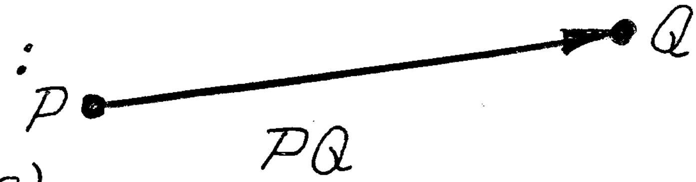
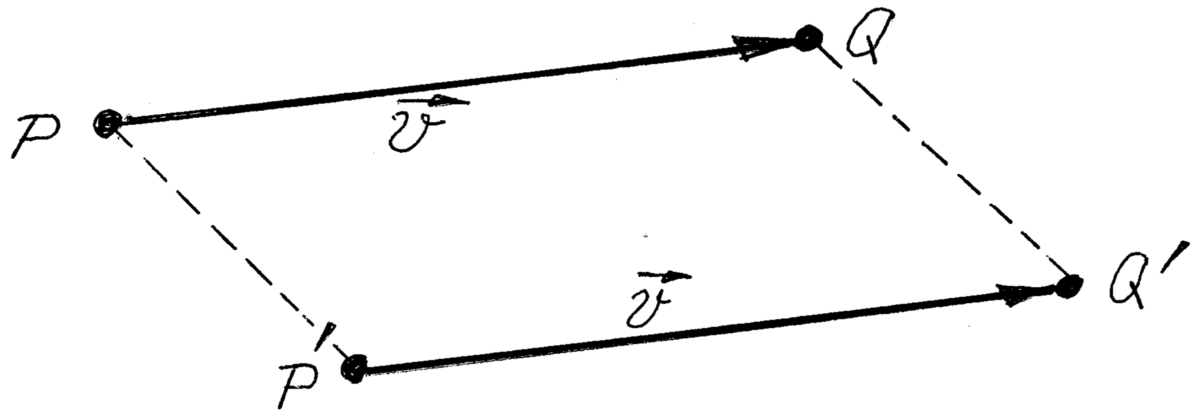
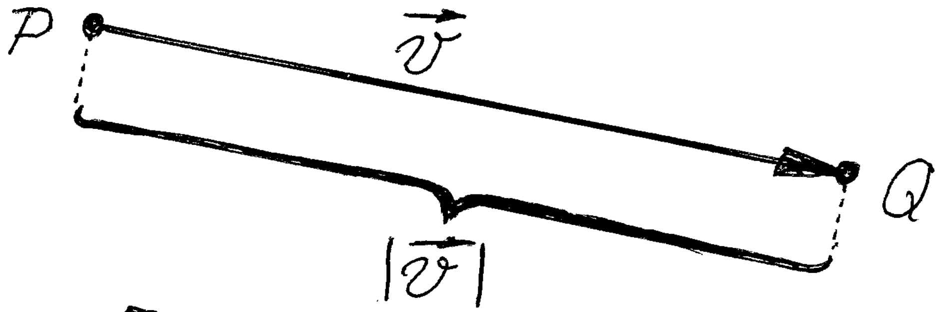
Der Begriff des Vektors (vgl. 1.3/4)

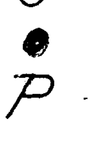
- *Gerichtete Strecke:*
  P = Anfangspunkt
  Q = Endpunkt (≙ Spitze)



- *Vektor* $\vec{v} := \overrightarrow{PQ} :=$ Menge aller gerichteten Strecken P'Q', die aus PQ durch Verschiebung hervorgehen.
- PQ = *Vertreter* von $\vec{v}$.
- $|\vec{v}| :=$ *Betrag* von $\vec{v} :=$ Distanz von Q nach P.
- $\vec{0} := \overrightarrow{PP}$ = *0-Vektor*.



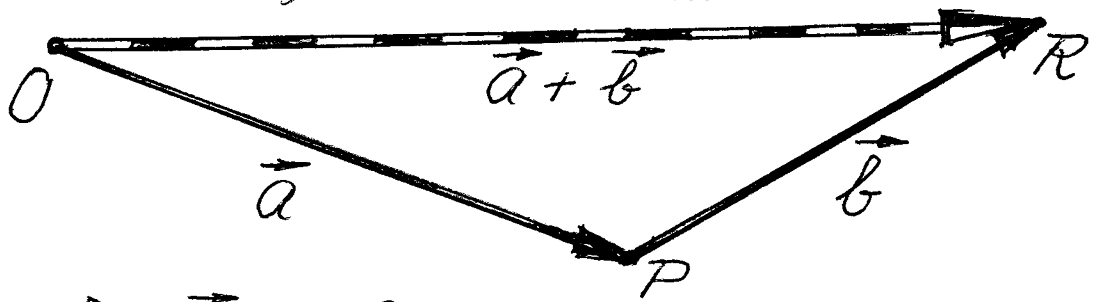




Addition von Vektoren

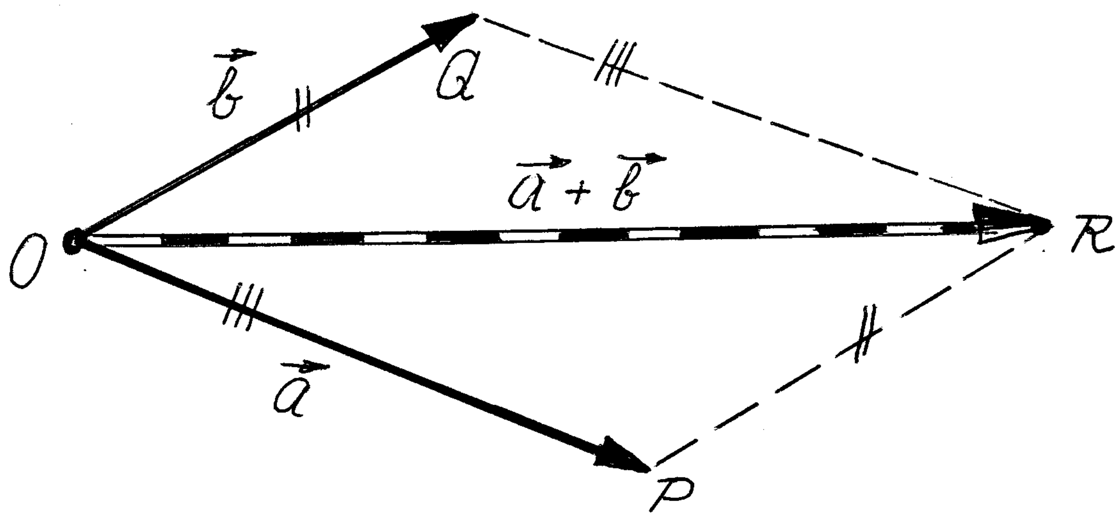
(vgl. 1.5/6)

- $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$; $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$: $\vec{a} + \vec{b} := \overrightarrow{OR}$.



$\vec{a} + \vec{b}$ = Summe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

- Parallelogramm-Methode:



- Rechenregeln:

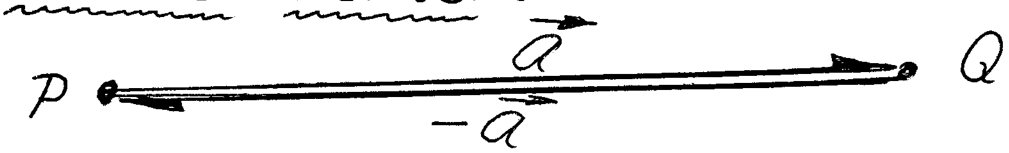
(1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

(2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

(3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

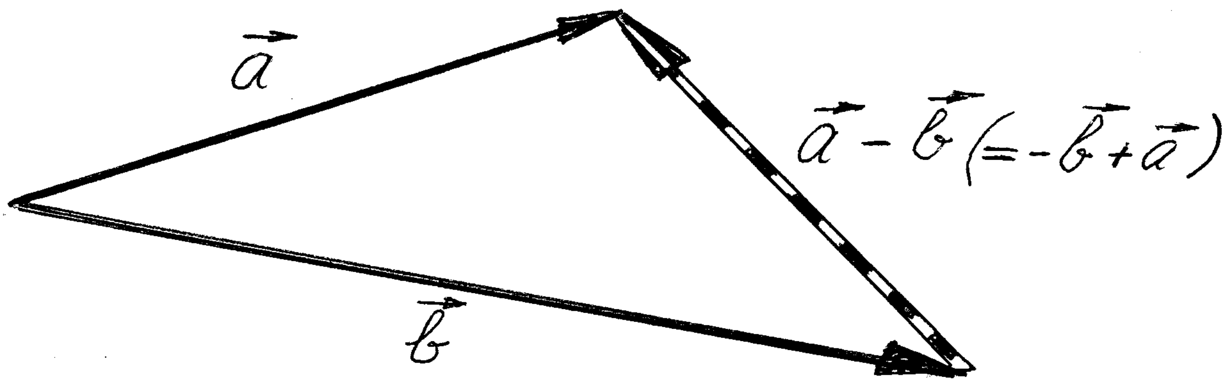
Subtraktion von Vektoren (vgl. 1.6)

- $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$: $-\vec{a} := \overrightarrow{QP}$ = zu $\vec{a}$ entgegengesetzter Vektor.



- Rechenregeln: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$; $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

- $\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$ = Differenz der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$



- Rechenregeln:

  (1) $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$.

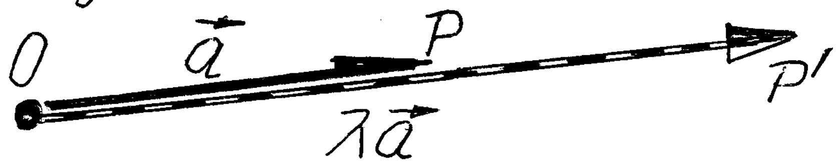
  (2) $(\vec{a} - \vec{b}) = -(\vec{b} - \vec{a})$.

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

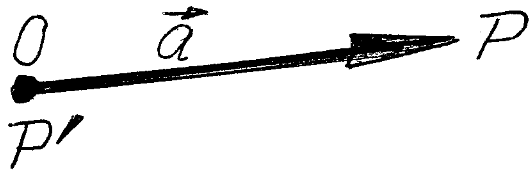
NB: Zahl $\widehat{=}$ Skalar (vgl. 1.7)

- $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ (= Menge der reellen Zahlen)
  $P' :=$ Bild von P bei Streckung mit Zentrum O und Streckungsfaktor λ.
  $\lambda \vec{a} :\doteq \overrightarrow{OP'} = \lambda$-faches von $\vec{a}$

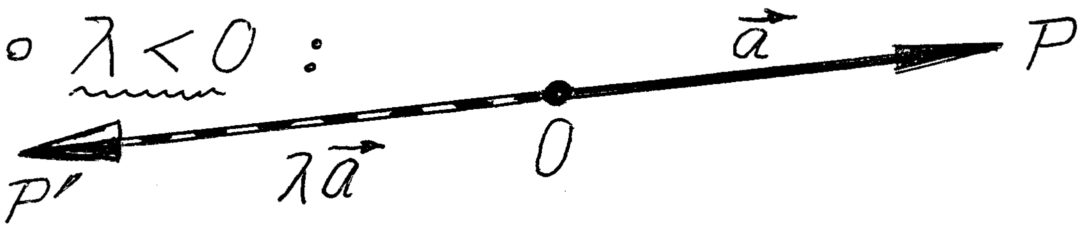
  - $\lambda > 0$:



  - $\lambda = 0$:



  - $\lambda < 0$:



- Rechenregeln: $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

(1) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

(2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

(3) $\lambda(\mu\,\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.

(4) $1\,\vec{a} = \vec{a}$.

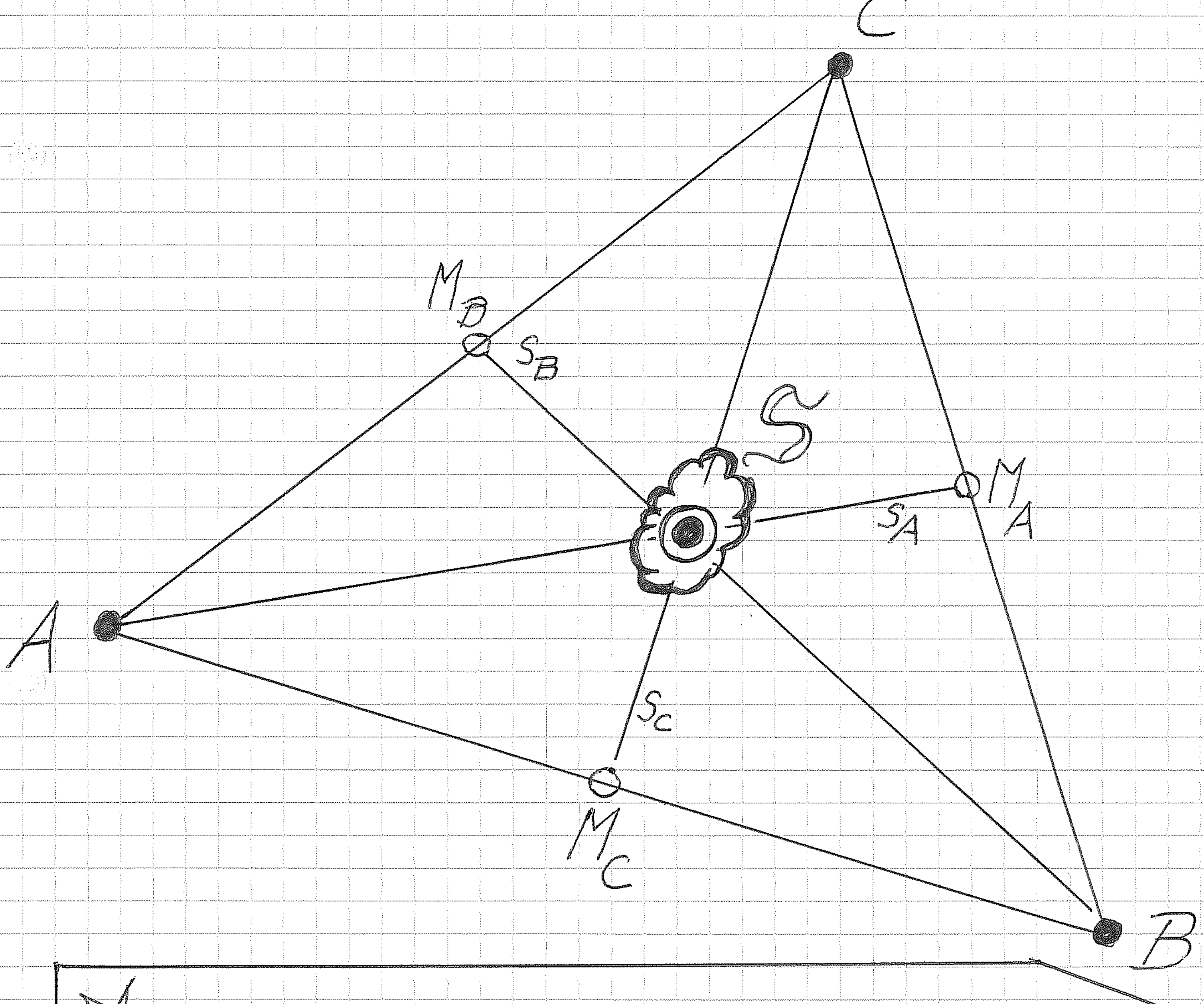
(5) $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

(6) $0\,\vec{a} = \vec{0}$.

(7) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$.

Seitenhalbierende im Dreieck

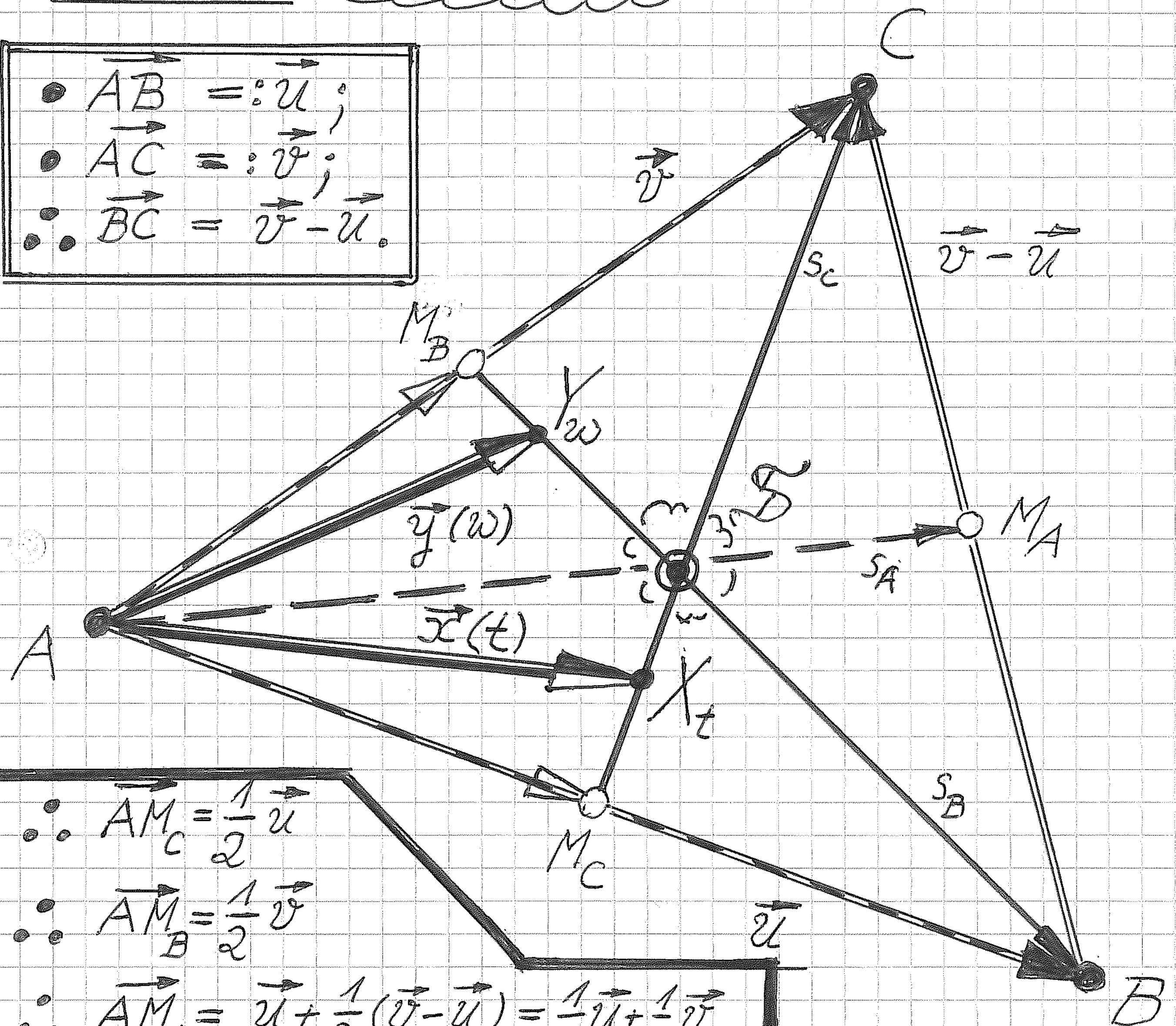
- $\triangle$ ABC
- Seitenmittelpunkte: M_A, M_B, M_C
- Seitenhalbierende: s_A, s_B, s_C



Behauptung: s_A, s_B, s_C treffen sich in einem gemeinsamen Punkt S (dem Schwerpunkt)

Nachweis: "vektoriell"

- $\overrightarrow{AB} =: \vec{u}$;
- $\overrightarrow{AC} =: \vec{v}$;
- $\therefore\ \overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$.



- $\therefore\ \overrightarrow{AM_C} = \frac{1}{2}\vec{u}$
- $\therefore\ \overrightarrow{AM_B} = \frac{1}{2}\vec{v}$
- $\therefore\ \overrightarrow{AM_A} = \vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

- $\vec{x}(t) := \overrightarrow{AX_t} = \overrightarrow{AM_C} + t\,\overrightarrow{M_C C} = \frac{1}{2}\vec{u} + t(\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u})$
- $\vec{y}(w) := \overrightarrow{AY_w} = \overrightarrow{AM_B} + w\,\overrightarrow{M_B B} = \frac{1}{2}\vec{v} + w(\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v})$

(NB: $0 \leq t, w \leq 1$)

Idee: t, w so suchen, dass $X_t = Y_w = S$

$\therefore$ $\vec{x}(t) = \vec{y}(w)$ (für geeignete t, w)

$t = ?$ $\quad w = ?$ ...

...

Also: Gesucht t, w mit:

$$\star \quad \frac{1}{2}\vec{u} + t\left(\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}\right) = \frac{1}{2}\vec{v} + w\left(\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\right)$$

... $\star$ umformen so, dass alle Terme mit $\vec{u}$ links von "=" stehen und alle Terme mit $\vec{v}$ rechts von "="!

$$\therefore \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2} - w\right)\vec{u} = \left(\frac{1}{2} - \frac{w}{2} - t\right)\vec{v}$$

Beobachtung: $\vec{u}$ kein Vielfaches von $\vec{v}$ (I)
$\vec{v}$ kein Vielfaches von $\vec{u}$ (II) $\therefore$

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{I})\ \frac{1}{2} - \frac{t}{2} - w = 0 \quad \Big|\ + \\ &(\mathrm{II})\ \frac{1}{2} - \frac{w}{2} - t = 0 \quad \Big|\ - \end{aligned}\right\} \therefore \left\{\begin{aligned} &\frac{t}{2} - \frac{w}{2} = 0 \Rightarrow w = t \overset{(\mathrm{I})}{\Longrightarrow} \\ &\frac{1}{2} - \frac{t}{2} - t = 0 \Rightarrow \boxed{t = w = \frac{1}{3}} \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\overrightarrow{AS} = \vec{x}\left(\frac{1}{3}\right) = \ldots = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}; \ (\text{NB}: S = X_{\frac{1}{3}} = Y_{\frac{1}{3}})}$$

Behauptung: S liegt auch auf s_A

Nachweis: $r \in \mathbb{R}$ so finden, dass $r \cdot \overrightarrow{AM_A} = \overrightarrow{AS}$ $\therefore$

$$\therefore r\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \ldots$$

Wähle $r = \dfrac{2}{3}$.

Skalarprodukt

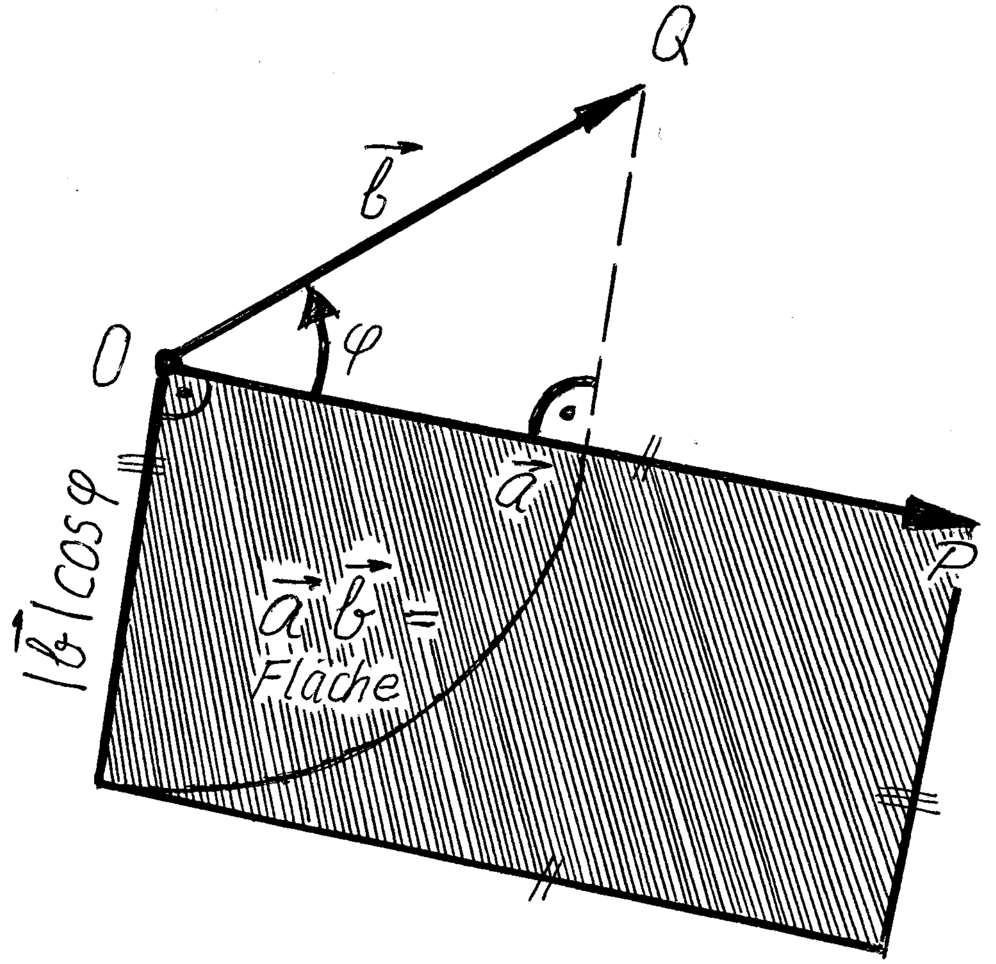
(vgl. 1.8)

- $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$; $\vec{b} = \overrightarrow{OQ}$; $\varphi = \sphericalangle POQ$

$$\boxed{\vec{a}\,\vec{b} := |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi}$$

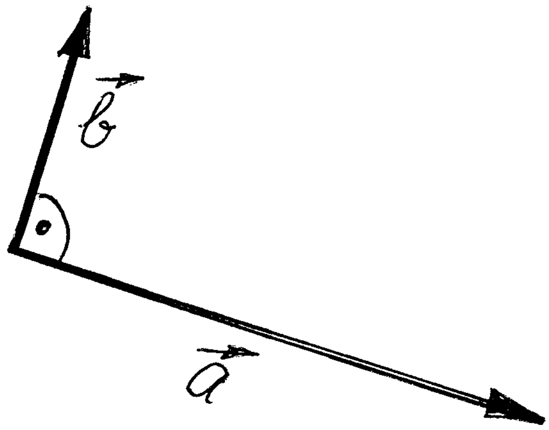
Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

(NB: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist eine Zahl, d.h. ein **Skalar**)



Eigenschaften des Skalarprodukts (vgl. 1.8)

- $\vec{a}\,\vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$; ($\vec{a}$ senkrecht zu $\vec{b}$)



(NB: $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$)

- Rechenregeln: ($\lambda \in \mathbb{R}$)

(1) $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$.

(2) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$.

(3a) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$.

(3b) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$.

(4) $\vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

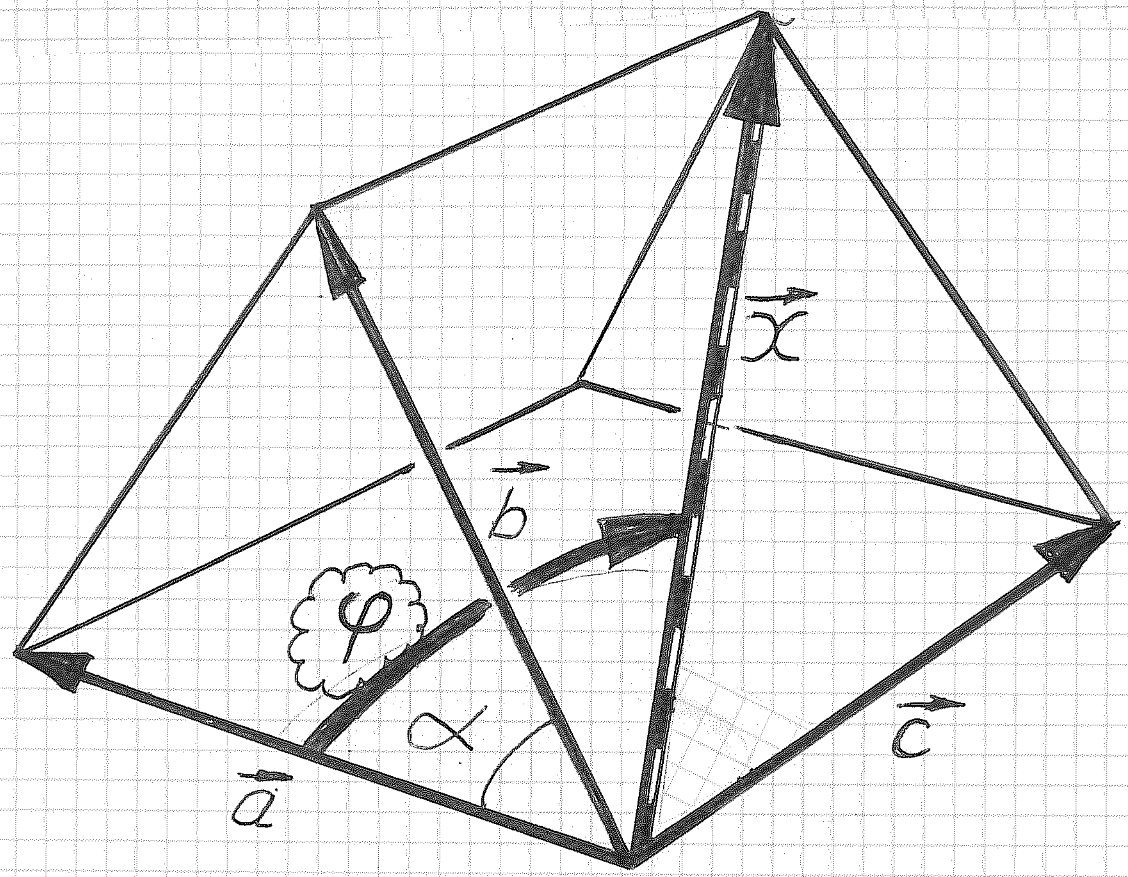
(5) $\vec{a}\,\vec{0} = 0$.

- Beispiele:

  - $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\,\vec{b}$.
  - $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$.

Übungsblatt 1, Aufgabe 9°

MAT 182 (6'')



Alle Kanten des Prismas sind gleich lang.

Angenommene gemeinsame Länge: 1

a) $\underline{\underline{\vec{a}\,\vec{b}}} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\alpha) =$

$= 1 \cdot 1 \cos(60°) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$.

$\underline{\underline{\vec{a}\,\vec{c}}} = \underline{\underline{0}}$; $(\vec{a} \perp \vec{c})$.

$\underline{\underline{\vec{a}\,\vec{x}}} = \vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$; $(\vec{x} = \vec{b} + \vec{c})$.

b) $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{x})$

$$\vec{a}\,\vec{x} = |\vec{a}|\,|\vec{x}|\cos(\varphi).$$

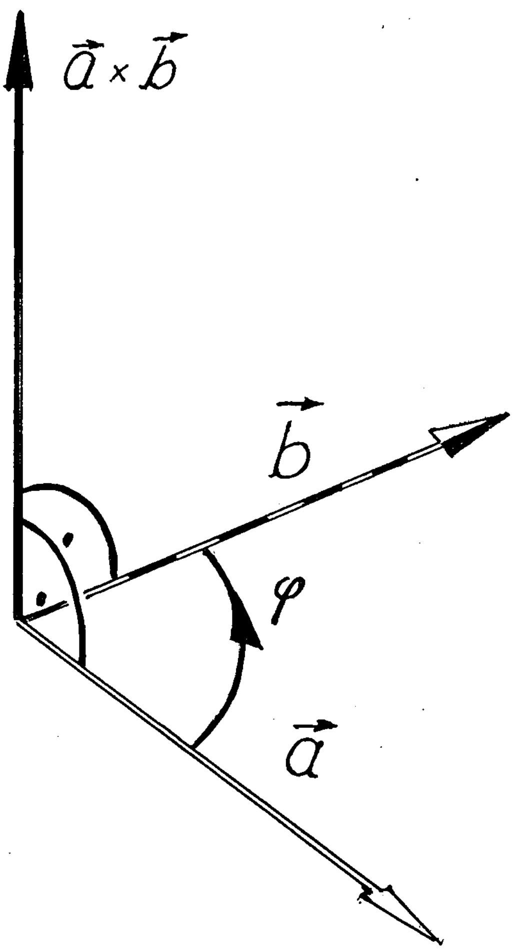
$$\frac{1}{2} = 1\cdot\sqrt{2}\,\cos(\varphi);\ (|\vec{x}| = \sqrt{2}).$$

$$\underline{\underline{\cos(\varphi)}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}}}$$

$$\underline{\underline{\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}} = \ldots$$

Vektorprodukt

(vgl. (1.9))



$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$;

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$; $(0 \leq \varphi \leq \pi)$;

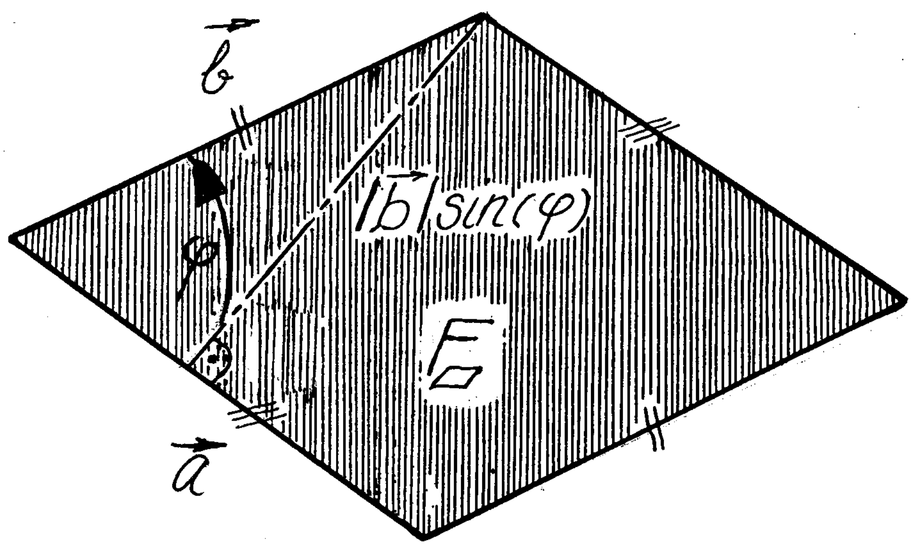
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein **Rechtssystem.**

Betrag des Vektorprodukts

(vgl. 1.9)

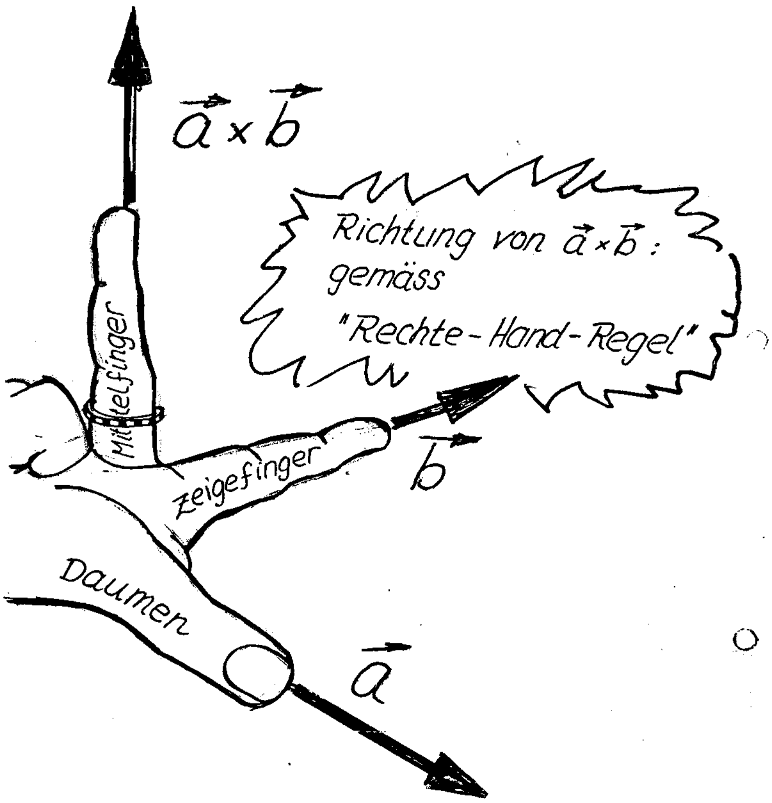
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi = F_{\square} ;$$

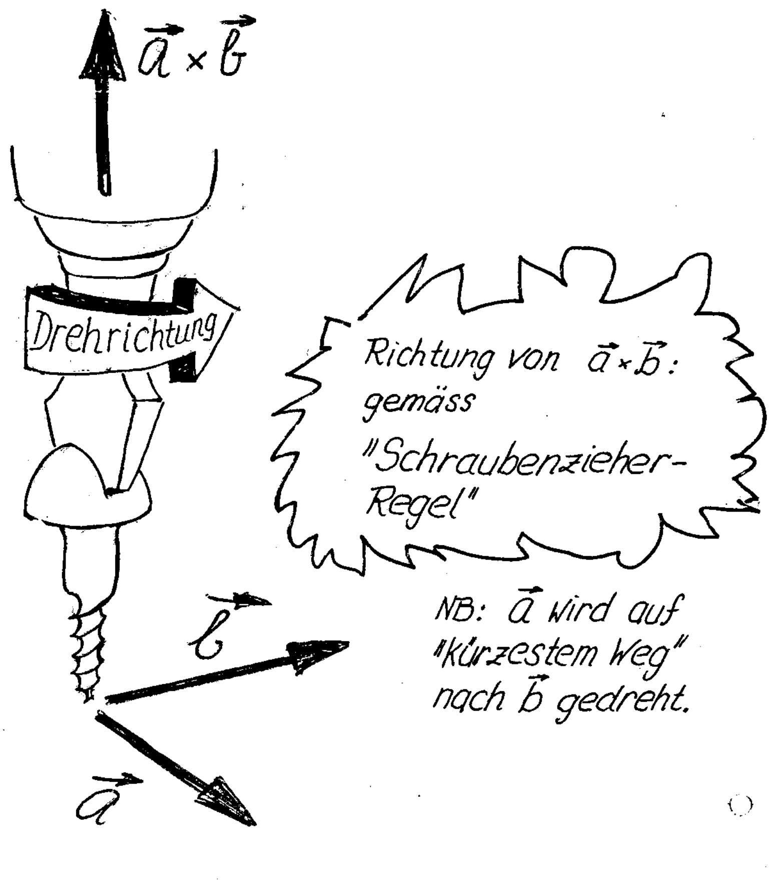
$F_{\square}$ = Fläche des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms



Richtung des Vektorprodukts (vgl. 1.9)

- Rechtssystem:



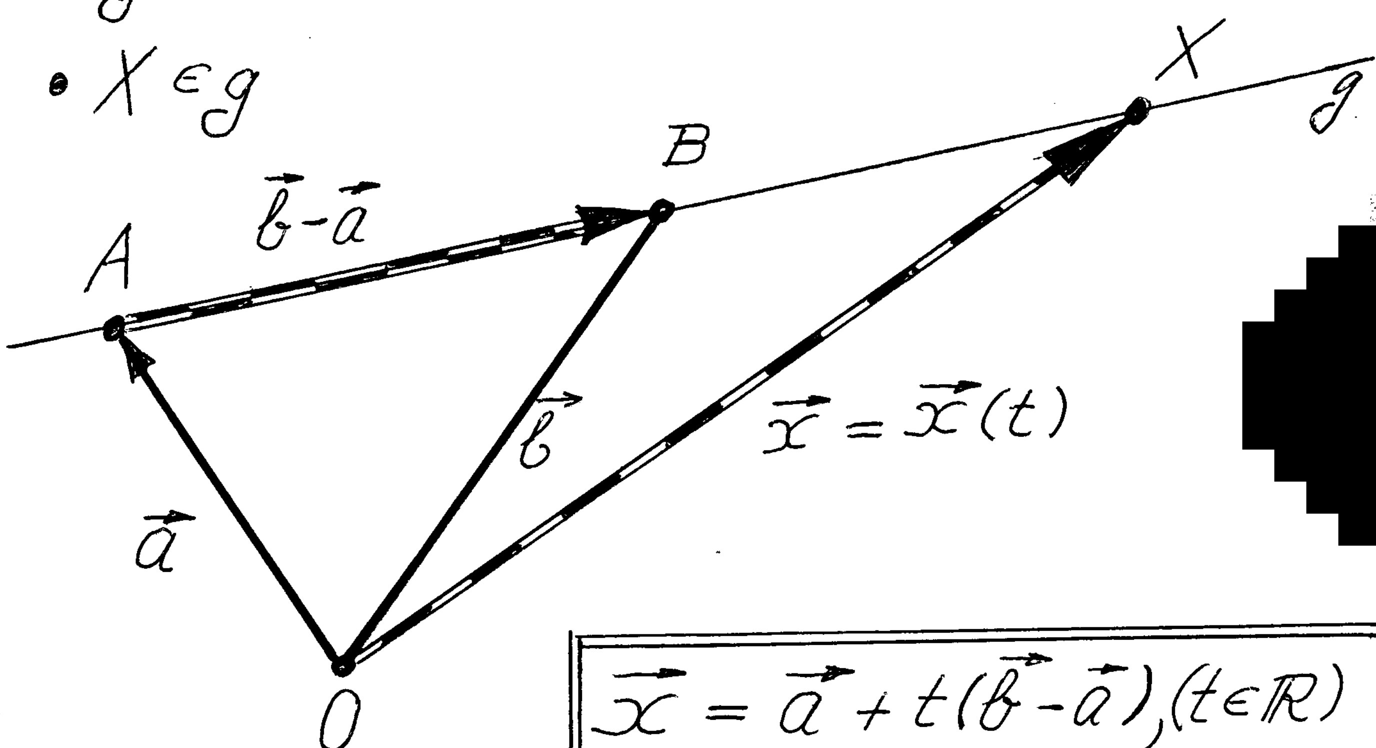


NB: $\vec{a}$ wird auf "kürzestem Weg" nach $\vec{b}$ gedreht.

