

# VOM MÖBIUS-BAND ZUR HILBERT-FUNKTION

”DIE ARITHMETISIERUNG DER GESTALT”  
(dargestellt an klassischen und an aktuellen Beispielen)

DOKUMENTATION ZU EINEM PROJEKT AN DER  
NATIONALEN FORSCHUNGS AUSSTELLUNG  
HEUREKA

M. Brodmann  
Mathematisches Institut  
Universität Zürich  
Rämistrasse 74  
CH - 8001 Zürich

erschienen in:  
Note di Matematica e Fisica  
Editione CERFIM Locarno, Vol 7 (1995) 10 – 77.

aktuelle Adresse:  
Institut für Mathematik  
Universität Zürich  
Winterthurerstrasse 190  
8057 Zürich  
<brodmann@math.uzh.ch>

## **Meinen Kindern!**

Mathias, der das Wort liebt,  
Annette, welche die Klarheit liebt,  
Simon, der die Bilder liebt  
Karin, welche fantastische Geschichten liebt.

## **Mein Dank geht an:**

- Meine Frau Therese. Ihr verdanke ich die Idee, das Möbius-Band als Ausgangspunkt dieses Projektes zu wählen.
- Meinen Sohn Matthias. Er hat mir vorgeschlagen die aus der Schule bekannte Parabel als erstes Beispiel einer algebraischen Varietät zu wählen.
- Meine Tochter Annette. Sie half beim Tönen der Skizzen.
- Daniel Eichenberger. Er besorgte den Fussball vom FCW.
- M. Brandenburg und M. Hafner. Sie realisierten die Computerbilder von Standard-Aufblasungen.
- H.P. Scherbel. Für die Computerbilder der projektiven Ebene.
- S. Kyburz. Sie tippte das vorliegende Manuskript auf dem Computer.
- H. Weilenmann. Sie tippte die lay-out-Texte auf dem Computer.
- C. Schwabe. Ohne seine tatkräftige Unterstützung wäre das Ausstellungsprojekt nicht realisiert worden.

Um sich begreiflich zu machen,  
muss man zum Auge reden.

J.G. Herder

## 0. ZIEL UND GRUNDKONZEPT DES PROJEKTES

Der Versuch, die Gestalt geometrischer Objekte mit Hilfe von Zahlen zu erfassen, gehört zu den ältesten Bemühungen der Mathematiker überhaupt. Das damit angesprochene Prinzip der *Arithmetisierung der Gestalt* ist ein fundamentales Konzept der Mathematik. Der Hauptzweck dieses Projektes ist es, dem Betrachter dieses Konzept näher zu bringen.

Dieses Ziel soll in vier Schritten erreicht werden:

- Anhand anschaulicher Beispiele (Möbius-Band, Kleinsche Flasche, projektive Ebene) soll das Phänomen der Orientierbarkeit und der Nichtorientierbarkeit von Flächen vorgestellt werden.
- Ausgehend vom Beispiel der Orientierbarkeit von Flächen soll das Prinzip der Arithmetisierung der Gestalt formuliert werden.
- Dann wird die Brücke geschlagen zur algebraischen Geometrie, nämlich zur Arithmetisierung der Gestalt projektiver Varietäten durch kohomologische Hilbert-Funktionen.
- Schliesslich werfen wir einen Blick in die aktuelle Forschung und stellen Ergebnisse über kohomologische Hilbertfunktionen vor.

Im Folgenden beschreiben wir das Grundkonzept unseres Projektes etwas ausführlicher. Zunächst sagen wir, was wir unter der Arithmetisierung der Gestalt verstehen wollen. Dazu gehen wir aus von einer Klasse  $C$  von geometrischen Objekten. Wir denken dabei etwa an die Klasse der (differenzierbaren, analytischen ...) Mannigfaltigkeiten, oder an

Unterklassen wie diejenige der Kurven oder der Flächen. In Betracht ziehen wir ebenfalls die Klasse der (projektiven) algebraischen Varietäten oder spezielle Klassen solcher Varietäten. Eine *Arithmetisierung der Gestalt der Objekte* von  $C$  — oder kürzer — eine *Arithmetisierung der Klasse  $C$*  ist für uns eine Vorschrift  $X \mapsto a(X)$ , die jedem Objekt  $X$  von  $C$  ein "arithmetisches Objekt"  $a(X)$  zuordnet. Dabei verstehen wir unter einem arithmetischen Objekt eine ganze Zahl, oder auch eine sogenannte *arithmetische Funktion*.

Ordnet man etwa jeder projektiven algebraischen Varietät  $X$  ihre Dimension  $\dim(X)$  zu, so erhält man eine Arithmetisierung der Klasse dieser Varietäten, denn die Dimension ist als ganze Zahl ein arithmetisches Objekt. Ordnet man jeder geschlossenen orientierbaren Fläche  $X$  ihr Geschlecht  $g(X)$  zu, so erhält man eine Arithmetisierung der Klasse dieser Flächen, denn das Geschlecht  $g(X)$  ist ebenfalls immer eine ganze Zahl. Die Liste der Beispiele liesse sich beliebig verlängern!

Wir wenden uns jetzt dem Beispiel zu, das wir gewählt haben, um dem Betrachter das Konzept der Arithmetisierung näher zu bringen. Dazu gehen wir aus von der Klasse der kompakten, zusammenhängenden differenzierbaren Flächen, die wir ab jetzt einfach kurz Flächen nennen wollen. Ordnen wir einer Fläche die Zahl 0 zu, falls sie orientierbar ist und die Zahl 1, falls sie nicht orientierbar ist, so erhalten wir eine Arithmetisierung. Genauer, ist  $X$  eine Fläche, und setzen wir

$$(*) \quad \sigma(X) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } X \text{ orientierbar ist,} \\ 1 & , \text{ falls } X \text{ nicht orientierbar ist,} \end{cases}$$

so definiert die Zuordnung  $X \mapsto \sigma(X)$  eine Arithmetisierung der (Klasse der) Flächen.

Aus folgenden Gründen scheint uns das soeben beschriebene Beispiel einer Arithmetisierung besonders geeignet zur Präsentation:

- Flächen sind anschaulich fassbare, ästhetisch ansprechende Objekte, und man kann über sie sprechen, ohne ihre strenge (mathematisch tiefsinnige) Definition zu kennen. Sie sind deshalb besonders geeignet zur Veranschaulichung mathematischer Begriffe.
- Anhand des Möbius-Bandes lässt sich der Begriff der Nicht-Orientierbarkeit einprägsam veranschaulichen. Das Möbius-Band ist als "Blickfang" besonders geeignet: Einerseits darf man davon ausgehen, dass es dem Betrachter bekannt ist, andererseits übt es erfahrungsgemäss immer wieder eine gewisse Faszination aus.
- Die beiden einfachsten geschlossenen nicht-orientierbaren Flächen — die Kleinsche Flasche und die projektive Ebene — sind äusserst interessante Objekte. Sie besitzen im 3-dimensionalen Raum zwar ästhetisch sehr reizvolle Bilder, lassen sich aber in diesem nicht mehr realisieren. Mit diesen beiden Flächen beginnen wir also, die Grenze des anschaulich Fassbaren zu überschreiten, eine Grenze, jenseits welcher sich heute der grösste Teil der Geometrie abspielt.

- Die projektive Ebene besitzt im Raum viele verschiedenartige Bilder. Diese Tatsache lässt sich dem Betrachter anhand einer "niedrig-dimensionalen" Analogie nahebringen: Der Verschiedenartigkeit der Schattenbilder einer geschlossenen Raumkurve.

In diesem ersten Teil lassen wir unser Projekt also ausführlich "zum Auge reden". Dieser Teil ist im Rahmen einer Ausstellung naturgemäss auch sehr wichtig: Er soll eine ansprechende Einladung an den Besucher sein, unseren Ausführungen auch in den abstrakteren Teilen des Projektes zu folgen.

Im zweiten Teil des Projektes nehmen wir den jetzt eingeführten Orientierbarkeitsbegriff zum Anlass, die bereits früher beschriebene Arithmetisierung  $(*) : X \mapsto \sigma(X)$  einzuführen. Dabei werden wir das Prinzip der Arithmetisierung der Gestalt allgemein erläutern.

Die Kleinsche Flasche und die projektive Ebene sind beides geschlossene Flächen, für die gilt  $\sigma(X) = 1$ . Nach einem bekannten Satz aus der Topologie lässt sich keine Fläche dieser Art im dreidimensionalen Raum realisieren. Dies zeigt, dass selbst eine Arithmetisierung, die nur der Werte 0 und 1 fähig ist, viel über die arithmetisierten geometrischen Objekte aussagen kann.

Schliesslich wollen wir hier auch auf die *Euler-Charakteristik* von geschlossenen Flächen hinweisen, welche eine weitere anschaulich begreifbare Arithmetisierung liefert.

In diesem zweiten Teil wird ein für die Mathematik typischer Schritt vollzogen: Der Schritt vom konkreten Einzelbeispiel zum allgemeinen Prinzip: Der Betrachter hat auf Grund des Orientierbarkeitsbegriffs das Konzept der Arithmetisierung kennengelernt und ist darauf aufmerksam gemacht worden, dass dieselbe Klasse von geometrischen Objekten auf viele Weisen arithmetisiert werden kann.

Um dem dritten Teil des Projektes zu folgen, muss der Betrachter die Bereitschaft haben, einen weiteren Schritt ins Abstrakte zu wagen. Es geht hier um die Arithmetisierung projektiver Varietäten durch sogenannte *kohomologische Hilbertfunktionen*, ein Thema der algebraischen Geometrie.

Die betrachteten geometrischen Objekte sind jetzt *projektive algebraische Varietäten*, also Objekte, die — schon aus Dimensionsgründen — im Allgemeinen unserem anschaulichen Vorstellungsvermögen nicht mehr zugänglich sind. Ohne auf Details einzugehen, werden wir solche Varietäten als *Nullstellengebilde homogener algebraischer Gleichungssysteme* beschreiben. Als anschauliche Beispiele dazu sollen eine *ebene kubische Kurve*, zwei *kubische Flächen* im Raum und drei sogenannte *Kummersche Flächen* vorgestellt werden.

Halten wir für einen Augenblick eine solche projektive Varietät  $X$  fest. Ist  $i \geq 0$  eine ganze Zahl, so kann man zu einer über  $X$  definierten *kohärenten* Garbe  $\mathcal{F}$  die sogenannte *i-te kohomologische Hilbertfunktion*  $h_{X, \mathcal{F}}^i$  von  $X$  bezüglich der Koeffizientengarbe  $\mathcal{F}$  einführen.

Es handelt sich dabei um eine Funktion  $h_{X,\mathcal{F}}^i$ , die jeder ganzen Zahl  $n$  eine ganze Zahl  $h_{X,\mathcal{F}}^i(n) \geq 0$  zuordnet. Solche Funktionen nennt man *arithmetische Funktionen* und betrachtet sie als arithmetische Objekte. Durch die Zuordnung

$$(**) \quad (X, \mathcal{F}) \mapsto h_{X,\mathcal{F}}^i$$

erhalten wir so eine Arithmetisierung der Klasse aller Paare  $(X, \mathcal{F})$ , in welchen  $X$  eine projektive Varietät und  $\mathcal{F}$  eine über  $X$  definierte Koeffizientengarbe ist. Die Bedeutung dieser Arithmetisierung liegt in der fundamentalen Rolle, welche den kohomologischen Hilbertfunktionen in der algebraischen Geometrie zukommt.

Im Rahmen einer öffentlichen Ausstellung wäre es vermessen, den Begriff der kohärenten Garbe erklären zu wollen, oder gar auf die Definition der kohomologischen Hilbertfunktion eingehen zu wollen.

Im vierten und letzten Teil des Projektes bringen wir zwei Schwerpunkte unserer eigenen Forschung über kohomologische Hilbertfunktionen zur Darstellung:

- Berechnung von "a-priori-Schranken" für die eingeführten Hilbertfunktionen.
- Genaue Berechnung dieser Funktionen für sogenannte "Standard-Aufblasungen".

Zur Erläuterung des ersten Themas halten wir  $X$  und  $\mathcal{F}$  fest. Es geht hier darum, auf Grund endlich vieler Daten über das Paar  $(X, \mathcal{F})$  die Funktionen  $n \mapsto h_{X,\mathcal{F}}^i(n)$  abzuschätzen. Wir legen dies anhand der sogenannten "Diagonal-Schranken" dar. In Anbetracht der Tatsache, dass sich das zu untersuchende geometrische Objekt  $X$  selbst unserer Vorstellung entzieht, versuchen wir dem Betrachter die arithmetischen Ersatzobjekte  $h_{X,\mathcal{F}}^i$  anschaulich zu machen. Dies geschieht mit Hilfe von Graphiken und Wertetabellen. So lässt sich auch erklären, wie die genannten Schranken zu verstehen sind. Für den speziell Interessierten geben wir den von uns entwickelten Algorithmus an. Dabei betrachten wir nur Schranken vom "Castelnuovo"-Typ.

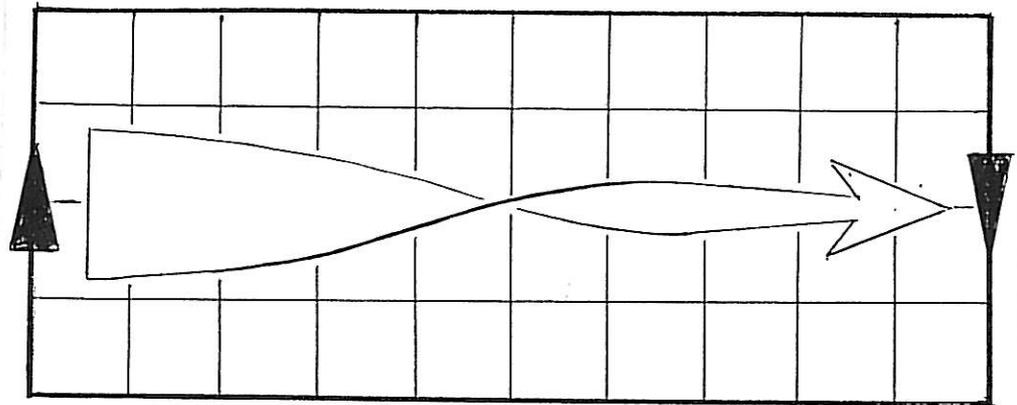
Für die sogenannten "Standard-Aufblasungen" können die kohomologischen Hilbertfunktionen nicht nur abgeschätzt, sondern sogar berechnet werden (vgl. Abschnitt 6).

Wir werden eine grobe Beschreibung des Begriffs der *Aufblasung* geben, und diesen anhand von Standard-Aufblasungen der Ebene veranschaulichen. So wird dem Betrachter am Ende seines Weges durch ästhetisch ansprechende Objekte in Erinnerung gerufen, dass es auch im vierten Teil unseres Projektes um Geometrie geht, obwohl sich diese hier grösstenteils unserer Anschauung entzieht.

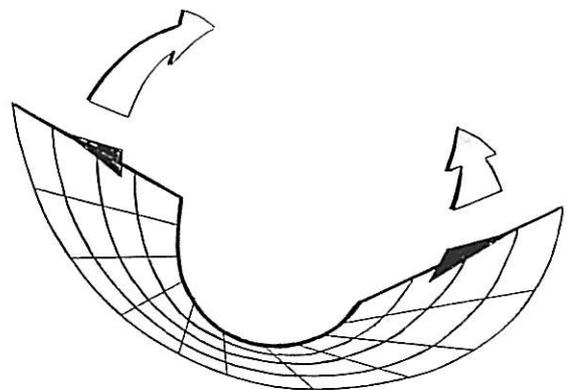
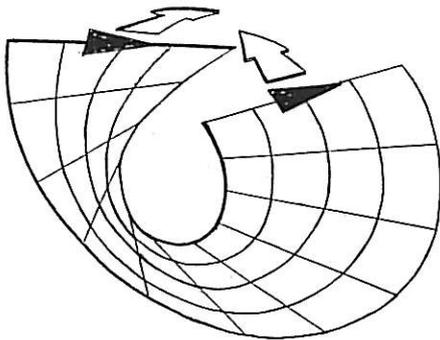
# 1. DAS MÖBIUS-BAND :

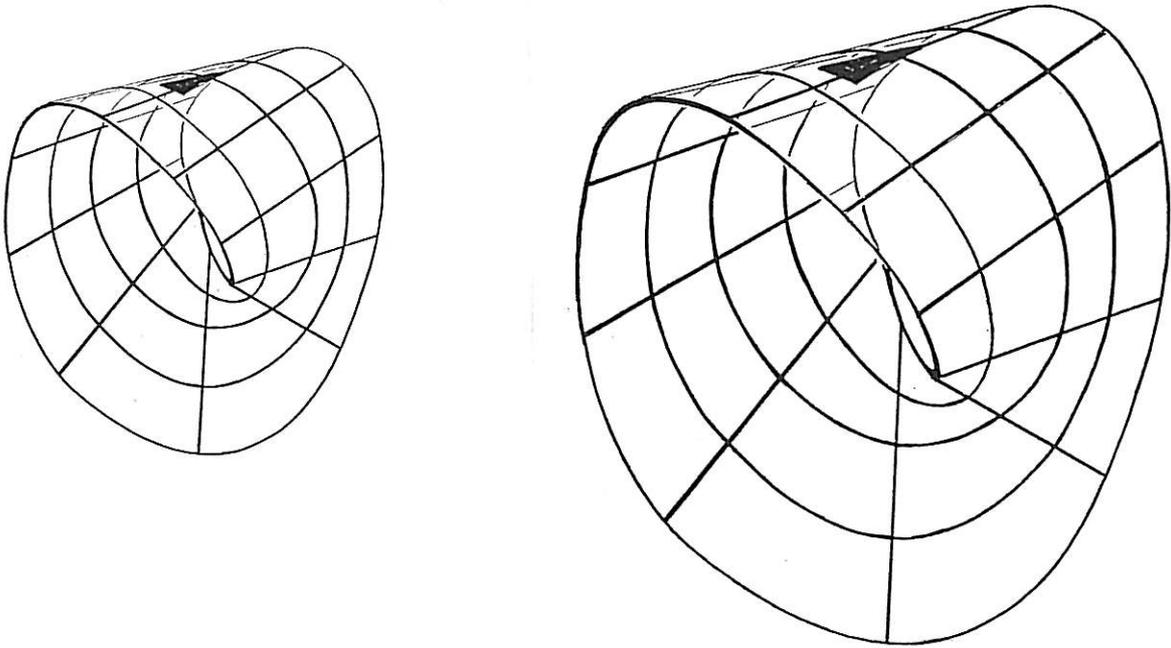
## BEISPIEL EINER NICHT ORIENTIERBAREN FLÄCHE

Ein Möbius-Band entsteht, wenn wir die Schmalseiten eines Rechtecks miteinander verkleben und gleichzeitig eine dieser Seiten um  $180^\circ$  verdrehen. Diese Verklebungsvorschrift ist in der nachfolgenden Skizze suggestiv veranschaulicht. Das Verheften der Schmalseiten ist demnach so vorzunehmen, dass die beiden Pfeilsymbole  $\blacktriangleup$  und  $\blacktriangledown$  zur Deckung kommen.



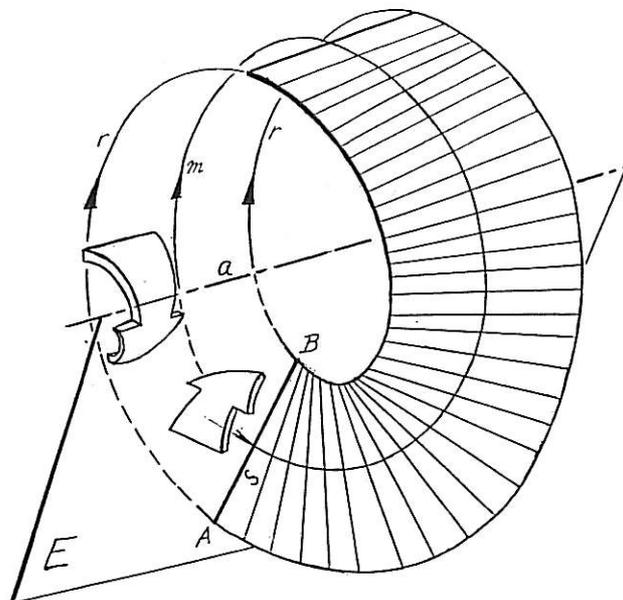
Der oben beschriebene Verklebungsprozess ist nachfolgend in drei Schritten anschaulich dargestellt.



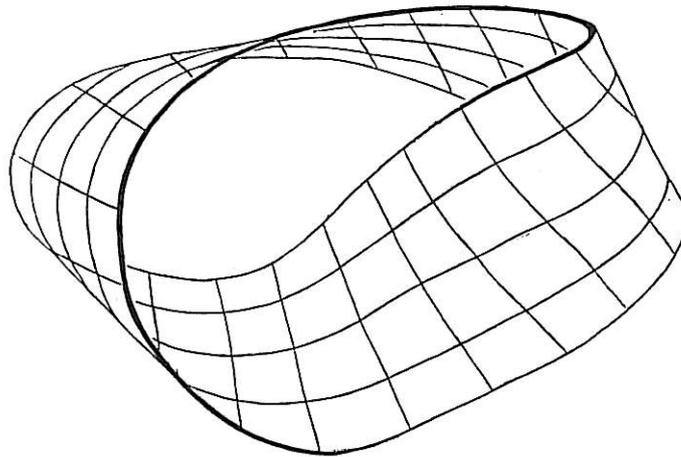


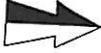
”Ideales Möbius Band”  
(vgl. [Le<sub>1</sub>])

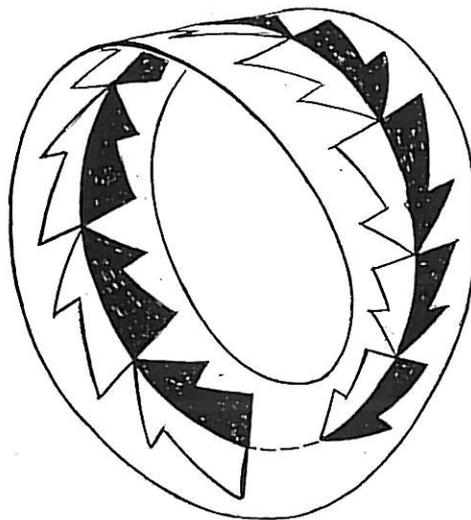
Das skizzierte Möbius-Band ist ein ”ideales” Möbius-Band. Es entsteht, indem man eine Ebene  $E$  um eine Achse  $a$  dreht und gleichzeitig eine in  $E$  liegende Strecke  $s$  halb so schnell um ihren Mittelpunkt dreht. Diese Art, ein Möbius-Band entstehen zu lassen, ist in der nachfolgenden Skizze dargestellt. Der Kreis, auf welchem sich der Mittelpunkt der Strecke  $s$  bewegt, ist dabei mit  $m$  bezeichnet. Die Bahnen der beiden Endpunkte  $A$  und  $B$  der Strecke  $s$  schliessen sich nach einem vollen Umlauf der Ebene  $E$  zu einer einzigen Kurve — der Randkurve  $r$  des Möbius-Bandes.



