ALGEBRAISCHE GEOMETRIE – EINE EINFÜHRUNG

Verbesserungen, Kommentare und Ergänzungen zum Lehrbuch

Institut für Mathematik
Universität Zürich

Markus Brodmann, Hans Keller

Vorwort

Dies ist eine Sammlung von Korrekturen, Kommentaren und Ergänzungen zum Lehrbuch:

M. Brodmann: *Algebraische Geometrie – Eine Einführung,* Basler Lehrbücher, a Series of Advanved Textbooks in Mathematics, Volume 1, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1989, ISBN 3-7643-1779-5.

Der Grundstein der vorliegenden Sammlung wurde bereits in den ersten Jahren nach dem Erscheinen des Buches gelegt, mit der Idee, diese für eine allfällige revidierte Zweitauflage zu verwenden. Zu dieser Zweitauflage kam es dann aber nicht mehr, da die geringe Nachfrage nach einem Deutsch-sprachigen Lehrbuch in Algebraischer Geometrie eine Neuauflage nicht zu rechtfertigen schien. Deshalb wurde die begonnene Zusammenstellung von Korrekturen, Kommentaren und Ergänzungen ab dem Frühjahr 1997 nicht weitergeführt.

Anderseits zeigte sich, dass das Buch in der ersten Auflage – auch im Nachdruck – bis jetzt doch stetigen Absatz fand und auf eine interessierte Leserschaft stiess. Deshalb haben wir beschlossen, die Zusammenstellung der gesammelten Verbesserungen, Kommentare und Ergänzungen nun zugänglich zu machen. Dies soll vor allem der interessierten Leserschaft bei der Lektüre entgegenkommen und helfen, gewisse Mängel in der Originaldarstellung zu beheben.

Die vorliegende Zusammenstellung soll laufend erweitert werden. Deshalb bitten wir auch die Leserschaft des Buches um ihre Vorschläge für weitere Korrekturen, Kommentare und Ergänzungen.

Zürich, 3. April 2017

Markus Brodmann, Hans Keller.

I. Affine Hyperflächen

1. Algebraische Mengen

Seite 11

Zeile 19: Dem Bereich $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

2. Elementare Eigenschaften von Polynomen

Seite 16

Zeile 5:

(iii) $\mathrm{Grad}(f) \geq |\sigma| \Rightarrow \mathrm{Grad}\big(\frac{\partial^{|\sigma|} f}{\partial \mathbf{z}^{\sigma}}\big) \leq \mathrm{Grad}(f) - |\sigma|$.

Seite 24

Zeilen 15 und 16: ... die nach q strebt.

3. Vielfachheit und Singularitäten

Seite 29

Zeilen -5 und -2: τ_r

Seite 30

Zeilen 2 und 3: ... hat genau eine Lösung $\rho(p)^2$ im Intervall $]0, r^2[$.

Seite 31

Zeile 1: ... der Kreis $|z| = r' := (\rho_r)^{1/3}$ ist.
Zeile 3: ... Kreisscheibe $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r'\}$ und ...
Zeile 6: ... Abbildung $\tau : \mathrm{B}_r \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Seite 34

in der Figur: $\varepsilon = \frac{4\delta^3}{27}$

4. Tangentialkegel und Grad

Seite 41

Zeile 5: ... denselben Wert annimmt. Man kann diese Einsicht auch ein wenig anders erhalten, indem man zunächst annimmt, es sei $p = (0, 0, \ldots, 0)$, was natürlich ohne Einschränkung erlaubt ist. Wählt man dann $q, q' \in L \setminus \{0\}$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ derart, dass $q = \lambda q'$. Für jedes homogene Polynom $h \neq 0$ vom Grad d gilt dann $h(q') = \lambda^d h(q)$, und daraus folgt wieder das Gewünschte.
Zeile 19: Nach (2.12) gilt $\mu_q(g) = \mu_q(f) + \mu_q(g) \ldots$
Zeile 20: $\ldots \mu_q(g^{(p)}) \geq \mu_q(f^{(p)}) = \mu_L(f^{(p)})$.

II. Affine Varietäten

5. Der Polynomring

Seite 56

Zeile -2: (vi) Kern$(\varphi) = \ldots$
Nach Zeile -1 einfügen: Ist $I = (\mathcal{M}) \quad (\mathcal{M} \subseteq A)$, so ist $IB = \big(\varphi(\mathcal{M})$

Seite 57

Nach Zeile 2 einfügen: Ist φ surjektiv, so ist $IB = \varphi(I)$.

Seite 59

Zeile 1: ... die binomische Formel gilt, sieht man leicht, dass aus $a^m, b^n \in I, \quad (a, b \in A, m, n \in \mathbb{N})$ folgt $(a+b)^{m+n} \in I$. Deshalb ist $\sqrt{I}$...
Zeile 2: Sofort sieht man (für (ii) beachte man $A = I \Leftrightarrow 1 \in I$):
Zeile 16: "Leicht prüft man auch nach" ersetzen durch "Es gilt auch":
Nach Zeile 18 einfügen: Die Aussage (a) ist leicht nachzuprüfen. Die Aussage (b) wollen wir beweisen. Sei als $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

Seite 60

Nach Zeile -1 einfügen: Ist $X = V(\mathcal{M})$ mit $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ so gilt $\mathcal{M} \subseteq I(X)$. Aus (ii) folgt, dass $I(X)$ die (eindeutig bestimmte) maximale Untermenge $\mathcal{M}$ von $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ ist, für welche gilt $X = V(\mathcal{M})$.

Seite 62

Nach Zeile 23 einfügen: Ein Element $a \in A$ nennt man *nilpotent* wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass $a^n = 0$. Gleichbedeutend ist, dass $a \in \sqrt{\{0\}}$. Man sagt, der Ring A sei *reduziert*, wenn er ausser dem 0-Element kein nilpotentes Element besitzt. Gleichbedeutend ist, dass das Ideal $\{0\}$ perfekt ist. Weil Primideale perfekt sind, sind Integritätsbereiche reduziert.

Seite 64

Zeile 4: *... ein Primideal (resp. ein perfektes Ideal) ...*
Zeile 5: *... ein Primideal (resp. ein perfektes Ideal) von ...*
Zeile 10: ... sämtliche Koeffizienten zu $\mathfrak{p}$ gehören. Sei nun zunächst $\mathfrak{p}$ ein

Primideal. Insbesondere ist dann ...
nach Zeile 17 anfügen: Sei nun $\mathfrak{p}$ ein perfektes Ideal. Sei $f = \sum a_i t^i \in A[t]$ und sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $f^n \in \mathfrak{p}A[t]$. Wir müssen zeigen, dass $f \in \mathfrak{p}A[t]$. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann gibt es minimales $i \geq 0$ derart, dass $a_i \notin \mathfrak{p}$. Weil $\mathfrak{p}$ perfekt ist, folgt $a_i^n \notin \mathfrak{p}$. Schreiben wir $f^n = \sum c_j t^j$, so gilt zunächst $c_j \in \mathfrak{p}$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Wir können mit $j = in$ auch schreiben

$$c_{in} = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}_0^n : j_1+\cdots+j_n=in} a_{j_1}\cdots a_{j_n} = a_i^n + b, \text{ mit}$$

$$b := \sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}_0^n\setminus\{(i,\ldots,i)\} : j_1+\cdots+j_n=in} a_{j_1}\cdots a_{j_n}.$$

Nun ist aber in jedem der Summanden von b ein Faktor a_{j_k} mit $j_k < i$ zu finden – also, ein Faktor, der zu $\mathfrak{p}$ gehört. Es folgt $b \in \mathfrak{p}$, also der Widerspruch, dass $c_i n = a_i^n + b \notin \mathfrak{p}$. Dies beweist, dass $f \in \mathfrak{p}A[t]$.
Zeile 17: *... Sei A integer (resp. reduziert) und ...*
Zeile 18: $A[t_1, \ldots, t_n]$ *integer (resp. reduziert).*
Zeile 19: ... mit $\mathfrak{p} = \{0\}$ und beachte (5.19) A).

Seite 65

Zeile 14: ... (und wegen $f \notin A[t]^*$) ...

6. Zariski-Topologie und Koordinatenringe

Seite 67

Nach Zeile 10 wie folgt weiterfahren: (6.1)' **Bemerkung** A) Lemma (6.1) besagt insbesondere... gerade die algebraischen sind.
B) Insbesondere gilt also folgende Aussage, in welcher die behauptete Gleichheit von Verschwindungsidealen leicht nachzuprüfen ist:

(i) *Sind $X_1, \ldots, X_r \subseteq \mathbb{C}^n$ $(r \in \mathbb{N})$ algebraische Mengen, so ist auch $X_1 \cup \cdots \cup X_r \subseteq \mathbb{C}^n$ eine algebraische Menge und es gilt $I(X_1 \cup \cdots \cup X_r) = I(X_1) \cap \cdots \cap I(X_r)$.*

Seite 69

Nach Zeile 15 anfügen: C) Leicht prüft man auch folgendes nach: Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine surjektive stetige Abbildung von topologischen Räumen, und ist der Raum X noethersch, so ist auch der Raum Y noethersch.
Zeile 24: *... mit X überein; d.h. das Innere jeder abgeschlossenen Teilmenge $Y \subsetneq X$ ist leer).*

Zeile 29: *von* $\mathbb{C}^n$*, das heisst genau diejenigen mit* $I(X) \in \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n])$ (s. (5.16) B) (v)).

Seite 70

Zeile 19: ... besitzen, hat keine minimalen Mitglieder. Ist nämlich $Z \in \mathcal{M}$ minimal, so besitzt Z keine Zerlegung in irreduzible Komponenten. Insbesondere ist also Z nicht irreduzibel. Das heisst aber, dass wir schreiben können $Z = Z_1 \cup Z_2$, wo $Z_i \subseteq X$ abgeschlossen sind und $Z_i \subsetneq Z \quad (i = 1, 2)$. Insbesondere gilt dann $Z_i \notin \mathcal{M}$, also besitzt Z_i eine Zerlegung $Z_i = Z_{i,1} \cup \dots \cup Z_{i,r_i}$ in irreduzible Komponenten ($r_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$). Dann ist aber $Z = Z_{1,1} \cup \dots \cup Z_{1,r_1} \cup Z_{2,1} \cup \dots \cup Z_{2,r_2}$ eine Zerlegung von Z in irreduzible Komponenten, und wir erhalten den Widerspruch, dass $Z \notin \mathcal{M}$. Dies zeigt, dass $\mathcal{M}$ in der Tat keine minimalen Mitglieder besitzt. Weil X ein noetherscher Raum ist, folgt $\mathcal{M} = \emptyset$, und die Existenz...
Zeile 25: *... maximalen irreduziblen (in* $\mathbb{A}^n$*) lokal...*
Nach Zeile -8 einfügen: (6.11)' **Bemerkung:** Das vorangehende Resultat zeigt über (5.16)B) (v), (6.1)'B)(i), und (5.17) insbesondere:
(i) *Ein perfektes Ideal* $I \subseteq \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ *ist der Durchschnitt seiner (minimalen) Primoberideale.*

Seite 72

Nach Zeile 11 einfügen: F) Sind $X_1, \dots, X_r \subseteq \mathbb{A}^n$ endlich viele disjunkte nicht-leere abgeschlossenen Mengen, so besteht ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren

(vi) $\mathcal{O}(X_1 \dot\cup \cdots \dot\cup X_r) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}(X_1) \times \cdots \times \mathcal{O}(X_r), \quad \big(f \mapsto f \restriction X_1, \dots (f \restriction, X_r)\big)$.