Parameterdarstellung einer Geraden (vgl. 1.10)

- O, X Punkte
- $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ = Ortsvektor von X bezüglich O.

- $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $(A \neq B)$.
- g = Gerade durch A und B.
- $X \in g$



$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), (t \in \mathbb{R})}$$

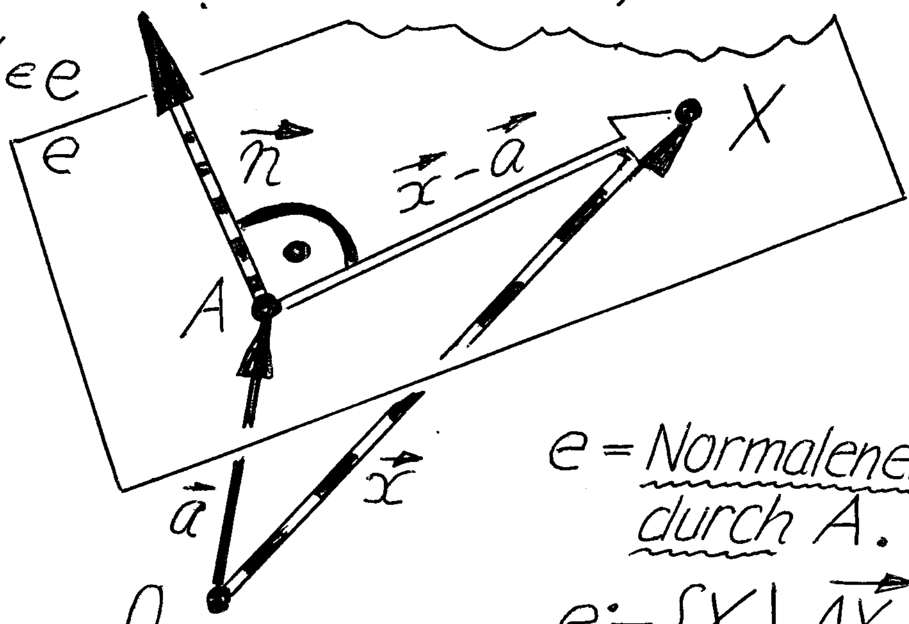
(Parameterdarstellung von g)

- $\vec{a}$ = Stützvektor von g.
- $\vec{b} - \vec{a}$ = Richtungsvektor von g.
- t = Parameter (Laufgrösse) $\hat{=}$ Zeit.

Normalenebene zu einem Vektor durch einen Punkt

(vgl. 1.10)

- A = Punkt, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$.
- $\vec{n}$ = Vektor;
- e = Ebene durch, senkrecht zu $\vec{n}$
- $X \in e$



e = Normalenebene zu $\vec{n}$ durch A.

$e := \{X \mid \overrightarrow{AX} \perp \vec{n}\}$

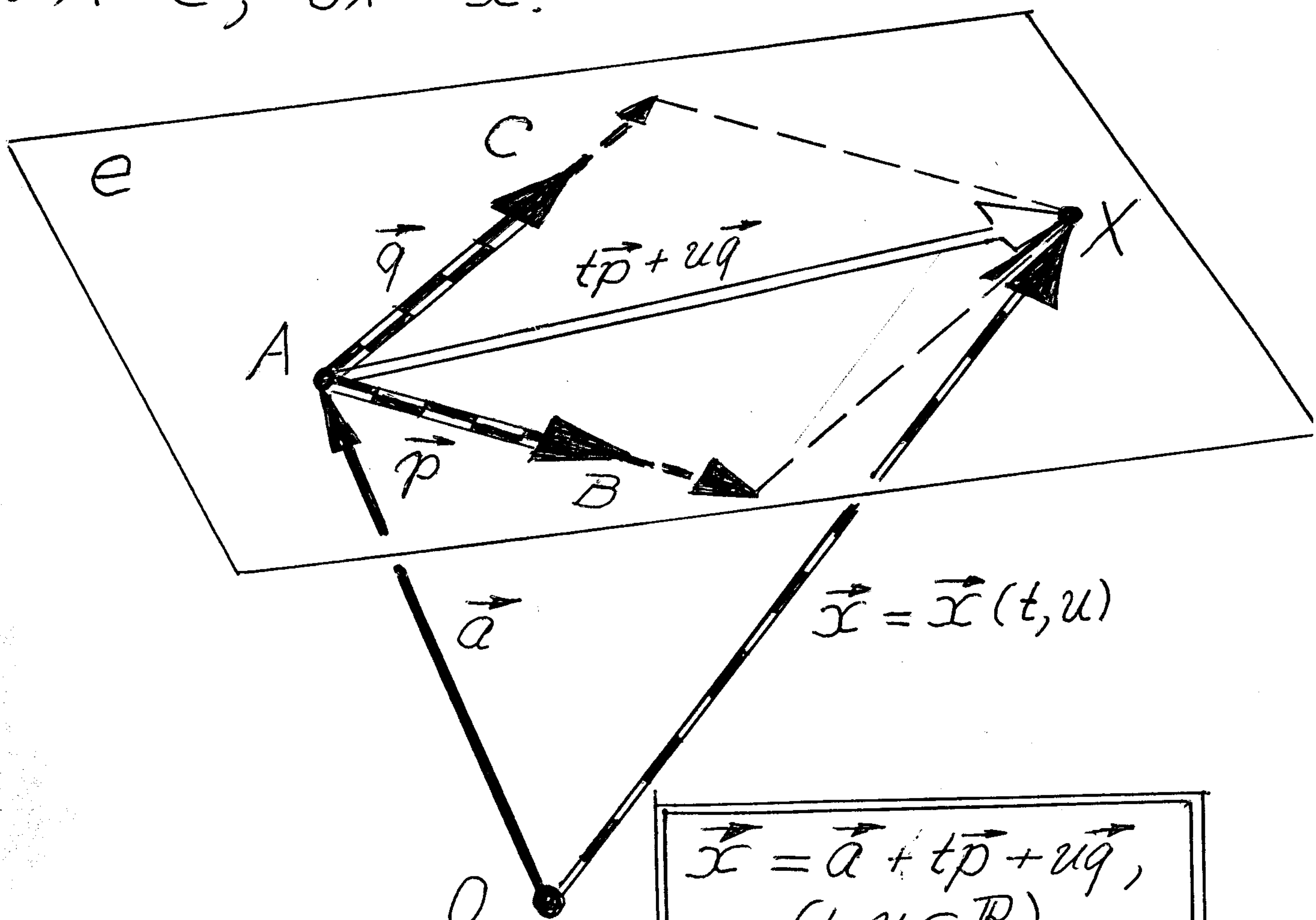
$$\boxed{\vec{n}(\vec{x}-\vec{a}) = 0}$$ (Implizite Darstellung von e)

- $\vec{a}$ = Stützvektor von e.
- $\vec{n}$ = Normalenvektor zu e.

NB: normal $\triangleq$ senkrecht

Parameterdarstellung einer Ebene (vgl. 1.10)

- O, A, B, C Punkte.
- $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{q}$.
- e = Ebene durch A und B und C
- $X \in e$; $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$.



$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + t\vec{p} + u\vec{q}, \quad (t, u \in \mathbb{R})}$$

(Parameterdarstellung von e)

- $\vec{a}$ = Stützvektor von e.
- $\vec{p}, \vec{q}$ = aufspannende Vektoren von e.
- t, u = Parameter.

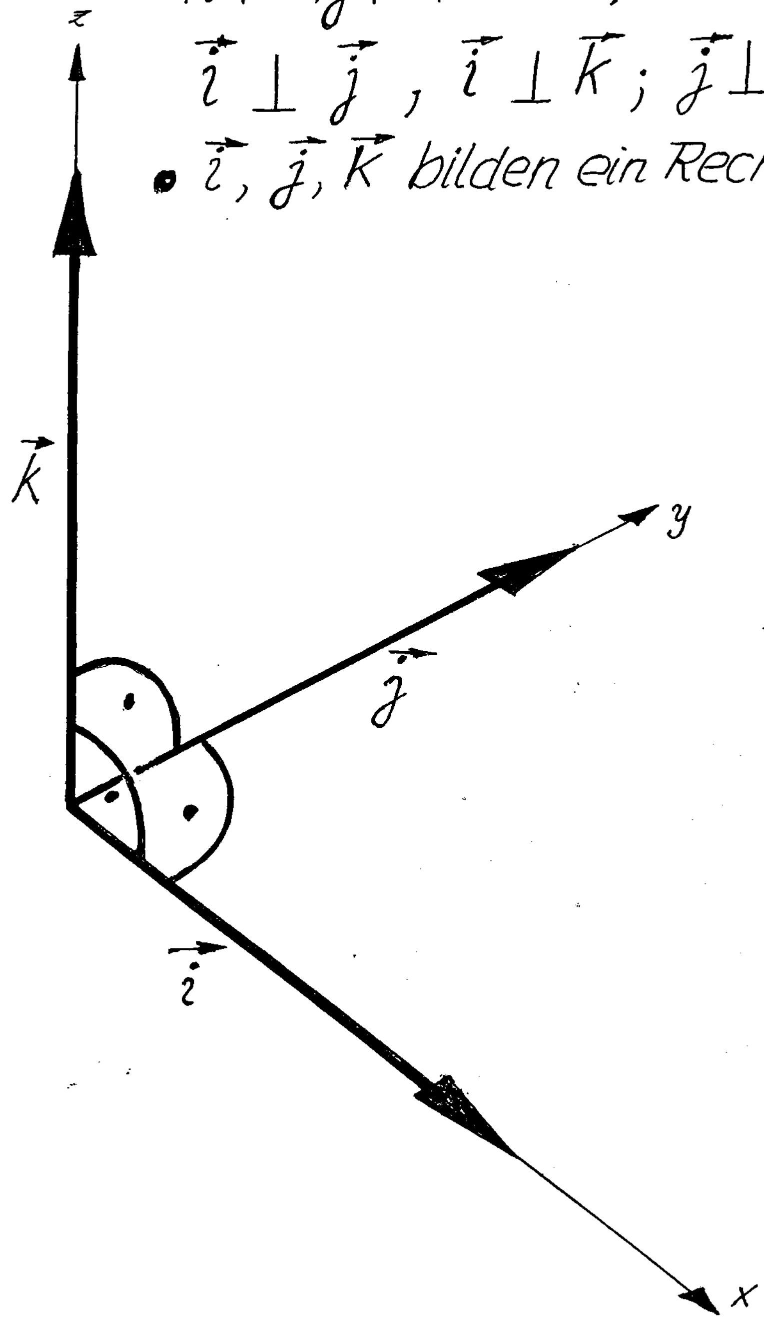
kartesisches Koordinatensystem

(vgl. 2.2)

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$;

$\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$; $\vec{j} \perp \vec{k}$;

- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bilden ein Rechtssystem

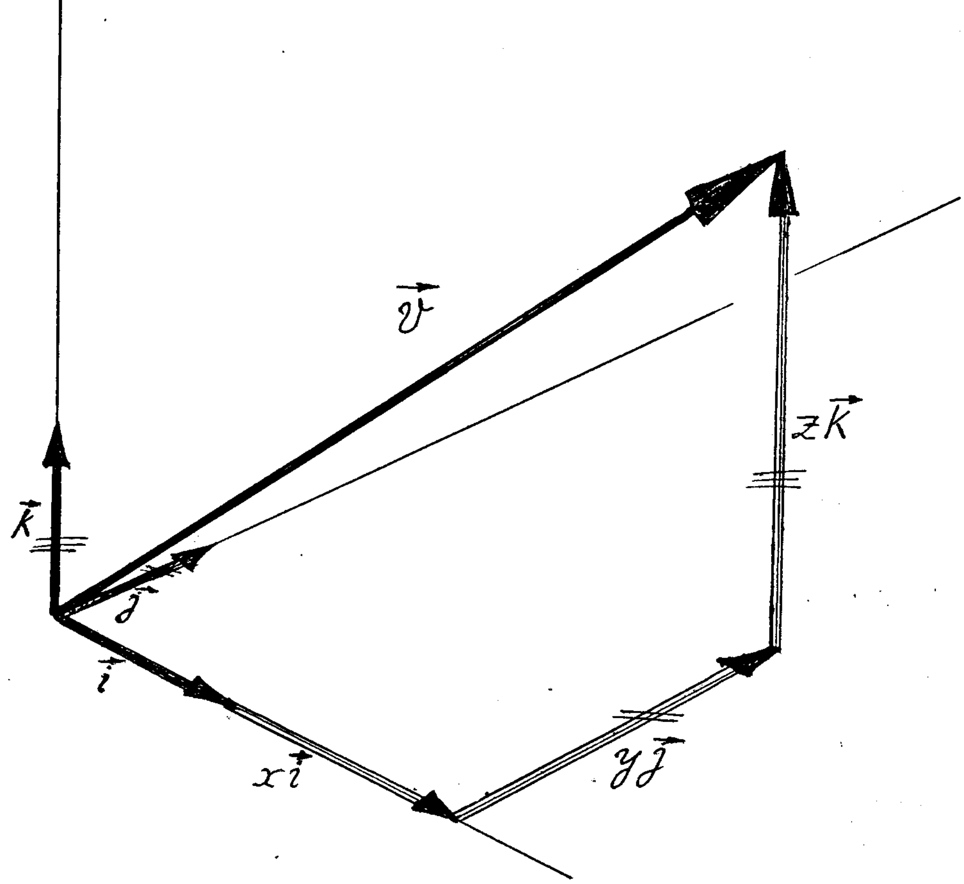


Koordinaten eines Vektors

(vgl. 2.3)

$x, y, z =:$ Koordinaten von $\vec{v}$

$x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k} =:$ Komponenten von $\vec{v}$



$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; (x, y, z \in \mathbb{R})$$

NB:
- Koordinaten sind Zahlen
- Komponenten sind Vektoren

Rechenoperationen mit Koordinaten (vgl. 2.4)

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

(1)
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix},$$

(2)
$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix},$$

(3)
$$r\vec{a} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix},$$

(4)
$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\,,$$

(5)
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gelten folgende Formeln:

(6) Die Länge eines Vektors $\vec{a}$ ist gegeben durch

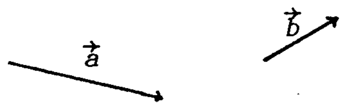
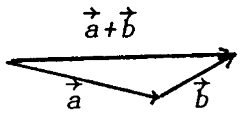
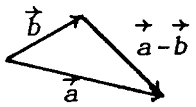
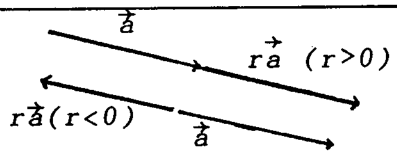
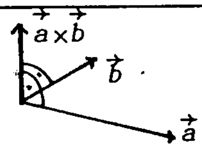
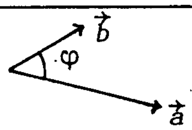
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

(7) Der Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\,.$$

(2.7) Zusammenstellung

In der untenstehenden Tabelle sind die wichtigsten Begriffe der Vektorrechnung in ihrer "geometrischen" (Kapitel 1) und ihrer "analytischen" (Kapitel 2) Erscheinungsform zusammengestellt.

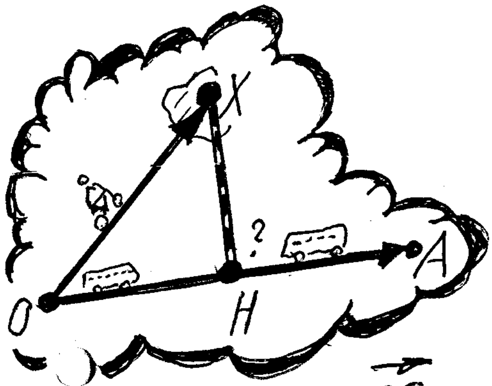
	geometrisch	mit Koordinaten
Vektoren		$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
Summe $\vec{a}+\vec{b}$		$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$
Differenz $\vec{a}-\vec{b}$		$\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$
Vielfaches $r\vec{a}$ $(r \in \mathbb{R})$		$r\vec{a} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$
Skalarprodukt $\vec{a}\vec{b}$	Länge von $\vec{a}$ mal Länge von $\vec{b}$ mal Cosinus des Zwischenwinkels	$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$		$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}$
Betrag $\lvert\vec{a}\rvert$	Länge des Vektors	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$		$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$

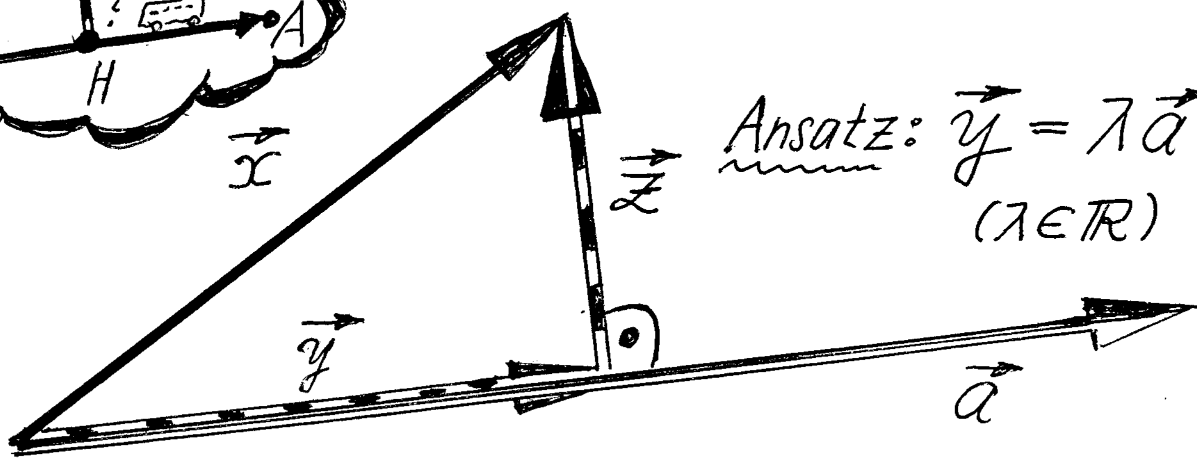
Orthogonalzerlegung eines Vektors

(vgl. (2.∞))

- Gegeben: $\vec{a}, \vec{x} \neq \vec{0}$.
- Aufgabe: Finden einer Zerlegung $\boxed{\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}}$ mit $\vec{y} \parallel \vec{a}$ und $\vec{z} \perp \vec{a}$

(Orthogonalzerlegung von $\vec{x}$ bezüglich $\vec{a}$)





Ansatz: $\vec{y} = \lambda \vec{a}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore\ \vec{x} = \lambda \vec{a} + \vec{z} \quad \therefore\ \vec{z} = \vec{x} - \lambda \vec{a} \\ \vec{z} \perp \vec{a} \quad \therefore\ \vec{z}\,\vec{a} = 0 \end{array}\right\} \therefore$$

$$\therefore\ (\vec{x} - \lambda \vec{a})\,\vec{a} = 0$$

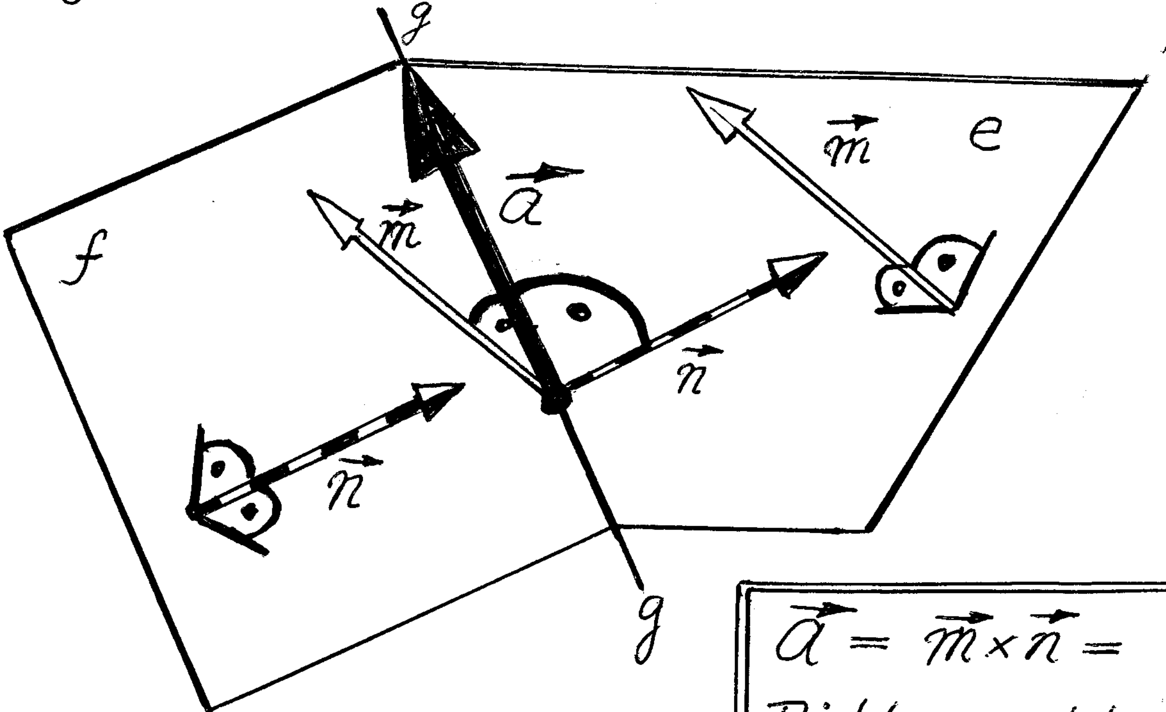
$$\therefore\ \vec{x}\,\vec{a} - \lambda\, \vec{a}\,\vec{a} = 0 \quad \ldots \ (\mathrm{NB}: \vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}|^2)$$

$$\therefore\ \lambda = \frac{\vec{x}\,\vec{a}}{|\vec{a}|^2}.$$

$$\boxed{\vec{y} = \frac{\vec{x}\,\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} \quad ; \quad \vec{z} = \vec{x} - \frac{\vec{x}\,\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}}$$

Normalenvektoren und Schnittgeraden (vgl. 2.∞)

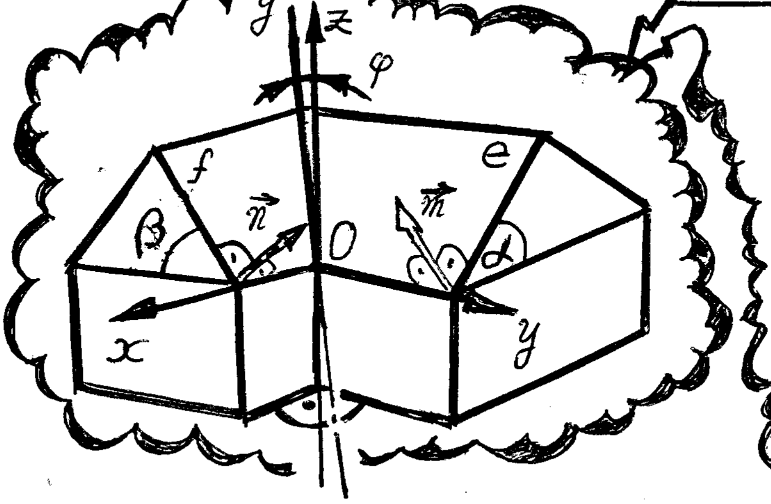
- e = Ebene, $\vec{m}$ = Normalenvektor zu e.
- f = Ebene, $\vec{n}$ = Normalenvektor zu f.
- g = Schnittgerade von e und f.



$$\boxed{\vec{a} = \vec{m} \times \vec{n} = \text{Richtungsvektor von } g}$$

(NB: e gegeben durch $ax + by + cz + d = 0$ ∴

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
)



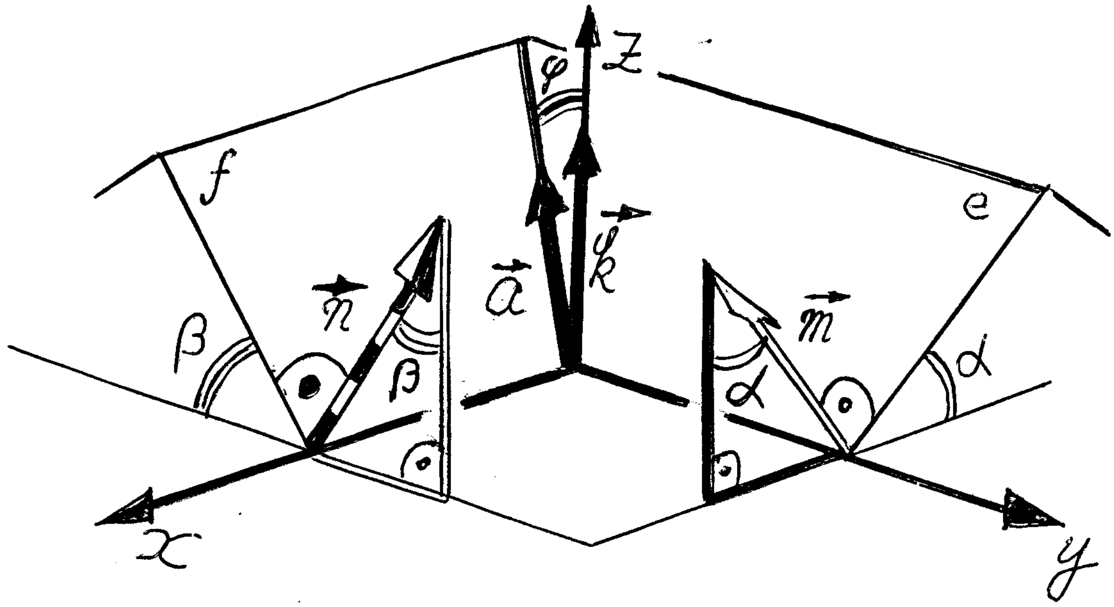
$\vec{k} = (0, 0, 1) \parallel z$-Achse

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{m} \times \vec{n})\,\vec{k}}{|\vec{m} \times \vec{n}|}$$

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix} \therefore \ldots$$

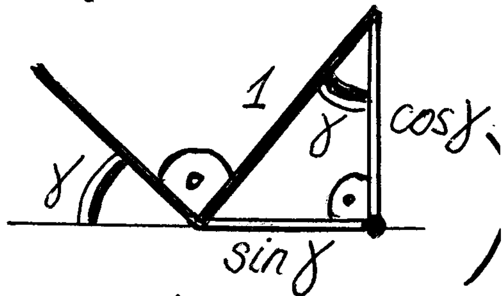
$$\cos\varphi = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \cos^2\beta}} \quad \ldots \%$$

Die Hausdächer (Ergänzung)



○ • $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$; $\vec{a}=\vec{m}\times\vec{n}$.

$$\boxed{(\star)\ \vec{m}=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\0\\\cos\alpha\end{pmatrix};\quad \vec{n}=\begin{pmatrix}0\\\sin\beta\\\cos\beta\end{pmatrix}}$$

(NB: 

)

$$\vec{m}\times\vec{n}=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\0\\\cos\alpha\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\\sin\beta\\\cos\beta\end{pmatrix}\overset{(5)}{=}\begin{pmatrix}-\cos\alpha\sin\beta\\-\sin\alpha\cos\beta\\\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}\ ∴$$

$$◉\quad (\vec{m}\times\vec{n})\vec{k}=\begin{pmatrix}-\cos\alpha\sin\beta\\-\sin\alpha\cos\beta\\\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\sin\alpha\sin\beta.$$

$$◎\quad |\vec{m}\times\vec{n}|=\sqrt{(-\cos\alpha\sin\beta)^2+(-\sin\alpha\cos\beta)^2+(\sin\alpha\sin\beta)^2}$$
$$=\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$
$$=\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)}$$
$$=\sqrt{\cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)+\sin^2\alpha}=$$
$$=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

◉ So ∴

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{m}\times\vec{n})\vec{k}}{|\vec{m}\times\vec{n}||\vec{k}|}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}}$$

Differenzierbarkeit & Ableitung (vgl. 4.1-3)

- Funktion $f: D(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in D(f)$.
(NB: $D(f)$ = Definitionsbereich von f $\subseteq \mathbb{R}$)

☆ f differenzierbar an der Stelle x_0 $:\Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.

☆ Ist f differenzierbar an der Stelle x_0, so heisst

$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

die Ableitung von f an der Stelle x_0.

- $D'(f) := \{x_0 \in D(f) \mid f \text{ diffbar in } x_0\} =$
$=$ Differenzierbarkeitsbereich von f.

☆ $f': D'(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f'(x)$
heisst ageleitete Funktion von f
Kurzsprechweise: f' = Ableitung von f.

Beispiele von Ableitungen

- $f(x) = x^3$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x^2 + x x_0 + x_0^2) = x_0^2 + x_0 x_0 + x_0^2 = 3x_0^2$$

$\therefore$ Kurzschreibweise: $\boxed{(x^3)' = 3x^2}$

- $f(x) = \sqrt{x}$; $(x > 0)$; $(x_0 > 0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$\therefore$ $\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ $(x > 0)$

- $f(x) = \frac{1}{x}$; $(x \neq 0)$; $(x_0 \neq 0)$

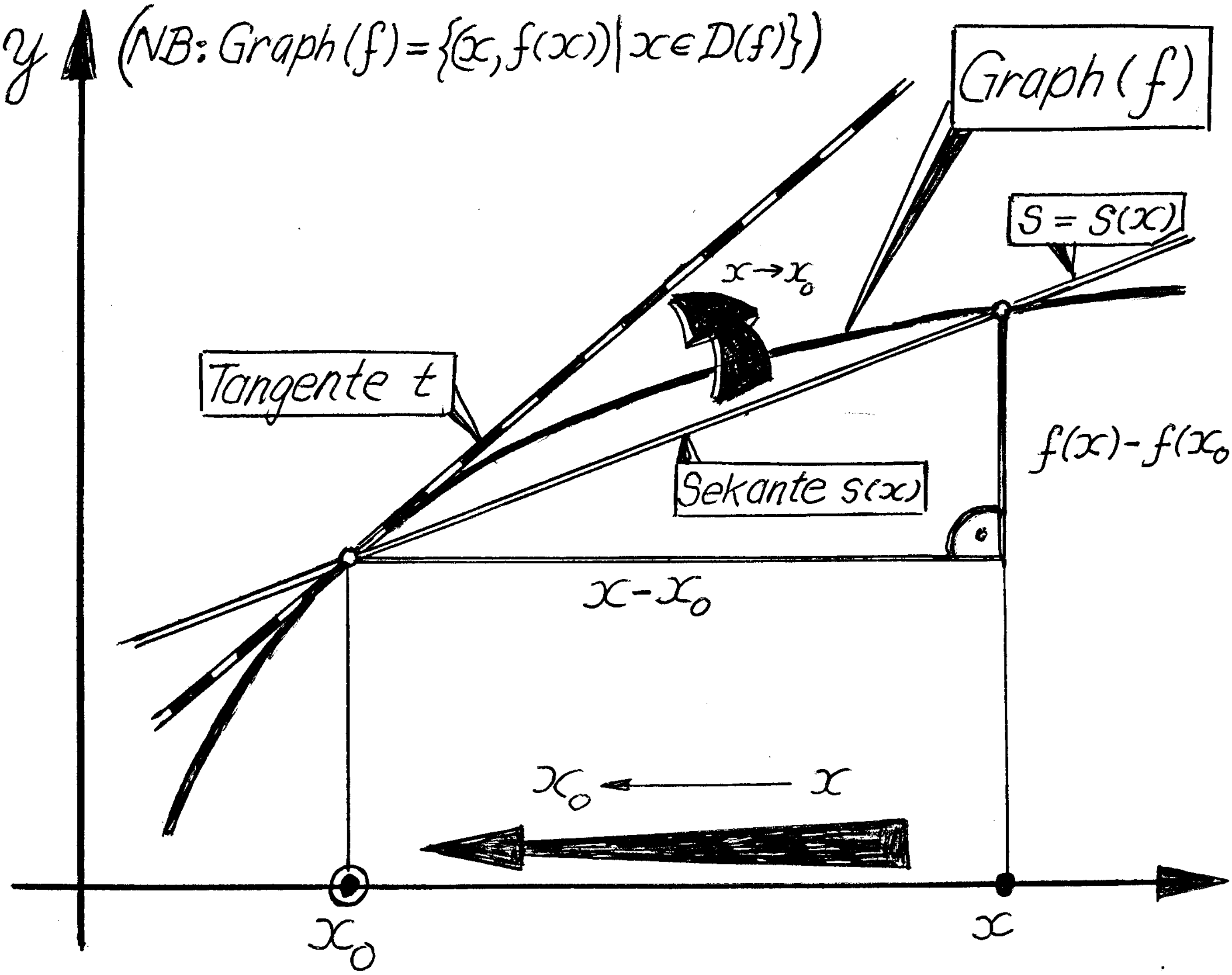
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{x_0 - x}{x x_0}\right)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{x x_0} = \frac{-1}{x_0 x_0} = \frac{-1}{x_0^2}$$

$\therefore$ $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}}$ $(x \neq 0)$.

