Warum wird man Mathematiker?

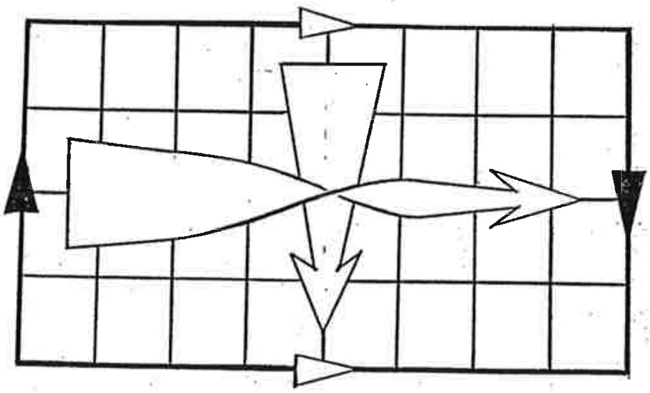
Antrittsvorlesung, gehalten am 14. Juni 1993
an der Universität Zürich (Ungekürzte Fassung)

M. Brodmann

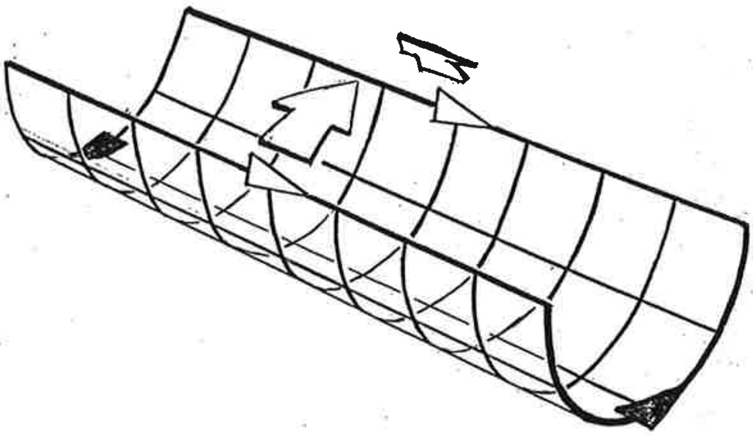
Frau Prorektorin!
Herr Dekan!
Meine Damen und Herren!

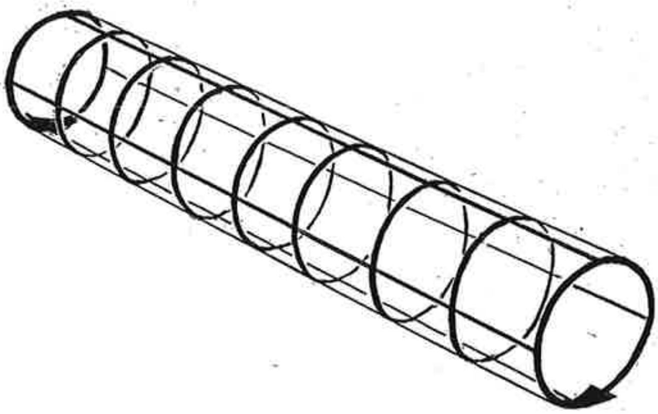
Heute möchte ich Ihnen aus persönlicher Sicht über Beweggründe sprechen, die zur Beschäftigung mit der Mathematik führen und - am Rande auch - über Erfahrungen, welche die Tätigkeit als Mathematiker mit sich bringt. Nebst dem, was ich als Schüler, Student, Lehrer und Forscher selbst erlebt habe, möchte ich auch die Erfahrungen einbeziehen, die ich in meiner zehnjährigen Tätigkeit als Studienberater an unserm Institut machen durfte.

Beginnen möchte ich mit einem geometrischen Gedankenexperiment, das uns die Denkweise der Mathematik nahebringen soll. Wir gehen dazu aus von einem Rechteck, aus dem wir durch Verformen und durch Verkleben der Seiten eine neue Fläche herstellen wollen. Dabei sollen die Längsseiten des Rechtecks gleichsinnig verklebt werden, währenddem wir eine der Schmalseiten vor dem Verkleben umdrehen.

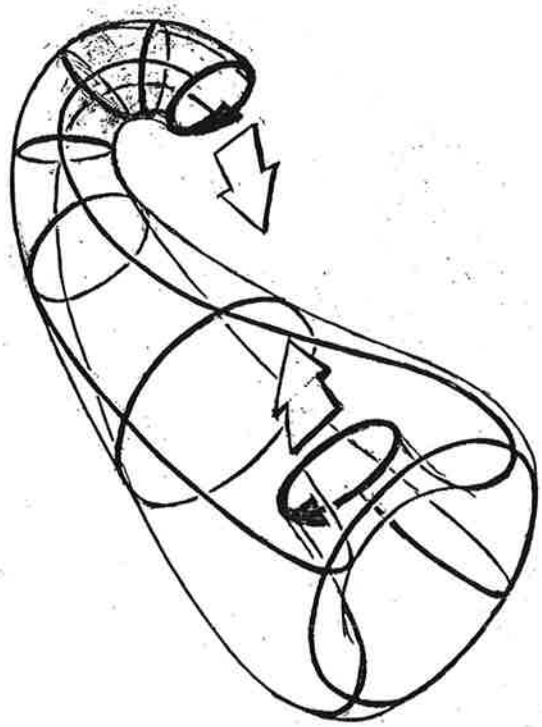


Die beiden gleichartigen Pfeilsymbole auf den Seiten des Rechtecks gelangen dabei jeweils zur Deckung. Beim Verkleben der Längsseiten entsteht so eine Röhre.

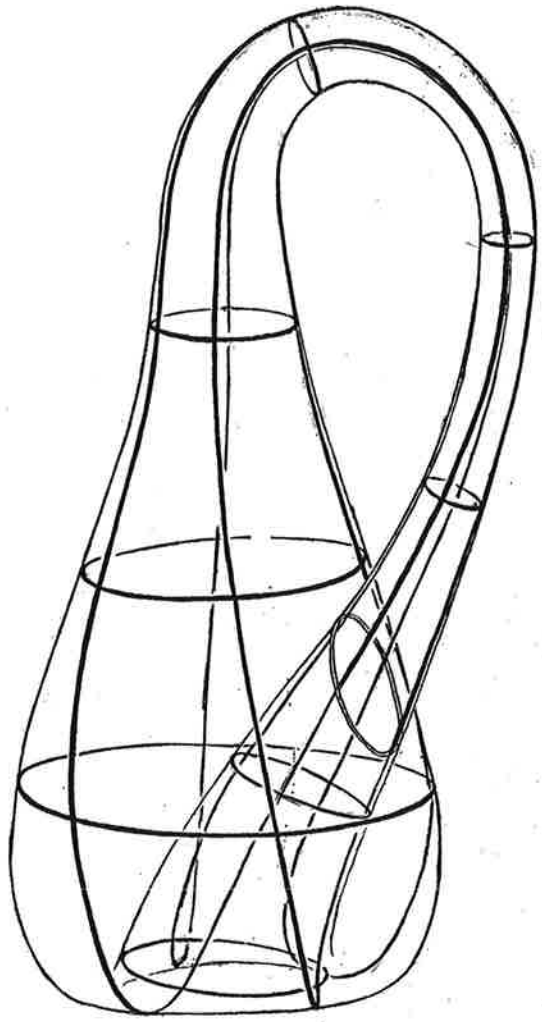




Diese Röhre müssen wir jetzt verformen und ihre Enden so verkleben, dass die beiden schwarzen Pfeilsymbole zur Deckung kommen. Wir können dies etwa auf die folgende Weise versuchen: Wir stülpen ein Ende der Röhre nach innen und biegen die Röhre am andern Ende um. Dabei entsteht die folgende Situation:



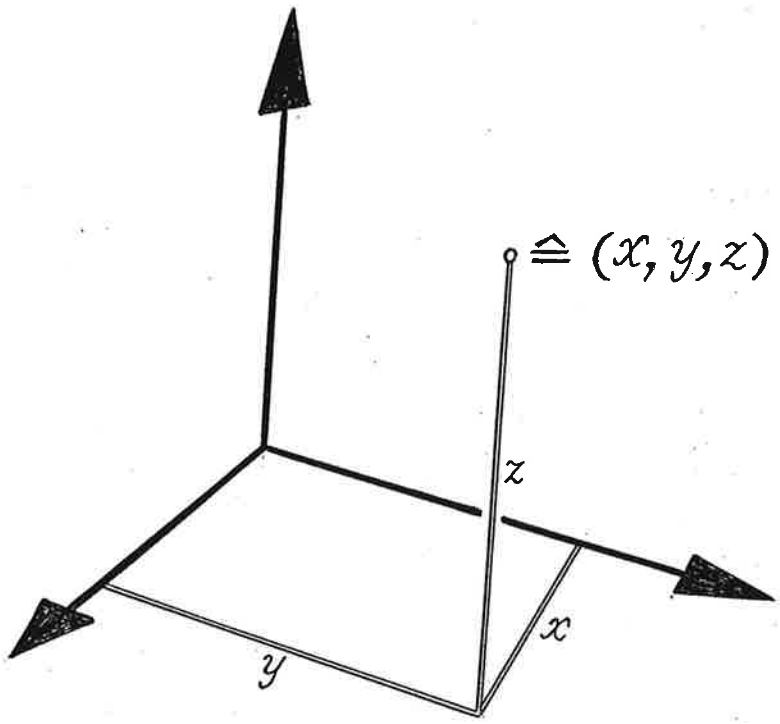
Wenn wir aber jetzt die Röhrenenden verkleben wollen, geraten wir in Schwierigkeiten, da die Fläche selbst es verhindert, dass man die Enden in der angefangenen Weise zusammenführen kann. Um die Enden der Röhre in der gewünschten Art zu verkleben, müssten wir die Fläche etwa mit dem umgebogenen Ende durchstossen und dieses danach an das umgestülpte Ende führen. Es entstünde dann eine Fläche der folgenden Gestalt:



Augenfällig ist, dass diese Fläche eine Selbstdurchdringung besitzt. Dies ist kein Zufall, denn solange wir versuchen, unser Verklebungsproblem innerhalb des uns vertrauten "dreidimensionalen Raumes" zu lösen, müssen wir immer eine Selbstdurchdringung in Kauf nehmen.