Ist $p \in \mathbb{A}^n$, so besteht offenbar der Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren

(vii) $\mathcal{O}(\{p\}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}, \quad (f \mapsto f(p))$.

Inbesondere können wir also sagen: Sind $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{A}^n$ endlich viele paarweise verschiedene Punkte, so besteht ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren

(iix) $\mathcal{O}\{p_1, \dots, p_r\}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^r, \quad \big(f \mapsto (f(p_1), \dots, f(p_r))\big)$.

Zeile -2: ... ist $U_j \cap\ U_k \cap X_i \subseteq Z$, und ...
Zeile -1: $X_i = \overline{U_j \cap U_k \cap X_k} \subseteq Z$, also $X \subseteq Z$. Dies beweist (*).

Seite 73

Nach Zeile -5 einfügen: Leicht sieht man auch folgendes:

(ii) *Ist* $\varphi : A \longrightarrow B$ *ein surjektiver Homomorphismus von Ringen, so wird durch* $J \mapsto \varphi(J)$ *eine 1-1-Beziehung zwischen den* Kern(φ) *umfassenden Idealen* J *von* A *und den Idealen von* B *definiert. Dabei entsprechen einander die perfekten (resp. primen, resp. maximalen) Ideale.*

Zeile -4: Anwendung mit $J = \text{Kern}(\varphi)$ ergibt... :
Zeile -3: (iii) *Ist* $\varphi : A \longrightarrow B$ *ein...*

Seite 76

Zeile 11: (i) (a) $V_X(\mathcal{M}) = V_X\big((\mathcal{M})\big) = V_X(\sqrt{(\mathcal{M})}), (\emptyset \neq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}(X))$.
Zeile 17 - 21 ersetzen durch: A) Wir erinnern daran, dass ein Ring A *reduziert* heisst, wenn das Ideal $\{0\} \subseteq A$ perfekt ist. Wir erinnern auch daran, dass Integritätsbereiche reduziert sind (s. (5.19) A)

7. Morphismen

Seite 82

Nach Zeile 4 einfügen: Es genügt natürlich zu zeigen, dass die Gleichheit (iv) für die eingeschränkten Koordinatenfunktionen $g = w_i \upharpoonright Y$ gilt.

Seite 88

Zeile 2: $X = V(1 - wf(z)) \subseteq \mathbb{A}^2$ von ...

Seite 90

Zeile 10 ergänzen zu: ..., so ist es auch $S^{-1}\varphi$. Dabei gilt $\text{Kern}(S^{-1}\varphi) = S^{-1}\text{Kern}(\eta_T \circ \varphi) = S^{-1}\varphi^{-1}(\text{Kern}(\eta_T) = S^{-1}\varphi^{-1}(\{b \in B \mid \exists t \in T : tb = 0\})$.
Zeile 15: (c) ... $\Leftrightarrow S \cap I \neq \emptyset \Leftrightarrow S \cap \sqrt{I} \neq \emptyset$...
Nach Zeile 19 einfügen: (Zum Nachweis von (b) schreibe man ein beliebiges Element im rechtsstehenden Durchschnitt der behaupteten Gleichung mit einen gemeinsamen Nenner.)
Zeile 23 ergänzen zu: ... auf (vii)(d) – und weil nach (vii)(b) aus $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$

folgt $\eta_S^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ – schliesst man jetzt, dass gilt:

Seite 91

Nach Zeile -8 einfügen: G) Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ und sei $S \subseteq A \setminus \mathfrak{p}$ eine Nennermenge. Sei $\varphi : A \longrightarrow B := A/\mathfrak{p}$ die Restklassenabbildung und sei $T := \varphi(S)$. Dann ist auch $T \subseteq B$ eine Nennermenge und gemäss C) existiert der induzierte Homomorphismus $\psi := S^{-1}\varphi : S^{-1}A \longrightarrow T^{-1}B$. Weil φ surjektiv ist, folgt wegen $T = \varphi(S) = S/\mathfrak{p} \subseteq A/\mathfrak{p} = B$, dass ψ surjektiv ist. weil B integer ist, ist η_T injektiv und so folgt nach dem in C) Bemerkten dass $\mathrm{Kern}(\psi) = \mathrm{Kern}(S^{-1}\varphi) = S^{-1}\mathrm{Kern}(\eta_T \circ \varphi) = S^{-1}\mathrm{Kern}(\varphi) = S^{-1}\mathfrak{p}$. Der Homomorphiesatz (6.19)C)(v) liefert also

(xvii) $\quad S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \cong T^{-1}(A/\mathfrak{p}) = (S/\mathfrak{p})^{-1}(A/\mathfrak{p}).$

Zeile 20 ergänzen: ... *integer und* $\mathrm{Quot}(S^{-1}A) = \mathrm{Quot}(A)$.

Seite 93

Zeile 1: *Beweis:* (S. Beispiel (7.11)E)). Wir ...
Zeile 9: $(z_1, \dots, z_n) \mapsto \big(z_1, \dots z_n, \frac{1}{\widetilde{f}(z_1,\dots,z_n)}\big)$.
Zeilen 14 und 15: $\overline{p}^*$ (zwei mal).
Zeile 19: ... *endlich vieler offener (elementarer) affiner ...*

8. Lokale Ringe und Produkte

Seite 97

Nach Zeile -1 anfügen: (c) $\quad \mathcal{O}_{X,p} = \mathbb{C} + \mathfrak{m}_{X,p}$.

Seite 98

Zeile 1: ... zwischen quasiaffinen Varietäten ...
Zeile 8: ... *zwischen quasiaffinen Varietäten ...*
Zeile 12: *d.h. es gilt* $(g \circ f)_p^* = f_p^* \circ g_{f(p)}^*$.

Seite 101

Zeilen 24 - 30 streichen: "Wie üblich... ... es sei $k_i \in \mathcal{O}(X)$."
Zeilen 31/32: Sei $U \subseteq X$ eine affine offene Umgebung von p, welche in

der Vereinigung aller irreduzieblen Komponenten von X liegt, welche durch p laufen. Dann ist...
Zeile -3: "Wegen $\varphi((h_i)_q) = (k_i)_p = ... = \gamma(\mathcal{O}(U)))$ gilt" ersetzen durch: "$\mathcal{O}(Y)$ ist über $\mathbb{C}$ endlich erzeugt. Das Selbe gilt deshalb für $\varphi\big(\tau(\mathcal{O}(Y))\big) \subseteq \mathcal{O}_{X,p}$. Die endlich vielen Erzeugenden der $\mathbb{C}$-Algebra $\varphi\big(\tau(\mathcal{O}(Y))\big)$ sind also Keime in p von regulären Funktionen, die auf einer gemeinsamen offenen Umgebung von p definiert sind. Nach Einschränken von U folgt deshalb"

Seite 102

Zeile 2: ...$\sigma \circ \varphi \circ \tau(I_Y(q)) = \gamma^{-1}\big(\varphi \circ \tau(I_Y(q))\big) \subseteq$ ...
Zeile 3: .... Nach (7.9)(i) folgt $\{f(p)\} = \overline{\{f(p)\}} = ...$
Zeilen 5 - 8 ersetzen durch: Aus $\gamma \circ f^* = \varphi \circ \tau$ folgt mit Hilfe von (8.5) und wegen der Eindeutgkeit des in (7.12)C) erscheinenden Homomorphismus ψ, dass $f_p^* = \varphi$.
Zeile 10: ..., also $\widetilde{f^*} = \sigma \circ \varphi \circ \gamma$.

Seite 103

Zeile -2: (c) $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{m+n}$ (als Mengen, nicht als topologische Räume!)

Seite 104

Zeile 7: (ii)(a) $V_{\mathbb{A}^m}(\mathcal{M}) \times ...$
Nach Zeile 7 einfügen: $U_{\mathbb{A}^m}(f) \times U_{\mathbb{A}^n}(g) = U_{\mathbb{A}^{m+n}}(fg), \quad \big(f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^m), g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)\big)$.
Zeile 11: (B) X, Y *offen (und elementar)* $\Rightarrow X \times Y$ *offen (und elementar) in* $\mathbb{A}^{m+n}$.
Zeile -6: *nicht die Produkttopologie von* X *und* Y (s. (8.18)(v)).
Nach Zeile -6 einfügen: E) Sei $X \subseteq \mathbb{A}^m$ abgeschlossen und $\neq \emptyset$ und es gelten die Bezeichnungen von B). Nach B)(iii)(a) ist dann $X \times \mathbb{A}^n = V_{\mathbb{A}^{m+n}}\big(I_{\mathbb{A}^m}(X) \cup I_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n)\big) = V_{\mathbb{A}^{m+n}}\big(I_{\mathbb{A}^m}(X)\mathcal{O}(\mathbb{A}^{m+n}\big)$. Der Ring $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{m+n})/I_{\mathbb{A}^m}(X)\mathcal{O}(\mathbb{A}^{m+n}) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^m)[w_1, \ldots, w_n]/I_{\mathbb{A}^n}(X)\mathcal{O}(\mathbb{A}^m)[w_1, \ldots, w_n] \cong \big[\mathcal{O}(\mathbb{A}^m)/I_{\mathbb{A}^n}(X)\big][w_1, \ldots, w_n] \cong \mathcal{O}(X)[w_1, \ldots, w_n]$ ist nach (6.18) und (5.21)' reduziert. Damit ist gezeigt

Seite 107

Zeile 13: *... U und V lokal abgeschlossene affine..*
Zeile 14: *Dann ist die (in X lokal abeschlossene) Menge* $U \cap V$...

Seite 108

Zeile 13: der Produkttopologie. Man zeige insbesondere, dass die Zariski-Toplogie auf $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ *nicht* mit der Produkttopologie übereinstimmt.

Zeile 15: dass $\mathcal{O}(X)_{I_X(p)} \cong \mathcal{O}(U)_{I_U(p)}$.

III. Endliche Morphismen und Dimension

9. Ganze Erweiterungen

Seite 110

Zeile 18: ... also $f(c_1, c_2) = \big(c_1, c_1c_2, c_2(c_2-1), c_2^2(c_2-1)\big), \big((c_1, c_2) \in \mathbb{A}^2.\big)$

Seite 112

Zeile 4: ... Operation $A \times M \longrightarrow M$, zusammen mit einem Element $0 \in M$, so ...