Zum Ableitungsbegriff (vgl. 4.1-3)

- $f : D(f) \to \mathbb{R}; \quad x_0 \in D(f)$



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{Steigung der Sekante } s(x)$$

$$\Big\downarrow \; x \to x_0$$

$f'(x_0) \mathrel{\hat{=}}$ Steigung der Tangente an Graph(f) im Punkt über x_0

… mehr zum Ableitungsbegriff

- $f: D(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in D(f)$, $x \in D(f)$

$$\Delta f := f(x) - f(x_0); \quad \Delta x := x - x_0$$
$$(x \neq x_0)$$

Δx = Zuwachs des Arguments
Δf = Zuwachs der Funktion

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{Zuwachsrate} =$$

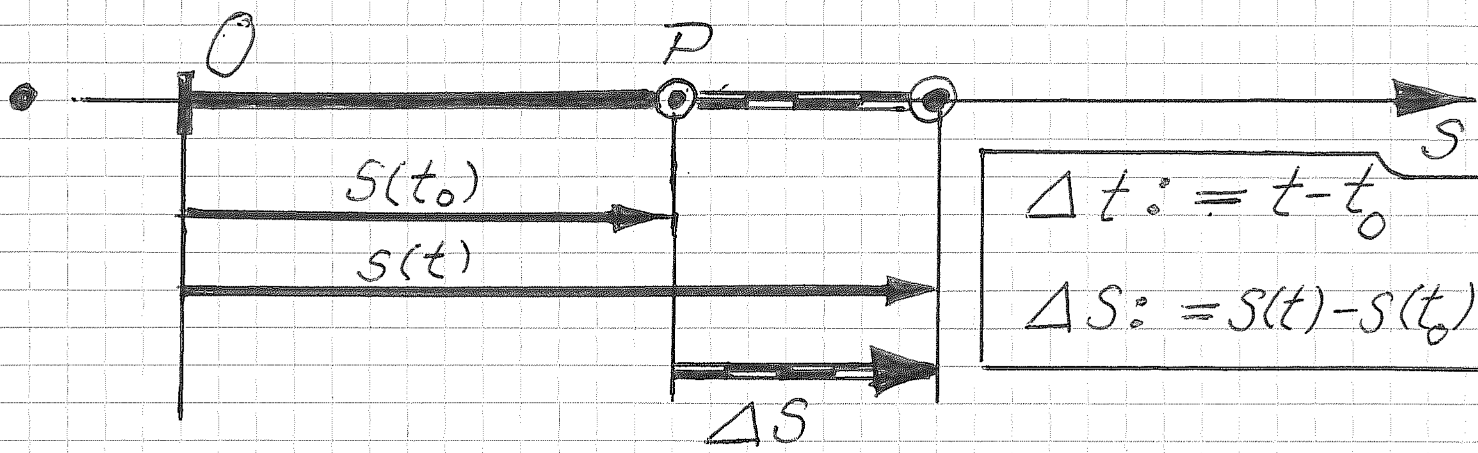
= <u>Differenzenquotient</u>

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{df}{dx}(x_0) =$$

= "<u>Differentialquotient</u>" von f an der Stelle x_0.

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f;$$ (Leibniz'sche Schreibweise).

Beispiel: Geschwindigkeit



$\Delta t := t - t_0$

$\Delta s := s(t) - s(t_0)$

Ein Punkt P bewegt sich längs der s-Axe.

$s(t)$ = Distanz des Punktes P von O zur Zeit t.

$s(t_0)$ = Distanz des Punktes P von O zur Zeit t_0.

$\Delta s = s(t) - s(t_0)$ = zurückgelegter Weg im Zeit-Intervall $\Delta t = t - t_0$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \left\{ \text{(mittlere) Geschwindigkeit im Zeit-Intervall } \Delta t. \right.$$

$$\dot{s}(t_0) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ableitung von s an} \\ \text{der Stelle } t_0 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{ds}{dt}(t_0) = \text{Momentangeschwindigkeit zur Zeit } t_0.$$

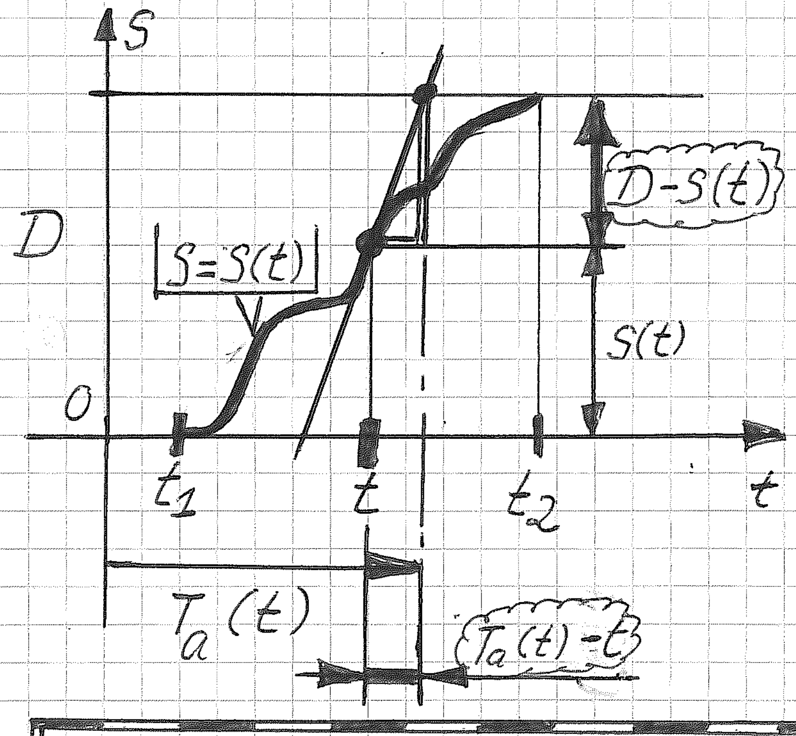
... Beispiel zum Beispiel

- Zug unterwegs von A nach Z ;
- Abfahrtszeit t_1, Ankunftszeit t_2 ; (Gemäss Fahrplan)
- $s(t)$ zurückgelegter Weg zur Zeit t ($t \geq t_1$) ;

? Ankunftszeit in Z, wenn vom Zeitpunkt t ($\geq t_1$) mit der dort erreichten Momentangeschwindigkeit weitergefahren würde.

$D = |AZ| =$ Distanz A − Z

$T_a(t)$ = Ankunftszeit



$\mathring{s}(t)$ = Momentangeschwindigkeit zur Zeit t.

NB: Die Distanz $D-s(t)$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathring{s}(t)$ zurückgelegt im Zeitraum $T_a(t)-t$!

$$\boxed{(T_a(t)-t)\,\mathring{s}(t) = D-s(t)}$$

Auflösen nach $T_a(t)$: $\boxed{T_a(t) = \dfrac{D-s(t)}{\mathring{s}(t)} + t}$

Beispiel: Nicht differenzierbare Funktion ...

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) := \ln(|x|+1)$; $x_0 := 0$.

Behauptung: f ist nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$.

Beweis: Wegen $|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x \leq 0 \end{cases}$

- Für alle $x \geq x_0 = 0$: $f(x) = \ln(x+1) =: h(x)$.

- Für alle $x \leq x_0 = 0$: $f(x) = \ln(-x+1) =: g(x)$.

$$\underline{\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}} \overset{x \geq 0}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} =$$

$$= h'(0) = \ln(x+1)'_{x=0} = \left(\frac{1}{1+x} \cdot 1\right)_{x=0} = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}} \overset{x \leq 0}{=} \lim_{x \uparrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} =$$

$$= g'(0) = \ln(-x+1)'_{x=0} = \left(\frac{1}{1-x} \cdot (-1)\right)_{x=0} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \ldots$$

... "ein Rezept" (Diff'barkeitstest)

- $f: D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R};\quad x_0 \in D(f)$.

☆ Suche Funktionen $g(x)$, $h(x)$ so dass:

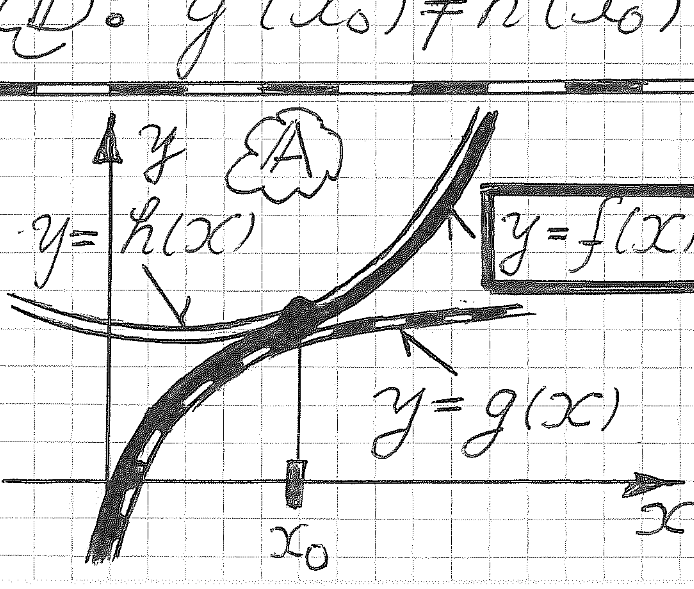
- $g(x) = f(x)$ für alle $x \leq x_0$;
- $h(x) = f(x)$ für alle $x \geq x_0$;
- $g(x)$, $h(x)$ diff'bar in x_0.

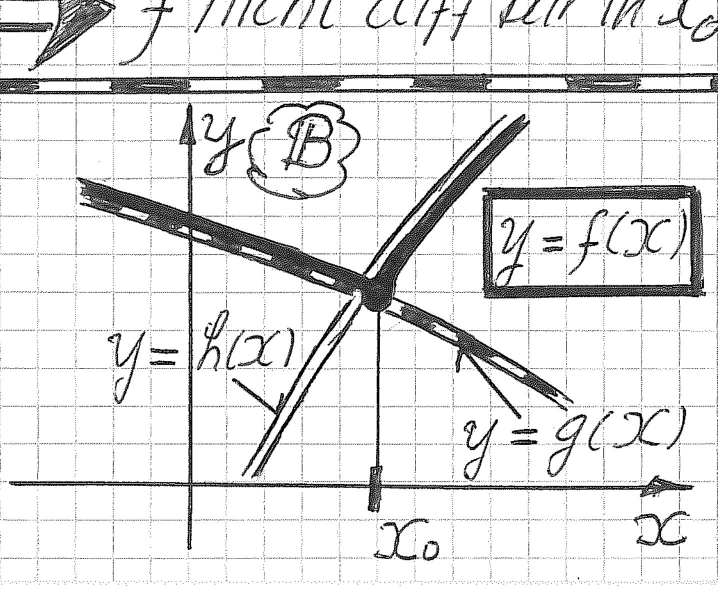
NB: $\displaystyle\lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$;

NB: $\displaystyle\lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = h'(x_0)$.

(A): $g'(x_0) = h'(x_0) \implies \begin{cases} f \text{ diff'bar in } x_0; \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$

(B): $g'(x_0) \neq h'(x_0) \implies f$ nicht diff'bar in x_0.





Stetigkeit

• $f: D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in D(f)$

DEFINITION: f ist stetig in x_0 wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

☆ f ist genau dann stetig in x_0, wenn

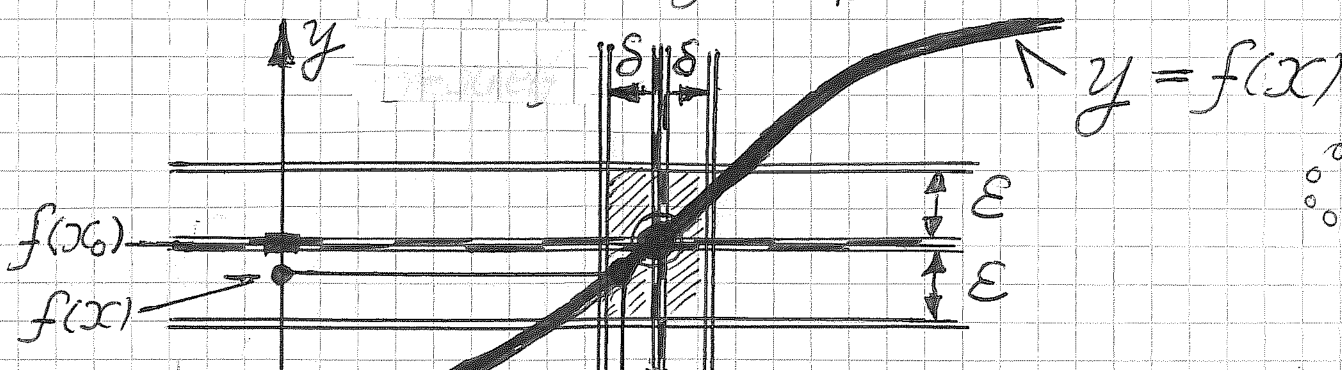
$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$$

NB: f ist genau dann stetig an der Stelle x_0, wenn:

! es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$

! so gibt, dass für jede Zahl $x \in D(f)$

! mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



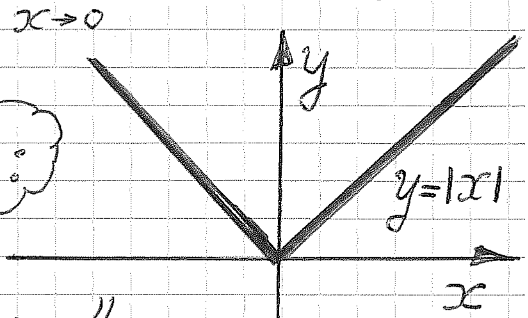
"Die Graphenpunkte im δ-Streifen um x_0 liegen im ε-Streifen um $f(x_0)$."

... Beispiele zur Stetigkeit

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} |x| \overset{x \leq 0}{=\!=} \lim_{x \uparrow 0} (-x) = \lim_{x \to 0} (-x) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} |x| \overset{x \geq 0}{=\!=} \lim_{x \downarrow 0} x = \lim_{x \to 0} x = 0 = f(0)$$



Also: $f(x) = |x|$ stetig in $x_0 = 0$.

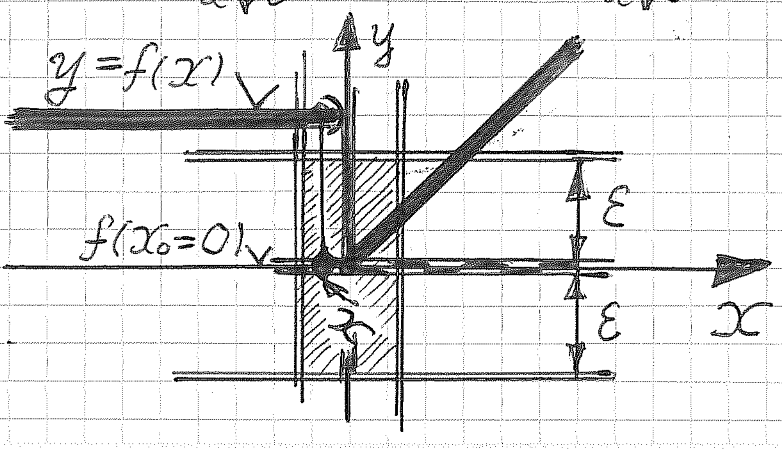
Test mit der "ε-δ-Definition"
Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $\delta := \varepsilon$.
Es folgt $|x - 0| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon \Rightarrow$
$||x| - 0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) \overset{x<0}{=\!=} \lim_{x \uparrow 0} 1 = 1 \neq 0 = f(0).$$

Also: $f(x)$ nicht stetig in $x_0 = 0$.

NB: $\lim_{x \downarrow 0} f(x) \underset{x<0}{=\!=} \lim_{x \downarrow 0} x = 0 = f(0)$.



NB: "ε-δ-Definition":
Für $\varepsilon < 1$ lässt sich kein geeignetes δ finden!
($x < 0 \Rightarrow |f(x) - f(0)| > \varepsilon$)

Stetigkeit $\not\Leftrightarrow$ Diff'barkeit

- $f: D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in D(f)$.

$$\boxed{f \text{ diff'bar in } x_0 \Longrightarrow f \text{ stetig in } x_0}$$

Beweis: f diff'bar in $x_0 \Rightarrow$ Es existiert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Longrightarrow$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left((x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \cdot f'(x_0) = \underline{\underline{0}}.$$

Also: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ∎

! Aber: $\{ f \text{ stetig in } x_0 \not\Longrightarrow f \text{ diff'bar in } x_0 \}$

Beispiel: $f(x) = |x|$ ist stetig in $x_0 = 0$

Mit $g(x) := -x$, $h(x) = x$ gilt aber:

$g(x) = f(x)$ für $x \leq 0$ und $g'(0) = -1$

$h(x) = f(x)$ für $x \geq 0$ und $h'(0) = 1$

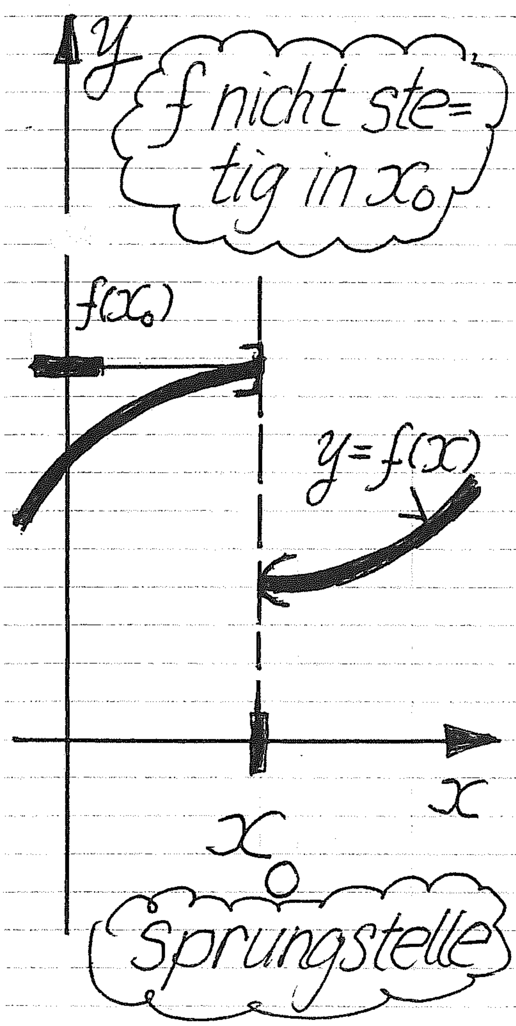
Also: $f(x) = |x|$ nicht diff'bar in $x_0 = 0$.

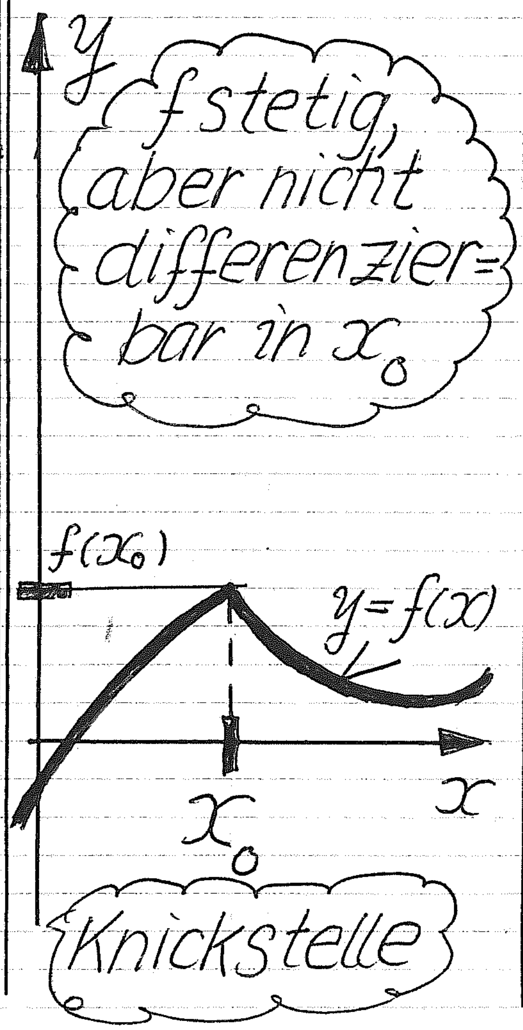
Stetigkeit & Diff'barkeit: ... anschaulich

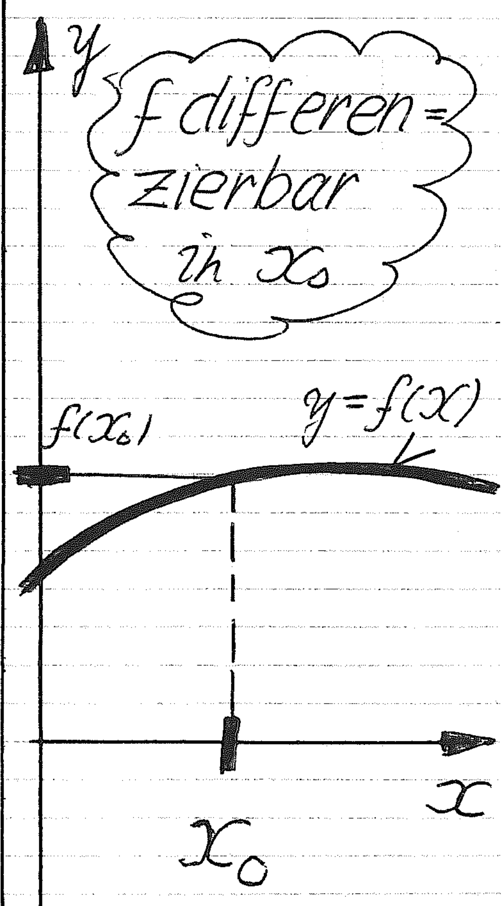
- $f : D(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in D(f)$

f stetig in x_0 $\triangleq$ Graph(f) springt nicht an der Stelle x_0.

f diff'bar in x_0 $\triangleq$ Graph(f) nicht geknickt an der Stelle x_0.







Ableitungsregeln (vgl 5.2)

- $f: D(f) \to \mathbb{R}$; $g: D(g) \to \mathbb{R}$; $x \in D'(f) \cap D'(g)$

* Summenregel: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.
* Konstantenregel: $(cf(x))' = cf'(x)$; $(c \in \mathbb{R})$.
* Produktregel: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.
* Quotientenregel: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.
  (NB: $g(x) \neq 0$)
* Kettenregel: $f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$.
  (NB: Statt $x \in D'(f) \cap D'(g)$ gilt hier $g(x) \in D'(f)$)

- Beispiel:

$$\left(\sqrt{x^3+\frac{1}{x}}\right)' \underset{\text{und } g(x)=x^3+\frac{1}{x}}{\overset{\text{(Kettenregel mit } f(u)=\sqrt{u}}{=\!=\!=}} (\sqrt{u})'_{u=x^3+\frac{1}{x}} \left(x^3+\frac{1}{x}\right)' \underset{\text{(Summenregel)}}{\overset{(\sqrt{u}\,' = \frac{1}{2\sqrt{u}})}{=\!=\!=}} \frac{1}{2\sqrt{x^3+\frac{1}{x}}}\left((x^3)'+\left(\frac{1}{x}\right)'\right) \underset{\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}}{\overset{(x^3)'=3x^2}{=\!=\!=}} \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x^3+\frac{1}{x}}}\left(3x^2-\frac{1}{x^2}\right)} \underset{\text{vereinfachen}}{\overset{\text{eventuell}}{=\!=\!=}} \ldots$$

MAT 182 (22)

(5.3) Die Ableitung der wichtigsten Funktionen

Funktion $y = f(x)$	Ableitung $y' = f'(x)$	Bemerkungen
$c = \text{const}$	0	
x^n	nx^{n-1}	Gilt für alle $n \in \mathbb{R}$, falls $x > 0$. Gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ und beliebige x (für $n < 0$ muss jedoch $x \neq 0$ sein).
x $\frac{1}{x}$ $\sqrt{x}$	1 $-\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	 $x \neq 0$ $x > 0$
e^x a^x	e^x $a^x \cdot \ln a$	 $a > 0$
$\ln x$ $\log_a x$	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$x > 0$ $x > 0,\ a > 0$
$\sin x$ $\cos x$ $\tan x$ $\cot x$	$\cos x$ $-\sin x$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $-(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ $x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$
$\arcsin x$ $\arctan x$ $\arccos x$ $\operatorname{arccot} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{1}{1+x^2}$ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-\frac{1}{1+x^2}$	$\|x\| < 1$ $\|x\| < 1$

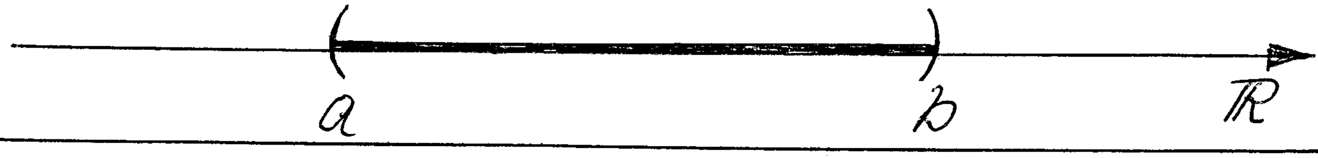
Intervalle

(vgl. 6.2)

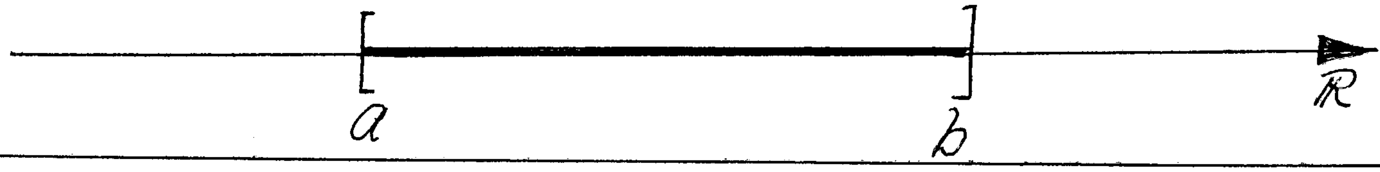
- $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$.

eigentliche Intervalle

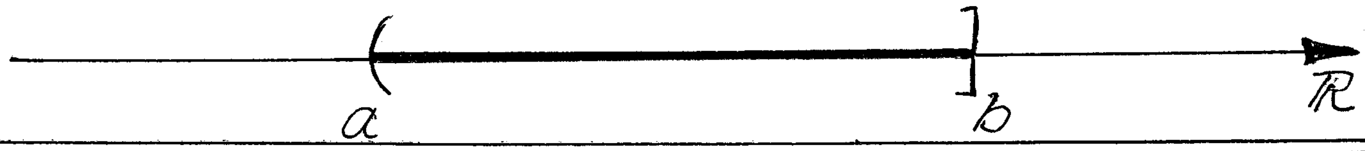
$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$: offenes I.



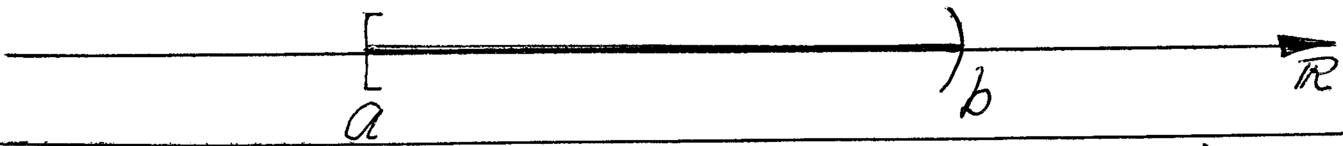
$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$: abgeschlossenes I.



$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$: $\left.\begin{array}{l}\text{links-offenes,}\\ \text{rechts-abg.}\end{array}\right\}$ I.



$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$: $\left.\begin{array}{l}\text{links-abg.,}\\ \text{rechts-offenes}\end{array}\right\}$ I.



(NB: $(a,b]$, $[a,b)$ = halboffene Intervalle)

- $I = (a,b)$ oder $I = [a,b]$ oder $I = (a,b]$ oder $I = [a,b)$.

  a, b =: Randpunkte von I.

$a < x < b \iff x$ = innerer Punkt von I.

Intervalle'

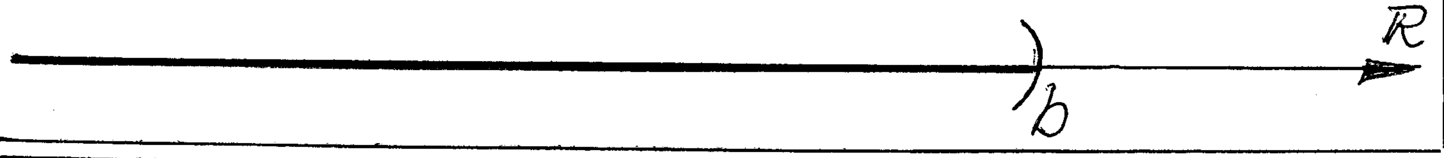
(vgl. 6.2)

uneigentliche Intervalle

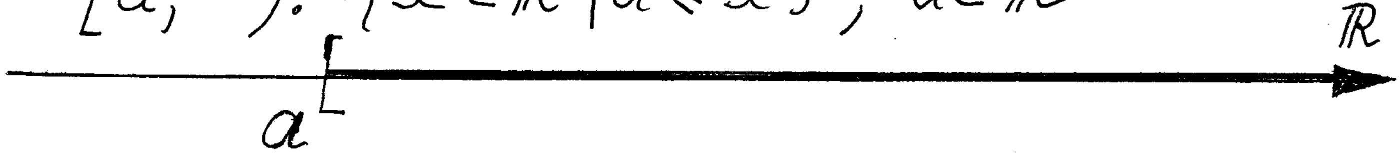
- $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; $a < b$

$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$; $(a \in \mathbb{R})$

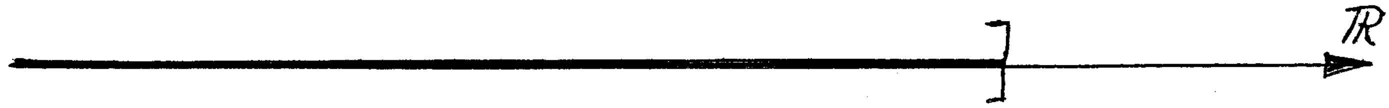
$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$; $(b \in \mathbb{R})$



$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$; $a \in \mathbb{R}$



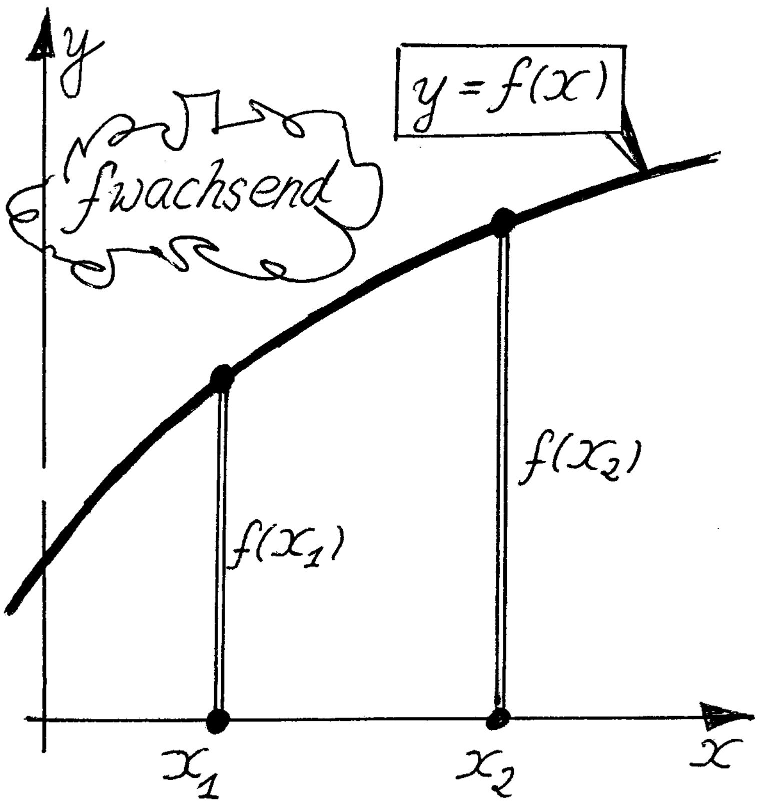
$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$; $b \in \mathbb{R}$

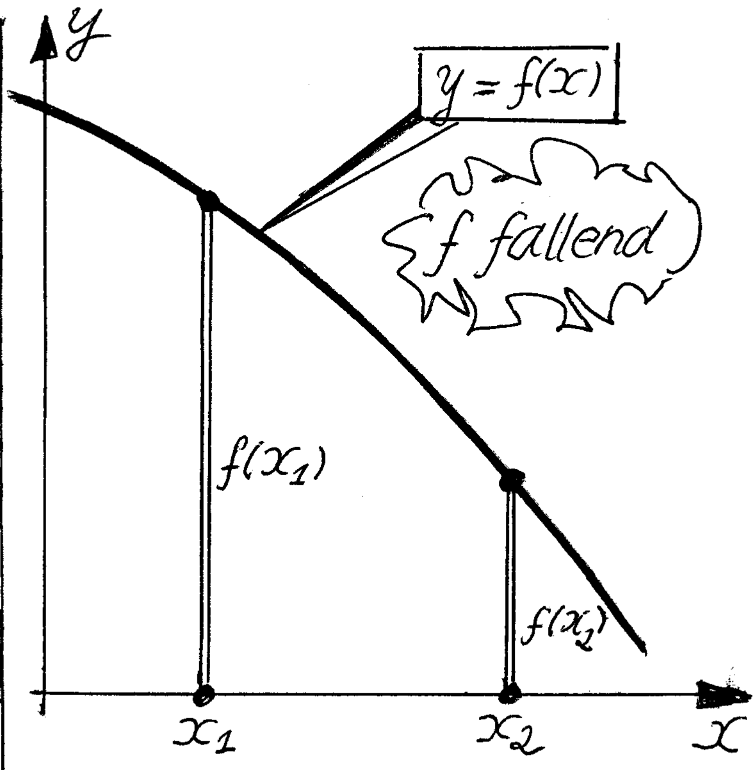


$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

Wachsende und fallende Funktionen (vgl. 6.2)

- $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion; $D = D(f) \subseteq \mathbb{R}$.





DEFINITION:

f heisst wachsend, wenn gilt:

$f(x_1) < f(x_2)$

für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$.

DEFINTION:

f heisst fallend, wenn gilt:

$f(x_1) > f(x_2)$

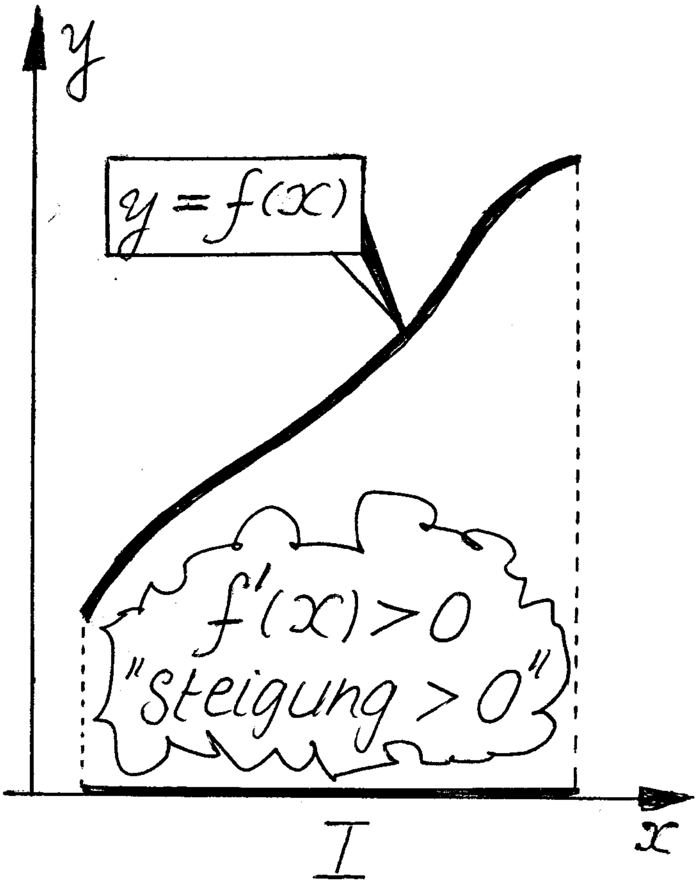
für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$.

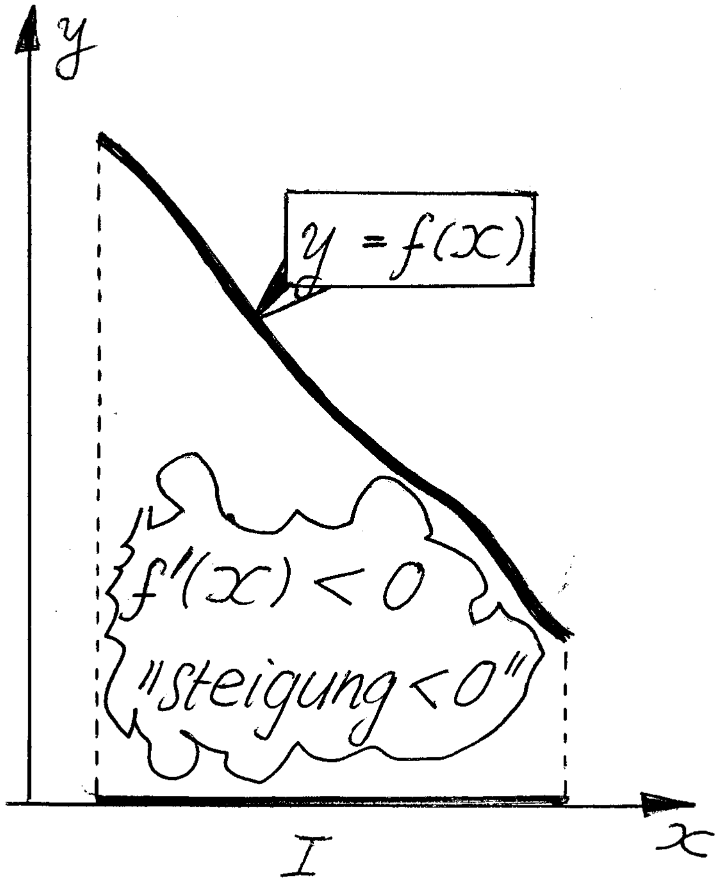
Wachstumsverhalten und Ableitung (vgl 6.3)

- $I \subseteq \mathbb{R}$, I = Intervall;
- $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ = differenzierbare Funktion.