Stellt man ein Möbius-Band aus einem geraden Streifen Papier her, so erhält man kein ideales Möbius-Band im oben beschriebenen Sinn. Weil Papier nicht dehnbar ist, nimmt unser "reales" Möbius-Band die nachfolgend skizzierte Gestalt an.



Verschiebt man eine Figur (in unserem Fall das Pfeil-Symbol ) längs des Zentralkreises eines Möbius-Bandes, so kehrt sie seitenverkehrt zurück!

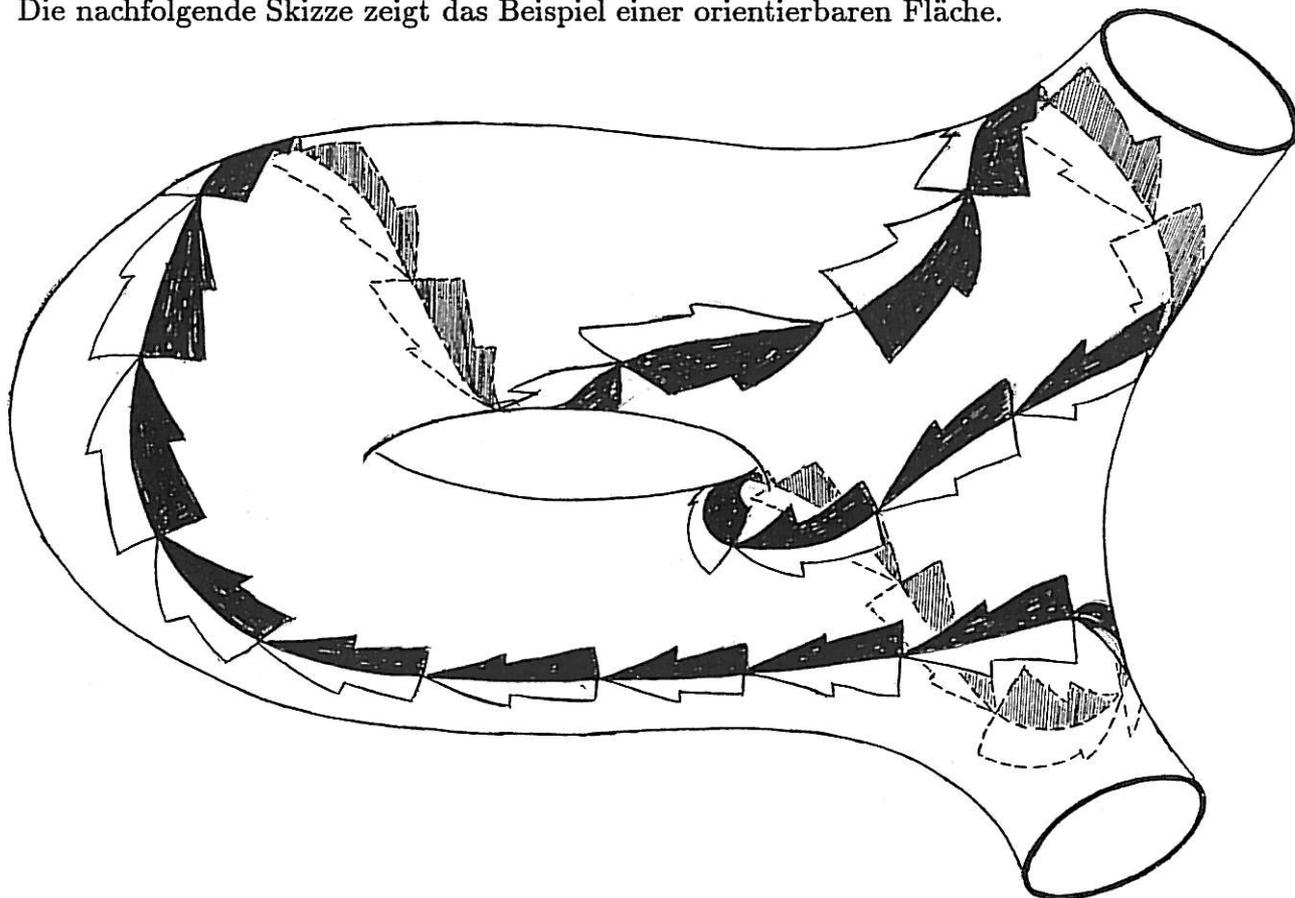


Für den Mathematiker heisst dies:

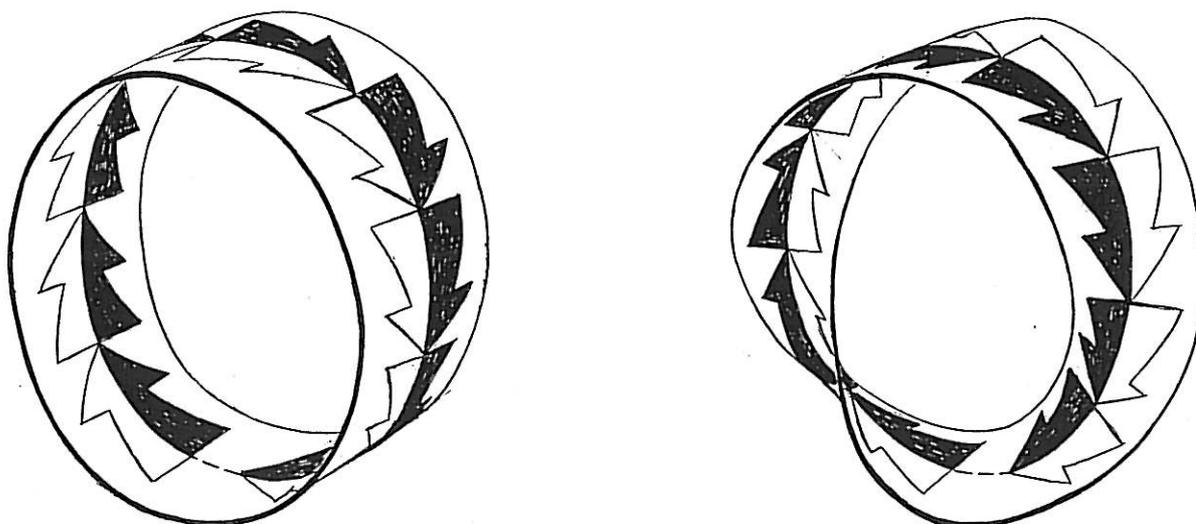
Das Möbius-Band ist nicht orientierbar.

Verschiebt man auf einer orientierbaren Fläche eine Figur längs eines geschlossenen Weges, so kehrt sie nie seitenverkehrt zurück!

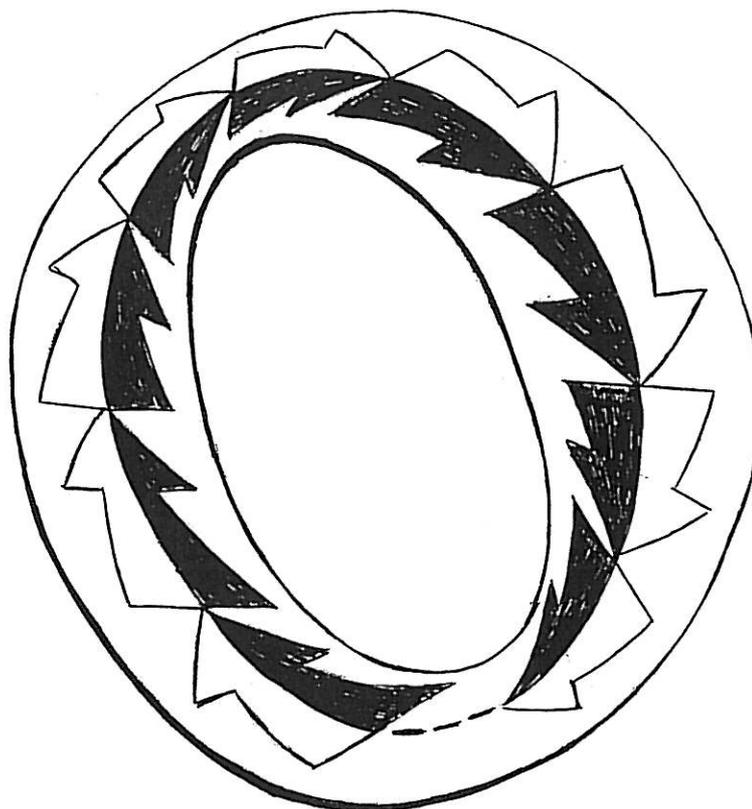
Die nachfolgende Skizze zeigt das Beispiel einer orientierbaren Fläche.



Andere Beispiele orientierbarer Flächen sind das "einfache" geschlossene Band oder das "um 360° verdrehte" Band.

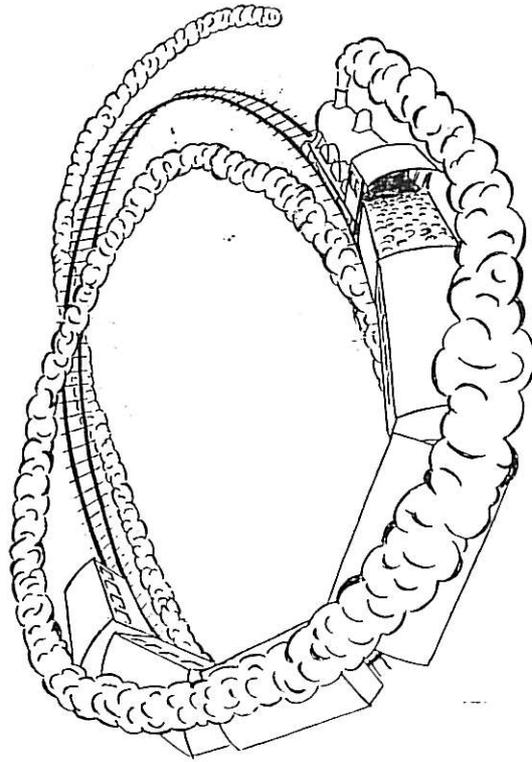


Verformt man eine orientierbare Fläche, so bleibt sie orientierbar. Wir veranschaulichen dies am Beispiel des einfachen Bandes.

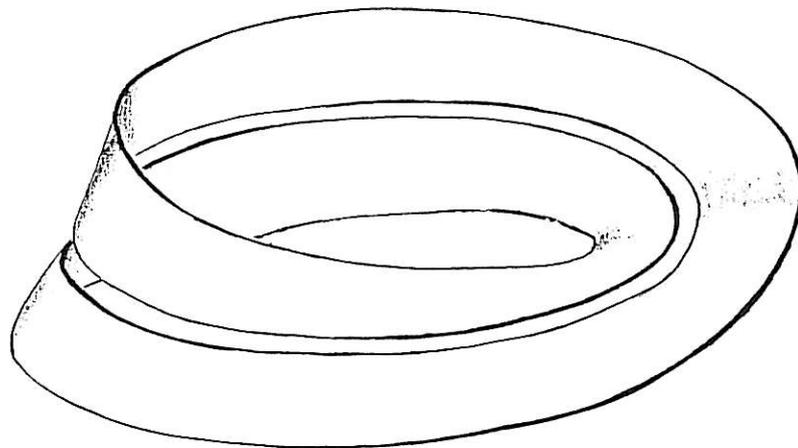


Diese "Invarianz unter Verformung" rührt daher, dass die Orientierbarkeit einer Fläche eine "topologische Eigenschaft" ist. Das einfache und das um  $360^\circ$  verdrehte Band sind übrigens ebenfalls "topologisch äquivalent". Deshalb ist es vom Standpunkt des Mathematikers klar, dass beide dieselben Orientierbarkeitseigenschaften haben.

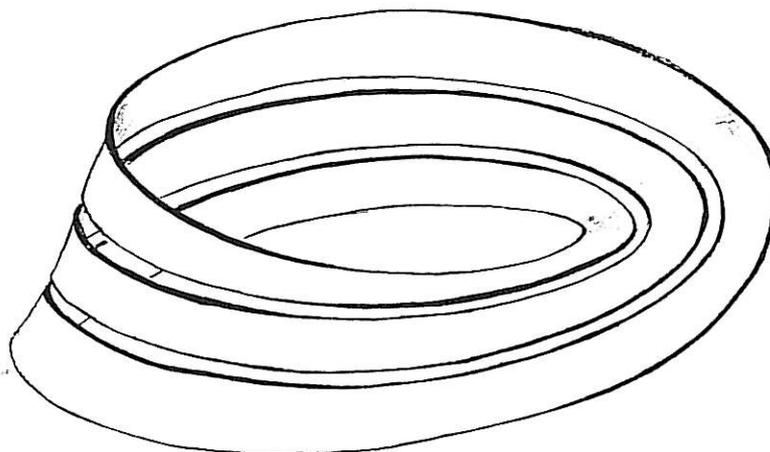
Das Möbius-Band regt nicht nur die Phantasie der Mathematiker an, sondern verlockt auch zu geistigen und handfesten Spielereien und Versuchen. Mathematik und Spiel sind ja innerlich verwandt!



Zerschneiden wir etwa ein Möbius-Band längs seiner Mitte, so entsteht ein um  $360^\circ$  verdrehtes Band. Dieses "Experiment" empfehlen wir zur praktischen Durchführung.



Legen wir einen "Drittel-Schritt" wie er nachfolgend skizziert ist, so entsteht eine Konfiguration deren Beschreibung wir dem Betrachter als Aufgabe überlassen.



Das Möbius-Band wird benannt nach dem Mathematiker und Astronomen *A.F. Möbius* (1790-1868). Möbius war Schüler von C.F. Gauss und wurde später Astronomie-Professor zu Leipzig. Er führte dort mit seiner Familie ein sehr zurückgezogenes Leben und frönte nachts, neben den Beobachtungen am Fernrohr, seiner geheimen Leidenschaft — der Mathematik. So entstand ein umfangreiches Gesamtwerk, das allerdings zu Lebzeiten seines Verfassers kaum beachtet wurde. Erst späteren Generationen von Mathematikern wurde klar, dass Möbius' Arbeiten viele wegweisende Ideen enthielten. Eine seiner "Entdeckungen" — die er im Alter von über siebenzig Jahren machte — ist das Möbius-Band. Sicher war dieses Band schon früher bekannt. Möbius erkannte als erster seine Bedeutung für die Mathematik und benutzte es um den Begriff der Orientierbarkeit zu erläutern.

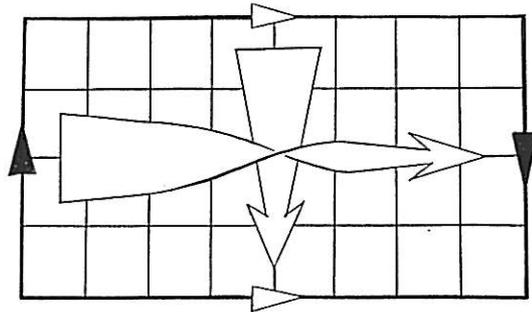
## 2. KLEINSCHE FLASCHE UND PROJEKTIVE EBENE : WIR VERLASSEN DEN 3-DIMENSIONALEN RAUM

Wir gehen wieder aus von einem Rechteck, aus dem wir, wie im Falle des Möbius-Bandes, durch Verkleben gegenüberliegender Seiten eine neue Fläche gewinnen wollen. Dabei möchten wir die beiden Längsseiten so miteinander verheften, dass jeweils zwei Punkte zusammenfallen, die sich direkt gegenüberliegen. In der nachfolgenden Figur kommen dabei die beiden Pfeilsymbole

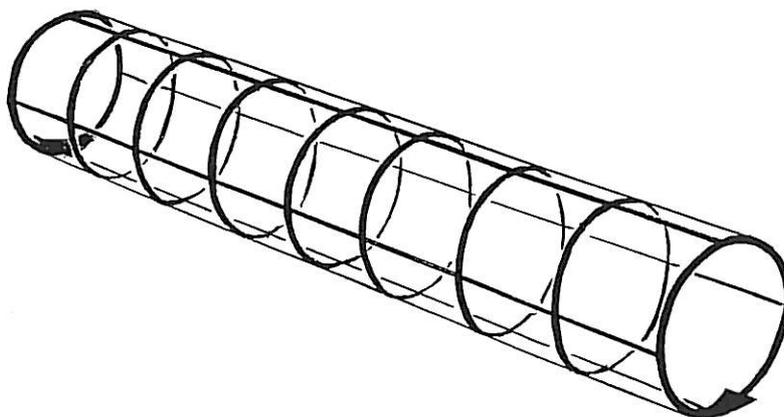
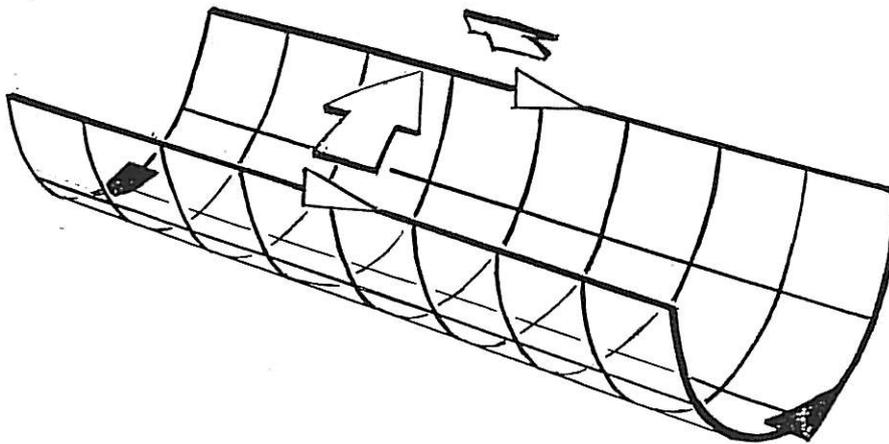


zur Deckung.

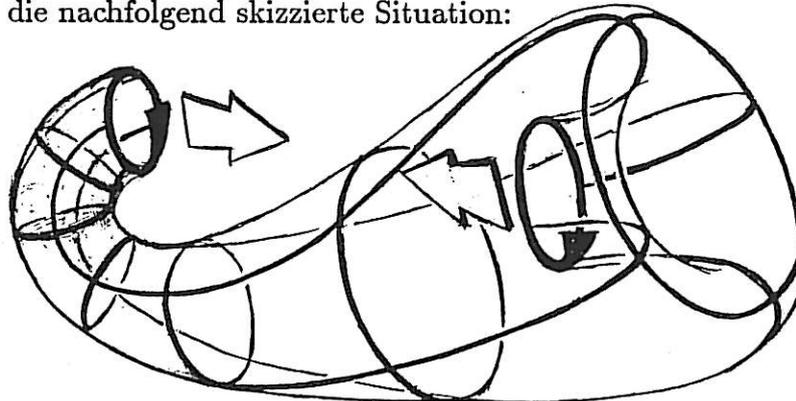
Die beiden Schmalseiten verheften wir gleich wie im Falle des Möbius-Bandes, sodass wieder die Symbole  $\blacktriangle$  und  $\blacktriangle$  zur Deckung gelangen.



Beim Verkleben der Längsseiten entsteht so eine "Röhre".

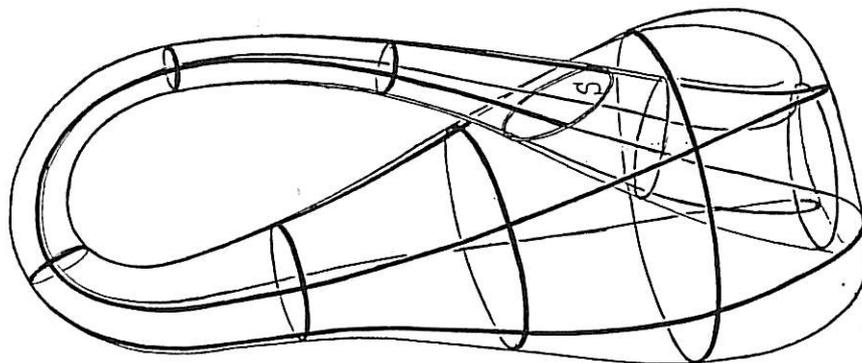


Beim zweiten Schritt muss diese Röhre so verformt und müssen die beiden Enden so verklebt werden, dass die dort eingezeichneten Pfeile dieselbe Richtung haben. Dazu stülpen wir ein Ende unserer Röhre nach innen und biegen die Röhre am anderen Ende um. So entsteht die nachfolgend skizzierte Situation:



Offenbar geraten wir so in Schwierigkeiten, da die Fläche zwischen die beiden Enden gerät, die wir miteinander verkleben wollen. Dies ist kein Zufall, denn die Aufgabe, die wir uns gestellt haben, lässt sich im 3-dimensionalen Raum gar nicht lösen! Im 4-dimensionalen Raum ist unser Problem aber lösbar. Die Fläche, die wir dort erhalten, ist die sogenannte *Kleinsche Flasche*. Natürlich können wir uns diese Fläche nicht mehr vorstellen, da sie sich ausserhalb des 3-dimensionalen Raumes befindet.

Ein gewisses Bild der Kleinschen Flasche können wir uns trotzdem machen. Wir führen dabei den in der vorangehenden Skizze angedeuteten Verheftungsprozess zu Ende. So erhalten wir eine geschlossene Fläche. Allerdings entsteht dabei unvermeidlich eine Selbstdurchdringung  $S$ , welche in Tat und Wahrheit nicht vorhanden ist. Wir erhalten so das folgende Gebilde.

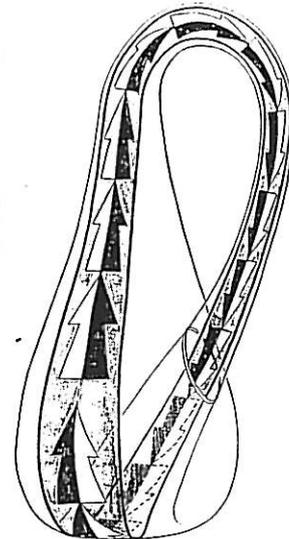


Es handelt sich um eine Fläche im Raum, die nur ein "Bild" der Kleinschen Flasche ist. Die vorangehend skizzierte Fläche steht also zur wirklichen kleinschen Flasche in einem ähnlichen Verhältnis wie eine Photographie eines räumlichen Objekts zum Objekt selbst.