Seite 113

Nach Zeile 7 einfügen: Ist $P \subseteq M$ ein weiterer Untermodul und ist $\overline{\;\cdot\;} : M \longrightarrow M/N$ die Resklassenabbildung, so gilt $\overline{P} = P/N = (P+N)/N$, $\overline{\;\cdot\;}^{-1}(\overline{P}) = P + N$ und es besteht ein Isomorphismus von A-Moduln

$$\overline{P} = P/N = (P+N)/N \xrightarrow{\cong} P/(N \cap P), \text{ gegeben durch}$$
$$\big(p/N = (p+n)/N \mapsto p/(N \cap P), n \in N, p \in P\big).$$

Zeilen 8 - 9 wie folgt modifizieren und ergänzen: *Homomorphiesatz*, der folgendes besagt: Ist $\varphi : M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus von A-Moduln, so beseht ein Isomorphismus von A-Moduln

$$\overline{\varphi} : M/\mathrm{Kern}(\varphi) \xrightarrow{\cong} \varphi(M), \quad \big(m/\mathrm{Kern}(\varphi) \mapsto \varphi(m), \forall m \in M\big).$$

Seite 117

Nach Zeile 3 einfügen: (iv) *Ist B eine ganze Erweiterung von A, so gilt $A^* = B^* \cap A$.*
Nach Zeile 23 einfügen: (iv): Die Inklusion "$\subseteq$" ist klar. Sei also $a \in B^* \cap A$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $b \in B$ so, dass $ab = 1$. Wir müssen zeigen, dass $b \in A$. Es besteht eine ganze Gleichung $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad (n \in \mathbb{N}, a_0, \cdots, a_{n-1} \in A)$. Es folgt $1 + a(a_{n-1} + aa_{n-2} + \cdots + a^{n-1}a_0) = 1 + aa_{n-1} + a^2a_{n-2} + \cdots + a^na_0 = a^nb^n + aa_{n-1}a^{n-1}b^{n-1} + a^2a_{n-2}a^{n-2}b^{n-2} + \cdots + a^na_0 = a^n(b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots a_0) = 0$, also $a(-a_{n-1} - aa_{n-2} - \cdots - a^{n-1}a_0) = 1$. Es folgt $b = -a_{n-1} - aa_{n-2} - \cdots - a^{n-1}a_0 \in A$.

Seite 118

Zeile 10: $M = (1-a)^{-1}(1-a)M = (1-a)^{-1}\{0\} = \{0\}$. Dies

Seite 119

Zeile 7: ... folgt jetzt wieder $\frac{x^n + a_{n-1}x_{n-1} + sa_{n-2}x^{n-2} + \cdots + s^{n-1}a_0}{s^n} = 0$.
Zeile 8: ... Ein $t \in S$ mit $t^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + sa_{n-2}x^{n-2} + \cdots s^{n-1}a_0) = 0$.
Zeile 9: $(tx)^n + ta_{n-1}(tx)^{n-1} + t^2 sa_{n-2}(tx)^{n-2} + \cdots t^n s^{n-1}a_0 = 0$.
Nach Zeile 10 einfügen: (9.12)' **Satz:** *Sei A ein normaler Ring und sei $S \subsetneq A$ eine Nennermenge. Dann ist $S^{-1}A$ normal.*
Beweis: Klar aus (9.12)(ii)(a) wegen $\mathrm{Quot}S^{-1}(A) = \mathrm{Quot}(A)$ (s. (7.12) F)(xv)).
Zeile -6: $S^{-1}A = A_{\mathfrak{p}}$.
Nach Zeile -1 einfügen: (9.14)': **Korollar:** *Seien $A \subseteq B$ wie in (9.14), sei $I \subseteq B$ ein Ideal. Dann gilt:*
(i) *Ist $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ derart, dass $I \subseteq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \cap A$ ein minimales Primoberideal von $I \cap A$ ist, so ist $\mathfrak{q}$ ein minimales Primoberideal von I.*
(ii) *Ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal von $I \cap A$, so gibt es ein $\mathfrak{s} \in \mathrm{Spec}(A)$, das minimales Primoberideal von I ist so, dass $\mathfrak{s} \cap A = \mathfrak{p}$.*
(iii) $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(B) \Leftrightarrow \mathfrak{m} \cap A \in \mathrm{Max}(A)$.

Seite 120

Nach Zeile 16 einfügen: Zeilen 22 - 24. **Zeilen 22 - 24:** streichen.

Seite 124

Zeile -6 ergänzen zu: *Kern $fA[t]$. Gilt also $g(x) = 0$ für ein $g \in A[t]$, so gibt es ein $h \in A[t]$ mit $g = fh$.*
Zeile -3: (9.3 folgt aus ...

Seite 126

Zeile 16: $x \in \bigcap_{j>r} \mathfrak{q}_j \setminus \mathfrak{q}_1$.
Zeilen 19 - 22: "Über jedem ... für ein $i \in \{1, \ldots, s\}$." ersetzen durch "Nach (9.14)' ist aber jedes solche $\mathfrak{r}$ von der Form $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_i \cap A[x]$, wo $i \in \{1, \ldots, s\}$ geeignet gewählt ist.
Zeile 23: ... gilt aber $ax \in A[x] \cap \mathfrak{q}_i = \mathfrak{r}$. Damit ist gezeigt, dass $ax \in \sqrt{\mathfrak{p}A[x]}$. Wir finden also ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $(ax)^m \in \mathfrak{p}A[x]$.
Zeile 24: $A[x]$ frei ist über der Basis $1, x, \ldots, x^{n-1}$.
Zeile 25: ... also schreiben $x^m = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$. mit eindeutig...
Zeile 26: ... . Wegen $x \notin \mathfrak{q}_1$ ist ...
Zeile 27: $j < n$. andrereseits ist $\sum_{i=0}^{n-1} a^m b_i x^i = a^m x^m \in \mathfrak{p}a[x] = \mathfrak{p} + \mathfrak{p}x + \mathfrak{p}x^2 + \cdots + \mathfrak{p}x^{n-1}$.
Nach Zeile 29 einfügen: (9.23)' **Korollar:** *Seien $A \subseteq B$ wie in (9.23) und*

sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ *und* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$. *Dann sind äquivalent:*
(i) $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.
(ii) $\mathfrak{q}$ *ist ein minimales Primoberideal von* $\mathfrak{p}B$.

Seite 129

Nach Zeile 21 anfügen: (9.27)' **Bemerkung:** Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein endlicher Morphismus zwischen quasiaffinen Varietäten. Dann gilt folgendes:
(i) *Ist* $Z \subseteq Y$ *irreduzibel und abgeschlossen, so gibt es eine irreduzibel Komponente* W *von* $f^{-1}(Z)$ *so, dass* $f(W) = Z$.
(ii) *Ist* $W \subseteq X$ *irreduzibel und abgeschlossen, und ist* $T \subseteq W$ *abgeschlossen mit* $f(T) = f(W)$, *so gilt* $T = W$.
Zum Nachweis kann man wie im Beweis von (9.27) annehmen, es seien X und Y affin. Dann schliesst man mit (9.13) und (9.14) aus (9.25). Die Einzelheiten seinen im Sinne einer Übungsaufgabe dem Leser überlassen.

Seite 130

Zeilen 25-30 streichen und ersetzen durch: (6) Sei $a \in \mathrm{NNT}(A) \setminus A^*$. Zeigen Sie mit Hilfe von (9.8) (iv), dass $\frac{1}{a} \in A_a$ nicht ganz ist über A.

10. Dimensionstheorie

Seite 132

Zeile -13: ... eine *Transzendenzbasis* von B über A, wenn es ...
Zeile -8: ... *algebraisch über* $A[x_1, \ldots, x_n]$, *aber* ...
Zeile -7: ... $A[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n], (k = 1, \ldots, n)$.

Seite 133

Nach Zeile 8 anfügen: (xi) *Seien* $A \subseteq B, C$ *Integritätsbereiche und sei* $\varphi : B \longrightarrow C$ *ein surjektiver Homomorphismus von Ringen mit* $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap A = \{0\}$. *Dann gilt* $\mathrm{trdeg}_A(C) \leq \mathrm{trdeg}_A(B)$.
Auf Zeile 24 zwischen "$\nu \in \mathcal{M}$." und "$N \in \mathbb{N}$" einfügen: Als erstes zeigen wir, dass es Elemente $t_1, \ldots, t_n \in A$ so gibt, dass A ganz ist über $K[t_1, \ldots, t_n]$. Wir nehmen zunächst an, es sei $f = cz_1^s + \sum_{j=0}^{s-1} g_j z_1^j$, wo $s \in \mathbb{N}, c \in K \setminus \{0\}$ und $g_j \in K[z_2, \ldots, z_n]$ für alle $j \in \{0, \ldots, s-1\}$. In diesem Fall setzen wir $t_1 = f$ und $t_i = z_i \quad (i = 2, \ldots, n)$. Dann erhalten wir die ganze Gleichung $z_1^s + \sum_{j=1}^{s-1} c^{-1} z_1^j + c^{-1}(g_0 - t_1) = 0$ von z_1 über

$K[t_1, \ldots, t_n] = K[t_1, z_2, \ldots, z_n]$. Also ist A ganz über $K[t_1, \ldots, t_n]$. Im allgemeinen Fall sei
Zeile -3: $\big(g_j \in K[t_2, \ldots, t_n]; j = 1, \ldots, \overline{\sigma} - 1, g_0 = \overline{g}_0 - t_1, \overline{g}_0 \in K[t_2, \ldots, t_n]\big)$. Multipliziert ...

Seite 134

Zeile 1: $K[t_1, \ldots, t_n]$. Damit sind die gesuchten Elemente $t_1, \ldots, t_n$ gefunden. Wegen...
Zeile 30: Wie im Fall $r = 1$ sieht ...