Die Mathematik kann nun eine Lösung unseres Verklebungsproblems anbieten, bei der keine solche Selbstdurchdringung auftritt. Allerdings müssen wir dazu den Rahmen des uns vertrauten Raumes verlassen. Lassen sie mich kurz die Idee darstellen, welche den Mathematiker zu seiner Lösung führt.

Wir legen im uns vertrauten Raum ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Lage jedes Punktes im Raum ist dann durch seine drei Koordinaten festgelegt, also durch drei (reelle) Zahlen x, y und z.



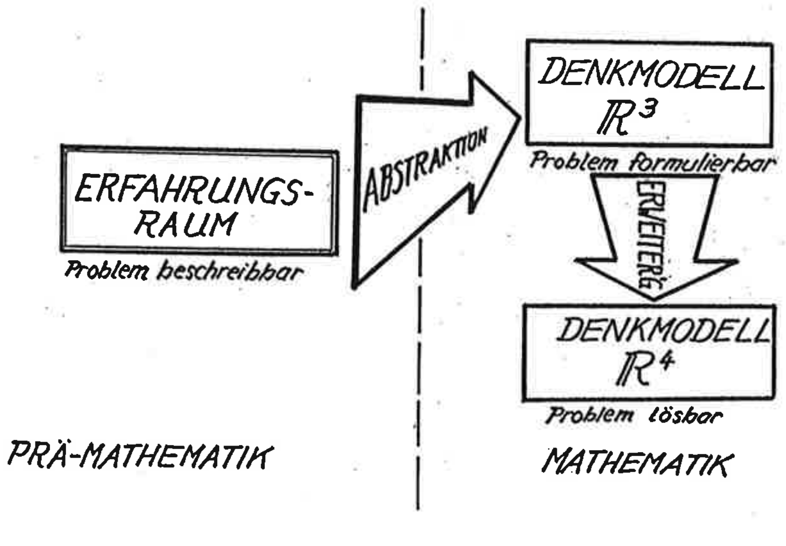
Den Punkten im Raum entsprechen jetzt Tripel (x, y, z) von (reellen) Zahlen. Geometrische Tatbestände lassen sich nun umsetzen in Aussagen über Zahlentripel. Diese Aussagen lassen sich formulieren mit Hilfe von Gleichungen oder von Ungleichungen, oder mit Hilfe des Funktionsbegriffes - also in der Sprache der Analysis und der Algebra.

Damit haben wir den uns aus der Erfahrung vertrauten Raum ersetzt durch ein Denkmodell, nämlich durch die üblicherweise mit dem Symbol $\mathbf{R}^3$ bezeichnete Menge aller Tripel von reellen Zahlen. Geometrische Prozesse, wie etwa das Verformen von Flächen oder das Verkleben von Rändern solcher Flächen, lassen sich jetzt in unserm Modell rein analytisch oder algebraisch beschreiben.

Diese neue Art, über den Raum zu sprechen, hat natürlich den Nachteil, dass sie eine gewisse mathematische Schulung verlangt. Andrerseits hat sie den Vorteil, sich nicht auf das räumliche Vorstellungsvermögen verlassen zu müssen. Damit befreit sie das Denken des Mathematikers von einer Fessel und eröffnet ihm neue Möglichkeiten.

So können wir etwa anstelle unseres Denkmodells $\mathbf{R}^3$ die Menge $\mathbf{R}^4$ aller Quadrupel (x, y, z, w) reller Zahlen betrachten. Diese Menge $\mathbf{R}^4$ nennen wir den vierdimensionalen Raum, weil seine "Punkte", d.h. die Quadrupel reeller Zahlen durch vier "Koordinaten" festgelegt sind - nämlich durch die vier Zahlen, die das Quadrupel bestimmen. In diesem erdachten Raum $\mathbb{R}^4$ kann man nun genauso algebraisch und analytisch Geometrie betreiben, wie in unserm Denkmodell $\mathbb{R}^3$, mit dem wir den Erfahrungsraum beschrieben haben. Tatsächlich lässt sich in diesem neuen Raum $\mathbb{R}^4$ unser Verklebungsproblem so lösen, dass wir eine Fläche ohne Selbstdurchdringung erhalten. Diese Fläche heisst die Kleinsche Flasche, so benannt nach Felix Klein (1849-1925), der sie als erster untersuchte. Da sich der Raum $\mathbb{R}^4$ unserer Vorstellung entzieht, lässt sich auch diese Kleinsche Flasche nicht direkt anschaulich machen. Projezieren wir sie allerdings geeignet auf den Raum $\mathbb{R}^3$, so erhalten wir im Anschauungsraum unsere früher gewonnene Fläche mit Selbstdurchdringung zurück. Was wir also dort gesehen haben, steht zur Kleinschen Flasche in einem ähnlichen Verhältnis, wie die Photographie eines räumlichen Gegenstands zum Gegenstand selbst. Wir müssen uns aber damit zufrieden geben, dass die Lösung unseres Verklebungproblems nur mit mathematischen Mitteln zu beschreiben ist.

Die Schritte, die wir vollzogen haben, um überhaupt zur mathematischen Lösung unseres Verklebungsproblems zu gelangen, sind schematisch die folgenden:



Kehren wir zurück zum Schritt vom Prämathematischen in die Mathematik, den wir im Rahmen unseres Gedankenexperiments vollzogen haben: dem Übergang vom Erfahrungsraum zum Denkmodell $\mathbf{R}^3$. Anhand dieses Schrittes möchte ich Gründe dafür angeben, warum ein - meist junger - Mensch sich zur Beschäftigung mit der Mathematik hingezogen fühlen kann. Dazu müssen wir uns zuerst über die Bedeutung des Schrittes vom Raum zum Denkmodell klar werden.

Es handelt sich dabei um den Übergang von der Welt des Erfahrbaren zur Abstraktion, zu einem rein gedanklichen Modell der Erfahrungswelt. Natürlich lassen sich im Modell niemals alle im Erfahrungsraum auftretenden Erscheinungen beschreiben, denn es kann ja nur solche Eigenschaften wiedergeben, welche sich ausschliesslich auf die Lage von Punkten beziehen. Damit kann unser Modell letztlich vom Raum nur das erfassen, was sich durch das Messen von Abständen überprüfen lässt. Dies ist grundsätzlich so: jedes mathematische Denkmodell gibt immer nur einen Teilaspekt der Wirklichkeit wieder, der sich auf das Messbare oder das Zählbare bezieht.

Der Mathematiker betreibt nun sein Handwerk mit solchen Denkmodellen, mit Modellen also, welche die ganze Reichhaltigkeit der ihn umgebenden Wirklichkeit reduzieren auf das, was messbar oder zählbar ist. Als leicht wird kaum ein Mathematiker sein Handwerk bezeichnen, denn es verlangt Hartnäckigkeit, Genauigkeit und Ausdauer. Was also führt einen Menschen dazu, einen beträchtlichen Teil seiner Zeit und seiner Energie der Untersuchung abstrakter Denkmodelle zu widmen?

Die ersten Anstösse dazu werden natürlich meist in der Schule gegeben. Der Schüler wird vielleicht entdecken, dass ihm die Mathematik Spass macht. Vielleicht lernt er die Mathematik auch schätzen, weil sie ihm relativ leicht fällt und ihm so Erfolgserlebnisse beschert. Vielleicht ist er sogar in seiner Klasse das, was Schüler als das "Mathe-Genie" bezeichnen: der Klassenerste in diesem Fach, der sozusagen immer Bestnoten erreicht.

Solche Gründe können, besonders wenn noch das Vorbild und die Förderung durch einen engagierten Lehrer dazutritt, tatsächlich der Auslöser dafür sein, später ein Mathematikstudium zu ergreifen. Doch bei näherem Zusehen sind es oft gerade nicht diese naheliegenden und offensichtlichen Gründe, welche tatsächlich den Ausschlag geben, Mathematiker zu werden.

So beobachtet man oft, dass die Maturanden des Typus C mit den besten Leistungen in Mathematik ein anderes Studienfach wählen, häufig aus dem Bereich der Ingenieurwissenschaften. Die Wahl der Mathematik als Studienfach hat also vermutlich mit tieferliegenden Eigenschaften der Beziehung zu diesem Gebiet zu tun. Besonders Ingenieure zeigen oft ein ausgesprochenes Interesse an der Mathematik - und zwar an der einen Mathematik. Dies konnte ich in den Gesprächen feststellen, welche ich anlässlich der Ausstellung "Heureka 1991" mit Besuchern führte. Auch bei meiner Tätigkeit als Prüfungsexperte an der HTL in Luzern konnte ich diese Erfahrung machen. Ingenieure schätzen die Mathematik als ein zuverlässiges und leistungsfähiges Werkzeug und bringen ihr deshalb ein waches Interesse entgegen, das über das hinausgeht, was sie in ihrem Betätigungsfeld unmittelbar anwenden können.