Die Kleinsche Flasche ist dem Möbius-Band eng verwandt. Sie enthält nämlich selbst ein Möbius-Band. Die nebenstehende Figur dient der Veranschaulichung dieser Tatsache. Wir schliessen daraus:

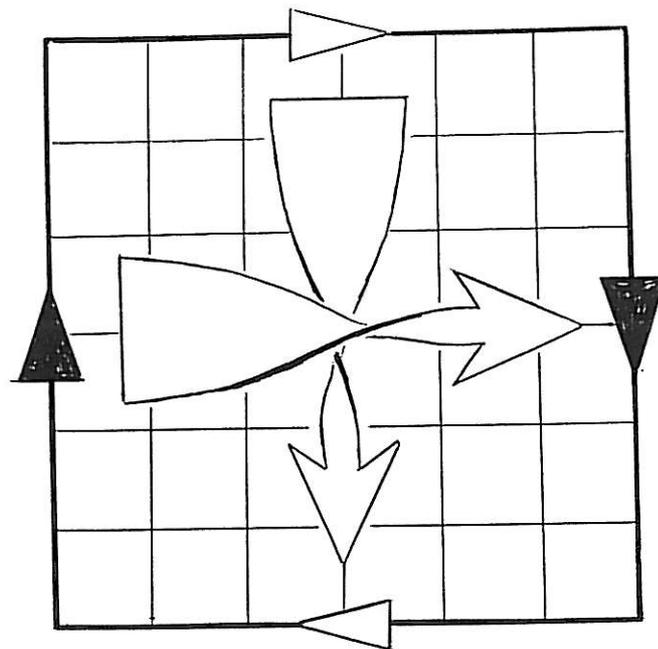
Die Kleinsche Flasche ist nicht orientierbar.

Die Kleinsche Flasche wird so benannt nach dem Mathematiker F. Klein (1849-1924).

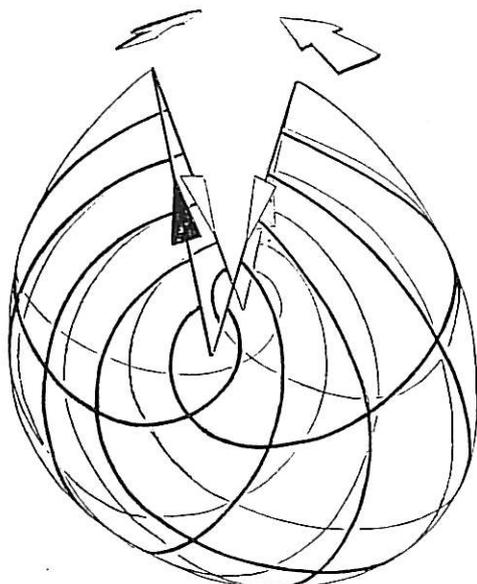
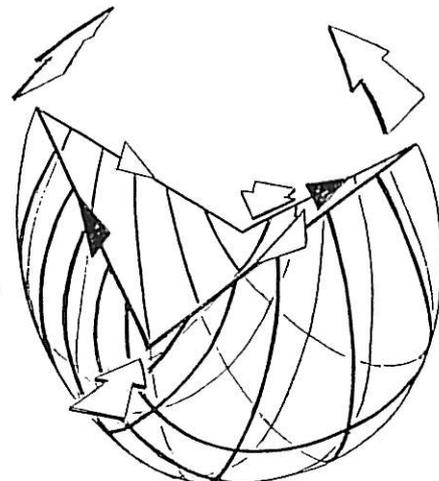
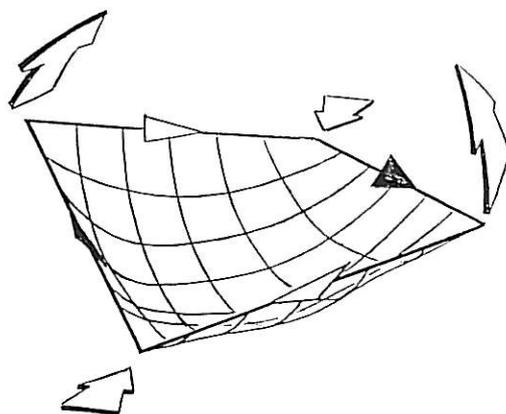


Klein war Professor in Erlangen, München, Leipzig und Göttingen. Er leistete bedeutende Beiträge zur Analysis, zur Gruppentheorie und zur Geometrie. Seine im *"Erlanger Programm"* entworfene Systematik der Geometrie enthält ein Ordnungsprinzip, das bis heute für grosse Teile der Mathematik von fundamentaler Bedeutung ist. Er gilt als Entdecker der nach ihm benannten Flasche. Sie ist das einfachste Beispiel einer immersiv einbettbaren, geschlossenen, nicht orientierbaren Fläche.

Wir wollen jetzt eine weitere geschlossene Fläche behandeln, die dem Möbius-Band verwandt ist. Dazu gehen wir aus von einem Quadrat, in welchem wir gegenüberliegende Seiten um  $180^\circ$  verdrehen und sie dann miteinander verheften wollen. In der nachfolgenden Figur kommen dabei die beiden gleichartigen Pfeilsymbole miteinander zur Deckung.

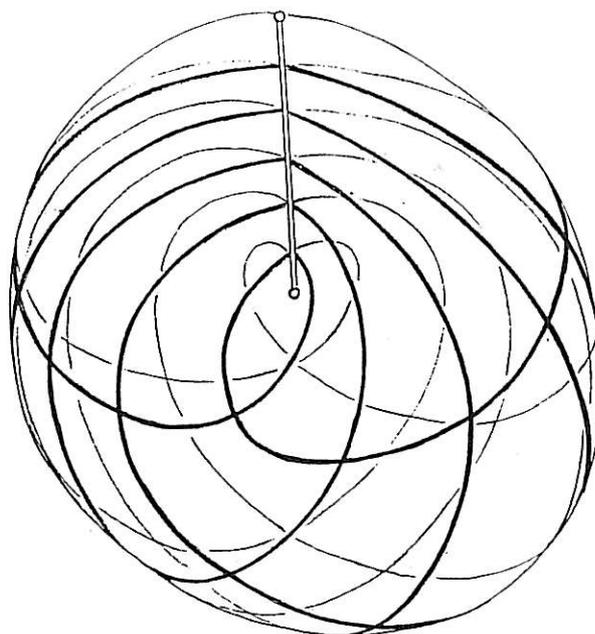


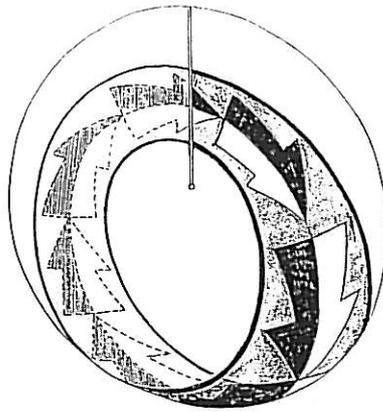
Wir verformen unser Quadrat so, wie dies nachfolgend in drei Schritten dargestellt wird. Die ursprünglich gegenüberliegenden Ecken kommen sich dabei immer näher. Die Pfeilsymbole, die am Schluss zur Deckung kommen sollten, werden allmählich in eine dazu geeignet erscheidende Lage gebracht.



Offenbar geraten wir aber jetzt in ähnliche Schwierigkeiten wie bei der Kleinschen Flasche. Unser Problem ist im dreidimensionalen Raum nicht lösbar, ohne dass wir eine Fläche mit einer Selbstdurchdringung erhalten.

Führen wir die angefangene Verformung zu Ende, so erhalten wir die nebenstehend skizzierte Fläche mit einer Selbstdurchdringung  $S$ . Genau wie bei der Kleinschen Flasche handelt es sich dabei nur um ein Bild einer Fläche, die sich im dreidimensionalen Raum nicht realisieren lässt.



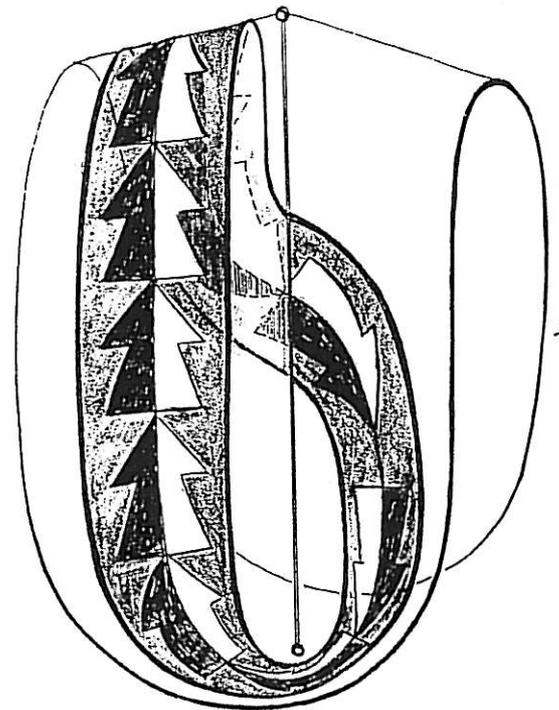


Diese Fläche heisst die *projektive Ebene*, unser Bild dieser Fläche das *Kreuzhauben-Modell*. Wie die nebenstehende Figur zeigt, enthält die projektive Ebene wieder ein Möbius-Band:

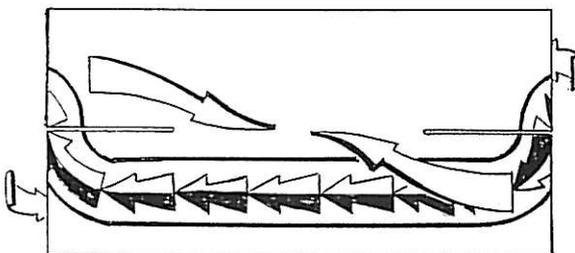
Die projektive Ebene ist nicht orientierbar!

Betrachten wir auf der Kreuzhaubenfläche nur eine Umgebung der Selbstdurchdringungsstrecke  $S$ , so erhalten wir einen sogenannten *Whitney-Doppelschirm*, eine Konfiguration, die man auf vielen Flächen findet.

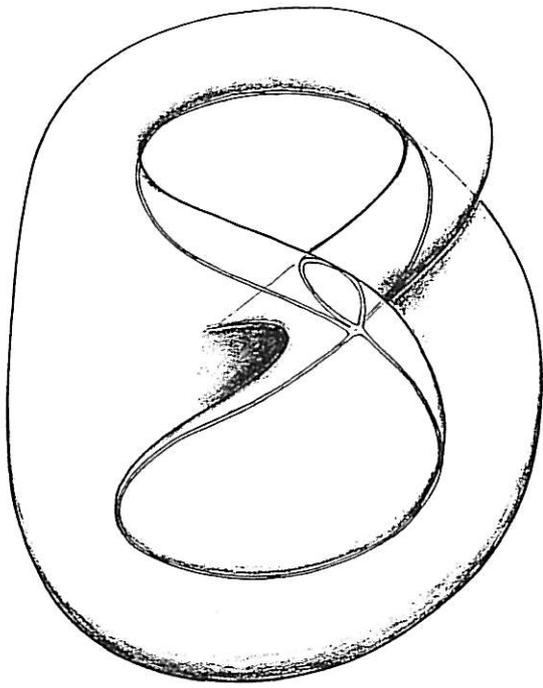
Die nebenstehende Skizze zeigt einen solchen Doppelschirm mit einem Möbius-Band.



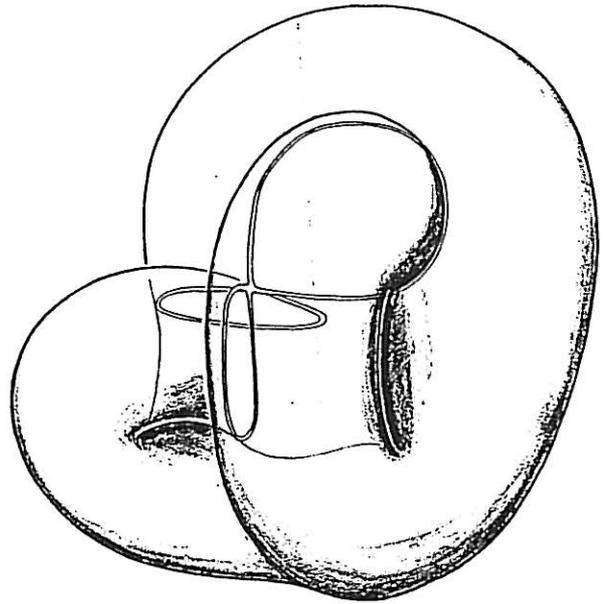
Ein solcher Doppelschirm lässt sich leicht aus einem Stück Folie herstellen. Ein "Schnittmuster" dafür wird in der nachfolgenden Figur dargestellt, (vgl. [Br<sub>18</sub>]).



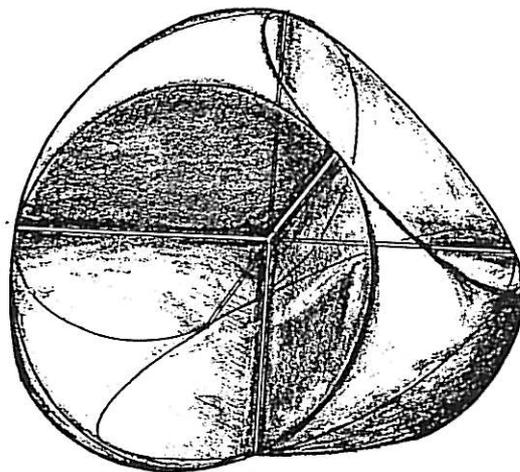
Nebst dem Kreuzhaubenmodell besitzt die projektive Ebene zahlreiche andere Bilder im dreidimensionalen Raum. Die folgenden Skizzen zeigen einige Beispiele. In jedem Fall treten Selbstdurchdringungen auf. Diese sind als Doppellinien gekennzeichnet.



”3-Extremen-Modell”



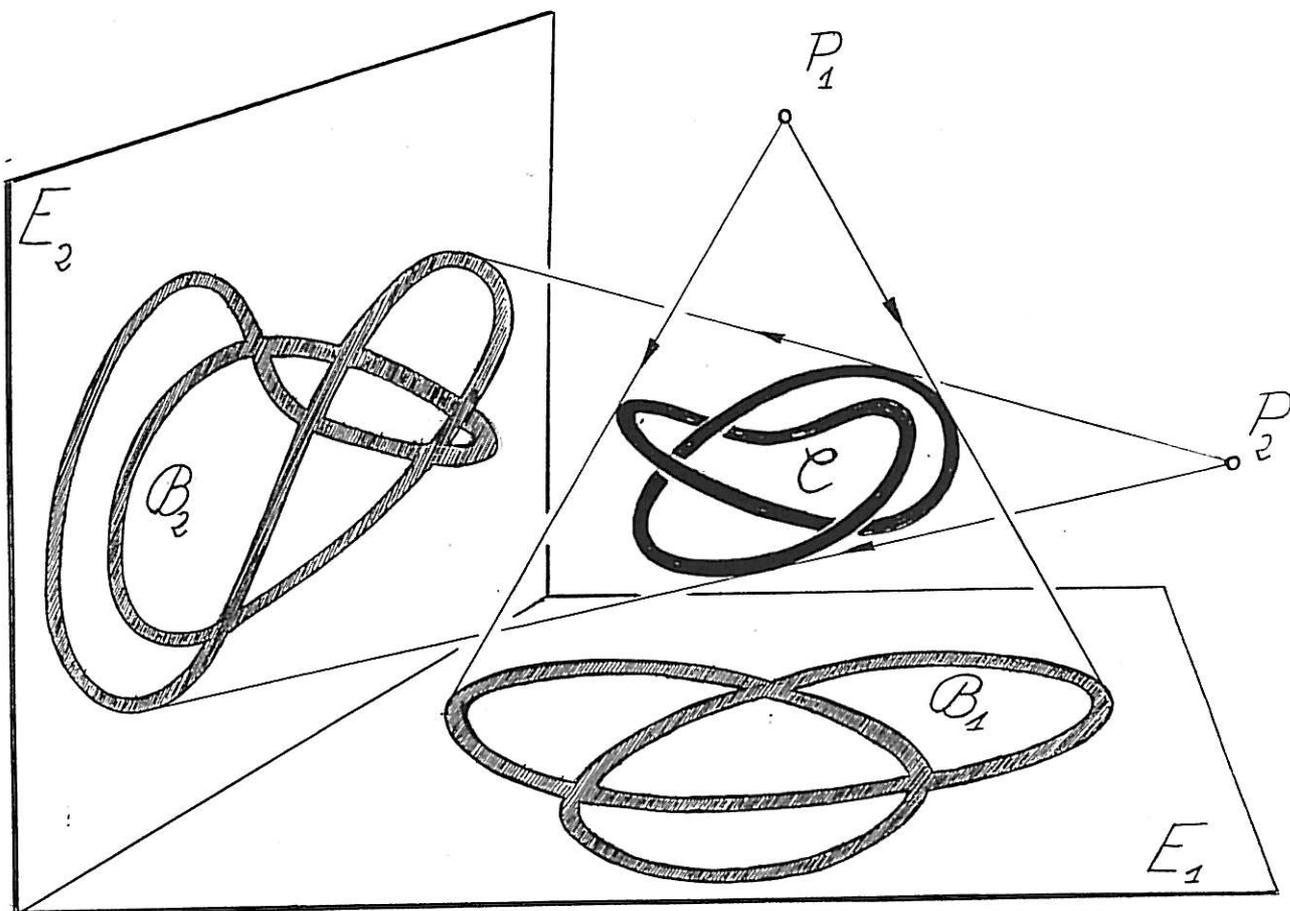
”Symmetrisches Modell”  
(Boy'sche Fläche)



”Steinersche Römerfläche”

Die Verschiedenartigkeit dieser Bilder desselben Objektes lässt sich durch eine Analogie veranschaulichen. Projiziert man nämlich etwa eine feste, geschlossene Raumkurve  $C$  aus verschiedenen Punkten, so entstehen ebenfalls Bilder ganz verschiedener Art. Dies ist in der folgenden Skizze an einem Beispiel dargestellt. Die Kurve  $C$  ist dabei ein sogenannter

Kleeblatt-Knoten. Die Projektionen werden realisiert durch Beleuchten mit punktförmigen Lichtquellen an zwei verschiedenen Stellen  $P_1, P_2$ . Die Bilder  $B_1$  und  $B_2$  von  $C$  entstehen dann durch Schattenwurf auf geeignete Ebenen  $E_1$  und  $E_2$ .



"Projektionen eines Torusknotens"  
 (vgl. [Schw], [Le<sub>2</sub>], [Br<sub>19</sub>])

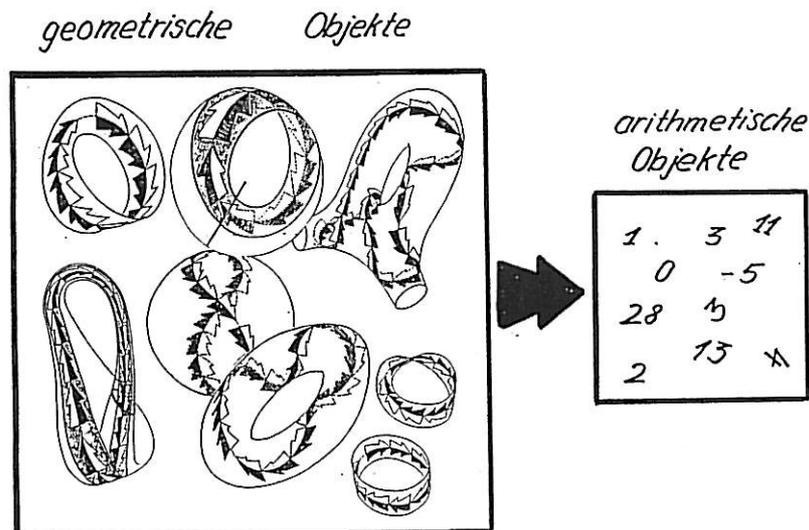
### 3. DAS PRINZIP DER ARITHMETISIERUNG GEOMETRISCHER OBJEKTE

Sei  $X$  eine Fläche. Wir ordnen  $X$  die Zahl 0 zu, falls  $X$  orientierbar ist und die Zahl 1, falls  $X$  nicht orientierbar ist. Bezeichnen wir die  $X$  auf diese Art zugeordnete Zahl mit  $\sigma(X)$ , so können wir also schreiben

(\*)

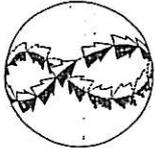
$$\sigma(X) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } X \text{ orientierbar,} \\ 1 & , \text{ falls } X \text{ nicht orientierbar.} \end{cases}$$

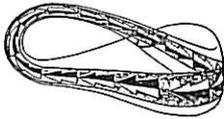
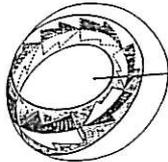
So wird einem *geometrischen Objekt* — nämlich einer Fläche  $X$  — ein *arithmetisches Objekt* — nämlich die ganze Zahl  $\sigma(X)$  — zugeordnet. Schreiben wir  $\mathcal{C}$  für die Klasse der (zusammenhängenden, kompakten) Flächen, so wird durch die in (\*) beschriebene Zuordnung  $X \mapsto \sigma(X)$  eine *Arithmetisierung* der Klasse  $\mathcal{C}$  der Flächen definiert.



Der Sinn einer solchen Arithmetisierung besteht darin, dass das arithmetische Objekt, das einem geometrischen Objekt zugeordnet wird, gewisse Informationen über die Gestalt des letzteren enthält. Man spricht deshalb auch von der *Arithmetisierung der Gestalt* geometrischer Objekte.