$f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ $\Longrightarrow$ f ist auf I wachsend

$f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ $\Longrightarrow$ f ist auf I fallend.





Krümmungsverhalten und zweite Ableitung

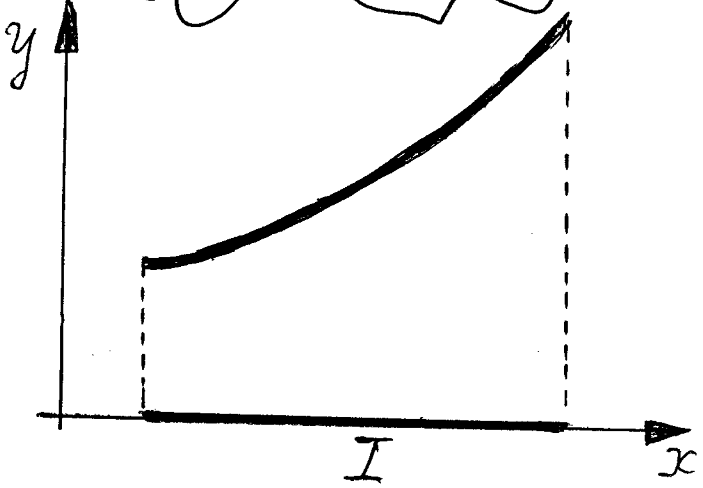
(vgl. 6.4)

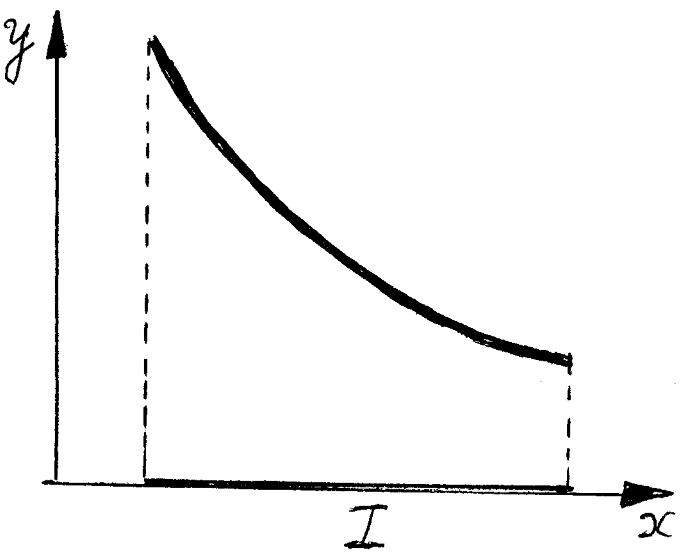
- $I \subseteq \mathbb{R}$, I = Intervall
- $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ = zweimal differenzierbare Funktion. (NB: Auf I kann man $f'' = (f')'$ bilden).

$f''(x) > 0$ für alle $x \in I$

$\Longrightarrow$

"f beschreibt eine Linkskurve"

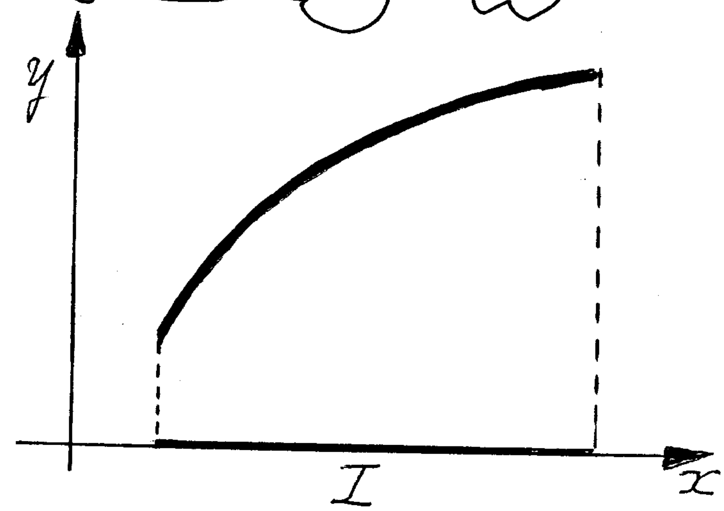


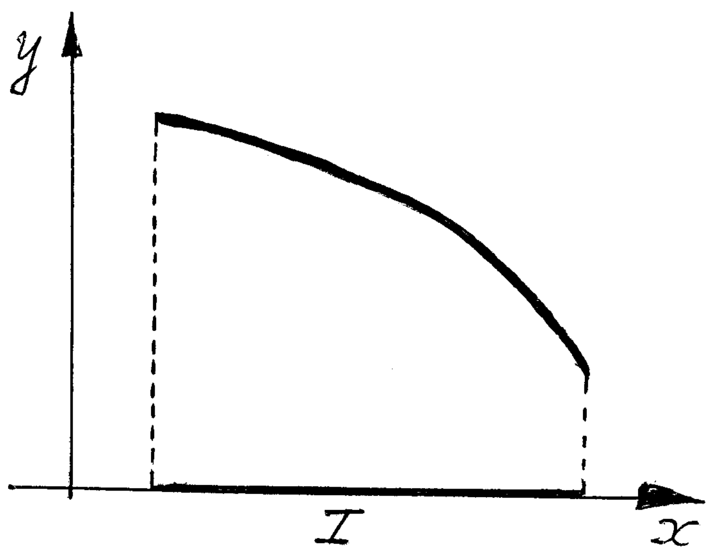


$f''(x) < 0$ für alle $x \in I$

$\Longrightarrow$

"f beschreibt eine Rechtskurve"





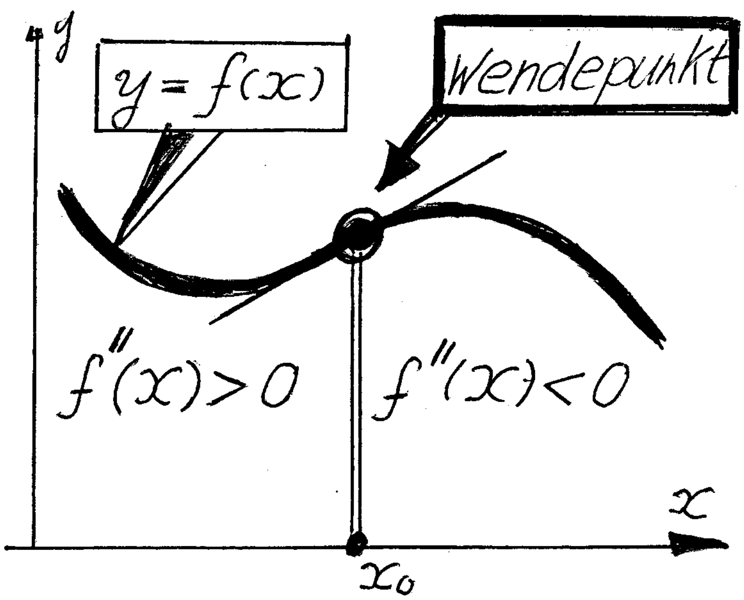
Wendepunkte

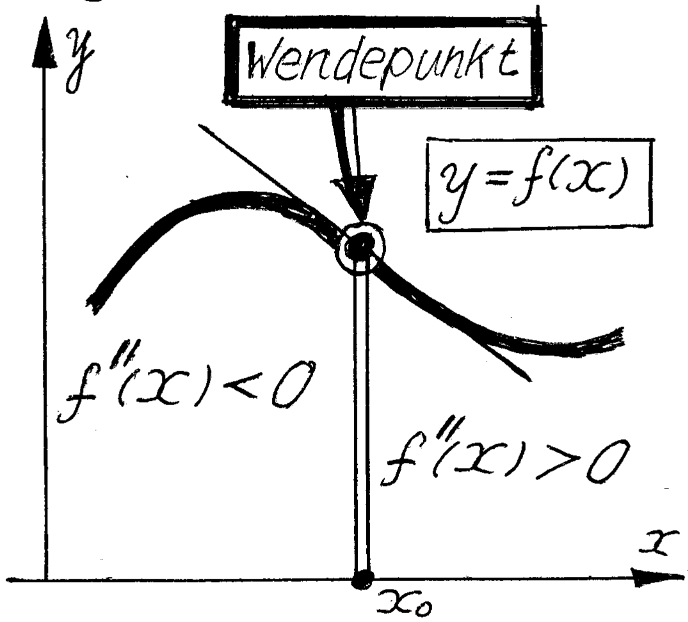
(vgl. 6.4)

- $I \subseteq \mathbb{R}$, I = Intervall; $x_0 \in I$ innerer Punkt.
- $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

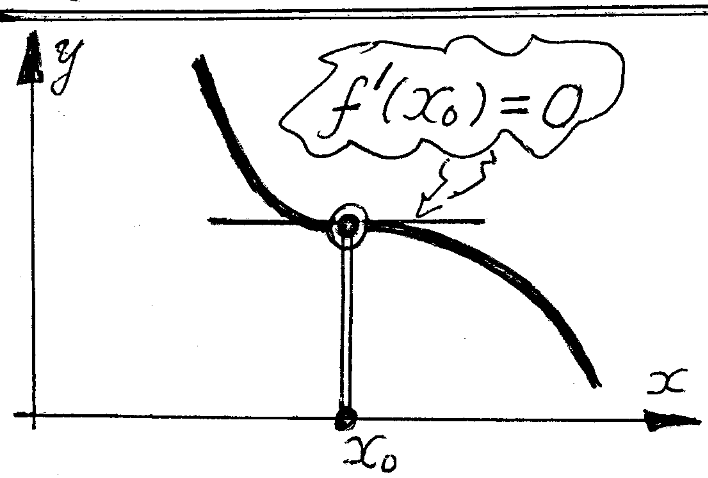
(☆) f hat in x_0 einen Wendepunkt $\Longleftrightarrow$
$f''(x_0) = 0$ & f'' ändert in x_0 das Vorzeichen

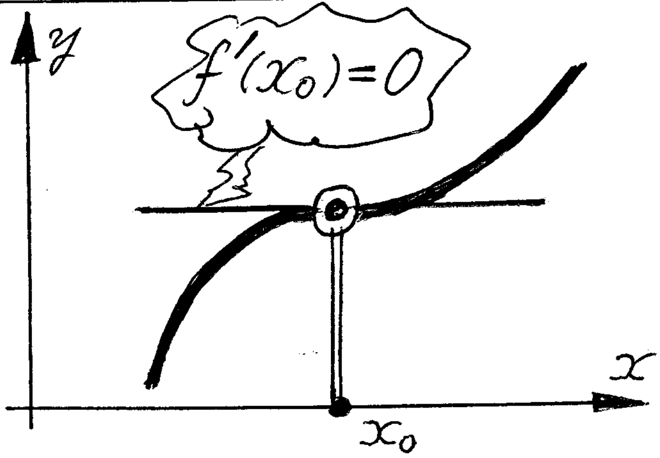
$\hat{=}$ Übergang von $\begin{cases} \text{Links- zu Rechtskurve} \\ \text{oder} \\ \text{Rechts- zu Linkskurve} \end{cases}$





f hat in x_0 einen Terrassenpunkt $\Longleftrightarrow$
f hat in x_0 einen Wendepunkt & $f'(x_0) = 0$





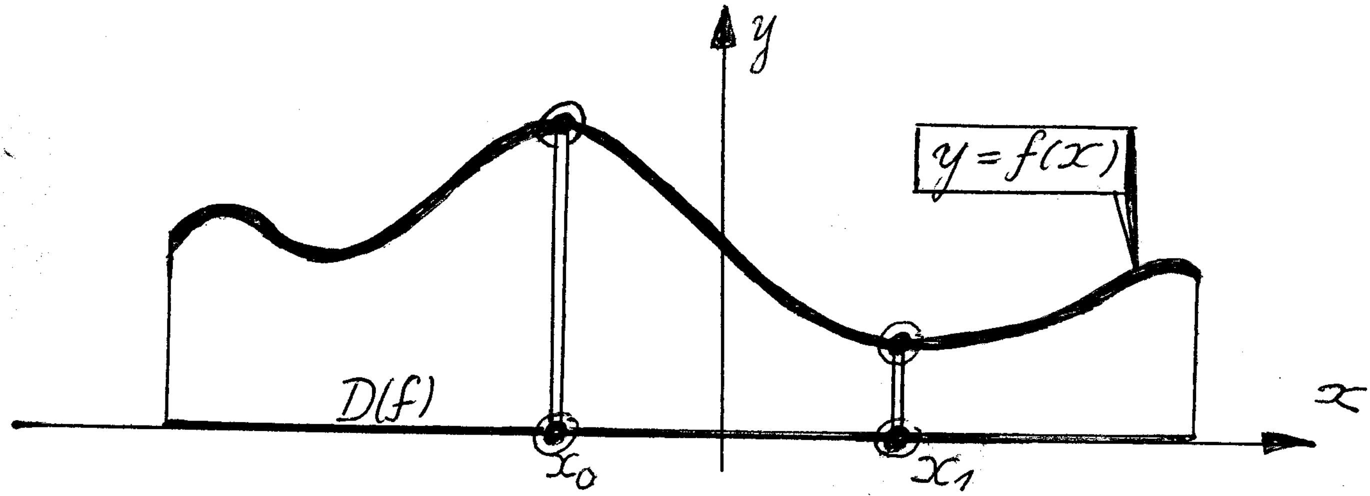
Absolute Extrema (vgl. 6.5)

- $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$; $D = D(f) \subseteq \mathbb{R}$; $x_0, x_1 \in D$.

f hat ein absolutes Maximum an der Stelle x_0
(oder: $f(x_0)$ ist absolutes Maximum von f)

$$\Longleftrightarrow$$

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in D.$$



f hat ein absolutes Minimum an der Stelle x_1
(oder: $f(x_1)$ ist absolutes Minimum von f)

$$\Longleftrightarrow$$

$$f(x_1) \leq f(x) \text{ für alle } x \in D.$$

f hat an der Stelle x_0 ein absolutes Extremum

$$\Longleftrightarrow$$

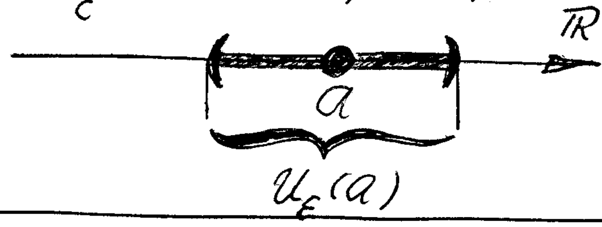
f hat an der Stelle x_0 $\begin{cases} \text{ein absolutes Maximum} \\ \text{oder} \\ \text{ein absolutes Minimum} \end{cases}$

(NB: Extrema = Plural von Extremum)

Relative Extrema (vgl. 6.5)

DEF: Für $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ heisst $U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ die ε-Umgebung von a:

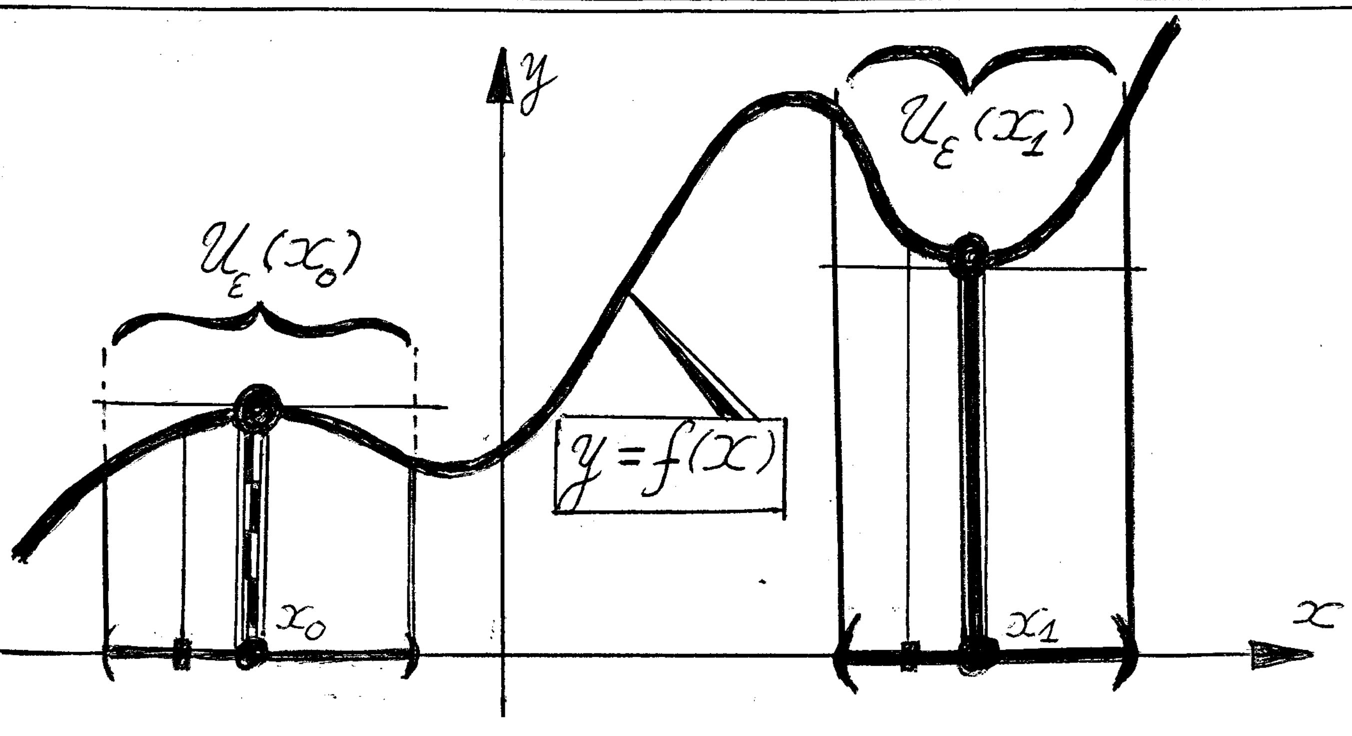
$U_\varepsilon(a)$ = offenes Intervall mit Mittelpunkt a und Länge 2ε



- $f: D \to \mathbb{R}$; $D = D(f) \subseteq \mathbb{R}$; $x_0, x_1 \in D$

(★) f hat an der Stelle x_0 ein relatives Maximum $\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass: $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D \cap U_\varepsilon(x_0)$.

(★) f hat an der Stelle x_1 ein relatives Minimum $\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass: $f(x_1) \leq f(x)$ für alle $x \in D \cap U_\varepsilon(x_1)$

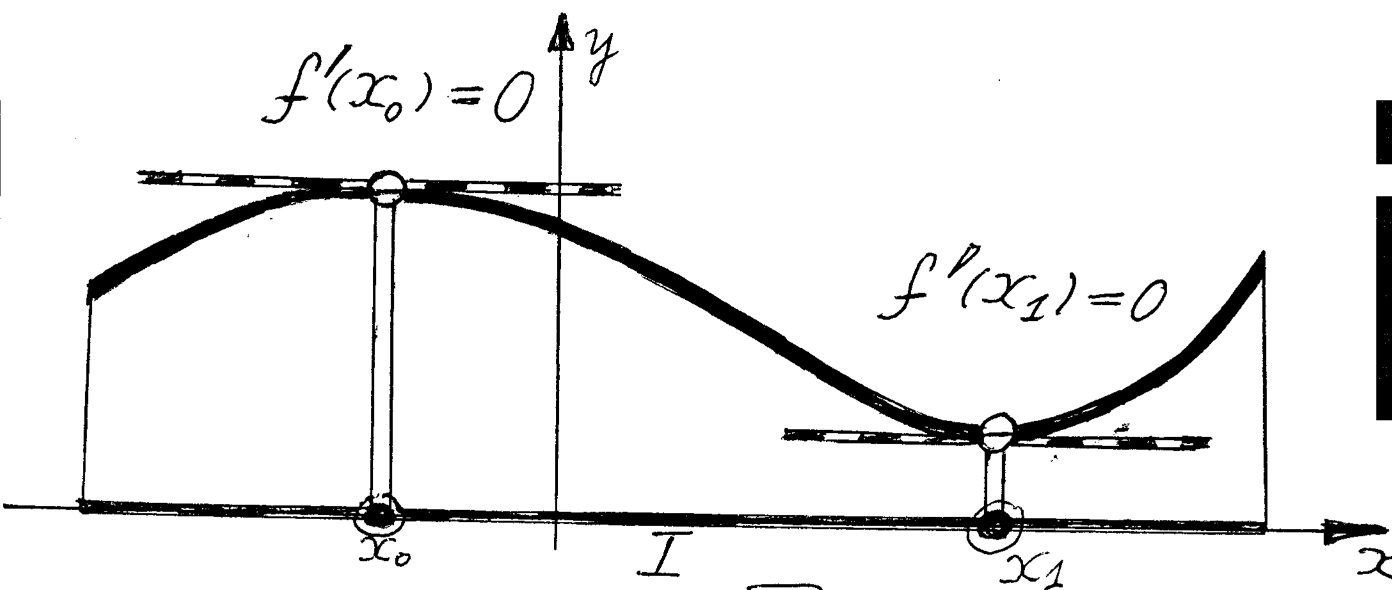


Relative Extrema und Ableitung (vgl. 6.5)

Relatives Extremum :$\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\text{relatives Maximum} \\ \text{oder} \\ \text{relatives Minimum}\end{cases}$

- $I \subseteq \mathbb{R}$, I = Intervall; $x_0 \in I$ innerer Punkt.
- $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Hat f an der Stelle x_0 ein relatives Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$



Zum Aufsuchen relativer Extrema im Innern von I sucht man die Nullstellen der Ableitung von f.

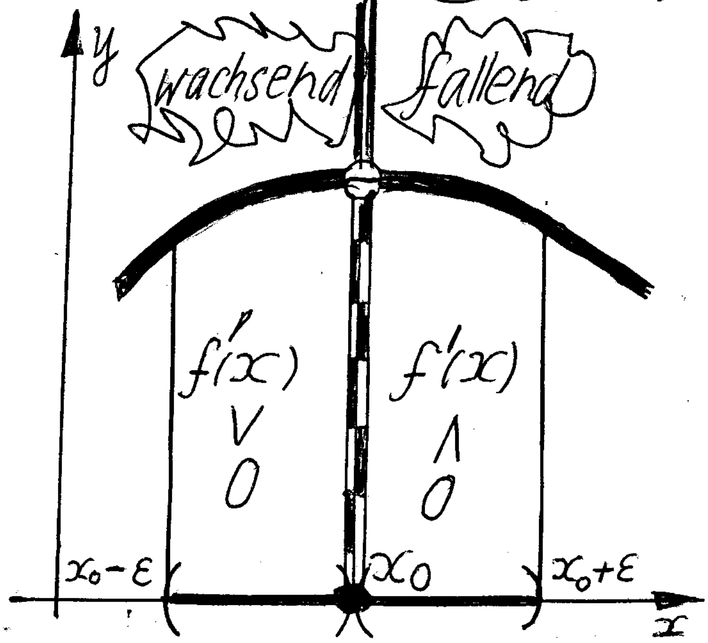
! Verschwindet f' an einer Stelle x_0, so muss dort kein relatives Extremum vorliegen!

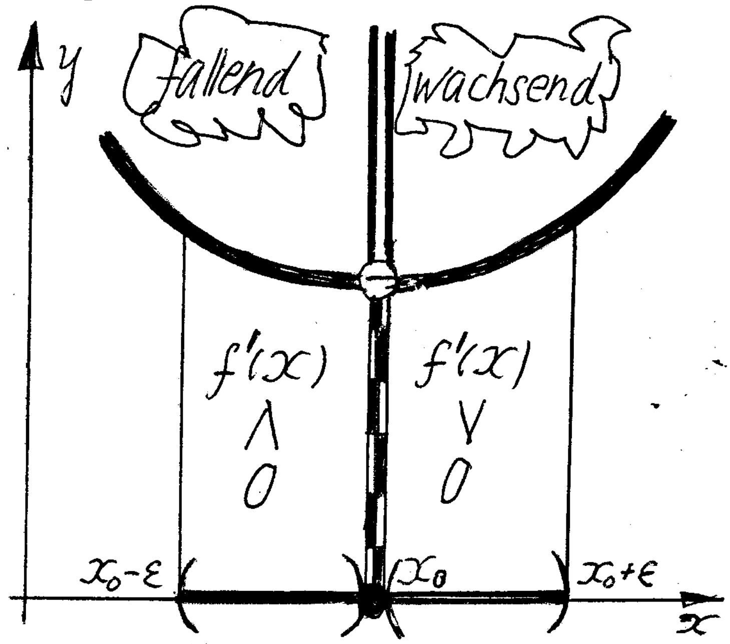
Maximum oder Minimum ?

- $I \subseteq \mathbb{R}$ = Intervall; $x_0 \in I$ innerer Punkt.
- $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar; ($f'(x_0) = 0$.)

☆ Ist f links von x_0 wachsend und rechts von x_0 fallend, so hat f in x_0 ein relatives Maximum.

☆ Ist f links von x_0 fallend und rechts von x_0 wachsend, so hat f in x_0 ein relatives Minimum.



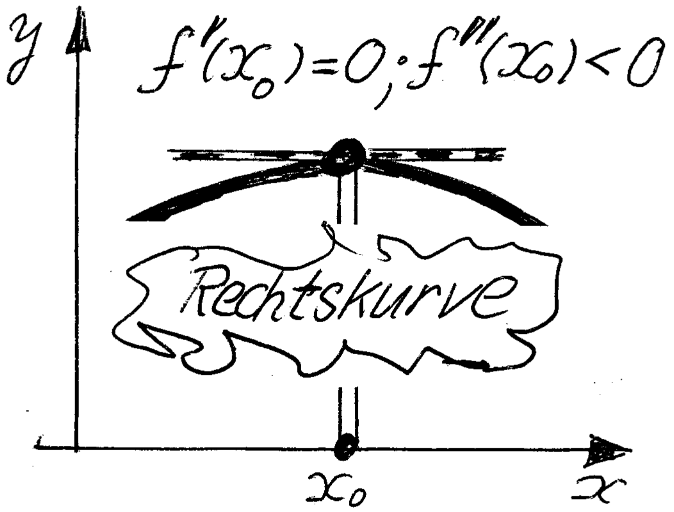


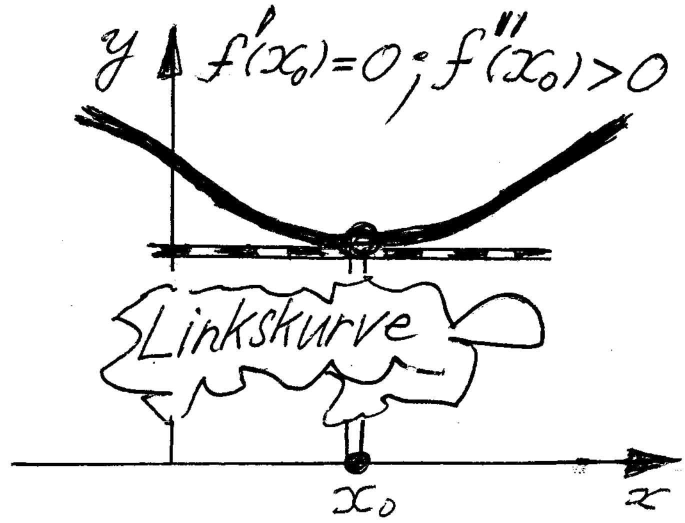
Gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass: $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ & $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, so hat f an der Stelle x_0 ein relatives Maximum	Gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass: $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ & $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, so hat f an der Stelle x_0 ein relatives Minimum

Relative Extrema und zweite Ableitung

- $I \subseteq \mathbb{R}$ = Intervall, $x_0 \in I$ innerer Punkt.
- $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

Gilt $f'(x_0) = 0$ und verläuft der Graph von f über x_0 als Rechtskurve (resp. als Linkskurve), so hat f an der Stelle x_0 ein relatives Maximum (resp. ein relatives Minimum).





- $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ "zweimal stetig differenzierbar".

$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ \& \ f''(x_0)<0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ f hat in x_0 ein relatives Maximum.	$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ \& \ f''(x_0)>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ f hat in x_0 ein relatives Minimum.

Beispiel

• $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) := x^3 - 12x$:

✲ $f'(x) = 3x^2 - 12$; ✲✲ $f''(x) := f'(x)' = 6x$.

a): Absolute Extrema von f in $I = [-3,3]$!

① Relative Extrema im Innern von I: $\{f'(x) = 0;\ x \in (-3,3)\}$:

∴ $3x^2 - 12 = 0$ (s. ✲) $\Rightarrow x = \pm 2$ $(\in (-3,3))$.

∴ $f''(-2) \overset{✲✲}{=} -12 < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum in $x = -2$

Wert des relativen Maximums: $f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = 16$

∴ $f''(2) \overset{✲✲}{=} 12 > 0 \Rightarrow$ relatives Minimum in $x = 2$

Wert des relativen Minimums: $f(+2) = 2^3 - 12(2) = -16$

② Funktionswerte am Rand von I: $f(-3) = 9$; $f(3) = -9$.

③ Fazit: Absolutes Maximum bei $x = -2$: $f(-2) = 16$
Absolutes Minimum bei $x = 2$: $f(2) = -16$

b): Absolute Extrema von f in $I = (0,1)$!

① $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (0,1)$ (s. a)①) :
Kein relatives Extremum im Innern von I.

② Randpunkte von I sind: $0, 1 \notin I$!

③ Fazit: f hat in $I = (0,1)$ kein Extremum.

c) Absolute Extrema von f in $I = [0,1]$!

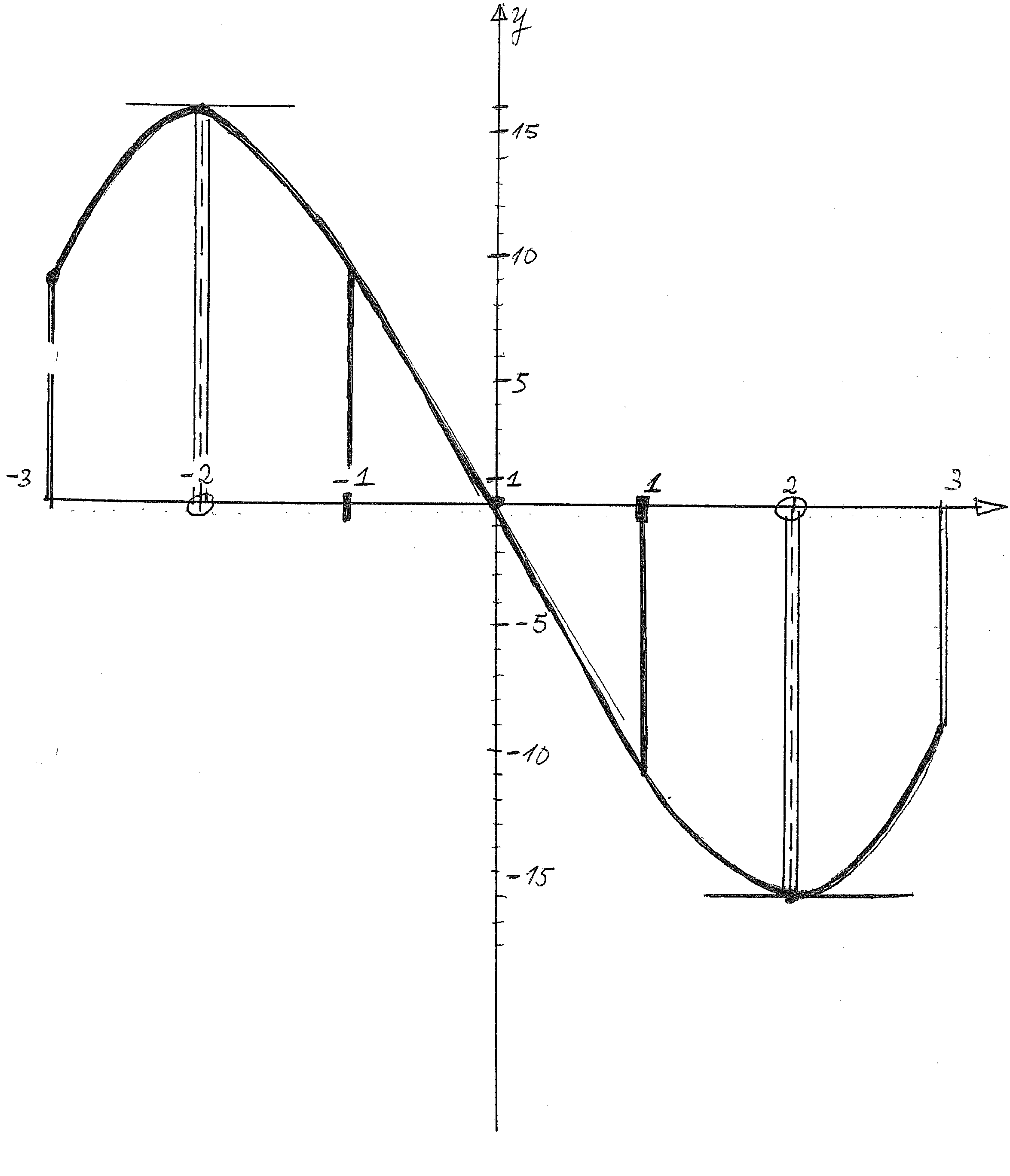
① Kein relatives Extremum im Innern von I (s. b)①)

② Funktionswerte am Rand von: $f(0) = 0$, $f(1) = -11$

③ Fazit: Abs. Max. bei $x = 0$; Abs. Min. bei $x = 1$.

... der Graph dazu

MAT 182



Beispiel: Diskussion einer Funktion

MAT 182

(32''')

(vgl. Aufgabe 6-2)

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^x$

a) $f(x)$ hat immer gleiches Vorzeichen wie $(x-1)$, da $e^x > 0$. Also:

$$f(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < 1 \\ = 0 & \text{für } x = 1 \\ > 0 & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

b) Wachstumsverhalten: $f'(x) = ((x-1)e^x)' =$

$= (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' = e^x + (x-1)e^x =$

$= xe^x$. Also:

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < 0 \\ = 0 & \text{für } x = 0 \\ > 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Also: $f(x)$ fällt für $x \in (-\infty, 0)$;
$f(x)$ wächst für $x \in (0, \infty)$.

c) Krümmungsverhalten: $f''(x) = (f'(x))' =$

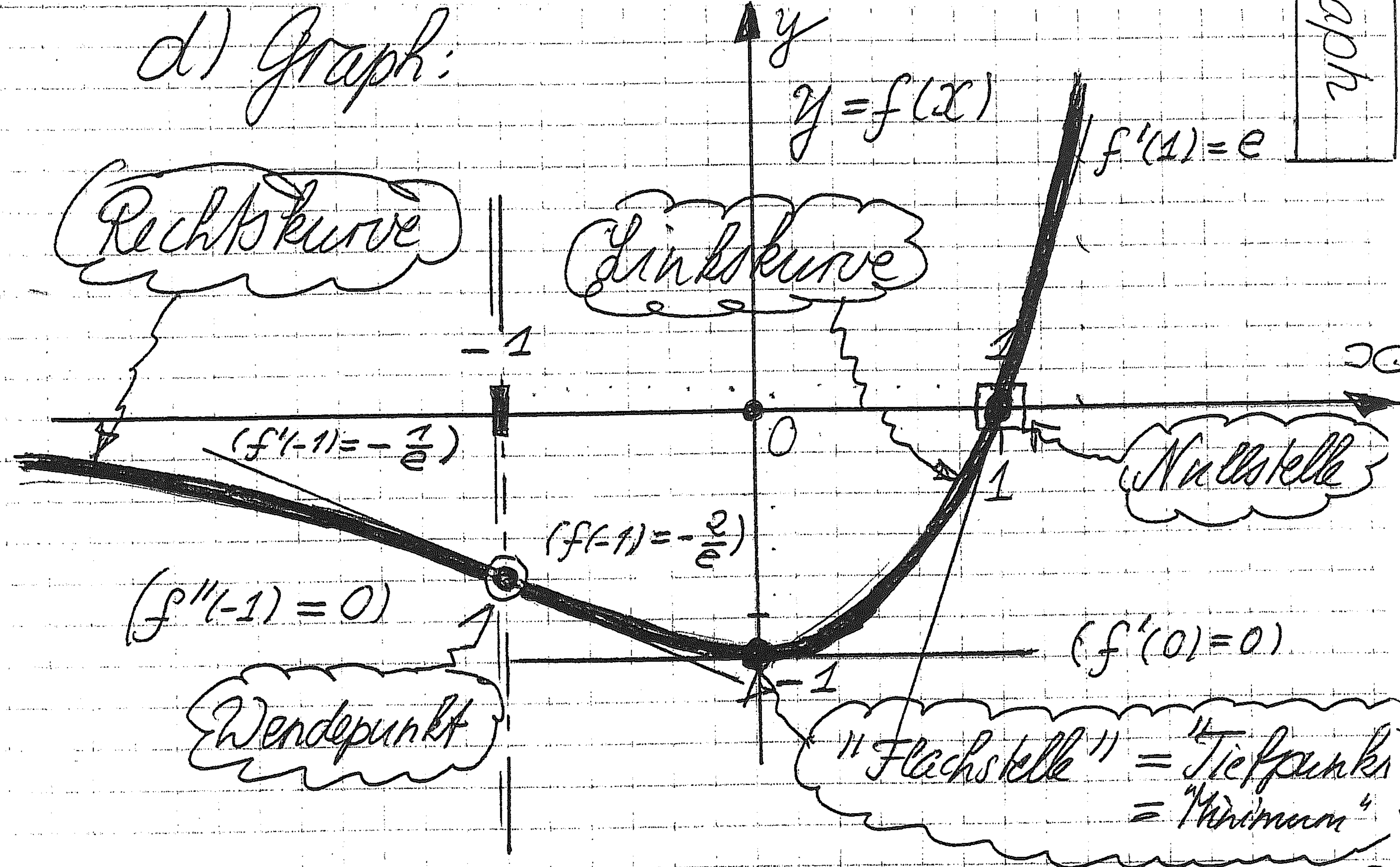
$= (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x =$

$= (1+x)e^x$

$$f''(x) \begin{cases} < 0, & x < -1 \\ 0, & x = -1 \\ > 0, & x > -1 \end{cases}$$

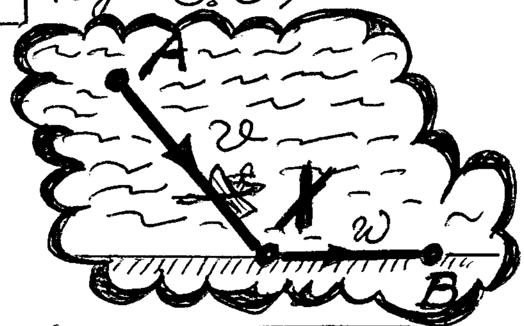
Also: f beschreibt Rechtskurve für $x < -1$;
f " Linkskurve für $x > -1$.