Mathematiker zu werden hat also zunächst vielleicht mehr mit der <u>Art</u> des Interesses zu tun, welches man diesem Fach entgegenbringt, als mit dem Ausmass dieses Interesses. Welcher Art dieses Interesse ist, möchte ich Ihnen nun aus meiner Sicht darlegen.

Ohne dies vielleicht im vollen Ausmasse wahrzunehmen, wird der Schüler bemerken, dass die Mathematik sich nicht direkt auf die Wirklichkeit bezieht, sondern diese duch Denkmodelle darstellt. Ist sein Interesse an diesen Denkmodellen einmal erwacht, wird er eine typische Erfahrung machen: <u>Diese Modelle funktionieren mit absoluter Sicherheit</u>. Kommt es zu Unstimmigkeiten oder Fehlern, so liegt das nicht am Modell, sondern an dessen falschen Handhabung durch ihn - den Schüler selbst - oder auch durch den Lehrer. Gerade dieser letzte Punkt ist von aussergewöhnlicher Wichtigkeit. In der Mathematik kann auch der Lehrer Fehler machen, die man ihn eindeutig nachweisen kann, ohne dass er sich mit einer Lehrmeinung oder durch eine andere Auffassung der Begriffe im Nachhinein rechtfertigen könnte. Alles was es dazu braucht, ist eine gewisse Unvoreingenommenheit und Sicherheit im Umgang mit dem mathematischen Handwerkszeug. Wie in keinem anderen Fach ist es also nicht der Lehrer, der auf Grund seines Wissensvorsprungs über die Richtigkeit der Lösung einer Aufgabe entscheidet, sondern das Denkmodell selbst, mit dem die Aufgabe zu lösen war. So ist es eine der einprägsamsten Erfahrungen, mit der Mathematik ein Denksystem kennengelernt zu haben, das es erlaubt, absolut eindeutige und sichere Aussagen zu machen.

Bei weitergehender Beschäftigung mit der Mathematik wird der Schüler eine ihrer weiteren Eigenschaften kennenlernen: Ihre <u>Leistungsfähigkeit als Werkzeug</u>. So lernt er etwa die Bahn eines abgeworfenen Balles oder Steines zu berechnen, die Wurfparabel. Experimente in der Physik zeigen ihm dann vielleicht, dass das tatsächliche Flugverhalten eines abgeschossenen Gegenstandes nur unwesentlich von dem abweicht, was die Berechnungen ergeben. Die Abweichungen zwischen den berechneten und den gemessenen Daten wird er nicht darauf zurückführen, dass das zur Berechnung verwendete Denkmodell an sich nicht richtig funktioniert. Er wird vielmehr die Erklärung des Physiklehrers akzeptieren, welcher die Abweichungen auf Messungenauigkeiten zurückführt, aber auch darauf, dass bei den Berechnungen der Luftwiderstand vernachlässigt wurde. Er wird also das verwendete Denkmodell als eine Idealisierung der

Wirklichkeit anschauen, eine Idealisierung, welche, für sich genommen, keine innern Widersprüche enthält. Die schon früher gemachte Erfahrung, dass es in der Mathematik sozusagen kein technisches, sondern nur menschliches Versagen gibt, wird ihn zu dieser Meinung führen.

Hat ein Schüler, einmal hinreichende Sicherheit im Umgang mit dem mathematischen Handwerkszeug erworben, so ist er bereit, eine weitere und ganz besonders wichtige Erfahrung zu machen. Er kann jetzt mit diesem Handwerkszeug kleinere oder grössere Aufgaben lösen, ohne dass ihm Fehler unterlaufen. Er muss nun also nicht mehr das entmutigende Gefühl haben, vor einem unfehlbaren Denksystem zu stehen, das ihn nur dauernd darüber belehrt, wie dumm er eigentlich ist. Begeht er ab und zu einen Fehler, so ist das jetzt weniger ein Anlass zur Entmutigung, sondern vielmehr ein Ansporn. Er hat also die Angst vor der Mathematik verloren und ist deshalb offen dafür, deren kreative Seite kennenzulernen. Er wird jetzt in der Lage sein, zu bemerken, dass die Mathematik nicht eine geheimnisvolle Maschine ist, welche - einmal richtig in Betrieb gesetzt - von selbst die Lösungen verschiedener Aufgaben liefert. Er wird wahrnehmen, dass das Lösen eines mathematischen Problems mit der Idee beginnen muss, wie man dieses Problem möglicherweise lösen könnte. Diese Lösungsidee selbst liefert aber die Mathematik an sich nicht, diese Idee muss derjenige haben, der das Problem lösen will. Durch Erfahrung, die beim Lösen ähnlicher Aufgaben erworben wurde, kann einem diese Idee natürlich nahegelegt werden. Bei Routineaufgaben, die dem Einüben des Handwerkszeugs dienen, ist diese Idee vielleicht dem Schüler sogar vorgegeben. Aber auch in diesem Falle musste sie einmal gedacht werden. So ist das Betreiben von Mathematik vergleichbar mit der Arbeit eines Handwerkers, der sich ja auch überlegen muss, wie er eine Arbeit ausführen will, bevor er diese dann mit seinen Werkzeugen durchführt.In beiden Fällen kann es passieren, dass die Lösungsidee dem Material oder dem Werkzeug nicht angepasst ist, sodass sie zu keiner brauchbaren Lösung führt. In beiden Fällen sind es gute Kenntnisse über das verwendete Material und Erfahrung im Umgang mit dem Werkzeug, mit welchen sich falsche Lösungsideen vermeiden lassen. Wer meint, Handwerk sei nichts Kreatives, der schaue sich etwa einen alten Schrank oder das Dachgebälk eines verwinkelten mittelalterlichen Hauses an. Die kreative Seite der Mathematik dem Schüler näher zu bringen, ist übrigens eine besonders wichtige aber auch anspruchsvolle Aufgabe für den Lehrer, eine Aufgabe die dankbares Thema für einen weiteren Vortrag wäre.

Befassen wir uns nun damit, wie die drei geschilderten Erfahrungen - die Zuverlässigkeit, die Anwendbarkeit und die kreative Seite der Mathematik - die Beziehung des Schülers zu diesem Fach prägen. Dabei möchte ich den zukünftigen Ingenieur oder Naturwissenschafter dem zukünftigen Mathematiker gegenüberstellen.

Der erstgenannte hat vielleicht von seinem Charakter her ein eher pragmatisches Verhältnis zu dem, was er in der Mathematik lernt. Er ist ein Mensch der Ordnung, Zuverlässigkeit und Wahrhaftigkeit liebt. Diese Werte sind ihm so selbstverständlich, dass er es auch mit grosser Selbstverständlichkeit hinnimmt, dass ein menschliches Gedankengebäude wie die Mathematik, diese Werte in Reinform verkörpert. Denkmodelle dieser Art sind seiner Auffassung nach gerade das, was es braucht, um die Ordnung in der Welt der Dinge zu erkennen oder zu verwirklichen. Die Mathematik in ihrer Zuverlässigkeit ist ihm ein willkommenes objektives Bezugssystem für sein Weltverständnis.

Auch der Mathematiker schätzt natürlich die Ordnung, die Zuverlässigkeit und die Wahrhaftigkeit. Er ist aber vielleicht eher etwas nachdenklich im Umgang mit diesen Werten. Bedenken wir auch, dass sich unser zukünftiger Mathematiker in der späten Pubertät oder der Adoleszensphase befindet. Geistige Werte sind ihm sehr wichtig und er legt in dieser Beziehung an sich und andere strenge Massstäbe an. Zugleich muss er aber feststellen, dass sein eigenes Verhalten nicht diesen Massstäben genügt. Vielleicht wird ihm dadurch die Diskrepanz zwischen der Idee der Ordnung, die er sich macht und deren Umsetzung in die Wirklichkeit mehr bewusst als dem pragmatischer eingestellten zukünftigen Ingenieur oder Naturwissenschafter.

Dadurch stellt er auch sein inneres Wertesystem eher in Frage. Geistige Ordnung scheint ihm beim näherem Zusehen nicht mehr unbedingt als etwas, das sich als Selbstverständlichkeit ergibt, sondern als etwas, das bewusst geschaffen und erarbeitet werden muss. Die Sicherheit, die innere Notwendigkeit, mit der sich eine Erkenntnis ergibt, scheint ihm ein besserer Garant für deren Wahrheit, als das intuitive Wahrnehmen ihrer Richtigkeit. Die Mathematik bietet ihm nun ein Denksystem an, das seinem Bedürfnis nach gedanklich abgesicherten Erkenntnissen entspricht. Die <u>Zuverlässigkeit der Mathematik</u> bedeutet für ihn, dass es immerhin Teilbereiche des menschlichen Erkennens gibt, in denen man zu sichern Aussagen gelangen kann.