Seite 138

Zeile 11 wie folgt ergänzen: *Länge* $\dim(X)$. *Insbesondere gilt* $\dim_p(X) = \dim(X)$, *falls* X *irreduzibel ist.*

Seite 141

Zeilen 3 und 4: $\ldots = M'_{i+1} \cap (M'_i + M_{l-1})$ für alle $i > t$. Eine leichte Rechnung zeigt, dass der letzte Modul jeweils geschrieben werden kann als $M'_i + M'_{i+1} \cap M_{l-1}$. Es gilt also $M'_{i+1} = M'_i + M'_{i+1} \cap M_{l-1}$ für alle $i > t$. Wegen $M'_i \subsetneq M'_{i+1}$ folgt daraus $M'_i \cap M_{l-1} \subsetneq M'_{i+1} \cap M_{l-1}$ für alle $i > t$. Also ist
Zeile 20 ersetzen durch: D) Ist V ein Vektorraum über dem Körper K, so stehe $\dim_K(V)$ für die Vektorraum-Dimension von V über K.
Zeile 21 ergänzen: *Ist* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$, *so (ist* $A/\mathfrak{m}$ *ein Körper und es) gilt* $l_A(M/\mathfrak{m}M) = \ldots$
Zeile 23 ganz streichen

Seite 143

Neuer Beweis von Lemma (10.16): Zeilen 11 - 23 ersetzen durch:
Beweis: Ohne Einschränkung können wir annehmen, es sei $\mathfrak{p}_l = \mathfrak{q}$, indem wir andenfalls $\mathfrak{p}_l$ durch $\mathfrak{q}$ ersetzen. Ist $x \in \mathfrak{p}_0$, so können wir für $i = 0, \ldots, l-1$ jeweils setzen $\mathfrak{p}'_i = \mathfrak{p}_i$. Sei also $x \notin \mathfrak{p}_0$ und sei $k \in \{0, \ldots, l\}$ der grösste Index mit $x \notin \mathfrak{p}_k$. Wegen $\mathfrak{p}_l = \mathfrak{q}$ ist $k < l$. Nun ist $\mathfrak{p}_k + xA \subseteq \mathfrak{p}_{k+1}$. Wir wählen $\mathfrak{p}'_k$ als minimales Primoberideal von $\mathfrak{p}_k + xA$ in $\mathfrak{p}_{k+1}$, $\mathfrak{p}'_{k-1}$ als minimales Primoberideal von $\mathfrak{p}_{k-1} + xA \in \mathfrak{p}'_k$, und so fortfahrend $\mathfrak{p}'_i$ als minimales Primoberideal von $\mathfrak{p}_i + xA$ in $\mathfrak{p}'_{i+1}$ für alle $i = k, k-1, k-2, \ldots 1, 0$.
Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{p}'_i \subsetneq \mathfrak{p}'_{i+1}$ für alle $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann gilt $\mathfrak{p}'_i = \mathfrak{p}'_{i+1}$ für ein $i < k$. Dann ist aber $\mathfrak{p}'_i/\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}'_{i+1}/\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}_i)$ ein minimales Primoberideal des Hauptideales $xA/\mathfrak{p}_i$ von $A/\mathfrak{p}_i$. Weiter gilt im Ring $A/\mathfrak{p}_i$ die Beziehung $\{0\} \neq \mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}'_{i+1}/\mathfrak{p}_i$. Dies widerspricht dem Krull'schen Hauptideallemma (10.15). Also gilt in der

Tat $\mathfrak{p}'_i \subsetneq \mathfrak{p}'_{i+1}$ für alle $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Jetzt setze man $\mathfrak{p}'_j := \mathfrak{p}_{j+1}$ für $j = k+1, \dots, l-1$.

Seite 144

Zeile 6 wie folgt ergänzen: $\dots Z$. (Zur Definition der irreduziblen Kette s. (10.5)A)). Also:
Zeile 14 wie folgt ergänzen: (a)' *Ist X irreduzibel, so gilt sogar Gleichheit in (a).*
Zeile -3: $\operatorname{codim}_X(Z) = \operatorname{ht}\big(I_{X,p}(Z)\big), (p \in Z)$.

Seite 145

Zeile 16: ... und (10.18)(iii)(a)'.

Seite 149

Zeile 26: ... laufende Flächen Z_1, Z_2 mit $Z_1 \cap Z_2 = \{p\}$.

11. Topologische Eigenschaften von Morphismen

Seite 150

in der Figur: Den *"Whitney-Schirm"*, der sich unterhalb der z_1, z_2-Ebene befindet, um -1 längs der z_3-Achse verschieben (d.h. nach unten!).

Seite 152

Zeile 15: ... Nach (7.14) besteht mit $f_U := f \upharpoonright f^{-1}(U) : f^{-1}(U) \longrightarrow U$ das Diagramm:
Zeile 16 (im Diagramm): $\mathcal{O}(U) \xrightarrow{(f_U)^*} \mathcal{O}(f^{-1}(U))$
Zeile 17 (im Diagramm): $\mathcal{O}(Y)_h \xrightarrow{(f^*)_h} \mathcal{O}(X)_h$
Nach Zeile -1 einfügen: (11.4)' **Korollar:** *Ist $f : X \longrightarrow Y$ eim Morphismus zwischen quasiaffinen Varietäten, so gilt* $\dim\big(\overline{f(X)}\big) \leq \dim(X)$.

Seite 153

Zeile 3 ergänzen zu: *in* $\overline{f(X)}$. *Anders gesagt: Das Innere von* $f(X)$ *in* $\overline{f(X)}$ *ist dicht.*
Zeile 15: ... die Komponente X_i weglassen.
Nach Zeile 15 einfügen: Also ist $\overline{f(X_i)}$ nicht enthalten in $\bigcup_{j\neq i} \overline{f(X_j)}$, denn die Mengen $\overline{f(X_i)}$, $\quad(i = 1,\ldots,r)$ sind gerade die verschiedenen irreduziblen Komponenten von $\overline{f(X)}$.
Zeile 16: $W_i := \overline{f(X)} \setminus \bigcup_{j\neq i} \overline{f(X_j)} = \ldots$
Zeile 18 wie folgt modifizieren: $U_i \cap W_i$ ist zunächst offen und dicht in in $\overline{f(X_i)}$. weil $W_i \subseteq \overline{f(X_i)}$ offen ist in $\overline{f(X)}$, ist $U_i \cap W_i$ auch offen in $\overline{f(X)}$. Die Menge $U := \bigcup_{i=1}^{r}(U_i \cap W_i)$ hat dann

Seite 154

Nach Zeile 11 einfügen: (i) *Endliche Vereinigungen konstuierbarer Mengen sind wieder konstruiebar.*
Weil endliche Durchschnitte lokal abgeschlossener Mengen wieder lokal abgeschlossen sind, kann man zeigen, dass (Beweis als Aufgabe):
Zeile 12: (ii) *Endliche Durchschnitte sowie Komplemente ...*
Nach Zeile 13: einfügen: Als Übungsaufgabe schlagen wir vor zu zeigen: Ist X ein noetherscher toplogischer Raum und ist $Y \subseteq X$ eine konstruierbare, nicht-leere Menge, so ist das in $\overline{Y}$ gebildete Innere von Y dicht in Y.

Seite 155

Nach Zeile 19 einfügen: Wir halten fest:
(i)' *Sind* $x_1,\ldots,x_d \in \mathfrak{m}$, *so ist* $x_1,x_2,\ldots,x_d$ *genau dann ein Parametersystem von* A, *wenn* x_1 *ein Parameter von* A *ist und wenn die Restklassen* $x_2/x_1A,\ldots,x_d/x_1A \in \mathfrak{m}/x_1A$ *ein Parametersytem von* A/x_1 *bilden.*
Dies folgt leicht, weil ein Isomorphismus von Ringen $A/(x_1,x_2,\ldots,x_d) \cong (A/x_1A)/(x_2,\ldots,x_d)$ besteht.
(i)" *Es gibt ein Parametersystem* $x_1,\ldots,x_d$ *von* R.
Dies beweist man durch Induktion über d. Der Fall $d = 0$ ist klar. Sei also $d > 0$ und seien $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r$ die minimalen Primideale von A. Dann ist $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{m}$ für $i = 1,\ldots,r$. Nach (11.10) gibt es ein $x_1 \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$. Nach (10.23)(iv)' gilt $\dim(A/x_1A) = d-1$. Navch Induktion finden wir also Elemente $x_2/x_1A,\ldots,x_d/x_1A \in \mathfrak{m}/x_1A$, die ein Parametersystem von A/x_1A bilden. Nach (i)' ist dann $x_1,x_2,\ldots,x_d$ ein Parametersystem von A.
Zeile 20: B) Ein Element $x \in \mathfrak{m}$ nennen wir ...
Zeile 23: Wir halten weiter fest:
Zeile -6 ergänzen: $\dim(A/xA) = d-1 > 0$. Nach Induktion finden wir Elemente $x_2/xA,\ldots,x_d/xA \in \mathfrak{m}/xA$, die ein Parametersystem von A/xA bilden. Nach (A)(i)' ist dann $x,x_2,\ldots,x_d$ ein Parametersystem von A. Deshalb ist x ein Parameter von A.

auf Zeilen -6 bis -1 streichen: "Insbesondere ... . Wegen"

Seite 156

Zeilen 1 - 8 streichen

Seite 157

Zeile 17: $n := \dim(X) - \dim\big(\overline{f(X)}\big)$.
Zeile 18: *Dann ist $n \geq 0$ und es gilt:*
Nach Zeile 22 einfügen: Aus (11.4)' folgt zunächst, dass $n \geq 0$.

Seite 158

Zeile 11: *... (topologisch) abgeschlossen. ($f(X)$ muss in Y nicht abgeschlossen sein.)*
Zeile 15: *offen und dicht in Y.*
auf Zeile 16 einfügen: ... nach $\dim(X) = d$): Wegen $Y \setminus \overline{f(X)} \subseteq Y \setminus f(X) \subseteq F(f, r)$ können wir Y ersetzen durch $\overline{f(X)}$, also annehmen, es sei $Y = \overline{f(X)}$.
Zeile 17: ... offene Menge $U \neq \emptyset$ in Y mit der ...
Zeile 18: $\ldots q \in U$. Weil Y noethersch ist, ...
Nach Zeile 28 einfügen: Wir finden also offenen Mengen $U'_1, \ldots, U'_l$ in Y so, dass $U_i = U'_i \cap f(Z_i)$ für $i = 1, \ldots, l$. Damit gilt aber $\dim\big(Z_i \cap f^{-1}(s)\big) \leq r$ für alle $s \in U_i$ und alle $i \in \{1, \ldots, l\}$.
Zeile -3: $W := U'_1 \cap \cdots \cap U'_l \cap \big(Y \setminus \cup_{j>l} \overline{f(Z_j)}\big)$.
Zeile -2: ... Umgebung von q in Y. Dabei gilt ...
Zeile -1: $\ldots s \in W \setminus U$ und ... $f^{-1}(s) \subseteq Z_1 \cup \cdots \cup Z_l$ für alle $s \in W \setminus U$. Deshalb

Seite 159

Zeilen 1 - 5: ... für alle $s \in W \setminus U$, also für alle $s \in W$. Somit ist $W \cup U \subseteq F(f, r)$. Dies widerspricht der Maximalität von U.
Nach Zeile 5 einfügen: (11.15)' **Bemerkung:** In Satz (11.15) kann gelten $Y \setminus f(X) \neq \emptyset$. Doch diese Menge gehört offenbar zu $F(f, r)$.
Auf Zeile 10 einfügen: ... dass $h(X) = (\mathbb{A}^3 \setminus E) \cup (H \setminus \{\mathbf{0}\})$, und $(\mathbb{A}^3 \setminus E) \cap (H \setminus \{\mathbf{0}\}) = \emptyset$, wo $E = \ldots$
Zeile 11: Für die Fasern ergibt sich mit $q = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{A}^3$:
Zeile 12 / 13: (i) $h^{-1}(q) = \begin{cases} \{(b_1, b_2, \frac{b_3}{b_2})\} \cong \mathbb{A}^0, & \text{falls } q \in \mathbb{A} \setminus E. \\ \{b_1, 0, c\} \mid c \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{A}^1, & \text{falls } q \in H \setminus \{\mathbf{0}\}. \end{cases}$
Zeile -2 beenden mit: $\ldots = g(H) \setminus \{\mathbf{0}\}$.
Zeile -1 ersetzen durch: Der Morphismus g ist endlich und H ist abgeschlossen in $\mathbb{A}^3$, irreduzibel und von positiver Dimension. Deshalb ist $g(H)$ von postiver Dimension und irreduziebel. Also ist $g(H) \setminus \{\mathbf{0}\}$ offen und dicht in $g(H)$ und

damit nicht abgeschlossen in $F(X)$.