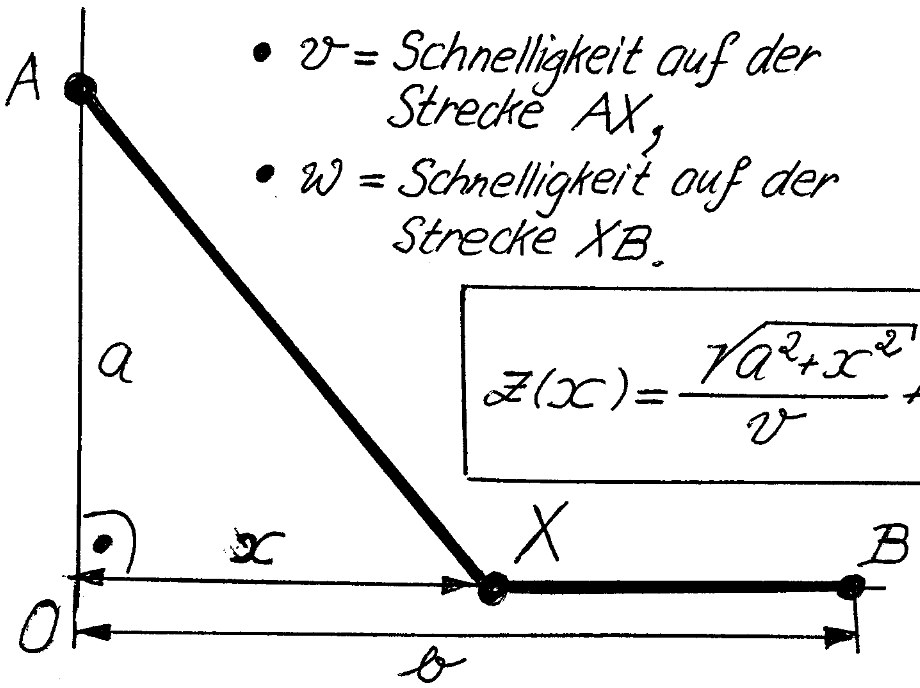
d) Graph:


y
y = f(x)
f'(1) = e
Rechtskurve
Linkskurve
x
-1
0
1
Nullstelle
(f'(-1) = -1/e)
(f(-1) = -2/e)
(f''(-1) = 0)
(f'(0) = 0)
-1
Wendepunkt
"Flachstelle" = "Tiefpunkt"
= "Minimum"

Kürzeste Reisezeit (Wasser/Land)

(vgl. 6.6)





- v = Schnelligkeit auf der Strecke AX,
- w = Schnelligkeit auf der Strecke XB.

$$\boxed{Z(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v} + \frac{b-x}{w} = \begin{cases}\text{totale}\\ \text{Reisezeit}\end{cases}}$$

$$\boxed{0 \leq x \leq b}$$

$$Z'(x) = \frac{x}{v\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{w};$$

$$Z''(x) = \left[\frac{x}{v\sqrt{a^2+x^2}}\right]' = \frac{1}{v}\,\frac{\sqrt{a^2+x^2} - x\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2} =$$

$$= \frac{a^2+x^2-x^2}{v(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{a^2}{v(a^2+x^2)^{3/2}} > 0$$

$$Z'(x_0) = 0 \therefore \frac{x_0}{v\sqrt{a^2+x_0^2}} - \frac{1}{w} = 0 \therefore$$

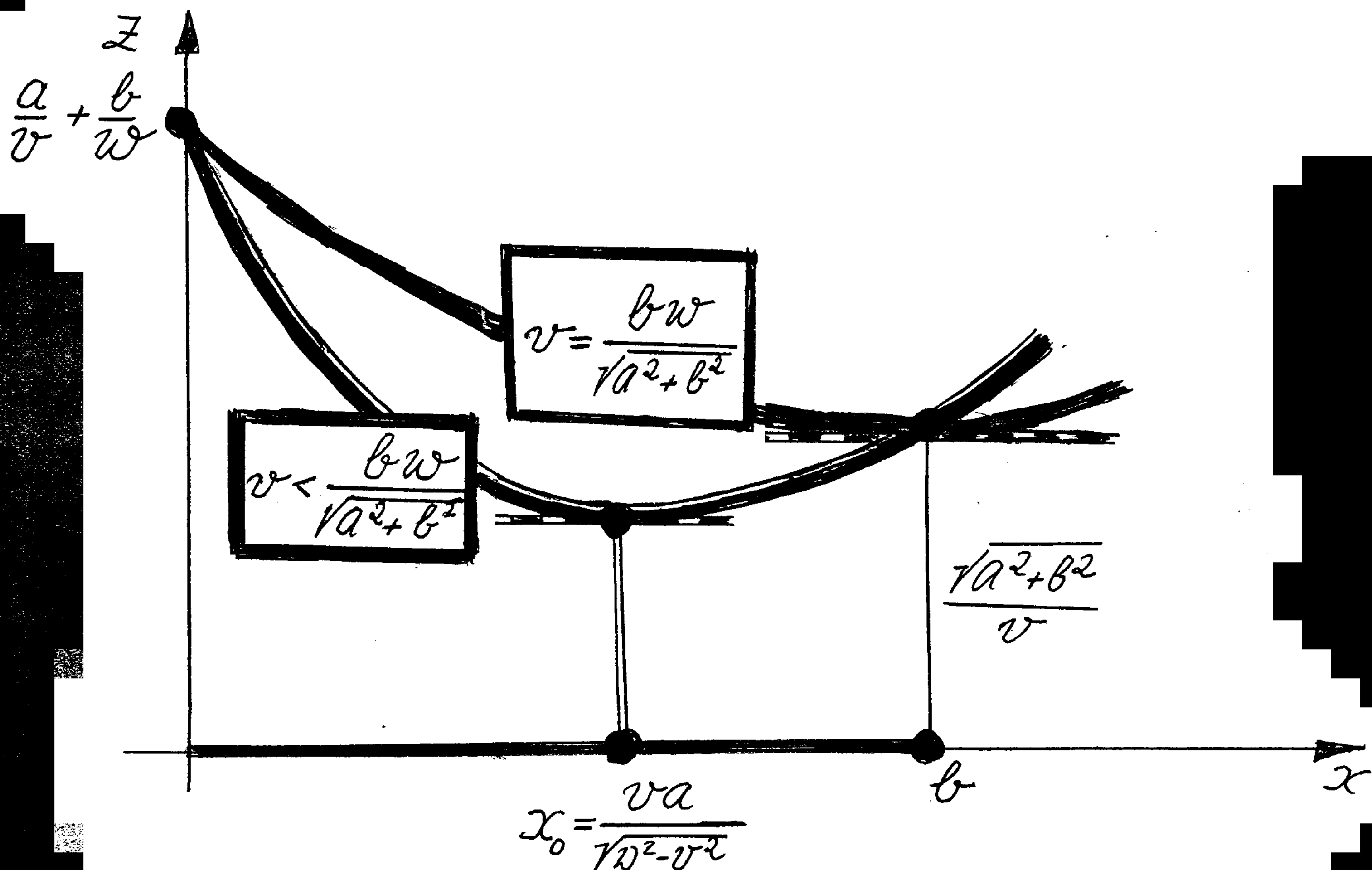
$$\boxed{x_0 = \frac{va}{\sqrt{w^2-v^2}}\;;\;(w > v)}$$

$$x_0 \leq b \therefore \frac{va}{\sqrt{w^2-v^2}} \leq b \therefore v^2a^2 \leq b^2(w^2-v^2) \therefore$$

$$\boxed{v \leq \frac{bw}{\sqrt{a^2+b^2}}} \rightsquigarrow$$

$Z(x)$ hat relatives Minimum in x_0.

Diskussion von $z(x)$



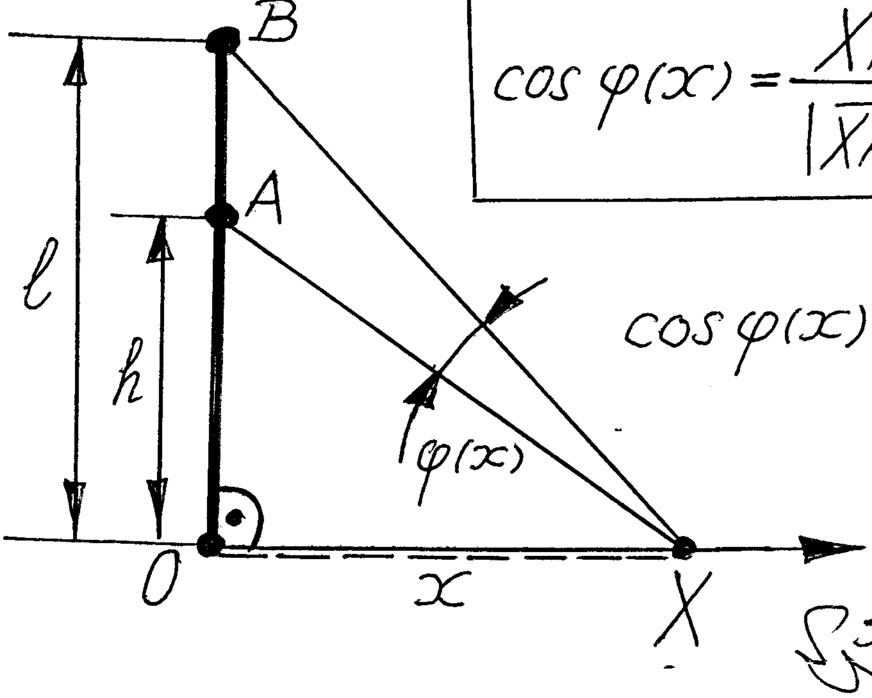
* $v < \frac{bw}{\sqrt{a^2+b^2}} \Longrightarrow x_0 < b;$

* $v = \frac{bw}{\sqrt{a^2+b^2}} \Longrightarrow x_0 = b;$

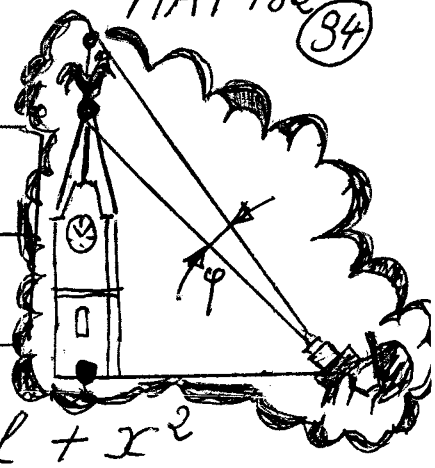
* $\frac{bw}{\sqrt{a^2+b^2}} < v < w \Longrightarrow x_0 > b;$

* $v \geqslant w \Longrightarrow \nexists\, x_0.$

Grösster Winkel



$$\cos\varphi(x) = \frac{\overrightarrow{XA}\ \overrightarrow{XB}}{|\overrightarrow{XA}|\,|\overrightarrow{XB}|}$$



$$\cos\varphi(x) = \underbrace{\frac{hl + x^2}{\sqrt{h^2+x^2}\sqrt{l^2+x^2}}}_{f(x)}$$

x so, dass $\varphi(x)$ maximal!

∴ $\varphi(x) = \arccos f(x)$ ∴

∴ $\varphi'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\, f'(x)$ ∴

∴ $\varphi'(x_0) = 0 \iff f'(x_0)$ ∴

Nullstellen von f' suchen! ...

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{h^2+x^2}\sqrt{l^2+x^2} - (hl+x^2)\left(\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}\sqrt{l^2+x^2} + \frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}\sqrt{h^2+x^2}\right)}{(h^2+x^2)(l^2+x^2)} =$$

$$= x \cdot \frac{2(h^2+x^2)(l^2+x^2) - (hl+x^2)(l^2+h^2+2x^2)}{(h^2+x^2)^{3/2}(l^2+x^2)^{3/2}} =$$

....

$$= x\,\frac{2h^2l^2+2h^2x^2+2l^2x^2+2x^4-hl^3-lh^3-2hlx^2-l^2x^2-h^2x^2-2x^4}{(h^2+x^2)^{3/2}(l^2+x^2)^{3/2}} =$$

$$= x\,\frac{2h^2l^2-hl^3-lh^3+h^2x^2+l^2x^2-2hlx^2}{(h^2+x^2)^{3/2}(l^2+x^2)^{3/2}} =$$

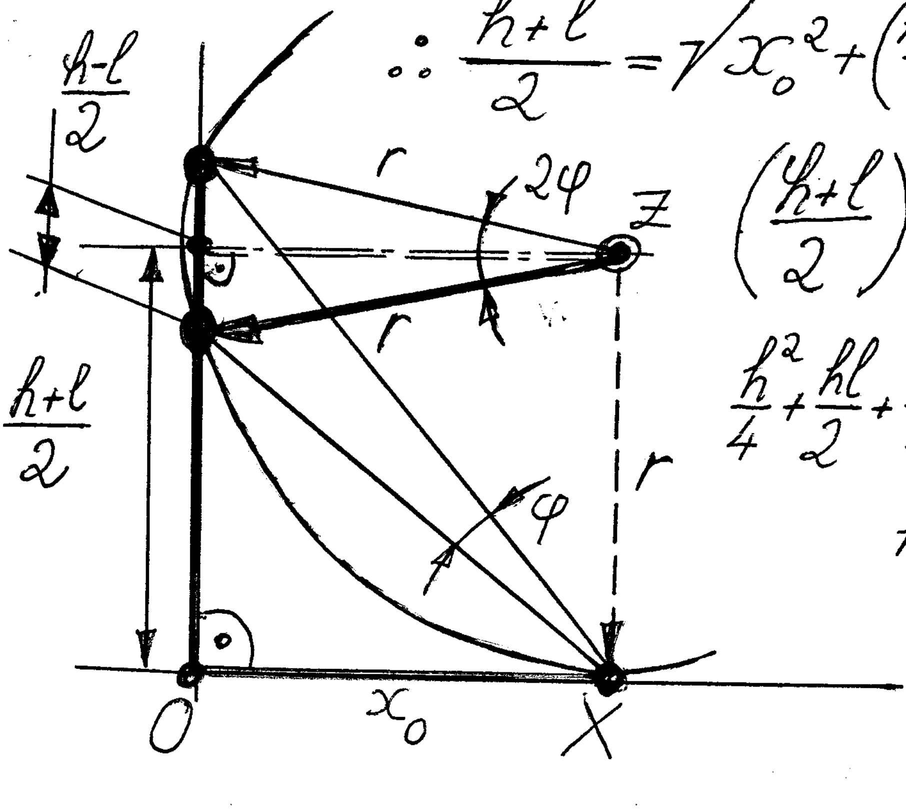
$$= x\,\frac{hl(2hl-l^2-h^2)+x^2(h^2+l^2-2hl)}{(h^2+x^2)^{3/2}(l^2+x^2)^{3/2}} =$$

$$= (l-h)^2\,x\,\frac{x^2-hl}{(h^2+x^2)^{3/2}(l^2+x^2)^{3/2}} \quad ∴$$

$$\boxed{f'(x_0)=0 \iff x_0=0 \text{ oder } x_0=\sqrt{hl}}$$

Elementargeometrische Bestätigung: (Peripherie= winkel)

$$r=\frac{h+l}{2}\;;\; r=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{h-l}{2}\right)^2} \quad ∴$$



$$∴ \frac{h+l}{2}=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{h-l}{2}\right)^2} \quad ∴$$

$$\left(\frac{h+l}{2}\right)^2=x_0^2+\left(\frac{h-l}{2}\right)^2 \quad ∴$$

$$\frac{h^2}{4}+\frac{hl}{2}+\frac{l^2}{4}=x_0^2+\frac{h^2}{4}-\frac{hl}{2}+\frac{l^2}{4} \quad ∴$$

$$hl=x_0^2 \quad ∴$$

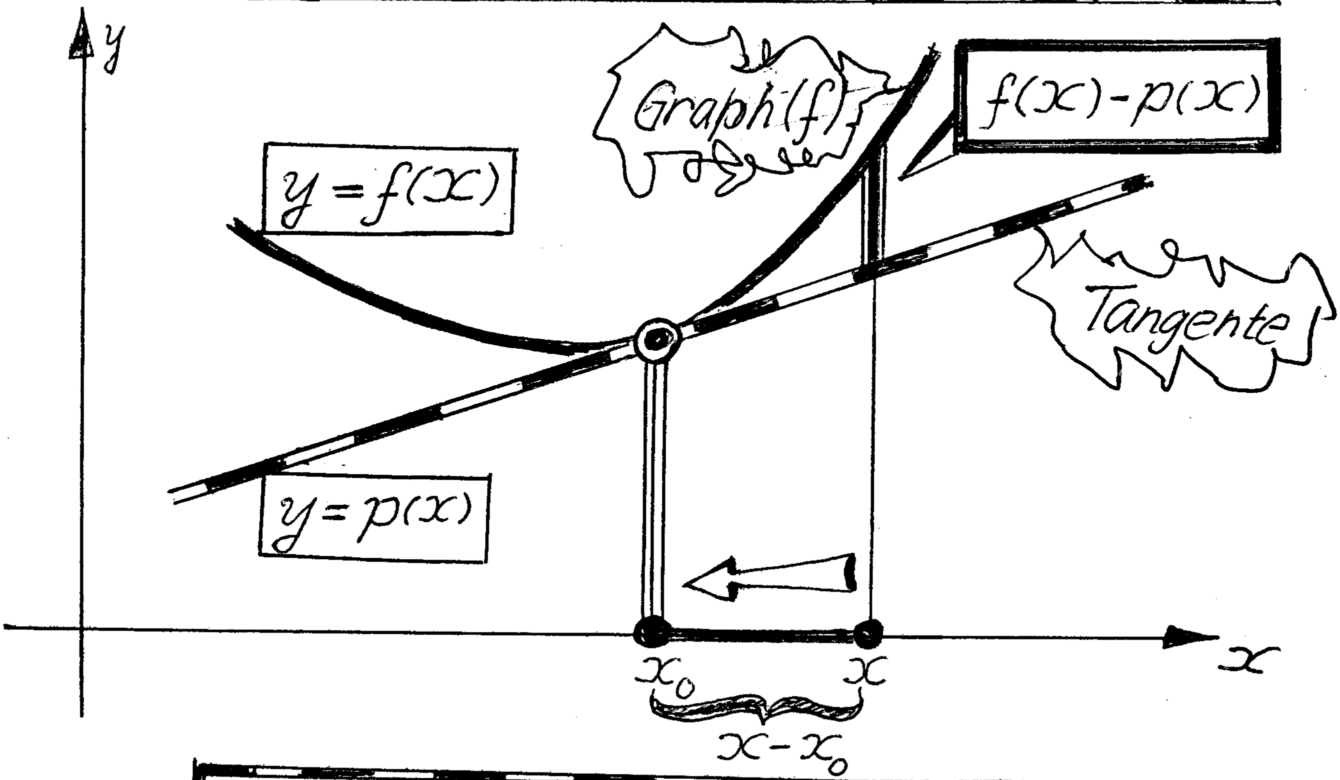
$$∴ \boxed{x_0=\sqrt{hl}}$$

Tangentengleichung und Linearisierung (vgl. 7.2(3))

- $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in \mathbb{D}$; f diffbar in x_0.

Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

$$\boxed{p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$



$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{x - x_0} = 0.}$$

$$\boxed{f(x) \approx p(x), \quad \text{falls } x \approx x_0}$$

(NB: $\approx$ "ungefähr gleich")

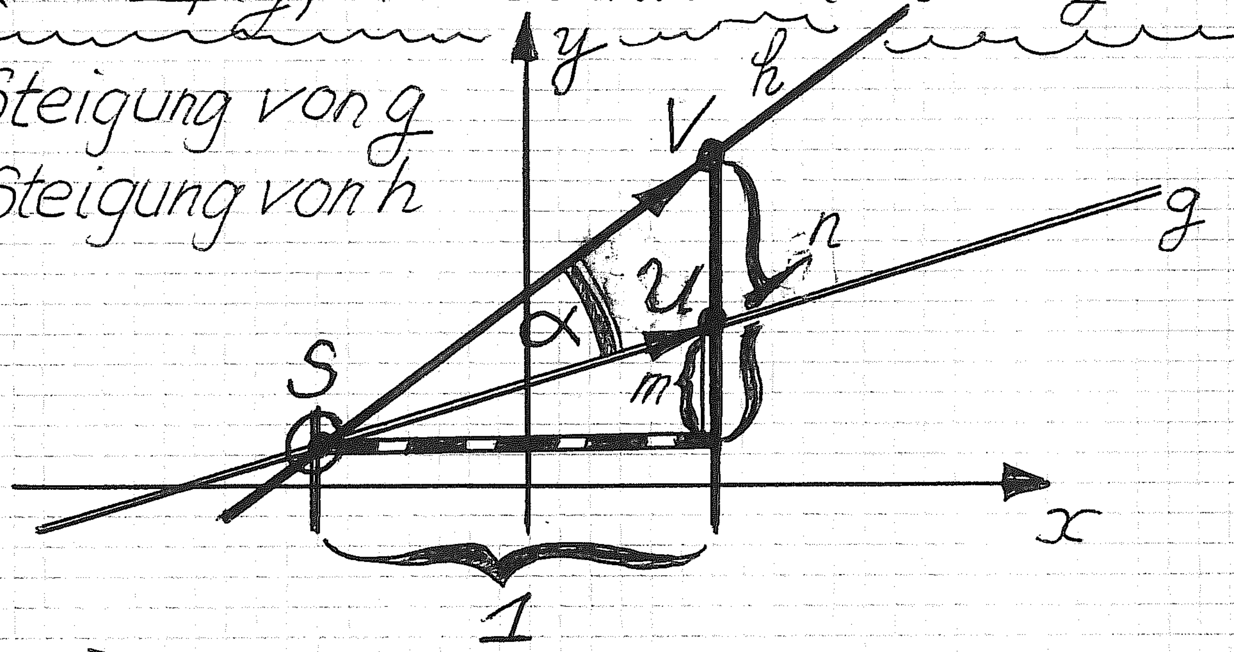
$p(x)$ = Linearisierung von $f(x)$ in x_0 = = lineare Funktion, die $f(x)$ bei x_0 gut annähert.

Schnittwinkel von Geraden

- Gerade g : $p(x) = mx + b$
- Gerade h : $q(x) = nx + c$
- $\alpha = \measuredangle(g, h) =$ Schnittwinkel von g und h.

☆ $m =$ Steigung von g

☆ $n =$ Steigung von h

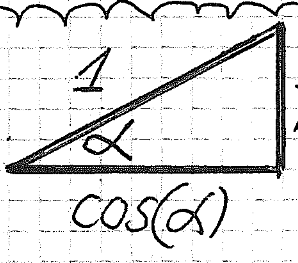


$$\vec{SU} \cdot \vec{SV} = |\vec{SU}||\vec{SV}|\cos(\alpha) \Longrightarrow$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{SU} \cdot \vec{SV}}{|\vec{SU}||\vec{SV}|} = \frac{(1,m)\cdot(1,n)}{|(1,m)||(1,n)|} \Longrightarrow$$

☆ $$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1+mn}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+n^2}}}$$

$g \perp h \iff mn = -1$



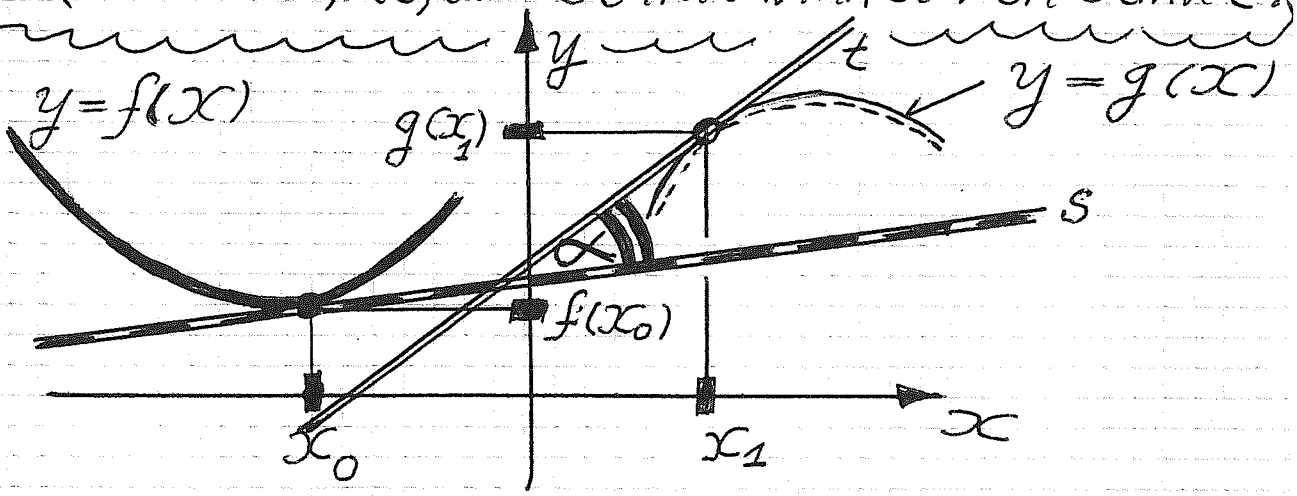
; $\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)} =$

$$= \frac{\sqrt{1 - \frac{(1+mn)^2}{(1+m^2)(1+n^2)}}}{\frac{1+mn}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+n^2}}} = \ldots = \frac{\sqrt{(n-m)^2}}{1+mn} \Longrightarrow$$

☆ $$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{n-m}{1+mn}}$$ (Wurzelfrei)

Schnittwinkel von Tangenten

- $f: D(f) \to \mathbb{R}$ Funktion; $x_0 \in D'(f)$
- $g: D(g) \to \mathbb{R}$ Funktion; $x_1 \in D'(g)$
- s = Tangente zu f in $(x_0, f(x_0))$
- t = Tangente zu g in $(x_1, g(x_1))$
- $\alpha = \measuredangle(s,t)$ = Schnittwinkel von s und t.



$$\cos(\alpha) = \frac{1 + f'(x_0)g'(x_1)}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}\sqrt{1+g'(x_1)^2}}.$$

$$\tan(\alpha) = \frac{g'(x_1) - f'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_1)}.$$

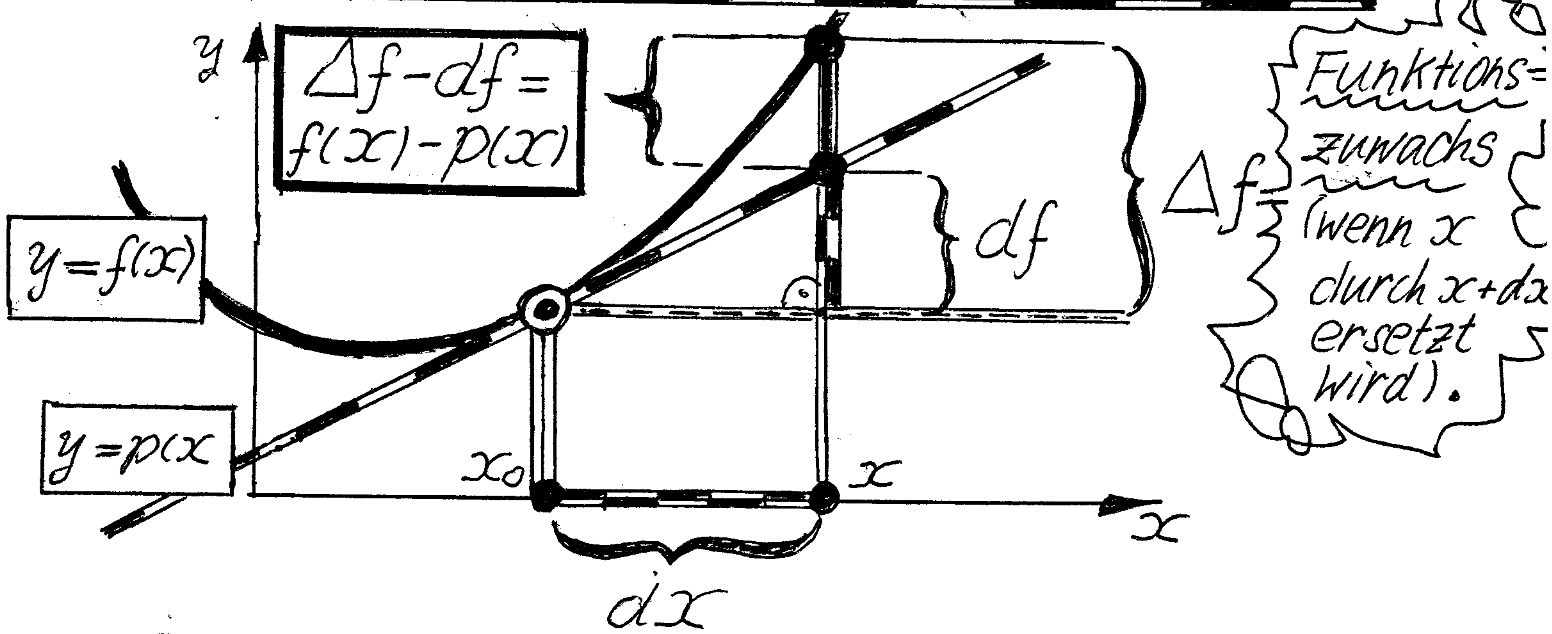
NB: Für den Schnittpunkt der Graphen von f und g gilt: $x_0 = x_1$ und $f(x_0) = g(x_0)$. (Spezialfall!)

Das Differential (vgl. 7.4)

- $f: D \to \mathbb{R}$; $x_0 \in D$; f diff'bar in x_0; $x \in D$.

NOTATION: ⋆ $\Delta x = dx = x - x_0$
⋆ $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

⋆ $\underline{df} := p(x) - p(x_0) = \underline{f'(x_0)\,dx}$
= Differential von f an der Stelle x_0 bezüglich dx.



⋆ $$\lim_{dx \to 0} \frac{\Delta f - df}{dx} = 0$$

⋆ $\Delta f \approx df = f'(x_0)\,dx$; für $dx \approx 0$

Für kleine Werte von dx nähert df den Funktionszuwachs Δf an!

Fehlerfortpflanzung (vgl. 7.5)

$f: D \to \mathbb{R} \quad x_0 \in D; \; x \in D$

- x_0 = wahrer Wert; x = gemessener Wert

☆ $\Delta x = x - x_0$ = absoluter Fehler; $\Delta x \approx 0$

☆ $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ = absoluter Fehler des Funktionswertes

$$\boxed{\Delta f \approx df = f'(x_0)\Delta x} \quad (\Delta x \approx 0)$$

Abschätzung des absoluten Fehlers des Funktionswertes:

☆ $\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x \; ; \quad |\Delta f| \approx |f'(x_0)|\,|\Delta x|.$

$|\Delta x$

Relativer Fehler des Funktionswertes:

$$\left|\frac{\Delta f}{f(x_0)}\right| \approx \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right| |\Delta x| = \left|x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right| \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$$

$|f'(x_0)|$

für absol.

Vektorfunktionen (vgl 8 2/3)

$$x \quad D \to \mathbb{R}^3, \ (D \subset \mathbb{R})$$

$$t \longmapsto x(t) \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t \end{pmatrix}, \ (t \in D)$$

Eine Vektorfunktion ordnet jeder Zahl t eines gegebenen Definitionsbereiches $D \subseteq \mathbb{R}$ einen Vektor $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ zu.

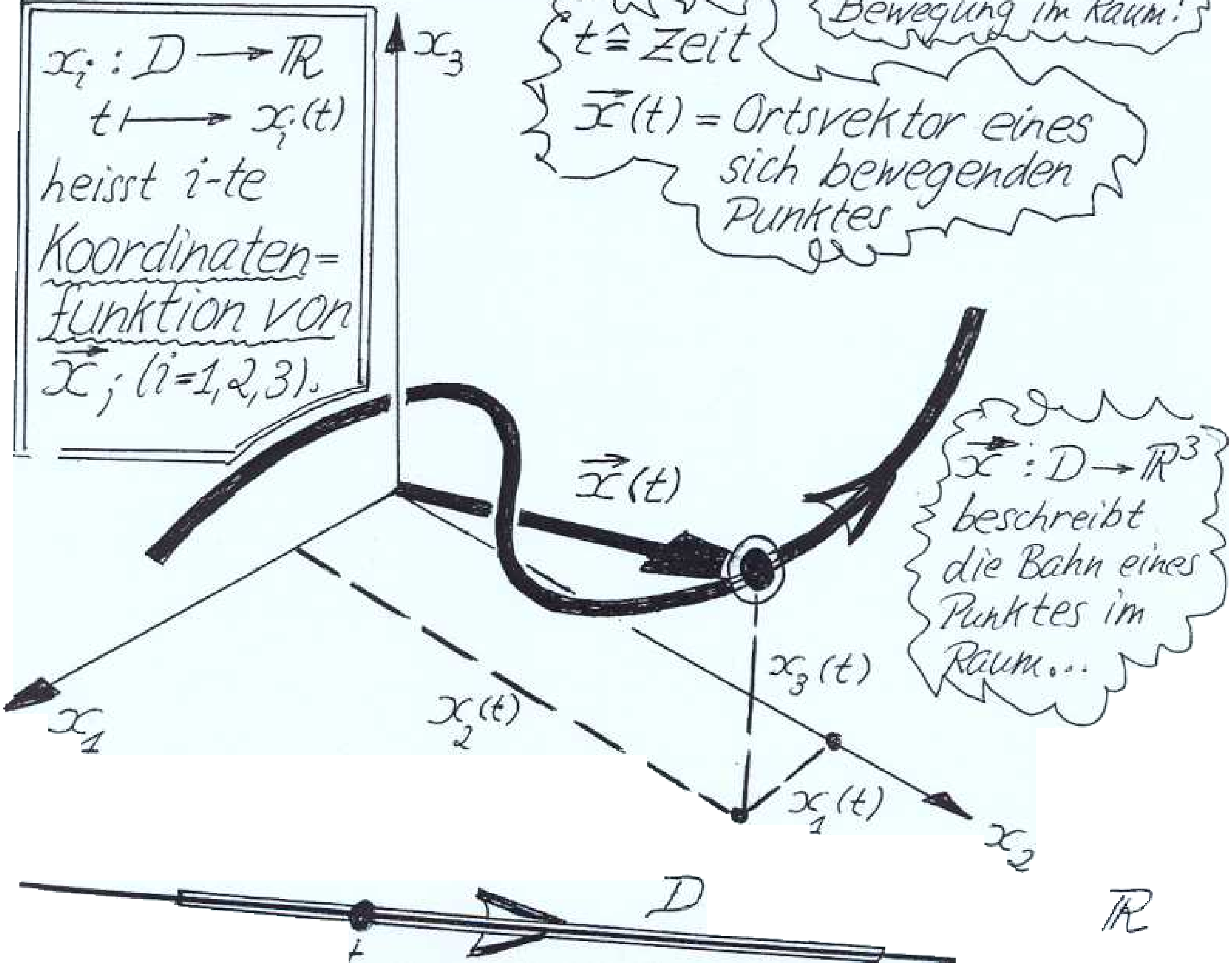
$x_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto x_i(t)$
heisst i-te Koordinaten=funktion von $\vec{x}$; $(i = 1, 2, 3)$.

$t \mathrel{\hat{=}}$ Zeit

Bewegung im Raum!

$\vec{x}(t)$ = Ortsvektor eines sich bewegenden Punktes

$\vec{x} : D \to \mathbb{R}^3$ beschreibt die Bahn eines Punktes im Raum...



Ableitu einer Vektor" (vgl. 8.4)

$\vec{x} : D \to \mathbb{R}^3$; $D \subseteq \mathbb{R}$; $t_0 \in D$

Die Vektorfunktion $\vec{x}$ heisst differenzierbar in t_0, wenn der Grenzwert

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t_0 + \Delta t) - \vec{x}(t_0)}{\Delta t}$$

existiert.

$\dot{\vec{x}}(t_0)$ heisst dann die Ableitung von $\vec{x}$ in t_0.