So werden ihn die Denkmodelle der Mathematik in erster Linie wegen der Klarheit und Eindeutigkeit ihrer inneren Ordnung ansprechen, und nicht als Mittel, um die Welt der Dinge zu verstehen oder zu verändern. Er wird sich also eher direkt mit den Denkmodellen selbst befassen. Er möchte deren innere Struktur kennenlernen, und hat vielleicht auch den Wunsch, den Aufbau der Mathematik mit mehr logischer Strenge zu betreiben, als dies in der Schule üblich ist. Er begnügt sich vielleicht nicht damit, die Zuverlässigkeit der Mathematik als Erfahrungstatsache einfach zu akzeptieren. Er möchte sich vielmehr - unter kundiger Leitung - selbst von dieser Zuverlässigkeit überzeugen.

Die <u>Anwendbarkeit der Mathematik</u> ist für den Pragmatiker - unsern zukünftigen Ingenieur oder Naturwissenschafter - das wichtigste Motiv, sich mit diesem Gebiet zu befassen. Er schätzt die Mathematik und betreibt sie gerne, weil er sie als starkes und vielseitiges Werkzeug zum Lösen von Problemen aus der Praxis oder aus dem Bereich der Naturwissenschaften kennengelernt hat. Dass mathematische Denkmodelle die Wirklichkeit nur näherungsweise beschreiben, stört in meist nur dann, wenn die Abweichungen zwischen Modell und Wirklichkeit so gross werden, dass bei der Lösung praktischer Probleme Schwierigkeiten auftreten.

Entsprechend seiner Auffassung von Mathematik ist dem Pragmatiker ein sicherer Umgang mit dem Handwerkszeug meist wichtiger als das Verstehen der Ideen, die diesem Handwerkszeug zu Grunde liegen. Eine schlagende Anwendung eines mathematischen Ergebnisses überzeugt ihn mehr von dessen Richtigkeit als ein logischer Beweis.

Genau umgekehrt ist es beim Mathematiker. Er schreckt meist davor zurück, eine mathematische Methode anzuwenden, deren Korrektheit nicht einwandfrei logisch bewiesen ist. Er sieht seine Aufgabe im Hinblick auf die Anwendungen hauptsächlich darin, gedanklich einwandfreie Denkmodelle zu entwickeln. Insgeheim bewundert er vielleicht etwa die Theoretischen Physiker für die Kühnheit ihrer Aussagen, schreckt aber zugleich vor ihrem grosszügigen Umgang mit dem mathematischen Handwerkszeug zurück. Auch unser junger zukünftiger Mathematiker wird zu dieser Denkweise tendieren. Das Verstehen eines Denkmodells und seine logische Korrektheit ist ihm wichtiger als die Anwendbarkeit. Vielleicht stellt das Denkmodell in seiner Idealisierung für ihn sogar etwas wie die Quintessenz der beschriebenen Wirklichkeit dar, sozusagen ihr reiner geistiger Gehalt, eine absolute Wahrheit.

Dem Pragmatiker wird an der kreativen Seite der Mathematik vor allem das gefallen, was sich auf das Lösen von vorgegebenen Problemen bezieht. Beim Suchen von Lösungen wird er auch Überlegungen machen, welche sich nicht allein auf das Denkmodell abstützen, sondern auch auf aussermathematische Aspekte des Problems, das er lösen muss. Dem Denken des Mathematikers liegt dies fern, da er nur von einer Lösung befriedigt ist, die sich innerhalb seines Denkmodells erklären lässt.

Andrerseits wird der Mathematiker eher bereit sein, Schritte von der Art zu tun, wie etwa unser Übergang vom Denkmodell $\mathbf{R}^3$ zum erdachten Raum $\mathbf{R}^4$. Solange sich ein Denkmodell logisch einwandfrei handhaben lässt, ist der Mathematiker bereit, es zu akzeptieren, auch wenn es sich jeder bildlich-anschaulichen Vorstellung entzieht und nichts beschreibt, was in der Welt der Dinge liegt.

Früher habe ich die Tätigkeit des Mathematikers mit der eines Handwerkers verglichen. Stellt man die Art, wie der Mathematiker arbeitet, der Art und Weise gegenüber, wie etwa ein Ingenieur mit der Mathematik umgeht, so muss man den Mathematiker eher mit dem Kunsthandwerker vergleichen. Nicht, weil dessen Tätigkeit höher einzustufen wäre, sondern weil der kreative Spielraum des Mathematikers grösser ist als der des Ingenieurs, jedenfalls was den Umgang mit der Mathematik anbelangt.

Der Mathematiker löst ja nicht primär von aussen an ihn herangetragene Probleme, sondern er stellt sich seine Probleme sehr oft selbst. Diese Probleme ergeben sich bei der Untersuchung von Denkmodellen, und die Lösung dieser Probleme ist häufig erst mit Hilfe von neu erdachten Denkmodellen möglich. Wir sind ja auch erst im erdachten Denkmodell $\mathbf{R}^4$ zur Lösung unseres ursprünglichen Verklebungsproblems gelangt! Auch unserm zukünftigen jungen Mathematiker wird diese Art des kreativen Umgangs mit der Mathematik Spass bereiten: das Nacherfinden der Wirklichkeit in einem Denkmodell oder vielleicht auch schon das Erfinden neuer, erdachter Dinge. Das Entdecken von gesetzmässigen Zusammenhängen in Strukturen wird ihm aus dem gleichen Grund Spass bereiten.

Natürlich sollte einem Mathematiker die pragmatische Betrachtungsweise des Ingenieurs oder Naturwissenschafters ebenfalls nachvollziehbar sein, denn sonst wird er kaum ein guter Mathematiker. Seine Beziehung zur Mathematik ist aber vielschichtiger. Vielleicht liegt auch hier einer der Gründe dafür, dass zukünftige Mathematiker als Schüler in ihrem Fach sehr oft erst relativ spät gute Leistungen vollbringen: das Entwickeln einer vielschichtigen Beziehung verlangt mehr Zeit.

Wir haben jetzt einige Gründe kennengelernt, die einen jungen Menschen dazu führen können, Mathematiker werden zu wollen. Der wichtigste Grund mag dabei wohl der sein, der sich aus der Erfahrung der Zuverlässigkeit der Mathematik ergibt. Die Vorstellung nämlich, dass es die Mathematik - zumindest innerhalb der idealisierten Welt ihrer Denkmodelle - erlaubt, mit absoluter Sicherheit zu entscheiden, ob eine Aussage wahr oder falsch ist. Doch zeigt gerade eine weitergehende Beschäftigung mit der Mathematik, dass diese Vorstellung zu einfach ist.

Ich möchte ihnen dies nahebringen anhand von Überlegungen zu einem der grundlegensten Gebiete der Mathematik: der elementaren Arithmetik. Wir wollen uns also befassen mit dem bereits aus der Primarschule vertrauten Rechnen mit den natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \cdots$. Um die Zweideutigkeiten der Umgangssprache auszuschalten, führen wir zuerst eine sogenannte formale Sprache ein. Alle Aussagen über das Rechnen mit natürlichen Zahlen wollen wir in dieser neuen Sprache niederschreiben. Dazu verwenden wir die in der ersten Spalte der folgenden Tabelle angeführten Zeichen.

Zeichen	Bedeutung / Interpretation	
$\bar{0}$ $\bar{1}$	Zahl 0 Zahl 1	
x, y, z, w x_1, x_2, x_3...	Variablen: Stehen für natürliche Zahlen	
$+$ $\cdot$	Plus-Zeichen Mal-Zeichen	Arithmetische
$=$	Gleichheitszeichen	Symbole
$\wedge$	und (Konjunktion)	Symbole
$\vee$	oder (Disjunktion)	der
$\rceil$	nicht (Negation)	Aussagen-
$\Longrightarrow$	zieht nach sich (Implikation)	Logik
$\forall$	für alle	Quantoren
$\exists$	es gibt	
( )	Klammern	Hilfssymbole

Nach genau festgelegten syntaktischen Regeln - auf die ich nicht eingehen will - bilden wir jetzt mit diesen Zeichen gewisse Folgen, die wir formale Aussagen nennen. Vermöge der in der mittleren Spalte der Tabelle angegebenen Bedeutung der einzelnen Zeichen lassen sich diese formalen Aussagen interpretieren als Aussagen über das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Wir sprechen so in einer Art Computersprache über die elementare Arithmetik.

Wir betrachten als Beispiel die folgende formale Aussage

$$x \cdot y = \overline{0} \Longrightarrow (x = \overline{0} \vee y = \overline{0})$$

Interpretiert liest sich diese formale Aussage als:
"Ist das Produkt $x \cdot y$ der natürlichen Zahlen x und y gleich 0, so ist x gleich 0 oder $y = 0$".

Der Aufbau einer mathematischen Theorie folgt nun immer dem gleichen Grundprinzip: man geht aus von gewissen Grundannahmen - den sogenannten Axiomen - von Aussagen also, deren Richtigkeit sofort einleuchtet. Aus diesen Axiomen beweist man dann durch rein logisches Schliessen neue Aussagen, die sogenannten Sätze der Theorie.

