kristallographie bei Leonhard Weber hatte ihm Speiser ausdrücklich nahegelegt. Im Mai 1927 erwarb Burckhardt das Diplom für das höhere Lehramt mit Auszeichnung, und noch im selben Jahr promovierte er bei Speiser mit seiner Arbeit *Die Algebren der Diedergruppen*. Darin untersuchte Burckhardt die Struktur der Gruppenalgebra von Diedergruppen.

In jenem Winter besuchte Burckhardt auch ein Seminar bei Hadamard in Paris, und vom Sommer 1928 an folgte er – auf Anraten von Speiser – in Göttingen den schwierigen Vorlesungen von Emmy Noether über nicht-kommutative Algebra (SS 1928), nicht-kommutative Arithmetik (SS 1929) und über Algebra hyperkomplexer Grössen (WS 1929/30), die auch von B.L. van der Waerden, M. Deuring und G. Köthe besucht wurden. Daneben belegte Burckhardt die Vorlesung von G. Herglotz über Höhere Geometrie und das Mathematische Seminar bei R. Courant, in dem auch Hilbert anwesend war. Dort traf er auch auf Otto Neugebauer, mit dem er oft den Mittagstisch teilte. Zu diesem Kreis gehörten auch B.L. van der Waerden, Paul Alexandroff, Emmy Noether, Willy Feller, Stephan Cohn-Vossen, Gottfried Köthe, Hans Levy und Franz Rellich. Nicht zuletzt wegen der hetzerischen und gewalttätigen Umtriebe von Kommunisten und Nationalsozialisten, die sich fast täglich Strassenschlachten lieferten, verzichtete Burckhardt auf eine Assistentenstelle und kehrte schon im Sommer 1930 nach Basel zurück, wo er an seiner arithmetischen Begründung der Kristallographie zu arbeiten begann. In Basel war er als Hilfslehrer an der Unteren Realschule tätig; sodann betreute er eine halbe Assistentenstelle bei Fueter in Zürich. Im Herbst 1932 habilitierte er sich an der Universität Zürich mit der Schrift *Zur Theorie der Bewegungsgruppen* (Comm. Math. Helvet. 6 [1933], 159–184). Darauf unterrichtete er aushilfsweise am Technikum in Winterthur und an der Töchterschule auf der Hohen Promenade in Zürich. 1943 und 1944 vertrat er den beurlaubten Otto Spiess in Basel im Lehrauftrag. Eine Berufung nach Kairo lehnte er ab. 1942 erhielt er an der Universität Zürich den Titel eines Professors und 1945 eine halbe Stelle als Oberassistent, die auf Betreiben van der Waerdens 1954 zu einer vollbezahlten Stelle erweitert wurde, die Burckhardt bis zu seiner Pensionierung im Jahre 1970 innehatte.

3 Arbeiten

Noch während der Studienzeit in Zürich hat Burckhardt – im Auftrag von Speiser – Dicksons Buch *Algebras and Their Arithmetics* (1923) ins Deutsche übersetzt. Bald nach 1923 war dieses Buch in Speisers Hände geraten, worauf Speiser Dickson den Vorschlag machte das Buch zu übersetzen. Daraufhin sandte Dickson eine vollständig neue und stark erweiterte Fassung, die dann im wesentlichen von J.J. Burckhardt ins Deutsche übertragen und von Speiser mit einem 13. Kapitel versehen wurde. Das Buch erschien 1927 bei Orell Füssli in Zürich unter dem Titel *Algebren und ihre Zahlentheorie*. Es hat auf die Arbeiten der deutschen Zahlentheoretiker, insbesondere auf Artin und Hasse einen gewaltigen Einfluss ausgeübt, die hofften, damit die Klassenkörpertheorie auf nicht-abelsche Zahlkörpererweiterungen verallgemeinern zu können. Obwohl sich dieses Ziel nur zu einem sehr kleinen Teil erreichen liess, ist dadurch die Theorie der nicht-kommutativen Algebra entscheidend geprägt und die Kohomologietheorie von Gruppen erst möglich gemacht worden.

Aus der Verbindung von Kristallographie und der Darstellung von Gruppen sind dann auch Burckhardts erste Arbeiten entstanden. Seine Untersuchungen über kristallographische Gruppen beruhen auf Arbeiten von A. Schoenflies und E.S. Fedorow, die um 1890 die dreidimensionalen diskreten Bewegungsgruppen angegeben hatten. 1924 leisteten Pólya und Niggli dasselbe im zweidimensionalen Fall. Für die n-dimensionalen Bewegungsgruppen hatten G. Frobenius und L. Bieberbach einige allgemeine Struktursätze aufgestellt. Diese erweiterte Burckhardt derart, dass er alle 230 Bewegungsgruppen im dreidimensionalen Raum explizite aufstellen konnte. Dazu hatte er den Begriff der Kristallklasse zum Begriff der *arithmetischen Kristallklasse* verfeinert, von denen es im Raume 73 gibt. Diese Arbeiten führten – auf Anregung van der Waerdens – zu seinem umfassenden Standardwerk *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie* (Birkhäuser, 1947; zweite, neubearbeitete Auflage 1966). Später ist ein weiteres Werk zu diesem Thema mit dem Titel *Die Symmetrie der Kristalle* (Birkhäuser, 1988) hinzugekommen, das an Hand des Symmetriebegriffes eine ausführliche und lebendige Geschichte der Kristallographie vermittelt. Als im Zürcher Mathematischen Kolloquium, das jeweils am Freitagnachmittag von Universität und Polytechnikum gemeinsam veranstaltet wurde, Paul Finslers Vortrag über die Grundlagen der Mathematik von Weyl arg kritisiert wurde – was bei Finsler einen Nervenzusammenbruch und eine Beurlaubung zur Folge hatte – wurde Burckhardt von Fueter und Speiser ersucht, die Ideen Finslers klar und verständlich darzulegen. Das geschah im *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* unter dem Titel *Neubegründung der Mengenlehre* (Bd. 48 [1938], 146–165, und Bd. 49 [1939], 146–155).

Wie schon angedeutet, hat sich Burckhardt mit vielen Fragen der Geschichte der Mathematik beschäftigt. So konnte er nachweisen, dass Al-Khwârismî für seine Planetentafeln diejenigen von Alfazârî benutzte, die ihrerseits auf dem System von Brahmagupta beruhen (1956, 1961). Mit van der Waerden untersuchte er weiter das astronomische System der Persischen Tafeln (1968). Im *Archive for History of Exact Sciences* berichtete er über die Geschichte der Entdeckung der 230 Raumgruppen (Vol. 4 [1967], 235–246) und über den Briefwechsel von E.S. Fedorow und A. Schoenflies (Vol. 7 [1971], 91–141) sowie über den von E.S. Fedorow und Felix Klein (Vol. 9 [1972], 85–93).

Auch gab Burckhardt eine Facsimile-Ausgabe des Bamberger Rechenbuches des Ulrich Wagner von 1483 mit einem Nachwort (München, 1966) heraus, von dem er ein Exemplar in der Zentralbibliothek in Zürich entdeckt hatte*), sowie die Gesammelten Mathematischen Abhandlungen von Ludwig Schläfli (Birkhäuser, 1953–56). Für die Edition der Werke von Euler schrieb er verschiedene Beiträge. Dazu war er Herausgeber des Bandes III/2 der *Opera Omnia Euleri* und Mitherausgeber des Basler Euler-Gedenkbandes (Birkhäuser, 1983). In den Beiheften zur Zeitschrift *Elemente der Mathematik* bei Birkhäuser verfasste er eine Biographie von Ludwig Schläfli (1948) und eine Geschichte der Mathematik an der Universität Zürich 1916–1950 (1980). Ferner stammt von ihm eine ganze Reihe weiterer Biographien, die in dem Standardwerk *Dictionary of Scientific Biography* und in der *Neuen Deutschen Biographie* erschienen sind. Am *Wissenschaftshistorischen*

*) Ein bisher einziges weiteres Exemplar existiert noch in Zwickau. Es wurde 1988 von Eberhard Schröder als Facsimile herausgegeben, allerdings ohne Hinweis auf Burckhardt.

Kolloquium an der Universität Zürich nahm Burckhardt bis ins hohe Alter regelmässig teil. Noch immer ist er als Rezensent für das *Zentralblatt der Mathematik* tätig.

Burckhardt war von 1950 bis 1980 Redaktor der Zeitschrift *Commentarii Mathematici Helvetici*, und von 1952 bis 1975 war er Mitglied der *Schweiz. Euler-Kommission*, viele Jahre auch deren Vize-Präsident. Für seine Verdienste um die *Schweizerische Mathematische Gesellschaft*, deren Präsident er 1954/55 war, und um die *Naturforschende Gesellschaft in Zürich*, die er in der Kommission der Zentralbibliothek in Zürich von 1946 bis 1976 vertrat, haben ihn diese beiden Gesellschaften zu ihrem Ehrenmitglied ernannt. Im August 1989 wurde er zum Ehrenmitglied der *International Society for Interdisciplinary Studies of Symmetry* gewählt.

Dem hochbetagten und geistig immer noch rüstigen Jubilar wünschen wir weiterhin Gesundheit und ungebrochene Schaffenskraft.

Dank: Meinem Freund Emil Fellmann möchte ich herzlich danken für die Unterstützung, die er mir bei der Redaktion dieses Beitrages gewährte.

Veröffentlichungen von J. J. Burckhardt

[1] Mit-Übersetzer (mit E. Schubarth) von: *L.E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie*. Orell Füssli, Zürich 1927.

[2] *Die Algebren der Diedergruppen*. Dissertation, Univ. Zürich 1928, 25 Seiten.

[3] Bemerkungen zur arithmetischen Berechnung der Bewegungsgruppen. *Comm. Math. Helvet.* 2 (1930), 91–98.

[4] *Zur Kristallographie*. Verh. Schweiz. Naturf. Ges., St. Gallen 1930, 258–259.

[5] Zur Theorie der Bewegungsgruppen. *Comm. Math. Helvet.* 6 (1933), 159–184 (Habilitationsschrift).

[6] *Gruppen linearer inhomogener Substitutionen*. Verh. Schweiz. Naturf. Ges., Zürich 1934, 266.

[7] *Über lineare inhomogene Substitutionsgruppen*. Comptes rendus des Int. Math. Kongresses, Oslo 1936, 25–26.

[8] Bewegungsgruppen in mehrdimensionalen Räumen. *Comm. Math. Helvet.* 9 (1937), 284–302.

[9] Zur Neubegründung der Mengenlehre. *Jahresbericht der DMV* 48 (1938), 146–165.

[10] *Bericht des Steiner-Schläfli Komitees*. Verh. Schweiz. Naturf. Ges., Chur 1938, 109.

[11] *Bemerkungen zu Schläflis „Theorie der vielfachen Kontinuität"*. Verh. Schweiz. Naturf. Ges., Chur 1938, 109–110.

[12] Zur Neubegründung der Mengenlehre. Folge. *Jahresbericht der DMV* 49 (1939), 146–155.

[13] *Ludwig Schläfli*. In: Grosse Schweizer Forscher. Atlantis Verlag, Zürich 1939, 224–225.

[14] *Cournot und die Philosophie der Mathematik*. Neue Zürcher Zeitung, No. 1702, Blatt 1, 27, Sept. 1939.

[15] Über konvexe Körper mit Mittelpunkt. *Vierteljahrsschrift Naturf. Ges. Zürich* 85 (1940), Beiblatt 32; und Festschrift Rudolf Fueter, Zürich 1940, 149–154.

[16] *Ein geometrischer Beweis des Satzes von Minkowski über konvexe Körper mit Mittelpunkt*. Verh. Schweiz. Naturf. Ges., Locarno 1940, 110.

[17] *Der Nachlass von Ludwig Schläfli.* Verh. Schweiz. Naturf. Ges., Basel 1941, 82.

[18] *Die Zeit.* Neue Zürcher Zeitung, No. 1586, Blatt 2, 8. Okt. 1941.

[19] *Der mathematische Nachlass von Ludwig Schläfli* (*1814–1895*) *in der Schweizerischen Landesbibliothek*. Mitteilungen der Naturf. Ges. Bern aus dem Jahre 1942, 1–22.

[20] *Leonhard Euler, Opera omnia, Series tertia, Vol. 2: Rechenkunst. Accesserunt commentationes ad physicam generalem pertinentes et miscellanea*. Herausgegeben und kommentiert zusammen mit Edmund Hoppe und Karl Matter. Geneva 1942.

[21] *Die Bewegungsgruppen der doppelt zählenden Ebene*. Festschrift zum 60. Geburtstag von Andreas Speiser, Orell Füssli, Zürich 1945, 153–159.

[22] *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften Bd. 13. Birkhäuser, Basel 1947 (186 Seiten).

[23] *Ludwig Schläfli*. Kurze Mathematiker Biographien. Beiheft 4 zur Zeitschrift *Elemente der Mathematik*, Birkhäuser, Basel 1948 (23 Seiten).

[24] *Ludwig Schläfli. Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Herausgegeben zusammen mit L. Kollros und H. Hadwiger im Namen des Steiner-Schläfli-Komitees der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Birkhäuser, Basel 1950, 1953, 1956 (3 Bände).

[25] Rudolf Fueter 1880–1950, Nekrolog. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich* 95 (1950), 284–287.

[26] Besprechung von: Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, Bd. 1. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich* 100 (1955), 152.

[27] *Die astronomischen Tafeln von Al-Kwârismî*. Verh. Schweiz. Naturf. Ges., Basel 1956, 73–75; und *L'Enseignement Mathématique* 2 (1956).

[28] Leonhard Euler. *Echo* 6 (1957).

[29] *Zum mittelalterlichen Rechnen in der Schweiz*. Verh. Schweiz. Naturf. Ges., Glarus 1958; und *L'Enseignement Mathématique* 4 (1958), 305–306.

[30] *Das Bamberger Rechenbuch von 1483*. Verh. Schweiz. Naturf. Ges., Glarus 1958, 95–96.

[31] Zwei griechische Ephemeriden. *Osiris* 13 (1958), 79–92; und *L'Enseignement Mathématique* 3 (1957), 318–319.

[32] *Über die zweifarbigen Bewegungsgruppen*. Atti del VI Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Napoli 1959, 240.

[33] Farbgruppen. *Zeitschrift für Kristallographie* 115 (1961), 231–234. Gemeinsam mit B.L. van der Waerden.

[34] Die mittleren Bewegungen der Planeten im Tafelwerk des Kwârizmî. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich* 106 (1961), 213–231.

[35] Besprechung von: O. Neugebauer, The Astronomical Tables of Al-Kwârismî. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich* 107 (1962), 348–349.

[36] Übersetzung von: *H.S.M. Coxeter, Unvergängliche Geometrie*. Birkhäuser Verlag, Basel 1963 (552 Seiten).

[37] *Bamberger Rechenbuch* 1483. Facsimile-Ausgabe mit Nachwort. Graphos, München 1966.

[38] *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*. Zweite, neubearbeitete Auflage. Birkhäuser Verlag, Basel 1966 (209 Seiten mit 67 Figuren).

[39] Zur Geschichte der Entdeckung der 230 Raumgruppen. *Arch. Hist. Exact Sc.* 4 (1967), 235–246.

[40] Besprechung von: Bernard R. Goldstein, Ibn Al-Muthannâ's Commentary on the Astronomical Tables of Al-Kwârismî. *Sudhoffs Archiv* (1967), 107–108.

[41] Das astronomische System der Persischen Tafeln I. *Centaurus* 13 (1968), 1–28. Gemeinsam mit B.L. van der Waerden.

[42] *Lesebuch zur Mathematik. Quellen von Euklid bis heute*. Räber Verlag, Luzern 1968 (79 Seiten).

[43] Über die Entdeckung der Paralleloeder. *Janus* 56 (1969), 241–243.

[44] Alfred Kienast-Steffen, Nekrolog. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich* 4 (1969), 504–507.

[45] Besprechung von: Bernard R. Goldstein, Ibn Al-Muthannâ's Commentary on the Astronomical Tables of Al-Khwârizmî. *Isis* 60 (1969), 240–242.

[46] Andreas Speiser 10.6.1885–12.10.1970. Nekrolog. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich* 115 (1970), 471–474.

[47] Der Briefwechsel von E.S. von Fedorow und A. Schoenflies, 1889–1908. *Arch. Hist. Exact Sc.* 7 (1971), 91–141.

[48] Der Briefwechsel von E.S. von Fedorow und F. Klein, 1893. *Arch. Hist. Exact Sc.* 9 (1972), 85–93.

[49] Besprechung von: David Pingree, The Thousands of Abû Ma'shar. *Isis* 63 (1972), 275–276.

[50] Paul Mathieu. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich* 117 (1972), 386–387.

[51] Besprechung von: Al-Bitruji, The Principles of Astronomy. *Sudhoffs Archiv* 57 (1972), 434–435.

[52] Besprechung von: I. Bernard Cohen, Introduction to Newton's Principia. *Elem. Math.* (1972).

[53] Mitarbeit an *Leonhardi Euleri Opera Omnia. Commentationes opticae*. 5th part, Series III, Band 9, Birkhäuser, 1973.

[54] Besprechung von: H.S.M. Coxeter, Projective Geometry. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich* 119 (1974), 466–467.

[55] *Leonhard Euler, Ein neuer Abschnitt in der Edition seines Gesamtwerkes*. Neue Zürcher Zeitung, Beilage Forschung und Technik, Nr. 87, 16. April 1975, 61.

[56] Address on the 65th Birthday of J.E. Hofmann at Oberwolfach. *Historia Mathematica* 2 (1975), 137–146.

[57] Mitarbeit an *Leonhardi Euleri Opera Omnia*. Series IV, Band A 1, Birkhäuser, 1975.

[58] Vier Briefe von L. Euler an A. von Haller. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich* 121 (1976), 363–366.

[59] Besprechung von: Otto Neugebauer, A History of Ancient Mathematical Astronomy. *Sudhoffs Archiv* 62 (1978), 97–100.

[60] *Die Mathematik an der Universität Zürich 1916–1950 unter den Professoren R. Fueter, A. Speiser, P. Finsler*. Beiheft Nr. 16 zur Zeitschrift *Elemente der Mathematik*, Birkhäuser Verlag, Basel 1980 (48 Seiten).

[61] Leonhard Euler, 1707–1783. *Mathematics Magazine* 56 (1983), 262–273.

[62] *Die Euler Kommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft – ein Beitrag zur Editionsgeschichte*. In: Leonhard Euler, Beiträge zu Leben und Werk; herausgegeben von J.J. Burckhardt, E.A. Fellmann, W. Habicht, Birkhäuser, 1983, 501–510.

[63] *Euleriana – Verzeichnis des Schrifttums über Leonhard Euler*. In: Leonhard Euler, Beiträge zu Leben und Werk; herausgegeben von J.J. Burckhardt, E.A. Fellmann, W. Habicht, Birkhäuser, 1983, 511–555.

[64] Die Entdeckung der 32 Kristallklassen durch M.L. Frankenheim im Jahre 1826. *Neues Jahrbuch für Mineralogie* 10 (1984), 481–482.

[65] Paul Nigglis Verdienste um die Herausgabe des Buches „Die Bewegungsgruppen der Kristallographie". *Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich* 130 (1985), 115–117.

[66] Euler's Work on Number Theory: A Concordance for A. Weil's Number Theory. *Historia Mathematica* 13 (1986), 28–35.

[67] *Studienzeit in Zürich.* In: Erwin Schrödinger, Dokumente, Materialien und Bilder zur 100. Wiederkehr des Geburtstages. Herausgegeben von Gabriele Kerber, Auguste Dieck, Wolfgang Kerber. Fassbänder, Wien 1987, 70–71.

[68] *Die Symmetrie der Kristalle. Von René-Just Haüy zur kristallographischen Schule in Zürich*. Birkhäuser Verlag, Basel 1988 (196 Seiten).

[69] *The Symmetry of Crystals.* In: Symmetry of Structure, an Interdisciplinary Symposium, Abstracts Vol. I, Budapest 1989, 50–53.

[70] *Ansprache zum 65. Geburtstag von J.E. Hofmann*. In: Joseph Ehrenfried Hofmann, Ausgewählte Schriften, Bd. 1. Georg Olms Verlag, Hildesheim 1990, 41–50.

[71] *The Correspondence Fedorov-Schoenflies: The Groups Pm, Pc, Cm, Cc*. In: Symmetry, An Interdisciplinary and International Journal VCH, 1991, Vol. 2.

[72] *Georges [de Rham] und die Commentarii Mathematici 1950–1966*. In: Georges de Rham 1903–1990 (édité par D. Bach, O. Burle, P. de la Harpe). Dupuis, Le Brassus 1995, 67–68.

[73] Artikel in *Neue Deutsche Biographie*, München über: Rudolf Fueter, Carl Friedrich Geiser, Carl Heinrich Graeffe (1964), Heinz Hopf (1972; 607), Marcel Grossmann.

[74] Artikel in *Dictionary of Scientific Biography* über: Rudolf Fueter (Vol. 5, 1972, 206), Carl Friedrich Geiser (Vol. 5, 1972, 339–340), Carl Heinrich Graeffe (Vol. 5, 1972, 490), Marcel Grossmann (Vol. 5,

1972, 554–555), Ferdinand Rudio (Vol. 11, 1972, 589), Ludwig Schläfli (Vol. 12, 1972, 170–173), Jakob Steiner (Vol. 13, 1972, 12–22), Rudolf Wolf (Vol. 14, 1972, 480–481).

[75] Referate im *Zentralblatt der Mathematik*.

[76] Referate in *Mathematical Reviews*.