Seite 160

Zeile 1 streichen
Zeile 2: $f(X)$ am Zeilenbeginn streichen.

Seite 161

Zeilen 26 - 28: "Weil m(t) unitär ist ... ... folgt $e(t) = 0$, also" ersetzen durch: "Nach (11.19)(1) und (9.21)(v) gibt es ein Polynom $b(t) \in f^*\big(\mathcal{O}(Y)\big)[t]$ mit"
Nach Zeile -4 einfügen: (11.19)' **Bemerkung:** Die Aussage (i) von (11.19) besitzt die folgende lokale Version: Ist $f : X \longrightarrow Y$ ein endlicher Morphismus zwischen quasiaffinen Varietäten und sind K, g und $m(t)$ wie in (11.19), so gilt für alle $q \in Y$:
(i) *Ist Y normal in q, so gilt $m(t) \in f^*(\mathcal{O}_{Y,q})[t]$.*
Die Aussage (ii) aus (11.19) lässt eine entsprechende lokale Version zu, deren Formulierung und Begründung als Aufgabe gestellt sei.

Seite 162

Zeile 10 ergänzen zu: (i) *f ist surjektiv und eigentlich bezüglich der starken Topologie, d. h. f ist stetig, abgechlossen und die Urbilder kompakter Mengen sind wieder kompakt.*
Zeilen 15 - 18: "Wir wissen bereits ... beziehen. Damit bleibt" streichen. Weiterfahren mit: "Es genügt folgendes zu zeigen: Ist...
Zeile -2: Wir wollen als erstes eine Folge...

Seite 163

Zeile 8: ... Gezeigten hat die Folge $\{p_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ einen Häufungspunkt $s \in X$.
Zeile 9: ... der Folge $\{q_\nu\}$, also $f(s) = q$, d.h. $s \in f^{-1}(q)$.
nach Zeile 11 einfügen: Nun wollen wir zeigen, dass $f : X \longrightarrow Y$ bezüglich der starken Topologie offen ist. Nehmen wir das Gegenteil an. Dann gibt es eine bezüglich der starken Topologie offene Menge $U \subseteq X$ so, dass $f(U) \subseteq Y$ bezüglich der starken Topologie nocht offen ist. Wir finden also eine Folge $\{q_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subseteq Y \setminus f(U)$ mit Grenzwert q. Wir wählen $p \in U$ mit $f(p) = q$. Nach dem vorhin Gezeigten gibt es eine Folge $\{p_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ mit Häufungspunkt p und so, dass $f(p_\nu) = q_\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Weil dann aber $p_\nu \notin U$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ widerspricht dies der Offenheit von U.
Nach Zeile 29 einfügen: Dabei kann man f zusätzlich so wählen, dass $f(\overline{X \setminus Z}) = \mathbb{A}^k$ $\big(k = \dim(\overline{X \setminus Z})\big)$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{A}^n$ ist. Wegen

$Z \neq X$, und weil Z (und damit auch X) irreduzibel ist gilt $k < n$. Wegen $f(U) \subseteq f(\overline{X \setminus Z}) = \mathbb{A}^k$ widerspricht dies der Offenheit von $f(U)$ in $\mathbb{A}^n$ bezüglich der starken Topologie.
Zeilen 30 - 33 streichen

12. Quasiendliche und birationale Morphismen

Seite 164

Zeilen -2 und -1: ... zwischen irreduziblen quasiaffinen Varietäten. X enthalte eine ...
Nach Zeile -1 einfügen: *Beweis:* Sei $V_1, \ldots, V_r$ eine affine offene Überdeckung von Y und sei $U_i := f^{-1}(V_i) \quad (i = 1, \ldots, r)$. Dann wird die Einschränkung $f_i := f \restriction: U_i \cap X_0 \longrightarrow V_i$ endlich für $i = 1, \ldots, r$ (vgl. (9.26)). Ist $U_i \cap X_0 = U_i$ für $i = 1, \ldots, r$, so ist auch $X_0 = X$. Wir können also jeweils Y ersetzen durch V_i, also annehmen, Y sei affin.

Seite 165

Zeile 1 wie folgt beginnen: Nach (10.3) besteht ein ...
Zeile 14 und 15: ... gilt also $m(g)(p) = 0$. Da X_0 in X dicht ist, und weil $m(g) : X \longrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{A}^1$ stetig ist, gilt $m(g)(p) = 0$ sogar für alle $p \in X$.

Seite 168

Zeile 11: ... *ist endlich für ein* $q \in f(X)$.
Nach Zeile 11 einfügen: (v) f *ist dominant und* $f^{-1}(q)$ *ist endlich für ein* $q \in f(X)$.
Zeile 17: körper von $\kappa(X) = \mathrm{Quot}\big(\mathcal{O}(X)\big)$ (vgl. (10.1)(ii)(b), (12.2)(iii), (iv)'). Es folgt...
Zeile 19: ... (10.1)(x) gilt $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{C}}\big(\kappa(X)\big) = \ldots$
Zeile 27 egänzen zu: ... Y irreduzibel ist und weil $\dim\big(\overline{f(X)}\big) = \dim(Y)$ ergibt sich...

Seite 169

Zeile -6: ... unitär wählen. Sei L ein beliebiger Körper.
Zeile -5: ... Polynoms $g = \sum_{i=0}^{m} b_i t^i \in L[t]$ als...

Zeile -4 und -3: $g \mapsto g'$ ist L-linear und ... Produktregel. "Ist $g \in \ldots$ ... $g' \in K[t]$" streichen.
Zeile -1: $(t - \lambda'_{n-2}) \in K'[t]$. Dann folgt $f'(t) = \big[g(t)(t - \lambda'_n)^2\big]' = \ldots$

Seite 170

Zeile 1: ... Wegen $\mathrm{Char}(K) = 0$ ist...
Zeilen 19 und 20 wie folgt modifizieren und ergänzen: Wir setzen $h(t) := f(a - ut) = f(b + (c - t)u)$. Weil g resp. f die Minimalpolynome von c resp. von b sind, gilt $g(c) = 0$ und $h(c) = 0$. Ist $d \in K' \backslash \{c\}$ eine weitere gemeinsame Nullstelle von g und h, so gibt es ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ mit $a - ud = b_i$ und ein $j \in \{2, \ldots, s\}$ mit $d = c_j$. Daraus folgt $b + uc - uc_j = a - uc_j = a - ud = b_i$, d.h. der Widerspruch $b_i + uc_j = b + uc$. Also ist c die einzige gemeinsame Wurzel der...
Zeile 26: ... unitär ist. In $K'[t]$ folgt...
Zeile -2: (iv) $\sigma_i := \sum_{1 \le \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_i \le n} t_{\nu_1} \cdots t_{\nu_i} \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n], \quad (i = 1, \ldots, n)$.
Nach Zeile -1 einfügen: Für das Polynom $\prod_{1=1}^{n}(t - t_i) \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n][t]$ gilt offenbar:
(v)' $\quad \prod_{i=1}^{n}(t - t_i) = t^n + \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k t^{n-k}$.

Seite 171

Zeile 1: Durch Einsetzen verifiziert man mit Hilfe von (v)' sofort:

Seite 172

Zeilen 6 und 7 ersetzen durch: Der Satz vom primitiven Element erlaubt es, das folgende mit (11.2) verwandte Resultat zu zeigen:
Zeile 15: *Beweis:* Nach (10.1)(ix) finden wir ...
Zeilen 20 und 21: ... können wir schreiben $A = B[a_1, \ldots, a_r]$ mit $a_i = \frac{u_i}{b_i}$, wobei $u_i \in B[b]$ und $d_i \in T$ für $i = 1, \ldots, r$. Schliesslich...

Seite 173

Zeilen 3 bis 9 neu formulieren: (12.9) **Lemma:** *(Fasertrennungslemma): Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein endlicher Morphismus zwischen irreduziblen affinen Varietäten. Sei $g \in \mathcal{O}(X) \setminus \{0\}$. Das Minimalpolynom $m(t)$ von g über $f^*\big(\kappa(Y)\big)$ gehöre bereits zu $f^*\big(\mathcal{O}(Y)\big)[t]$. Sei $q \in Y$. Dann sind äquivalent:*
(i) *Die Diskriminante $\Delta(m) \in f^*\big(\mathcal{O}(Y)\big)$ von $m = m(t)$ vermeidet das Maximalideal $f^*\big(I_Y(q)\big) \in \mathrm{Max}\big(f^*\big(\mathcal{O}(Y)\big)\big)$.*
(ii) *Es gibt $n := \mathrm{Grad}\big(m(t)\big)$ paarweise verschiedenen Punkte $p_1, \ldots, p_n \in f^{-1}(q)$, die durch g getrennt werden.*

Treffen die äquivalenten Aussagen (i) und (ii) zu, so nimmt g auf der ganzen Faser $f^{-1}(q)$ nur die Werte $\{g(p_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ an.

Seite 174

Nach Zeile 10 einfügen: (12.10)' **Bemerkung:** In (10.12) gilt die Behauptung auch dann, wenn nur $q \in \mathrm{Nor}(Y)$. Dabei kann man auch annehmen Y sei nur quasiaffin.
Zeile 25 wie folgt ergänzen: ...$\mathcal{O}\big(f^{-1}(U_Y(l))\big)$. Wegen $\kappa(Y) = \kappa\big(U_Y(l)\big)$ und $\kappa(X) = \kappa\big(f^{-1}(U_Y(l))\big)$ (vgl. (12.3)(iii)) gilt

$$\mathrm{Grad}(f) = \mathrm{Grad}\big(f \restriction_{f^{-1}(U_Y(l))}\big).$$

Dies erlaubt es...
Zeile -3: dass $|f^{-1}(q)| \leq \mathrm{Grad}(f)$ für alle $q \in V$.

Seite 175

Zeile 1: $\ldots \geq \mathrm{Grad}(f'), \forall s \in W$. Weil $\mathbb{A}^d$ normal ist, gilt nach (12.10) sogar $|f'^{-1}(s)| = \mathrm{Grad}(f')$ für alle $s \in W$.