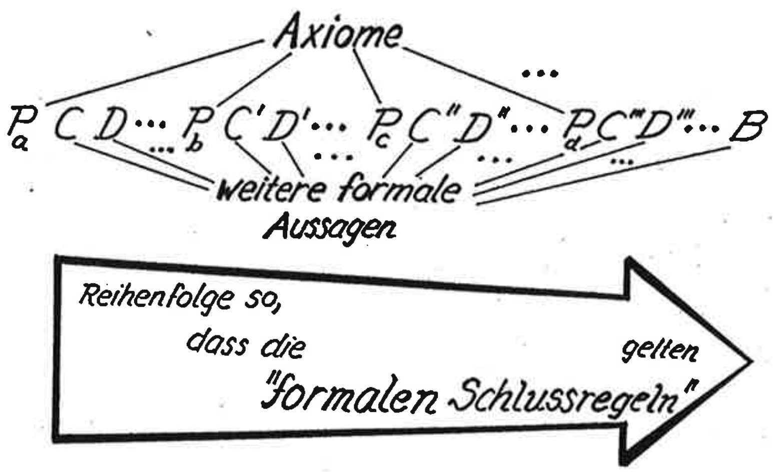
Die elementare Arithmetik kann man jetzt unter Verwendung unserer formalen Sprache nach dem gleichen Prinzip aufbauen. Dazu schreibt man zuerst die Axiome in dieser Sprache nieder. Es handelt sich dabei um die folgenden formalen Aussagen:

$P_1 : x = y \Longrightarrow (x = z \Longrightarrow y = z)$
$P_2 : x = y \Longrightarrow x + \overline{1} = y + \overline{1}$
$P_3 : x + \overline{1} = y + \overline{1} \Longrightarrow x = y$
$P_4 : x + \overline{0} = x$
$P_5 : x + (y + \overline{1}) = (x + y) + \overline{1}$
$P_6 : x \cdot \overline{0} = \overline{0}$
$P_7 : x \cdot (y + \overline{1}) = x \cdot y + x$
$P_8 : \rceil (\exists x)(\overline{0} = x + \overline{1})$
$P_9 : (A(\overline{0}) \wedge (\forall x)(A(x) \Longrightarrow A(x + \overline{1}))) \Longrightarrow (\forall x)A(x)$

Dabei steht $A(x)$ für irgendeine formale Aussage, für die auch $(\forall x)A(x)$ eine formale Aussage ist. Diese formalen Aussagen nennen wir die formalen Axiome der Arthmetik. Interpretiert man diese formalen Axiome, so erhält man zweifellos wahre Aussagen. So besagt etwa das formale Axiom P_2, dass die Gleichheit zwischen zwei Zahlen x und y erhalten bleibt, wenn wir zu beiden 1 addieren. Ich möchte hier aber nicht weiter auf diese formalen Axiome eintreten.

Nach ganz bestimmten Regeln (die wir hier nicht angeben wollen) bilden wir jetzt gewisse Folgen von formalen Aussagen. Diese Folgen nennen wir formale

Beweise. Beginnen muss ein solcher formaler Beweis immer mit einem formalen Axiom. Endet ein solcher formaler Beweis mit der formalen Aussage B, so nennen wir ihn einen formalen Beweis von B. Vereinfacht dargestellt besteht dann die Situation:



Interpretiert man die einzelnen formalen Aussagen in diesem Beweis, so erhält man eine Folge von Aussagen, die logisch auseinander hervorgehen und so einen Beweis der letzten Aussage aus den Axiomen ergeben. Mit Hilfe unserer formalen Sprache können wir jetzt auf rein algorithmische Art Beweise führen. Als Mathematiker interessieren wir uns ganz besonders dafür, ob eine bestimmte formale Aussage überhaupt eine formalen Beweis besitzt, d.h. ob diese formale Aussage formal beweisbar ist.

Die Frage nach der formalen Beweisbarkeit formaler Aussagen ist zunächst eine Frage über die formale Sprache. Erstaunlicherweise lässt sich diese Frage aber in der formalen Sprache selbst ausdrücken. Im Jahre 1931 gelang es nämlich K. Gödel eine sinnreiche Numerierung aller formalen Aussagen und aller formalen Beweise anzugeben, sowie eine formale Aussage $G(x,y)$ niederzuschreiben, die besagt "x ist die Nummer eines formalen Beweises zur formalen Aussage mit der Nummer y".

Ausgehend davon, gelang es Gödel, eine weitere formale Aussage U anzugeben, welche interpretiert besagt: "U ist nicht formal beweisbar". Die Aussage U "behauptet" also ihre eigene formale Unbeweisbarkeit. Ist diese formale Aussage U (nachdem wir sie interpretiert haben) nun aber wahr oder falsch? Weil formal beweisbare Aussagen wahr sind, muss sie wahr sein. Das heisst: die formale

Aussage U ist wahr, aber nicht formal beweisbar (wie sie ja selbst aussagt)! Wir sehen also:

Es gibt wahre formale Aussagen, die nicht formal beweisbar sind.

Es könnte natürlich sein, dass es formale Aussagen dieser Art nur gibt, weil wir nicht genügend viele formale Axiome angenommen haben. Man kann aber zeigen, dass solche Aussagen auch dann auftreten, wenn wir unser formales Axiomensystem irgendwie durch endlich viele wahre formale Aussagen erweitern. Es ist also grundsätzlich so, dass wir nicht alle wahren Aussagen der Arithmetik formal beweisen können.

Der Mathematiker erhält so einen Hinweis darauf, dass es - selbst innerhalb der elementarsten Bereiche der Mathematik - nicht möglich ist, alle wahren Aussagen mit der Strenge zu beweisen, die ihm eigentlich vorschwebt. Durch Erfahrungen dieser Art ist unser werdender Mathematiker - jetzt bereits Student an einer Hochschule - gezwungen, sein mathematisches Weltbild zu überdenken. Er muss also sozusagen nochmals die Grundlagenkrise durchlaufen, welche die Mathematik zu Beginn unseres Jahrhunderts durchlief.

Zudem wird er auch feststellen, dass heute in den Naturwissenschaften fast willkürlich Denkmodelle "über die Wirklichkeit gestülpt" werden, oft sogar solche, die sich gegenseitig widersprechen. Ein Objekt kann z.B. nicht zugleich aus Atomen aufgebaut sein und eine fraktale Struktur haben. Trotzdem benutzen die Physiker das "Denkmodell" des atomaren Aufbaus und auch das der fraktalen Struktur. Auch unser Denkmodell $\mathbf{R}^3$ gibt im Bereich astronomisch grosser und submikroskopisch kleiner Distanzen den realen Raum nur schlecht wieder.

Das Denkmodell wird also mehr und mehr zu etwas, das nur einen beschränkten sektoriellen Aspekt des betrachteten Objekts wiedergibt. Bei veränderter Blickrichtung auf das Objekt ändert auch das Denkmodell, das zu seiner Beschreibung benutzt wird. Das Denkmodell verliert also den Charakter der Idealisierung, welche etwas vom innersten Gehalt des Objekts wiedergibt. Es wird zum Werkzeug, dass je nach dem momentanen Verwendungszweck gewählt wird. Auch das kann dem mathematischen Weltbild unseres Studenten einen weitern Stoss versetzen. Er muss einen Sinneswandel vollziehen, wie er von den Mathematikern ganz allgemein im letzten Jahrhundert vollzogen wurde.

Diese Sinn- und Grundsatzkrise möchte ich als eine für den werdenden Mathematiker typische Phase bezeichnen. Sie wird oft durchlaufen in den mittleren oder höhern Studiensemestern und ist überlagert mit verschiedenen andern Problemen der Sinn- und Motivationssuche. So musste etwa unser ehemaliges

"Mathe-Genie" zur Kenntnis nehmen, dass es in seinem Studienjahrgang Kollegen mit besseren Leistungen gibt. Dies zwingt ihn zu einer Suche nach neuen Motiven, um Mathematik zu betreiben. Vielleicht fiel ihm die Schule auch so sehr leicht, dass er es dort nie nötig hatte, sein Arbeitsverhalten zu entwickeln und zu üben, und er sieht sich jetzt gezwungen, dies nachzuholen. Besonders Absolventen der Matura vom Typus C sehen sich oft mit diesem letztgenannten Problem konfrontiert. Sie waren weniger dazu genötigt, Fleiss, Systematik und Durchhaltevermögen zu trainieren als jene, welche Latein oder dazu noch gar Griechisch lernen mussten.

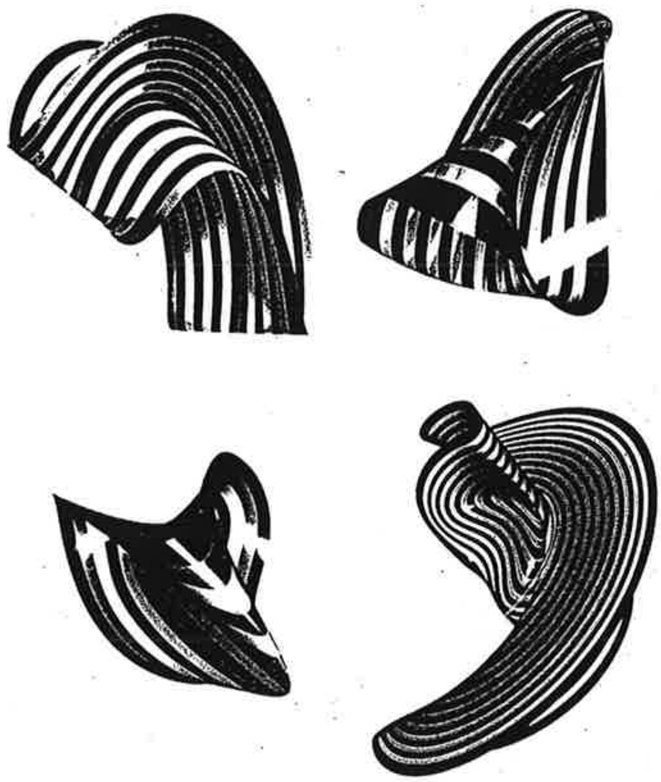
Soll diese Krise nicht zum Abbruch des Studiums führen, so muss es dem Studenten jetzt gelingen, seine eigene und persönliche Einstellung zur Mathematik zu finden. Es genügt jetzt nicht mehr, die Mathematik einfach zu lernen. Es wird jetzt nötig, sie sich zu eigen zu machen, persönlich Stellung zu beziehen. Die vielleicht falschen oder zu einfachen Vorstellungen, welche zum Studium der Mathematik geführt haben, müssen jetzt revidiert werden. Es gilt nun auch, sich innerhalb der Mathematik für ein Spezialgebiet zu entscheiden, auf das man sein Interesse konzentrieren will. Sich mit dieser Krisenzeit im akademischen und oft auch persönlichen Leben unserer Studenten zu befassen, wäre einer nähern Betrachtung wert, würde aber zu weit von unserm Thema wegführen.