Günther Frei
Lützelstrasse 36
CH–8634 Hombrechtikon, Schweiz
e-mail: g.frei@active.ch

Elem. Math. 58 (2003) 141 – 155
0013-6018/03/040141-15
DOI 10.1007/s00017-004-0202-3

Elemente der Mathematik

Burckhardtsche Bestimmung der Raumgruppen I

Ralph Strebel

1 Einleitung

Die *Geometrische Kristallographie* hat zum Ziel, die räumliche Verteilung der Atome, Ionen oder Moleküle eines Kristalls nach ihren Symmetrien zu klassifizieren. Um die Klassifikation eindeutig zu machen, muss man festlegen, welche räumlichen Verteilungen und welche Isometrien des Raumes zugelassen sind, und wann die Symmetriegruppen von zwei Kristallstrukturen als gleichwertig betrachtet werden. Der Mathematiker A.M. Schoenflies (1853–1928) traf in seinem 1891 erschienenen Buch *Krystallsysteme und Krystallstructur* die Festsetzungen, die heute noch in der Kristallographie üblich sind: als Anordnung wird jedes *regelmässige* Punktsystem $\mathcal{P}$ zugelassen, also jede endliche Vereinigung von Punktgittern; jede Isometrie des Raumes, die $\mathcal{P}$ auf sich abbildet, gilt als Symmetrie von $\mathcal{P}$; zwei Symmetriegruppen G, G' sind gleichberechtigt, wenn sie *eigentlich affin äquivalent* sind, das heisst, wenn es eine *orientierungserhaltende affine* Transformation α des Raumes gibt, derart, dass G' gleich $\alpha \cdot G \cdot \alpha^{-1}$ ist.

Schoenflies bezeichnete die Symmetriegruppen der regelmässigen Punktsysteme als *Raumgruppen* ([13], Kap. 6, §1) und fand 230 eigentlich affine Klassen (oder Typen) von Raumgruppen. Der Geometer und Kristallograph E.S. Fedorov (1853–1919) stiess um 1890 auf die gleichen Klassen von Symmetriegruppen, als er die regelmässigen Einteilungen des Raumes bestimmte (s. [9]).

Beide Klassifikationen werden durch geometrische Analyse der Anordnung der Symmetrie-Elemente – der Dreh- oder Schraubenachsen, der Spiegelungs-, Gleitspiegelungs- oder Drehspiegelungsebenen – einer Raumgruppe gewonnen. In den Jahren 1930 bis 1936 erarbeitete dann J.J. Burckhardt ein *algebraisches* Bestimmungsverfahren ([4], [5] und [6]), mit dem er in seinem Lehrbuch *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie* die Raumgruppen des 3-dimensionalen Raumes erneut konstruierte. Sein Verfahren erlaubt es, auch die Raumgruppen in Euklidischen Räumen E^n höherer Dimension zu bestimmen. Für $n = 4$ ist diese umfangreiche Aufgabe 1973 mit Hilfe von Grossrechnern abgeschlossen worden; danach gibt es 4895 eigentlich affine Typen (s. [3]).

In diesem Artikel erläutere ich zunächst die Begriffe des Gitters und der Raumgruppe durch Beispiele und ausgewählte Ergebnisse (Abschnitte 2 und 3). Danach skizziere ich zwei Verfahren zur Konstruktion von Raumgruppen: die geometrische Methode von Schoenflies [13] und den algebraischen Zugang von Burckhardt. Da meine Skizze die

Burckhardtsche Methode aber nicht angemessen darstellt, trage ich einige ihrer Einzelheiten in der Fortsetzung [14] dieses Aufsatzes nach.

2 Gitter

Gitter sind Untergruppen von Euklidischen Räumen mit speziellen Eigenschaften. Sie sind für die Raumgruppen aus zwei Gründen wichtig: ihre Bahnen, genannt *Punktgitter*, liefern den einfachsten Typ eines regelmässigen Punktsystems und die Translationsvektoren der Translationen einer Raumgruppe bilden ein Gitter.

2.1 Grundbegriffe

Im folgenden bezeichnet $E = (V, \langle -,- \rangle)$ einen Euklidischen Vektorraum.

Definition 2.1 Ein *Gitter* Γ von E ist eine diskrete Untergruppe von E, die ein Erzeugendensystem des Vektorraumes V enthält.

Die gegebene Definition eines Gitters lässt sich etwas konkreter fassen:

Satz 2.2 *Jedes Gitter Γ in $E^n = (V^n, \langle -,- \rangle)$ enthält eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ des Vektorraumes V^n, bezüglich welcher die Punkte von Γ gerade die ganzzahligen Linearkombinationen $\sum \lambda_i b_i$ sind. Umgekehrt bilden die ganzzahligen Linearkombinationen jeder Basis von V^n ein Gitter von E.*

Beweis. Die erste Behauptung kann so begründet werden. Nach Definition enthält Γ eine Vektorraumbasis, etwa $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Diese Basis gibt Anlass zu einer Fahne von Unterräumen

$$U_1 = \mathbb{R}u_1, \;\; U_2 = \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2, \ldots, U_n = V^n.$$

Weil Γ diskret ist, enthält jede Kugel $K_r = \{v \in V \mid \|v\| \leq r\}$ nur endlich viele Gitterpunkte. Insbesondere gibt es daher auf der Geraden U_1 einen Gitterpunkt minimaler, positiver Norm w_1; er erzeugt das Teilgitter $\Gamma \cap U_1$. In der Ebene U_2 betrachten wir sodann alle Geraden, die zu U_1 parallel sind und einen Gitterpunkt $x \in \Gamma \cap U_2$ enthalten. Jede dieser Geraden enthält einen Gitterpunkt $y \in \Gamma \cap U_2$, dessen Orthogonalprojektion auf U_1 höchstens die Norm $\frac{1}{2}\|w_1\|$ hat. Aus der Endlichkeit der Durchschnitte $\Gamma \cap K_r$ folgt daher, dass es in U_2 eine Gerade $w_2 + U_1$ gibt, die von U_1 kleinsten, positiven Abstand aufweist. Es erzeugt dann (w_1, w_2) das Teilgitter $\Gamma \cap U_2$. Das gegebene Argument lässt sich analog auf die Gitterpunkte in $U_3 \setminus U_2$, $U_4 \setminus U_3, \ldots$ anwenden und liefert eine Vektorraumbasis $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ von V, welche die Bedingung $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot w_1 + \mathbb{Z} \cdot w_2 + \cdots + \mathbb{Z} \cdot w_n$ erfüllt.

Die zweite Behauptung ergibt sich aus dem Umstand, dass jede geordnete Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ von V^n einen linearen Isomorphismus $L_{\mathcal{B}} \colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$ induziert, der $\mathbb{Z}^n$ auf das Gitter Γ der ganzzahligen Linearkombinationen von $\mathcal{B}$ abbildet. Da $L_{\mathcal{B}}$ und ihre Umkehrabbildung stetig sind, ist das Bild der diskreten Gruppe $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ unter $L_{\mathcal{B}}$, also Γ, eine diskrete Untergruppe von V. □

Ebenso wie regelmässige Punktsysteme können auch Gitter Symmetrien haben. Eine für das folgende zweckmässige Definition der Symmetriegruppe eines Gitters ist diese:

Definition 2.3 Die *Symmetriegruppe* $\mathrm{S}(\Gamma)$ eines Gitters Γ von E besteht aus den orthogonalen Abbildungen $\varphi \colon E \xrightarrow{\sim} E$, die Γ auf sich abbilden.

2.2 Beispiele
Seien $V = \mathbb{R}^n$ und $\langle -, - \rangle$ das Skalarprodukt, das dem Paar (x, y) das Matrizenprodukt $x^t \cdot y$ zuordnet. Seien $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^n$. Die Gruppe $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist diskret und enthält eine Basis von $\mathbb{R}^n$, sie ist also ein Gitter von $E^n = (\mathbb{R}^n, \langle -, - \rangle)$. Ebenso ist jede Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$, die ein Erzeugendensystem des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ enthält, ein Gitter von $\mathbb{R}^n$. Die folgenden Teilmengen S_n, S'_n und S''_n erzeugen daher Gitter Γ_n, Γ'_n und Γ''_n von E^n:

$$S_n = \{\pm 2e_\ell \mid 1 \leq \ell \leq n\} \qquad \text{für } n \geq 1, \tag{2.1}$$
$$S'_n = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \qquad \text{für } n \geq 2, \tag{2.2}$$
$$S''_n = S_n \cup \{e_1 + e_2 + \cdots + e_n\} \qquad \text{für } n \geq 3. \tag{2.3}$$

Sie verallgemeinern die kubischen Gitter der Kristallographen.

Die Gitter Γ_2 und Γ'_2 können wie in Fig. 1 gezeigt veranschaulicht werden.

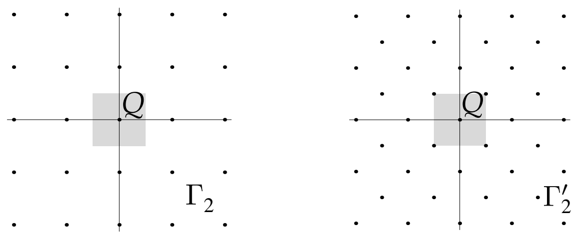


Fig. 1

Das Gitter Γ_2 ist quadratisch; seine Symmetriegruppe $\mathrm{S}(\Gamma_2)$ fällt mit jener des Quadrates $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \big| |x_i| \leq 1\}$ zusammen; sie besteht also aus 4 Drehungen um $(0,0)^t$ sowie den Spiegelungen an den Koordinatenachsen und an den Diagonalen von Q. Das Gitter Γ'_2 ist ebenfalls quadratisch. Da $\mathrm{S}(\Gamma'_2) = \mathrm{S}(\Gamma_2)$ ist, sind die Gitter Γ_2 und Γ'_2 *geometrisch* äquivalent im Sinne der Definition 4.2. Die lineare Abbildung

$$\sigma\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

bildet das Gitter Γ_2 auf Γ'_2 ab und induziert einen Gruppenisomorphismus

$$\sigma_*\colon \mathrm{S}(\Gamma_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(\Gamma'_2), \qquad \varphi \longmapsto \sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}.$$

Die beiden Gitter Γ_2 und Γ'_2 sind also sogar *arithmetisch* äquivalent (im Sinne der Definition 4.2). Man beachte, dass σ_* die Spiegelungen an den Koordinatenachsen in jene an den Diagonalen von Q überführt und daher nicht die Identität auf $\mathrm{S}(\Gamma_2) = \mathrm{S}(\Gamma'_2)$ ist.

Das Gitter Γ_3 wird in der Kristallographie als *primitiv kubisch* bezeichnet. Verschiebt man mit ihm den achsenparallelen Würfel $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_\ell \leq 2\}$, erhält man eine Pflasterung des Raumes durch Würfel. Die Menge S'_3 besteht aus Mittelpunkten

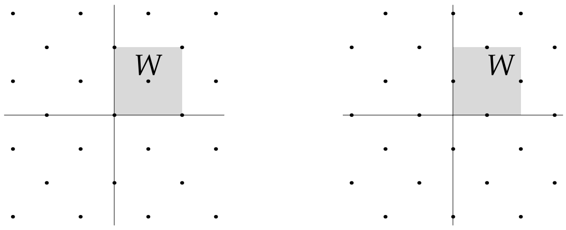


Fig. 2

der Flächen dieser Würfel und die Rechnung $2e_i = (e_i + e_j) + (e_i - e_j)$ zeigt, dass Γ_3' das primitive Gitter $\Gamma_3 = (2\mathbb{Z})^3$ umfasst. In der Kristallographie wird Γ_3' daher ein *flächenzentriertes, kubisches Gitter* genannt. Es wird durch Fig. 2 veranschaulicht.

In ihr sind links eine Gitterebene für einen geraden Wert von x_3 und rechts eine Gitterebene für einen ungeraden Wert von x_3 dargestellt. Beide Punktsysteme sind quadratisch, aber nicht kongruent. Dies deutet darauf hin, dass es keine Ähnlichkeitsabbildung $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ gibt, die das primitive Gitter Γ_3 auf das Gitter Γ_3' abbildet. Dieser Eindruck ist richtig: das Gitter Γ_3' hat 6 Vektoren kleinster positiver Norm, nämlich $\pm 2e_1$, $\pm 2e_2$ und $\pm 2e_3$, während Γ_3' zwölf solche Vektoren aufweist, die Vektoren $\pm e_i$, $\pm e_j$.

Das Gitter Γ_3'' besteht aus dem Teilgitter $\Gamma_3 = (2\mathbb{Z})^3$ und seiner Nebenklassse $\Gamma_3 + (1,1,1)^t$. Die Kristallographen nennen es ein *innenzentriertes, kubisches* Gitter; in der Tat bilden die Punkte der Nebenklasse $\Gamma_3 + (1,1,1)^t$ die Mittelpunkte der Würfel $W + x$ mit $x \in \Gamma_3$. Das Gitter Γ_3'' besitzt 8 Punkte kleinster positiver Norm, nämlich die Punkte $\pm e_1$, $\pm e_2$, $\pm e_3$, und ist daher weder dem primitiven noch dem flächenzentrierten Gitter ähnlich. Die Symmetriegruppen der drei Gitter Γ_3, Γ_3' und Γ_3'' stimmen überein: die drei Gitter sind *geometrisch*, nicht aber *arithmetisch*, äquivalent (im Sinne der Definition 4.2).

2.3 Endlichkeit der Symmetriegruppen

Die Symmetriegruppen der Gitter von E sind Untergruppen der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(E)$ von E mit speziellen Eigenschaften. Es gilt nämlich

Satz 2.4 *Die Symmetriegruppe jedes Gitters Γ ist endlich.*

Beweis. Die Gruppe $\mathrm{S}(\Gamma)$ besteht aus den orthogonalen Abbildungen φ von E, die Γ auf sich abbilden. Diese Abbildungen bilden jede Kugel $K_r = \{x \in V \mid \|x\| \le r\}$, also auch jeden Durchschnitt $\Gamma \cap K_r$, auf sich ab. Da diese Durchschnitte endlich sind, erhält man für jede Zahl $r > 0$ durch Einschränken eine Abbildung

$$f_r\colon \mathrm{S}(\Gamma) \longrightarrow H_r = \mathrm{Perm}(\Gamma \cap K_r)$$

von $\mathrm{S}(\Gamma)$ in die Permutationsgruppen der endlichen Mengen $\Gamma \cap K_r$. Es ist f_r ein Homomorphismus, dessen Kern aus allen $\varphi \in \mathrm{S}(\Gamma)$ besteht, die $\Gamma \cap K_r$ punktweise festhalten. Wählt man nun r so gross, dass $\Gamma \cap K_r$ ein Erzeugendensystem von V umfasst, wird f_r daher injektiv. Dies zeigt, dass $\mathrm{S}(\Gamma)$ einer Gruppe von Permutationen einer endlichen Menge isomorph ist. $\square$

Beispiel. Wendet man obigen Beweis auf das primitive kubische Gitter $\Gamma_3 = (2\mathbb{Z})^3$ aus 2.2 an und berücksichtigt, dass jede lineare Abbildung $(0,0,0)^t$ festhält, erkennt man, dass $\mathrm{S}(\Gamma_3)$ isomorph einer Untergruppe von $\mathrm{Perm}(\{\pm 2e_1, \pm 2e_2, \pm 2e_3\})$ ist; insbesondere teilt die Ordnung von $\mathrm{S}(\Gamma_3)$ die Zahl $6! = 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Bemerkungen. 1) Nach Satz 2.2 gibt es für jedes Gitter Γ von E^n eine geordnete Vektorraumbasis $\mathcal{B}$, die eine $\mathbb{Z}$-Basis von Γ ist. Stellt man die Symmetriegruppe $\mathrm{S}(\Gamma)$ in dieser Basis dar, erhält man eine endliche Untergruppe der Matrizengruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$. Umgekehrt lässt sich jede endliche Untergruppe H von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ als Symmetriegruppe eines Gitters $\Gamma \subset E^n$ realisieren. Zunächst ist nämlich $\mathbb{Z}^n$ eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}^n$ und H besteht aus Automorphismen von $\mathbb{Z}^n$. Mittelt man ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe der Gruppe H, gewinnt man ein H-invariantes Skalarprodukt $\langle -,-\rangle_H$. Es sind dann $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ ein Gitter von $E^n = (\mathbb{R}^n, \langle -,-\rangle_H)$ und H eine Untergruppe von $\mathrm{S}(\Gamma)$.

2) Die Ordnungen der endlichen Untergruppen H von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ sind *uniform beschränkt*. Nach Minkowski ist nämlich die Einschränkung der kanonischen Projektion $\pi_p\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ auf H *injektiv*, wenn p eine ungerade Primzahl ist. Insbesondere besitzt $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ nur endlich viele Isomorphietypen von endlichen Untergruppen. Es ist dies ein erstes *Endlichkeitsresultat* über $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$; es kann zu Theorem 8.2 (s. [14]), einem entscheidenden Hilfsmittel des Bieberbachschen Beweises von Theorem 3.5, verschärft werden.

3 Raumgruppen

Die Raumgruppen treten in der Kristallographie als Gruppen der Deckbewegungen von *Kristallstrukturen* auf, d.h. von idealisierten Systemen der Positionen der Atome, Ionen oder Moleküle, aus denen Kristalle aufgebaut sind. In diesen Anwendungen sind die Raumgruppen also Gruppen von Deckbewegungen. Für viele Fragen ist es aber nützlich, über eine direkte Definition der Raumgruppen zu verfügen, etwa über Definition 3.1.

3.1 Grundbegriffe

Wie zuvor bezeichne $E = (V, \langle -,-\rangle)$ einen Euklidischen Raum. Eine Abbildung $\psi\colon E \to E$ wird *Isometrie* genannt, falls sie alle Distanzen erhält. Jede Isometrie ist bijektiv und die Zusammensetzung einer orthogonalen Abbildung $\varphi\colon E \to E$ und einer Translation τ_v mit Translationsvektor $v = \psi(0)$. Die Gruppe $\mathrm{Iso}(E)$ aller Isometrien von E ist, wie man leicht bestätigt, isomorph zur Produktmenge $V \times \mathrm{O}(E)$ versehen mit dem Produkt

$$(v,\varphi)\cdot(v',\varphi') = (v + \varphi(v'), \varphi \circ \varphi'). \tag{3.1}$$

Diese Formel zeigt, dass die Projektion $(v,\varphi) \mapsto \varphi$ einen Gruppenhomomorphismus π von $\mathrm{Iso}(E)$ auf $\mathrm{O}(E)$ liefert; sein Kern besteht aus allen Translationen von E.

Sei nun G eine Untergruppe von $\mathrm{Iso}(E)$. Der Kern der Einschränkung von π auf G ist der *Translationsnormalteiler* von G; ich bezeichne ihn mit $T(G)$ und die zugeordnete Untergruppe der Translationsvektoren mit $\Gamma(G)$. Die angekündigte Definition einer Raumgruppe kann nun so ausgesprochen werden:

Definition 3.1 Eine Untergruppe G von $\mathrm{Iso}(E)$ wird *Raumgruppe* genannt, falls $\Gamma(G)$ ein Gitter ist.

Ist G eine Raumgruppe, so bezeichnet man ihr Bild unter π als *Punktgruppe* G_0 von G. Diese Gruppe ist isomorph zu $G/T(G)$ und endlich, denn es gilt

Hilfssatz 3.2 *Die Punktgruppe G_0 einer Raumgruppe G ist eine Untergruppe der Symmetriegruppe des Gitters $\Gamma(G)$.*

Beweis. Es ist $T(G)$ ein Normalteiler von G. Die Rechnung

$$(v,\varphi)\cdot(w,\mathbb{1})\cdot(v,\varphi)^{-1} = \big(v+\varphi(w),\varphi\big)\cdot\big(-\varphi^{-1}(v),\varphi^{-1}\big) = \big(\varphi(w),\mathbb{1}\big)$$

impliziert deshalb, dass jede orthogonale Abbildung $\varphi \in G_0$ das Gitter $\Gamma(G)$ auf sich abbildet und daher in $\mathrm{S}(\Gamma(G))$ liegt. $\square$

Eine Kristallstruktur kann durch eine Funktion der Form $h\colon E^3 \to \mathcal{F}$ beschrieben werden; dabei sagt der Wert $h(x)$, ob sich in $x \in E$ ein Atom oder Ion befindet, und falls ja, um welche Sorte es sich handelt. Die Invarianzgruppe $\mathrm{Inv}(h)$ einer Funktion $h\colon E \to \mathcal{F}$ ist ganz allgemein so erklärt:

$$\mathrm{Inv}(h) = \{\psi \in \mathrm{Iso}(E) \mid h\circ\psi = h\}. \tag{3.2}$$

Die Invarianzgruppe einer Funktion h, die ein Muster beschreibt, erlaubt es, das Muster nach seiner Regelmässigkeit zu klassifizieren. Dazu muss man aber noch festlegen, *wann zwei Muster als im wesentlichen gleich betrachtet werden sollen*. Zunächst wird man ein Muster und sein Bild unter einer Translation als gleichberechtigt ansehen; häufig wird man sogar das Bild des Musters unter einer Ähnlichkeitsabbildung $\sigma\colon E \to E$ nicht vom Original unterscheiden wollen. Beiden Festsetzungen entsprechen Konjugationsklassen von Invarianzgruppen: wie man leicht nachrechnet, gilt nämlich die Beziehung

$$\mathrm{Inv}(h\circ\sigma^{-1}) = \sigma\cdot\mathrm{Inv}(h)\cdot\sigma^{-1}. \tag{3.3}$$

Obige Überlegungen veranlassen einen, auch die Raumgruppen zu Konjugationsklassen bezüglich der Translationen oder der Ähnlichkeitsabbildungen zusammenzufassen. Da die Menge der Ähnlichkeitsklassen von Raumgruppen aber immer noch unendlich ist, falls $\dim E > 1$ beträgt, betrachtet man noch gröbere Äquivalenzrelationen, insbesondere die folgenden zwei:

Definition 3.3 Zwei Raumgruppen G und G' in $\mathrm{Iso}(E)$ werden *affin äquivalent* genannt, falls es eine affine Abbildung $\alpha = \tau\circ L\colon E \to E$ gibt, welche die Beziehung

$$G' = \alpha\cdot G\cdot\alpha^{-1} = \{\alpha\circ\psi\circ\alpha^{-1} \mid \psi \in G\} \tag{3.4}$$

erfüllt. Falls man in dieser Beziehung α *orientierungserhaltend* wählen kann, werden G und G' als *eigentlich affin äquivalent* oder windungsäquivalent bezeichnet.