Seite 176

Zeile 15 wie folgt ergänzen: ... mit $f^*\big(\mathcal{O}(W)\big)_a = \mathcal{O}\big(f^{-1}(W)\big)_a$. (Man kann a zum Beispiel als gemeinsamer Nenner von endlich vielen Brüchen wählen, welche $\mathcal{O}\big(f^{-1}(W)\big)$ über $f^*\big(\mathcal{O}(W)\big)$ erzeugen.) Wir schrei..

Seite 177

Zeile 24 wie folgt ergänzen: *Beweis:* Die Eindeutigkeit ergibt sich leicht, weil f auf einer dichten offenen Menge einen Umkehrmorphismus hat und weil $\hat{X}, \widetilde{X}$ und X irreduzibel sind. Nehmen wir zunächst an ...
Zeile 32: $\ldots g^* \circ f^{*-1}\big(f^*(\mathcal{O}(X))\big) \subseteq g^* \circ f^{*-1}\big(\mathcal{O}(\widetilde{X})\big) =: B$, wobei...
Zeile 33 wie folgt ergänzen: ist über $g^*\big(\mathcal{O}(X)\big)$. Denn, weil f endlich ist, ist $\mathcal{O}\big(\widetilde{X}\big)$ ganz über $f^*\big(\mathcal{O}(X)\big)$ und die Ganzheitsbeziehung bleibt beim Übergang zu homomorphen Bildern ja erhalten.
Zeile -4 wie folgt ergänzen: ... mit $h^* = \varphi$. Es ist $(f \circ h)^* = h^* \circ f^* = \varphi \circ f^* = (g^* \circ f^{*-1}) \circ f^* = g^*$. Aus (7.7) folgt $g = f \circ h$.
Zeilen -3 bis -1 streichen

Seite 178

Zeilen 1 bis 4 streichen
Zeile 17: ... *ein endlich erzeugter algebraischer Erweiterungskörper*

Zeile 25: ... annehmen, A sei noethersch und normal. Weil...

Seite 179

Zeile 6 wie folgt ergänzen: ... mit $c_0, \ldots, c_{n-1} \in K$. Wir wollen jetzt ein von y unabhängiges Element $\delta^2 \in A \setminus \{0\}$ konstruieren so, dass $\delta^2 c_j \in A$ für $j = 1, \ldots, n-1$. Dazu schreiben wir $y_i = \psi_i(y) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x_i^j$.
Zeilen - 7 und -6: ... endlich erzeugt, also noethersch. Deshalb gilt dies auch für $\delta^2 \overline{A}$. Im Hinblick ...
Zeile -5: ... schliesslich $\overline{A}$ ein noetherscher, also endlich erzeugter ...

Seite 180

Zeile 26: Quotientenkörper $\kappa(\widetilde{X})$. Es folgt $\mathcal{O}(\widetilde{X}) \subseteq f^*(S)^{-1}\big(\mathcal{O}(X)\big)$. Wir ...

Seite 182

Zeile 17: ... dass das Ideal $f_p^*(\mathfrak{m}_{Y,q})\mathcal{O}_{X,p} \subseteq \mathcal{O}_{X,p}$ perfekt ist. Ebenfalls ...
nach Zeile -4 einfügen: C) Als nmächstes zeigen wir:
(iii) *Seien $I \subseteq J$ Ideale eines Ringes A so, dass für alle* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ *mit* $I \subseteq \mathfrak{m}$ *in der Lokalsierung $A_\mathfrak{m}$ die Gleichheit $I_\mathfrak{m} = J_\mathfrak{m}$ besteht. Dann gilt $I = J$.*
Beweis: Sei $x \in J$. Zu jedem $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M} := \{\mathfrak{m}' \in \mathrm{Max}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{m}'\}$ gibt es ein $s_\mathfrak{m} \in A \setminus \mathfrak{m}$ mit $s_\mathfrak{m} x \in I$ (s. (7.12)D)(vii)). Das Ideal $L := I + \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} A s_\mathfrak{m} \subseteq A$ ist offenbar in keinem Maximalideal von A enthalten., d.h. es gilt $L = A$, also $1 \in L$. Es gibt demnach Elemente $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r \in \mathfrak{M}$, $a_1, \ldots, a_r \in A$ und $a \in I$ so, dass $1 = a + \sum_{i=1}^r a_i s_{\mathfrak{m}_i}$. Es folgt $x = 1x = ax + \sum_{i=1}^r a_i s_{\mathfrak{m}_i} x \in I$.
Anwendung von (iii) auf I und $J := \sqrt{I}$, zusammen mit der Tatsache, dass $\sqrt{I_\mathfrak{m}} = (\sqrt{I})_\mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ liefert nun:
(iv) *Ein Ideal $I \subseteq A$ eines Ringes A ist genau dann perfekt, wenn das Ideal $I_\mathfrak{m} \subseteq A_\mathfrak{m}$ für alle* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ *mit* $I \subseteq \mathfrak{m}$ *perfekt ist.*
D) Schliesslich wollen wir uns überlegen, dass gilt:
(v) *Für einen Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ zwischen affinen Varietäten und einenn Punkt $q \in Y$ sind äquivalent:*
(a) *Die Faser von f ist reduziert über q.*
(b) $f^*\big(I_Y(q)\big)\mathcal{O}(X) = I_X\big(f^{-1}(q)\big)$.
(c) $f^*\big(I_Y(q)\big)\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{O}(X)$ *ist ein perfektes Ideal.*
Beweis: Nach (7.9)(ii) genügt es zu zeigen, dass (a) und (c) äquivalent sind. Sei also $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\big(\mathcal{O}(X)\big)$ mit $f^*\big(I_y(q)\big)\mathcal{O}(X) \subseteq \mathfrak{m}$. Nach dem Nullstellensatz gibt es einen Punkt $p \in V_X\big(f^*(I_y(q))\mathcal{O}(X)\big) = f^{-1}(q)$ mit $\mathfrak{m} = I_X(p)$. So folgt, dass das Ideal $f^*\big(I_Y(q)\big)\mathcal{O}(X)_\mathfrak{m} = f^*\big(I_Y(q)\big)\mathcal{O}(X)_{I_X(p)} = f^*(\mathfrak{m}_{Y,q})\mathcal{O}_{X,p}$ perfekt ist. Jetzt schliessen wir mit (iv).

Seite 183

Zeile 1: *Beweis:* O.E. können wir annehmen, X und Y seien affin (vgl. (12.21)(iii)). Sei $\{p_1, \ldots, p_r\} = f^{-1}(q)$. Nach (12.21)D)(v) gilt zunächst $I := f^*\big(I_Y(q)\big)\mathcal{O}(X) = I_X(p_1, \ldots, p_r)$. Der durch $g \mapsto \big(g(p_1), \ldots, g(p_r)\big)$ definierte Homorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren hat den Kern I.
Zeilen 2 bis 12 streichen
Zeile 17: ... wird jetzt $f^*\big(I_Y(q)\big)\big(\mathcal{O}(X)/M\big) = \mathcal{O}(X)/M$. Nach (9.9) finden ...
Zeile 19: ... erhalten wir nach (10.1)(iii)(b) die Beziehung $\kappa(X) = S^{-1}\mathcal{O}(X) \subseteq \sum_{i \leq r} b_i S^{-1} f^*\big(\mathcal{O}(Y)\big)$

Seite 184

Zeile -10: ... Faser $f^{-1}\big(f(p)\big)$ von f (über $f(p)$) in p reduziert ist. Weil die

IV. Tangentialraum und Multiplizität

13. Der Tangentialraum

Seite 190

Zeile -7: ... eine Ableitung $\tau_{\vec{a}}$ in
Zeile -4: ... den Kern $I_{\mathbb{A}n,p}(X)$ (vgl. (8.1) (xvi)). Wegen $\tau_{\vec{a}}\big(I_{\mathbb{A}^n,p}(X)\big) = 0$ wird durch
Zeile -3: (iii) $\quad \overline{\tau}_{\vec{a}}\big(i_p^*(f_p)\big) = \tau_{\vec{a}}(f_p), \quad (f_p \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p})$

Seite 195

Zeile 15 wie folgt ergänzen: definiert, welche auf den Keimen konstanter Funktionen und auf $\mathfrak{m}^2$ verschwindet. Leicht prüft man nach ...
Zeile 24: (i) $\quad \overline{f_p^*} : \mathfrak{m}_{Y,f(p)}/\mathfrak{m}^2_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathfrak{m}_{X,p}/\mathfrak{m}^2_{X,p}$
Zeilen 25 und 26: ... die zu $\overline{f_p^*}$ duale lineare Abbildung $\big(\overline{f_p^*}\big)^*$ vermöge der...
Zeile -1: $\big(\mathfrak{m}_{X,p}/\mathfrak{m}^2_{X,p}\big)^* \xrightarrow{\left(\overline{f_p^*}\right)^*} \big(\mathfrak{m}_{Y,f(p)}/\mathfrak{m}^2_{Y,f(p)}\big)^*$

Seite 196

Zeilen 15 und 16: ... ist in p, gilt $f_p^*(\mathfrak{m}_{Y,q})\mathcal{O}_{X,p} = I_{X,p}\big(f^{-1}(q)\big)$. Dabei ...
Zeile 19: $\mathfrak{m}_{Y,q}/\mathfrak{m}^2_{Y,q} \xrightarrow{\overline{f_p^*}} \mathfrak{m}_{X,p}/\mathfrak{m}^2_{X,p} \xrightarrow{\overline{i_p^*}} \mathfrak{m}_{f^{-1}(q),p}/\mathfrak{m}^2_{f^{-1}(q),p}$.
Nach Zeile 19 einfügen: Nach (8.1) D)(ix)(c) ist $\mathcal{O}_{X,p} = \mathbb{C} + \mathfrak{m}_{X,p}$. Wegen $f_p^*(\mathfrak{m}_{Y,q}) \subseteq \mathfrak{m}_{X,p}$ folgt also $f_p^*(\mathfrak{m}_{Y,q})\mathcal{O}_{X,p} + \mathfrak{m}^2_{X,p} = f_p^*(\mathfrak{m}_{Y,q})(\mathbb{C} + \mathfrak{m}_{X,p}) + \mathfrak{m}^2_{X,p} = f_p^*(\mathfrak{m}_{Y,q}) + \mathfrak{m}_{X,p}f_p^*(\mathfrak{m}_{Y,q}) + \mathfrak{m}^2_{X,p} = f_p^*(\mathfrak{m}_{Y,q}) + \mathfrak{m}^2_{X,p}$. Nach (8.1) D)(xvi) ist $i_p^* : \mathcal{O}_{X,p} \longrightarrow \mathcal{O}_{f^{-1}(q),p}$ surjektiv mit Kern $I_{X,P}\big(f^{-1}(q)\big)$. Insbesondere ist $i^*(\mathfrak{m}_{X,p}) = i^*\big((i^*)^{-1}(\mathfrak{m}_{f^{-1}(q),p})\big) = \mathfrak{m}_{f^{-1}(q),p}$. Weil i_p^* ein Homomorphismus von Ringen ist, folgt $i_p^*(\mathfrak{m}^2_{X,p}) = \mathfrak{m}^2_{f^{-1}(q),p}$, also (vgl. 12.21) A)(i)) $(i_p^*)^{-1}(\mathfrak{m}^2_{f^{-1}(q),p}) = I_{X,p}\big(f^{-1}(q)\big) + \mathfrak{m}^2_{X,p} = f_p^*(\mathfrak{m}_{Y,q})\mathcal{O}_{X,p} + \mathfrak{m}^2_{X,p} = f_p^*(\mathfrak{m}_{Y,q}) + \mathfrak{m}^2_{X,p}$.
Zeile 20: Deshalb gilt $\mathrm{Kern}(\overline{i_p^*}) = \mathrm{Bild}(\overline{f_p^*})$. wenn wir jetzt...
Zeile 21: ... erhalten wir $\mathrm{Kern}(d_pf) = \mathrm{Kern}\big((\overline{f_p^*})^*\big) = \mathrm{Bild}\big((\overline{i_p^*})^*\big) = \mathrm{Bild}(d_pi) =$

Seite 197

Zeile - 12: ... A) Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und sei...