Gerade jetzt, im Hinblick auf dieses vielleicht für einige von ihnen dringliche Thema, muss ich Sie daran erinnern, dass ich an einem Fachbereich arbeite, an dem fast ein Drittel der Studierenden gar nicht Studenten sind, sondern <u>Studentinnen</u>. Habe ich bis jetzt unsere Studentinnen immer mitgemeint, so richte ich mich jetzt ganz speziell an sie: Ich danke Ihnen, liebe Studentinnen, für Ihre Bereitschaft über Ihre Probleme zu sprechen und für die Offenheit, mit der Sie dies taten. Sie haben damit ganz wesentlich dazu beigetragen, mir die Augen für die persönlichen Krisen und Nöte <u>aller</u> Studierenden zu öffnen. Sie haben so mitgeholfen, unsere Hochschule etwas mehr zu dem zu machen, was eine Hochschule immer sein sollte: ein Ort, an dem Lehrende und Lernende gegenseitig voneinander lernen.

Unsere Auseinandersetzung mit der Frage "Warum <u>wird</u> man Mathematiker" führte uns an einen Punkt, an dem sich eine neue Frage aufzudrängen scheint, nämlich die Frage "Warum <u>bleibt</u> man Mathematiker?". Woher kommt der Mut zum "Trotzdem", das der Ausgangspunkt für das Überwinden der Krise ist? Die angesprochene studentische Sinn- und Motivationskrise ist zudem nicht die einzige, die es zu durchlaufen gilt. Wie Sie ja aus eigener Erfahrung sicher wissen, sind wir alle immer wieder mit solchen Krisen konfrontiert. Warum sollten die Mathematiker da eine Ausnahme bilden?

Unsere Titelfrage stellt sich also in neuer, tieferer Weise. Lassen Sie mich dazu aus persönlicher Sicht einige Gedanken äussern. Beginnen möchte ich mit der folgenden Aussage einer ehemaligen Diplomandin: "Eigentlich ist es so traurig, dass wir Mathematiker unseren Freunden und Bekannten nie wirklich sagen können, was wir tun". Dieser Satz bringt das zum Ausdruck, was ich empfand, als ich Ihnen am Ende unseres Gedankenexperimentes sagen musste, die im $\mathbb{R}^4$ gefundene Lösung unseres Verklebungsproblems sei nur mit mathematischen Hilfsmitteln zu beschreiben.

Die Aussage dieser Diplomandin drückt ein starkes Bedürfnis aus, sich mitzuteilen. Sie entspringt dem Wunsch, Menschen, die einem nahestehen, an einer Erfahrung teilhaben zu lassen, die einem wichtig ist. Dieser Wunsch ist aber in doppelter Hinsicht ein Ausdruck der Liebe: ein Ausdruck der Zuneigung zu den Menschen, denen man sich mitteilen möchte, aber auch ein Ausdruck der Liebe zur Sache, um die es geht - in unserem Fall also um die Mathematik. Diese Liebe möchte ich zum Leitfaden meiner abschliessenden Gedanken machen, die ich mit den folgenden Bildern einleiten will.



Wie Sie sicher erraten, handelt es sich um Darstellungen mathematischer Objekte. Die gezeigten Flächen sind sogenannte "Aufblasungen", genauer "reelle Bilder von Standard-Aufblasungen einer Kreisscheibe".

Es ist anzunehmen, dass auch Sie diese Bilder als schön empfinden. Die Schönheit, die in diesen Bildern zum Ausdruck kommt, könnte für das stehen, was der Mathematiker bei seiner Tätigkeit immer wieder empfindet - auch wenn ihm diese Tätigkeit Hartnäckigkeit, Geduld und Anstrengung abverlangt. Das Erleben dieser Schönheit ist ja auch verknüpft mit der schon genannten Liebe zur "Sache Mathematik".

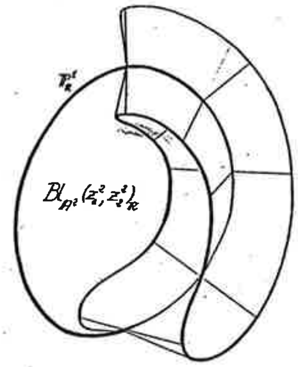
Sie können in diesen Bildern auch einen Hinweis darauf sehen, dass der Mathematiker die Veranschaulichung der von ihm studierten Objekte durchaus schätzt, obwohl er sich mit seinen Denkmodellen meist im Bereich dessen bewegt, was sich der geometrischen Vorstellung entzieht. Er ist vielleicht sogar froh, dass heute - nach einer Periode des formalen Purismus - aussagekräftige Illustrationen als Mittel zum bessern Verständnis durchaus wieder gerne gesehen sind.

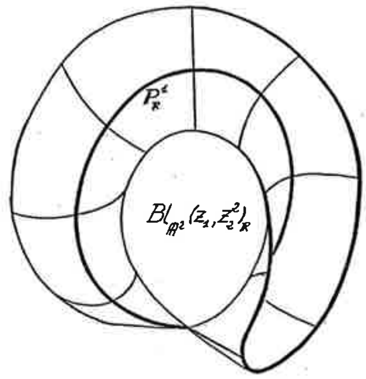
Was ich Ihnen an diesen Bildern wirlich nahebringen möchte, ist allerdings nichts direkt sichtbares, sondern die Geschichte ihres Zustandekommens:

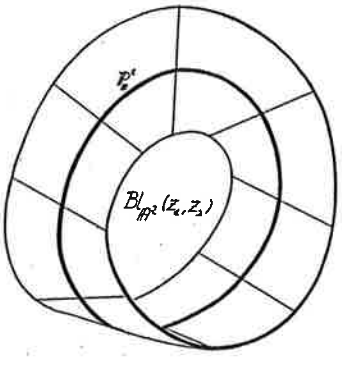
Im Jahre 1976, an der EPFL in Lausanne tätig, publizierte ich eine Arbeit über eine algebraische Konstruktion, die ich "Macaulayfizierung ungemischter lokaler Ringe" nannte. Diese Arbeit fiel einem jungen, zielbewussten Doktoranden an der Universität Münster in die Hände, der glaubte, sie könnte ihm bei der Lösung der sogenannten "Bass-Vermutung" nützlich sein. Der junge Doktorand hiess Faltings und wurde später in der Fachwelt und über diese hinaus bekannt durch seine Lösung eines andern, viel gewichtigeren Problems: der sogenannten "Vermutung von Mordell". Die Hoffnung, die Faltings in die genannte Konstruktion gesetzt hatte, erwies sich zwar als trügerisch, doch war sie für ihn der Anlass, eine andere Art von "Macaulayfizierung" zu entwickeln. Dies war einer der mathematischen Anknüpfungspunkte, die mich und meine Familie im Jahre 1977 nach Münster führten.

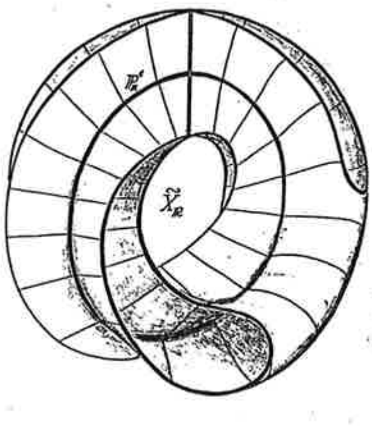
Faltings legte seiner Konstruktion eine bestimmte Klasse von sogenannten Aufblasungen zugrunde, die ich nun eingehender zu studieren begann. (Das Aufblasen von Varietäten ist eine besonders wichtige Konstruktion in der algebraischen Geometrie, auf die ich hier aber nicht weiter eingehen möchte.) Anlässlich eines Aufenthalts an der Brandeis-University bei Boston lernte ich 1978 W. Vogel aus Halle kennen, der sich mit sogenannten Buchsbaum-Ringen befasste. Es zeigte sich, dass diese Objekte besonders interessante Anwendungen der Konstruktion von Faltings zuliessen. Anlässlich eines gemeinsamen Nachtessens mit W. Vogel schlug meine Frau vor, ich solle doch nach unserer Rückkehr nach Münster einen Besuch in Halle machen. Dieser kam im Jahre 1979 auch zustande. Dabei lernte ich die Arbeiten der Japaner S. Goto und Y. Shimoda kennen, die sich ebenfalls mit den schon erwähnten Buchsbaum-Ringen befassten. Ihre Untersuchungen enthielten eine Idee, welche für mich den Anstoss gab, die von Faltings betrachteten Aufblasungen unter einem neuen Aspekt zu studieren, der es erlaubte, sehr genaue Aussagen zu machen. Die entsprechenden Resultate bildeten einen zentralen Teil meiner 1980 abgeschlossenen Habilitationsschrift und wurden zum Ausgangspunkt weiterer Arbeiten.