Bemerkungen. 1) Eine affine Abbildung $\alpha\colon E \to E$ ist die Zusammensetzung einer *linearen* Abbildung L mit einer Translation $\tau_v\colon x \mapsto x+v$; eine Raumgruppe G besteht dagegen aus Isometrien. Ist nun $\alpha\colon E \to E$ eine bijektive affine Abbildung, so wird $\alpha\cdot G\cdot\alpha^{-1}$ im allgemeinen keine Raumgruppe sein. Ist sie es, so zeigt die Rechnung

$$(v,L)\cdot(w,\varphi)\cdot(v,L)^{-1} = \big(L(w)+v-L\circ\varphi\circ L^{-1}(v),\, L\circ\varphi\circ L^{-1}\big), \tag{3.5}$$

dass $L\circ\varphi\circ L^{-1}$ für jede orthogonale Abbildung $\varphi \in G_0$ orthogonal sein muss. Dies bedingt, dass L der Gruppe G_0 angepasst ist; genauer gilt der

Satz 3.4 *Sind G_0 eine Untergruppe von $\mathrm{O}(E)$ und $L\colon E \xrightarrow{\sim} E$ eine bijektive lineare Abbildung mit $L \cdot G_0 \cdot L^{-1} \subset \mathrm{O}(E)$, so gibt es eine lineare, symmetrische und positive Abbildung P, die mit allen $\varphi \in G_0$ vertauschbar ist, und eine orthogonale Abbildung ψ, welche die Bedingungen $L = \psi \circ P$ und $L \cdot G_0 \cdot L^{-1} = \psi \cdot G_0 \cdot \psi^{-1}$ erfüllen.*

2) Sind G und G' affin äquivalent vermöge $\alpha = \tau \circ L$, so zeigt die Rechnung (3.5), dass die Paare $(\Gamma(G), G_0)$ und $(\Gamma(G'), G'_0)$ die Bedingung

$$L(\Gamma) = \Gamma' \quad \text{und} \quad L \cdot G_0 \cdot L^{-1} = G'_0 \tag{3.6}$$

erfüllen. Diese Bedingung definiert eine Relation, welche die affine Äquivalenz abschwächt; sie kommt in Abschnitt 4 ausführlicher zur Sprache.

3.2 Beispiele

1) *Invarianzgruppe eines Gitters.* Seien $\Gamma \subset E$ ein Gitter und $h\colon E \to \{0, 1\}$ die charakteristische Funktion χ_Γ des Gitters (es ist also $\chi_\Gamma(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \Gamma$). Die Invarianzgruppe von χ_Γ enthält dann die Translationen τ_v mit $v \in \Gamma$ und die orthogonalen Abbildungen $\varphi \in \mathrm{S}(\Gamma)$, und sie wird von ihnen erzeugt; genauer ist

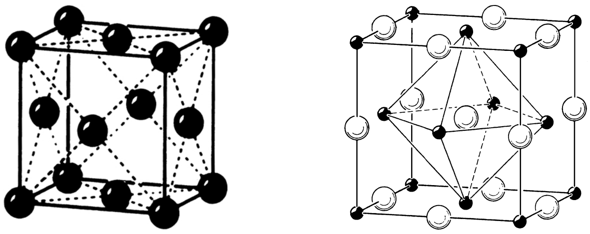
$$\mathrm{Inv}(\chi_\Gamma) = \{\tau_v \circ \varphi \mid \varphi \in \mathrm{S}(\Gamma),\ v \in \Gamma\} \xrightarrow{\sim} \Gamma \rtimes \mathrm{S}(\Gamma).$$

Sei Γ' ein zweites Gitter in E. Wenn die Gruppen $G = \mathrm{Inv}(\chi_\Gamma)$ und $G' = \mathrm{Inv}(\chi_{\Gamma'})$ affin äquivalent sind, so gibt es definitionsgemäss eine bijektive Abbildung $\alpha = \tau \circ L\colon E \xrightarrow{\sim} E$ mit $\alpha \cdot G \cdot \alpha^{-1} = G'$. Eine kurze Rechnung zeigt, dass dies genau dann gilt, falls $\Gamma' = L(\Gamma)$ und $\mathrm{S}(\Gamma') = L \cdot \mathrm{S}(\Gamma) \cdot L^{-1}$ ist, falls also die Paare $(\Gamma, \mathrm{S}(\Gamma))$ und $(\Gamma', \mathrm{S}(\Gamma'))$ die Bedingung (3.6) erfüllen.

2) *Raumgruppe der Elemente vom Kupfertyp.* Die Atome des Metalles Kupfer bilden ein flächenzentriertes kubisches Punktgitter $F \in \mathbb{R}^3$, das dem Gitter $\Gamma'_3 = \{x \in \mathbb{Z}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \text{ gerade}\}$ ähnlich ist (s. Fig. 3, links). Die Invarianzgruppe von χ_F ist daher affin äquivalent zur Gruppe $\mathrm{Inv}(\chi_{\Gamma'_3}) \xrightarrow{\sim} \Gamma'_3 \rtimes \mathrm{S}(\Gamma'_3)$.

Die Gruppe $\mathrm{S}(\Gamma'_3)$ ist die Symmetriegruppe des Würfels $W' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_i| \le 1\}$; sie besitzt 48 Elemente und wird in der Kristallographie mit O_h oder $\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$ bezeichnet.[1] Der erste Teil des Symbols $\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$, also $\frac{4}{m}$, besagt, dass das Gitter Drehungen der Ordnung 4 um die Koordinatenachsen und Spiegelungen an den Koordinatenebenen zulässt; das Symbol $\bar{3}$ deutet darauf hin, dass die Raumdiagonale $\mathbb{R} \cdot (1, 1, 1)^t$ die Achse einer Drehspiegelung der Ordnung 6 ist; schliesslich zeigt $\frac{2}{m}$, dass die Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten 2-zählige Drehachsen sind und das Gitter Spiegelungen an Ebenen, die auf diesen Drehachsen senkrecht stehen, zulässt. Der Typ der Raumgruppe $\mathrm{Inv}(\Gamma'_3)$ wird mit $F\frac{4}{m}\,\bar{3}\,\frac{2}{m}$ bezeichnet; s. [11]. Die Kristallstrukturen der Metalle Al, Ag, Au und Pb sind jener des Kupfers ähnlich; ihre Raumgruppen sind daher vom gleichen Typ.

1) Die Kristallographen bezeichnen die geometrischen Kristallklassen auf zwei Weisen. Die erste geht auf Schoenflies zurück; bei ihr trägt die Symmetriegruppe des Würfels oder regelmässigen Oktaeders die Bezeichnung O_h. Die andere Bezeichnungsweise stammt von Hermann und Mauguin; sie ist sprechender, aber gewöhnungsbedürftig.



Kristallstruktur von Cu Kristallstruktur von NaCl

Fig. 3

3) *Raumgruppen der Verbindungen vom Typ NaCl.* Beim Steinsalz bilden die Natriumionen Na^+ ein flächenzentriertes kubisches Punktgitter F^+, die Chlorionen Cl^- ein zu F^+ kongruentes Punktgitter F^-. Diese Anordnung ist dem Paar $\left(\Gamma_3', \Gamma_3' + (1,1,1)^t\right)$ ähnlich; sie ist in Fig. 3 rechts dargestellt. Die Raumgruppe ist erneut vom Typ $F \frac{4}{m}\,\overline{3}\,\frac{2}{m}$.

3.3 Endlichkeit der Typen von Raumgruppen

Die in Definition 3.3 festgelegten Relationen der affinen und der eigentlich affinen Äquivalenz führen im Falle des 3-dimensionalen Raumes zu endlich vielen Klassen. Dies wurde um 1890 von E.S. Fedorov und von A. Schoenflies bewiesen, und zwar durch explizite Bestimmung der Typen: bezüglich der eigentlich affinen Äquivalenz gibt es 230 Typen von Raumgruppen. Die grosse Anzahl der Typen macht es schwierig, vorher zu sagen, wie das Ergebnis für höherdimensionale Räume lautet. D. Hilbert warf deshalb in der Ausarbeitung seines Pariser Vortrages von 1900 die folgende Frage auf (Problem 18 in [10]):

> [...] es ist daher die Untersuchung der Frage wünschenswert, *ob es auch im n-dimensionalen Euklidischen Raume nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich gibt.*

1910 schon konnte L. Bieberbach seine Antwort ankündigen; er begründete sie in den Arbeiten [1] und [2]:

Theorem 3.5 *Für jeden Euklidischen Raum E enthält* $\mathrm{Iso}(E)$ *nur endlich viele Typen von Raumgruppen.*

Die Beweise von Theorem 3.5 – etwa jener in [8] – liefern selbst in kleinen Dimensionen astronomisch grosse Schranken. Die Tabelle unten zeigt zum Vergleich die heute bekannten, exakten Anzahlen.

4 Konstruktion der Raumgruppen – Skizze

Die Aufgabe, die Raumgruppen eines gegebenen Euklidischen Raumes bis auf affine Äquivalenz zu bestimmen, ist umfangreich, falls $\dim E > 2$ ist. Es ist daher naheliegend, in einem ersten Schritt Klassifikationen nach Äquivalenzrelationen, die jene der affinen oder eigentlich affinen Äquivalenz vergröbern, vorzunehmen.

Seien G und G' Raumgruppen von E mit Gittern $\Gamma = \Gamma(G)$, $\Gamma' = \Gamma(G')$ und Punktgruppen G_0, G'_0. Man nennt G und G'*arithmetisch äquivalent*, falls es eine affine Transformation $\alpha = \tau \circ L\colon E \to E$ gibt, welche die Bedingung (3.6) erfüllt. Diese Bedingung ist nur eine Forderung an die Paare (Γ, G_0) und (Γ', G'_0); sie besagt, dass die Paare arithmetisch äquivalent im Sinne der Definition 4.1 sind:

Definition 4.1 Zwei Paare $(\Gamma, H \subseteq \mathrm{S}(\Gamma))$ und (Γ', H') werden *arithmetisch* äquivalent genannt, falls es eine lineare Bijektion $L\colon E \xrightarrow{\sim} E$ gibt, welche die Bedingung

$$\Gamma' = L(\Gamma) \quad \text{und} \quad H' = L \cdot H \cdot L^{-1} \tag{4.1}$$

erfüllt. Genügt L der schwächeren Bedingung $H' = L \cdot H \cdot L^{-1}$, bezeichnet man die Paare als *geometrisch* äquivalent.

Die Äquivalenzklassen der arithmetischen oder geometrischen Äquivalenz nennt man die *arithmetischen* oder die *geometrischen Kristallklassen* (oder Klassen). Wie die folgende Tabelle vor Augen führt, ist die Mächtigkeit der Menge der arithmetischen Klassen $\mathscr{A}$ und jene der Menge der geometrischen Klassen $\mathscr{G}$ deutlich kleiner als die Anzahl der affinen Typen von Raumgruppen. (Die Zahlen stammen für $n \leq 4$ aus [3], S. 52, und für $n \in \{5, 6\}$ aus [12], Tabelle 2).

$\dim E$	Raumgruppentypen	card($\mathscr{A}$)	card($\mathscr{G}$)
2	17	13	10
3	219	73	32
4	4783	710	227
5	222 018	6079	955
6	28 927 922	85 311	7014

Definition 4.1 liefert auch Einteilungen der Gitter:

Definition 4.2 Zwei Gitter Γ und Γ' werden *arithmetisch* äquivalent genannt, falls die Paare $\big(\Gamma, \mathrm{S}(\Gamma)\big)$ und $\big(\Gamma', \mathrm{S}(\Gamma')\big)$ arithmetisch äquivalent sind. Analog definiert man die *geometrische* Äquivalenz von Gittern.

4.1 Bestimmung der geometrischen Kristallklassen von E^3

Die Bestimmung der *geometrischen* Kristallklassen läuft nach Definition 4.1 und Satz 3.4 darauf hinaus, alle endlichen Untergruppen der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(E)$ zu finden, die in einer geeigneten Basis ganzzahlig dargestellt werden, und diese Untergruppen bis auf Konjugation in $\mathrm{O}(E)$ zu klassifizieren.

Im Falle des 3-dimensionalen Raumes ist diese Bestimmung bereits in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts durchgeführt worden. Sie kann so erfolgen: man klassifiziert zunächst alle endlichen Untergruppen von $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ bis auf Konjugation, und entfernt dann aus dieser Liste jene Gruppen, die keine treue ganzzahlige Darstellung in $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$ haben. Beide Teile dieses Weges sind recht kurz; dass dem so ist, beruht auf Eigenschaften von E^3, die in höheren Dimensionen nicht mehr vorliegen.

Endliche Untergruppen von $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$**.** Die Suche der endlichen Untergruppen H von $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ wird durch den Umstand erleichtert, dass jedes Element $\varphi \in H \setminus \{\mathbb{1}\}$ eine Drehung um eine Achse ist, welche die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$ in zwei Punkten durchstösst, den *Polen* von φ. Die Menge aller Pole ist eine Teilmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{S}^2$, auf der H operiert. Analysiert man diese Wirkung, kommt man zu

Satz 4.3 *Für jede endliche Untergruppe* $H \subset \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *trifft eine der folgenden Aussagen zu:*

(i) *Alle Drehachsen von* $H \setminus \{\mathbb{1}\}$ *stimmen überein. Dann ist* H *zyklisch.*

(ii) *Es gibt genau* 3 *Drehachsen; sie sind paarweise orthogonal und* H *ist isomorph der Gruppe* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(iii) *Es gibt mehr als* 3 *Drehachsen und auf einer unter ihnen stehen alle anderen senkrecht.* H *ist dann eine Diedergruppe der Ordnung* $2m$ *mit* $m > 2$.

(iv) *Die Pole der* 3*-zähligen Drehachsen bilden die Ecken eines Würfels* W *oder eines Dodekaeders* D*. Dann ist* H *die Drehgruppe eines der dem Würfel* W *einbeschriebenen Tetraeder, die Drehgruppe von* W *oder jene von* D.

Die Untergruppen von $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$ ergeben sich leicht aus jenen von $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Es ist nämlich $\det(-\mathbb{1}) = (-1)^3 = -1$ und daher ist $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$ das direkte Produkt der Untergruppen $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ und $\overline{1} = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$. Jede Untergruppe U von $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$ gehört daher zu einer von 3 Sorten: (a) $U \subseteq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, (b) $-\mathbb{1} \in U$ oder (c) $U \subsetneq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ und $-\mathbb{1} \notin U$. Im zweiten Fall ist $U = (U \cap \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})) \times \overline{1}$; im dritten Fall ist der offensichtliche Homomorphismus $U \hookrightarrow \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \times \overline{1} \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ injektiv; U ist also isomorph einer Untergruppe $\hat{U} \subset \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ und entsteht aus $\hat{U}$ dadurch, dass jedes Element φ von $\hat{U} \setminus (U \cap \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}))$ durch $-\varphi$ ersetzt wird.

Kristallographische Untergruppen von $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$**.** Das Aussondern der endlichen Untergruppen von $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$, die nicht *kristallographisch* sind, also kein Gitter invariant lassen, geschieht wie folgt. Sei φ eine Drehung in E^3, die ein Gitter Γ von E^3 auf sich abbildet. Berechnet man die Spur von φ in einer orthonormierten Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ mit $\varphi(b_1) = b_1$, sieht man, dass $\operatorname{sp}\varphi = 1 + 2\cos t$ ist; wählt man hingegen eine Basis von E^3, die eine $\mathbb{Z}$-Basis des Gitters Γ ist, so erkennt man, dass $\operatorname{sp}\varphi$ in $\mathbb{Z}$ liegt. Folglich ist $\cos t \in \{1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1\}$ und φ hat die Ordnung 1, 6, 4, 3 oder 2. Diese Folgerung nennt man die *kristallographische Bedingung* an die Rotationen von E^3.

Sei nun H eine endliche Untergruppe von $\mathrm{SO}(E^3)$, die ein Gitter Γ invariant lässt. Jede der Drehungen $\varphi \in H$ hat dann eine der Ordnungen 1, 2, 3, 4 oder 6. Das schliesst die meisten der in Satz 4.3 aufgezählten Gruppen aus. Übrig bleiben die zyklischen Gruppen der Ordnungen 1, 2, 3, 4 und 6, die Diedergruppen der Ordnungen 4, 6, 8 und 12, sowie die Drehgruppen eines regulären Tetraeders oder Oktaeders. Diese Gruppen vertreten 11 verschiedene Konjugationsklassen. Bildet man die direkten Produkte der genannten Gruppen mit $\overline{1} = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$, erhält man Vertreter von 11 weiteren Konjugationsklassen. Es verbleibt die Aufgabe, in den Vertretern $\hat{H}$ der ersten 11 Klassen Untergruppen N vom Index 2 aufzusuchen, und die Gruppen $H = N \cup \{-\varphi \mid \varphi \in \hat{H} \setminus N\}$ zu klassifizieren. Dies führt auf 10 weitere Klassen. Insgesamt kommt man zu $11 + 11 + 10 = 32$ Konjugationsklassen kristallographischer Gruppen oder (geometrischen) *Kristallklassen*.

Beispiel. Sei $\hat{H}$ die Drehgruppe eines Würfels; sie hat die Ordnung 24, ist isomorph der symmetrischen Gruppe S_4 und besitzt genau einen Normalteiler N vom Index 2; dieser ist isomorph der alternierenden Gruppe A_4. Aus $\hat{H}$ und N gewinnt man dann 5 Gruppen, nämlich

$$N, \quad \hat{H}, \quad N \times \overline{1}, \quad H = N \cup -(\hat{H} \setminus N) \quad \text{und} \quad \hat{H} \times \overline{1}.$$

Sie vertreten die Kristallklassen des sogenannten *kubischen Kristallsystems*. In der Schoenfliesschen Notation werden sie mit T, O, T_h, T_d und O_h bezeichnet, in jener von Hermann-Mauguin mit

$$233, \quad 432, \quad \tfrac{2}{m}\overline{3} \text{ oder } m\overline{3}, \quad \overline{4}3m, \text{ und } \tfrac{4}{m}\overline{3}\tfrac{2}{m} \text{ oder } m\overline{3}m.$$

Vier dieser Klassen werden durch Symmetriegruppen von regelmässigen Polyedern vertreten. Die Drehgruppe $\mathrm{S}^+(\mathcal{T})$ eines regelmässigen Tetraeder $\mathcal{T}$ (mit Zentrum $(0,0,0)^t$) ist vom Typ $T \sim 233$; die volle Symmetriegruppe $\mathrm{S}(\mathcal{T})$ vom Typ $T_d \sim \overline{4}3m$, denn $\mathrm{S}(\mathcal{T})$ enthält zwar Spiegelungen, nicht aber $-\mathbb{1}$. Das Symbol $\overline{4}$ in der Bezeichnung $\overline{4}3m$ drückt aus, dass $\mathrm{S}(\mathcal{T})$ eine Drehspiegelung der Ordnung 4 enthält. Ist $\mathbb{O}$ ein reguläres Oktaeder, so gehört $\mathrm{S}^+(\mathbb{O})$ zur Klasse mit dem Namen O oder 432, und $\mathrm{S}(\mathbb{O})$ zur Klasse O_h oder $\frac{4}{m}\overline{3}\frac{2}{m}$.

Es verbleibt die Klasse T_h oder $\frac{2}{m}\overline{3}$. Das Symbol T_h deutet darauf hin, dass ein geeigneter Vertreter eine horizontale Spiegelungsebene enthält. Polyeder mit dieser Symmetrie sind die in Fig. 4 dargestellten Dodekaeder.

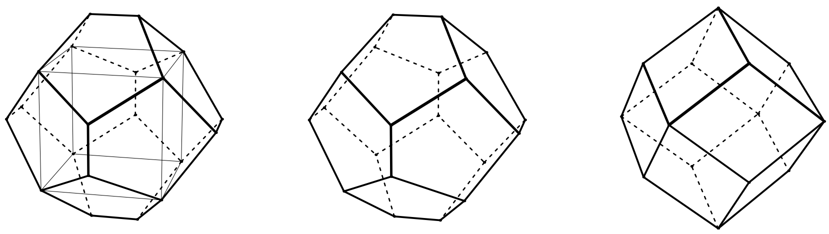


Fig. 4

Die Figur links erklärt ihre Konstruktion: man setzt auf jede Seitenfläche eines Würfels ein Walmdach und zwar so, dass die Neigungen der Flächenstücke, die längs einer Kante aneinander stossen, übereinstimmen und dass das so entstehende Dodekaeder 3-zählige Drehungen um die Diagonalen des Würfels zulässt. Das Dodekaeder besitzt dann 12 kongruente fünfeckige Flächen mit 4 gleichlangen Kanten. Hat die fünfte Kante eine andere Länge, so ist $\mathrm{S}(\mathcal{P})$ vom Typ T_h. Dies gilt auch dann noch, wenn die fünfte Kante die Länge 0 hat: $\mathcal{P}$ ist dann ein *Rhombendodekaeder*.