Seite 198

Zeile 4 wie folgt ergänzen: B) Sei jetzt der lokale Ring $(A, \mathfrak{m})$ zusätzlich noethersch. Nach dem Krull'schen ...
Zeile -8 wie folgt ergänzen: Ist = 0, so ist $\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = d = 0$. Es ist also $\mathfrak{m} = \{0\}$.

Seite 199

Nach Zeile 6 einfügen: (13.17)' **Bemerkung:** Als unmittelbare Konsequenz des Resultates und des Beweises von (13.17) sieht man, dass für einen lokalen noetherschen Ring $(A, \mathfrak{m})$ und ein Element $x \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ die folgenden Aussagen gelten:
(i) *Ist A integer und A/xA regulär, so ist A regulär.*
(ii) *Ist A regulär und $x \notin \mathfrak{m}^2$, so ist A/xA regulär.*

Nach Zeile -5 die folgende Verbesserung einfügen (Verbesserung des Beweises von Lemma 13.20 (Seiten 199 - 201):
(13.20) **Lemma:** *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler, noetherscher Integritätsbereich. Sei $x \in A \setminus \mathfrak{m}$ so, dass A/xA normal ist. Dann ist auch A normal.*
Beweis: Zunächst überlegen wir uns, dass jedes Element $a \in A\setminus\{0\}$ geschrieben werden kann in der Form $a = x^r e$, wobei $r \in \mathbb{N}_0$ und $e \in A \setminus xA$. Wir müssen dazu nur zegen, dass $I := \bigcap_{r\in\mathbb{N}_0} x^r A = \{0\}$. Weil x ein Nullteiler ist, gilt aber offenbar $xI = I$, also $\mathfrak{m}I = I$, und nach Nakayama folgt $I = \{0\}$.
Sei jetzt $b = \frac{u}{v} \in \mathrm{Quot}(A), (u, v \in A \setminus \{0\})$ ganz über A. Wir müssen zeigen, dass $b \in A$. Wir setzen $B := A[b]$. Weil A/xA integer ist, gilt $xA \in \mathrm{Spec}(A)$ und aus der Lying-over-Eigenschaft folgt zunächst $xB \cap A = xA$. Wir schreiben jetzt $u = x^r d$ und $v = x^s e$, wobei $r, s \in \mathbb{N}_0$ und $d, e \in A \setminus xA$. Mit $t := r - s$ folgt $b = \frac{x^t d}{e}$. Dabei ist $t \geq 0$, denn sonst wäre $d = x^{-t} eb \in xB \cap A = xA$. Weil $b = \frac{xc}{e}$ ganz ist über A, ist B ein endlich erzeugter A-Modul. Deshalb finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $e^N b^n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Nach (7.12)G) besteht ein Isomorphismus von Ringen

$$\iota : A_e/xA_e \xrightarrow{\cong} (A/xA)_{\overline{e}}, \quad \Big(\iota : \frac{a}{e^r}/xA_e \mapsto \frac{\overline{a}}{\overline{e}^r}, \quad a \in A, r \in \mathbb{N}_0\Big),$$

wo $\overline{\bullet} : A \twoheadrightarrow A/xA$ die Restklassenabbildung ist. Wir fassen A/xA als Unterring von $(A/xA)_{\overline{e}} \subseteq \mathrm{Quot}(A/xA)$ auf. Dann gilt mit $\overline{b} := b/xA_e = \frac{x^t d}{e}/A_e \in A_e/xA_e$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Beziehung

$$\overline{e}^N \iota(\overline{b})^n = \iota\big((e^N/xA_e)(b/xA_e)^n\big) = \iota(e^N b^n/xA_e) \in \iota(A/xA_e) = A/xA.$$

Desbalb ist $\iota(\overline{b}) \in (A/xA)_{\overline{e}} \subseteq \mathrm{Quot}(A/xA)$ ganz über A/xA. Weil A/xA normal ist, folgt $\frac{\overline{x^t d}}{\overline{e}} = \iota(\overline{b}) \in A/xA$, d.h. $\overline{x^t d} \in \overline{e}(A/xA) = (eA + xA)/xA$. Wir können also schreiben $x^t d = ea + xc$ mit geeigneten Elementen $a, c \in A$. Es folgt $b = \frac{x^t d}{e} = a + b_1$ mit $b_1 := \frac{xc}{e}$. Damit erhalten wir $B = A[b_1]$ und $a_n := e^N (b_1)^n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Wir setzen nun $B_1 := B = A[b_1], b_2 := \frac{c}{e} = \frac{b_1}{x}$ und $B_2 := A[b_2]$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $e^N x^n c_1^n = e^N (b_1)^n e^n = a_n e^n$. Weil xA ein Primideal ist und wegen $e \notin xA$ folgt, dass $a_n \in x^n A$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Mit geeignetem $u_n \in A$ gilt also immer $a_n = x^n u_n$ und somit ergibt sich, dass $e^N (b_2)^n = e^N \left(\frac{c}{e}\right)^n = u_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Also ist b_2 ganz über A und es gilt $A \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \frac{1}{e^N} A$.
Nun können wir mit b_2 verfahren wie vorhin mit b. So fortfahrend erhalten wir eine aufsteigende Kette

$$A \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_k \subseteq B_{k+1} \subseteq \cdots \subseteq \frac{1}{e^N} A.$$

von ganzen Erweiterungsringen B_k von A, wobei jeweils gilt $B_{k+1} = A[\frac{b_k}{x}]$ mit $B_k = A[b_k]$. Weil $\frac{1}{e^N} A$ ein endlich erzeugter A-Modul ist, wird diese Kette stationär. Wir finden also ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $B_{m+1} = B_m$. Es folgt $\frac{b_m}{x} \in B_m$, also $b_m \in xB_m$. Mit geeignetem $M \in \mathbb{N}$ können wir aber auch schreiben $B_m = A + b_m A + (b_m)^2 A + \cdots (b_m)^M A$ und erhalten so $B_m \subseteq A + xB_m + x^2 B_m + \cdots x^M B_m \subseteq A + \mathfrak{m} B_m$, also $B_m = A + \mathfrak{m} B_m$. Nach Nakayma folgt $B_m = A$ und wegen $b \in B_1 \subseteq B_m$ erhalten wir in der Tat $b \in A$.

Zeilen -4 bis -1 streichen

Seite 200

ganze Seite streichen

Seite 201

Zeilen 1 und 2 streichen Zeile 20 wie folgt ergänzen: ... denn sonst wäre $ym = xs$ für ein $m \in \mathfrak{m}$ und eine $s \in A \setminus \mathfrak{m}$, also $x \in y\mathfrak{m}$, d.h. $xA \subseteq y\mathfrak{m}$, mithin
Zeile 21 wie folgt ergänzen: ... also $x \in y\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^2$. Weil A integer ist, können wir schreiben $A \subseteq A[\frac{y}{x}] \subseteq A_x \subseteq \mathrm{Quot}(A)$. Es ist also ...
Zeile 22 wie folgt ergänzen und modifizieren: ... also $A[\frac{y}{x}] \subseteq \frac{1}{x} A$. Nach (9.7)(ii) ist $\frac{y}{x}$ also ganz über A. ...

Seite 202

Zeile 2 wie folgt ändern: ... Nach (5.5)(iii) können
Zeilen 4 bis 7 streichen und ersetzen durch: Als erstes wollen wir zeigen, dass $I \in \mathrm{Spec}(A)$. Nehmen wir das Gegenteil an! Dann gibt es Elemente $a, b \in A \setminus I$ mit $ab \in I$. Mit $y := bx$ gelten dann die Beziehungen $y \notin A, y \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}} A_{\mathfrak{p}}, Iy = Ibx = bIx \subseteq A, ay = abx \in A$. In der oben eingeführten Notation gilt also $I \subsetneq I + aA \subseteq I_y \in \mathcal{M}$, was im Widerspruch zur Maximalität von $I \in \mathcal{M}$ bezüglich der Inklusion steht.

Zeile 8 ersetzen durch: Sei jetzt $s \in I \setminus \{0\}$. Wegen $I \in \operatorname{Spec}(A)$ finden wir nach (9.17) A) (i) ein minimales Primoberideal $\mathfrak{p}$ von As mit $\mathfrak{p} \subseteq I$.
Zeilen 9 bis 12 streichen und ersetzen durch: Nach dem Krullschen Höhensatz ist $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$. Daraus folgt $x \in A_{\mathfrak{p}}$ und wir können schreiben $x = \frac{a}{t}$ mit $a \in A$ und $t \in A \setminus \mathfrak{p}$. Es gilt also $sx, tx = a \in A$, und somit $t(sx) = s(tx) \in \mathfrak{p}$, also $sx \in \mathfrak{p}$. Daraus folgt, dass $Ix \subseteq I$.
Zeilen 21 bis 23 streichen und ersetzen durch: *Beweis:* Siehe (13.17)'.
Zeilen -5 und -4 ergänzen wie folgt: *... Polmenge einer rationalen Funktion $f \in \kappa X \setminus \mathcal{O}(X)$ ist von der reinen codimension* 1 *in X – das heisst, für jede irreduzible Komponente Y dieser Polmenge gilt* $\operatorname{codim}_X(Y) = 1$.
Zeile -3: *Beweis:* Sei also X normal. Wir wollen zuerst annehmen, X sei affin. Wir setzen $A = \mathcal{O}(X)$ ...

Seite 203

Auf Zeile 1 streichen: " Sei zunächst X normal. "

14. Stratifikation

Seite 207

Zeile -2: ... über der offenen Menge $\pi(W) \subseteq \mathbb{C}^{n-r}$.