Die eigentlich interessanten Ergebnisse über die genannte Klasse von Aufblasungen erhält man in höherdimensionalen Fällen - in einer Situation also, die sich der Anschauung grundsätzlich entzieht. Trotzdem begann ich mich zu fragen, wie diese Aufblasungen aussehen könnten - zumindest in jenem Fall, der eine Veranschaulichung nicht zum vorneherein ausschliesst: im Fall von Flächen. Dies führte mich dazu, eine grössere Zahl von Skizzen und Zeichnungen solcher Aufblasungsflächen anzufertigen, von denen Sie hier einige sehen können.







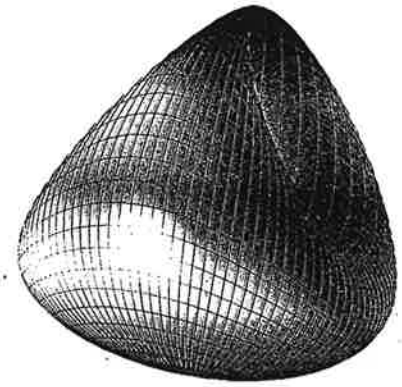


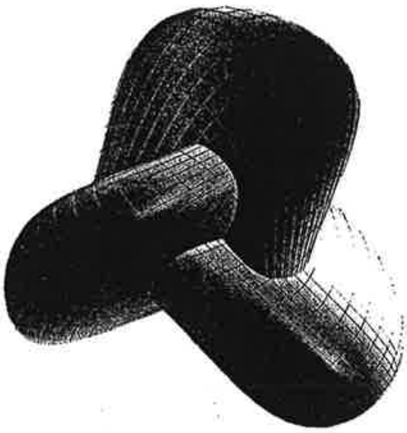
Eigentlich wartet diese unsystematische Sammlung von anschaulichen Beispielen immer noch darauf, in ihrer Gesamtheit in eine mathematisch sinnvolle Ordnung gebracht zu werden. Da ich mich - abgesehen von gelegentlichen "Abstechern" - später nicht mehr intensiv mit Aufblasungen befasste, führte ich diese Beispiele keiner weiteren "Verwendung" zu. Dies änderte sich erst im Jahre 1989.

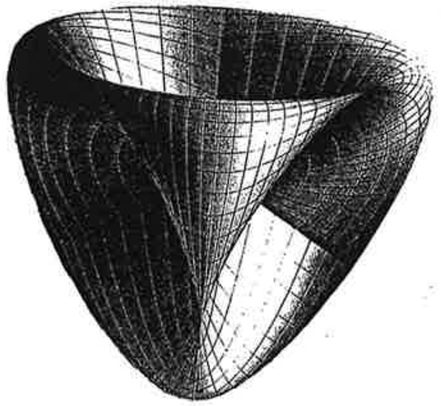
Damals organisierte der Fachverein unserer Studierenden eine Vortragsreihe, in welcher die Dozenten ihre Arbeitsgebiete in der Mathematik vorstellen sollten. Im Anschluss an meinen damaligen Vortrag fragte mich ein Student, ob er bei mir eine Diplomarbeit schreiben könne, in welcher sich etwas "Abstrakt-Algebraisches" mit etwas "Anschaulich-Geometrischem" verbinden liesse. Es schien mir naheliegend, ihm ein Thema über Aufblasungen vorzuschlagen, dessen anschaulich-geometrische Seite in der systematischen Darstellung von Beispielen der vorhin gezeigten Art bestand.

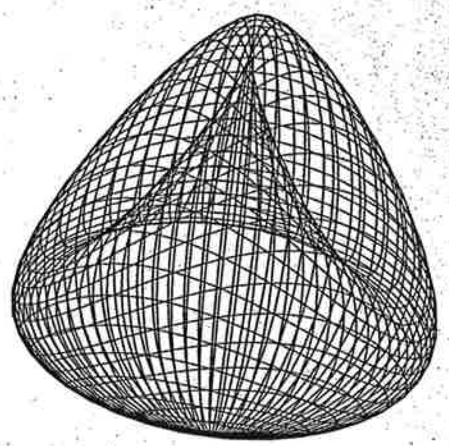
Die in dieser Arbeit entwickelte Darstellungsmethode für Aufblasungen schien uns geeignet als Grundlage zur Herstellung von Computer-Bildern. Konkreter Anlass, diese Idee zu verwirklichen, war die Ausstellung "Heureka 1991": Der Graphiker C. Schwabe, der für die Realisierung eines von mir verfassten Ausstellungsprojekts in der Sektion "Mathematik" verantwortlich war, hatte plötzlich viel mehr Ausstellungsraum zur Verfügung als ursprünglich geplant - Raum, den es zu nutzen galt. In Zusammenarbeit mit M. Hafner vom Multi-Medien- Laboratorium am Institut für Informatik an unserer Universität entstanden so schliesslich die Bilder, die Sie gesehen haben und die an der "Heureka" im Rahmen des Projekts "vom Möbius-Band zur Hilbert-Funktion" ausgestellt waren.

Doch ist damit die Geschichte dieser Bilder noch nicht zu Ende. Die Suche nach einem an der Realisierung unseres Vorhabens interessierten Informatiker führte uns über einen meiner Doktoranden zu H. P. Scherbel, einem jungen Mathematiker an der ETH. Er konnte uns wertvolle Hinweise geben, da er mit der Computerdarstellung von Flächen bereits einige Erfahrung gesammelt hatte. Insbesondere stellte er uns für die "Heureka" Computer-Bilder der sogenannten projektiven Ebene zur Verfügung - ein Objekt, das ebenfalls mit dem Ausstellungsprojekt im Zusammenhang stand.

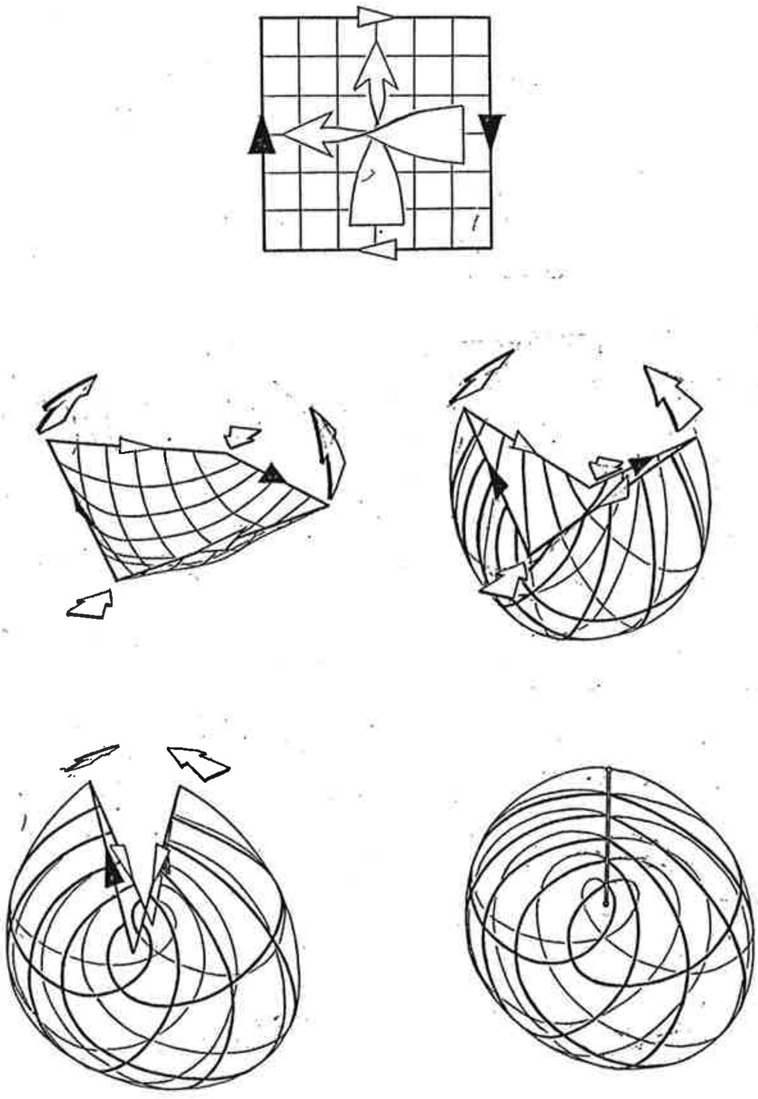








Übrigens ist die projektive Ebene mit der Kleinschen Flasche - die wir zu Beginn des Vortrages kennengelernt haben - eng verwandt. Auch sie entsteht als eine im dreidimensionalen Raum nicht ralisierbare Lösung eines Verklebungsproblems.



H. Scherbel war dabei, eine Doktorarbeit zu verfassen, welche den sogenannten Nabelpunkten gewidmet war - Objekten, die zunächst nichts mit Aufblasungen zu tun haben. Doch zeigte es sich zu unserer Überraschung, dass zwischen den speziellen Aufblasungen, die wir darzustellen versuchten und den Nabelpunkten eben doch ein innerer Zusammenhang besteht. Die Zukunft wird zeigen, ob dieser Zusammenhang zum Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen wird.