Die nachfolgenden Tabellen geben einige Werte für die Arithmetisierung  $X \mapsto \sigma(X)$

Fläche $X$		$\sigma(X)$
einfaches Band		0
voll verdrehtes Band		0
Kugel= fläche		0
Torus= fläche		0

Fläche $X$		$\sigma(X)$
Möbius- Band		1
Kleinsche Flasche		1
projektive Ebene		1

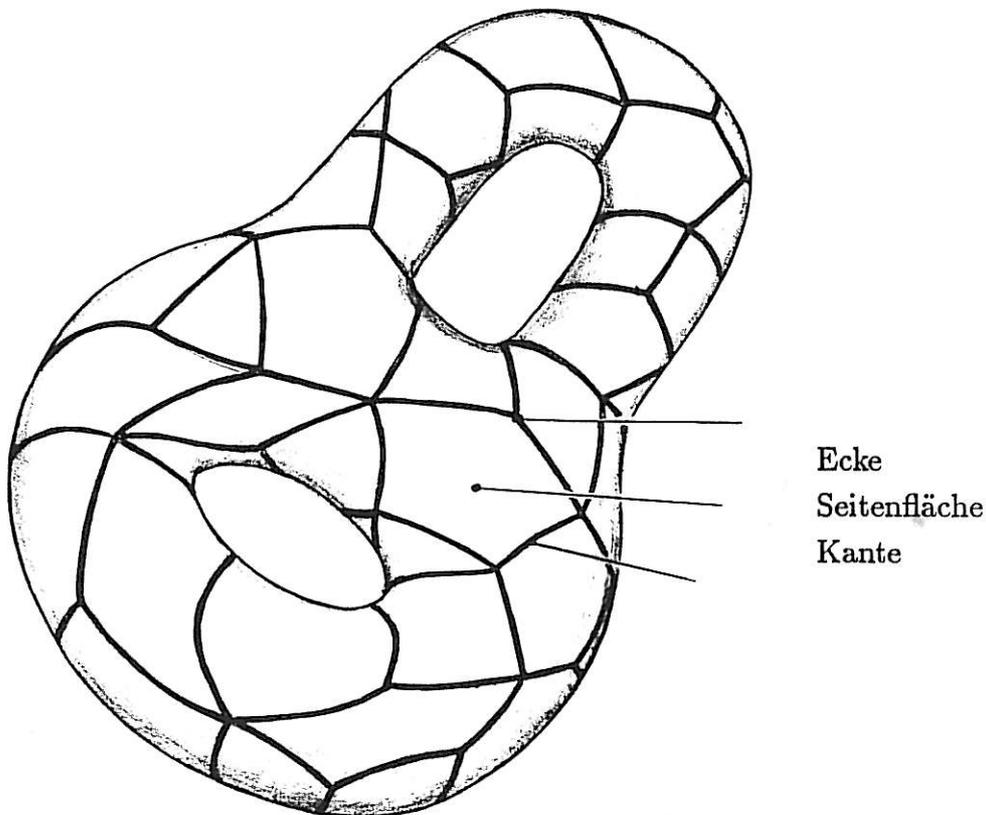
Wir haben bereits früher festgestellt, dass sowohl die Kleinsche Flasche als auch die projektive Ebene im dreidimensionalen Raum nicht realisierbar sind. Dies hat damit zu tun, dass es sich in beiden Fällen um geschlossene, nicht orientierbare Flächen handelt. Man weiss aber allgemein, dass solche Flächen im dreidimensionalen Raum nicht realisierbar sind. Anders gesagt:

Gilt für eine geschlossene Fläche  $\sigma(X) = 1$ , so ist  $X$  im dreidimensionalen Raum nicht realisierbar

Dies zeigt, dass unsere Arithmetisierung  $X \mapsto \sigma(X)$  wesentliche Eigenschaften der geometrischen Objekte  $X$  zum Ausdruck bringt.

Natürlich lassen sich Flächen auch in anderer Weise arithmetisieren. Um dies klar zu machen, betrachten wir die Klasse  $\mathcal{C}^0$  der geschlossenen, orientierbaren Flächen. Zu dieser Klasse gehören etwa die Kugelfläche und die Torusfläche.

Wir wählen jetzt eine Fläche  $X$  aus  $\mathcal{C}^0$  und zerlegen sie vollständig in Vielecke. Dabei sollen in jeder Ecke mindestens drei der Vielecke zusammenstossen.



Schreiben wir

(\*)

$s$  = Anzahl der Seitenflächen  
 $k$  = Anzahl der Kanten  
 $e$  = Anzahl der Ecken

so kann man zeigen, dass die Zahl  $s - k + e$  nur von der Fläche  $X$ , nicht aber von der gewählten Zerlegung von  $X$  in Vielecke abhängt. Diese Zahl nennt man die *Euler Charakteristik* von  $X$  und bezeichnet sie mit  $\chi(X)$ . Also

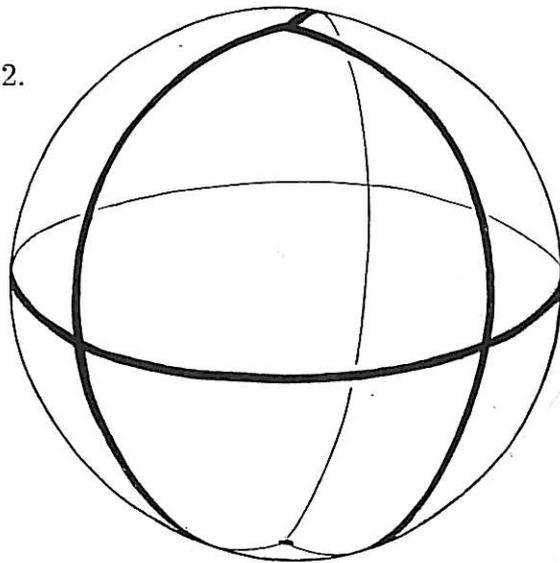
(\*\*)

$$\chi(X) = s - k + e$$

So definiert die Zuordnung  $X \mapsto \chi(X)$  eine Arithmetisierung der Klasse  $\mathcal{C}^0$  der geschlossenen, orientierbaren Flächen.

Ist  $X$  die Kugelfläche, so gilt  $\chi(X) = 2$ .

$$s = 6, k = 9, e = 5$$
$$s - k + e = 2$$



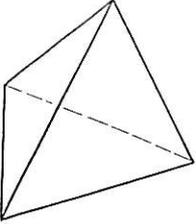
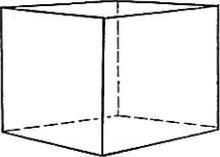
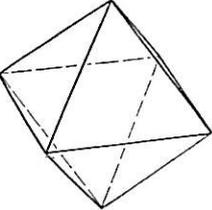
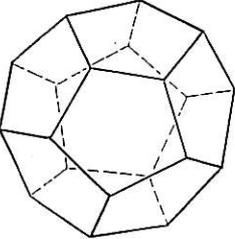
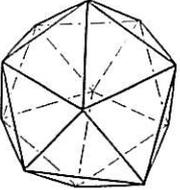
Man kann diese Aussage auch mit einem Fussball nachprüfen.

Dieser hat 32 Seitenflächen, nämlich 12 Fünfecke und 20 Sechsecke. Da jede Kante doppelt gezählt wird, treten genau  $(12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) : 2 = 90$  Kanten auf. Da jede Ecke dreifach gezählt wird, beträgt deren Anzahl  $(12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) : 3 = 60$ . Wir erhalten somit



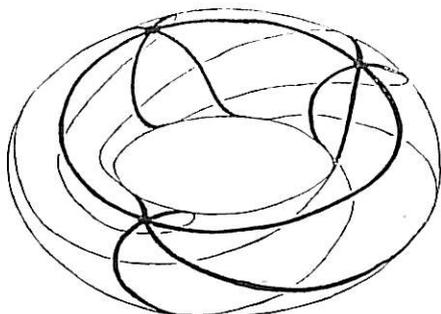
$$s = 32, k = 90, e = 60; s - k + e = 2$$

Die Euler-Charakteristik ist eine topologische Invariante. Aus diesem Grund hat sie für alle konvexen Polyeder denselben Wert wie für die Kugelfläche, also 2. Diese Tatsache ist in der folgenden Tabelle für die regulären Polyeder veranschaulicht.

Tetraeder		$s = 4$ $k = 6$ $e = 4$
Hexaeder		$s = 6$ $k = 12$ $e = 8$
Oktaeder		$s = 8$ $k = 12$ $e = 6$
Dodekaeder		$s = 12$ $k = 30$ $e = 20$
Ikosaeder		$s = 20$ $k = 30$ $e = 12$

Im Folgenden sind vier Beispiele dargestellt, für welche  $\chi(X) \neq 2$ .

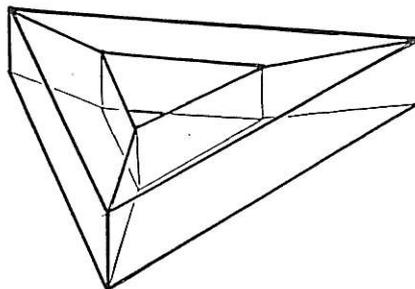
$X$



$$\begin{aligned} s &= 6 \\ k &= 9 \\ e &= 3 \end{aligned}$$

$$\chi(X) = 6 - 9 + 3 = 0$$

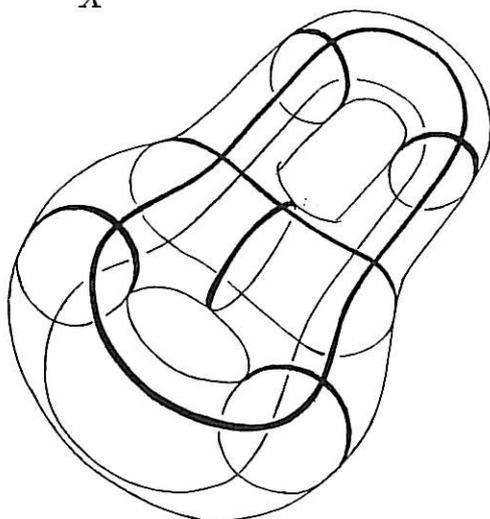
$X$



$$\begin{aligned} s &= 12 \\ k &= 24 \\ e &= 12 \end{aligned}$$

$$\chi(X) = 12 - 24 + 12 = 0$$

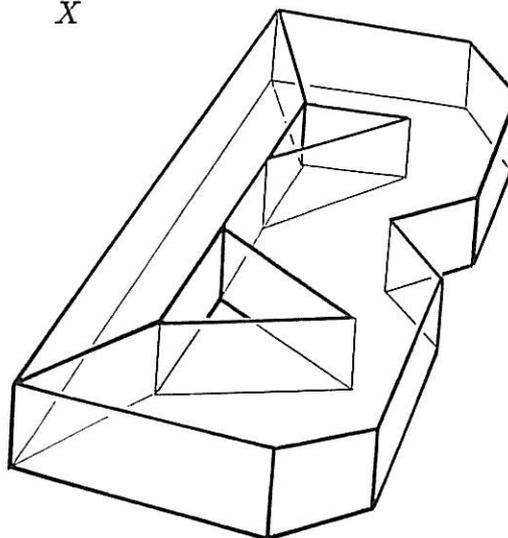
$X$



$$s = 12, k = 28, e = 14$$

$$\chi(X) = 12 - 28 + 14 = -2$$

$X$



$$s = 19, k = 51, e = 30$$

$$\chi(X) = 19 - 51 + 30 = -2$$

Die Euler-Charakteristik wird so benannt nach dem Mathematiker *L. Euler* (1707 - 1783). Euler wurde in Riehen bei Basel geboren. Bereits mit 20 Jahren wurde er Mitarbeiter der Akademie der Wissenschaften in Petersburg und gelangte dort als Mathematiker zu grossem Ruhm. Später war er auch an der Berliner Akademie der Wissenschaften tätig. Eulers Werk umfasst eine riesige Zahl von Beiträgen zu allen Gebieten der damals bekannten Mathematik. Es gilt immer noch als das umfangreichste Werk eines Mathematikers. Die Euler-Charakteristik tritt in seinen Arbeiten auf im Zusammenhang mit dem sogenannten *Eulerschen Polyedersatz*. Dieser Satz besagt, dass für die Kugelfläche  $X$  gilt  $\chi(X) = 2$ .

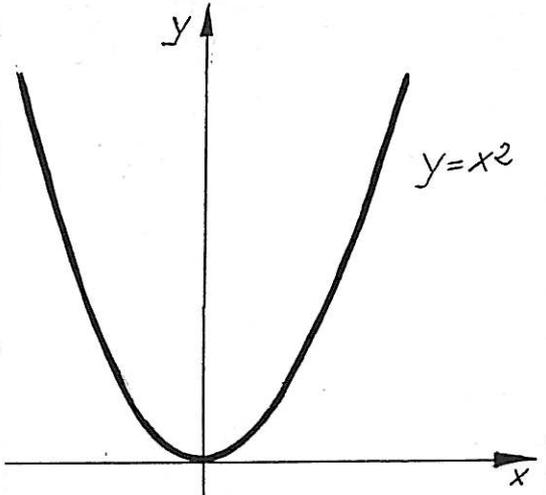
Die Euler-Charakteristik wurde durch *H. Poincaré* (1854-1912) in neuer Form beschrieben und so auch für Mannigfaltigkeiten höherer Dimension verfügbar gemacht. Poincaré gilt in diesem Zusammenhang als einer der Begründer der *algebraischen Topologie*. Diese Theorie verallgemeinert das Prinzip der Arithmetisierung der Gestalt geometrischer Objekte zum Prinzip der *Diskretisierung* der Gestalt. Sie ordnet dabei geometrischen Objekten algebraische Objekte zu, z.B. sogenannte *Homologie-, Kohomologie- oder Homotopiegruppen*. Alle bekannten Arithmetisierungen lassen sich über Diskretisierungen gewinnen. So kann man die Euler-Charakteristik mit Hilfe von Homologiegruppen berechnen. Die Frage der Orientierbarkeit kann ebenfalls auf diese Weise entschieden werden.

Arithmetische Objekte sind diskrete Objekte. In diesem Sinne kann man das Prinzip der Diskretisierung als Verallgemeinerung des Prinzips der Arithmetisierung betrachten. Was wir nachfolgend über Diskretisierungen geometrischer Objekte sagen, gilt also insbesondere auch für die Arithmetisierungen solcher Objekte.

Die einem geometrischen Objekt zugeordneten diskreten Objekte bilden etwas wie Ersatzobjekte, welche die Mathematiker anstelle der ursprünglichen geometrischen Objekte studieren. Eine Diskretisierung kann nicht alle Informationen über ein geometrisches Objekt wiedergeben. Dafür wird das zugeordnete diskrete Objekt einfacher zu untersuchen sein als das geometrische. Um ein geometrisches Objekt umfassend zu beschreiben, sind im Allgemeinen mehrere verschiedenartige Diskretisierungen nötig.

#### 4. KOHOMOLOGISCHE HILBERTFUNKTIONEN: EINE ARITHMETISIERUNG ALGEBRAISCHER VARIETÄTEN

Die *algebraische Geometrie* befasst sich mit den Lösungsgebilden algebraischer Gleichungssysteme. Diese Lösungsgebilde nennt man *algebraische Varietäten*.



Ein einfaches Beispiel einer solchen algebraischen Varietät ist etwa die durch  $y = x^2$  definierte *Parabel*. Was also in der Schule als analytische Geometrie betrieben wird, ist eigentlich ein Teilgebiet der algebraischen Geometrie.

Wir interessieren uns hier für eine etwas weniger einfache Klasse von algebraischen Varietäten. Es handelt sich dabei um *komplexe, projektive algebraische Varietäten*. Solche Varietäten werden durch sogenannte *homogene algebraische Gleichungssysteme* definiert. Ein Beispiel ist etwa das folgende System von 3 Gleichungen in den 5 Unbestimmten  $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4$  :

(\*)

$$\begin{aligned} z_1 z_4 - z_2 z_3 &= 0 \\ z_1^2 z_3 + z_0 z_1 z_2 - z_0 z_2^2 &= 0 \\ z_3^3 + z_0 z_3 z_4 - z_0 z_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

Die durch (\*) definierte projektive Varietät  $X$  ist eine (komplexe) Fläche und liegt im (komplexen) *projektiven Raum*  $\mathbf{P}^4$  der (komplexen) Dimension 4.

Die Punkte im projektiven Raum  $\mathbf{P}^4$  kann man schreiben in der Form  $p = (c_0 : c_1 : c_2 : c_3 : c_4)$ , wobei  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4$  komplexe Zahlen sind, von denen mindestens eine nicht 0 ist. Dabei stellt  $(\lambda c_0 : \lambda c_1 : \lambda c_2 : \lambda c_3 : \lambda c_4)$  für jede von 0 verschiedene komplexe Zahl  $\lambda$  denselben Punkt dar wie  $(c_0 : c_1 : c_2 : c_3 : c_4)$ .

Bei der in Abschnitt 3 topologisch betrachteten projektiven Ebene handelt es sich um die *reelle projektive Ebene*  $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$ . Deren Punkte lassen sich schreiben in der Form  $(a_0 : a_1 : a_2)$ , wobei  $a_0, a_1, a_2$  reelle Zahlen sind, von denen mindestens eine nicht 0 ist. Dabei ist  $(\mu a_0 : \mu a_1 : \mu a_2)$  für jede von 0 verschiedene reelle Zahl  $\mu$  wieder derselbe Punkt wie  $(a_0 : a_1 : a_2)$ .

Die durch (\*) definierte projektive Varietät  $X$  besteht aus den Punkten  $(c_0 : c_1 : c_2 : c_3 : c_4)$  von  $\mathbf{P}^4$ , für welche  $z_0 = c_0, z_1 = c_1, z_2 = c_2, z_3 = c_3, z_4 = c_4$  eine Lösung der 3 in (\*) erscheinenden Gleichungen ist.

Topologisch gesehen, hat der Raum  $\mathbf{P}^4$  die Dimension 8 und die Varietät  $X$  die Dimension 4. Die Varietät  $X$  entzieht sich also schon aus Dimensionsgründen unserer geometrischen Anschauung, wie dies bei algebraischen Varietäten üblicherweise der Fall ist.

In gewissen, besonders einfachen Fällen lassen sich zumindest bestimmte Teilgebilde komplexer projektiver Varietäten veranschaulichen, die man *reelle "affine" Teilvarietäten* nennt. Um eine Ahnung der faszinierenden Reichhaltigkeit der Welt der algebraischen Varietäten zu geben, machen wir dazu einige Beispiele.

Als erstes Beispiel betrachten wir die projektive Varietät  $X$ , welche definiert wird durch die einzige homogene Gleichung

(\*\*)

$$z_0 z_2^2 - z_1^3 + z_0^2 z_1 = 0$$

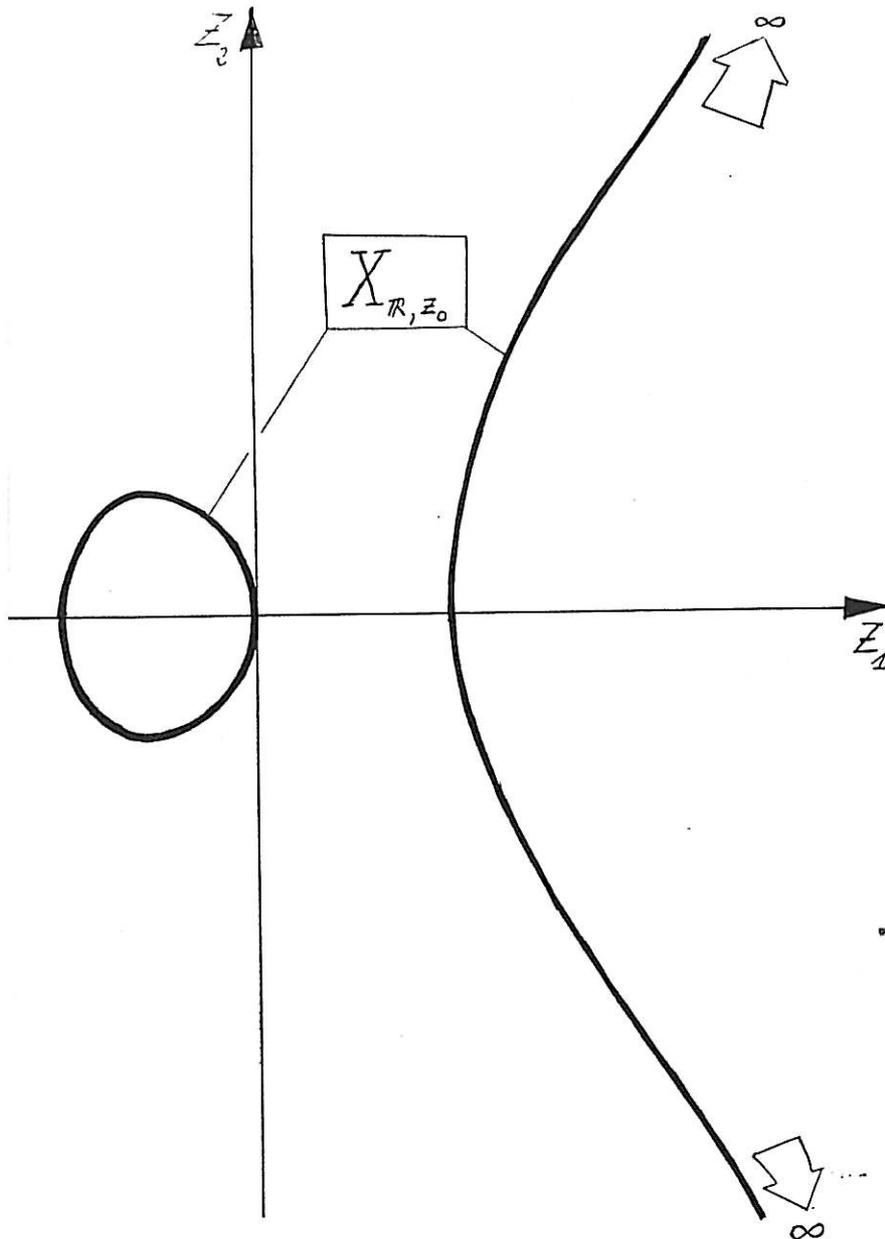
Die Varietät  $X$  liegt in der komplexen projektiven Ebene  $\mathbf{P}^2$ . Es handelt sich bei  $X$  um eine sogenannte (komplexe) *kubische Kurve*. Setzen wir  $z_0 = 1$ , so erhalten wir aus (\*\*) die Gleichung

(\*\*)<sub>0</sub>

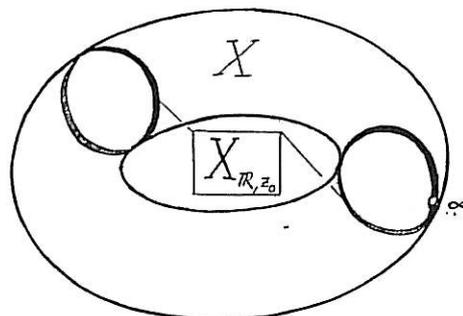
$$z_2^2 - z_1^3 + z_1 = 0$$

Die reellen Lösungen dieser Gleichung bilden denn reellen affinen Teil  $X_{\mathbf{R}, z_0}$  von  $X$ .

Es handelt sich bei  $X_{\mathbf{R}, z_0}$  um eine ebene Kurve der nachfolgend skizzierten Gestalt. Beim Uebergang zum sogenannten reellen projektiven Teil  $X_{\mathbf{R}}$  von  $X$ , wird  $X_{\mathbf{R}, z_0}$  durch einen Punkt  $\infty$  ergänzt, der im Unendlichen liegt.