4.2 Bestimmung der arithmetischen Kristallklassen des E^3

Die *arithmetischen* Kristallklassen von E können mit verschiedenen Verfahren gefunden werden. Eines geht auf das 19. Jahrhundert zurück: bei ihm gewinnt man die arithmetischen Klassen durch Verfeinerung der geometrischen Klassen (s. anschliessendes Beispiel). Bei einem zweiten Verfahren bestimmt man Vertreter der arithmetischen Klassen auf direktem Wege (s. [14], Nummer 8.3).

Beispiel. Seien H eine endliche Untergruppe von $\mathrm{SO}(E^3)$ vom Typ C_4 und ρ eine Drehung mit Drehachse U, die H erzeugt. Sei weiter Γ ein Gitter von E^3, das von H auf sich abgebildet wird. Es gibt einen Gitterpunkt $v \in \Gamma \setminus U$. Mit v sind auch $\rho(v)$ und $w = v - \rho(v)$ Gitterpunkte; da $w \neq (0,0,0)^t$ ist und auf U senkrecht steht, enthält die Drehebene $W = U^\perp$ einen Gitterpunkt positiver Länge. Es folgt, dass $\Gamma \cap W$ ein quadratisches Gitter von W ist; seien b_1, b_2 orthogonale Vektoren gleicher Länge, die $\Gamma \cap W$ erzeugen. Die Summe $v + \rho(v) + \rho^2(v) + \rho^3(v)$ ist ungleich $(0,0,0)^t$ und wird von ρ festgehalten. Also ist $U \cap \Gamma$ ein Gitter in U; insbesondere gibt es einen Vektor $b_3 \in \Gamma \cap U$ mit kleinster positiver Norm.

Zwei Fälle treten nun auf: Γ ist entweder gleich $\Gamma_1 = (\Gamma \cap W) \oplus (\Gamma \cap U)$ oder es gibt einen Vektor $u \in \Gamma \setminus \Gamma_1$. Im zweiten Fall ist $(\Gamma \cap W) + u$ eine Teilmenge der affinen Ebene $W + u$, die unter der Drehung ρ invariant ist. Dies ist nur möglich, wenn die Orthogonalprojektion von $(\Gamma \cap W) + u$ auf die Ebene W mit der Menge $(\Gamma \cap W) + \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$ zusammenfällt. Es gehört dann $2 \cdot u$ zu Γ_1 und Γ ist gleich $\Gamma_1 \cup \Gamma_1 + \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3)$: das Gitter Γ entsteht aus Γ_1 durch *Zentrierung*.

Dieses Ergebnis bedeutet, dass die geometrische Kristallklasse C_4 aus genau zwei arithmetischen Kristallklassen zusammengesetzt ist. Sei nämlich $L\colon E^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die der geordneten Basis (b_1, b_2, b_3) von E^3 die Standardbasis (e_1, e_2, e_3) von $\mathbb{R}^3$ zuordnet. Durch L wird Γ_1 auf das Standardgitter $\mathbb{Z}^3$ von $\mathbb{R}^3$ geworfen; da die Vektoren b_1, b_2 und b_3 paarweise orthogonal sind und b_1, b_2 gleiche Länge haben, ist $\rho' = L \cdot \rho \cdot L^{-1}$ eine Drehung um die Achse $\mathbb{R} \cdot e_3$. Sei $H' \subset \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ die von ρ' erzeugte Untergruppe. Im ersten Fall ist das Paar (Γ, H) dem Paar $(\mathbb{Z}^3, H')$ arithmetisch äquivalent, im zweiten dem Paar $\left(\mathbb{Z}^3 \cup \mathbb{Z}^3 + \frac{1}{2}(1,1,1)^t, H'\right)$. Die beiden Paare sind nicht arithmetisch äquivalent: es wird nämlich $\mathbb{Z}^3$ von Gitterpunkten erzeugt, die auf der Achse $U' = \mathbb{R} \cdot e_3$ und der Drehebene $W' = (U')^\perp$ liegen, nicht aber $\mathbb{Z}^3 \cup \mathbb{Z}^3 + \frac{1}{2}(1,1,1)^t$.

4.3 Konstruktion der Raumgruppen nach Schoenflies

In dieser und der folgenden Nummer vergleiche ich die Konstruktionen von Schoenflies und Burckhardt am Beispiel der Raumgruppen der geometrischen Klasse C_4.

Seien G eine Raumgruppe von E^3, deren Punktgruppe $H = G_0$ von einer Drehung der Ordnung 4 erzeugt wird, U die Achse dieser Drehung und $\pi_U\colon E^3 \to E^3$ die Orthogonalprojektion auf diese Achse. In G gibt es dann eine Isometrie der Form (v_φ, φ); sie ist eine Drehung, wenn $\pi_U(v_\varphi)$ der Nullvektor ist, und sonst eine Schraubung. In jedem Falle liegt $4 \cdot \pi_U(v_\varphi)$ in $\Gamma = \Gamma(G)$. Durch Verschieben des Ursprungs kann man erreichen, dass v_φ und $\pi_U(v_\varphi)$ zusammenfallen. Nach Nummer 4.2 gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ von E^3, so dass b_3 das Teilgitter $\Gamma \cap U$ von U und b_1, b_2 das Teilgitter $\Gamma \cap W$ von $W = U^\perp$ erzeugen. Wir können annehmen, b_1 und b_2 seien orthogonal und von der gleichen Länge. Dann ist entweder Γ gleich dem Teilgitter $\Gamma_1 = (\Gamma \cap W) \oplus (\Gamma \cap U)$, oder gleich $\Gamma_1 \cup \Gamma_1 + \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3)$.

Die Gruppe G enthält mit (v_φ, φ) auch jedes Paar der Form $(w + v_\varphi, \varphi)$ mit $w \in \Gamma$. Um die Achsen dieser Paare zu finden, suchen wir die Vektoren $x \in W$, welche die Gleichung $\varphi(x) + \pi_W(w) + v_\varphi = x + v_\varphi$ oder $\pi_W(w) = (\mathbb{1} - \varphi)(x)$ erfüllen. Sei $L_\varphi\colon W \to W$ die lineare Abbildung $(\mathbb{1} - \varphi)_{|W}$. Wir können annehmen, L_φ werde bezüglich (b_1, b_2) durch

die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
beschrieben; A ist regulär. Die Umkehrabbildung L_φ^{-1} ist dann eine Drehstreckung mit Drehwinkel $\pi/4$ und Faktor $\sqrt{2}/2$.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Ist $\Gamma = \Gamma_1$, also ein primitives Gitter, so ist $\pi_W(\Gamma) = \Gamma \cap W = \mathbb{Z}b_1 \oplus \mathbb{Z}b_2$, weshalb G eine Schar von Achsen aufweist, die W in dem quadratischen Gitter $L_\varphi^{-1}(\Gamma \cap W)$ durchstossen. Je nach dem Wert von v_φ gehören diese Achsen zu Drehungen oder Schraubungen. Ihre geometrische Verteilung ist in Fig. 5 für $v_\varphi = \frac{k}{4}b_3$ und $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ dargestellt.

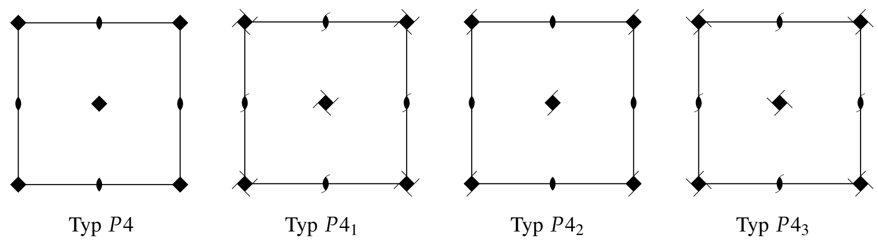


Fig. 5

Die Ecken der gezeichneten 4 Quadrate sind der Ursprung und b_1, $b_1 + b_2$ sowie b_2. Das Diagramm ganz links illustriert die Achsenverteilung für $k = 0$: es zeigt, dass die Lote in den 4 Ecken und im Mittelpunkt des Quadrates Drehachsen sind. Das nächste Diagramm gehört zu $k = 1$: an Stelle der Drehachsen finden sich nun Achsen von Schraubungen der Ganghöhe $\frac{1}{4}b_3$. Die letzten zwei Diagramme veranschaulichen die Fälle $k = 2$ und $k = 3$: die Schraubungen haben die Ganghöhen $\frac{2}{4}b_3$ und $\frac{3}{4}b_3$, was durch die andere Art der Flügelchen angedeutet ist.

In den Diagrammen sind auch die Positionen von Achsen, die von der Achse U der Drehung φ^2 herrühren, eingezeichnet. Die Durchstosspunkte dieser Schar von Achsen mit der Ebene W bilden das Gitter $(\mathbb{1} - \varphi^2)^{-1}_{|W}(\Gamma \cap W)$; es ist quadratisch und gleich $(\frac{1}{2}\Gamma) \cap W$. Für $k \in \{0, 2\}$ sind die Geraden Drehachsen, für $k \in \{1, 3\}$ Achsen von Schraubungen.

Die Dispositionen der Achsen sind in den 4 Fällen deutlich unterschiedlich. Dies zeigt, dass es 4 Typen von Raumgruppen in der arithmetischen Klasse $P4$ gibt. Die Kristallographen bezeichnen sie mit $P4$, $P4_1$, $P4_2$ und $P4_3$.

Im zweiten Fall ist Γ gleich $\Gamma_1 \cup \Gamma_1 + \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3) = \Gamma_1 + \mathbb{Z}\frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3)$. Setze $\overline{\Gamma} = \pi_W(\Gamma) = \mathbb{Z}b_1 + \mathbb{Z}b_2 + \mathbb{Z}\frac{1}{2}(b_1 + b_2)$; dann ist $L_\varphi^{-1}(\overline{\Gamma})$ das quadratische Gitter $\mathbb{Z}\frac{1}{2}b_1 + \mathbb{Z}\frac{1}{2}b_2$. Die Anordnungen der Achsen für $v_\varphi = \frac{k}{4}b_3$ und $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ sind in Figur 6 dargestellt. Das Diagramm ganz links zeigt die Anordnung für $k = 0$: die Lote in den Ecken und in der Mitte des Quadrates sind Drehachsen, die anderen Lote sind Schraubenachsen mit der Ganghöhe $\frac{1}{2}b_3$ Das zweite Diagramm zeigt die Situation für $k = 1$: alle Lote in den Punkten von $L_\varphi^{-1}(\overline{\Gamma})$ sind Achsen von Schraubungen, deren

Ganghöhen teils $\frac{1}{4}b_3$, teils $\frac{3}{4}b_3$ betragen. Geht man von $v_\varphi = \frac{1}{4}b_3$ zu $v_\varphi = \frac{2}{4}b_3$ über, werden die Lote in den Ecken und in der Mitte Schraubenachsen mit der Ganghöhe $\frac{1}{2}b_3$, die anderen Lote aber sind Drehachsen. Vergleicht man nun das erste und das dritte Diagramm, erkennt man, dass ihre periodischen Fortsetzungen durch eine Translation auseinander hervorgehen. Dies bedeutet, dass die dritte Gruppe durch Verschieben des Ursprunges in die erste Gruppe überführt werden kann. Ebenso sind die Gruppen des zweiten und vierten Diagrammes affin äquivalent. Daher gibt es in der arithmetischen Klasse $I4$ nur zwei eigentlich affine Typen von Raumgruppen; in der Kristallographie werden sie mit $I4$ und $I4_1$ bezeichnet.

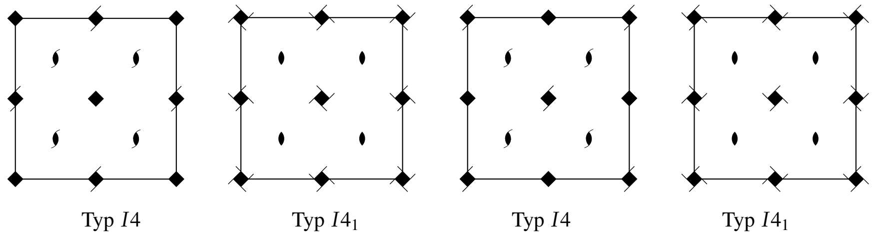


Fig. 6

Bemerkungen. 1) Die oben vorgebrachten Überlegungen finden sich sinngemäss alle im Schoenfliesschen Werke [13]. Naturgemäss überzeugen sie umso eher, als man gewohnt ist, geometrisch, und nicht rechnerisch, zu argumentieren.

2) Die Analyse der Anordnung der Symmetrieelemente einer Raumgruppe G kann auf die Analyse kleinerer Gruppen abgestützt werden; denn es gilt: *Sei G eine Raumgruppe mit Gitter Γ und Punktgruppe G_0. Für jede Untergruppe $H \subset G_0$ ist das Urbild von H unter der Projektion $G \twoheadrightarrow G_0$ eine Untergruppe G_H von G mit Gitter* Γ ([13], Cap. VI, Lehrsatz XVI). Schoenflies benützt dieses Resultat bei den Untersuchungen der Raumgruppen mit nicht zyklischer Punktgruppe ausgiebig. Will man mit seiner Methode die Raumgruppen einer solchen arithmetischen Klasse finden, hat man daher auch die Raumgruppen von anderen Klassen zu ermitteln. Beim Burckhardtschen Zugang ist dies im Prinzip nicht nötig (s. [14], Nummer 6.5).

4.4 Konstruktion der Raumgruppen nach Burckhardt

Seien Γ das Gitter $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ und H die Gruppe der Ordnung 4, die von den Potenzen der Drehung $\varphi\colon (x_1, x_2, x_3)^t \mapsto (-x_2, x_1, x_3)^t$ gebildet wird. Jede Raumgruppe G von $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$, welche der arithmetischen Klasse von $(\mathbb{Z}^3, H)$ angehört, wird vom Gitter der Translationsvektoren $\mathbb{Z}^3$ und einem Element der Form (v, φ) mit $v \in \mathbb{R}^3$ erzeugt. Es stellen sich zwei Fragen:

(i) Welche Vektoren v sind zugelassen?

(ii) Wann liefern Vektoren v, v' eigentlich affin äquivalente Gruppen?

Die Antwort auf (i) ergibt sich wie bei Schoenflies: $(v, \varphi)^4$ ist eine Translation; sie gehört genau dann zu G, falls $v + \varphi(v) + \varphi^2(v) + \varphi^3(v) = (0, 0, 4v_3)^t$ in $\mathbb{Z}^3$ liegt, d.h., falls $v_3 \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}$ ist. Um den ersten Teil von (ii) zu beantworten, imitiert man das geometrische Verfahren des Verschiebens des Ursprunges mit algebraischen Mitteln: dies führt auf die Translationsklassen (s. [14], Nummer 6.2). Durch Übergang von G zu einer andern Gruppe in der gleichen Translationsklasse kann man erreichen, dass der Vektor in (v, φ) die Form $(0, 0, \frac{k}{4})^t$ mit $k \in \mathbb{Z}$ bekommt. Es folgt, dass jede Raumgruppe der arithmetischen Klasse $P4$ eigentlich affin äquivalent ist zu einer Gruppe, die von $\mathbb{Z}^3$ und einem Element der Form $(\frac{k}{4}, \varphi)$ mit $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ erzeugt wird. Es bleibt die Frage, ob verschiedene Werte von k auf eigentlich affin äquivalente Gruppen führen können. Man kann sie beantworten, in dem man die Wirkung des Normalisators $N_{\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})}(H)$ auf der Menge der Translationsklassen analysiert (s. [14], Nummer 6.4).

Literatur

[1] Bieberbach, L.: Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume, Teil I. *Math. Annalen* 70 (1911), 297–336.

[2] Bieberbach, L.: Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume, Teil II. *Math. Annalen* 72 (1912), 400–412.

[3] Brown, H.; Bülow, R.; Neubüser, J.; Wondratschek, H.; Zassenhaus, H.: *Crystallographic groups of four-dimensional space*. John Wiley & Sons, 1978.

[4] Burckhardt, J.J.: Bemerkungen zur arithmetischen Berechnung der Bewegungsgruppen. *Comment. Math. Helv.* 2 (1930), 91–98.

[5] Burckhardt, J.J.: Zur Theorie der Bewegungsgruppen. *Comment. Math. Helv.* 6 (1934), 159–184.

[6] Burckhardt, J.J.: Bewegungsgruppen in mehrdimensionalen Räumen. *Comment. Math. Helv.* 9 (1936/37), 284–302.

[7] Burckhardt, J.J.: *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*. Birkhäuser, 1947 (1. Auflage) und 1966 (2. neubearbeitete Auflage).

[8] Buser, P.: A geometric proof of Bieberbach's theorems on crystallographic groups. *L'Enseignement Mathématique* 31 (1985), 137–145.

[9] Fedorov, E.S.: Zusammenstellung der krystallographischen Resultate des Herrn Schoenflies und der meinigen. *Zs. f. Kristallogr.* 20 (1892), 25–75.

[10] Hilbert, D.: *Mathematische Probleme*. Ges. Abh. Bd. 3, 290–329.

[11] *International Tables for Crystallography*. Volume A on space-group symmetry (T. Hahn); Kluwer Academic Publishers 2002 (fifth edition).

[12] Plesken, W.; Schulz, T.: Counting crystallographic groups in low dimensions. *Exp. Math.* 9 (2000), 407–411.

[13] Schoenflies, A.: *Krystallsysteme und Krystallstructur*. Teubner, 1891.

[14] Strebel, R.: Burckhardtsche Bestimmung der Raumgruppen II. Erscheint in *Elem. Math.*.

Ralph Strebel
Departement für Mathematik
Universität Freiburg
CH–1700 Freiburg, Schweiz
e-mail: `ralph.strebel@unifr.ch`

Elem. Math. 58 (2003) 156 – 168
0013-6018/03/040156-13
DOI 10.1007/s00017-004-0201-4

Elemente der Mathematik

Zur Geschichte der Arithmetik der Algebren (1843–1932)

Günther Frei

Einleitung. Im Jahre 1927 ist bei Orell Füssli in Zürich das Buch von *Leonard Eugene Dickson „Algebren und ihre Zahlentheorie"* erschienen. Es wurde im wesentlichen von *Johann Jakob Burckhardt* im Auftrag von Andreas Speiser aus dem Englischen übersetzt und hat auf *Emil Artin* und *Helmut Hasse*, sowie auf *Emmy Noether* einen grossen Einfluss ausgeübt und eine Entwicklung eingeleitet, die zur abstrakten Theorie der nicht-kommutativen Algebren und auch zur Kohomologietheorie der Gruppen führte. Im folgenden soll die Entwicklung dieser Zahlentheorie der Algebren in ihren wesentlichen Zügen von 1843 bis 1932 nachgezeichnet werden.

1 Strukturtheorie

1.1 Anfänge. 1. Die Theorie der Algebren wurde gewissermassen von *Leonhard Euler* in seiner *„Introductio in analysin infinitorum"* vorbereitet, wo eine komplexe Zahl z als Punkt in der Ebene mit reellen Koordinaten (x, y) als $z = x+yi$, oder in Polarkoordinaten (r, ϕ) als $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, aufgefasst werden kann, wobei Euler auch schon mittels Potenzreihen die Beziehung $e^{i\phi} = (\cos\phi + i\sin\phi)$ fand und daraus die bemerkenswerte Formel $e^{i\pi} = -1$ herleitete.[1)] Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene wurden allerdings erst vom norwegisch-dänischen Mathematiker *Caspar Wessel* im Jahre 1797 und vom Schweizer *Robert Argand* (1806) genauer gefasst, nämlich – in moderner Sprache ausgedrückt – als Operationen in einem zweidimensionalen Vektorraum über den reellen Zahlen. D.h. die komplexen Zahlen wurden als gerichtete, am Ursprung angeheftete Strecken (Vektoren) oder als Punkte betrachtet, die Addition komponentenweise definiert, und die Multiplikation so, dass sie der Relation $i^2 = -1$ unterliegt. Aus den Eulerschen Formeln geht hervor, dass Multiplikation mit i als Drehung um 90° der komplexen x-y-Ebene aufgefasst werden kann.

2. Es waren diese Eigenschaften, welche den irischen Mathematiker *William Rowan Hamilton* bewogen, nach einer dreidimensionalen Verallgemeinerung der komplexen Zahlen zu suchen, nämlich nach einer weiteren „komplexen Zahl" j derart, dass sich die Punkte $\mathbf{p}$ im Raum als $\mathbf{p} = x + yi + zj$ darstellen lassen und Multiplikation mit j eine Drehung um 90° in einer zur x-y-Ebene orthogonalen Richtung bewirkt. Erst

1) s. [Eu-1748], § 133 und § 138.

nach langem Suchen wurde es ihm am 16. Oktober 1843 klar, dass das nicht gelingen konnte, dass es aber möglich ist, in einem vierdimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{H} = \{\mathbf{q} = x + yi + zj + tk;\ x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$ einen dreidimensionalen Unterraum zu finden, nämlich den imaginären Anteil $\mathbb{J} = \{yi + zj + tk\}$, in welchem Multiplikation mit i, j bzw. k Drehungen um 90° bewirken. Allerdings ist das nur möglich unter Verzicht auf die Eigenschaft der Kommutativität der Multiplikation. Für die „Basiselemente" 1, i, j, k fand Hamilton die fundamentalen Eigenschaften:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ij = k,\ jk = i,\ ki = j; \quad ij = -ji,\ jk = -kj,\ ki = -ik.$$

Die Elemente der so definierten Algebra[2)] $\mathbb{H}$ nannte er *Quaternionen*, und er wies nach, dass die Multiplikation der Quaternionen dem assoziativen Gesetz gehorcht.