Ist $\dot{x}_i(t_0)$ die Ableitung der i-ten Koordinatenfunktion von $\vec{x}$, so gilt:

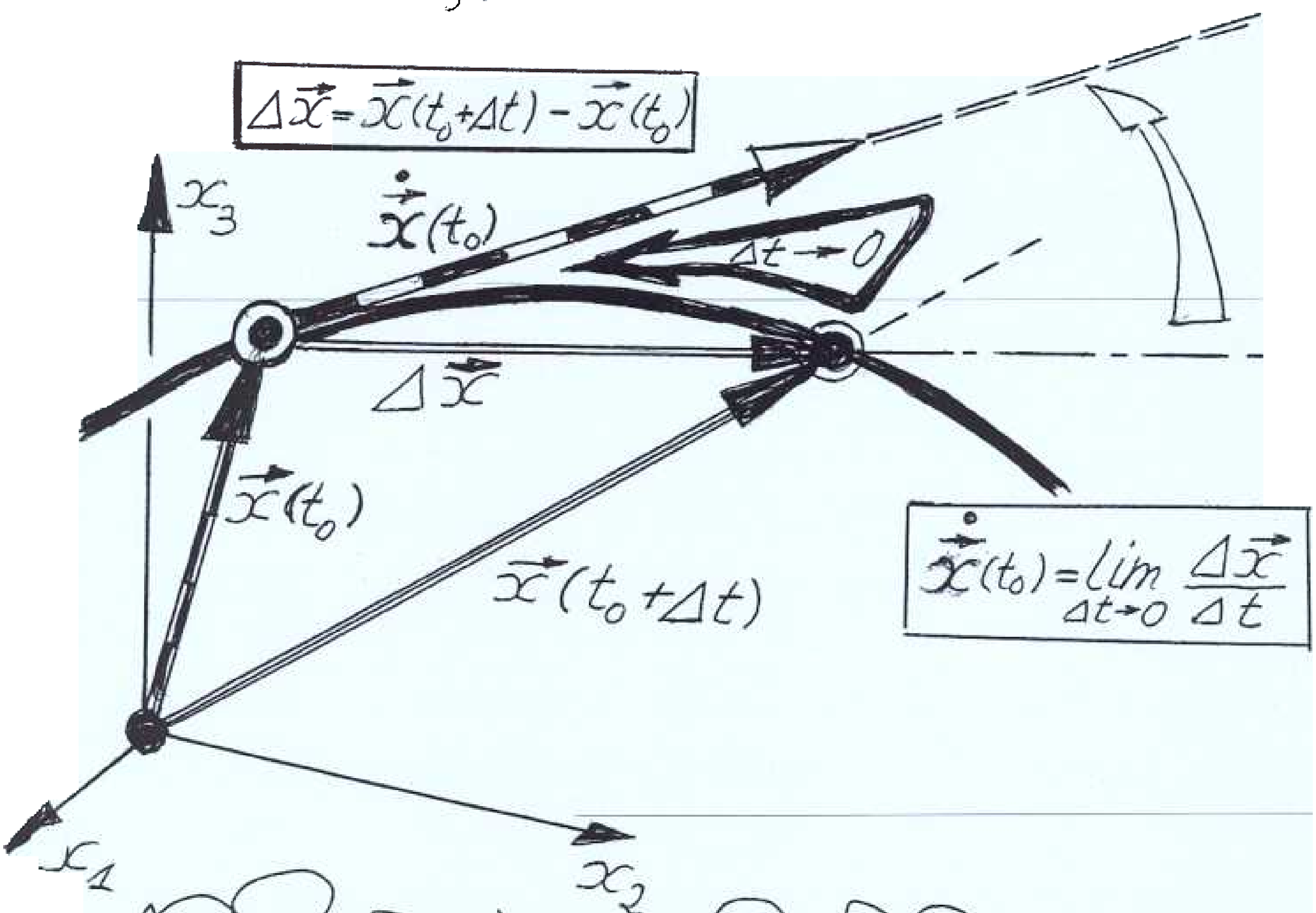
$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \end{pmatrix}^{\bullet} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t_0) \\ \dot{x}_2(t_0) \\ \dot{x}_3(t_0) \end{pmatrix}$$

Die Ableitung einer Vektorfunktion $\vec{x}$ erhält man durch Ableiten der Koordinatenfunktionen x_1, x_2, x_3.

Anschauliche Bedeutung der Ableitung einer Vektorfunktion

(vgl 8.4)

- $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ Vektorfunktion



$\dot{\vec{x}}(t_0)$ = Tangentialvektor an die durch $\vec{x}$ definierte Raumkurve im Punkt $\vec{x}(t_0)$

$\dot{\vec{x}}(t_0)$ = Geschwindigkeit des Punktes $\vec{x}(t)$ zur Zeit t_0.

Parameterdarstellung einer Kurventangente

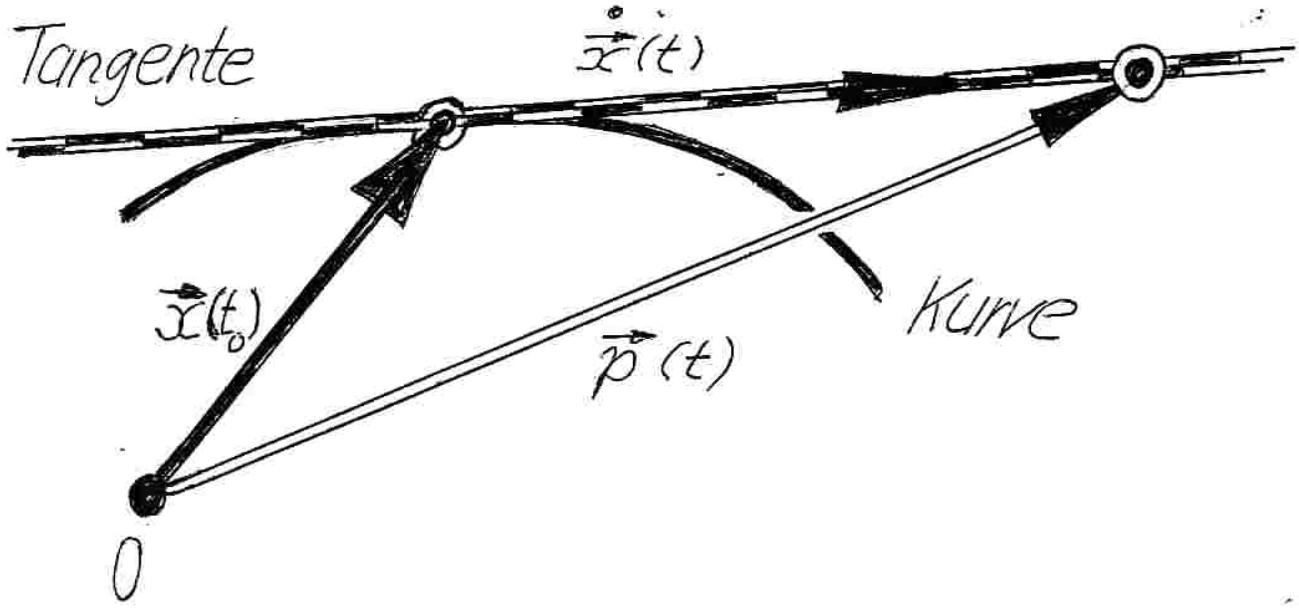
- $t \longmapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ = Vektorfunktion.

Problem: Bestimmen einer Parameterdarstellung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(t)$ im Punkt t_0.

- $\vec{x}(t_0)$ = Stützvektor der Tangente
- $\dot{\vec{x}}(t_0)$ = Richtungsvektor der Tangente.

Parameterdarstellung der Tangente

$$t \longmapsto \vec{p}(t) = \vec{x}(t_0) + t\,\dot{\vec{x}}(t_0)$$



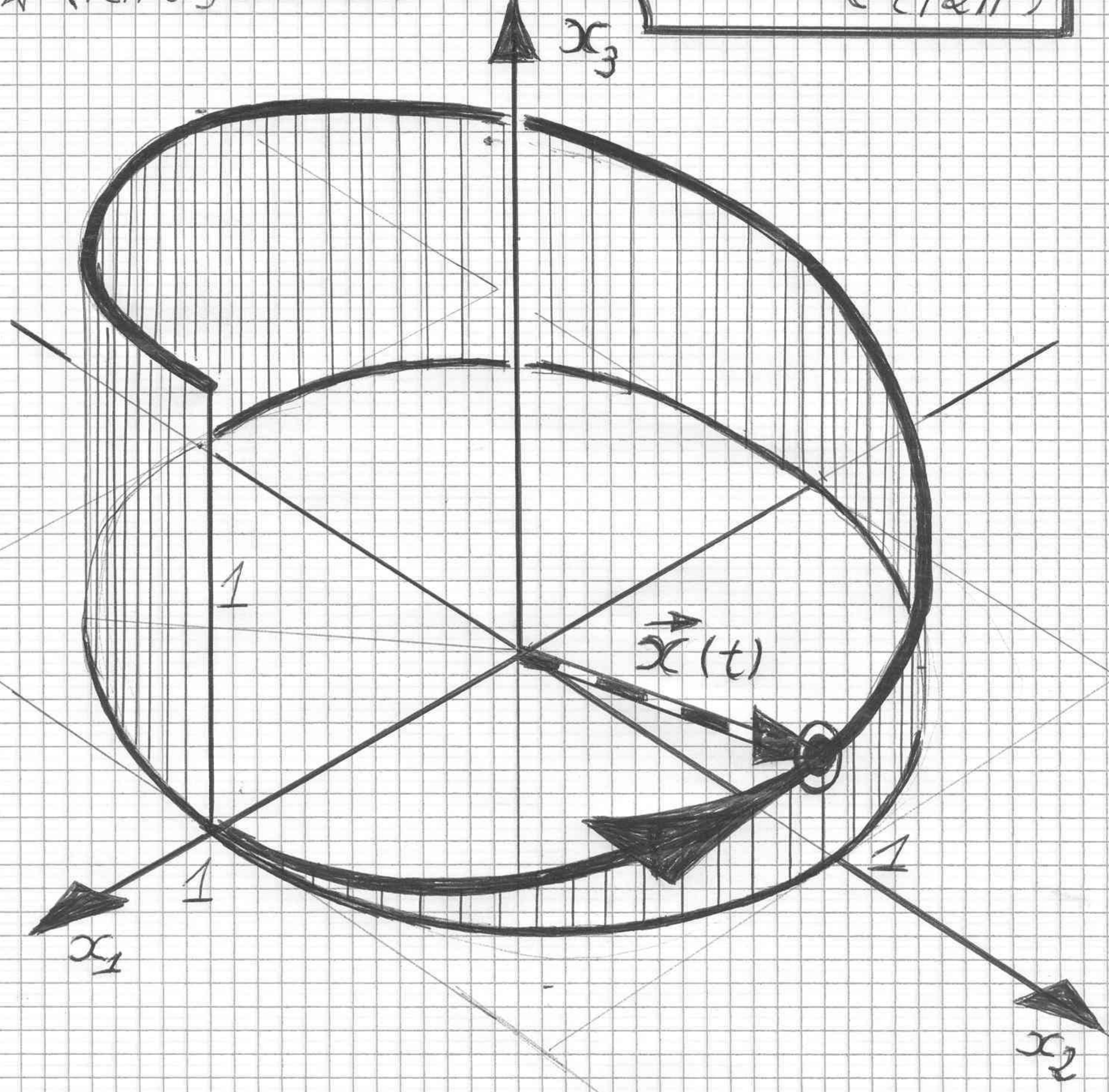
Schraubenlinie

MAT 182 (40'')

$[0,2\pi] \xrightarrow{\vec{x}} \mathbb{R}^3$;

✡ (Vektorfunktion)

$$\boxed{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t/2\pi \end{pmatrix}}$$

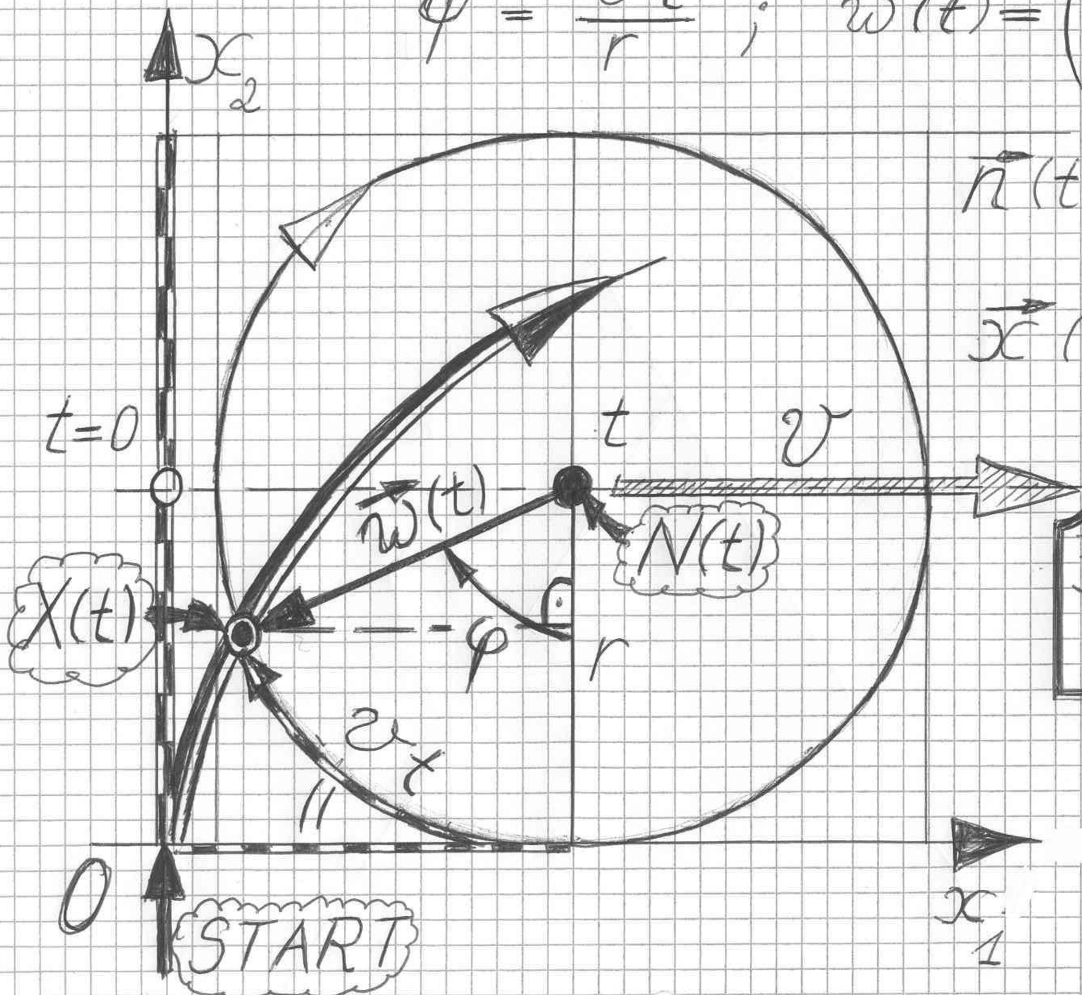


Rollkurve (Zykloïde)

$$\varphi = \frac{vt}{r} \; ; \quad \vec{w}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ -r\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\left(\frac{vt}{r}\right) \\ -r\cos\left(\frac{vt}{r}\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}(t) = \overrightarrow{ON(t)} = \begin{pmatrix} vt \\ r \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \overrightarrow{OX(t)} = \vec{n}(t) + \vec{w}(t)$$



$$\boxed{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} vt - r\sin\left(\frac{vt}{r}\right) \\ r - \cos\left(\frac{vt}{r}\right) \end{pmatrix}}$$

Ableitungsregeln für Vektorfunktionen

* Summenregel: $\left(\vec{x}(t)+\vec{y}(t)\right)^{\circ} = \dot{\vec{x}}(t)+\dot{\vec{y}}(t)$

* Konstantenregel: $\left(c\,\vec{x}(t)\right)^{\circ} = c\,\dot{\vec{x}}(t)$; $(c \in \mathbb{R})$

* Produktregel "Funktion mal Vektor":

$$\left(f(t)\,\vec{x}(t)\right)^{\circ} = \dot{f}(t)\,\vec{x}(t) + f(t)\,\dot{\vec{x}}(t).$$

* Produktregel "Skalarprodukte":

$$\left(\vec{x}(t)\,\vec{y}(t)\right)^{\circ} = \dot{\vec{x}}(t)\,\vec{y}(t) + \vec{x}(t)\,\dot{\vec{y}}(t).$$

* Produktregel "Vektorprodukte":

$$\left(\vec{x}(t)\times\vec{y}(t)\right)^{\circ} = \dot{\vec{x}}(t)\times\vec{y}(t) + \vec{x}(t)\times\dot{\vec{y}}(t).$$

• Beispiel: $\left(\vec{x}(t)\times\dot{\vec{x}}(t)\right)^{\circ} =$

$$= \underbrace{\dot{\vec{x}}(t)\times\dot{\vec{x}}(t)}_{0} + \vec{x}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{x}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)$$

$\therefore$ $\vec{x}(t)\times\dot{\vec{x}}(t) = \text{konstant}$

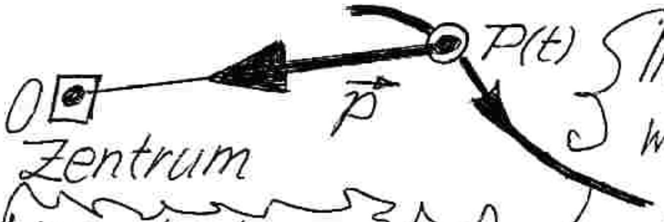
$$\Longleftrightarrow$$

$\vec{x}(t) \parallel \ddot{\vec{x}}(t)$

"Kepler 2"

Massepunkt im Zentralfeld

- $t \longmapsto \vec{x}(t)$ (Bewegung des Punktes)
- $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ (Momentangeschwindigkeit)
- $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$ (Momentanbeschleunigung)



"Zentrales Kraftfeld"

In jedem Moment wirkt eine gegen das Zentrum gerichtete Kraft $\vec{p}$ auf P

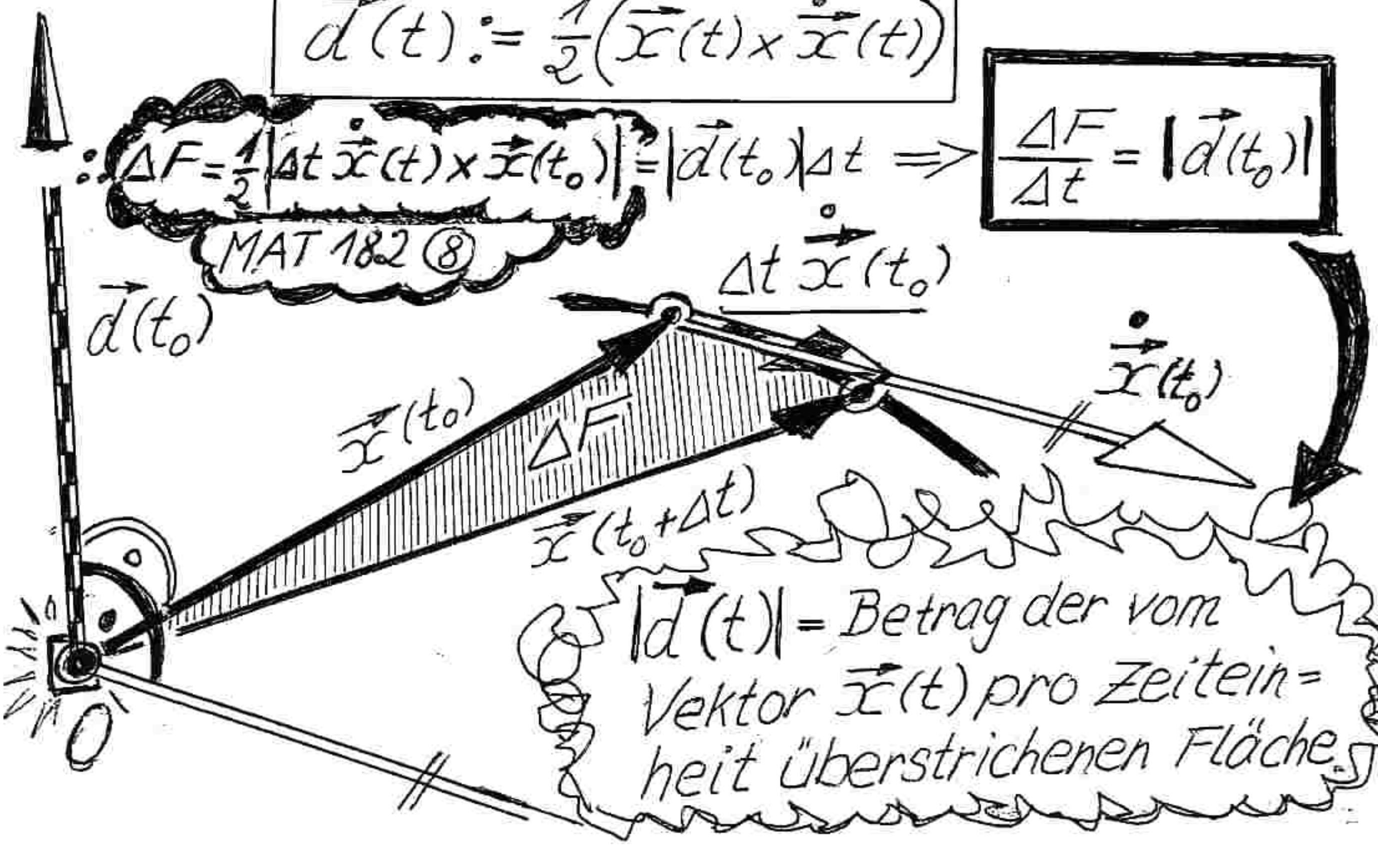
$$\therefore \quad \boxed{\begin{array}{l} \vec{a}(t) = m\vec{p} \parallel \overrightarrow{OP(t)} = \vec{x}(t) \quad \text{(Physik)} \\ \Longrightarrow \quad \ddot{\vec{x}}(t) \parallel \vec{x}(t) \quad \text{(Mathematik)} \end{array}}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \quad \vec{x}(t) \times \dot{\vec{x}}(t) = \text{const.}}$$

$$\boxed{\vec{d}(t) := \frac{1}{2}\left(\vec{x}(t) \times \dot{\vec{x}}(t)\right)}$$

$$\therefore \quad \Delta F = \frac{1}{2}\left|\Delta t\, \dot{\vec{x}}(t) \times \vec{x}(t_0)\right| = |\vec{d}(t_0)|\Delta t \Longrightarrow \boxed{\frac{\Delta F}{\Delta t} = |\vec{d}(t_0)|}$$

MAT 182 ⑧



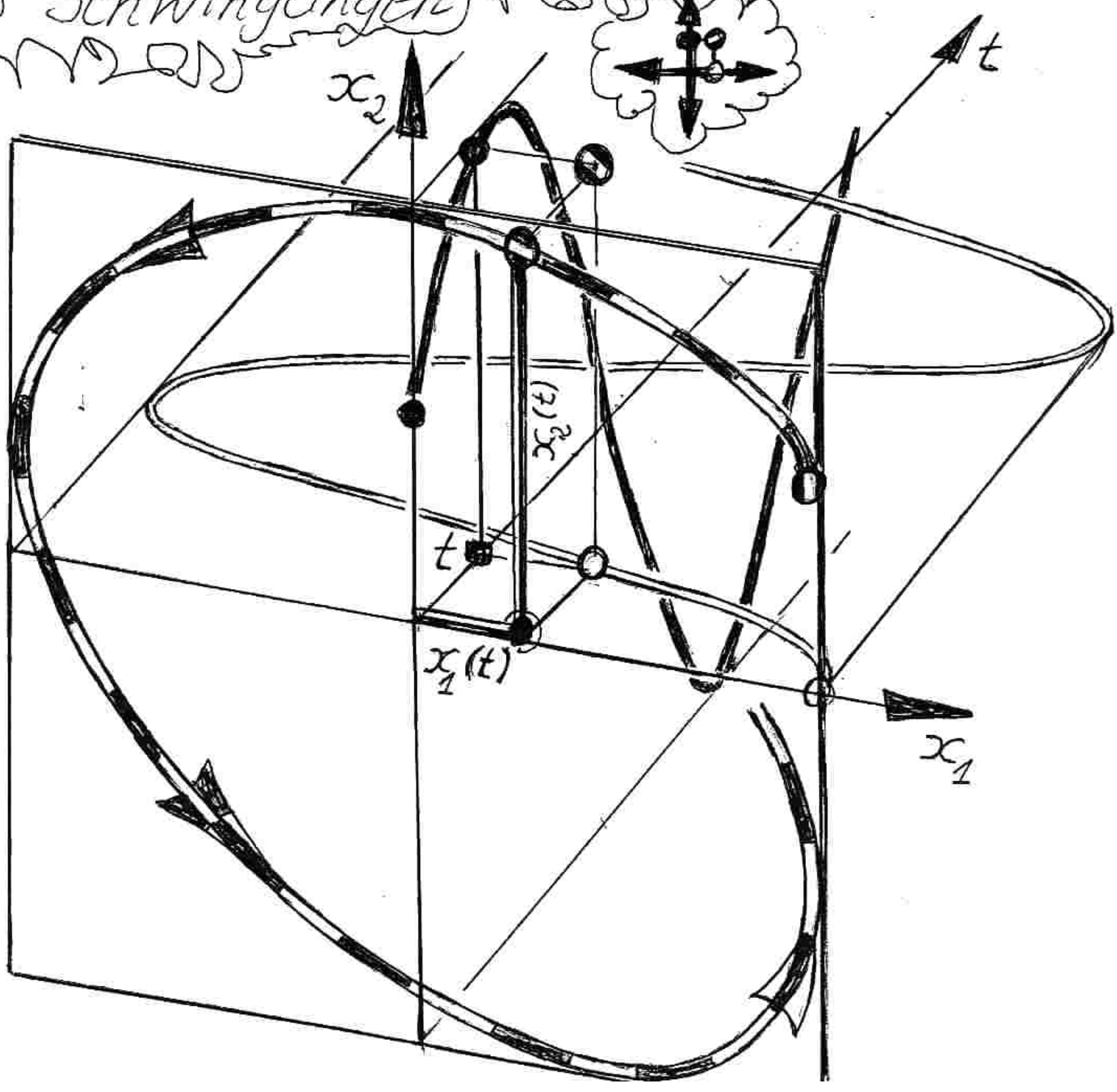
$|\vec{d}(t)|$ = Betrag der vom Vektor $\vec{x}(t)$ pro Zeiteinheit überstrichenen Fläche.

Lisajoux - Kurven

$$t \longmapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(at+b) \end{pmatrix}$$

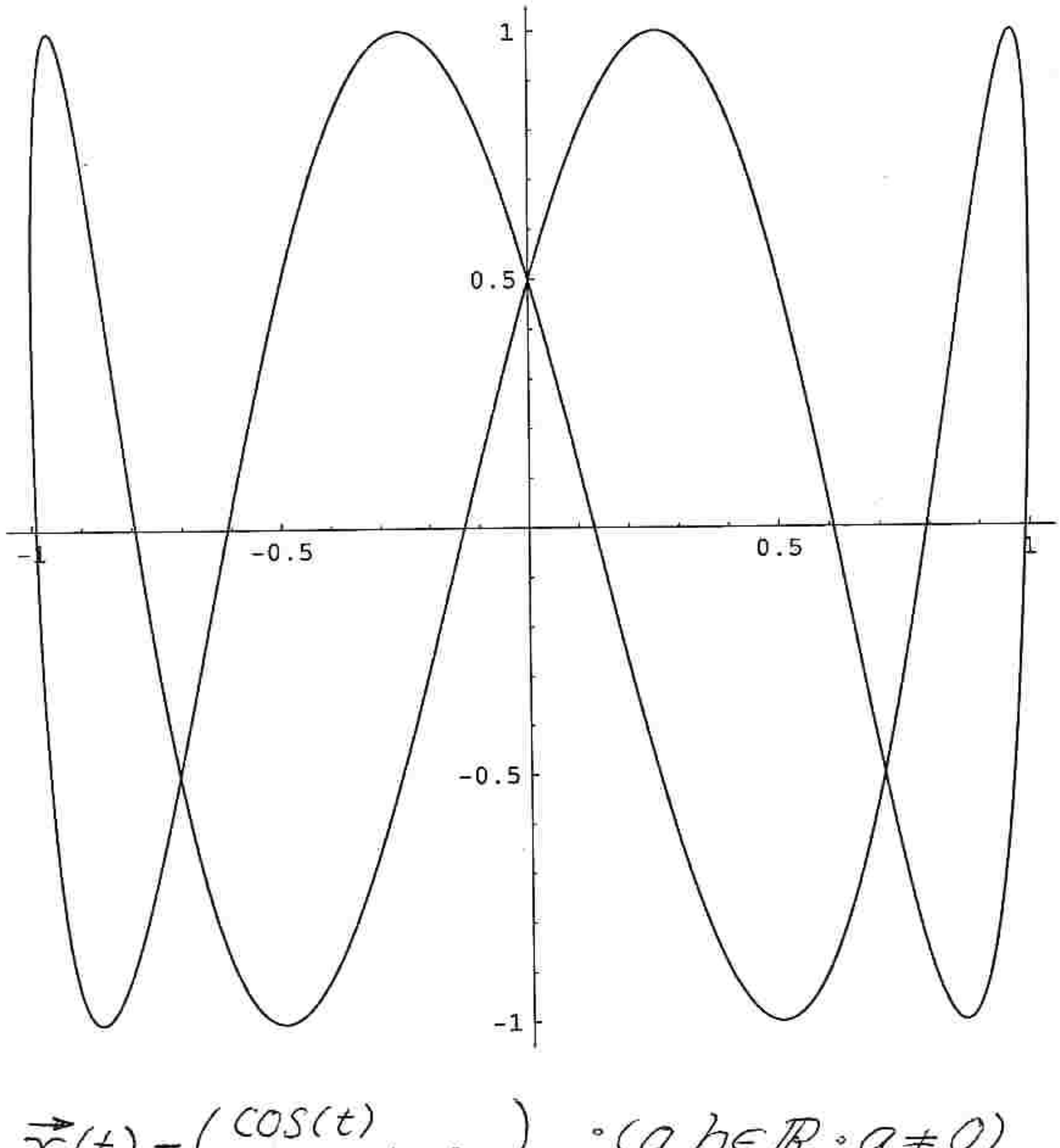
$$(a, b \in \mathbb{R}\ ;\ a \neq 0)$$

Überlagerung von zwei zueinander senkrechten harmonischen Schwingungen



Geschlossene Lisajoux-Kurve

-
- $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(4t + \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$
-
- $(0 \leq t \leq 12\pi)$



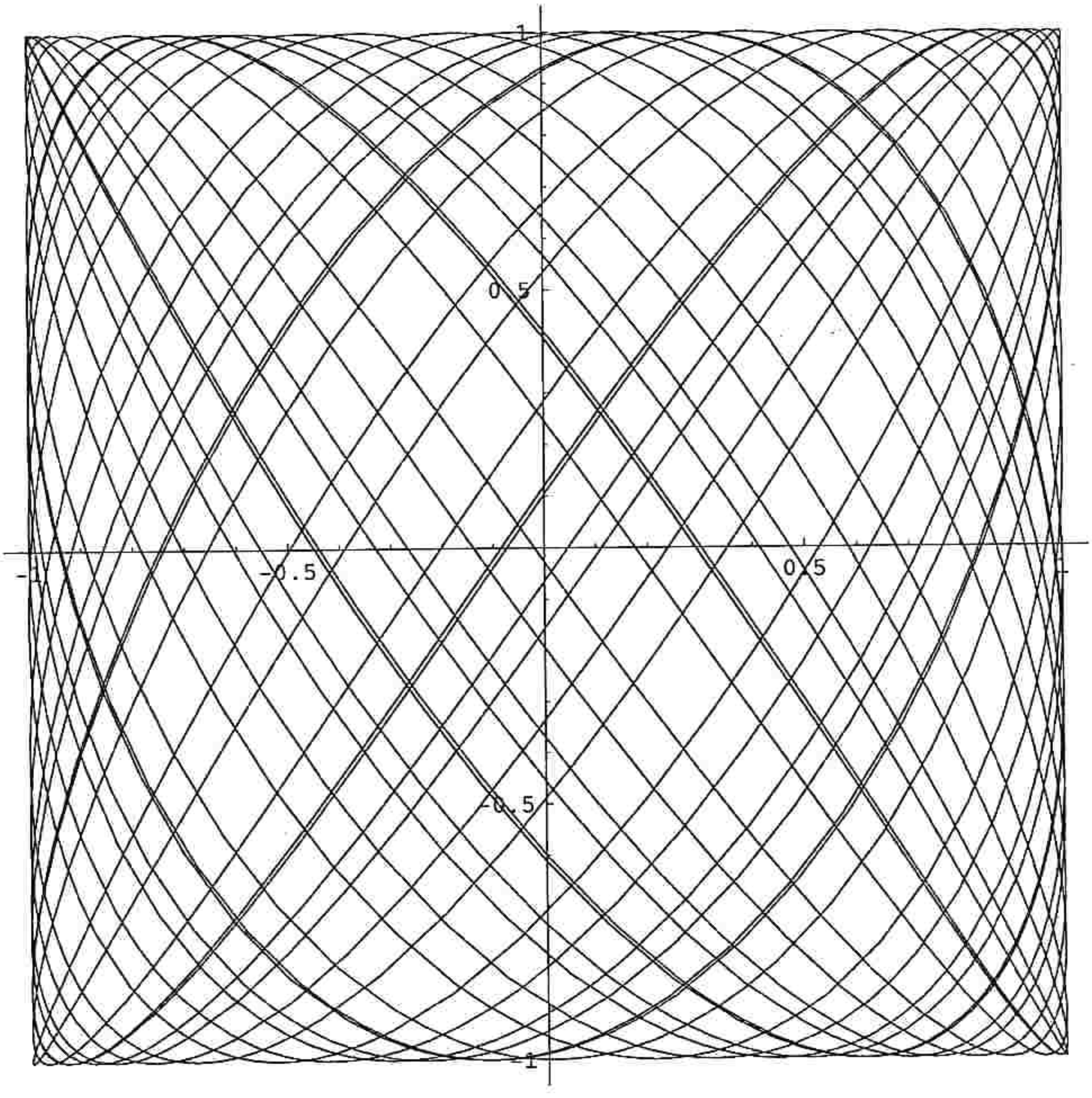
- $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(at+b) \end{pmatrix}$; $(a, b \in \mathbb{R}; \, a \neq 0)$

a rational $\Longleftrightarrow$ Kurve geschlossen

Ergodische Lisajoux-Kurve

- $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(\sqrt{2}\,t + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

$(0 \leq t \leq 40\pi)$



- $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(at+b) \end{pmatrix}$; $(a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0)$

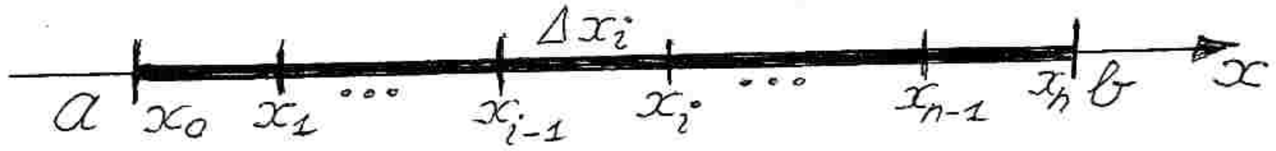
a irrational $\Longleftrightarrow$ Kurve ergodisch

Das bestimmte Integral (vgl. 10.1/2)

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

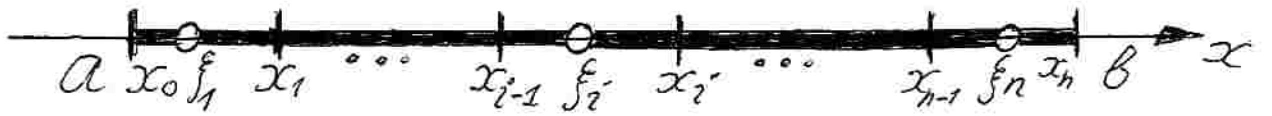
☆: Unterteilung des Intervalls $[a, b]$:

$x_\bullet$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$



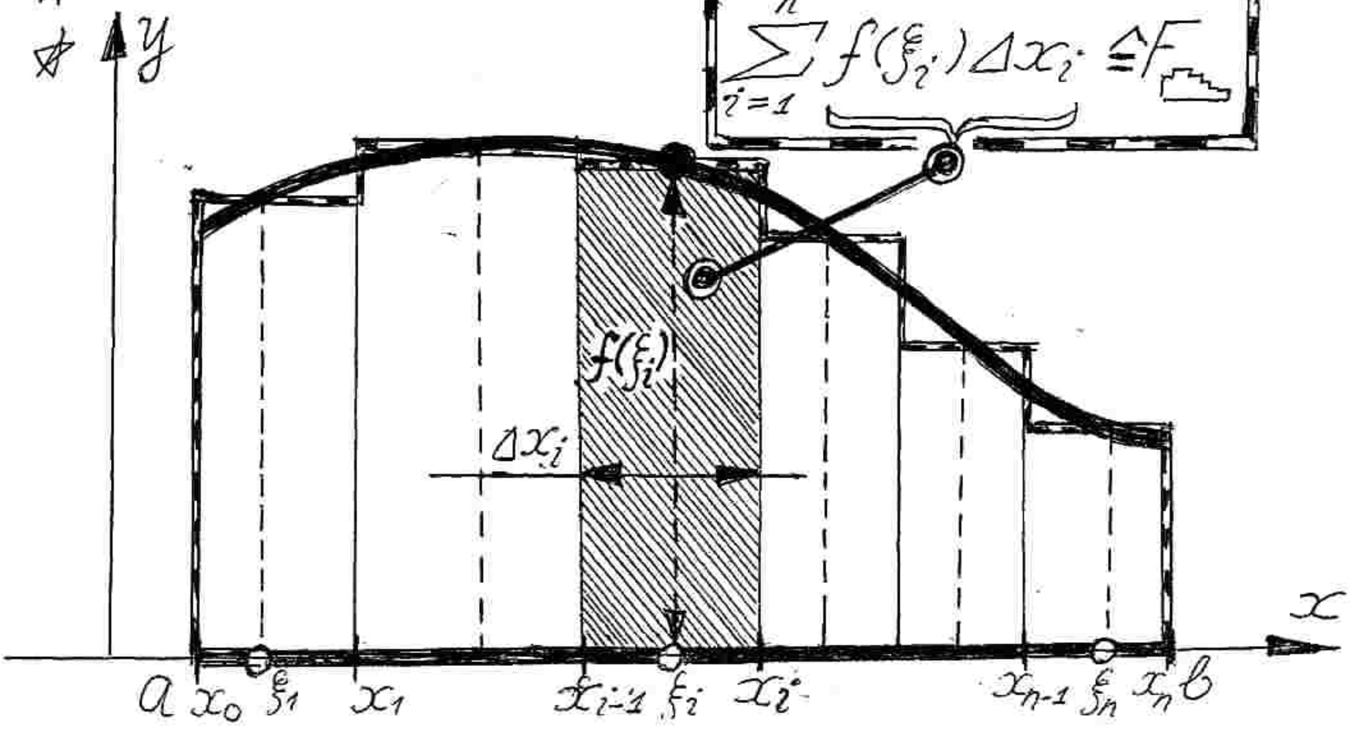
$$\boxed{\Delta x_i := x_i - x_{i-1}}$$

☆: Wahl eines Zwischenpunktes ξ_i in
☆ jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$: $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.