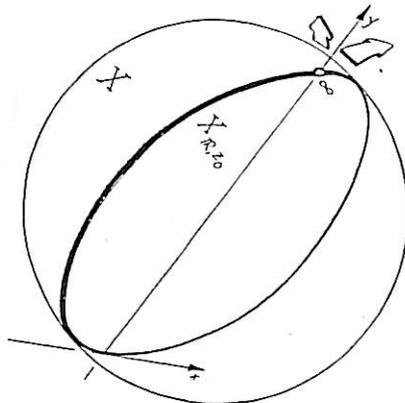


Topologisch gesehen bildet die ganze Varietät  $X$  eine Torusfläche.  $X_{R, z_0}$  und  $X_R$  erscheinen dabei als Kurve auf dieser Torusfläche. Die "reelle Schnittkurve"  $X_R$  erscheint dabei als Vereinigung zweier Kreise. Die beschriebene Situation ist nachfolgend skizziert.



Die in  $\mathbf{P}^2$  durch die Gleichung  $z_0 z_2 - z_1^2 = 0$  definierte projektive Varietät  $X$  ist topologisch gesehen eine Kugelfläche.

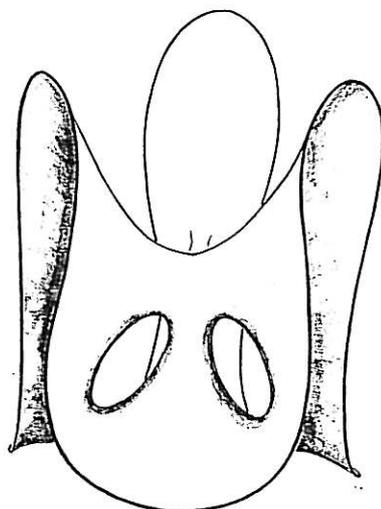
Setzen wir  $z_0 = 1, z_1 = x, z_2 = y$ , so erhalten wir die Parabelgleichung  $y = x^2$ . Die Parabel ist also der reelle affine Teil  $X_{\mathbf{R}, z_0}$  von  $X$ . Sie entsteht, indem man auf (dem Kreis)  $X_{\mathbf{R}}$  den Punkt  $\infty = (0 : 0 : 1)$  entfernt und den so geöffneten Kreis aufbiegt!



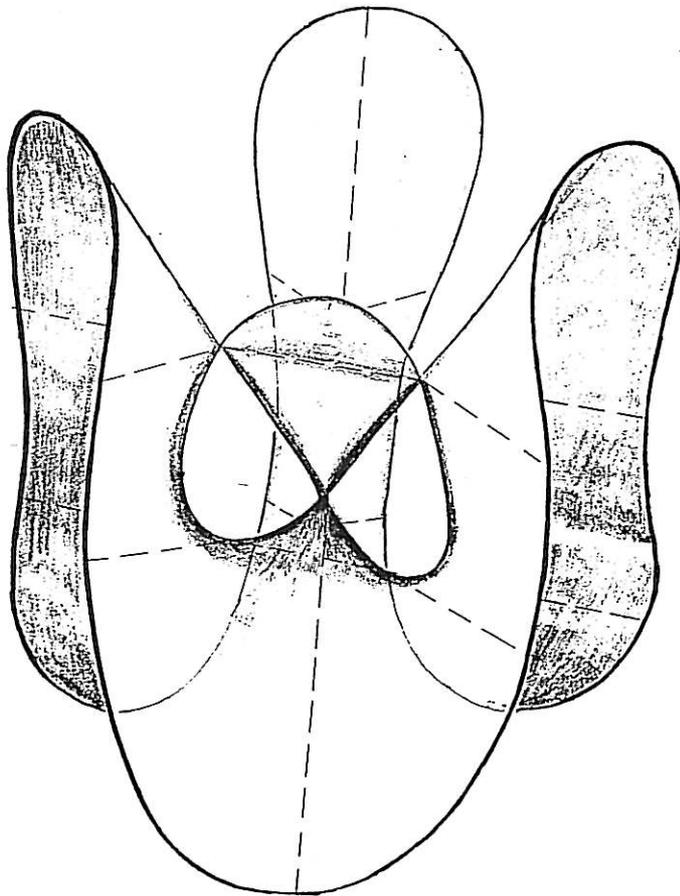
Die nächste Skizze zeigt einen reellen affinen Teil der sogenannten *Diagonalfäche* von Clebsch. Diese Fläche liegt in komplexen projektiven Raum  $\mathbf{P}^4$  und wird definiert durch die Gleichungen

(\*\*\*)

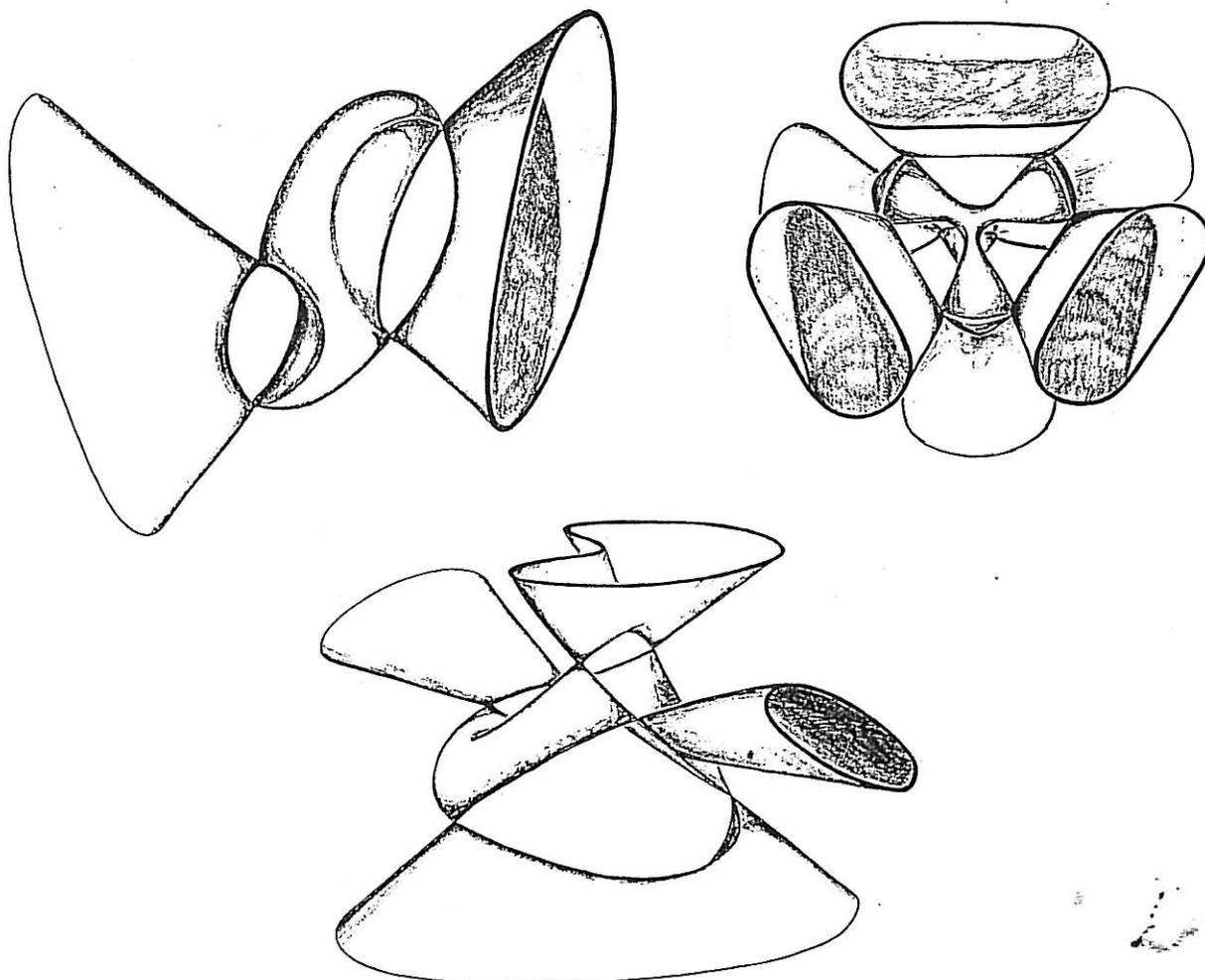
$$\begin{aligned} z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3 &= 0 \\ z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= 0 \end{aligned}$$



Es handelt sich um eine sogenannte *glatte kubische Fläche*. Solche Flächen enthalten immer 27 Geraden! Durch eine geeignete Aenderung der Gleichungen (\*\*\*) erhält man ein neues Gleichungssystem, dass eine *singuläre kubische Fläche definiert*, deren reeller affiner Teil nachfolgend skizzierte Gestalt hat. Auch diese Fläche enthält zahlreiche Geraden, nämlich 9. Diese zweite Fläche entsteht aus der ersten durch eine (im Sinne der algebraischen Geometrie definierte) *Deformation*.



Die nachfolgenden Skizzen zeigen reelle affine Teile dreier spezieller projektiver Varietäten, die man *Kummersche Flächen* nennt.



Auf einer projektiven algebraischen Varietät  $X$  lassen sich sogenannte *kohärente Garben* definieren. Einige Beispiele solcher Garben — die wir hier nicht näher beschreiben wollen — sind etwa:

- die Strukturgarbe  $\mathcal{O}_X$  von  $X$ ,
- die Tangentialgarbe  $\mathcal{T}_X$  von  $X$ ,
- die Garbe  $\Omega_X$  der Kählerdifferenziale auf  $X$ ,
- die kanonische Garbe  $\omega_X$  von  $X$ .

Liegt  $X$  im (komplexen) projektiven Raum  $\mathbf{P}^r$  der Dimension  $r$ , so definiert  $X$  auf  $\mathbf{P}^r$  eine wichtige kohärente Garbe :

- die Idealgarbe  $\mathcal{I}_X$  von  $X$ .

Die in der Theorie der projektiven algebraischen Varietäten untersuchten geometrischen Objekte sind Paare  $(X, \mathcal{F})$ , in welchen  $X$  eine projektive algebraische Varietät und  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe auf  $X$  ist. Die Klasse dieser geometrischen Objekte  $(X, \mathcal{F})$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}^+$ .

Wir halten jetzt ein solches geometrisches Objekt  $(X, \mathcal{F})$  fest und wählen eine ganze Zahl  $i \geq 0$ . Dann kann man die sogenannte  $i$ -te kohomologische Hilbertfunktion  $h_{X, \mathcal{F}}^i$  des Paares  $(X, \mathcal{F})$  definieren. Es handelt sich um eine Funktion  $h_{X, \mathcal{F}}^i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$  die jeder ganzen Zahl  $n$  eine nicht-negative ganze Zahl  $h_{X, \mathcal{F}}^i(n)$  zuordnet. Funktionen dieser Art nennt man *arithmetische Funktionen* und fasst sie als arithmetische Objekte auf.

Halten wir  $i$  fest, so erhalten wir durch die Vorschrift  $(X, \mathcal{F}) \mapsto h_{X, \mathcal{F}}^i$ , welche einem Paar  $(X, \mathcal{F})$  seine  $i$ -te kohomologische Hilbertfunktion zuordnet, eine Arithmetisierung der Klasse  $\mathcal{C}^+$ . Die *Kohomologietheorie projektiver Varietäten* studiert diese Arithmetisierung, d.h. sie untersucht die arithmetrischen Ersatzobjekte  $h_{X, \mathcal{F}}^i$  an Stelle der geometrischen Objekte  $(X, \mathcal{F})$ . Fernziel wäre es, die Funktionen  $h_{X, \mathcal{F}}^i$ , genauer deren Werte  $h_{X, \mathcal{F}}^i(n)$  für alle ganzen Zahlen  $n$ , zu berechnen.

In einfachen Fällen, d.h. für spezielle Paare  $(X, \mathcal{F})$ , ist dies manchmal möglich. Ist etwa  $X$  die in  $\mathbb{P}^2$  enthaltene durch  $(**)$  definierte Kurve und  $\mathcal{O}_X$  deren Strukturgarbe, so erhält man für  $h_{X, \mathcal{O}_X}^0$  und  $h_{X, \mathcal{O}_X}^1$  die folgenden Werte. (Für  $i > 1$  ist  $h_{X, \mathcal{O}_X}^i(n) = 0$ ) :

$n$	...	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$h_{X, \mathcal{O}_X}^0(n)$	...	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	...
$h_{X, \mathcal{O}_X}^1(n)$	...	24	21	18	15	12	9	6	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

Hinter den Funktionen  $h_{X, \mathcal{F}}^i$  steht wieder ein Diskretisierungskonzept für die Paare  $(X, \mathcal{F})$  aus  $\mathcal{C}^+$ .  $h_{X, \mathcal{F}}^i(n)$  ist nämlich die Dimension eines bestimmten algebraischen Objektes, der sogenannten  $i$ -ten Kohomologiegruppe  $H^i(X, \mathcal{F}(n))$  von  $X$  mit Koeffizienten in der  $n$ -ten Verdrehung  $\mathcal{F}(n)$  der Garbe  $\mathcal{F}$ . Eine nähere Erläuterung dieser Begriffe ist hier nicht möglich.

Die Funktionen  $h_{X, \mathcal{F}}^i$  sind benannt nach dem Mathematiker *D. Hilbert* (1864-1943), der — allerdings in einem anderen Zusammenhang — die 0-te Funktion  $h_{X, \mathcal{F}}^0$  entdeckte und untersuchte.

Hilbert war Professor in Göttingen. Er lieferte zahlreiche Beiträge von fundamentaler Bedeutung in allen Gebieten der reinen Mathematik. Berühmt geworden sind die 23 nach ihm benannten Probleme, die er dem Internationalen Mathematikerkongress von 1900 vorlegte.

Die allgemeine Definition der Funktionen  $h_{X,\mathcal{F}}^i$  geht auf *J.P. Serre* zurück, der 1955 in einer revolutionären Arbeit die Kohomologietheorie projektiver Varietäten mit Koeffizienten in kohärenten Garben einführte.

## 5. A-PRIORI-SCHRANKEN FÜR KOHOMOLOGISCHE HILBERTFUNKTIONEN

Erklärtes Wunschziel der Kohomologietheorie projektiver Varietäten ist die Berechnung der kohomologischen Hilbertfunktionen  $h_{X,\mathcal{F}}^i$  für beliebige Paare  $(X, \mathcal{F})$  aus der Klasse  $\mathcal{C}^+$ . Eine Berechnung kann aber immer nur von endlich vielen Daten ausgehen. So müssten wir also aus endlich vielen Daten des Paares  $(X, \mathcal{F})$  die unendlich vielen Zahlen  $h_{X,\mathcal{F}}^i(n)$  berechnen können. Dies würde insbesondere auch heissen, dass die Funktionen  $h_{X,\mathcal{F}}^i$  nur endlich viele Informationen über das Paar  $(X, \mathcal{F})$  zum Ausdruck bringen könnten. Da dies aber nicht der Fall ist, ist unser Wunschziel zu hoch gesteckt.

Es ist uns immerhin gelungen, einen Schritt in der Richtung dieses Zieles zu tun: Ausgehend von endlich vielen Daten des Paares  $(X, \mathcal{F})$  können wir zwar die Funktionen  $h_{X,\mathcal{F}}^i$  nicht genau berechnen, sie aber immerhin abschätzen. Genauer gesagt gelingt es, obere Schranken für die Funktionen  $h_{X,\mathcal{F}}^i$  zu berechnen. Da diese Schranken für jedes Paar  $(X, \mathcal{F})$  aus  $\mathcal{C}^+$  gelten, sprechen wir von *a-priori-Schranken*.

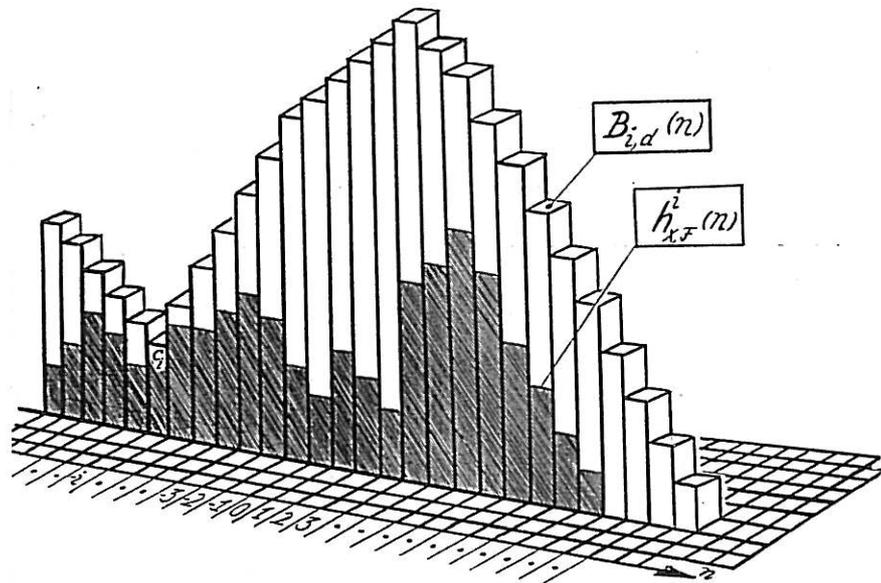
Wir wollen im Folgenden einen kleinen Einblick in diese Resultate geben. Dabei beschränken wir uns auf Schranken vom sogenannten *diagonalen* Typ. Dazu wählen wir ein Paar  $(X, \mathcal{F})$  und schreiben  $d$  für die *Dimension* von  $X$ .

Weiter wollen wir annehmen, die *Startwerte*  $c_i$  der Funktionen  $h_{X,\mathcal{F}}^i$  auf der *Diagonalen* seien bekannt.

$$c_0 = h_{X,\mathcal{F}}^0(0), c_1 = h_{X,\mathcal{F}}^1(-1), \dots, c_d = h_{X,\mathcal{F}}^d(-d)$$

Aus den Startwerten  $c_0, \dots, c_d$  berechnen wir dann obere Schranken für die Funktionen  $h_{X,\mathcal{F}}^i$ . Genauer heisst dies folgendes: Wir halten  $i$  fest und berechnen zu jeder ganzen Zahl aus  $c_0, \dots, c_d$  eine Zahl  $B_{d,i}(n)$  von der wir wissen, dass jedenfalls gilt



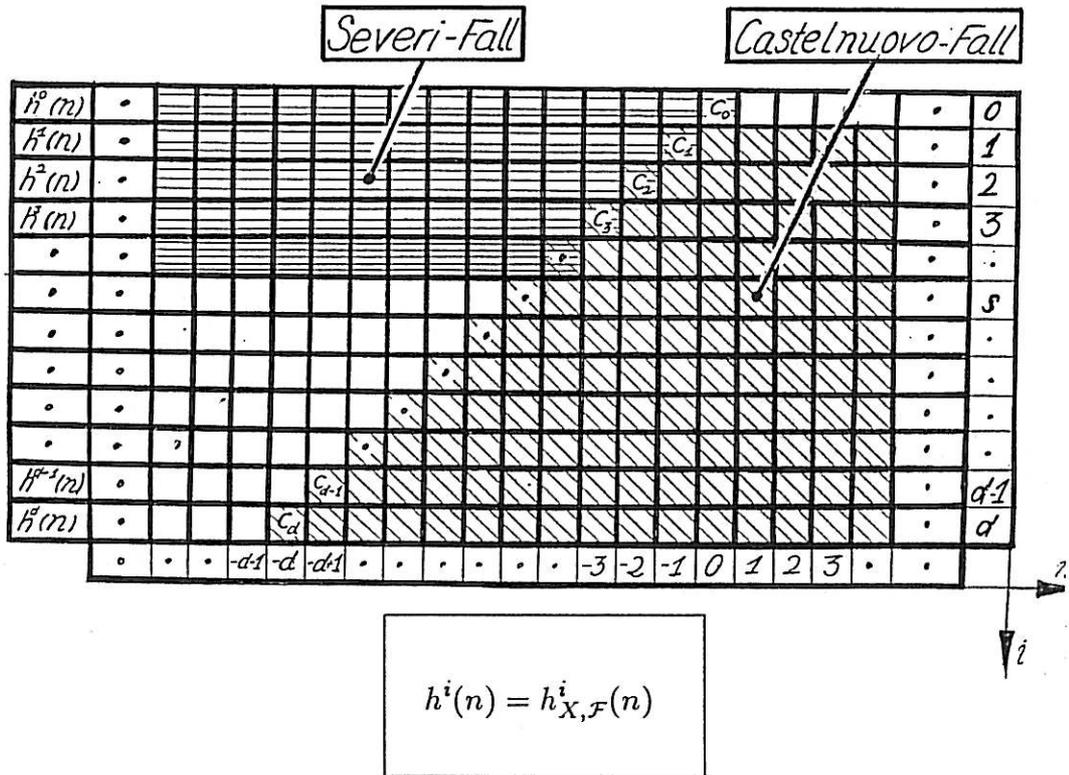


Für die Berechnung von  $B_{d,i}$  werden zwei Fälle unterschieden :

*Castelnuovo-Fall* :  $0 < i \leq d, \quad n \geq -i$

*Severi-Fall* :  $0 \leq i < s, \quad n \leq -i$

Dabei steht  $s$  für die sogenannte *Subtiefe* der Koeffizientengarbe  $\mathcal{F}$ . Wie diese wichtige (ganzzahlige) Grösse definiert ist, wollen wir hier nicht erklären. Die Gültigkeitsbereiche beider Fälle sind in der nachfolgenden Wertetabelle eingezeichnet.



Zur weiteren Erklärung beschränken wir uns auf den *Castelnuovo-Fall*. Um eine Verbesserung der Schranken zu erreichen, führen wir eine neue wichtige (ganzahlige) Grösse ein, die sogenannte *lineare Subdimension*  $l$  von  $\mathcal{F}$ , die wir nicht erklären wollen.