3. In der Folge wurden kurz nacheinander eine ganze Reihe von weiteren Algebren entdeckt, insbesondere durch englische Mathematiker. Schon im Dezember 1843 fand *John Thomas Graves* die *Oktonionen*, ein reeller Vektorraum der Dimension 8 mit Multiplikation,[3)] die aber weder dem kommutativen noch dem assoziativen Gesetz genügen, sondern nur dem sogenannten alternativen, einer Abschwächung der Assoziativität. Hingegen besitzt jede von Null verschiedene Oktonion $\mathbf{q}$ – wie auch jede von Null verschiedene Quaternion – eine eindeutig bestimmte multiplikative Inverse $\mathbf{q}^{-1}$. Daher haben weder die Quaternionen noch die Oktonionen Nullteiler.[4)] Unabhängig von Graves fand auch *Arthur Cayley* 1845 die Oktonionen.

1853 führte Hamilton die *Biquaternionen* $\mathbb{B} = \{\mathbf{q} = x + yi + zj + tk;\ x, y, z, t \in \mathbb{C}\}$ ein, die Quaternionen über den komplexen Zahlen, also abermals einen reellen Vektorraum der Dimension 8 mit Multiplikation, die aber von der der Oktonionen wesentlich verschiedenen ist. Denn die Biquaternionen besitzen nicht-triviale Nullteiler. Die *komplexen* Quaternionen $\mathbb{H}(\mathbb{C}) = \mathbb{B}$ sind daher auch von den *reellen* Quaternionen $\mathbb{H}(\mathbb{R}) = \mathbb{H}$ strukturell sehr verschieden. Das hängt mit dem unterschiedlichen Verhalten der quadratischen Form $\Phi = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zusammen. Über $\mathbb{R}$ ist nämlich die Form Φ *anisotrop*, d.h. es ist $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ nur im trivialen Falle $x = y = z = t = 0$ lösbar, während über $\mathbb{C}$ die Form Φ *isotrop* ist, d.h. es gibt für $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ auch nicht-triviale Lösungen $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}$. Daher hat in $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ jede von Null verschiedene Quaternion $\mathbf{q} = x + yi + zj + tk$ eine eindeutig bestimmte Inverse $\mathbf{q}^{-1}$, nämlich $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}'}{N(\mathbf{q})}$, wobei $\mathbf{q}' = x - yi - zj - tk$ die *Konjugierte* und $N(\mathbf{q}) = \mathbf{q}'\mathbf{q} = \mathbf{q}\mathbf{q}' = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ die *Norm* von $\mathbf{q}$ bedeutet.[5)] Und es ist $\mathbf{q} = 0$, d.h. $x = y = z = t = 0$ genau dann, wenn $N(\mathbf{q}) = 0$ ist. Hingegen gibt es in $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ nicht-triviale Nullteiler, nämlich die Quaternionen $\mathbf{q} = x + yi + zj + tk$, für welche $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ eine nicht-triviale Lösung $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}$ zulässt. Denn es ist dann $\mathbf{q}\mathbf{q}' = N(\mathbf{q}) = 0$ mit $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \neq 0$. Dass die Algebra der Biquaternionen nicht-triviale Null-

2) Als *Algebra* wollen wir einen Vektorraum bezeichnen, in welchem eine Multiplikation von Vektoren definiert ist.

3) Die Dimension einer Algebra wird von Hasse als *Rang* bezeichnet, von Wedderburn als *Ordnung* (s. [We-1907], S. 79). Der Einfachheit halber wollen wir die Bezeichnung Dimension auch für Algebren beibehalten.

4) Ein Element $q \neq 0$ heisst *Nullteiler*, wenn ein $r \neq 0$ existiert, so dass $qr = 0$ ist.

5) Die Links-Inverse stimmt mit der Rechts-Inversen überein.

teiler besitzt, geht auch daraus hervor, dass sie, wie Cayley 1858 bemerkte, isomorph der (vollen) Matrizenalgebra $\mathcal{M}(2,\mathbb{C})$ über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist. Denn der Quaternion $\mathbf{q} = x+yi+zj+tk$ in $\mathbb{B}$ entspricht die Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x+yi & -z+ti \\ z+ti & x-yi \end{pmatrix}$ in $\mathcal{M}(2,\mathbb{C})$ und umgekehrt. Dabei ist die Norm von $\mathbf{q}$ gleich der Determinanten von $\mathbf{M}$. Die Algebra der Biquaternionen ist daher assoziativ, im Gegensatz zu den Oktonionen.

4. Matrizen wurden 1855 von Cayley eingeführt, um die Theorie der Determinanten und die Invariantentheorie der linearen Transformationen durchsichtiger zu gestalten. Die Bezeichnung *Matrix* stammt aber von *James Joseph Sylvester* (1850). In einer grundlegenden Arbeit im Jahre 1858 zeigte Cayley, dass die (quadratischen) Matrizen (mit Elementen aus einem Körper K) als Vektorraum (über K) aufgefasst und aufgrund der Eigenschaften der Komposition von linearen Transformationen mit einer Multiplikation versehen werden können und dadurch zu einer Algebra (über K) werden, die assoziativ aber nicht kommutativ ist und Nullteiler aufweisen kann. Die Basiselemente sind die Matrizen E_{ij} mit lauter Nullen, ausgenommen einer Eins in der i-ten Reihe und j-ten Kolonne. Dadurch bilden die $n \times n$ Matrizen $\mathcal{M}(n, K)$ (über K) eine Algebra der Dimension n^2 (über K). Auch war es Cayley, der als erster hyperkomplexe Zahlen mit Hilfe von Matrizen behandelte. In einer wichtigen Arbeit von 1854 hatte Cayley sogar schon die Gruppenalgebra über einer endlichen Gruppe betrachtet, nachdem er dort den abstrakten Gruppenbegriff eingeführt hatte.

1.2 Allgemeine Struktursätze. 1. Weitere auch für die Geometrie und Zahlentheorie wichtige Algebren oder *hyperkomplexe Systeme*, wie sie fortan oft genannt wurden, stammen von *Hermann Günther Grassmann* (1844, 1862) und *William Kingdon Clifford* (1873, 1878), nach denen sie heute benannt werden.

Aufgrund der Vielfalt der bis dahin gefundenen Algebren entstand die Aufgabe, alle möglichen Algebren (mit Einselement), für welche das Assoziativgesetz und die beiden Distributivgesetze gelten, zu klassifizieren. Einen ersten bedeutenden Beitrag dazu lieferte *Benjamin Peirce* mit seiner im Jahre 1881, nach seinem Tode erschienenen Arbeit *„Linear Associative Algebras“*, in der Peirce die Begriffe *nilpotent* und *idempotent* einführte und damit erste Struktursätze gewann. Ein Element a einer Algebra $\mathcal{A}$ heisst *nilpotent*, wenn $a^n = 0$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$, und *idempotent*, wenn $a^2 = a$ gilt. Peirce hatte damit bereits viele Algebren bis zur Dimension 6 klassifizieren können.

Wichtige Struktursätze für assoziative Algebren mit Einselement über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erhielten *Georg Scheffers* und *Theodor Molien* im Jahre 1891. Molien zeigte, dass jede einfache[6)] Algebra über $\mathbb{C}$ eine vollständige Matrizenalgebra ist, d.h. isomorph einer Algebra von quadratischen Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Unabhängig von Molien – und vollständiger – hat auch *Élie Cartan* diesen Satz sieben Jahre später bewiesen.

2. Eine allgemeine Theorie der assoziativen Algebren mit Einselement, fortan kurz *Algebren* genannt, über *beliebigen Körpern* wurde 1907 von *J.H. Maclagan Wedderburn* in seiner bedeutenden Arbeit *„On Hypercomplex Numbers“* entwickelt. Diese sollte für die Arithmetik der Algebren die Grundlage bilden. Wedderburn definiert dort Summe

6) vgl. unten, art. 2.

und Produkt von linearen Unterräumen – bei Wedderburn „Komplexe“ genannt – einer gegebenen Algebra $\mathcal{A}$ sowie die Begriffe *invariant*, *einfach*, *halbeinfach* und *Radikal*.

Eine Unter-Algebra $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ heisst bei Wedderburn *invariant*, wenn $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ gilt, also wenn $\mathcal{B}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$ ist. Eine Algebra $\mathcal{A}$ heisst *einfach*, wenn sie keine nicht-triviale invariante Unter-Algebra enthält, also ausser dem Nullideal (0) und dem Einsideal $(1) = \mathcal{A}$ keine anderen zweiseitigen Ideale. Wedderburn nennt eine Algebra *halbeinfach*, wenn sie keine invariante nilpotente Unter-Algebra[7] enthält, d.h. wenn ihr Radikal das Nullideal (0) ist. Das *Radikal* $\mathcal{N}$ von $\mathcal{A}$ erscheint bei Wedderburn als die maximale nilpotente invariante Unter-Algebra von $\mathcal{A}$. Dazu weist er nach, dass $\mathcal{N}$ die Vereinigung aller nilpotenten invarianten Unter-Algebren in $\mathcal{A}$ ist. Dann beweist Wedderburn seinen[8]

Hauptsatz 1 (1) *Jede Algebra $\mathcal{A}$ über einem Körper K ist Summe aus ihrem eindeutig bestimmten Radikal und einer bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten halbeinfachen Algebra über K.*

(2) *Jede halbeinfache Algebra $\mathcal{A}$ über einem Körper K ist eine direkte Summe von eindeutig bestimmten einfachen Algebren über K.*

(3) *Jede einfache Algebra $\mathcal{A}$ über einem Körper K ist isomorph einer vollen Matrixalgebra $\mathcal{M}(n, \mathcal{S})$ über einem Schiefkörper $\mathcal{S}$ über K.*

Weiter gilt:

$\mathcal{M}$ und $\mathcal{S}$ sind eindeutig bestimmt bis auf einen inneren Automorphismus von $\mathcal{A}$.[9]

(4) *Das Zentrum Z einer einfachen Algebra $\mathcal{A}$ über einem Körper K ist ein Relativkörper über K.*[10]

Ein *Schiefkörper*,[11] bei Wedderburn *primitive Algebra* oder *Divisionsalgebra* genannt, ist eine Algebra, in der alle Körperaxiome gelten ausser der Kommutativität für die Multiplikation, also eine Algebra ohne Nullteiler. Insbesondere hat jedes von Null verschiedene Element in einem Schiefkörper ein eindeutig bestimmtes Links-Inverses und ein Rechts-Inverses, die dann miteinander identisch sind.

3. *Georg Frobenius* hatte 1878 gezeigt, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und die Quaternionen $\mathbb{H}$ die einzigen Schiefkörper über dem reellen Zahlkörper $\mathbb{R}$ sind, und dass es über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ausser $\mathbb{C}$ keine weiteren Schiefkörper mehr gibt.

---

7) Eine Algebra heisst nilpotent, wenn jedes ihrer Elemente nilpotent ist. Bei Wedderburn heisst eine Algebra $\mathcal{A}$ zunächst *nilpotent*, wenn $\mathcal{A}^n = 0$ ist für eine natürliche Zahl n.

8) s. [We-1907], S. 109.

9) s. [Di-1923], S. 78 und [Hs-1932], S. 177 und 186/7.

10) s. [Di-1923], S. 80 und [Hs-1931], S. 497.

11) Die Bezeichnung *Schiefkörper* stammt von van der Waerden (s. [Ar-1927a], S. 245).

2 Arithmetik

2.1 Arithmetik der Quaternionen. 1. Bereits in der zweiten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie hatte *Richard Dedekind* im Jahre 1871 im Supplement X (§ 159) den Begriff des *Körpers* eingeführt und gezeigt, dass ein algebraischer Zahlkörper n-ten Grades über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als eine kommutative Algebra der Dimension n über $\mathbb{Q}$ aufgefasst werden kann, etwa erzeugt durch die Potenzen einer Wurzel eines über $\mathbb{Q}$ irreduziblen Polynomes n-ten Grades. Er nannte n (linear über $\mathbb{Q}$) *unabhängige* Elemente des Körpers eine *Basis* des Körpers, später auch *Haupteinheiten* des Körpers. Die ebenfalls von Dedekind im Supplement X (§ 163) entwickelte Arithmetik eines algebraischen Zahlkörpers K über $\mathbb{Q}$, d.h. der Idealtheorie im Ring $\mathfrak{R}$ der ganzen Zahlen in K, hat *Adolf Hurwitz* dazu angeregt, auch in nicht-kommutativen Algebren über algebraischen Zahlkörpern, speziell für die Quaternionen über $\mathbb{Q}$, in Anlehnung an Dedekind eine entsprechende Ring- und Idealtheorie zu entwickeln.[12)] Mit diesem Problem hatte sich schon *Rudolf Lipschitz* im Jahre 1886 beschäftigt, aber erst Hurwitz gelang es, die geeignete Definition der ganzen rationalen Quaternionen zu finden, nämlich so, dass sie zu einer Maximalordnung in der Algebra der rationalen Quaternionen führt.

2. Eine *rationale Quaternion* $\mathbf{a} = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, mit $a_\nu \in \mathbb{Q}, \nu = 0, 1, 2, 3$, heisst bei Hurwitz *ganz*, wenn entweder alle a_ν ganze rationale Zahlen oder alle a_ν halbe rationale Zahlen, d.h. von der Form $a_\nu = n + \frac{1}{2}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ sind. Die ganzen rationalen Quaternionen bilden einen Ring $\mathfrak{R}$ innerhalb des Schiefkörpers $\mathbb{H}(\mathbb{Q}) = \mathfrak{Q}$ der rationalen Quaternionen, und zwar den grössten Integritätsbereich innerhalb $\mathfrak{Q}$, der die Schiefkörper-Basis $\{1, i, j, k\}$ enthält. Er wird über $\mathbb{Z}$ erzeugt durch i, j, k und $l = \frac{1+i+j+k}{2}$.

Um die Arithmetik von $\mathfrak{R}$ herzuleiten, beweist Hurwitz zunächst den grundlegenden Satz, dass jeder Automorphismus ϕ von $\mathfrak{Q}$ – bei Hurwitz „Permutation" genannt – ein innerer ist, d.h. es ist $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{q}\mathbf{a}\mathbf{q}^{-1}$ für eine gewisse Quaternion $\mathbf{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathfrak{Q}$.[13)] Hierbei ist die eindeutig bestimmte Inverse $\mathbf{q}^{-1}$ von $\mathbf{q}$ gegeben durch $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}'}{N(\mathbf{q})}$, wobei $\mathbf{q}' = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$ die *Konjugierte* und $N(\mathbf{q}) = \mathbf{q}'\mathbf{q} = \mathbf{q}\mathbf{q}' = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ die *Norm* von $\mathbf{q}$ bedeutet.

Dann bestimmt Hurwitz die Einheiten in $\mathfrak{R}$, d.h. die Elemente $\mathbf{e}$ in $\mathfrak{R}$, für die $N(\mathbf{e}) = 1$ gilt. Davon gibt es genau 24, nämlich $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ und $\frac{\pm 1 \pm i \pm j \pm k}{2}$.[14)] Daraus folgt, dass $\mathfrak{R}$ genau 24 Automorphismen gestattet, und diese werden durch Konjugation mit den Einheiten $\mathbf{q} = \mathbf{e}$ von $\mathfrak{R}$ und deren Produkte mit $\mathbf{g} = 1 + i$ vermittelt. Weiter zeigt Hurwitz, dass $\mathfrak{R}$ *euklidisch* ist, d.h. dass $\mathfrak{R}$ einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Divisions-Algorithmus gestattet. Daraus folgt, dass jedes rechtsseitige (bzw. linksseitige) Ideal in $\mathfrak{R}$ ein rechtsseitiges (bzw. linksseitiges) *Hauptideal* ist. Schliesslich ergibt sich aus Betrachtungen über die Norm der *Fundamentalsatz der Arithmetik* für $\mathfrak{R}$, nämlich dass jede ganze Quaternion bis auf die Reihenfolge und bis auf Einheiten auf nur eine

---

12) vgl. [Hu-1896] und ausführlicher in [Hu-1919].

13) vgl. [Hu-1896], § 2. Dieser wichtige Satz wurde später von *Emmy Noether* und *Albert Thoralf Skolem* auf einfache Algebren erweitert.

14) Die Gruppe der Einheiten ist isomorph zur Gruppe der homogenen Tetraedersubstitutionen, die in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen eine wichtige Rolle spielt.

Weise in *Primquaternionen* zerlegt werden kann.[15)] Denn eine ganze Quaternion ist genau dann prim, wenn ihre Norm eine Primzahl ist; und es ist die Norm multiplikativ, d.h. es gilt $N(\mathbf{q_1 q_2}) = N(\mathbf{q_1})N(\mathbf{q_2})$ für $\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2} \in \mathfrak{Q}$.

3. Nach dem Vorbild der Hurwitzschen Arbeit hat *Gustav Du Pasquier*, ein Schüler von Hurwitz, dessen Arbeit über Quaternionen zu einer Zahlentheorie der linearen Substitutionen erweitert. Damit hat Du Pasquier im wesentlichen die Theorie der Arithmetik von halbeinfachen Algebren in Angriff genommen. Diese wurde von *Leonard Eugene Dickson* zu einer Arithmetik der assoziativen Algebren weiter ausgebaut, nämlich zu einer Arithmetik der Maximalordnungen der assoziativen Algebren.[16)]

2.2 Struktur der Schiefkörper und ihre Beziehung zur Arithmetik der algebraischen Zahlkörper. 1. Nach dem Hauptsatz von Wedderburn hängt die Struktur einer (einfachen) Algebra über einem Körper K von der Struktur des dazugehörigen Schiefkörpers ab. Bis 1906 waren aber ausser den Quaternionen keine weiteren Schiefkörper bekannt. Eine völlig neue Art von Schiefkörper gab nun *Dickson* in einer kurzen Mitteilung an.[17)] Dickson ging dabei von der Tatsache aus, dass sich die reellen Quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbb{R})$ als Algebra der Dimension 2 über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auffassen lassen:

$$\mathbb{H}(\mathbb{R}) = \{x + yi + zj + tk = x + yi + zj + tij = (x + yi) + (z + ti)j = r + sj\}$$

mit $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ und $r, s \in \mathbb{C}$. Hierbei sind i und j zwei voneinander unabhängige quadratische Elemente über $\mathbb{R}$, die der algebraischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$ genügen. Es ist also $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ ein Schiefkörper über $\mathbb{R}$, der den über $\mathbb{R}$ quadratischen Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ enthält.

2. Nach diesem Vorbild konstruierte Dickson 1912 zunächst eine *verallgemeinerte Quaternionen-Algebra*,[18)] indem er $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen Körper K von Charakteristik $\neq 2$ ersetzte und i und j durch zwei beliebige über K quadratische, aber voneinander unabhängige Elemente α und β, wobei also $\alpha^2 = a$ und $\beta^2 = b$ in K liegen, nicht aber α und β selbst. Der von $1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ erzeugte Vektorraum wird durch die Multiplikationsregeln $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$, $\alpha\beta = -\beta\alpha$ und daher $(\alpha\beta)^2 = -ab$ zu einer (assoziativen) Algebra $\mathscr{A}$ (mit Einselement) von der Dimension 4 über dem Körper K, $\mathscr{A} = \{\mathbf{q} = x + y\alpha + z\beta + t\alpha\beta;\ x, y, z, t \in K\}$, die wir mit $\mathscr{A} = K[a, b]$ bezeichnen wollen. Ist $\mathbf{q}' = x - y\alpha - z\beta - t\alpha\beta$ die Konjugierte von $\mathbf{q}$, dann stellt die Norm von $\mathbf{q}$, $N(\mathbf{q}) = \mathbf{q}'\mathbf{q} = \mathbf{q}\mathbf{q}' = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2$, eine quadratische Form über K dar. In der Algebra $\mathscr{A}$ ist der quadratische Körper $L = K(\sqrt{a}) = K(\alpha)$ enthalten.

3. Eine entscheidend neue Wendung kommt nun dadurch zustande, dass Dickson für die Erzeugung von $\mathscr{A} = K[a, b]$ über $L = K(\sqrt{a})$ mittels $\beta = \sqrt{b}$ die Galois-Gruppe G

15) vgl. [Hu-1896], § 9.

16) s. [Di-1923], Chapter X und [Di-1927], Kapitel X. Von den späteren Arbeiten seien insbesondere die beiden Arbeiten zu den halbeinfachen Algebren von Speiser [Sp-1927] und [Sp-1935], die beiden Arbeiten von Artin [Ar-1927b] und [Ar-1927c] sowie die Arbeiten von Heinrich Brandt erwähnt; ferner die Arbeit von Hasse über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper [Hs-1931].

17) s. [Di-1906]; ferner [Di-1914a], insbesondere art. 1 und [Di-1923], § 47.

18) s. [Di-1923], § 47 und [Di-1914a], art. 9, S. 38.

von L/K heranzieht. Diese ist zyklisch von der Ordnung 2 und wird erzeugt durch den Automorphismus σ, bestimmt durch $\sigma(\alpha) = -\alpha$, und allgemein $\sigma(x + y\alpha) = x - y\alpha$ für $x + y\alpha \in L$; $x, y \in K$. Solcherart wird die Multiplikation in $\mathcal{A}$ bestimmt durch die Rechenregeln

$$(1)\ \alpha^2 = a \in K, \quad (2)\ \beta^2 = b \in K, \quad (3)\ \beta\alpha = -\alpha\beta = \sigma(\alpha)\beta.$$

Das bedeutet, dass die Aktion von σ in L bestimmt wird durch Konjugation mit β: $\sigma(\alpha) = \beta\alpha\beta^{-1}$. Dadurch wird die Arithmetik von L mit der multiplikativen Struktur von $\mathcal{A}$ in Verbindung gebracht.