Warum habe ich diese ganze lange und komplizierte Geschichte überhaupt erzählt? Ich wollte Ihnen damit an einem erlebten Beispiel zeigen, wie sehr die Arbeit des forschenden Mathematikers - und wohl jedes Wissenschafters - verwoben ist mit menschlichen Beziehungen. Dabei ist diese Geschichte kein seltener Sonderfall, denn beinahe um jeden Gegenstand der Forschung rankt sich ein derart einmaliges und vielgestaltiges Netz von mitmenschlichen Kontakten. Die Forschungsarbeit schafft andauernd solche Kontakte und erhält umgekehrt durch diese Kontakte immer wieder neue Impulse, welche oft in eine völlig unerwartete Richtung weisen.

Für den Mathematiker tritt so zu den rein intellektuellen Abenteuern, die er mit seinen Denkmodellen erlebt, ein neues, anders geartetes hinzu: das Abenteuer der geistigen Begegnung mit anderen Menschen. Er erlebt mehr und mehr, dass diese Begegnung zu einem wesentlichen Teil seiner Tätigkeit wird, zu einer Quelle von Anregungen, die seine Arbeit beflügeln oder sie in neue Richtungen lenken, aber auch zum Anlass zur Auseinandersetzung mit den eigenen fachlichen und charakterlichen Mängeln. Hatte seine Entscheidung für eine Tätigkeit in der abstrakten Welt der Denkmodelle ursprünglich vielleicht auch etwas von einer Flucht aus der Wirklichkeit an sich, so holt ihn auf diese Weise das wirkliche Leben wieder ein.

Was hier in bezug auf die Forschung an einem Beispiel dargelegt wurde, gilt natürlich besonders auch für die Lehrtätigkeit, denn diese ist ja direkt auf andere Menschen bezogen. Für die Mathematik ist es allerdings typisch, dass die Lehrtätigkeit - zumindest in einem erweiterten Sinne - mit der Forschung in einer Weise verknüpft ist, wie dies bei keiner anderen exakten Wissenschaft der Fall ist. Da der Mathematiker bei seiner Tätigkeit nur das gelten lässt, was logisch beweisbar ist, genügt es ihm nicht, nur das Endergebnis einer Untersuchung zu kennen. Mindestens so wichtig wie ein Resultat ist ihm dessen Beweis, der logisch korrekt, also im Prinzip jedem Menschen nachvollziehbar sein muss. Die Mathematik ist so - wie es Jakob Bernoulli aussprach - "die Kunst des Beweisens". Weil sich ein Beweis aber grundsätzlich immer an ein - vielleicht imaginäres - Gegenüber richtet, ist das Prinzip des Dialogs bereits von Grund auf in der Mathematik verankert. Durch dieses Prinzip, ist "das Belehren" eines - vielleicht nicht real vorhandenen - Gegenübers eine notwendige Denkhaltung bei der Beschäftigung mit der Mathematik. So ist die Tätigkeit des Mathematikers im Grunde genommen in einem gewissen Sinne auch immer Lehrtätigkeit.

Insbesondere ist so das "dialogische Prinzip" bereits im Grundanspruch der Mathematik enthalten, als eine Art Anker, der den Mathematiker davor bewahrt sich gänzlich in der Welt der Denkmodelle zu verlieren. Die Begeisterung, die schon erwähnte "Liebe zur Sache Mathematik", wird nämlich früher oder später das Mitteilungsbedürfnis wecken, und das "dialogische Prinzip" zu dem führen, worauf es angelegt ist: zum wirklichen Dialog, zur Hinwendung an ein real vorhandenes menschliches Gegenüber.

Erst jetzt kann die Tätigkeit des Mathematikers für ihn und andere wirklich fruchtbar werden und auch zum Anlass, persönlich zu reifen. Jetzt kann er im Wettstreit mit andern erfahren, wo seine ganz persönlichen Begabungen liegen - und natürlich auch seine Schwächen. Dies gibt ihm die Möglichkeit zu lernen, seine ihm eigenen Fähigkeiten in die Arbeit einzubringen, und so in seinem Gebiet etwas beizutragen, das unverwechselbar das Zeichen seiner Handschrift trägt. Er kann aber auch - etwa in der Zusammenarbeit mit andern - lernen, Fehler zu vermeiden, die sich aus seinen persönlichen Mängeln ergeben.

Zunächst hat er vielleicht dabei den Eindruck, die menschlichen Begegnungen, zu die ihn seine Tätigkeit führt, würden sich als blosses Beiwerk um das solide Gebäude der wissenschaftlichen Resultate ranken. Doch wird ihm vermutlich dieses Gebäude im Laufe der Zeit weniger solide erscheinen, als er ursprünglich glaubte. Er wird nämlich feststellen, dass seine Resultate meist sehr bald durch die Beiträge anderer relativiert werden. Vielleicht gehört er auch - so wie ich - zu jenen, die im nachhinein immer wieder Mängel und Unvollständiges in den eigenen Arbeiten entdecken müssen. Er wird so nach und nach erkennen, dass meist nicht die Resultate an sich das Wichtige sind, sondern das, was sie anregen. Rückblickend stellt er deshalb vielleicht fest, dass die menschlichen Beziehungen, welche um ein wissenschaftliches Ergebnis entstanden sind, das sind, was von wirklicher Tragkraft ist. Mit Erstaunen muss er sich so immer wieder eingestehen, dass die menschlichen Begegnungen, zu die ihn seine Arbeit führte, wichtiger und prägender waren als die Arbeit selbst.

So führt ihn die "Liebe zur Sache Mathematik" schliesslich wieder zurück zur menschlichen Zuneigung. War seine ursprüngliche Liebe zur Mathematik vielleicht mehr auf die Begeisterung für die Sache an sich gegründet, so erhält sie jetzt eine neue Dimension: die des Dienens. Es ist jetzt weniger das"Mitteilungsbedürfnis des Verliebten", das ihn dazu drängt, über Mathematik zu sprechen, als das Bewusstsein, eine andern Menschen zugewandte und deshalb sinnvolle Tätigkeit auszuüben.

So führt die Beschäftigung mit der Mathematik zu einer fundamentalen Erfahrung: zur Erfahrung, dass die Liebe zu einer Sache in uns immer danach drängt, sich einem Gegenüber, einer anderen Person zuzuwenden. So erlebt der Mathematiker mit Erstaunen, dass die Liebe zur Sache und die mitmenschliche Zuneigung mehr und mehr eins werden, dass der Erkenntnisdrang aufgeht in der Liebe. Er beginnt wahrzunehmen, dass Liebe und Erkenntnis den gleichen Ursprung haben, und dass es die Liebe ist, die unsere Werke lebendig macht. Wie jede mit Hingabe betriebene Suche nach Erkenntnis führt so auch die Tätigkeit des Mathematikers letztlich hin zum Urquell aller Erkenntnis und aller Liebe.

Zu Ihm, von dem alle Liebe und Weisheit ausgehen und zu dem sie wieder zurückführen. Zu Ihm, der in unser Herz die tiefe Sehnsucht danach gelegt hat, "dereinst durch und durch zu erkennen" - dann, wenn wir Ihn in seiner unermesslichen Liebe und Herrlichkeit "von Angesicht zu Angesicht" schauen dürfen.

Bibliographie

Neues Testament, Erster Brief an die Korinther, Kap. 13, 1-13.

Brandenberg, M.: Aufblasungen affiner Varietäten; Diplomarbeit, Universität Zürich, WS 91/92.

Brodmann, M.: A Macaulayfication of Unmixed Domains, Journal of Algebra; Vol. 44, 1977, pg. 221-234

___________: Kohomologische Eigenschaften von Aufblasungen an lokal vollständigen Durchschnitten, Habilitationsschrift; Universität Münster, 1980

___________: Two Types of Birational Models, Commentarii Mathematici Helvetici; Vol. 58, 198, pg. 388-415

___________: A few Remarks on Blowing-Up and Connectedness; Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 370, 1986, S. 52-60

___________: Cohomology of Standard Blowing-Up, Journal of Algebra; Vol. 143, 1991, pg. 401-435

___________: Typical Sheaves of Generalized Cohen-Macaulay-Modules; Manuscripta Mathematica, Vol. 76, 1992, pg. 181-192

___________: Mathematik - zwischen Handwerk, Kunst und Philosophie; Perspektiven (Zeitschrift zur Studien- und Berufspraxis) Nr. 4, 1989, pg. 10-13

___________: Vom Möbius-Band zur Hilbert-Funktion, Dokumentation zu einem Projekt an der Nationalen Forschungsausstellung Heureka. 1991, 58 pg.

___________: Vom Gipsmodell zum Computerbild; Preprint, Universität Zürich, 1992, 21 pg.

Faltings, G.: Über Macaulayfizierung; Mathematische Annalen, Vol. 238, 1978, pg. 175-192

Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica I; Monatshefte für Mathematik und Physik, Vol. 38, 1931, S. 173-198

Goto, S./Shimoda, Y.: On Rees-Algebras over Buchsbaum-Rings; Journal of Mathematics of the Kyoto University, Vol. 20, 1980, pg. 691-708

Klein, F.: Vorlesungen über höhere Geometrie, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; Band 22, Springer-Verlag, Berlin, 1926

Stückrad, J./Vogel, W.: Buchsbaum-Rings and Applications; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986

M. Brodmann
Mathematisches Institut
der Universität Zürich