Die Schrankenfunktionen  $B_{d,i}$  werden dann berechnet aus den Werten  $l, s, c_1, \dots, c_d$ . So können wir schreiben

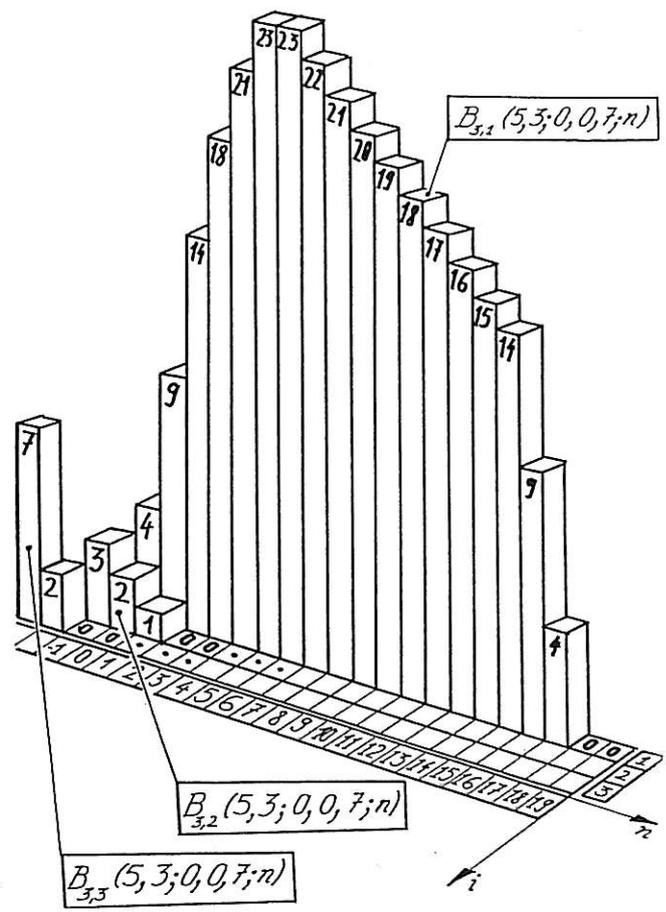
$$\begin{aligned}
 h_{X,\mathcal{F}}^i(n) &\leq B_{d,i}(l, s; c_1, \dots, c_d; n); \\
 n &\geq -i; \quad 0 < i \leq d.
 \end{aligned}$$

Die Funktionen  $B_{d,i}$  lassen sich dabei durch einen Algorithmus berechnen, den wir im Fall  $i = 1$  angeben wollen. Dabei schreiben wir  $\underline{c} = (c_1, \dots, c_d)$ .

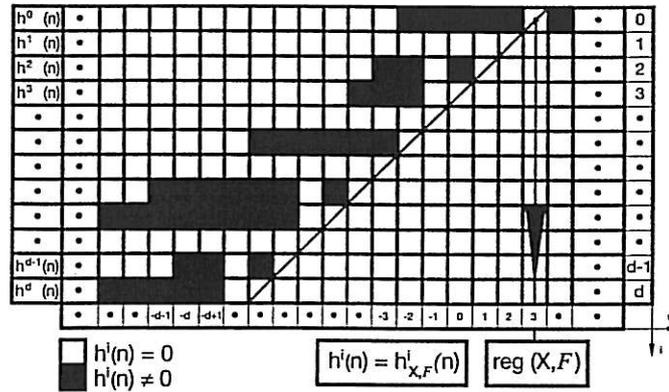
$$\begin{aligned}
 & B_{d,i}(l,s;\xi;n) := B^{(0)}(l,s;\xi;n) \\
 & \text{Für } r \geq d: B^{(r)}(l,s;\xi;n) = C^{(r)}(l,s;\xi) = 0 \\
 & \text{Für } 0 \leq r < d: \text{ (Rekursions-Schritt)} \\
 & B^{(r)}(l,s;\xi;n) := \begin{cases} t(m) := \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} c_{j+1} + \sum_{m=0}^n B^{(r-1)}(l,s;\xi;m) \cdot \begin{cases} \text{falls } m < C^{(r-1)}(l,s;\xi) \\ \text{falls } m \geq C^{(r-1)}(l,s;\xi) \end{cases} \\
 u(m) := [(C^{(r)}(l,s;\xi) - 2) - m] \cdot C^{(r-1)}(l,s;\xi) \cdot \begin{cases} \text{falls } C^{(r-1)}(l,s;\xi) = n < C^{(r-1)}(l,s;\xi) \\ \text{falls } C^{(r-1)}(l,s;\xi) < n \end{cases} \\
 v(m) := [v(C^{(r)}(l,s;\xi) - 1) - (l-r)] \cdot (n-s - C^{(r-1)}(l,s;\xi)) \cdot \begin{cases} \text{falls } m < C^{(r-1)}(l,s;\xi) \\ \text{falls } m \geq C^{(r-1)}(l,s;\xi) \end{cases}
 \end{cases} \\
 & C^{(r)}(l,s;\xi) := \min \{ n \in \mathbb{N} \mid B^{(r)}(l,s;\xi;n) = 0 \}
 \end{aligned}$$

Vermöge dieses Algorithmus lassen sich die Schrankenfunktionen  $B_{d,i}$  berechnen. Die nachfolgende Graphik veranschaulicht diese Funktionen für den Fall

$$d = 3, l = 5, s = 3; c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 7; i = 1, 2, 3.$$



Eine besonders wichtige Grösse eines Objektes  $(X, \mathcal{F})$  aus der Klasse  $\mathcal{C}^+$  ist seine sogenannte *Castelnuovo-Regularität*. Diese bezeichnen wir mit  $\text{reg}(X, \mathcal{F})$ . Es handelt sich um die kleinste ganze Zahl  $r$  für welche  $h_{X, \mathcal{F}}^i(n - i) = 0$  für alle  $i > 0$  und alle  $n \geq r$ . Die Castelnuovo-Regularität  $\text{reg}(X, \mathcal{F})$  ist in der folgenden Skizze anschaulich dargestellt.



Unsere Schrankenberechnungen liefern auch sogenannte *a-priori-Schranken* für die *Castelnuovo-Regularität*.

Es handelt sich dabei um Schranken, die für jedes Paar  $(X, \mathcal{F})$  aus  $\mathcal{C}^+$  gelten und die sich aus den Grössen  $d, l, s, c_1, \dots, c_d$  berechnen lassen. Setzt man nämlich

$$C(l, s; \underline{c}) := \min \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid B_{d,1}(l, s; \underline{c}; n) \neq 0 \},$$

so gilt

$$\text{reg}(X, \mathcal{F}) \leq C(l, s; c_1, \dots, c_d) + 1$$

Für das oben graphisch dargestellte Beispiel mit  $e = 3, l = 5, s = 3; c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 7$  gilt etwa  $\text{reg}(X, \mathcal{F}) \leq 19$ .

Die Castelnuovo-Regularität wird so genannt nach dem Mathematiker *G. Castelnuovo* (1865-1952). Castelnuovo war Professor in Rom. Er bewies viele grundlegende Resultate über algebraische Varietäten, welche zum Teil ihrer Zeit weit voraus waren. So bewies er bereits 1893 ein Resultat, welches übersetzt in die Sprache der modernen algebraischen Geometrie eine Schranke für die Regularität der Idealgarbe  $\mathcal{J}_X$  (s. Abschnitt 4) einer Kurve  $X$  im Raum  $\mathbb{P}^3$  liefert. Aus diesem Grund nannte *D. Mumford* die von ihm 1966 eingeführte Invariante  $\text{reg}(X, \mathcal{F})$  die Castelnuovo-Regularität. Aus dem gleichen Grund sprechen wir für unsere Schranken vom Castelnuovo-Fall.

In den letzten Jahren haben viele Mathematiker Schranken für die Castelnuovo-Regularität  $\text{reg}(\mathbf{P}^r, \mathcal{I}_X)$  von Idealgarben spezieller Varietäten hergeleitet.

Unsere a-priori-Schranken liefern in diesen Fällen schlechtere Werte, denn die Invarianten  $d, s, l, c_0, \dots, c_d$  können nicht zum Ausdruck bringen, dass die untersuchte Garbe die Idealgarbe einer Varietät ist.

Wir sprechen in Zusammenhang mit unseren Schranken vom Severi-Fall in Erinnerung an den Mathematiker *F. Severi* (1879-1981). Severi war Professor in Rom. Er verfasste viele Arbeiten zur algebraischen Geometrie. 1942 bewies er ein Resultat, welches übersetzt in die Sprache der modernen algebraischen Geometrie folgendes besagt:

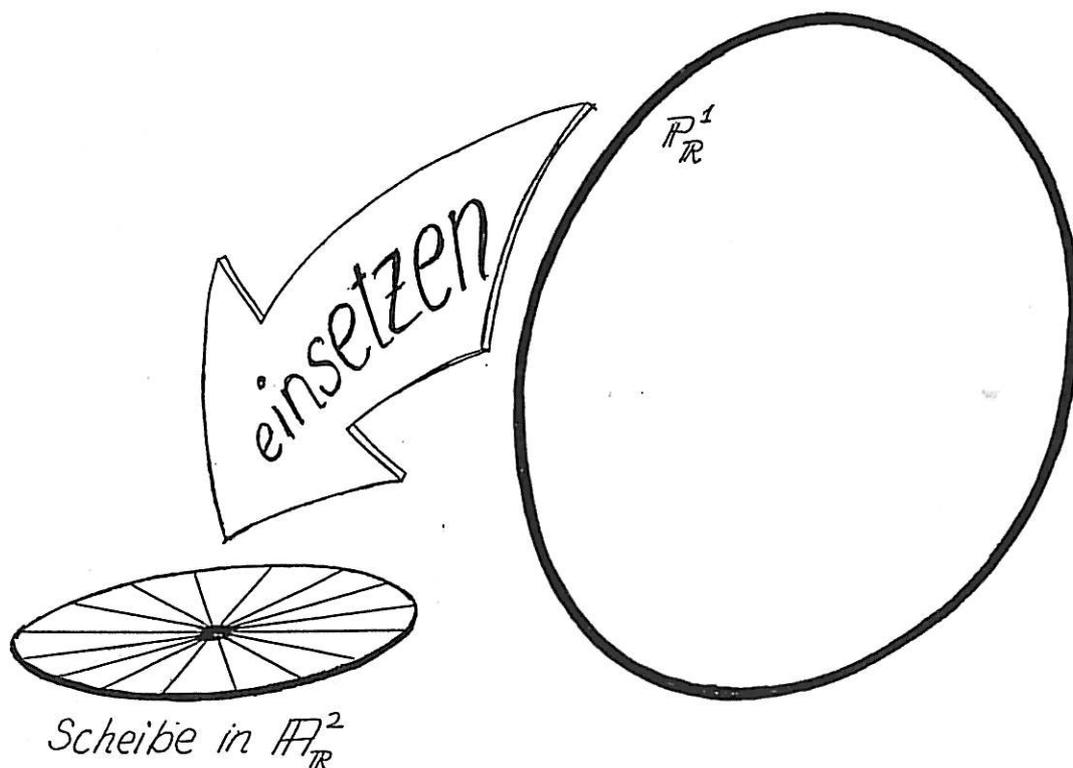
Für eine singularitätenfreie Fläche  $X$  gibt es ein  $t$  so, dass  $h_{x, \omega_X}^1(n) = 0$  für alle  $n \leq t$ . Dabei steht  $\omega_X$  für die in Abschnitt 4 erwähnte kanonische Garbe von  $X$ . Für die Garbe  $\omega_X$  gilt  $s = 2$ . Unsere Severi-Schranken erlauben es, für ein beliebiges Paar  $(X, \mathcal{F})$  aus  $\mathcal{C}^+$  eine Zahl  $t$  zu berechnen so, dass  $h_{X, \mathcal{F}}^i(n) = 0$  für alle  $n \leq t$  und alle  $i < s$ . Dies verallgemeinert Severi's Ergebnis auf beliebige Paare  $(X, \mathcal{F})$  aus  $\mathcal{C}^+$ .

## 6. STANDARD - AUFBLASUNGEN

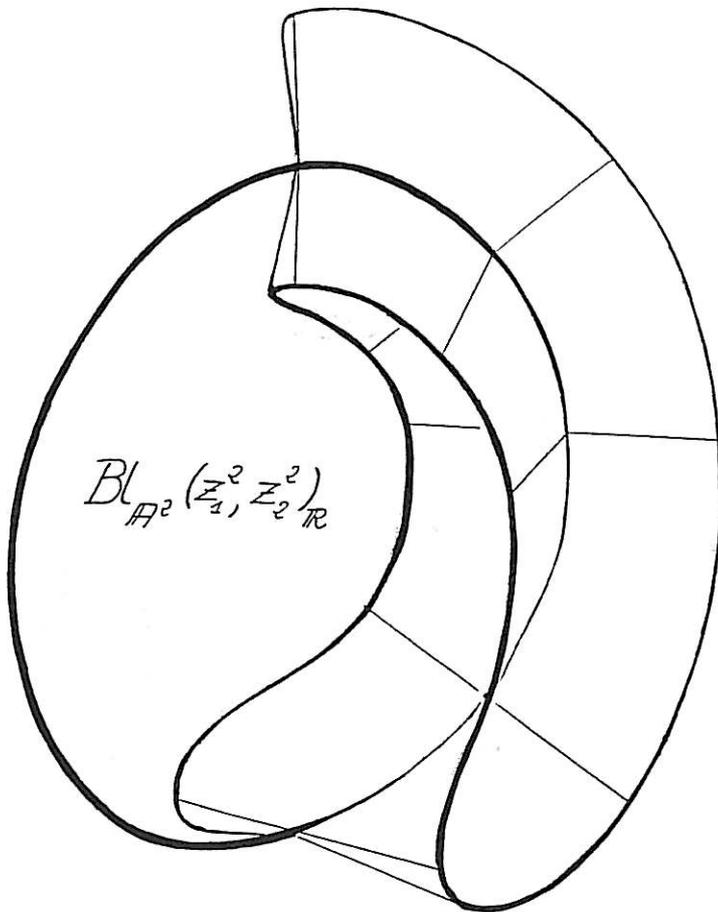
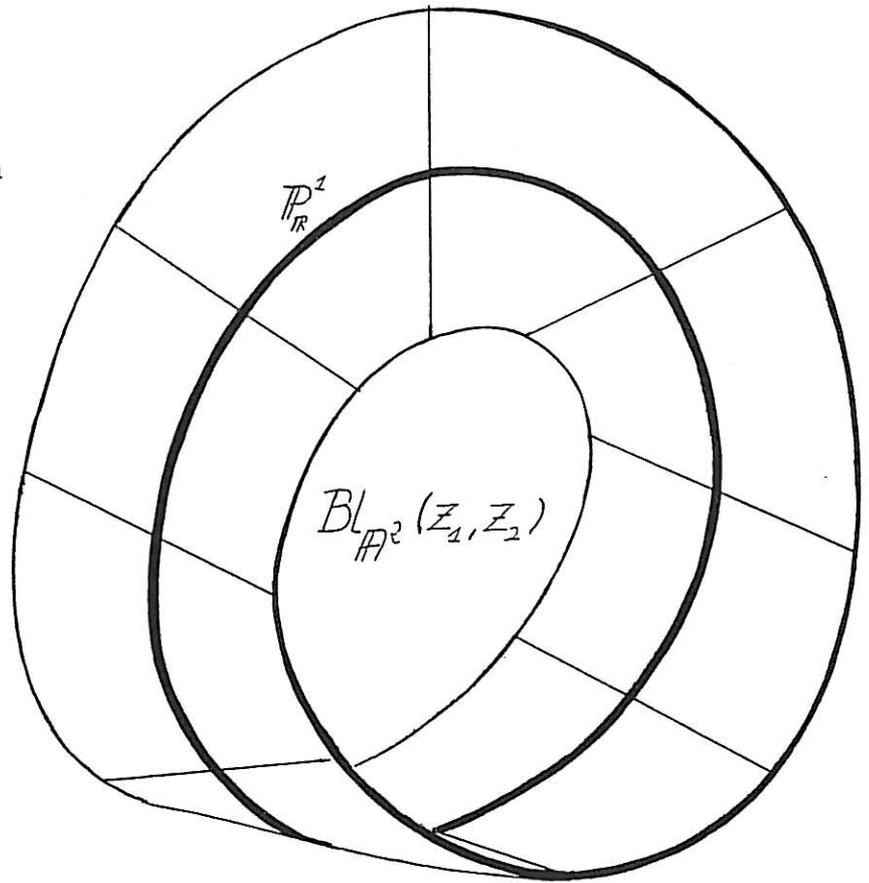
*Aufblasungen* sind algebraische Varietäten. Sie entstehen, indem man aus einer algebraischen Varietät  $X$  eine Teilvarietät  $Z$  entfernt und anstelle von  $Z$  eine geeignete neue Varietät  $T$  einfügt.  $Z$  heisst dabei das *Zentrum* der Aufblasung,  $T$  die *Ausnahmevarietät*. Die Gestalt der so entstehenden Aufblasung hängt stark davon ab, wie  $T$  anstelle von  $Z$  in die Varietät  $X$  eingesetzt wird.

Wir betrachten einige Beispiele. Als Grundvarietät wählen wir die *komplexe affine Ebene*  $\mathbb{A}^2$ . Deren Punkte werden beschrieben durch Paare  $(c_1, c_2)$  komplexer Zahlen. Als Zentrum  $Z$  der Aufblasung wählen wir den 0-Punkt  $(0, 0)$  der affinen Ebene. Jetzt wählen wir zwei Polynome  $f(z_1, z_2)$  und  $g(z_1, z_2)$  in den Variablen  $z_1$  und  $z_2$ . Dabei soll der Punkt  $(0, 0)$  die einzige gemeinsame Nullstelle der beiden Polynome  $f$  und  $g$  sein. Vermöge  $f$  und  $g$  lässt sich eine Aufblasung  $Bl_{\mathbb{A}^2}(f, g)$  der Ebene  $\mathbb{A}^2$  definieren. Zentrum dieser Aufblasung ist der 0-Punkt  $(0, 0)$  der Ebene. Ausnahmevarietät ist die projektive Gerade  $\mathbb{P}^1$ . Durch  $f$  und  $g$  wird bestimmt, wie  $\mathbb{P}^1$  anstelle von  $(0, 0)$  in die Ebene  $\mathbb{A}^2$  eingesetzt wird.

Wir veranschaulichen uns die reellen Teile  $Bl_{\mathbb{A}^2}(f, g)_{\mathbb{R}}$  für einige einfache Polynome  $f$  und  $g$ . Dabei betrachten wir nur den Teil der Aufblasung, der über einer Kreisscheibe mit Zentrum  $(0, 0)$  liegt. Da der reelle Teil  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  der Ausnahmevarietät  $\mathbb{P}^1$  ein Kreis ist, entstehen alle diese Beispiele indem man den Mittelpunkt der Kreisscheibe durch eine Kreislinie ersetzt. Dabei bestimmen die Polynome  $f$  und  $g$ , wie die Kreislinie in die Scheibe einzusetzen ist.

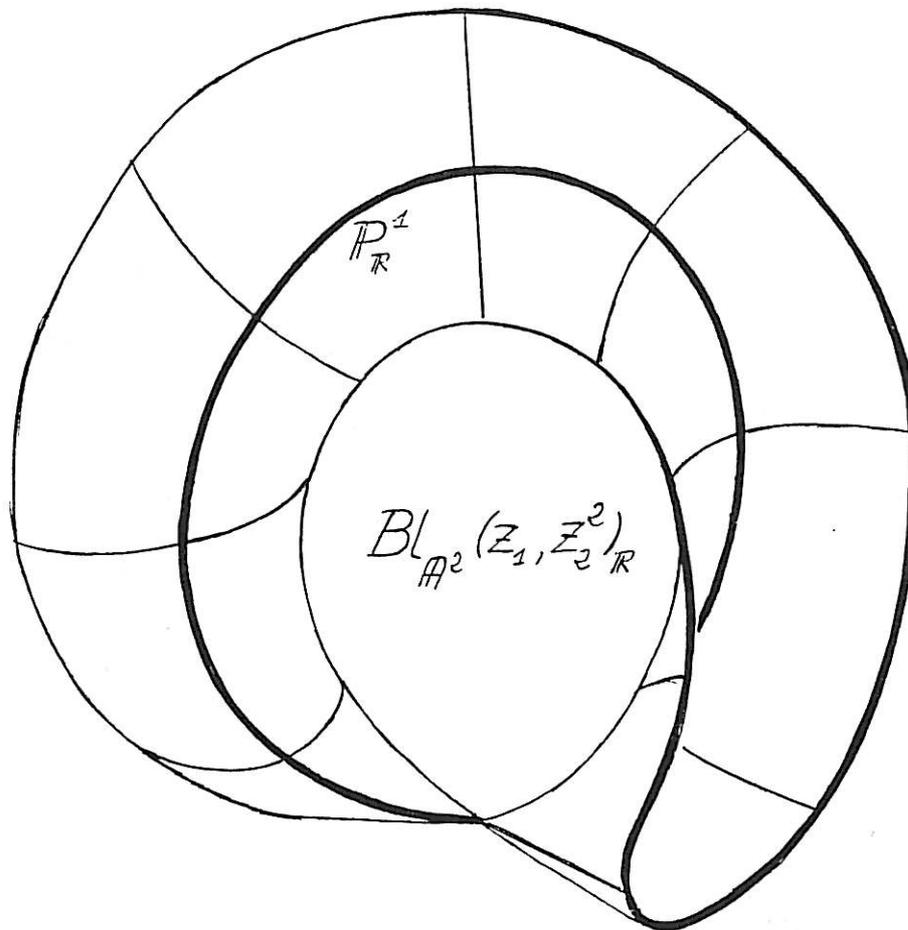


Wählen wir  $f = z_1, g = z_2$   
 so erhalten wir mit dem oben  
 beschriebenen Verfahren ein  
 Möbius-Band! (s. Abschnitt  
 2)



Wählen wir  $f = z_1^2, g = z_2^2$   
 so erhalten wir die neben-  
 stehend skizzierte Fläche. Auch  
 hier treffen wir wieder einen  
 alten Bekannten: Den in Ab-  
 schnitt 2 genannten Whitney-  
 Doppelschirm.

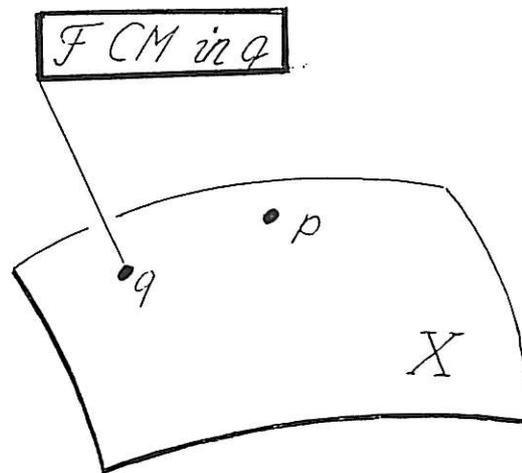
Das nachfolgend skizzierte Beispiel  $Bl_{\mathbb{A}^2}(z_1, z_2^2)$  führt uns zu einer Fläche, der wir bis jetzt noch nicht begegnet sind.



Für das Folgende gehen wir aus von einer (affinen) algebraischen Varietät  $X$  der festen Dimension  $d \geq 2$ . Auf  $X$  sei eine kohärente Garbe  $\mathcal{F}$  definiert. (Diese Begriffe haben wir bereits im Abschnitt 4 kennengelernt).