Dickson stellte sich auch die wichtige Frage, wann die von ihm konstruierte Algebra $\mathcal{A} = K[a, b] = L(\beta)$ ein Schiefkörper ist. Dazu muss jedes von Null verschiedene Element $\mathbf{q} = r + s\beta \in \mathcal{A}$ mit $r, s \in L$ ein Inverses besitzen. Mit Hilfe dieser Bedingung erhält Dickson den folgenden wichtigen

Satz 2 *Die Algebra der verallgemeinerten Quaternionen $\mathcal{A} = K[a, b]$ ist ein Schiefkörper, wenn b nicht die Norm eines Elementes von $K(\sqrt{a})$ über K ist.*

Die multiplikative Struktur von $\mathcal{A} = K[a, b]$ hängt also von der Gruppe der Normen von $K(\sqrt{a})/K$ ab. Weil aber die Theorie der Normengruppe eines Körpers durch die Klassenkörpertheorie bestimmt wird, ist auch die Struktur der Algebra $\mathcal{A} = K[a, b]$ durch die Klassenkörpertheorie bestimmt. Das war später der wichtige Ansatzpunkt von Hasse, der zu seinem allgemeinen Normenrestsymbol und weiter zur kohomologischen Formulierung der Klassenkörpertheorie geführt hat.

4. Dickson bemerkte 1906, dass sich diese Konstruktion auf beliebige endliche zyklische algebraische Erweiterungen L/K verallgemeinern lässt. Genauer ausgeführt hat er dies aber erst 1914, 1923 und 1927.

Satz 3 *Es sei K ein beliebiger Körper und $L = K(\alpha)$ eine über K endliche zyklische Erweiterung vom Grade n, deren Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ von σ erzeugt sei. Weiter sei β ein von α unabhängiges Element derart, dass $\beta^n = b \in K$ ist, aber $\beta^r \notin K$ für $1 \le r < n$.*

(1) *Dann wird der von β über L erzeugte n-dimensionale Vektorraum $\mathcal{A} = L(\beta) = K(\alpha, \beta)$ eine assoziative Algebra mit Einselement von der Dimension n über L und von der Dimension n^2 über K mit einer K-Basis $\{\alpha^\nu\beta^\mu; \nu, \mu = 0, 1, \ldots, n-1\}$, wenn für die Multiplikation gilt: $\beta\alpha = \sigma(\alpha)\beta$, wenn also die Aktion von σ in L gegeben ist durch Konjugation mit β: $\sigma(\alpha) = \beta\alpha\beta^{-1}$.*

(2) *$\mathcal{A} = K(\alpha, \beta)$ ist ein Schiefkörper über K, wenn b^r für $1 \le r < n$ nicht die Norm eines Elementes t aus $L = K(\alpha)$ ist.*

Ferner gilt:

(3) *b ist die Norm eines Elementes t aus $L = K(\alpha)$ genau dann, wenn die Algebra $\mathcal{A} = K(\alpha, \beta)$ isomorph einer vollen Matrizenalgebra $\mathcal{M}(n, K)$ von $n \times n$-Matrizen über dem Grundkörper K ist.*

Teil (1) wurde von Dickson 1914 bewiesen, ebenso Teil (2) im Falle von $n = 2$ und $n = 3$. Für beliebiges n erbrachte Wedderburn den Beweis von Teil (2) noch im gleichen Jahre. Hasse konnte 1931 zeigen, dass die Bedingung in (2), nämlich dass b^r für $1 \le r < n$ nicht die Norm eines Elementes aus $K(\alpha)$ sei, nicht nur hinreichend ist für einen Schiefkörper, sondern auch notwendig.

5. Damit war erstmals die Existenz von Schiefkörpern nachgewiesen, die keine Körper und keine Quaternionen oder verallgemeinerte Quaternionen sind, und deren Dimension n^2 über dem Grundkörper K grösser als 4 ist.

Als Beispiel für $n = 3$ konstruierte Dickson folgende Algebra. Der Grundkörper K sei der rationale Zahlkörper $\mathbb{Q}$, also $K = \mathbb{Q}$. Als zyklischer Körper L vom Grade 3 über $\mathbb{Q}$ sei der maximale reelle Unterkörper des Kreiskörpers der 7-ten Einheitswurzeln $\mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$, genommen, der von $\zeta + \zeta^{-1}$ erzeugt wird. Also $L = K(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\alpha = \zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{7}$. α ist Wurzel der (irreduziblen) zyklischen Gleichung $x^3+x^2-2x-1 = 0$. Ist nun β ein von α linear unabhängiges Element, für welches $\beta^3 = b$ eine gerade ganze Zahl ist, die nicht durch 8 teilbar ist, dann ist $\mathcal{A} = L(\beta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ ein Schiefkörper von der Dimension 9 über $\mathbb{Q}$.

2.3 Arithmetische Theorie der halbeinfachen Algebren. 1. Durch seine Arbeiten zur Gruppentheorie und zur algebraischen Zahlentheorie, insbesondere im Zusammenhang mit seiner Arbeit *„Allgemeine Zahlentheorie“*, ist *Andreas Speiser* auf das Buch *„Algebras and Their Arithmetics“* von Dickson schon bald nach dessen Erscheinen im Jahre 1923 aufmerksam geworden, in welchem erstmals die Theorie von Wedderburn und die Arithmetik der assoziativen Algebren zusammen mit den von Dickson konstruierten zyklischen Algebren lehrbuchmässig dargestellt waren. Im deutschen Sprachraum sind diese amerikanischen Arbeiten vorerst wenig beachtet worden.[19)] Deshalb hatte Speiser Dickson vorgeschlagen, das Buch ins Deutsche übersetzen zu lassen. Daraufhin sandte Dickson ein völlig neues, stark überarbeitetes und erweitertes Manuskript, das dann im wesentlichen von dem jungen Studenten *Johann Jakob Burckhardt* ins Deutsche übertragen wurde.

2. Die Übersetzung erschien 1927 bei Orell Füssli in Zürich unter dem Titel *„Algebren und ihre Zahlentheorie“*. Dickson hat dafür im Jahre 1928 den Cole Prize der American Mathematical Society erhalten. Sie hat auf Emil Artin und Helmut Hasse, und auch auf Emmy Noether, einen grossen Einfluss ausgeübt. Diese hofften, damit die Klassenkörpertheorie auf nicht-abelsche Zahlkörpererweiterungen verallgemeinern zu können. Artin hatte 1927 sein allgemeines Reziprozitätsgesetz in abelschen Zahlkörpern bewiesen und dadurch die Klassenkörpertheorie, die im wesentlichen eine Theorie der abelschen Zahlkörper ist, zu einem gewissen Abschluss gebracht.[20)] Hasse war 1927 mit dem zweiten Teil seines Berichtes der Klassenkörpertheorie beschäftigt. Er hatte sich gleich nach Erscheinen der deutschen Auflage des Dicksonschen Buches eine eigene Ausarbeitung davon erstellt. Ihn interessierte insbesondere die Beziehung zur Theorie der Normen, zu der er durch seine Theorie der quadratischen Formen geführt worden war. Von dort gelangte er zu den Reziprozitätsgesetzen und zur Klassenkörpertheorie, die auch als eine Theorie der Körpernormen in abelschen Zahlkörpern aufgefasst werden kann.[21)]

19) Allerdings hat Emmy Noether schon 1924 in Göttingen eine Vorlesung über hyperkomplexe Zahlen gegeben, in der sie die englische Erstausgabe des Buches von Dickson erwähnt.

20) s. [Ar-1927d] und [Fr-2003].

21) s. [Fr-2001].

3. Bedeutende, durch das Dicksonsche Buch angeregte und in Deutschland zwischen 1927 und 1930 erzielte Fortschritte finden sich nun in einer englisch geschriebenen Arbeit von Hasse, die am 29. Mai 1931 bei den Transactions der AMS eingereicht wurde.[22)]

Nach Wedderburn ist das Zentrum Z eines Schiefkörpers $\mathcal{S}$ über einem Körper K ein endlicher Erweiterungskörper über K. Ist $\mathcal{A}$ eine volle Matrixalgebra über $\mathcal{S}$, so ist Z auch das Zentrum von $\mathcal{A}$. Ist $Z = K$, so heisst $\mathcal{S}$ nach einem Vorschlag von van der Waerden *zentral* über K,[23)] bei Wedderburn *normal* über K. Ebenso heisst dann $\mathcal{A}$ zentral über K. Allgemein heisst eine einfache Algebra $\mathcal{A}$ über dem Körper K zentral, wenn K das Zentrum von $\mathcal{A}$ ist.

Die von Dickson über einem algebraischen Zahlkörper K und einer endlichen zyklischen Erweiterung L/K, $L = K(\alpha)$, vom Grade n mit erzeugendem Automorphismus σ konstruierte Algebra $\mathcal{A}$, die wir mit $\mathcal{A} = K(\alpha, \beta)$ bezeichnet hatten, wo $\beta^n = b \neq 0$ in K ist und $\beta\alpha = \sigma(\alpha)\beta$, nennt Hasse eine *zyklische Algebra* vom Grade n über K und schreibt dafür $\mathcal{A} = (b, K(\alpha), \sigma) = (b, L, \sigma)$. Ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Basis von L/K, dann ist $\{\beta^\nu\alpha_\mu; \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \mu = 1, 2, \ldots, n\}$ eine Basis von $\mathcal{A}$ über K. Hierzu beweist Hasse den

Satz 4 (1) *Jede zyklische Algebra $\mathcal{A} = (b, K(\alpha), \sigma)$ über einem algebraischen Zahlkörper K ist eine zentrale einfache Algebra über K.*

(2) *$L = K(\alpha)$ ist der grösste in $\mathcal{A}$ enthaltene Körper.*

Umgekehrt hatte Dickson für $n = 2$ gezeigt, dass jeder zentrale Schiefkörper über einem algebraischen Zahlkörper K zyklisch, d.h. eine zyklische Algebra über K ist. Für $n = 3$ wurde das 1921 von Wedderburn bewiesen, und für $n = 4$ von Albert mit Hilfe von Hasses p-adischer Theorie der isotropen quadratischen Formen.[24)] Ob dies auch bei beliebigem n für einen algebraischen Zahlkörper gelte, war eines der grossen offenen Probleme, das schliesslich 1932 von Hasse, Brauer und E. Noether gelöst wurde, nachdem es Hasse gelungen war, den analogen Satz für p-adische zentrale Schiefkörper über einem p-adischen Zahlkörper herzuleiten.

4. Die Theorie der zyklischen Algebren $\mathcal{A} = (b, K(\alpha), \sigma)$ hat Emmy Noether dadurch erweitert, dass sie anstelle einer zyklischen Erweiterung L/K eine beliebige galoissche Erweiterung L/K betrachtet und die zyklische Galois-Gruppe $G = \langle\sigma\rangle$ durch die entsprechende (beliebige) Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ ersetzt und die multiplikative Gruppe $L^\times$ von L mit G kreuzt. Über diese von E. Noether so genannten *verschränkten Produkte* hat sie erstmals 1929–30 in Vorlesungen in Göttingen vorgetragen. Veröffentlicht wurden diese verschränkten Produkte aber zuerst von Hasse in seinem Artikel in den Transactions.

Der Grundkörper K wird dort als vollkommen vorausgesetzt, z. B. endlich oder von Charakteristik 0, und es sei L/K eine galoissche Erweiterung vom Grade n mit Galois-Gruppe G. Dann wird das verschränkte Produkt von $L^\times$ mit G folgendermassen zu einer

22) s. [Hs-1932]. Vgl. auch [Deu-1935].

23) s. [vdW-1959], S. 193.

24) s. [AH-1932], S. 722.

Algebra $\mathcal{A} = L \times G$ über L. Jedem Element σ von G werde ein Basiselement u_σ von $\mathcal{A}$ über L zugeordnet, so dass $\mathcal{A}$ ein Vektorraum der Dimension n über L ist. $\mathcal{A}$ wird nun durch die folgenden Multiplikationsregeln zu einer Algebra:

(1) $au_\sigma = u_\sigma a^\sigma$ für jedes a in L.[25)]

(2) $u_\sigma u_\tau = u_{\sigma\tau} a_{\sigma,\tau}$ mit $a_{\sigma,\tau} \neq 0$ in L.

Die Menge (a) der Koeffizienten $a_{\sigma,\tau}$ in L heisst nach Issai Schur ein *Faktorensystem* von $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ ist eine Algebra der Dimension n^2 über K mit der Basis $\{u_\sigma \alpha_k\}$, wobei σ die Gruppe G durchläuft, und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis von L/K bildet. Dieses *verschränkte Produkt* bezeichnet Hasse mit $\mathcal{A} = (a, L)$. Gilt in $\mathcal{A}$ das Assoziativgesetz, so folgt für das Faktorensystem die Eigenschaft

(3) $a^\rho_{\sigma,\tau} = \frac{a_{\tau,\rho} a_{\sigma,\tau\rho}}{a_{\sigma\tau,\rho}}$.

Umgekehrt führt jedes Faktorensystem $(a) = \{a_{\sigma,\tau} \neq 0\}$ in L, das die Bedingung (3) erfüllt, zusammen mit den Multiplikationsregeln (1) und (2) zu einer assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ der Dimension n^2 über K, die sich als verschränktes Produkt $\mathcal{A} = (a, L)$ darstellen lässt.

Zwei Faktorensysteme (a) und (a') über L führen zur gleichen Algebra $\mathcal{A} = (a, L) = (a', L)$ genau dann, wenn für die beiden Faktorensysteme gilt:

(4) $a'_{\sigma,\tau} = a_{\sigma,\tau} \frac{c_\tau c_\sigma^\tau}{c_{\sigma\tau}}$ für ein $c_\sigma \neq 0$ in L.

Es ist dann $u'_\sigma = u_\sigma c_\sigma$, wenn $\{u'_\sigma\}$ die zu (a') gehörige Basis von $\mathcal{A}$ über L ist. Solche Faktorensysteme heissen nach Hasse *assoziiert*. Hasse schreibt dafür $(a) \sim (a')$. Die Menge der Klassen der assoziierten Faktorensysteme in L mit Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ bezeichnen wir mit $H^2(G, L^\times)$ oder $H^2(G, L/K)$. Diese bilden eine abelsche Gruppe, die *zweite Kohomologie-Gruppe* von G mit Werten in $L^\times$.

5. Ist $\mathcal{A}$ eine zentrale einfache Algebra über dem Körper K, und ist L eine Körpererweiterung von K, so ist auch die erweiterte Algebra $\mathcal{A} \times L$, die entsteht durch Erweiterung der Skalare (des Koeffizientenbereiches) von K nach L, eine zentrale einfache Algebra über L. Ist dann $\mathcal{A}$ eine volle Matrixalgebra über dem Körper L, so heisst L ein *Zerfällungskörper* von $\mathcal{A}$.[26)] Ist L ein Zerfällungskörper eines Schiefkörpers $\mathcal{S}$, so ist L Zerfällungskörper von jeder zentralen einfachen Algebra, die isomorph einer vollen Matrixalgebra über $\mathcal{S}$ ist. A. A. Albert zeigte 1931, dass jeder maximale Unterkörper L eines Schiefkörpers $\mathcal{S}$ über einem Körper K ein Zerfällungskörper von $\mathcal{S}$ ist.[26a)] So ist der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ Zerfällungskörper der reellen Quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbb{R})$ über dem Grundkörper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, nicht aber der Grundkörper $\mathbb{R}$ selbst. Hingegen ist der Grundkörper $\mathbb{C}$ der komplexen Quaternionen $\mathbb{B} = \mathbb{H}(\mathbb{C})$ schon Zerfällungskörper von $\mathbb{B}$, da $\mathbb{B}$ isomorph einer vollen Matrizenalgebra (der Dimension 4) über $\mathbb{C}$ ist. Weil jeder Schiefkörper $\mathcal{S}$ über einem Körper K einen Zerfällungskörper L enthält, ist die Dimension $[\mathcal{S} : K]$ stets ein Quadrat, was bereits von Wedderburn 1907 bewiesen wurde.

---

25) Anstelle von $\sigma(a)$ schreiben wir jetzt mit Kronecker a^σ.

26) Dieser Begriff stammt von R. Brauer und E. Noether 1927 (s. [Hs-1932], S. 183).

26a) Das war allerdings R.Brauer vorher bekannt.

Für verschränkte Produkte zeigt Hasse nun:

Satz 5 *Ist L/K eine endliche Galois-Erweiterung über dem vollkommenen Grundkörper K mit Galois-Gruppe G und $\mathcal{A} = (a, L) = L \times G$ das verschränkte Produkt von $L^\times$ mit G, dann gilt:*

(1) *L ist ein maximaler Unterkörper von $\mathcal{A}$.*

(2) *$\mathcal{A}$ ist eine zentrale einfache Algebra über K.*

(3) *L ist ein Zerfällungskörper von $\mathcal{A}$.*

Davon gilt auch eine Art Umkehrung.

Satz 6 *Jeder zentrale Schiefkörper $\mathcal{S}$ (und daher jede zentrale einfache Algebra $\mathcal{A}$) über einem vollkommenen Körper K ist zu einem verschränkten Produkt $\mathcal{A} = (a, L) = L \times G$ ähnlich.*

Dabei heissen nach Hasse zwei zentrale einfache Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ *ähnlich*, in Zeichen $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$, wenn ihre nach Hauptsatz 1 eindeutig bestimmten Schiefkörper $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ isomorph sind. Die Ähnlichkeitsklassen der zentralen einfachen Algebren über einem Körper K bilden nach *Richard Brauer* eine abelsche Gruppe $\mathrm{Br}(K)$ bezüglich des Produktes, die sogenannte *Brauer-Gruppe* von K, und diejenigen Klassen, die einen festen galoisschen Zerfällungskörper als maximalen Unterkörper L über K besitzen, formen eine Untergruppe $\mathrm{Br}(L/K)$. Dazu hat Brauer 1929 bewiesen:[27)]

Satz 7 *Die Gruppe $\mathrm{Br}(L/K)$ ist isomorph zur Gruppe der Klassen von assoziierten Faktorensystemen $H^2(G, L/K)$ in L mit Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.*

Für zyklische verschränkte Produkte beweist Hasse ergänzend und in Verallgemeinerung von Satz 3(3) den

Satz 8 *Ist $\mathcal{A} = (b, K(\alpha), \sigma)$ eine zyklische Algebra über dem Zahlkörper K als Grundkörper und (a) das zugehörige Faktorensystem in $L = K(\alpha)$, dann ist die Klasse des Faktorensystems (a) in $H^2(G, L/K)$ genau dann trivial, wenn $\mathcal{A}$ über K zerfällt. Und das ist genau dann der Fall, wenn $b \in K$ die Norm eines Elementes von $K(\alpha)$ ist.*

6. Zu einem tieferen Verständnis einer gegebenen Algebra $\mathcal{A}$ über einem Zahlkörper K und zum Beweis des vorhergehenden Satzes gelangte Hasse durch Übergang zu den $\mathfrak{p}$-adischen Komplettierungen $K_\mathfrak{p}$ von K, also durch Übergang zu der $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterung $K_\mathfrak{p}$ von K und der dadurch entstehenden lokalen Algebra $\mathcal{A}_\mathfrak{p} = \mathcal{A} \times K_\mathfrak{p}$ von $\mathcal{A}$, wo $\mathfrak{p}$ eine Primstelle in K bedeutet. Insbesondere erhält Hasse auf diese Weise u. a. auch den Beweis für Satz 4. Entscheidend dabei ist die von Hasse gefundene Eigenschaft, dass das von ihm entdeckte *Lokal-Global-Prinzip* für quadratische Formen auch für Algebren gilt, nämlich:

Satz 9 (1) *Zwei über einem algebraischen Zahlkörper K (zentrale einfache) zyklische Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ liegen in der gleichen Brauerklasse in $\mathrm{Br}(L/K)$ genau dann, wenn ihre Lokalisierungen $\mathcal{A}_\mathfrak{p}$ und $\mathcal{A}'_\mathfrak{p}$ für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von K in der gleichen (lokalen) Brauerklasse in $\mathrm{Br}(L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p})$ liegen.*

---

27) s. [Hs-1932], (13.1) und (13.2), S. 194, sowie [Br-1929a] und [Br-1929b].

(2) *Eine über einem algebraischen Zahlkörper K (zentrale einfache) zyklische Algebra $\mathcal{A}$ zerfällt über K genau dann, wenn die zugehörigen lokalen Algebren $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ über $K_{\mathfrak{p}}$ an jeder Primstelle $\mathfrak{p}$ von K zerfallen.*

Dieses Lokal-Global-Prinzip wurde von Hasse von den zyklischen Algebren auf beliebige zentrale einfache Algebren erweitert:[28)]

Satz 10 *Eine über einem algebraischen Zahlkörper K zentrale einfache Algebra $\mathcal{A}$ zerfällt über K genau dann, wenn alle Lokalisierungen $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ über $K_{\mathfrak{p}}$ für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ in K zerfallen.*

Hasse erkannte, dass aus dieser Verallgemeinerung seines Lokal-Global-Prinzipes der Hauptsatz für Algebren folgt:[29)]

Hauptsatz 11 *Jeder zentrale Schiefkörper $\mathcal{S}$ über einem algebraischen Zahlkörper K ist eine zyklische Algebra $\mathcal{A} = (a, L)$ über K für eine zyklische algebraische Erweiterung L/K und ein Faktorensystem (a) in L.*

Zu diesem Hauptsatz, der in einer gemeinsamen grundlegenden Arbeit von Hasse, Brauer und Noether bewiesen wurde, wobei jeder der drei Autoren einen wichtigen Schritt beisteuerte, schreibt Artin in einem Brief an Hasse aus dem Jahre 1931: „Sie können sich gar nicht vorstellen, wie ich mich über den endlich geglückten Beweis für die zyklischen Systeme gefreut habe. Das ist der grösste Fortschritt in der Zahlentheorie der letzten Jahre.“

Literatur

[AH-1932] Albert, A.A.; Hasse, H.: A Determination of all Normal Division Algebras over an Algebraic Number Field. *Transactions of the AMS* 34 (1932), 722–726.