Seite 209

Zeile 11: $\tau_p \circ \tau_q^{-1} : \tau_q(U_p \cap U_q) \longrightarrow \tau_p(U_p \cap U_p)$

Seite 210

Zeile 3: $\tau_p \circ \tau_q'^{-1} : \tau_q'(U_p \cap U_q') \longrightarrow \tau_p(U_p \cap U_q')$
Zeile 4: $\tau_q' \circ \tau_p^{-1} : \tau_p(U_p \cap U_q') \longrightarrow \tau_q'(U_p \cap U_q')$

Seite 215

Zeile 18: $W''\lambda = W''W^{-1}W\lambda = W''W^{-1}w_{i-s}'$ hat. Jetzt ...

15. Hilbert-Samuel-Polynome

Seite 224

Zeile 13: ... wiederholt die folgenden Aussagen, deren Nachweis...
Nach Zeile 15 einfügen:

$$(**) \quad \mathrm{ann}(An) \quad \text{graduiert} \Rightarrow \forall i : \mathrm{ann}(An) \subseteq \mathrm{ann}(An_{(i)}).$$

Zeile -6 wie folgt modifizieren: also $r > 0$. Wegen $ym = 0$ gilt $0 = 0_{(s+\nu)} = (ym)_{(s+\nu)} = y_{(s)}m_{(\nu)}$, d.h. $y_{(s)} \in \mathrm{ann}(Am_{(\nu)}) \subseteq \mathfrak{p}$, also
Zeile -5 wie folgt ergänzen: ... Dies erlaubt induktiv zu schliessen, dass $\mathfrak{p}$ graduiert ist.
Nach Zeile -5 anfügen: Mit (**) folgt nun auch, dass $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(Am) \subseteq \mathrm{ann}(Am_{(\nu)}) \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(Am_{(\nu)})$. Damit ist aber $\mathfrak{p}$ der Annulator eines homogenen Elementes von M.

Seite 225

Zeilen 9 bis 19 streichen und ersetzen durch: *Beweis:* (a) ist klar, weil $T_I(M)$ endlich erzeugt ist.
(b): Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\big(T_I(M)\big)$. Es gibt dann ein $m \in T_I(M)$ mit $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(Am)$. Es gibt auch ein $s \in \mathbb{N}$ derart, dass $I^s m = 0$. Daraus folgt $I^s \subseteq \mathrm{ann}(Am) = \mathfrak{p}$, also $I \subseteq \mathfrak{p}$. Nach (15.7)(iii) ist aber auch $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Dies beweist die Inklusion $\subseteq$.
Sei umgekehrt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Wir finden dann ein $m \in M$ mit $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(Am)$. Insbesondere ist $Im = 0$, d.h. $m \in T_I(M)$, also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\big(T_I(M)\big)$. Dies beweist schliesslich die in (b) behauptete Gleichheit.
(c): Zuerst beweisen wir die Inklusion $\subseteq$. Sei $\overline{\bullet} : M \longrightarrow M/T_I(M)$ die Restklassenabbildung. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\big(M/T_I(M)\big)$. Wir finden ein $m \in M$ mit $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(A\overline{m})$. Zuerst zeigen wir, dass I nicht in $\mathfrak{p}$ enthalten ist. Wäre nämlich $I \subseteq \mathfrak{p}$, so hätten wir $I\overline{m} = 0$, d.h. $\overline{m} \in T_I\big(M/T_I(M)\big)$. Nach (i)(b) ergäbe sich daraus $\overline{m} = 0$, also der Widerspruch, dass $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(A\overline{m}) = \mathrm{ann}(\{0\}) = A$.
Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Nach dem soeben Gezeigten gibt es ein $u \in I \setminus \mathfrak{p}$. Nach (a) gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $u^s T_I(M) = \{0\}$. Wir setzen $n := u^s m$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(An)$. Wegen $\mathfrak{p}m \subseteq T_I(M)$ ist zunächst $\mathfrak{p}n = \mathfrak{p}u^s m = u^s \mathfrak{p}m \subseteq u^s T_I(M) = \{0\}$ also $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{ann}(An)$. Sei umgekehrt $x \in \mathrm{ann}(An)$. Dann gilt $xu^s m = xn = 0$, d.h. $xu^s m \in T_I(M)$, also $xu^s \in \mathrm{ann}(A\overline{m}) = \mathfrak{p}$. Wegen $u \notin \mathfrak{p}$ folgt $x \in \mathfrak{p}$. Also ist in der Tat $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(An)$, also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Damit ist die Inklusion $\subseteq$ bewiesen.
Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion wählen wir $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ so, dass I nicht in $\mathfrak{p}$ enthalten ist. Nach (15.7)(iii) ist dann

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\big(T_I(M)\big) \cup \mathrm{Ass}\big(M/T_I(M)\big).$$

Nach (b) ist aber $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}\big(T_I(M)\big)$. So folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\big(M/T_I(M)\big)$. Dies beschliesst den Beweis.

Seite 231

Zeile -8: durch Tensorieren eine Basiserweiterung...

Seite 237

Zeile 8: $\ldots \mathrm{NNT}_+\big(\mathrm{Gr}(\mathfrak{m}, M)\big) \Rightarrow \overline{H}_{M/xM}(t) = \overline{H}_M(t) - \ldots$

V. Projektive Varietäten

17. Der Projektive Raum

Seite 268

Zeile -4: Scheibendurchmesser $\{\pm\big(\varepsilon\cos(\alpha), \varepsilon\sin(\alpha)\big) \mid 0 \leq \varepsilon \leq 1\} = d_\alpha$ auf einen ...

Seite 269

Zeile 6: ... auf der Strecke $s = \{(0,0,w) \mid 0 < w < \frac{4}{3}\} \subseteq \ldots$
Zeile 7: ... und $p := \varphi(0:1:0) = (0,0,\frac{4}{3})$ haben ...

Seite 278

Zeile 24: (iii) $\quad V_X^+(I) = \mathbb{P}\big(V_{c\mathbb{A}(X)}(I)\big) = \{(c_0 : \ldots : c_n) \in X \mid f(c_0, \ldots, c_n) = 0, \forall f \in I\}$.

Seite 281

Zeile 12: ... *projektive Nullstellengebilde der Homogenisierung des Ideals der ...*
Zeile 14: $\overline{V_{\mathbb{A}^n}(f_1, \ldots, f_r)} = V^+_{\mathbb{P}^n}\big((f_1, , \ldots, f_r)^+\big), \quad \big(f_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)\big)$.
Zeile 17: $I^+_{\mathbb{P}^n}\Big(V^+_{\mathbb{P}^n}\big((f_1, \ldots, f_r)^+\big)\Big) = \sqrt{(f_1, \ldots, f_r)^+}$.

Seite 282

Zeilen 11 bis 18 streichen und ersetzen durch: (17.15) **Bemerkungen:** A) Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Nach (17.12) (ii) ist dann klar, dass $(f)^+ = (f^+)$. Nach (17.13)' folgt daraus, dass

$$\overline{V_{\mathbb{A}^n}(f)} = V^+_{\mathbb{P}^n}(f^+).$$

Zeilen 22 bis 24 streichen und ersetzen durch: (i) *Ist* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ *mit* $\mathrm{Grad}(f) = d > 0$, *so ist die Menge der Fernpunkte der Hyperfläche* $V_{\mathbb{A}}(f)$ *gegeben durch:*

$$V^+_{\mathbb{P}^n}\big(z_0, (f)_{(d)}\big).$$

Zeile 25: Für die Hyperfläche $V_{\mathbb{A}^n}(f)$, $\quad (f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n), \mathrm{Grad}(f) = d)$ wissen wir
Zeilen -3 bis -1 streichen

18. Morphismen

Seite 286

Zeile 14: *Beweis:* (a) $\Rightarrow$ (b): Weil π stetig ist (vgl. (17.6)(i)), ist $\pi^{-1}(X) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ lokal abgeschlossen. Sei $q \in \pi^{-1}(X)$. Weil f regulär ist, gibt es ...
Zeile 15: $\ldots U \subseteq X$ von $p = \pi(q)$ und zwei homogene Polynome $l, h \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ derart, dass $h(\mathbf{c}) \neq 0$ und
Zeile 20: ..., derart, dass $\nu(\mathbf{c}) \neq 0$ und $f \circ \pi(\mathbf{c}) = \ldots$

Seite 287

Zeile 8: $\ldots = f \circ \tau_i^{-1}\big(\frac{c_0}{c_i}, \ldots, \frac{c_{i-1}}{c_i}, \frac{c_{i+1}}{c_i}, \ldots, \frac{c_n}{c_i}\big) =$
Zeile 9: $\ldots = \frac{l(c_0,\ldots,c_n)}{h(c_0,\ldots,c_n)}$.

Seite 289

Zeile -11 und -9: ... schreiben $f(p) = \big(f_0(p) : \cdots : f_n(p)\big)$. Ist f ein Morphismus, so sind die Funktionen $f_i = f^*(w_i)$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ regulär. Seien umgekehrt die Funktionen f_i regulär für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$. Sei $V \subseteq Y$ offen, sei $g \in \mathcal{O}(V)$ und sei $q \in f^{-1}(V)$. Wir finden ...

Seite 298

Zeile 8: $f_1 : \{s\} \longrightarrow X, f_2 : \{s\} \longrightarrow Y$, definiert durch ...
Zeile 9: Menge $(f_1, f_2)(s) = \big(f_1(s), f_2(s)\big) \in X \times Y$ aus genau einem Punkt, ...

Seite 305

Zeile -10: ... Sei $r \in \mathbb{N}$ so, dass $r \geq d_j \quad (j = 1, \ldots, s)$.
Zeile -7: $a_j = \sum_{1leql_1 \leq \cdots \leq l_\nu} c_{l_1,\ldots,l_\nu} x_{l_1} \cdots x_{l_\nu}$
Zeile -2: ..., also $b \in \mathbb{C}[B_r] = \mathbb{C}[(B^{(r)})_1]$. Wegen ...

19. Grad und Schnittvielfachheit

20. Ebene projektive Kurven

Seite 345

Zeile -4: $\frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} = z_1 \frac{\partial^2 g}{\partial z_2^2} + r(r-1){z_2}^{r-2} l + z_2^{r-1}\big(2\frac{\partial l}{\partial z_2} + z_2 \frac{\partial^2 l}{\partial^2 z_2^2}\big)$.
Zeile -1: $-\big(\frac{\partial^2 f}{\partial z_0 \partial z_2}\big)^2 \big(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\big) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial z_0 \partial z_1}\big)^2 \big(\frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2}\big) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}\big)^2 \big(\frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2}\big)$.

Seite 346

Zeile 6: ... und $\widetilde{l} \in \mathbb{C}[z_0, z_2]$.

Seite 352

Zeile - 4: Man zeige, dass sich 5 Tangenten einer glatten...

VI. Garben

21. Der Grundbegriffe der Garbentheorie

22. Kohärente Garben

23. Tangentialfelder und Kähler-Differentiale

Seite 413

Zeilen 16, 17 und 21: “ (23.14) ” ersetzen durch “ (23.16) ”

24. Die Picard-Gruppe

25. Kohärente Garben über projektiven Varietäten