Wir wählen jetzt einen Punkt  $p$  aus  $X$ . Dann lassen sich für  $i = 0, 1, 2, \dots, d$  die sogenannten *lokalen Kohomologiegruppen*  $H_p^i(X, \mathcal{F})$  von  $X$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$  an der Stelle  $p$  definieren. Man findet dann eine ganze Zahl  $t$  zwischen 0 und  $d$  so, dass  $H_p^i(X, \mathcal{F}) = 0$  für  $i = 0, \dots, t-1$  und  $H_p^t(X, \mathcal{F}) \neq 0$ . Diese Zahl  $t$  nennt man die *Tiefe* von  $\mathcal{F}$  in  $t$ . Diese Tiefe kann höchstens den Wert  $d$  annehmen. In diesem Grenzfall sagt man, die Garbe  $\mathcal{F}$  sei in  $p$  *Cohen-Macaulaysch* (abgekürzt : CM). Ist dies der Fall, so hat  $\mathcal{F}$  in der Umgebung von  $p$  besonders günstige Eigenschaften.

Wir halten jetzt  $p$  fest und nehmen an,  $\mathcal{F}$  sei in allen Punkten  $q \neq p$  CM. In dieser Situation weiss man nach dem sogenannten *Endlichkeitssatz der lokalen Kohomologietheorie*, dass die Gruppen  $H_p^i(X, \mathcal{F})$  für  $i = 0, \dots, d-1$  alle von endlicher Dimension sind. (Wäre  $\mathcal{F}$  in  $p$  CM, so wären diese Gruppen sogar alle 0).



Wir schreiben jetzt  $\lambda_i$  für die Dimension der Gruppe  $H_p^i(X, \mathcal{F})$ , ( $i = 0, \dots, d-1$ ). Die Zahlen

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d-1}$$

bringen geometrisch wichtige Informationen über die Garbe  $\mathcal{F}$  zum Ausdruck.

Jetzt kann man spezielle Aufblasungen mit Zentrum  $p$  definieren, sogenannte *Standard-Aufblasungen* von  $X$  bezüglich  $\mathcal{F}$ . Sei  $\tilde{X}$  eine solche Standard-Aufblasung,  $T$  die zugehörige Ausnahmevarietät. Aus der Garbe  $\mathcal{F}$  lässt sich dann eine über  $\tilde{X}$  kohärente Garbe  $\tilde{\mathcal{F}}$  gewinnen, welche man die *Modifikation* von  $\mathcal{F}$  nennt. Ebenso kann man auf  $T$  aus  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe  $\overline{\mathcal{F}}$  gewinnen, die *Ausnahmegarbe* von  $\mathcal{F}$ .

Dem Paar  $(T, \overline{\mathcal{F}})$  lässt sich für jede ganze Zahl  $i \geq 0$  wieder eine  $i$ -te kohomologische Hilbertfunktion  $h_{T, \overline{\mathcal{F}}}^i$  zuordnen, (vgl. Abschnitt 5). Diese Funktionen lassen sich jetzt nicht nur abschätzen (wie in Abschnitt 6), sondern sogar genau berechnen.

Dabei genügt es, die Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}$  zu kennen, um die Fälle  $0 < i < d-1$  zu behandeln. Es gilt nämlich.

$$h_{T, \overline{\mathcal{F}}}^i(n) = \begin{cases} \lambda_{i+1}, & \text{falls } n = -i-1. \\ 0, & \text{falls } n \neq -i-1. \end{cases} \text{ Für } i=1, 2, 3, \dots, d-2.$$

Für  $i \geq d$  gilt immer  $h_{T, \overline{\mathcal{F}}}^i(n) = 0$ . Es bleiben also die Fälle  $i = 0$  und  $i = d-1$ , welche

etwas komplizierter sind. Zur Berechnung benötigt man hier nebst den Zahlen  $\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}$  auch die sogenannte Länge  $w$  von  $\mathcal{F}$  auf dem Zentrumsschema.

Es bestehen dann die folgenden Formeln, auf deren Erläuterung wir nicht weiter eingehen wollen:

$$h_{T, \bar{\mathcal{F}}}^0(n) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } n < -1. \\ \lambda_1 & , \text{ falls } n = -1. \\ w - \lambda_0 & , \text{ falls } n = 0. \\ \binom{n+d-1}{d-1} w - \sum_{j=0}^{d-1} \binom{n+j-1}{j} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \lambda_i & , \text{ falls } n > 0. \end{cases}$$

$$h_{T, \bar{\mathcal{F}}}^{d-1}(n) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } n > -d. \\ \binom{-n-1}{d-1} w + \sum_{j=0}^{d-1} \binom{-1}{j} \binom{j+d-n-2}{j} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \lambda_i & , \text{ falls } n \leq -d. \end{cases}$$

Mit  $d = 3, \lambda_0 = 2, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, w = 12$  errechnet man mit diesen Formeln:

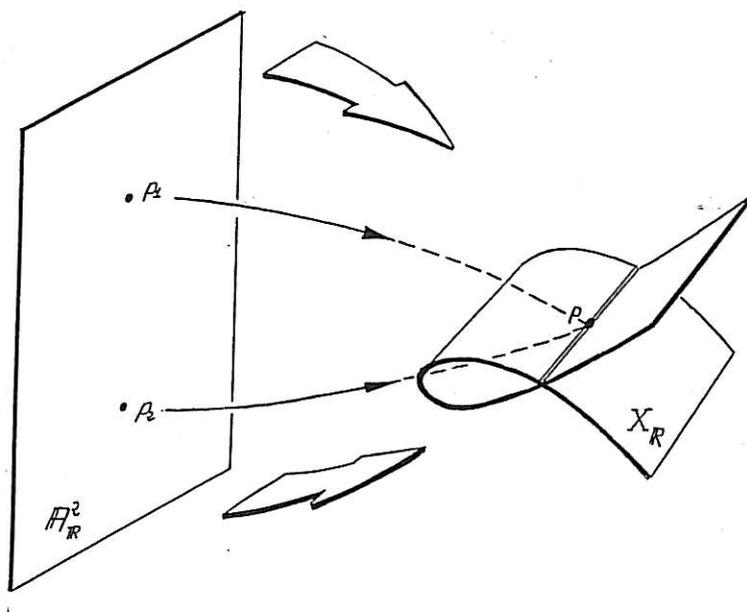
$n$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$h_{T, \bar{\mathcal{F}}}^0(n)$	0	0	0	0	0	3	10	19	31	46	64	85	109	136
$h_{T, \bar{\mathcal{F}}}^1(n)$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$h_{T, \bar{\mathcal{F}}}^2(n)$	19	10	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Aus den Formeln (\*) und (\*\*) kann man ablesen, dass die Garben  $\tilde{\mathcal{F}}$  und  $\bar{\mathcal{F}}$  in jedem Punkt CM sind. Die Standardaufblasung  $\tilde{X}$  liefert also eine sogenannte *Macaulayfizierung*.

Ist  $X = \mathbb{A}^2$  und ist  $\mathcal{T}_0$  die Garbe aller Tangentialfelder auf  $X$  die in  $(0, 0)$  verschwinden, so ist  $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 2, w = 2$  und alle drei der früher betrachteten Beispiele  $Bl_{\mathbb{A}^2}(z_1, z_2), Bl_{\mathbb{A}^2}(z_1^2, z_2^2), Bl_{\mathbb{A}^2}(z_1, z_2^2)$  haben bezüglich  $\mathcal{T}_0$  die Standard-Eigenschaft. Alle 3 Aufblasungen liefern demnach Macaulayfizierungen von  $\mathcal{T}_0$ . Ist  $\mathcal{T}_1$  die Garbe aller Tangentialfelder auf  $X$ , die in  $(0, 0)$  mit "der Ordnung 2" verschwinden (wir wollen hier diesen Begriff nicht

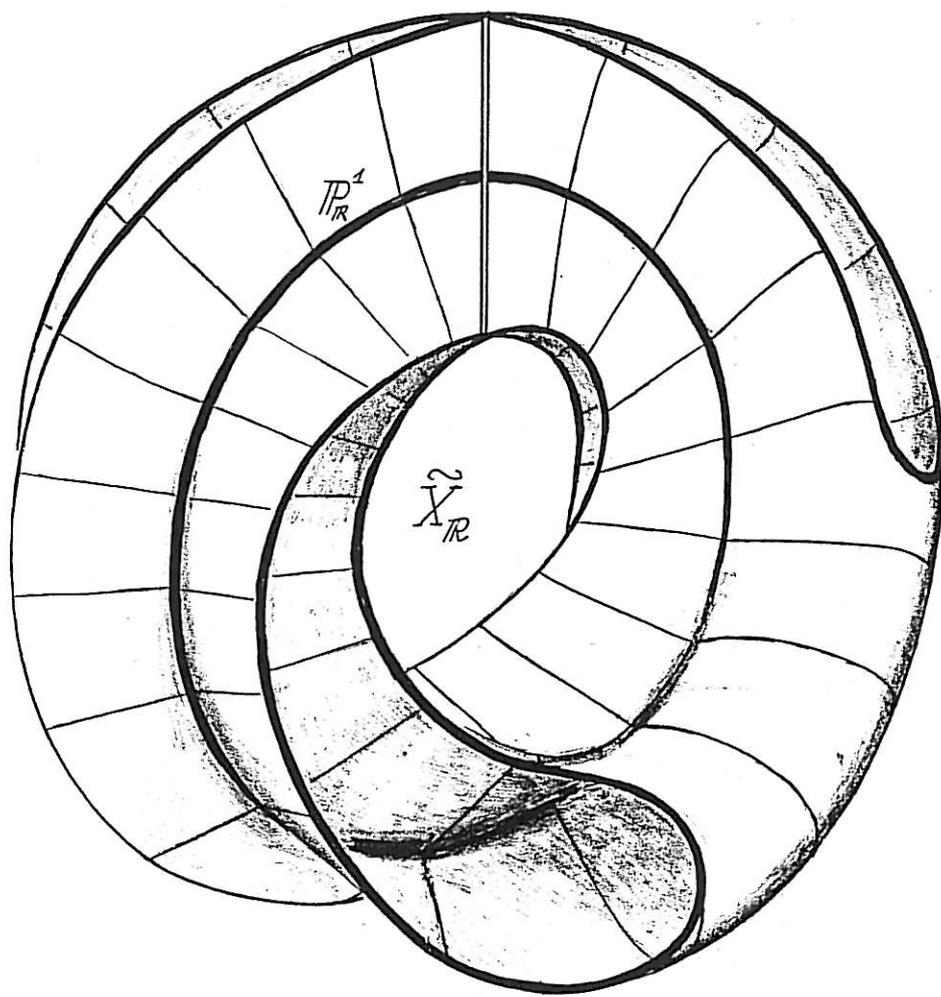
näher definieren), so gilt  $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 6, w = 6$ . In diesem Fall ist von den obigen Beispielen nur  $Bl_{\mathbb{A}^2}(z_1^2, z_2^2)$  eine Standard-Aufblasung bezüglich  $\mathcal{T}_1$ .

Wirklich interessant werden Standard-Aufblasungen für den Mathematiker eigentlich erst in Dimensionen grösser als 2. Der Anschaulichkeit halber betrachten wir aber zum Schluss trotzdem ein weiteres 2-dimensionales Beispiel.  $\bar{X}$  sei die komplexe Fläche, welche durch die Gleichungen (\*) aus Abschnitt 4 definiert wird.  $X$  sei der affine Teil von  $\bar{X}$ , den man erhält, indem man  $z_0 = 1$  setzt.  $X$  liegt im komplexen affinen Raum  $\mathbb{A}^4$  und entsteht indem man die affine Ebene  $\mathbb{A}^2$  so verformt, dass in den ursprünglich verschiedenen Punkten  $p_1 = (0, 0), p_2 = (0, 1)$  von  $\mathbb{A}^2$  eine Selbstdurchdringung entsteht, welche in den Ursprung  $p$  von  $\mathbb{A}^4$  zu liegen kommt. Für die reellen Teile  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  und  $X_{\mathbb{R}}$  ergibt sich so die folgende Veranschaulichung:



$X_{\mathbb{R}}$  ist allerdings im dreidimensionalen Raum nicht realisierbar! Was also oben dargestellt ist, ist ein Bild vom  $X_{\mathbb{R}}$  im dreidimensionalen Raum, sowie wir es für die Kleinsche Flasche und die projektive Ebene erhalten haben. Dabei entsteht die Selbstdurchdringung = , die in Wirklichkeit nicht vorhanden ist.

Für die Strukturgarbe  $\mathcal{O}_X$  gilt im Punkt  $p : \lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1$ . Die Garbe  $\mathcal{O}_X$  ist also in  $p$  nicht CM. Man sagt dafür auch,  $p$  sei kein CM-Punkt der Fläche  $X$ . Immerhin ist  $p$  ein sogenannter Buchsbaum-Punkt von  $X$ .  $\tilde{X} = Bl_X(z_1, z_2)$  ist eine Standard-Aufblasung bezüglich  $X$ . Weil die Modifikation  $\tilde{\mathcal{O}}_X$  der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_X$  von  $X$  mit der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$  von  $\tilde{X}$  übereinstimmt, sind alle Punkte von  $\tilde{X}$  CM-Punkte.  $\tilde{X}$  ist demnach eine sogenannte CM-Fläche. Die nachfolgende Skizze zeigt ein Bild des reellen Teils  $\tilde{X}_{\mathbb{R}}$  von  $\tilde{X}$  im dreidimensionalen Raum.  $\tilde{X}_{\mathbb{R}}$  selbst lässt sich in diesem Raum nicht realisieren. So entsteht wieder eine scheinbare Selbstdurchdringung.



## 7. BIBLIOGRAPHISCHE UND HISTORISCHE HINWEISE

Wir hoffen, mit unseren Ausführungen zum Möbius-Band, zur Kleinschen Flasche und zur projektiven Ebene beim einen oder anderen Betrachter den Wunsch geweckt zu haben, tiefer in das Gebiet der Flächentopologie einzudringen. Es steht dazu ein breites Angebot an Büchern zur Verfügung. Wir empfehlen etwa *Francis* [Fr], *Firby-Gardiner* [Fi-Ga], *Griffiths* [Gr], oder — für den fortgeschritteneren Leser — *Berger-Gostiaux* [Be-G]. Ganz besonders empfehlenswert ist der Klassiker *Hilbert-Cohn/Vossen* [Hi-Co]. Wer sich speziell für die projektive Ebene interessiert, sei auf das Buch von *Apéry* [Ap] verwiesen, das auch Computerprogramme zur Darstellung von Bildern enthält.

Wir haben uns hier darauf beschränkt, die projektive Ebene als rein topologisches Objekt zu betrachten. Dabei ist diese Fläche zunächst hauptsächlich als geometrisches Objekt von Bedeutung. Sie bildet nämlich den Ausgangspunkt der projektiven Geometrie. Wir verweisen dazu auf *Coxeter* [Cox] oder *Pickert* [P]. Am Ende unserer Betrachtung über die projektive Ebene haben wir einen Kleeblatt-Knoten auf zwei verschiedene Ebene projiziert. Wer mehr über Knoten erfahren möchte greife etwa zu *Burde-Zieschnang* [Bu-Zi]. Für das Erlanger Programm verweisen wir auf *Klein* [Kl].

Im Zusammenhang mit der Euler-Charakteristik haben wir auf das umfangreiche Werk Leonhard Eulers verwiesen. Wer sich ein Bild von Ausmass der Arbeitskraft des in Russland tätigen Exil-Baslers machen möchte, ist eingeladen, an unserem Institut in den "*Opera Omnia*" [Eu] zu blättern. Für ein leicht zugängliches Portrait Eulers verweisen wir auf [SNB]. Im Zusammenhang mit der Euler-Charakteristik haben wir auch H. Poincaré als einen der Väter des algebraischen Topologie erwähnt. Poincaré's Beitrag zur algebraischen Topologie findet eine ausführliche Würdigung in *Dieudonné* [D<sub>2</sub>] oder *Scholz* [Scho]. Der mutigere Leser blättere bei Gelegenheit in den Werken [Po] Poincarés. Wer einen weiteren Blick in die algebraische Topologie wagen möchte, sei auf den Klassiker *Alexandroff-Hopf* [A-H] verwiesen.

Wir haben bewusst darauf verzichtet, den Begriff der algebraischen Varietät detailliert einzuführen. Wir verweisen dazu auf einige einführende Werke der algebraischen Geometrie. Ein sehr anschauliches Buch mit zahlreichen schönen Bildern und Beispielen ist das Werk von *Brieskorn-Knörrer* [Br-K]. Wer algebraische Geometrie lernen möchte, muss immer ein gutes algebraisches Rüstzeug mitbringen. Relativ geringe Vorkenntnisse an Algebra sind für unsere Einführung [Br<sub>15</sub>] nötig. Etwas mehr Algebra verlangt *Kunz* [Kun]. Als eigentliches Standard-Werk der modernen algebraischen Geometrie kann *Hartshorne* [H] betrachtet werden. Nach einer knappen Einführung in die "klassische" algebraische Geometrie kommt hier der Formalismus der Schemata zur Darstellung, wie er von *Dieudonné* und *Grothendieck* [Gro-D], [Gro<sub>1</sub>] entwickelt wurde.

Wir hoffen, mit den Kummerschen Flächen einen Einblick in die Schönheit der algebraischen Geometrie gegeben zu haben. Diese Flächen spielen eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie und vermögen auch heute noch die Mathematiker zu faszinieren (s. *Hudson* [Hu]). Wir verweisen auch auf *Kummer's* Originalarbeit [Ku].

Den Begriff der Garbe haben wir nicht erläutert, weil dies den Rahmen unserer Arbeit bei weitem sprengen würde. Eine allgemeine Einführung in dieses Gebiet ist zu finden in *Godement* [G]. Die Theorie der kohärenten Garben über algebraischen Varietäten wird entwickelt in *Serre* [S]. Diese Arbeit stellt einen Wendepunkt in der algebraischen Geometrie dar, denn sie gab den Anstoss zum Schemata-theoretischen Zugang zu dieser Theorie. Sie enthält auch die Grundlagen der Kohomologietheorie algebraischer Varietäten und bildet so das Fundament unserer Arbeit über kohomologische Hilbertfunktionen.

In [S] wird bewiesen, dass die kohomologischen Hilbert-Funktionen  $n \mapsto h_{X, \mathcal{F}}^i(n)$  eines festen Paares  $(X, \mathcal{F})$  für alle hinreichend grossen Werte von  $n$  verschwinden. Das Resultat von Serre ist rein qualitativer Natur, denn es enthält keine Hinweise darauf, für welche Werte von  $n$  dieses Verschwinden zu erwarten ist. Erst *Mumford* [Mu] enthält ein erstes allgemeines quantitatives Resultat zu diesem Thema. Es bezieht sich allerdings auf spezielle Paare  $(X, \mathcal{F})$ :  $X$  muss ein projektiver Raum  $\mathbf{P}^d$  und  $\mathcal{F}$  eine sogenannte Idealgarbe sein. In Mumford's Arbeit wird auch die von uns früher erwähnte Castelnuovo-Regularität eingeführt. Wie wir bereits wissen, nahm Mumford Bezug auf ein Resultat von *Castelnuovo* [C]. Übersetzt in die Sprache der heutigen Mathematik besagt Castelnuovos Resultat, dass für eine glatte, nicht ausgeartete Kurve  $X$  im 3-dimensionalen projektiven Raum  $\mathbf{P}^3$  und deren Idealgarbe  $\mathcal{J}_X$  die Ungleichung  $\text{reg}(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}_X) \leq \text{Grad}(X) - 2$  besteht. Dabei steht  $\text{Grad}(X)$  für den sogenannten *Grad* der Kurve  $X$ .

*Gruson-Lazarsfeld-Peskine* [Gru-L-Pe] verallgemeinerten die Ungleichung von Castelnuovo und zeigten, dass für eine beliebige nicht-ausgeartete irreduzible Kurve  $X$  im projektivem Raum  $\mathbf{P}^r$  der Dimension  $r$  gilt  $\text{reg}(\mathbf{P}^r, \mathcal{J}_X) \leq \text{Grad}(X) - r + 1$ .

Gemäss einer Vermutung von D. Eisenbud sollte sich diese Ungleichung für beliebige nicht-ausgeartete irreduzible Varietäten in  $\mathbf{P}^r$  verallgemeinern lassen zu  $\text{reg}(\mathbf{P}^r, \mathcal{J}_X) \leq \text{Grad}(X) - r + \dim(X)$ . Dabei steht  $\dim(X)$  für die Dimension der Varietät  $X$ . *Pinkham* [Pi] bewies diese Vermutung für glatte Flächen in  $\mathbf{P}^4$ , also für den Fall, dass  $X$  keine Singularitäten hat und für den Fall, dass  $r = 4, \dim(X) = 2$ . *Lazarsfeld* [L] bewies die von Eisenbud vermutete Ungleichung für beliebige glatte Flächen. *Bertram-Ein-Lazarsfeld* [Ber-Ei-L] bewiesen für glatte 3-dimensionale Varietäten eine Ungleichung für die Castelnuovo-Regularität, welche in gewissen Fällen die Vermutung von Eisenbud bestätigt. In *Bayer-Mumford* [B-Mu] findet man eine Abschätzung für die Castelnuovo-Regularität der Idealgarben glatter Varietäten beliebiger Dimension, welche allerdings schwächer ist als die Eisenbud-Vermutung.

Schranken für die Castelnuovo-Regularität von Idealgarben verschiedener Typen von Varietäten wurden in letzter Zeit von mehreren Autoren publiziert. Wir zitieren dazu einige Arbeiten, die uns besonders interessant erscheinen, nämlich *Nagel* [N<sub>1</sub>], *Nagel-Vogel* [N-V], *Stückrad-Vogel* [St-V<sub>1</sub>], [St-V<sub>2</sub>], [St-V<sub>3</sub>]. In diesen Arbeiten werden zum Teil Varietäten mit speziellen "arithmetischen" Eigenschaften untersucht. Eine wichtige Rolle spielt dabei etwa die schon erwähnte *Buchsbaum-Eigenschaft*. Arbeiten, welche sich speziell mit der Castelnuovo-Regularität von Buchsbaum-Varietäten (im arithmetischen Sinn) befassen,

sind etwa *Migliore-Miro/Roig* [Mig-Mi] oder *Miro/Roig* [Mi]. In der gleichen Richtung zieht die Arbeit von *Eisenbud-Goto* [E-Go]. *Ooishi* [O] studiert die Castelnuovo-Regularität unter einem allgemeinen, mehr algebraischen Aspekt, ebenso *Bayer-Stillmann* [B-Sti].

Die Castelnuovo-Regularität hängt zusammen mit den Graden der Gleichungen, die eine Varietät definieren. Dieser Aspekt steht etwa in den Arbeiten *Maroscia-Vogel* [M-V] und *Maroscia-Vogel-Stückrad* [M-V-St] im Vordergrund.