[Ar-1927a] Artin, E.: *Über einen Satz von Herrn J.H. Maclagan Wedderburn.* Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927), 245–250.

[Ar-1927b] Artin, E.: *Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen.* Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927), 251–260.

[Ar-1927c] Artin, E.: *Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen.* Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927), 261–289.

[Ar-1927d] Artin, E.: *Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes.* Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927), 353–363.

[De-1885] Dedekind, R.: *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen.* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1885, 141–159; Ges. math. Werke, Bd. 2, XX, 1–22.

[Deu-1935] Deuring, M.: *Algebren.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 4, Julius Springer, Berlin 1935.

[DD-1871] Dirichlet, L.: *Vorlesungen über Zahlentheorie.* Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Friedrich Vieweg, Braunschweig 1871.

[Di-1906] Dickson, L.E.: Abstract 16, April 14, 1906, Bulletin of the AMS 12 (1905–06), 441–442.

[Di-1914a] Dickson, L.E.: Linear Associative Algebras and Abelian Equations. *Transactions of the AMS* 15 (1914), 31–46.

[Di-1914b] Dickson, L.E.: *Linear Algebras.* The University Press, Cambridge, 1914 (Reprint 1930).

[Di-1923] Dickson, L.E.: *Algebras and Their Arithmetics.* The University of Chicago Science Series, The University of Chicago Press, July 1923.

28) s. [HBN-1932], Satz I, S. 399.

29) s. [HBN-1932], Hauptsatz, S. 399.

[Di-1927] Dickson, L.E.: *Algebren und ihre Zahlentheorie.* Mit einem Kapitel über Idealtheorie von Andreas Speiser. Orell Füssli Verlag, Zürich 1927.

[Eu-1748] Euler, L.: *Introductio in analysin infinitorum.* Opera omnia, series prima, vol. 8, Birkhäuser, 1922.

[Eu-1983] Euler, L.: *Einleitung in die Analysis des Unendlichen.* Ins Deutsche übertragen von H. Maser. Reprint der deutschen Erstauflage, Berlin 1885. Springer, 1983.

[Fr-1981] Frei, G.: *Die Briefe von Emil Artin an Helmut Hasse, 1923–1953.* Collection Mathématique, Université Laval, Januar 1981, 166 Seiten.

[Fr-2001] Frei, G.: *How Hasse was led to the Theory of Quadratic Forms, the Local-Global-Principle, the Theory of the Norm Residue Symbol, the Reciprocity Laws, and to Class Field Theory.* In: Class Field Theory – Its Centenary and Prospect (ed. K. Miyake). Advanced Studies in Pure Mathematics 30. Mathematical Society of Japan, Tokyo 2001, 31–62.

[Fr-2003] Frei, G.: *On the History of the Artin Reciprocity Law in Abelian Extensions of Algebraic Number Fields: How Artin was led to his Reciprocity Law.* Erscheint in: The Abel Legacy. The Abel Bicentennial, Oslo 2002 (ed. A. Laudal). Springer-Verlag, Heidelberg 2003.

[Fro-1878] Frobenius, F.G.: *Gesammelte Abhandlungen.* Bd. 1, 343–405.

[Gr-1844] Grassmann, H.G.: *Die lineale Ausdehnungslehre.* Verlag Wigand, Leipzig 1844.

[Gr-1862] Grassmann, H.G.: *Die Ausdehnungslehre.* Verlag Enslin, Berlin 1862.

[Ha-1853] Hamilton, W.R.: *Lectures on Quaternions*. June 1853.

[Hs-1931] Hasse, H.: Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme. *Math. Annalen* 104 (1931), 495–534.

[Hs-1932] Hasse, H.: Theory of Cyclic Algebras over an Algebraic Number Field. *Transactions of the AMS* 35 (1932), 171–214.

[HBN-1932] Hasse, H.; Brauer, R.; Noether, E.: Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. *J. reine angew. Math.* 167 (1932), 399–404.

[Hu-1896] Hurwitz, A.: *Über die Zahlentheorie der Quaternionen.* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1896, 313–340; Math. Werke, Bd. II, LXIV, 303–330.

[Hu-1919] Hurwitz, A.: *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen.* Springer, Berlin 1919.

[Mo-1893] Molien, Th.: Über Systeme höherer komplexer Zahlen. *Math. Annalen* 41 (1893), 83–156.

[Pe-1881] Peirce, B.: Linear Associative Algebras. *American Journal of Math.* 4 (1881), 97–215.

[Sf-1891] Scheffers, G.: Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen. *Math. Annalen* 39 (1891), 292–390.

[Sp-1926] Speiser, A.: *Allgemeine Zahlentheorie.* Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich 71 (1926), 8–48.

[Sp-1927] Speiser, A.: *Idealtheorie in rationalen Algebren.* Kapitel XIII in: Dickson, L.E.: Algebren und ihre Zahlentheorie. Orell Füssli Verlag, Zürich 1927. (s. [Di-1927].)

[Sp-1935] Speiser, A.: Zahlentheorie in rationalen Algebren. *Comment. Math. Helv.* 8 (1935/36), 391–406.

[St-1898] Study, E.: *Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen.* Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, A4, Leipzig 1898.

[vdW-1959] van der Waerden, B.L.: *Algebra. Zweiter Teil.* Vierte Auflage. Springer, Berlin, Heidelberg 1959.

[vdW-1985] van der Waerden, B.L.: *A History of Algebra.* Springer, Berlin, Heidelberg 1985.

[We-1907] Wedderburn, J.H. Maclagan: *On Hypercomplex Numbers.* Proc. London Math. Soc., ser. 2, vol. 6 (1907), 77–118.

[We-1914] Wedderburn, J.H. Maclagan: A Type of Primitive Algebra. *Transactions of the AMS* 15 (1914), 162–166.

[We-1921] Wedderburn, J.H. Maclagan: On Division Algebras. *Transactions of the AMS* 22 (1921), 129–135.

Günther Frei
Lützelstrasse 36
CH–8634 Hombrechtikon, Schweiz
e-mail: `g.frei@active.ch`

Elem. Math. 58 (2003) 169 – 176
0013-6018/03/040169-8
DOI 10.1007/s00017-004-0200-5

Elemente der Mathematik

Leonhard Eulers Einführung und Anwendung von Bezugssystemen in Mechanik und Astronomie

Andreas Verdun

Johann Jakob Burckhardt befasste sich als Mathematiker und leidenschaftlicher Bergsteiger mit der Gruppentheorie und der Kristallographie, insbesondere mit der mathematischen Darstellung und Klassifizierung der Kristalle. Als Wissenschaftshistoriker beschäftigte er sich mit der Geschichte der Mathematik und Astronomie, insbesondere mit den Werken von Leonhard Euler (1707–1783). Zu Burckhardts mathematisch-historischem Werk gehört die Herausgabe des Briefwechsels zwischen Fedorow und Schoenflies (1971) sowie zwischen Fedorow und Klein (1972), der Gesammelten Mathematischen Abhandlungen Ludwig Schläflis (1953–1956) sowie des Bamberger Rechenbuches von 1483 (1966). Über Ludwig Schläfli verfasste er zudem eine Biographie (1948). Burckhardt war bestrebt, die Mathematik im Unterricht aus der historischen Sicht zu vermitteln. Dies ist ihm in seinem *Lesebuch zur Mathematik* von 1968, in dem er Quellentexte von Euklid bis heute auswählte und kommentierte, auf didaktisch hervorragende Weise gelungen. Im Werk *Die Symmetrie der Kristalle* (1988) schilderte Burckhardt die Geschichte der geometrischen Kristall-Lehre von Haüy bis zu ihrer heutigen mathematischen Formulierung, die u.a. geprägt wurde durch die kristallographische Schule in Zürich, der Burckhardt angehörte. Erwähnenswert ist seine *Geschichte der Mathematik an der Universität Zürich* (1916–1950). Die Schwerpunkte seiner wissenschaftshistorischen Arbeiten lagen jedoch in der Bearbeitung und (Mit-)Herausgabe einiger physikalischer und philosophischer Abhandlungen Eulers (Band 2 der Series tertia von 1942) sowie des Euler-Briefwechsel-Verzeichnisses (Band 1 der Series quarta A von 1975) im Rahmen der Euler-Edition. Er war Mitherausgeber des Euler-Gedenkbandes des Kantons Basel-Stadt von 1983, in dem er zwei Kapitel (zur Geschichte der Euler-Edition sowie ein Verzeichnis des Schrifttums über Euler) verfasste und damit wesentlich zum Gelingen dieses prächtigen Bandes beitrug. Seine Auseinandersetzung mit den Eulerschen Werken und sein Wirken in der Euler-Edition sollen mit vorliegendem Beitrag verdankt werden.

Die *Kristallographie* und die *Werke von Euler* bildeten zwei Schwerpunkte in Burckhardts Arbeit, die durchaus ihre Berührungspunkte haben. Obwohl sich die gruppentheoretische Beschreibung und Klassifizierung der Kristalle erst lange Zeit nach Euler im Laufe des 19. Jahrhunderts entwickelte, gehen einige „elementare" Erkenntnisse bereits auf Euler zurück. So entdeckte Euler zum Beispiel den Polyeder-Satz und leistete damit einen ersten Beitrag zur Kristallographie. In seiner Abhandlung [E407] untersuchte Euler die Orthogonalitätsbedingungen für rechtwinklige Koordinaten im Raum und drückte die Koeffizienten der linearen homogenen Transformationen, die eine Summe von n Quadraten invariant lassen, für $n = 3, 4, 5$ durch trigonometrische Funktionen und für $n = 3, 4$ durch rationale Funktionen von Parametern aus. Die Formeln für $n = 3$ zur Transformation rechtwinkliger Raumkoordinaten verwendete Euler bereits in einer früheren Arbeit [E336] zur Darstellung der Starrkörper-Rotation (siehe unten). Er legte die Resultate am 5. März 1770 der Petersburger Akademie vor, welche die Abhandlung 1771 publizierte. Am 9. Oktober 1775 präsentierte Euler der Petersburger Akademie eine weitere Abhandlung [E478] zu diesem Thema, die 1776 veröffentlicht wurde. Darin beweist er den scheinbar trivialen Satz, dass es nach beliebigen Drehungen einer Kugel um ihr Zentrum stets eine transformationsinvariante (feste) Achse gibt. Er zeigte, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die „Transformationsmatrix" die „Determinante" $+1$ besitzt. Damit bewies er einen Hilfssatz, den man zur Klassifizierung der Kristalle benötigt und der etwas allgemeiner formuliert lautet: Jede orthogonale Transformation der Determinante $+1$ besitzt in einem Raum ungerader Dimensionszahl ausser dem Ursprung einen weiteren Fixpunkt.

Von grosser Bedeutung weit über die Kristallographie hinaus waren nicht nur Eulers Studien zu den Koordinatentransformationen, sondern vor allem seine Einführung spezieller Bezugssysteme und ihre Anwendung auf Probleme der Mechanik und Astronomie. Der Gebrauch raumfester (inertialer) und bewegter (rotierender) Koordinatensysteme durch Euler spielte für die Entwicklung der exakten Wissenschaften im allgemeinen und für die Entdeckung der Eulerschen Kreisel-Gleichungen im speziellen eine enorm wichtige Rolle. Wir skizzieren im folgenden den Weg, der zur Entdeckung der Bewegungsgleichungen der Rotation starrer Körper führte.

1 Eulers „Cartesische" Koordinatensysteme

Noch in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts wurden mechanische und astronomische Probleme in der Sprache der Geometrie formuliert und gelöst. Die eingeführten Grössen („Variablen") bezogen sich meist auf ein Koordinatensystem, das implizit durch die geometrische Form des betrachteten Körpers oder durch das gegebene Problem definiert war. Mechanische und himmelsmechanische Probleme wurden üblicherweise nur in zwei Dimensionen studiert. Heute ist es bei der mathematischen Beschreibung physikalischer Phänomene selbstverständlich, dass Koordinatensysteme und Parameter oder Variable derart gewählt werden, dass das betrachtete Problem möglichst einfach formuliert und gelöst werden kann (sog. Parametrisierung). Mit der Wahl eines geeigneten Koordinatensystems werden die Parameter festgelegt. Um Bewegungsgleichungen unabhängig vom jeweils gewählten Koordinatensystem formulieren zu können, werden sie gewöhnlich in vektorieller Form geschrieben. Bei der Komponenten- oder Matrixdarstellung eines Vektors wird implizit angenommen, dass sich seine Komponenten auf orthogonale Basisvektoren bzw. auf ein drei-dimensionales, rechtwinkliges Rechtssystem beziehen. Ein solches sog. „Cartesisches" Koordinatensystem, explizit definiert als Bezugssystem für die analytische Behandlung mechanischer und astronomischer Probleme, wurde zum ersten Mal von Euler in seiner 1728/29 verfassten und 1732 publizierten Arbeit [E9] über geodätische Linien eingeführt. Die drei Achsen des Koordinatensystems zeichnete Euler – für uns etwas ungewohnt – aneinander anschliessend, also ohne gemeinsamen

Koordinatenursprung. Ein Cartesisches System, dessen Koordinatenachsen nun von einem gemeinsamen Ursprung ausgehen, findet sich erstmals in Eulers erster Schiffstheorie [E110], die er bereits 1738 fertigstellte, aber erst 1749 publizieren konnte. In seiner allgemeinen Behandlung der Bewegung der Himmelskörper [E112], die Euler am 8. Juni 1747 der Berliner Akademie präsentierte und 1749 publizierte, bezog er die Variablen, welche die Bewegungen der Himmelskörper definieren, auf ein drei-dimensionales, orthogonales Koordinatensystem mit der Sonne als Zentrum (Ursprung). Für jede Koordinate resultiert eine Bewegungsgleichung. Mit dieser Arbeit hatte sich, zumindest bei Euler, der Gebrauch von drei-dimensionalen, „quasi-inertialen", Cartesischen Koordinatensystemen, die von den jeweils betrachteten Körpern und/oder Problemen unabhängig sind, definitiv etabliert.

2 Rotierende körperfeste Bezugssysteme und Eulers Gleichungen der Rotationsbewegung starrer Körper

Alexis Claude Clairaut (1713–1765) veröffentlichte 1745 in den Memoiren der Pariser Akademie für das Jahr 1742 eine Abhandlung, in der er ein rotierendes Koordinatensystem einführte, das fest mit einem sich drehenden, starren Körper verbunden ist. Ein derartiges, sog. körperfestes, System brauchte Euler erstmals in einer 1746 erschienenen Abhandlung [E86] über die erzwungene Bewegung eines Körpers in einem Tubus, der sich um eine feste Achse senkrecht zum Tubus dreht. Das rotierende Koordinatensystem war bei Clairaut und Euler durch die Parametrisierung des Problems in Polarkoordinaten „automatisch" gegeben und wurde daher „nur" implizit eingeführt. Die Formulierung der Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten etablierte sich schnell zu einer Standardmethode. Euler verwendete sie, in Kombination mit den Bahnelementen, zur Beschreibung der Bewegung der Himmelskörper in seinen „Recherches" [E112] von 1747 sowie in seiner ersten Mondtheorie [E187] von 1753. Bis zur ersten expliziten Definition und zum ersten gezielten Gebrauch eines rotierenden, Cartesischen Bezugssystems sollten aber noch einige Jahre vergehen. Dies geschah in Zusammenhang mit Eulers Herleitung seiner berühmten Gleichungen der Rotationsbewegung starrer Körper. Am 3. September 1750 las Euler vor der Berliner Akademie ein Memoire [E177], in dem er nichts Geringeres als die Entdeckung eines neuen Prinzips der Mechanik ankündigte. Euler erkannte, dass Newtons zweites Gesetz, das bereits in seinen „Recherches" [E112] von 1747 zum ersten Mal in der Geschichte der exakten Wissenschaften in der noch heute gebräuchlichen Form erschien, nicht nur auf Punktmassen, sondern auf jedes beliebige Massenelement anwendbar und somit universell gültig ist. Ausgehend von diesem „ersten Prinzip der Mechanik" (wie Euler es benannte und als solches deklarierte) bzw. dem Impulssatz (wie wir heute sagen würden) leitete er (unter impliziter Verwendung des sog. d'Alembertschen Prinzips) die Bewegungsgleichungen der Rotation starrer Körper bezüglich eines Inertialsystems her. Er bemerkte zu den drei Komponentengleichungen: „Ce seront donc ces trois formules, qui contiennent les nouveaux principes de Mécanique, dont on a besoin pour déterminer le mouvement des corps solides... Et il est évident que ces nouveaux principes sont suffisans pour tous les cas imaginables des mouvemens, dont les corps solides sont susceptibles." Aus dieser Aussage folgt, dass Euler diese Gleichungen (die nichts anderes als den Drehimpulssatz darstellen) als neues

Prinzip der Mechanik betrachtete, weil nur diese (und nicht der Impulssatz) die Rotationsbewegungen starrer Körper zu beschreiben vermögen. Euler war überzeugt, damit ein neues, zusätzliches Prinzip gefunden zu haben, welches das bereits allgemein bekannte „erste Prinzip" *enthielt*. (Diese Interpretation weicht von der etablierten Ansicht der Wissenschaftshistoriker ab, die Eulers neu entdecktes Prinzip mit dem von ihm zu Beginn seiner Abhandlung statuierten Impulssatz identifizieren.)

Euler erkannte die Bedeutung und Tragweite seiner Entdeckung noch nicht, vermutlich, weil er die Gleichungen nicht lösen konnte, da sie durch die Rotation des Körpers im inertialen Raum für jeden Zeitpunkt hätten „ausgewertet" werden müssen. Ein erster Versuch, die Gleichungen zu integrieren, schlug fehl. In einer Abhandlung [E336], die Euler am 7. Oktober 1751 der Berliner Akademie präsentierte, versuchte er es mit einem körperfesten Bezugssystem, das er mit Hilfe der *Eulerschen Winkel* auf das inertiale System bezog. Die Gleichungen blieben aber unlösbar. Immerhin bewies er einen wichtigen Satz, der ihn später auf die Lösung führen sollte, nämlich: In jedem Körper von beliebiger Form existiert eine Achse, die durch seinen Schwerpunkt geht und um die der Körper frei, mit gleichförmiger Geschwindigkeit, rotieren kann. Die Eulerschen Winkel führte Euler übrigens zum ersten Mal im vierten Kapitel des Anhanges seiner Einführung in die Analysis des Unendlichen [E102] ein, die er 1748 publizierte. Heute werden die Eulerschen Winkel meist in Rotationsmatrizen resp. in Verknüpfungen von Drehmatrizen verwendet. Produkte von Rotationsmatrizen sind nichts anderes als eine Kurzschreibweise des Formelsystems der sphärischen Trigonometrie, das von Euler in der heute noch gebräuchlichen Form und Notation, vermutlich in Zusammenhang mit seinen Studien zur Rotation von starren Körpern, 1753 in seinen Abhandlungen [E214] und [E215] eingeführt wurde. Es existiert übrigens noch eine weitere, postum erschienene und undatierte Abhandlung [E825] von Euler zur Bewegung starrer Körper. Sie ist vermutlich in den frühen 1750er Jahren entstanden. Darin versuchte Euler, die Bewegung eines starren Körpers um einen Fixpunkt mittels der Eulerschen Winkel zwischen inertialem und körperfestem (mitrotierendem) Koordinatensystem zu bestimmen. Es könnte sich dabei sogar um eine „Vorarbeit" zur Abhandlung [E336] handeln.

Ende der 1750er Jahre nahm Euler einen neuen Anlauf zur Lösung der Bewegungsgleichungen des Starrkörpers. In einem Memoire [E293], das er der Berliner Akademie am 12. Januar 1758 vorlegte und das 1765 publiziert wurde, bestimmte er zunächst die momentane Rotationsachse bei der „täglichen" Bewegung eines Planeten. Der entscheidende Durchbruch gelang Euler aber erst mit seiner Abhandlung [E291], die er der Berliner Akademie am 6. Juli 1758 vorlegte und in der er – anknüpfend an die wichtige Feststellung in [E336] – die mechanischen Eigenschaften starrer Körper mittels der Begriffe „Trägheitsachsen" und „Trägheitsmomente", „Hauptträgheitsachsen" und „Hauptträgheitsmomente" mathematisch charakterisieren konnte. Euler vermutete bereits in seiner „Scientia navalis" [E110], dass es in jedem festen Körper drei ausgezeichnete Achsen gibt, um die der Körper frei, d.h. ungestört, rotieren kann. Er nahm damit das System der Hauptträgheitsachsen hypothetisch vorweg. In der [E291] folgenden Arbeit [E292], die Euler der Berliner Akademie am 9. November 1758 vorlegte, die jedoch erst 1765 publiziert wurde, formulierte er die Gleichungen bezüglich des Hauptträgheitsachsensystems, wodurch sich diese sehr vereinfachen liessen. Das Resultat wird noch heute als die *Eulerschen Gleichungen der Rotationsbewegung starrer Körper* bezeichnet. Der entscheidende Schritt zu diesem Erfolg war die Einführung eines Bezugssystems, das zwar fest mit dem Körper verbunden ist und mit diesem rotiert, das aber nichts mit der geometrischen Form des Körpers zu tun hat, sondern durch die Massenverteilung innerhalb des Körpers bzw. durch dessen Trägheitsmomente definiert ist. Es ist dies ein Meilenstein in der Definition und im Gebrauch von Bezugssystemen.