☆: Bilden der Riemannschen Summe:

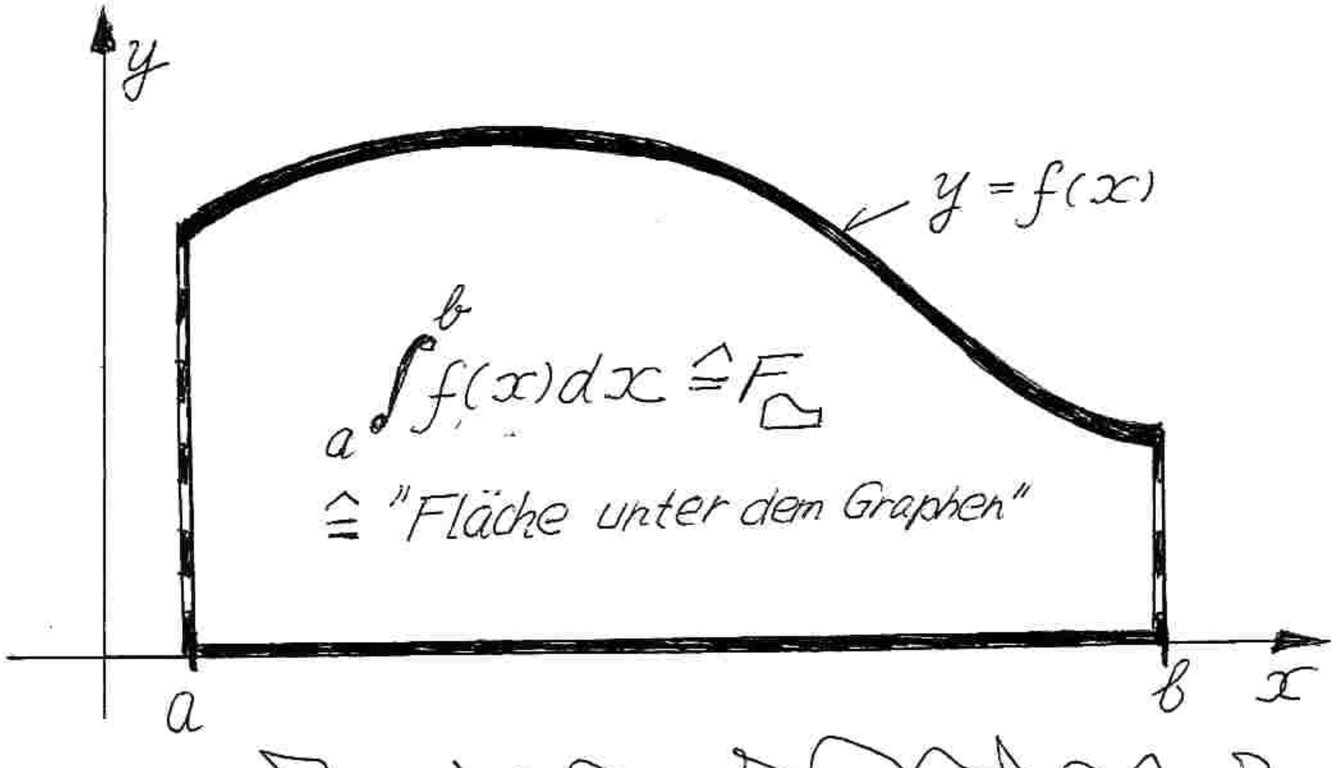
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \mathrel{\hat=} F$$



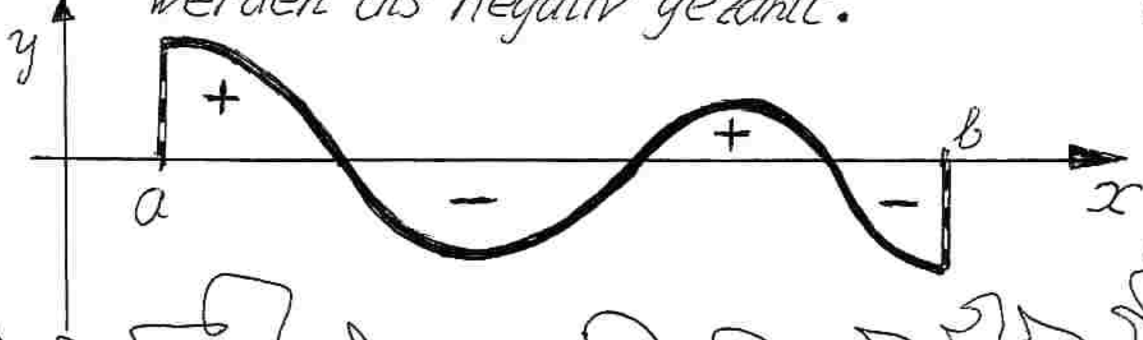
... Fortsetzung bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx :\!= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Integral der Funktion f von a bis b.



NB: Flächenteile unterhalb der x-Achse werden als negativ gezählt!

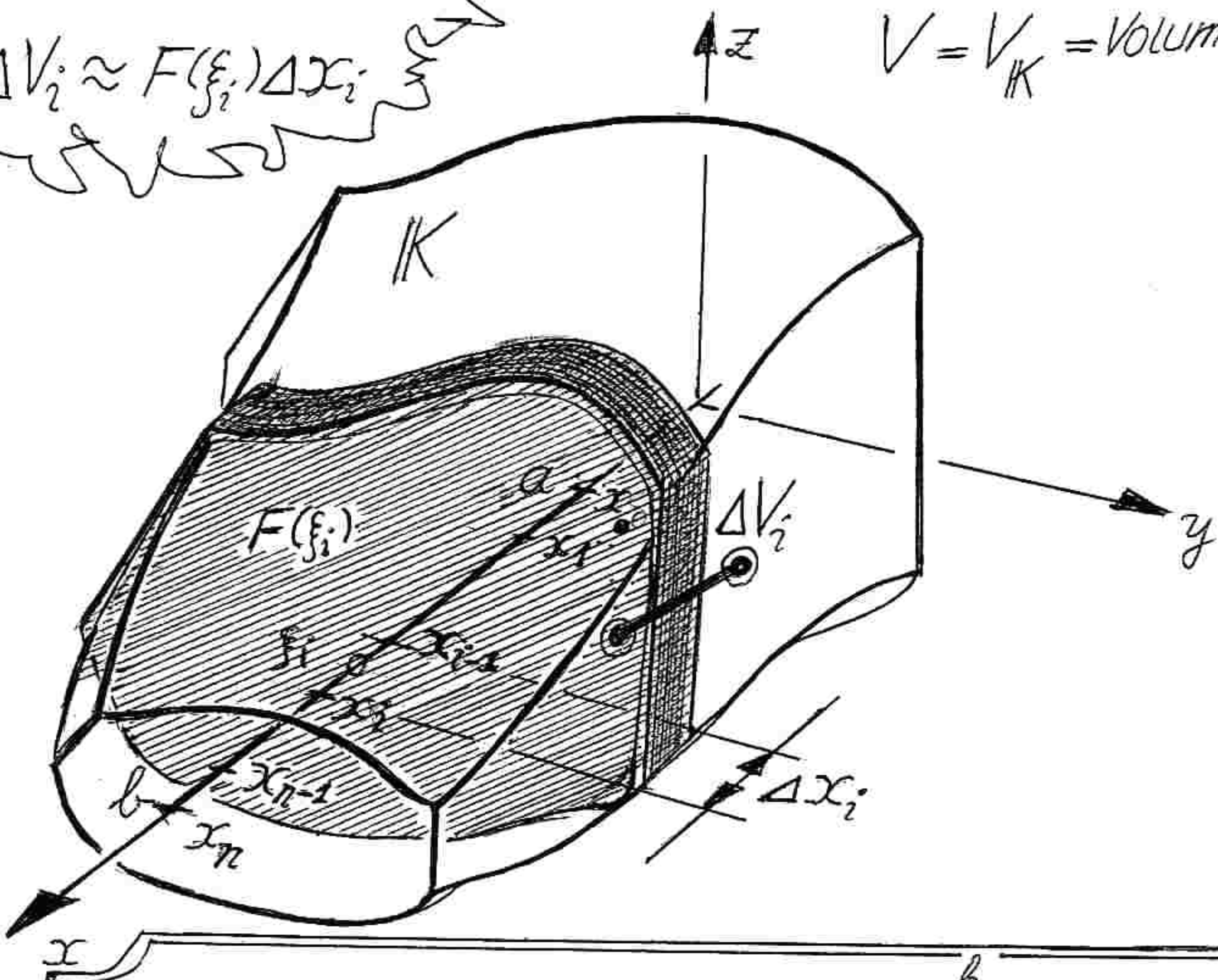


Volumenbestimmung (vgl. 10-5)

- $a, b \in \mathbb{R}$; $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}^3$ = Körper im Raum zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$.
- $F(x)$ = Fläche des Schitts von $\mathbb{K}$ mit der Ebene parallel zur y-z-Ebene durch $(x,0,0)$ = Querschnittsfläche an der Stelle x

i-tes Scheibenvolumen:
$\Delta V_i \approx F(\xi_i)\Delta x_i$

$V = V_{\mathbb{K}}$ = Volumen



$$\boxed{V = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx}$$

$$\text{Volumen} = \int_a^b \text{Querschnittsfläche} = \int_a^b F(x)\,dx$$

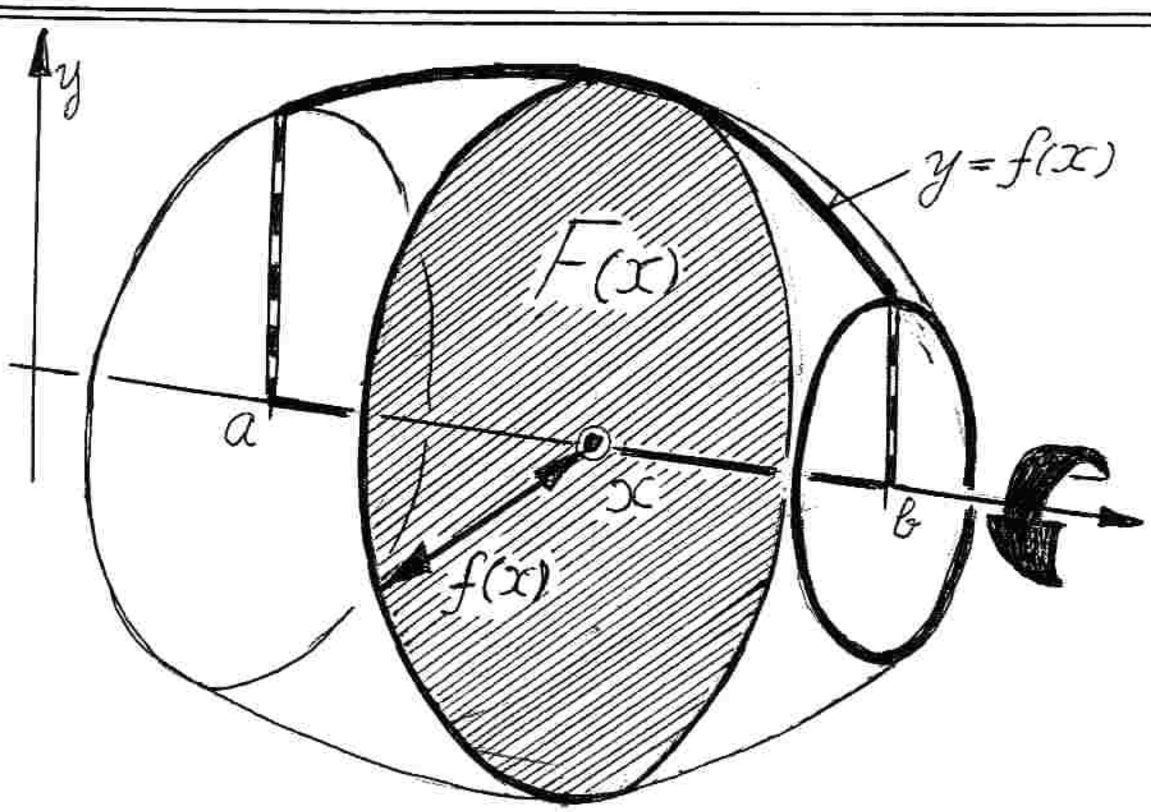
Volumen eines Rotationskörpers (vgl. 9.5; 10.4)

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
- Graph(f) rotiert um x-Achse.

V = Volumen des entstehenden Rotationskörpers

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx}$$

NB: $F(x)$ = Querschnittsfläche an der Stelle x
$= \pi f(x)^2$



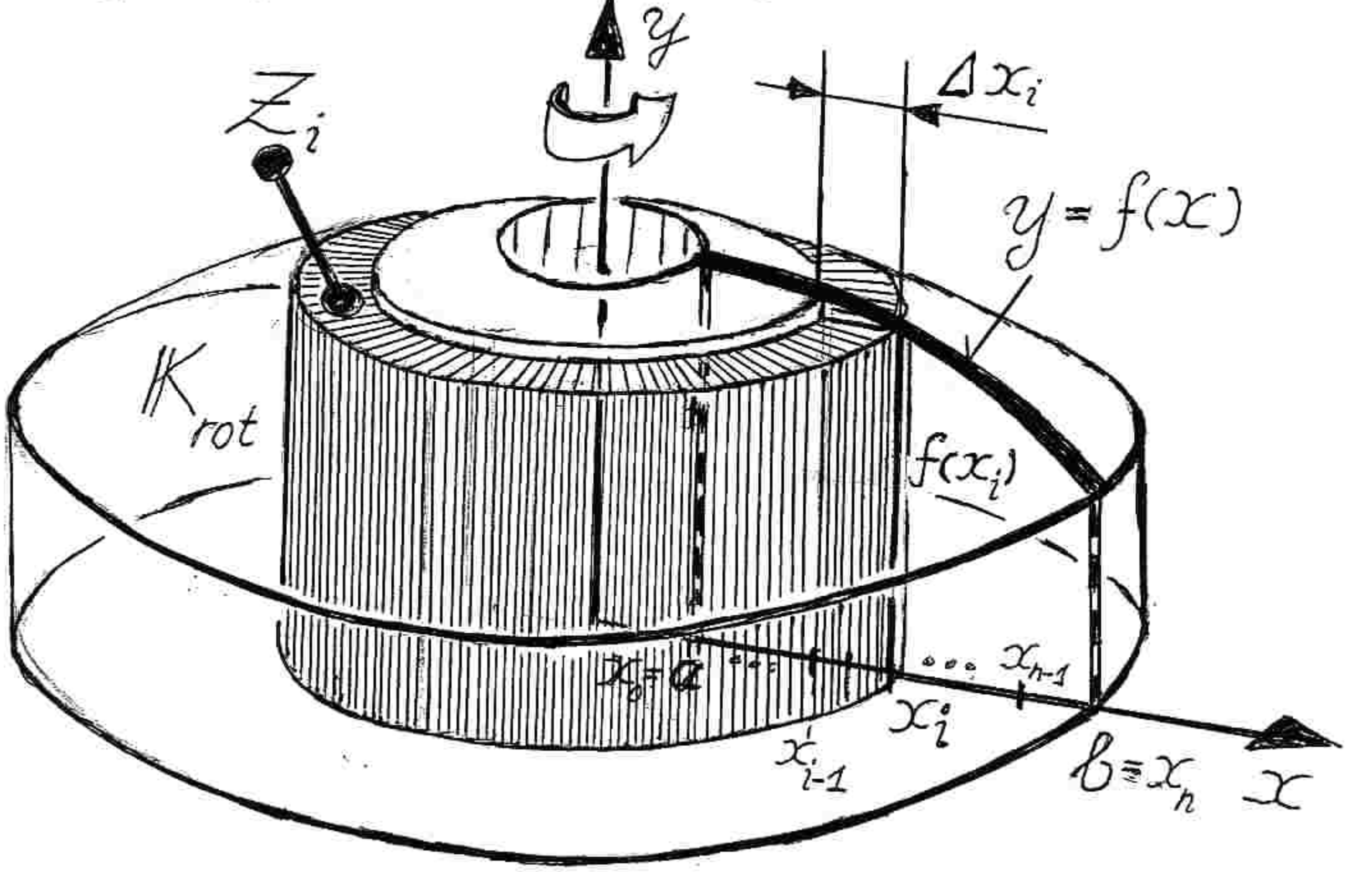
- Beispiel: Einheitskugel: $a = -1$, $b = 1$; $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$V_{Kugel} = \pi \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}^{\,2} \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2) \, dx.$$

Nochmals: Rotationskörper

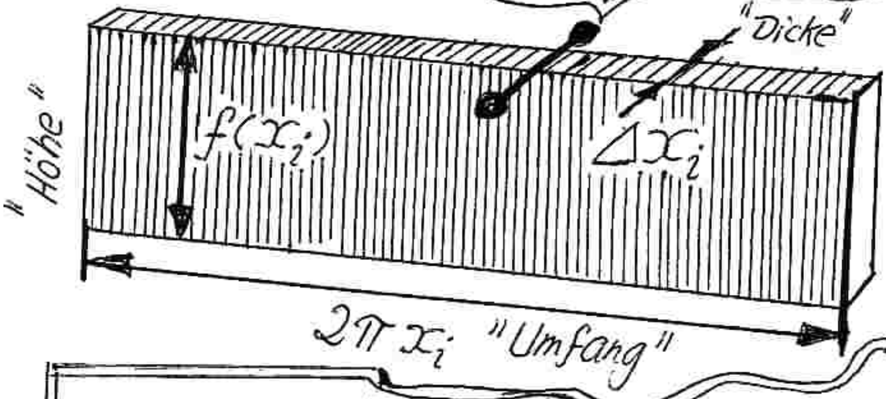
- $0 \le a < b$; $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

Graph(f) rotiert um y-Achse



Zerlegen des Rotationskörpers in Teilhohl=zylinder Z_i; Z_i abwickeln: Volumen von Z_i:

$$V_{Z_i} \approx 2\pi x_i f(x_i) \Delta x_i$$



$$\boxed{V_{\mathbb{K}_{rot}} = V = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum 2\pi x_i f(x_i) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx}$$

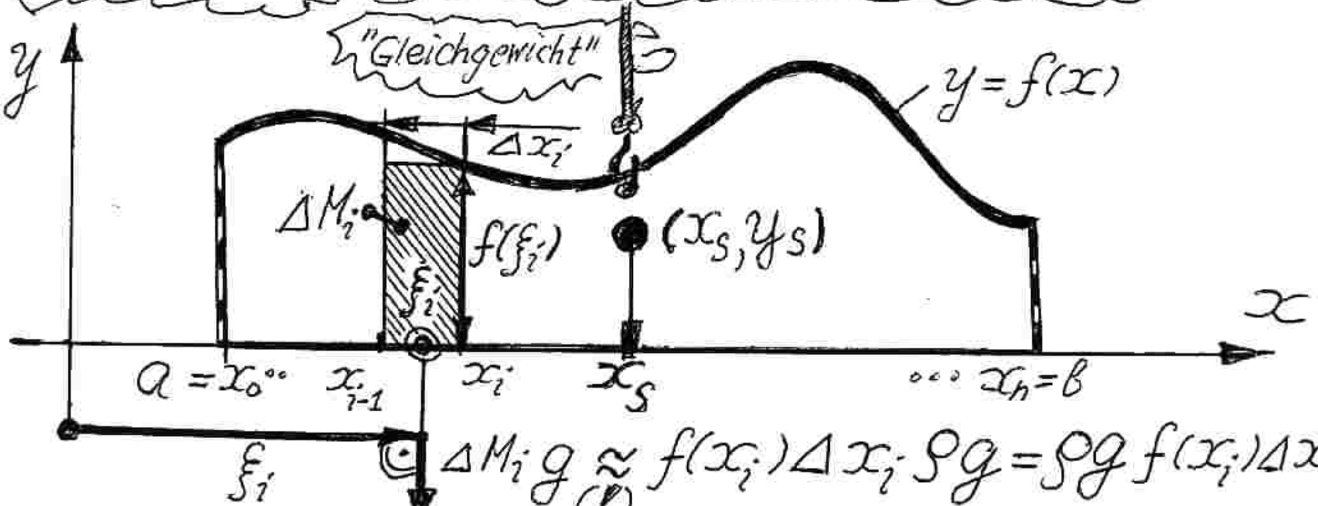
Schwerpunkt einer Fläche

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig
- Fläche unter dem Graphen mit Masse konstanter ϱ belegt.

$$\boxed{\text{Masse: } \underline{M} = \varrho \cdot \text{Fläche} = \varrho \int_a^b f(x)\,dx}$$

- Schwerpunkt der Fläche: (x_S, y_S)

Physik: $x_S \cdot Mg = d_0$ (= Drehmoment bez. $(0,0)$)



$$\Delta M_i g \underset{(!)}{\approx} f(x_i)\Delta x_i \varrho g = \varrho g f(x_i)\Delta x_i .$$

- $\Delta d_{0,i}$ = Teildrehmoment des Streifens $\Delta M_i \overset{\text{Physik}}{=}$

$$\therefore \quad = \xi_i \Delta M_i g \underset{(!)}{\approx} \varrho g\, \xi_i f(x_i)\Delta x_i \approx \varrho g\, x_i f(x_i)\Delta x_i$$

$$\therefore \quad \underline{d_0} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta d_{0,i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varrho g\, x_i f(x_i)\Delta x_i =$$

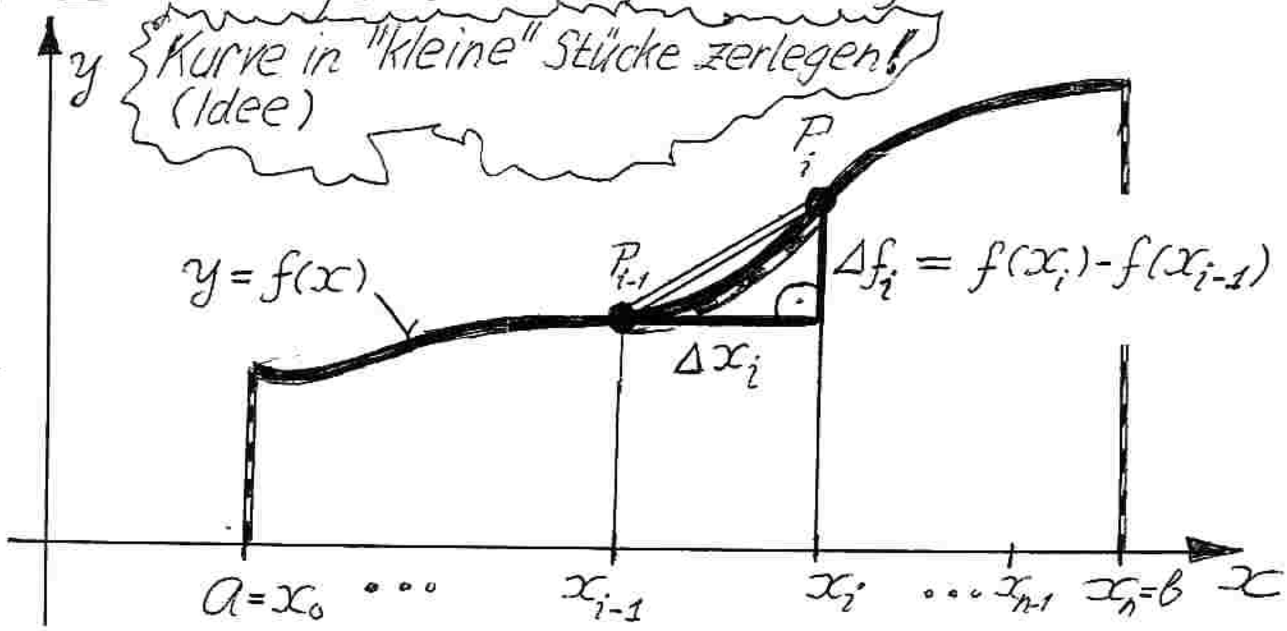
$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \varrho g \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i = \underline{\varrho g \int_a^b x f(x)\,dx}$$

$$\therefore \quad \underline{x_S} = \frac{d_0}{Mg} = \frac{\varrho g \int_a^b x f(x)\,dx}{\varrho g \int_a^b f(x)\,dx} = \underline{\frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}} .$$

Länge einer Kurve (vgl. 10.6)

- $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$; $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar.

$L :=$ Länge des Graphen von f



$L_i :=$ Länge des Kurvenstücks zwischen den Punkten $P_{i-1} := (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ und $P_i := (x_i, f(x_i))$.

$L_i \approx$ Abstand zwischen P_{i-1} und $P_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta f_i^2}$.

$\Delta f_i \approx f'(x_i)\Delta x_i$. (vgl. MAT 182 37).

$$\therefore \quad L_i \approx \sqrt{\Delta x_i^2 + f'(x_i^2)\Delta x_i^2} = \sqrt{1 + f'(x_i)^2}\,\Delta x_i .$$

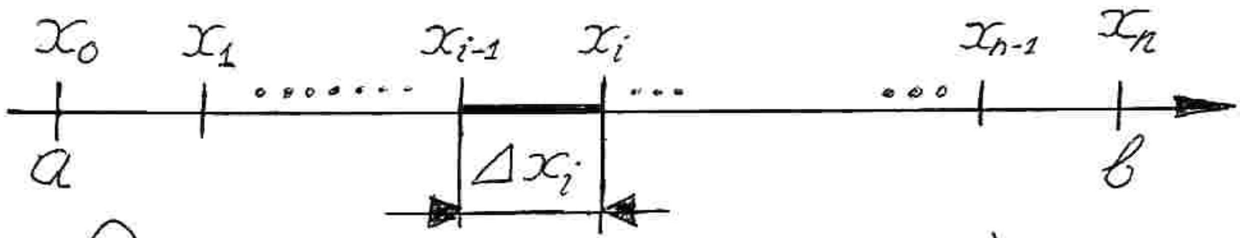
$$L = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_i)^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

$$\therefore \quad \boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx}$$

Berechnung des Integrals als Grenzwert Riemannscher Summen (vgl. 10.7)

- $a < b$; $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig
- $n \in \mathbb{N}$.

Zerlegen von $[a, b]$ in n gleichlange Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$; $(i = 1, 2, \cdots, n)$



$$\therefore \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \quad \therefore \quad x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$$

Zugehorige Riemann'sche Summe:

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i}} = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)}}$$

$$\boxed{\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)\right).}$$

Beispiel zur Berechnung des Integrals als Grenzwert Riemannscher Summen (vgl. 10.7)

$$\int_0^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{b-0}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(0 + i\cdot\frac{b-0}{n}\right)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{b^2}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = b^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

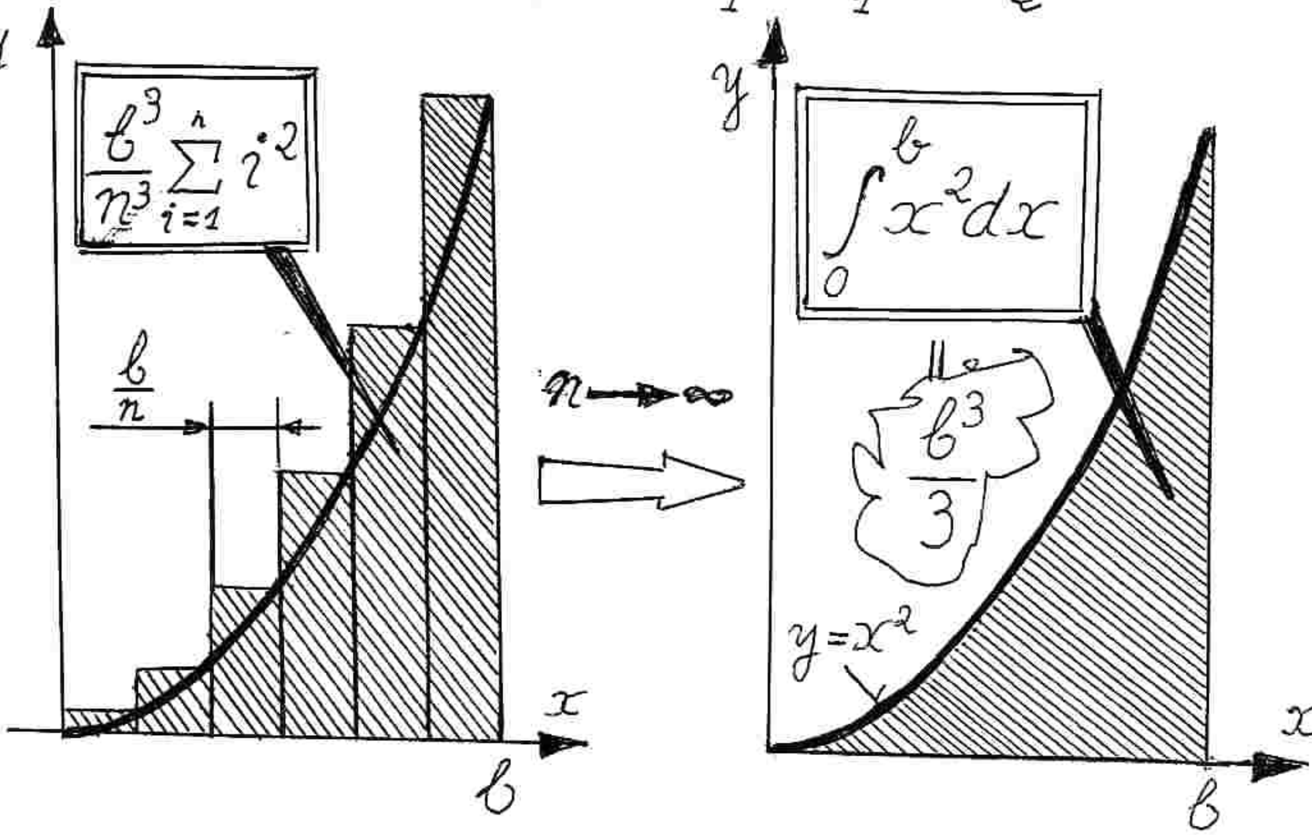
$\sum_{i=1}^{n} i^2 \overset{*}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$b^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

* z.B. "Formelsammlung"

Beispiel stammt von Archimedes

$$= \frac{b^3}{6} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1} \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} \underbrace{\frac{2n+1}{n}}_{\to 2} = \frac{b^3}{6}\cdot 2 = \frac{b^3}{3}$$



... und nochmals:

BEISPIEL EINES BESTIMMTEN INTEGRALS ALS GRENZWERT RIEMANNSCHER SUMMEN

Ziel ist die Berechnung des bestimmten Integrals

$$\boxed{(\star) \quad \int_0^b \sin(x)\,dx \qquad ; (b>0)}$$

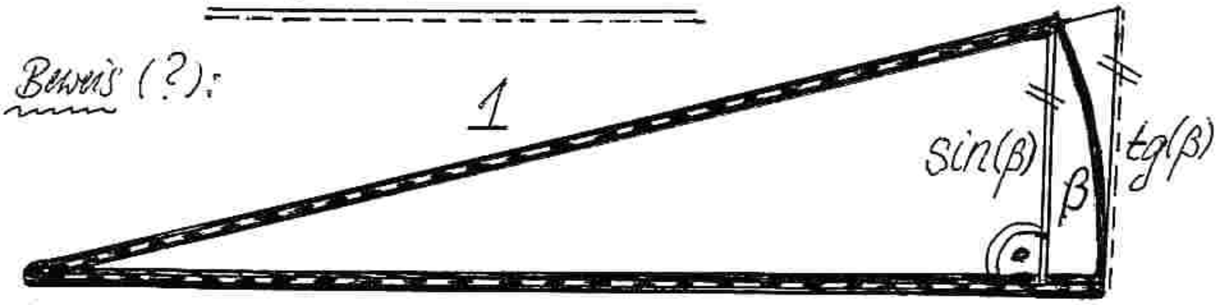
mit Hilfe der Grenzwertformel für Riemann'sche Summen mit äquidistanter Zerlegung:

$$(\mathbf{A}) \quad \int_0^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(i\frac{b}{n}\right).$$

Als Vorbetrachtung machen wir plausibel, dass

$$(\bullet) \qquad \underline{\underline{\lim_{\beta\to 0} \frac{\beta}{\sin(\beta)} = 1}} \; ; (\beta \text{ im Bogenmass}).$$

Beweis (?):



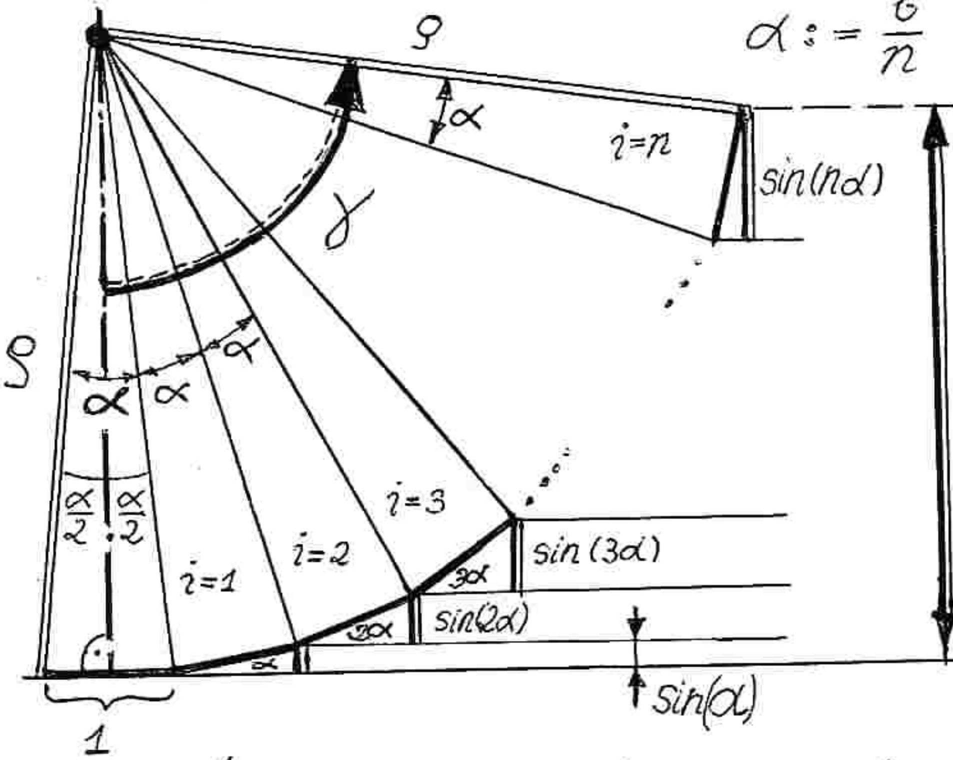
$$\sin(\beta) \leq \beta \leq tg(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \xRightarrow[\text{durch } \sin(\beta))]{\text{(dividiere}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq \dfrac{\beta}{\sin(\beta)} \leq \dfrac{1}{\cos(\beta)} \\ \lim\limits_{\beta\to 0} \cos(\beta) = \cos(0) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow (\bullet). \quad \blacksquare$$

Nun berechnen wir das Integral $(\star)$:

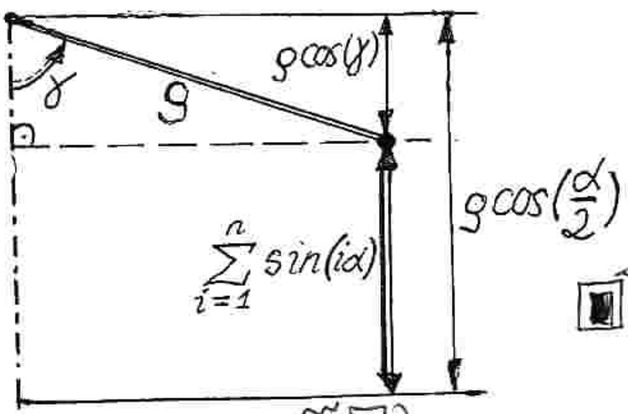
● $$\int_0^b \sin(x)\,dx \overset{(A)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(i\frac{b}{n}\right) = \lim_{\alpha\to 0} \alpha \sum_{i=1}^{n} \sin(i\alpha)$$

$\alpha := \frac{b}{n}$ (Bogenmass)



$$\sum_{i=1}^{n} \sin(i\alpha) = \sin(\alpha)+\sin(2\alpha)+\sin(3\alpha)+\dots+\sin(n\alpha)$$

$$\rho = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad ; \gamma = \frac{\alpha}{2}+n\alpha = \frac{\alpha}{2}+n\frac{b}{n} = \frac{\alpha}{2}+b .$$



$$\sum_{i=1}^{n} \sin(i\alpha) \overset{\text{s. Figur}}{=} \rho\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \rho\cos(\gamma) = \rho\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos(\gamma)\right) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}+b\right)\right)$$

$$\int_0^b \sin(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}+b\right)\right) \overset{\beta := \frac{\alpha}{2}}{=}$$

$$= \underbrace{\lim_{\beta\to 0} \frac{\beta}{\sin\beta}}_{1\ (\text{s. } (●))} \lim_{\beta\to 0}\left(\underset{\to 1}{\cos(\beta)} - \underset{\to \cos(b)}{\cos(\beta+b)}\right) = 1-\cos(b)$$

Integral als Funktion der obern Grenze

(vgl. 11.2)

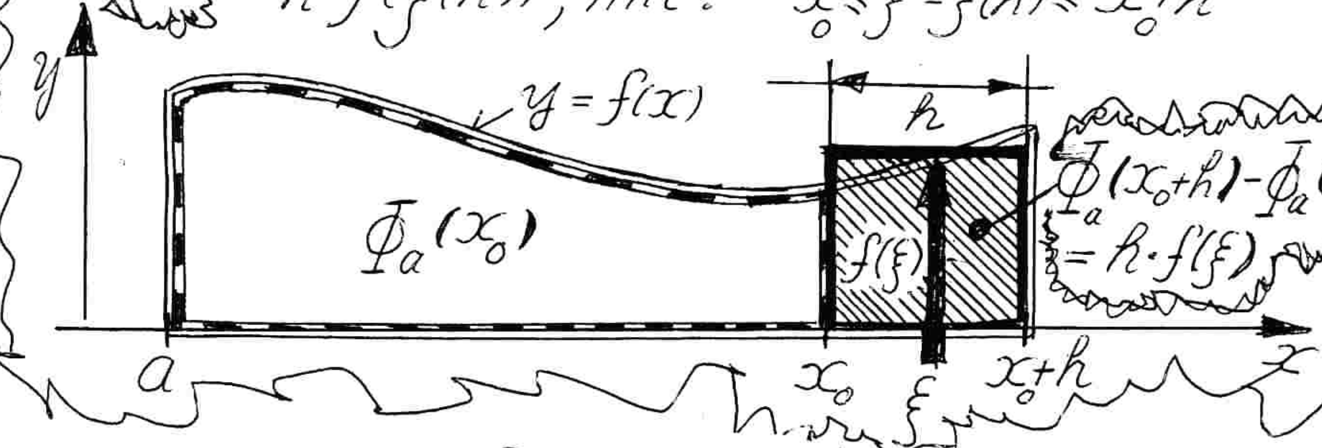
- $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall; $a \in I$; $f: I \to \mathbb{R}$ stetig.

$$\Phi = \Phi_a : I \to \mathbb{R};\ x \mapsto \Phi_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt .$$

$x_0,\ x_0 + h \in I$:

$$\Phi_a(x_0+h) - \Phi_a(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt =$$

$$= h \cdot f(\xi(h)), \text{ mit: } x_0 \leq \xi = \xi(h) \leq x_0 + h$$



$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi_a(x_0+h) - \Phi_a(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h f(\xi(h))}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi(h)) = f(x_0).$$

$\Phi_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist differenzierbar:

$$\Phi_a'(x) = f(x) \quad (\forall x \in I)$$

Stammfunktionen

(vgl. 11.3/12.2)

- $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall; $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig.