Alle Arbeiten, die sich mit der Castelnuovo-Regularität befassen, fragen nach “*Rechts-Verschwindungs-Schranken*” von kohomologischen Hilbertfunktionen. Es geht also immer darum, nach Zahlen  $\varrho$  zu suchen so, dass  $h_{X,\mathcal{F}}^i(n) = 0$  für alle  $n \geq \varrho$ . Genauso kann man auch nach *Linksverschwindungsschranken* für kohomologischen Hilbertfunktionen fragen, also nach Zahlen  $\sigma$  mit der Eigenschaft, dass  $h_{X,\mathcal{F}}^i(n) = 0$  für alle  $n \leq \sigma$ .

Bevor man nach solchen Schranken  $\sigma$  suchen kann, sollte man natürlich wissen, unter welchen Umständen sie überhaupt existieren. Ein erstes Resultat dieser Art stammt von *Severi* [Se], der zeigte, dass  $h_{X,w_X}^1$  eine solche Linksverschwindungsschranke besitzt. Dabei ist  $X$  eine glatte Fläche im 3-dimensionalen projektiven Raum  $\mathbf{P}^3$  und  $w_X$  deren kanonische Garbe. Später verallgemeinerte *Enriques* [En] das Resultat von Severi auf glatte Varietäten beliebiger Dimension — allerdings mit einem lückenhaften Beweis. *Zariski* [Z<sub>1</sub>] schliesslich verallgemeinerte die Resultate von Severi und Enriques in zwei Richtungen : Er ersetzte  $X$  durch eine beliebige normale Varietät und  $w_X$  durch eine beliebige “invertierbare” Garbe. Diese Resultate sind allerdings nicht in der Sprache der kohomologischen Hilbertfunktionen formuliert, die ja damals noch nicht existierte.

Erst *Serre* [S] brachte volle Klarheit in das Rätsel der Linksverschwindungsschranken. Er bewies nämlich, dass  $h_{X,\mathcal{F}}^i$  für  $i < s$  immer eine solche Schranke hat, nicht aber für  $i = s$ . Dabei steht  $s$  für die von uns in Abschnitt 5 erwähnte *Subtiefe* von  $\mathcal{F}$ . Die Zahl  $s$  ist die kleinste Tiefe, die  $\mathcal{F}$  in einem Punkt  $p$  von  $X$  annehmen kann. Ueber die *Tiefe* haben wir uns in Abschnitt 6 kurz ausgelassen. Die von Severi, Enriques und Zariski behandelten Fälle erhält man sofort aus *Serre's* Resultat, denn es gilt dort immer  $s \geq 2$ . Selten hat sich vermutlich eine neue Methode so klar und überzeugend als echter Fortschritt erwiesen wie hier die Kohomologietheorie.

*Serre's* Resultat ist allerdings eine reine Existenzaussage, d.h. ein qualitatives Resultat, das keinerlei Aushaltspunkt über den Wert der fraglichen Schranken liefert. In der analytischen Geometrie bestand damals andererseits schon ein quantitatives Resultat über Linksverschwindungsschranken: Der berühmte *Verschwindungssatz von Kodaira* [Ko]. Dieser besagt, dass  $h_{X,\mathcal{O}_X}^i(n) = 0$  für alle  $n < 0$  und alle  $i < \dim(X)$ , wo  $X$  eine glatte komplexe projektive Varietät ist.

Mit unserer Suche nach a-priori-Schranken für die kohomologischen Hilbertfunktionen gehen wir in einem gewissen Sinne weiter als alle Autoren, die Rechts- und Links-Verschwindungsschranken bestimmten, da wir die Werte der Funktionen  $h_{X,\mathcal{F}}^i$  abschätzen. Dabei

tun wir dies so, dass wir auch Verschwindungsschranken erhalten. Für diese Verschwindungsschranken liefert unsere Methode naturgemäss schlechtere Werte als die zahlreichen bekannten Ergebnisse, die sich auf spezielle Paare  $(X, \mathcal{F})$  beziehen. Die wenigen Ausgangsdaten, die wir verwenden, bringen natürlich zu wenig über das Paar  $(X, \mathcal{F})$  zum Ausdruck. Man kann z.B. nicht durch endlich viele solcher Daten ausdrücken, dass  $X$  ein projektiver Raum und  $\mathcal{F}$  die Idealgarbe einer Varietät in diesem Raum ist!

Die einzige uns bekannte Arbeit, in welcher die Kohomologie selbst für eine grössere Klasse von Paaren abgeschätzt wird, ist die Arbeit [El-Fo] von *Elençwajg-Forster*. Dort wird  $h_{\mathbb{P}^r, \mathcal{E}}^i(0)$  für eine lokal freie Garbe  $\mathcal{E}$  über einem projektiven Raum abgeschätzt. Dies geschieht in Termen der ersten beiden Chern-Zahlen, des Rangs und der Spanne des generischen Zerfällungstyps von  $\mathcal{E}$ . Da man weiss, wie sich diese Invarianten beim Verdrehen verhalten, ergeben sich obere Schranken für die Funktionen  $h_{\mathbb{P}^r, \mathcal{E}}^i$ . Natürlich handelt es sich nicht um a-priori-Schranken, denn dazu sind die Paare  $(\mathbb{P}^r, \mathcal{E})$  viel zu speziell.

Unsere Ergebnisse über a-priori-Schranken finden sich in [Br<sub>9</sub>], [Br<sub>12</sub>], [Br<sub>13</sub>]. In den Arbeiten [Br<sub>8</sub>], [Br<sub>10</sub>] haben wir die "Methode der Hyperebenenschnitte", die zu unseren a-priori-Schranken führt, auf spezielle Paare  $(X, \mathcal{O}_X)$  angewandt. In derselben Richtung geht die Arbeit [N<sub>2</sub>] von *Nagel*. Die Methode der Hyperebenenschnitte haben wir zaghaft in einem einfachen Fall bereits in der Arbeit [Br<sub>1</sub>] angewandt. In [Br<sub>2</sub>] haben wir mit einer Verfeinerung dieser Methode unter anderem einen sehr kurzen Beweis für den Serreschen Satz über die Existenz von Linkverschwindungsschranken erhalten. Im Gegensatz zu Serre erhielten wir dort auch erste quantitative Angaben über diese Schranken. In [Br<sub>6</sub>] und hauptsächlich in [Br<sub>7</sub>] bauten wir unsere Methode weiter aus und bewiesen mehrere Anwendungen. Mit den Ideen und Argumenten von Nagel [N<sub>1</sub>] [N<sub>2</sub>] ergeben sich weitere Verfeinerungen und Anwendungen der genannten Methode. Diese sollen in einer gemeinsamen Arbeit [Br-N] publiziert werden.

Ausgangspunkt unserer Beschäftigung mit Standard-Aufblasungen war *Faltings'* Arbeit [F] über *Macaulayfizierung*. Hier geht es darum, gewisse Varietäten durch geeignete, möglichst einfache Aufblasungen in bestimmter Weise zu verbessern. Grosse, klassische Vorbilder zu diesem Konzept sind die Arbeiten von *Zariski* [Z<sub>2</sub>], *Abhyankar* [A], und *Hironaka* [Hir].

Die Beschäftigung mit der Arbeit von Faltings führte uns zu einem detaillierten Studium einer Klasse von Aufblasungen, die wir *Standard-Aufblasungen* nannten (s. [Br<sub>1</sub>]). In [Br<sub>3</sub>] und [Br<sub>4</sub>] haben wir diese Untersuchungen weitergeführt, und die genannten Aufblasungen mit der lokalen Kohomologietheorie in Verbindung gebracht. Dabei spielt der von *Grothendieck* [Gro<sub>2</sub>] bewiesene Endlichkeitssatz der Lokalen Kohomologie eine wichtige Rolle. Unsere Ergebnisse führten unter anderem zu einer Verbesserung der ursprünglichen Resultate von Faltings, (s. [Br<sub>5</sub>]).

Standard-Aufblasungen wurden von mehreren Autoren untersucht. Wir verweisen dazu etwa auf die Arbeiten von *Goto* [Go], *Goto-Shimoda* [Go-Sh], *Goto-Yamagishi* [Go-Y] und *Schenzel* [Sch]. In diesen Arbeiten spielt der Fall, wo die Grundvarietät Buchsbaumsch

ist, eine grosse Rolle. Als Standard-Werk über die interessante Klasse der Buchsbaum-Varietäten nennen wir *Stückrad-Vogel* [St-V<sub>4</sub>].

Die Formel für die kohomologischen Hilbertfunktionen von Standard-Aufblasungen aus Abschnitt 7 ist ein Ergebnis aus [Br<sub>11</sub>]. Die Diplom-Arbeit von *A. Marca* [AM] enthält dieses Ergebnis auch — allerdings in Termen der lokalen Kohomologietheorie. Die Diplomarbeit von *Cottini* [Co] ist ebenfalls einem Zusammenhang zwischen lokaler Kohomologie und Aufblasungen gewidmet, über den wir mehrere Arbeiten publiziert haben. Aus Platzgründen wollen wir diesen Themenkreis hier nicht weiter verfolgen. Die Untersuchung von Standard-Aufblasungen hat uns zudem auf eine neue Garben-Konstruktion geführt, die in [Br<sub>14</sub>] dargestellt werden soll.

Wir möchten hier auch erwähnen, dass unsere aktuelle Forschung auf den angesprochenen Gebieten finanziell durch den Schweizerischen Nationalfonds unterstützt wird, und zwar im Rahmen eines gemeinsamen Projektes mit *P. Gabriel* [SNF].

Die Skizzen in dieser Arbeit wurden vom Autor angefertigt. Einige davon finden sich in [Br<sub>16</sub>] oder [Br<sub>17</sub>].

M. Brandenburg und M. Hafner haben als Ergänzung zum vorgestellten Projekt sehr schöne Computergraphiken von Aufblasungen realisiert (s. [Bra], [Bra-Ha]).

Der historische Aspekt musste in unseren Ausführungen aus Platzgründen etwas zu kurz kommen. Dem diesbezüglich interessierten Leser empfehlen wir, einen Blick in das Buch [D<sub>1</sub>] von *Dieudonné* zu werfen. Für bibliographische Angaben konsultiere man etwa [Am].

## BIBLIOGRAPHIE

- [A] **Abhyankar, S.S.**, Resolution of Singularities of Embedded Algebraic Surfaces, Acad. Press, New York, 1966
- [A-H] **Alexandroff, P., Hopf, H.**, Topologie I, Grundlehren der Math.Wiss. 45, Springer, Berlin, 1935
- [AM] **A Marca, G.**, Lokale Kohomologie und Komplemente affiner Hyperflächen, Diplomarbeit, Universität Zürich, 1988
- [Am] **American Council of Learned Societies:** Dictionary of Scientific Biography, C. Scribner's Sons, New York
- [Ap] **Apéry, F.**, Models of the Real Projective Plane, Vieweg, Braunschweig 1987
- [B-Mu] **Bayer, D., Mumford, D.**, What can be computed in Algebraic Geometry? Proc. Conf. on Computers as a Tool for Research in Mathematics and Physics, Courant Institute 1984
- [B-Sti] **Bayer, D., Stillmann, M.**, A Criterion for detecting  $m$ -Regularity, Invent. Math. 87 (1987) 1-11
- [Be-G] **Berger, M., Gostiaux, B.**, Differential geometry : Manifolds, Curves, and Surfaces, graduate texts in math., Springer, New York 1988
- [Ber-Erl] **Betram, A., Ein, L., Lazarsfeld, R.**, Vanishing Theorems, a Theorem of Severi, and the Equations defining Projective Varieties, Preprint 1990
- [Bra] **Brandenberg, M.**, Aufblasungen affiner Varietäten, Diplomarbeit, Universität Zürich 1992
- [Bra-Ha] **Brandenberg, M., Hafner, M.**, Computerbilder von Standardaufblasungen, Institut für Informatik, Universität Zürich, 1991
- [Bri-K] **Brieskorn, E., Knörrer, H.**, Ebene Algebraische Kurven, Birkhäuser, Basel 1981
- [Br<sub>1</sub>] **Brodmann, M.**, Kohomologische Eigenschaften von Aufblasungen an lokal vollständigen Durchschnitten, Habilitationsschrift, Münster 1980
- [Br<sub>2</sub>] **Brodmann, M.**, A Lifting Result for local Cohomology of Graded Modules, Math. Proc. Cambridge Phil.Soc. 92 (1982) 221-229

- [Br<sub>3</sub>] **Brodmann, M.**, Local Cohomology of Certain Rees- and Form-Rings I, *J. of Algebra*, 81 (1983) 29-57
- [Br<sub>4</sub>] **Brodmann, M.**, Local Cohomology of certain Rees- and Form-Rings II, *J. of Algebra*, 86 (1984) 457-493
- [Br<sub>5</sub>] **Brodmann, M.**, Two Types of Birational Models, *Comment.Math.Helvetici*, 58 (1983) 388-415
- [Br<sub>6</sub>] **Brodmann, M.**, Bounds on the Serre Cohomology of a Projective Variety, *Czechoslovak J. of Math.*, 112 (1987) 238-244
- [Br<sub>7</sub>] **Brodmann, M.**, Bounds on the Cohomological Hilbert-Functions of a Projective Variety, *J. of Algebra*, 109 (1987) 352-380
- [Br<sub>8</sub>] **Brodmann, M.**, A Bound on the first Cohomology of a Projective Surface, *Arch. Math.* 50 (1988) 68-72
- [Br<sub>9</sub>] **Brodmann, M.**, A Priori Bounds of Castelnuovo Type for Cohomological Hilbert Functions, *Comment.Math.Helvetici*, 65 (1990) 478-518
- [Br<sub>10</sub>] **Brodmann, M.**, Sectional Genus and Cohomology of Projective Varieties, Preprint 1990, 39 pg. Erscheint in *Math.Z.*
- [Br<sub>11</sub>] **Brodmann, M.**, Cohomology of Standard Blowing-up, Preprint 1990, 65 pg., Erscheint in *J. of Algebra*
- [Br<sub>12</sub>] **Brodmann, M.**, Generalized Castelnuovo Bounds, Preprint 1990, 42 pg.
- [Br<sub>13</sub>] **Brodmann, M.**, A Priori Bounds of Severi Type for Cohomological Hilbert Functions, Preprint 1990, 34 pg.
- [Br<sub>14</sub>] **Brodmann, M.**, Typical Sheaves of Generalized CM-Modules, in Vorbereitung
- [Br<sub>15</sub>] **Brodmann, M.**, *Algebraische Geometrie — eine Einführung*, Basler Lehrbücher, Bd I, Birkhäuser Verlag, Basel 1985
- [Br<sub>16</sub>] **Brodmann, M.**, *Mathematik — zwischen Handwerk, Kunst und Philosophie*, Perspektiven Nr. 4, 1989
- [Br<sub>17</sub>] **Brodmann, M.**, *Mathematische Geräte und Modelle*, Manuskript 1989
- [Br<sub>18</sub>] **Brodmann, M.**, *Bastelvorschläge zum Projekt "Vom Möbius Band zur Hilbert-Funktion"*, Heureka, 1991

- [Br<sub>19</sub>] **Brodmann, M.**, Informationsblatt über Toruskurven, Heureka 1991
- [Br-N] **Brodmann, M., Nagel, U.**, Bounding Cohomological Hilbert Functions by Hyperplane Sections, Arbeit in Vorbereitung
- [Bu-Zi] **Burde, G., Zieschnang, H.**, Knots de Gruyeter Studies in Math., W. de Gruyeter, Berlin, 1985
- [C] **Castelnuovo, G.**, Sui Multipli di una Serie Lineare di Gruppi di Punti appartenente ad una Curva Algebraica, Rend. Circ. Math. die Palermo 7 (1893) 89-110
- [Co] **Cottini, G.**, Lokale Kohomologie, Stein-Grothendieck-Faktoren und Aufblasungen, Diplomarbeit, Universität Zürich, 1988
- [Cox] **Coxeter, H.S.M.**, Projective Geometry, Blaisdell Publ.Comp., New York, 1964
- [D<sub>1</sub>] **Dieudonné, J.**, Abrégé d'Histoire des Mathématiques 1700-1900, Hermann, Paris 1978
- [D<sub>2</sub>] **Dieudonné, J.**, A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960, Birkhäuser, Basel, 1989
- [E-Go] **Eisenbud, D., Goto, S.**, Linear Free Resolutions and Minimal Multiplicity, J. of Algebra 88 (1984) 89-133
- [El-Fo] **Elencwaig, G., Forster, O.**, Bounding Cohomology groups of Vector Bundles on  $P_n$ , Math. Ann. 246 (1980) 251-270
- [En] **Enriques, F.**, Le Superficie Algebriche, Bologna 1949
- [Eu] **Euler, L.**, Opera Omnia
- [F] **Faltings, G.**, Ueber Macaulayfizierung, Math. Annalen 238 (1978) 175-192
- [Fi-G] **Firby, P.A., Gardiner, G.F.**, Surface Topology, J. Wiley Sons, New York 1982
- [Fr] **Francis, K.F.**, A Topological Picture Book, Springer Verlag, New York 1987
- [G] **Godement, R.**, Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, Hermann 1964
- [Go] **Goto, S.**, A Note on Standard-System of Parameters for generalized CM-Modules, Proc.Symp., Kyoto Univ. 1982
- [Go-Sh] **Goto, S., Shimoda, Y.**, On Rees-Algebras over Buchsbaum Rings, Journal Math. Kyoto Univ. 20 (1980) 691-708

- [Go-Y] **Goto, S., Yamagishi, K.**, The Theory of Unconditioned Strong  $d$ -Sequences and Modules of Finite Local Cohomology, Preprint 1988
- [Gr] **Griffiths, H.B.**, Surfaces, Cambridge University Press, Cambridge, 1976
- [Gro-D] **Grothendieck, A., Dieudonné, J.**, Eléments de Géométrie Algébrique I, Grundlehren der Math. 166, Springer, Berlin 1971
- [Gro<sub>1</sub>] **Grothendieck, A.**, Eléments de Géométrie Algébrique II-IV, Publ. I.H.E.S., 1961-1964
- [Gro<sub>2</sub>] **Grothendieck, A.**, Seminaire de Géométrie Algébrique II, North Holland, Amsterdam 1968
- [Gru-L-Pe] **Gruson, L., Lazarsfeld, R., Peskine, G.**, On a Theorem of Castelnuovo and the Equations defining Space Curves, Invent. Math. 72 (1983) 491-506
- [H] **Hartshorne, R.**, Algebraic Geometry, Springer, New York 1977
- [Hi-Co] **Hilbert, D., Cohn-Vossen, S.**, Anschauliche Geometrie, Grundlehren der Math. Wissenschaften 37, Springer, Berlin 1937
- [Hir] **Hironaka, H.**, Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a Field of Charakteristik 0, Annals of Math. 79 (1964) 109-236
- [Hu] **Hudson, R.W.**, Kummers Quartic Surface, Cambridge University Press, Cambridge 1905/1990
- [Kl] **Klein, F.**, Vorlesungen über höhere Geometrie, Grundlehren der Math. Wissenschaften 22, Springer, Berlin 1926
- [Ko] **Kodaira, K.**, On a Differential-geometric Method in the Theory of Analytic Stacks, Proc.Nat.Acad.Sci., USA 39 (1953)
- [Ku] **Kummer, Ueber die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten**, Berliner Monatsberichte (1864) 246-260
- [Kun] **Kunz, E.**, Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie, Vieweg, Braunschweig 1980
- [L] **Lazarsfeld, R.**, A sharp Castelnuovo Bound for smooth Surfaces, Duke Math. J. 55 (1987) 423-429
- [Le<sub>1</sub>] **Lenzinger, F.**, Ideales Möbius-Band, Plastik, Bronze, ausgestellt als Leihgabe, Heureka 1991

- [Le<sub>2</sub>] **Lenzinger, F.**, Verdrehtes Dreikant-Prisma, Plastik, Bronze, ausgestellt als Leihgabe, Heureka 1991
- [M-V] **Maroscia, P., Vogel, W.**, On the Defining Equations of Points in General Position in  $\mathbb{P}^n$ , Math. Ann. 269 (1984) 183-189
- [M-St-V] **Maroscia, D., Stückrad, J., Vogel, W.**, Upper Bounds for the Degrees of the Equations defining locally Cohen-Macaulay-Schemes, Math. Ann. 277 (1987) 53-65
- [Mig-Mi] **Migliore, J., Miro-Roig, R.**, On  $k$ -Buchsbaum Curves in  $\mathbb{P}^3$ , Preprint 1990
- [Mi] **Miro-Roig, R.**, On the Theorem of Castelnuovo for Buchsbaum Curves, Arch. Math. 52 (1989) 513-518
- [Mu] **Mumford, D.**, Lectures on Curves on an Algebraic Surface, Ann. Math. Studies 59, Princeton University Press 1966
- [N<sub>1</sub>] **Nagel, U.**, On Castelnuovo's Regularity and Hilbert Functions, Compositio Math. 76 (1990) 265-275
- [N<sub>2</sub>] **Nagel, U.**, On Bounds for Cohomological Hilbert-Functions, Preprint, erscheint in J. of Algebra
- [N-V] **Nagel, U., Vogel, W.**, Bounds for Castelnuovo's Regularity and the Genus of Projective Varieties, Proc. Conf. Comm. Alg. and Alg. Geom. Warsaw, 1988
- [O] **Ooishi, A.**, Castelnuovo's Regularity of Graded Rings and Modules, Hiroshima Math. J. 12 (1982) 627-644
- [P] **Pickert, G.**, Projektive Ebenen, Grundlehren der Math. Wissenschaften 80, Springer, Berlin 1955
- [Pi] **Pinkham, H.**, A Castelnuovo Bound for Smooth Surfaces, Invent. Math. 83 (1986) 312-322
- [Po] **Poincaré, H.**, Oeuvres
- [Sch] **Schenzel, P.**, Standard Systems of Parameters and their Blowing-up Rings, Journal für die reine und angewandte Mathematik 344 (1983) 201-220
- [Scho] **Scholz, E.**, Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffes von Riemann bis Poincaré, Birkhäuser, Basel, 1980
- [Schw] **Schwabe, C.**, Projektionskuppel mit Torusknoten, Projekt an der Heureka, 1991

- [St-V<sub>4</sub>] **Stückrad, J., Vogel, W.**, Buchsbaum Rings and Applications, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986
- [Z<sub>1</sub>] **Zariski, O.**, Complete Linear Systems on Normal Varieties and Generalization of a Lemma of Enriques-Severi, Ann.Math. 55 (1952) 552-592
- [Z<sub>2</sub>] **Zariski, O.**, Reduction of Singularities of Algebraic Three Dimensional Varieties, Ann. of Math. 45 (1944) 472-542

ADRESSE DES AUTORS

**M. Brodmann**  
Universität Zürich  
Mathematisches Institut  
Rämistrasse 74  
CH-8001 Zürich