Euler bestimmte mit seinen Gleichungen die Bewegung der Rotationsachse bezüglich der Achse des maximalen Trägheitsmomentes (der Figurenachse) der Erde unter der Annahme, dass diese Achsen nicht kollinear sind, sondern sich um einen kleinen Winkel (de facto variiert dieser zwischen 0 und 0.3 Bogensekunden) unterscheiden, und dass keine äusseren Kräfte bzw. Drehmomente (ausgeübt durch Mond und Sonne) wirken. In seinem ersten Versuch [E308], den er am 18. Januar 1759 vorstellte, ist die Formel für die Periode der sog. *Eulerschen freien Nutation*, die einzig von der dynamischen Abplattung der Erde abhängt, noch falsch. Erst im zweiten Anlauf, in seiner berühmten, 1760 fertiggestellten, zweiten Mechanik [E289] von 1765, fand Euler die richtige Formel. Mit dem Euler zur Verfügung stehenden Wert für die Abplattung der Erde ergibt sich eine Periode von 234 Tagen (mit heutigem Wert für die Abplattung sind es 304 Tage). Im Laufe des 19. Jahrhunderts wurden in der Positionsastronomie (Astrometrie) grosse Anstrengungen unternommen, die Eulersche freie Nutation, welche sich als Breitenvariation oder „Polschwankung“ bemerkbar macht, empirisch nachzuweisen. Die Beobachtungsgenauigkeiten wurden immer besser, die eigens zu diesem Zweck durchgeführten Messreihen immer länger. Seit den 1840er Jahren fand man signifikante Änderungen der Polhöhen, die *Eulersche Periode* liess sich aber nicht nachweisen. Der Grund bestand darin, dass bei der Auswertung der Beobachtungen die Periode der Polschwankung nicht *auch* als Parameter (neben zahlreichen anderen) geschätzt wurde. Erst Seth Carlo Chandler (1846–1913) vermochte sich vom „Paradigma“ der Eulerschen Periode zu lösen und konnte 1891 die tatsächliche Periode von 430 Tagen bestimmen.

3 Eulers „Entdeckung“ des Drehimpulssatzes

Selbst nach diesem Triumph vermochte Euler seine Gleichungen noch nicht im heutigen physikalischen Sinn, nämlich als eine Form des Drehimpulssatzes, zu interpretieren. Dies ist umso erstaunlicher, als der Drehimpulssatz implizit mindestens dreimal und in drei verschiedenen Formen in früheren Arbeiten Eulers erschien. Im ersten Band seiner „Scientia navalis“ [E110] definierte Euler den Begriff „vis gyratoria“, worunter die Winkelbeschleunigung zu verstehen ist, sowie den Begriff „Trägheitsmoment“ für ein System von Punktmassen. Im Korollarium 1, §165, setzt er dann die vis gyratoria gleich der Summe der Drehmomente dividiert durch das Gesamtträgheitsmoment des Systems. Der Drehimpulssatz erschien ein zweites Mal in Eulers Memoire über die Bewegung der Mondknoten [E138], das er der Berliner Akademie am 5. Oktober 1744 vorlegte. Von dieser Abhandlung erschien 1746 in den Memoiren der Berliner Akademie lediglich eine Zusammenfassung in französischer Sprache, vermutlich weil Euler seine Arbeit in Latein verfasste, in den Berliner Memoiren aber nur in französischer Sprache publiziert werden durfte. Euler legte daher seine lateinische Abhandlung am 2. September 1748 der Petersburger Akademie vor, die sie in den Kommentaren der Akademie 1750 veröffentlichte. Das „Sensationelle“ dieser Arbeit besteht in der expliziten Herleitung des

Drehimpulssatzes für diskrete Systeme von Massenpunkten (konkret für Erde, Mond und Sonne), ausgehend vom Impulssatz, in drei Dimensionen. Genau einen Monat nach seiner Präsentation von [E138] las Euler am 5. November 1744 eine weitere Abhandlung [E174] vor der Berliner Akademie über die Bewegung flexibler Körper. Darin leitete er die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Drehimpulssatzes in Form der Drehmomente und Trägheitsmomente der betrachteten Körper her. Damit erschien der Drehimpulssatz ein drittes Mal. Die Abhandlung wurde erst 1751 in den Memoiren der Berliner Akademie gedruckt. Es dauerte aber noch ein Vierteljahrhundert, bis Euler erkannte, dass der Drehimpulssatz ein neues, vom Impulssatz unabhängiges und universell gültiges Prinzip der Mechanik darstellt. Er präsentierte diese „Entdeckung" am 16. Oktober 1775 der Petersburger Akademie, die als „neue Methode zur Bestimmung der Bewegung starrer Körper" [E479] im Jahre 1776 in den Neuen Kommentaren der Petersburger Akademie publiziert wurde.

4 Eulers Einführung eines mitrotierenden, nicht körperfesten Bezugssystems

Die bisher betrachteten und von Euler eingeführten rotierenden Bezugssysteme waren stets fest mit dem betrachteten Körper verbunden. In seiner zweiten Mondtheorie [E418] von 1772, die Euler am 20. Oktober 1768 der Petersburger Akademie vorlegte, führte er erstmals ein mitrotierendes Bezugssystem ein, das nicht fest mit einem Körper verbunden ist. Solche Bezugssysteme verwendete er zur Bestimmung der Bewegung der Erde auf Grund der Störungen der Venus [E425], deren Resultate er ebenfalls 1772 veröffentlichte, sowie zur Berechnung genauer Planetentafeln [E458], die 1774 erschienen sind. Die in diesen fundamentalen Arbeiten verwendeten Bezugssysteme drehen sich mit der mittleren Bewegung der gestörten Himmelskörper. Die Bewegungsgleichungen wurden dadurch erheblich einfacher, und die Störungen konnten in schnell konvergierende Reihen entwickelt werden. Dieses Vorgehen entwickelte sich zu einer Standardmethode in den Mondtheorien und in den allgemeinen Störungstheorien des 19. Jahrhunderts. George William Hill (1838–1914) griff die Ideen Eulers wieder auf und entwickelte seine Mondtheorie auf der Grundlage eines mitrotierenden Bezugssystems.

Referenzen

Abkürzungen:

CASP	Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae
HARSB	Histoire de l'Académie Royale des sciences et belles lettres (de Berlin)
NCASP	Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae
O. I	Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series prima (Opera mathematica)
O. II	Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series secunda (Opera mechanica et astronomica)
E#	Eneström-Nummer

Zitierte Werke von Leonhard Euler:

[E9] De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente. CASP, 3 (1728), 1732, 110–124; O. I, 25, 1–12.

[E86] De motu corporum in superficiebus mobilibus. Opuscula varii argumenti, 1, 1746, 1–136; O. II, 6, 75–174.

[E102] Introductio in analysin infinitorum. Tomus secundus. Lausannae, Bousquet 1748, 366–373; O. I, 9, 371–378.

[E110] Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus. Pars prior. Petropoli typis academiae scientiarum 1749.

[E112] Recherches sur le mouvement des corps célestes en général. HARSB, 3 (1747), 1749, 93–143; O. II, 25, 1–44.

[E138] De motu nodorum lunae eiusque inclinationis ad eclipticam variatione. NCASP, 1 (1747/48), 1750, 387–427; O. II, 23, 11–48.

[E174] De motu corporum flexibilium. Opuscula varii argumenti, 3, 1751, 88–165; O. II, 10, 177–232.

[E177] Découverte d'un nouveau principe de mécanique. HARSB, 6 (1750), 1752, 185–217; O. II, 5, 81–108.

[E187] Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitates. Impensis acad. imp. sc. Petropolitanae 1753. O. II, 22.

[E214] Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et plus petits. HARSB, 9 (1753), 1755, 223–257; O. I, 27, 277–308.

[E215] Élémens de la trigonométrie sphéroïdique tirés de la méthode des plus grands et plus petits. HARSB, 9 (1753), 1755, 258–293; O. I, 27, 309–339.

[E289] Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in hujusmodi corpora cadere possunt, accommodata. Rostochii et Gryphiswaldiae, Röse 1765. O. II, 3.

[E291] Recherches sur la connoissance mécanique des corps. HARSB, 14 (1758), 1765, 131–153; O. II, 8, 178–199.

[E292] Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. HARSB, 14 (1758), 1765, 154–193; O. II, 8, 200–235.

[E293] Remarques générales sur le mouvement diurne des planètes. HARSB, 14 (1758), 1765, 194–218; O. II, 829, 199–219.

[E308] Recherches sur le mouvement de rotation des corps célestes. HARSB, 15 (1759), 1766, 265–309; O. II, 29, 220–256.

[E336] Du mouvement d'un corps solide quelconque lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile. HARSB, 16 (1760), 1767, 176–227; O. II, 8, 313–356.

[E407] Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile. NCASP, 15 (1770), 1771, 75–106; O. I, 6, 287–315.

[E418] Theoria motuum lunae, nova methodo pertractata una cum tabulis astronomicis, unde ad quodvis tempus loca lunae expedite computari possunt incredibili studio atque indefesso labore trium academicorum: Johannis Alberti Euler, Wolffgangi Ludovici Krafft, Johannis Andreae Lexell. Petropoli, typis academiae imperialis scientiarum 1772. O. II, 22.

[E425] De perturbatione motus terrae ab actione Veneris oriunda. NCASP, 16 (1771), 1772, 426–467; O. II, 26 (in preparation).

[E458] Nova methodus motus planetarum principalium ad tabulas astronomicas reducendi. NCASP, 18 (1773), 1774, 354–376; O. II, 28, 273–292.

[E478] Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. NCASP, 20 (1775), 1776, 189–207, O. II, 9, 84–98.

[E479] Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi. NCASP, 20 (1775), 1776, 208–238; O. II, 9, 99–125.

[E825] De motu corporum circa punctum fixum mobilium. Opera postuma, 2, 1862, 43–62; O. II, 9, 413–441.

Zitierte Werke von Johann Jakob Burckhardt:

[1942] Leonhardi Euleri: Rechenkunst. Accesserunt commentationes ad physicam generalem pertinentes et miscellanea. Ediderunt Edmund Hoppe†, Karl Matter, Johann Jakob Burckhardt. (*Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Series tertia, Volumen secundum). Venditioni exponunt B.G. Teubner Lipsiae et Berolini, Orell Füssli Turici et Lipsiae.

[1948] Ludwig Schläfli, 1814–1895. (*Beihefte zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik"*, Beiheft Nr. 4, Juli 1948). Birkhäuser, Basel.

[1950] Ludwig Schläfli, 1814–1895. Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Herausgegeben vom Steiner-Schläfli-Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. 3 Bände. Birkhäuser, Basel 1950/1953/1956.

[1966] Bamberger Rechenbuch 1483 – Das erste deutsche gedruckte Rechenbuch, Ulrich Wagner zugeschrieben. Nachwort von J.J. Burckhardt. Faksimiledruck der Schweizerischen Bibliophilen-Gesellschaft. Mikrokopie GmbH, München.

[1968] Lesebuch zur Mathematik – Quellen von Euklid bis heute. (*Einzelschriften zur Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichtes*, Heft 5). Räber Verlag, Luzern/Stuttgart.

[1971] Der Briefwechsel von E.S. von Fedorow und A. Schoenflies, 1889–1908. (*Archive for History of Exact Sciences*, Bd. 7 (1971), Nr. 2, 91–141). Springer Verlag, Berlin.

[1972] Der Briefwechsel von E.S. von Fedorow und F. Klein, 1893. (*Archive for History of Exact Sciences*, Bd. 9 (1972), Nr. 2, 85–93). Springer Verlag, Berlin.

[1975] Leonhardi Euleri: Commercium epistolicum. Descriptio commercii epistolici. Ediderunt Adolf P. Juškevič, Vladimir I. Smirnov et Walter Habicht; auxilio Johann Jakob Burckhardt, Joachim Otto Fleckenstein et Ašot T. Grigorijan. (*Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Series Quarta A, Volumen primum). Venditioni exponunt Birkhäuser Basileae.

[1980] Die Mathematik an der Universität Zürich 1916–1950 – Unter den Professoren R. Fueter, A. Speiser, P. Finsler. (*Beihefte zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik“*, Beiheft Nr. 16). Birkhäuser, Basel.

[1983a] Leonhard Euler, 1707–1783. Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel-Stadt. Hrsg. v. J.J. Burckhardt, E.A. Fellmann u. W. Habicht. Birkhäuser, Basel.

[1983b] Die Euler-Kommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft – ein Beitrag zur Editionsgeschichte. In [1983a], 501–510.

[1983c] Euleriana – Verzeichnis des Schrifttums über Leonhard Euler. In [1983a], 511–552.

[1988] Die Symmetrie der Kristalle – Von René-Just Haüy zur kristallographischen Schule in Zürich. Mit einem Beitrag v. Erhard Scholz. Birkhäuser, Basel.

Andreas Verdun
Astronomisches Institut
Universität Bern
Sidlerstrasse 5
CH–3012 Bern, Schweiz
e-mail: andreas.verdun@aiub.unibe.ch

Elem. Math. 58 (2003) 177 – 180
0013-6018/03/040177-4
DOI 10.1007/s00017-004-1200-1

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen erbeten bis zum 10. Mai 2004 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1200: Eine „Ulam-Folge“ ist wie folgt rekursiv definiert: Die natürlichen Zahlen u_1, u_2 mit $u_1 < u_2$ sind gegeben. Für $n \geq 3$ ist u_n die kleinste natürliche Zahl, die grösser als u_{n-1} ist und die genau eine Darstellung $u_n = u_k + u_\ell$ mit $0 < k < \ell < n$ besitzt. Es bezeichne nun x_N die Anzahl Glieder der Ulam-Folge, die $\leq N$ sind.

Beweise: $\limsup_{N\to\infty} \dfrac{x_N}{N} \leq \dfrac{1}{2}$.

Matthias Müller, Bad Saulgau, D

Aufgabe 1201: Es sei $1 \leq a < b$. Beweise die folgenden Ungleichungen:

$$\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right)^a < \left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right)\right)^b \quad \text{für} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)\right)^a > \left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt[3]{b}}\right)\right)^b \quad \text{für genügend kleine positive } x\,.$$

Mihály Bencze, Sacele, RO

Aufgabe 1202 (Die einfache dritte Aufgabe): Man faltet ein rechteckiges Blatt Papier mit den Seitenlängen a, b $(a < b)$ entlang einer Diagonalen. In welchem Verhältnis teilt die (gedrehte) Seite b ihre (ursprüngliche) Gegenseite?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2002

Aufgabe 1187. Es sei n die grösste Zahl der Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid m < 2002 \ \wedge\ 5 \nmid \binom{2m}{m}\}$. Welchen Rest lässt $\binom{2n}{n}$ bei der Division durch 5?

Ernst Specker, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Zuschriften eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Aldo Dalla Piazza (Courtelary, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Harald Merk (Biberach, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die folgende Lösung ist zusammengesetzt aus Überlegungen von *Peter Bundschuh, Albert Stadler* und *Jany C. Binz*:

Die Anzahl der Faktoren 5 in der Primfaktorzerlegung von $\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}$ beträgt

$$s = \underbrace{\sum_{i\geq 1}\left[\frac{2m}{5^i}\right]}_{s_1} - 2\cdot\underbrace{\sum_{i\geq 1}\left[\frac{m}{5^i}\right]}_{s_2}.$$

$\binom{2m}{m}$ ist also genau dann nicht durch 5 teilbar, wenn $s = 0$ gilt.

Stellt man die Zahl m im Fünfersystem dar – wegen $m < 2002$ kommen höchstens fünfstellige Zahlen in Frage – so darf beim Übergang von m zu $2m$ kein Stellenübertrag vorkommen, weil sich dadurch die Summe s_1 ändert, s_2 aber gleich bleibt. Das ist gleichbedeutend damit, dass in der Darstellung der Zahl $2m$ nur die Ziffern 0, 2 und 4 auftreten. Die grösstmögliche Zahl für $2m$ ist $(44444)_5$, also $2m = 3124$ und $m = 1562$.

Um den Fünferrest von $\binom{3124}{1562}$ zu bestimmen, benützen wir die Identitäten

$$\begin{aligned}(5\ell+1)\cdot(5\ell+2)\cdot(5\ell+3)\cdot(5\ell+4) \equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \equiv -1 \quad &(\text{mod } 5)\,,\\ ((5\ell+1)\cdot(5\ell+2))^2 \equiv -1 \quad &(\text{mod } 5)\,.\end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe lässt sich die Reduktionsformel

$$\binom{10\ell+4}{5\ell+2} \equiv \binom{10\ell}{5\ell} \equiv \binom{2\ell}{\ell} \quad (\text{mod } 5)$$

beweisen, welche mehrfach angewendet

$$\binom{3124}{1562} \equiv \binom{624}{312} \equiv \binom{124}{62} \equiv \binom{24}{12} \equiv \binom{4}{2} \equiv 1 \quad (\text{mod } 5)$$

den gesuchten Fünferrest 1 liefert.

Aufgabe 1188. Wir betrachten jene Vierflache (mit nicht verschwindendem Volumen), bei welchen die Summe der Abstände zu den vier Seitenflächen für alle inneren Punkte gleich gross ist. Beweise, dass genau die Tetraeder mit lauter zueinander kongruenten Seitenflächen mit spitzen Winkeln diese Eigenschaft haben und dass gegenüberliegende Kanten gleich lang sind.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 4 Zuschriften eingegangen, nämlich von Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A) und Harald Merk (Biberach, D).

Wir folgen den Überlegungen von *Harald Merk*: Es sei P ein Punkt im Innern des Tetraeders $ABCD$. Weil die Funktion, welche die Abstandssumme beschreibt, einerseits stetig in den Koordinaten von P, anderseits aber konstant ist, erhält man den Wert h der Konstanten als Abstand einer Ecke zur gegenüberliegenden Fläche. Man schliesst, dass alle vier Körperhöhen gleich sind, und mit der Volumenformel $V = Gh/3$ folgt, dass die vier Seitenflächen denselben Inhalt haben. Nehmen wir o.B.d.A. an, dass im Dreieck ABC die Winkel bei A und B spitz sind, so können wir dem Tetraeder ein rechtwinkliges Koordinatensystem wie folgt anpassen:

$$A(-a,0,0), \quad B(b,0,0), \quad C(0,c,0), \quad D(x,y,z),$$

wobei $a, b, c, z > 0$ sein sollen. Berechnet man die Flächeninhalte der vier Seitenflächen und verlangt, dass alle gleich gross sind, wird man auf ein Gleichungssystem mit sechs Gleichungen geführt. Das System besitzt für (x, y, z) nur eine Lösung, bei welcher z positiv sein kann, nämlich

$$D(x,y,z) = \left(b-a,\ \frac{c^2-2ab}{c},\ \frac{2\sqrt{ab}\cdot\sqrt{c^2-ab}}{c} \right).$$

Damit $z > 0$ ist, muss $c^2 > ab$ gelten; das bedeutet aber gerade, dass auch der dritte Winkel im Dreieck ABC spitz ist. Berechnet man nun mit diesen Eckpunktkoordinaten die sechs Kantenlängen, so ergibt sich

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a+b, \quad \overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{b^2+c^2},$$

und in der einen Richtung ist somit der Beweis geführt.

Es sei nun P ein innerer Punkt eines Vierflachs, dessen Seitenflächen alle den Inhalt G haben, und h_1, h_2, h_3 und h_4 seien die Abstände von P zu den Seitenflächen. Für das Volumen V des Vierflachs ergibt sich $V = Gh_1/3 + Gh_2/3 + Gh_3/3 + Gh_4/3$, woraus

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3\cdot V}{G} = \text{const}$$

folgt.

Johannes Ebersold weist darauf hin, dass eine Lösung des Problems sich in „Altshiller-Court, Modern Pure Solid Geometry, Chelsea Publishing Company, New York“ findet, und *Walther Janous* hat einen Beitrag in „Honsberger, Mathematische Juwelen, Vieweg & Sohn, Braunschweig“ gefunden.

Aufgabe 1189 (Die einfache dritte Aufgabe). Bestimme x aus der Gleichung

$$19[x] + 99\{x\} = 1999.$$

Dabei bezeichnet $[x]$ die Gaußklammer, und $\{x\}$ ist der Nachkommaanteil von x.

Oleg Faynshteyn, Borsdorf, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 19 Zuschriften eingegangen: Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Aldo Dalla Piazza (Courtelary, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Ovidiu Furdui (Kalamazoo, USA), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Hansjürg Lädrach (Aarwangen, CH), Harald Merk (Biberach, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Jürgen Spilker setzt $n := 105 - [x]$ und überführt damit die gegebene Gleichung in $99\{x\} - 4 = 19n$. Wegen $0 \leq 99\{x\} < 99$ muss $0 \leq n \leq 4$ gelten. Zu einem ganzen n gehört $x_n := (105-n) + \frac{19n+4}{99}$. Also sind höchstens die Zahlen $x_0 = 105\frac{4}{99}$, $x_1 = 104\frac{23}{99}$, $x_2 = 103\frac{42}{99}$, $x_3 = 102\frac{61}{99}$ und $x_4 = 101\frac{80}{99}$ Lösungen, und dass sie es wirklich sind, bestätigt man durch Einsetzen.

Typesetting & Layout: *mathScreen online, CH-4123 Allschwil*

Zum 100. Geburtstag von J.J. Burckhardt

Abbildung U1