$F : I \to \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von f, wenn F differenzierbar und:

$$F'(x) = f(x) \quad (\forall x \in I)$$

(!) $\Phi_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist Stammfkt. von $f(x)$.

Eigenschaften der Stammfunktionen:

(1) $F(x)$ Stammfkt. von $f(x)$ & $c \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow F(x) + c =$ Stammfkt. von $f(x)$.

(2) $F_1(x), F_2(x)$ Stammfkt. von $f(x)$
$\Longrightarrow F_1(x) - F_2(x) = c =$ konst.

Stammfkt. bis auf Konstante eindeutig!

(3) $F(x)$ Stammfkt. von $f(x)$ & $c \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow c\,F(x)$ Stammft. von $c\,f(x)$.

(4) $\left.\begin{array}{l} F(x) \text{ Stammfkt. von } f(x) \ \& \\ G(x) \text{ Stammfkt. von } g(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow$
$F(x) + G(x)$ Stammfkt. von $f(x) + g(x)$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

(vgl. 11.4)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Dann gelten:

a) f hat eine Stammfunktion.

b) Ist F eine Stammfunktion von f und sind $a, b \in I$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

<u>NOTATION</u>: $F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

<u>Beispiel</u>: $-\cos(x)$ = Stammfkt. von $\sin(x)$

$$\therefore \int_0^b \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^b =$$

$$= -\cos(b) - (-\cos(0)) = 1 - \cos(b).$$

Beispiele zum Hauptsatz (vgl. 12.6)

$$\int_1^2 (2x^2+3x-1)\,dx = ?$$

- $\frac{x^3}{3}$ = Stfkt. von $x^2 \Rightarrow \frac{2x^3}{3}$ = Stfkt. von $2x^2$
- $\frac{x^2}{2}$ = Stfkt. von $x \Rightarrow \frac{3x^2}{2}$ = Stfkt. von $3x$
- x = Stfkt. von $1 \Rightarrow -x$ = Stft. von -1

$\Rightarrow \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x$ ist Stfkt. von $2x^2 + 3x - 1$

$$\underline{\int_1^2 (2x^2+3x-1)\,dx} = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x \,\Big|_1^2 =$$

$$\left(\frac{2\cdot 2^3}{3} + \frac{3\cdot 2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{2\cdot 1^3}{3} + \frac{3\cdot 1^2}{2} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{49}{6}}}$$

$$\int_1^4 \left(\sqrt{t} + \frac{3}{t^2}\right) dt = ?$$

- $t^{\frac{3}{2}} \Big/ \frac{3}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{t^3}$ = Stfkt. von $\sqrt{t}$
- $t^{-1}/-1 = \frac{-1}{t}$ = Stfkt. von $\frac{1}{t^2}$

$\Rightarrow$

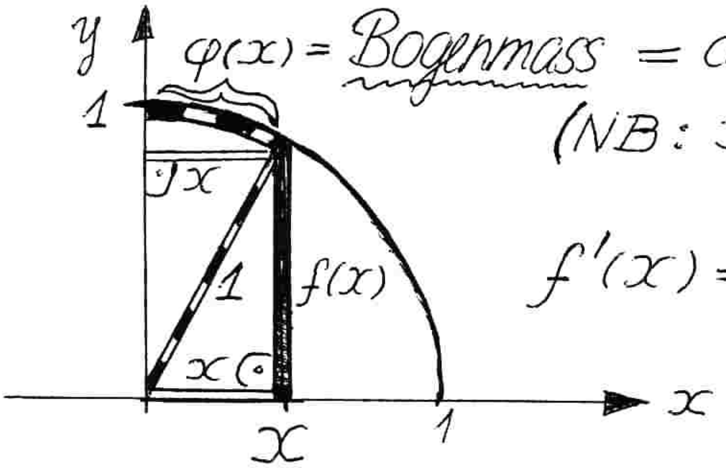
$\frac{2}{3}\sqrt{t^3} - \frac{3}{t}$ ist Stfkt. von $\sqrt{t} + \frac{3}{t^2}$

$$\underline{\int_1^4 \left(\sqrt{t} + \frac{3}{t^2}\right) dt} = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} - \frac{3}{t}\,\Big|_1^4 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - \frac{3}{1}\right)$$

$$= \underline{\frac{83}{12}}$$

Beispiel einer Stammfunktion

- $f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$



$\underbrace{\varphi(x)}$ = Bogenmass $= \arcsin(x)$

(NB: $x = \sin(\varphi(x))$)

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\underline{\varphi(x)} = \int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^x \sqrt{1+\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}^2}}\,dt =$$

$$= \int_0^x \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\,dt =$$

$$= \int_0^x \sqrt{\frac{1}{1-t^2}}\,dt = \underline{\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}$$

$\therefore$ $\varphi(x) = \arcsin(x) =$ Stammfkt. von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\cdots$ $\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} =$ Stammft. von $\sqrt{1-x^2}$

Das unbestimmte Integral (vgl. 12.7)

- $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall; $a, b \in I$; $f: I \to \mathbb{R}$ stetig

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \text{unbestimmtes Integral von } f(x) := \text{Stammfunktion von } f(x)}$$

$\int f(x)\,dx$ nur bis auf Konstante definiert!

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)\ ;\ \int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx \Big|_a^b}$$

Beispiele:

C = Integrationskonstante

Integral $\int f(x)\,dx$	Def.-Intervall
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$I = \mathbb{R}$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{Z}_{<-1})$	$I = (-\infty, 0), (0, \infty)$
$\int x^a\,dx = \frac{x^a}{a+1} + C \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$I = (0, \infty)$
$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(\lvert x \rvert)$	$I = (-\infty, 0), (0, \infty)$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$I = \mathbb{R}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$I = \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$	$I = (-1, 1)$

Rechenregeln für das Integral (vgl. 12.8)

- $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall; $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Regeln für das unbestimmte Integral (folgen aus MAT 182 55 (3), (4)):

(1) $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

(2) $\int c f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$, $(c \in \mathbb{R})$.

- $a, b, c \in I$.

Regeln für das bestimmte Integral:

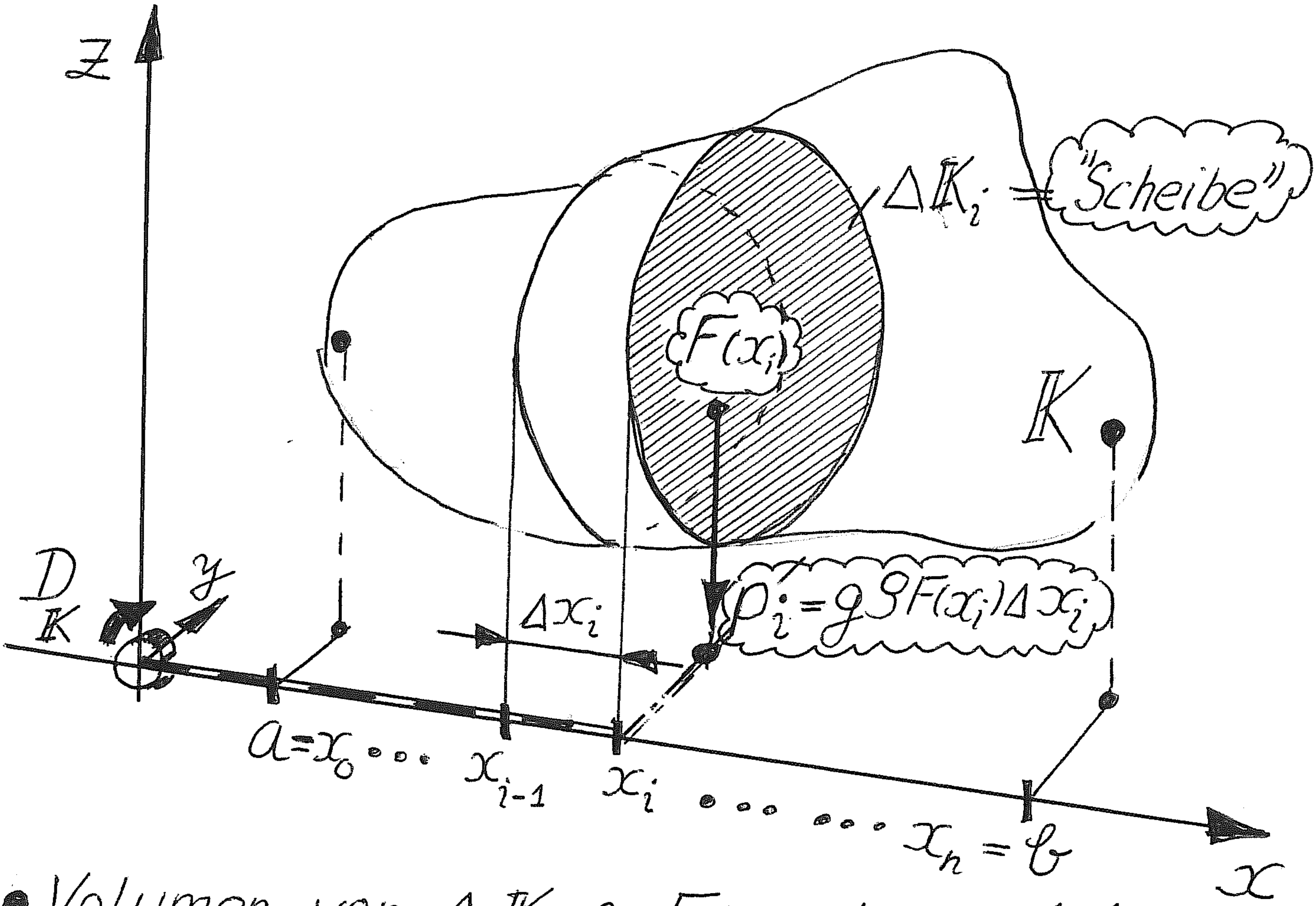
($\bar{1}$) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

($\bar{2}$) $\int_a^b d f(x)\,dx = d \int_a^b f(x)\,dx$, $(d \in \mathbb{R})$.

($\bar{3}$) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

Schwerpunkt eines Körpers.. (vgl. MAT 182 (48))

- Der Körper $\mathbb{K}$ sei mit Masse der konstanten Dichte ϱ belegt
- $F(x)$ = Fläche des Querschnitts von $\mathbb{K}$ mit der Ebene der Punkte mit erster Koordinate x.



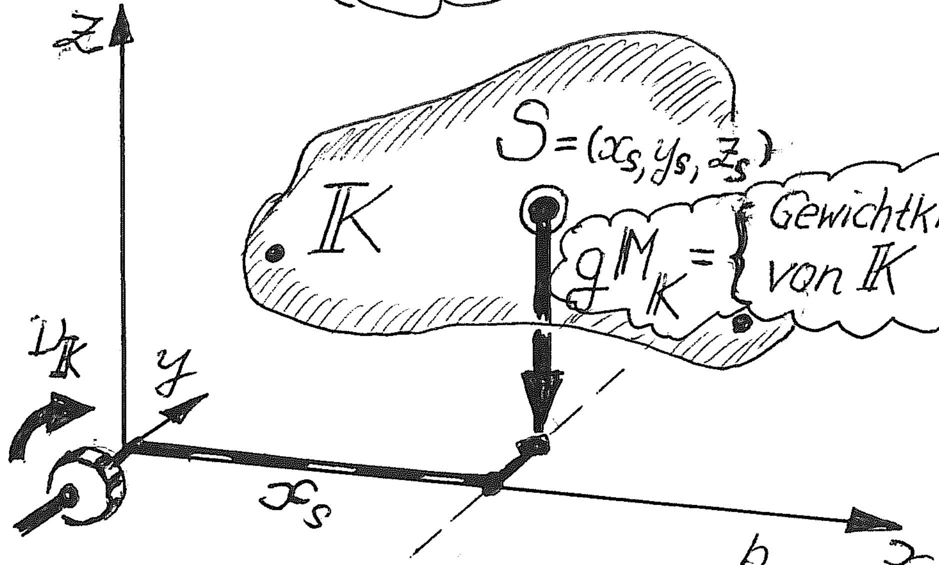
- Volumen von $\Delta\mathbb{K}_i \approx F(x_i)\Delta x_i = \Delta V_i$;
- Gewichtskraft von $\Delta\mathbb{K}_i \approx g\varrho F(x_i)\Delta x_i = p_i$
- Gewichtsdrehmoment von $\Delta\mathbb{K}_i = d_i = x_i p_i = g\varrho x_i F(x_i)\Delta x_i$, (bezüglich der y-Axe).

$\boxed{\text{Gewichtsdrehmoment von } \mathbb{K}: \quad D_{\mathbb{K}} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g\varrho x_i F(x_i)\Delta x_i = g\varrho \int_a^b x F(x)\,dx}$

... Schwerpunkt (Fortsetzung)

- $V_{\mathbb{K}}$ = Volumen von $\mathbb{K}$ = $\int_a^b F(x)\,dx$.
  (vgl. MAT 182 (45))
- $M_{\mathbb{K}}$ = Masse von $\mathbb{K}$ = $\varrho\, V_{\mathbb{K}}$.

Physikalische Idee des Schwerpunktes:
Greift die Gesamtgewichtskraft von $\mathbb{K}$ im Schwerpunkt $S = S_{\mathbb{K}}$ von $\mathbb{K}$ an, so ist das resultierende Drehmoment (bezüglich der y-Axe) gerade das Gewichtsdrehmoment $D_{\mathbb{K}}$ (bezüglich der y-Axe).



$$x_S\, g\, M_{\mathbb{K}} = D_{\mathbb{K}}$$

$$\therefore\quad x_S = \frac{D_{\mathbb{K}}}{g\, M_{\mathbb{K}}}$$

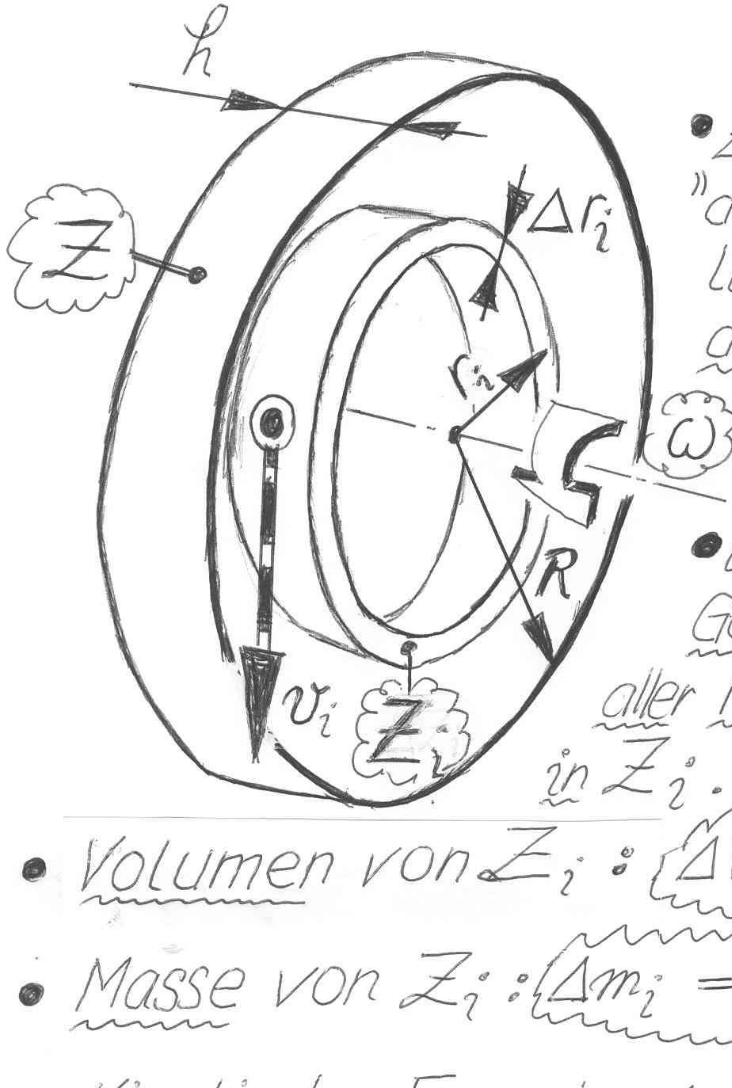
Wegen $M_{\mathbb{K}} = \varrho\, V_{\mathbb{K}} = \varrho \int_a^b F(x)\,dx$ und

$D_{\mathbb{K}} = g\varrho \int_a^b x F(x)\,dx$ folgt:

$$\boxed{x_S = \frac{\int_a^b x F(x)\,dx}{V_{\mathbb{K}}} = \frac{\int_a^b x F(x)\,dx}{\int_a^b F(x)\,dx}.}$$

Rotationsenergie eines Zylinders

Eine zylindrische Scheibe vom Radius R rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω. Die Massendichte der Scheibe ist ϱ. $E_{Kin} = ?$



- Zerlege Z in "dünne" Hohlzylinder vom Radius r_i und "Dicke" Δr_i; $(i = 1, \ldots, n)$.
- $v_i = \omega r_i$ ≈ Geschwindigkeit aller Massenpunkte in Z_i.
- Volumen von Z_i: $\Delta V_i \approx 2\pi r_i h \Delta r_i$
- Masse von Z_i: $\Delta m_i = \varrho \Delta V_i \approx 2\pi \varrho r_i h \Delta r_i$
- Kinetische Energie von Z_i:

$$\Delta E_{Kin,i} \underset{\text{Physik}}{=} \frac{v_i^2}{2} \Delta m_i \approx \frac{\omega^2 r_i^2}{2} \cdot 2\pi \varrho r_i h \Delta r_i$$

$$= \pi \varrho \omega^2 h r_i^3 \Delta r_i \; ; \ldots$$

...

$$\boxed{E_{Kin,i} \cong \pi \rho \omega^2 h r_i^3 \Delta r_i .}$$

Totale kinetische Energie von Z

$$E_{Kin} = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i E_{Kin,i} =$$

$$= \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \pi \rho \omega^2 h r_i^3 \Delta r_i =$$

$$= \lim_{\Delta r_i \to 0} \pi \rho \omega^2 h \sum_i r_i^3 \Delta r_i =$$

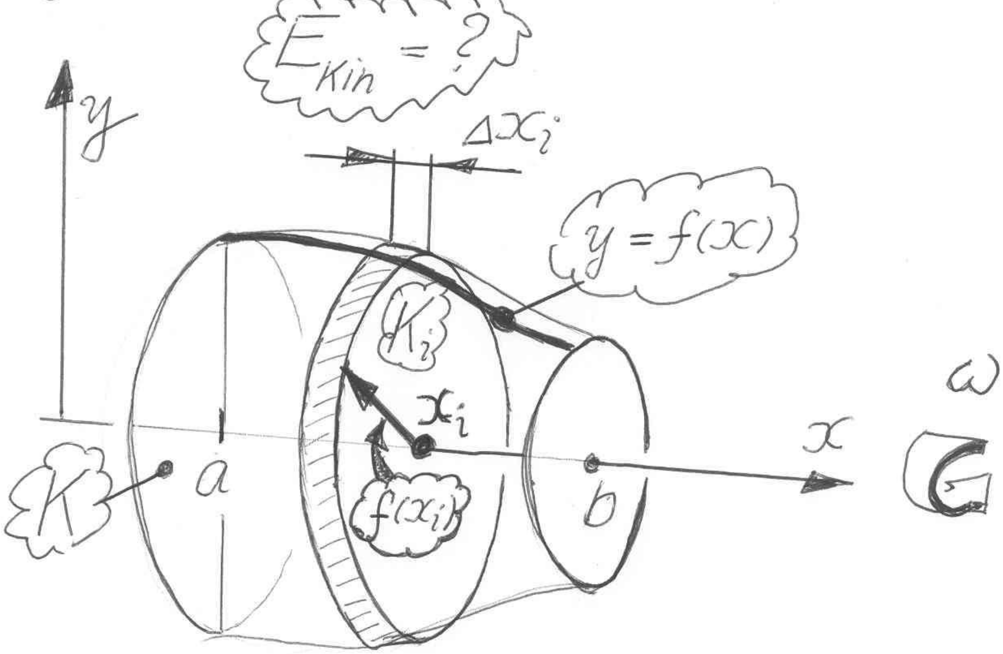
$$= \pi \rho \omega^2 h \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i r_i^3 \Delta r_i =$$

$$= \pi \rho \omega^2 h \int_0^R r^3 dr \ldots\ldots$$

$$\boxed{E_{Kin} = \frac{\pi}{4} \rho \omega^2 h R^4}$$

Rotationsenergie eines Rotionskörpers

- $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$; $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
- K = Rotationskörper um x-Achse mit Umrisskurve Graph(f).
- K hat Massendichte ρ und rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω um die x-Achse.



- Zerlege K in "dünne Scheiben" K_i vom Radius $f(x_i)$ und der Dicke Δx_i
- Kinetische Energie von K_i : (s. MAT 182 59'')

$$E_{Kin,i} \approx \frac{\pi}{4} \rho \omega^2 f(x_i)^4 \Delta x_i \quad \ldots$$

- Totale Rotationsergie von K:

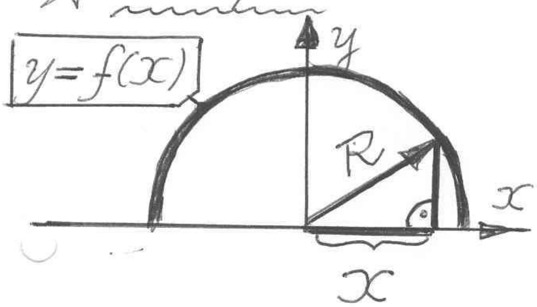
$$E_{Kin} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i E_{Kin,i} =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i \frac{\pi}{4} \rho \omega^2 f(x_i)^4 \Delta x_i =$$

$$= \frac{\pi}{4} \rho \omega^2 \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i)^4 \Delta x_i \cdots$$

$$\boxed{E_{Kin} = E_{Kin}^{(rot)} = \frac{\pi}{4} \rho \omega^2 \int_a^b f(x)^4 \, dx}$$

Beispiel: K = Kugel vom Radius R



$$f : [-R, R] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

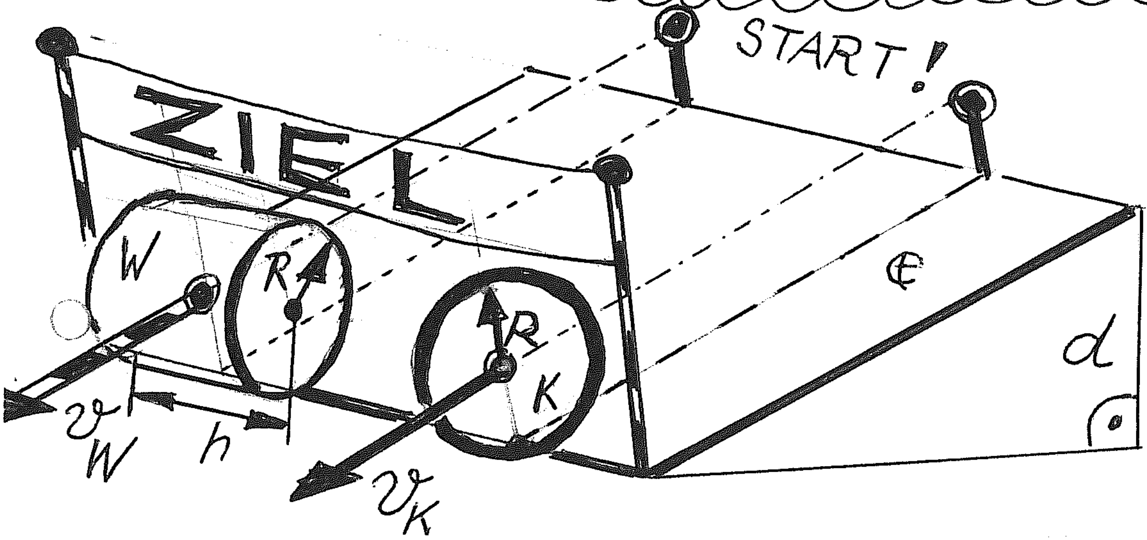
$$\underline{\underline{E_{Kin,\,Kugel}^{(rot)}}} = \frac{\pi}{4} \rho \omega^2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}^{\,4} \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \rho \omega^2 \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^2 \, dx = \cdots$$

$$\cdots = \underline{\underline{\frac{4\pi}{15} \rho \omega^2 R^5}}$$

Walze und Kugel auf der schiefen Bahn...

• Die Walze W und die Kugel K (beide mit Radius R) starten gleichzeitig oben auf der schiefen Ebene $\mathbb{E}$. Wer ist zuerst unten?



v_W und v_K: Zielgeschwindigkeiten

$v_W > v_K$? $v_K > v_K$

* E^{pot} = potentielle Energie am Start.
* E^{trans} = kinetische Translationsenergie am Ziel.
* E^{rot} = kinetische Rotationsenergie am Ziel.

$$E^{trans} + E^{rot} = E^{pot}$$

$$E^{trans} = \frac{v^2}{2} M \; ; \; E^{pot} = dgM$$

* ρ_W = Dichte von W
* ρ_K = Dichte von K
* Rotationsgeschwindigkeit am Ziel: $\begin{cases} \omega_W = \dfrac{v_W}{R} \\ \omega_K = \dfrac{v_K}{R} \end{cases}$

$\boxed{\text{... die Walze}}$

* Volumen: $V_W = \pi R^2 h$;

* Masse: $M_W = \rho_W \cdot V_W = \rho_W \pi R^2 h$;

* $E_W^{trans} = \frac{v_W^2}{2} M_W = \rho_W v_W^2 \frac{\pi}{2} R^2 h$;

* $E_W^{rot} \overset{\text{MAT 182}}{\underset{59'/59''}{=}} \rho_W \left(\frac{v_W}{R}\right)^2 \frac{\pi}{4} R^4 h = \rho_W v_W^2 \frac{\pi}{4} R^2 h$;

* $E_W^{pot} = dgM_W = \rho_W dg \pi R^2 h$.

$$\xrightarrow{E_W^{trans} + E_W^{rot} = E_W^{pot}}$$

$$\rho_W v_W^2 \frac{\pi}{2} R^2 h + \rho_W v_W^2 \frac{\pi}{4} R^2 h = \rho_W dg \pi R^2 h \ldots$$

verein= ... fachen! $3 v_W^2 = 4dg \Rightarrow \boxed{v_W = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{dg}}$

BEMERKUNGEN:

- Ergebnis hängt nicht von R, h und ρ_W ab!
- $E_W^{rot} / E_W^{trans} = \frac{1}{2}$.
- $E_W^{trans} = \frac{2}{3} E_W^{pot}$.

....

… die Kugel

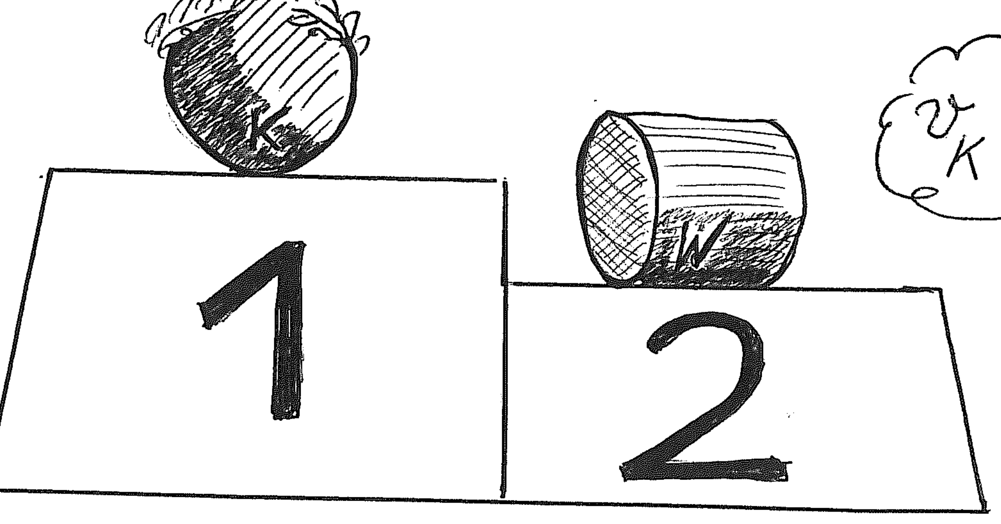
- Volumen: $V_K = \frac{4\pi}{3} R^3$;
- Masse: $M_K = \rho_K \cdot V_K = \rho_K \frac{4\pi}{3} R^3$;
- $E_K^{trans} = \frac{v_K^2}{2} M_K = \rho_K v_K^2 \frac{2\pi}{3} R^3$;
- $E_K^{rot} \overset{\text{MAT 182 } (60^{IV})}{=\!=\!=} \rho_K \left(\frac{v_K}{R}\right)^2 \frac{4\pi}{15} R^5 = \rho_K v_K^2 \frac{4\pi}{15} R^3$;
- $E_K^{pot} = dg M_K = \rho_K dg \frac{4\pi}{3} R^3$.

$$\xRightarrow{\quad E_K^{trans} + E_K^{rot} = E_K^{pot} \quad}$$

$$\rho_K v_K^2 \frac{2\pi}{3} R^3 + \rho_K v_K^2 \frac{4\pi}{15} R^3 = \rho_K dg \frac{4\pi}{3} R^3 \ldots$$

vereinfachen … $14 v_K^2 = 20 dg \Longrightarrow \boxed{v_K = \sqrt{\frac{10}{7}} \sqrt{dg}}$

BEMERKUNGEN:

- Ergebnis hängt nicht von R und ρ_K ab!
- $E_K^{rot} / E_K^{trans} = \frac{2}{5}$; $E_K^{trans} = \frac{5}{7} E_W^{pot}$.
- 

$v_K > v_W$

$\boxed{\text{Substitutionsmethode}}$ (vgl 13.2/4)

- $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall ; $f: I \to \mathbb{R}$ stetig
  $u: I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar
- $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ Stammfkt. von f

$$\boxed{\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = F(u(x)) + C = \left[\int f(u)\,du\right]_{u=u(x)}} .$$

Beispiele: • $\tilde{I} = \int \cos(x^2)\, 2x\, dx = ?$

Beobachtung: $(x^2)' = 2x \leadsto$

$u(x) := x^2$; $f(u) = \cos(u)$; NB: $F(u) = \int f(u)\,du = \sin(u) + C$

$\int \cos(x^2) 2x\,dx = \int \cos(u(x))\, u'(x)\,dx = F(u(x)) + C =$

$= \sin(u(x)) + C = \sin(x^2) + C$.

- $\tilde{J} = \int \cos(x^2)\,x\,dx = ?$

Beobachtung: $(x^2)' = 2x \leadsto u(x) = x^2$ etc…

$\int \cos(x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)\,2x\,dx = \cdots = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$

- $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = ?$ Beobachtung: $(\cos x)' = -\sin(x)$

$u(x) = \cos(x)$; $f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$; NB: $F(u) = \int f(u)\,du = 2\sqrt{u} + C$.

$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = -2\sqrt{u(x)} + C =$

$= -2\sqrt{\cos x} + C$

... Substitutionsmethode: "Rezept" (vgl. 13.3)

(1) Wähle $u(x)$. Setze $du = u'(x)dx$.

(2) Ersetze (im zu berechnenden Integral) $u(x)$ durch u; $u'(x)dx$ durch du.

(3) Das Integral hat nun die Form $\int f(u)du$. Bestimme Stfkt. $F(u) = \int f(u)du + C$.

(4) Ersetze in $F(u)$ die Grösse u durch $u(x)$...

Beispiele: • $\int \sin x \cos x \, dx = ?$

✡ $u(x) := \sin x$, $u'(x) = \cos x \Rightarrow du = \cos x \, dx$ (1)

✡ $\int u \, du$ (2)

✡ $\int u\,du = F(u) = \frac{u^2}{2} + C$ (3)

✡ $\frac{\sin^2 x}{2} + C = \int \sin x \cos x \, dx$ (4)

• $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx = ?$

(1) ✡ $u(x) = x^3+1$; $u'(x) = 3x^2 \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} u'(x)dx = \frac{1}{3} du$

(2,3) ✡ $\int \frac{1}{3}\frac{1}{u} du = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln|u| + C$

(4) ✡ $\frac{1}{3} \ln|x^3+1| + C = \int \frac{x^2}{x^3+1} dx$.

$$\boxed{\bullet \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \;\underset{du = f'(x)dx}{\overset{u = u(x) = f(x)}{=\!=\!=\!=}}\; \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C}$$

... $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C.$

Substitutionsmethode: Bestimmtes Integral

(vgl. 13.4)

- $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall; $a, b \in I$; $f: I \to \mathbb{R}$ stetig
- $u: I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar
- $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ Stammfkt. von f

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = F(u(x))\Big|_a^b =$$

"Rechnen mit x"

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du = F(u)\Big|_{u(a)}^{u(b)}.$$

"Rechnen mit u"

vgl MAT 182 (36)

NB: $\frac{du}{dx} = u'(x)$; $du = u'(x)\,dx$

Beispiel:

- $\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,dx = ?$ $\quad u = 4x+1$; $dx = \frac{1}{4}du$

Variante 1: "Rechnen mit x"

(x) $\int \sqrt{4x+1}\,dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{4}\,du \overset{*}{=} \frac{1}{4} \int \sqrt{u}\,du =$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{1}{6} u^{3/2} \underset{=u}{\overset{u(x)}{=}} \frac{1}{6}(4x+1)^{3/2}.$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,dx}} = \frac{1}{6}(4x+1)^{3/2}\Big|_0^2 = \dots = \underline{\underline{\frac{26}{6}}}$$

(u) $u(0) = 1,\ u(2) = 9$

$$\underline{\underline{\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,dx}} \overset{*}{=} \frac{1}{4} \int_{u(0)}^{u(2)} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{6} u^{3/2}\Big|_1^9 = \dots = \underline{\underline{\frac{26}{6}}}$$

$\boxed{\text{Partielle Integration}}$ (vgl. 13.5)

- $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall; $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar

$$\boxed{\begin{gathered}\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.\\ \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx,\\ (a,b \in I).\end{gathered}}$$

Beispiel: $(n \in \{1,2,3,\dots\})$

- $$\int_{-\pi}^{\pi} x \underbrace{\sin(nx)}_{\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)'}\,dx = x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)dx =$$

$$= -\frac{\pi}{n}\left(\cos(n\pi)+\cos(-n\pi)\right) + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\cos(nx)}_{\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)'}\,dx =$$

$$= -\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\Big(\underbrace{\sin(n\pi)}_{0} - \underbrace{\sin(-n\pi)}_{0}\Big) =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}$$

Integration von Vektorfunktionen (vgl. 14.1/2)

- $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall; $a, b \in I$.
- $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^3$; $t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ stetig.

$$\boxed{\int_a^b \vec{x}(t)\,dt := \begin{pmatrix} \int_a^b x_1(t)\,dt \\ \int_a^b x_2(t)\,dt \\ \int_a^b x_3(t)\,dt \end{pmatrix}}$$ {Gewöhnliche Integration einer Vektorfkt.}

Anwendung: $t \mapsto \vec{x}(t)$: Bewegung eines Punktes im Raum.

Bekannt: • Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$, $\forall t \in I$.
• Ortsvektor $\vec{x}(t_0)$ zur Zeit t_0

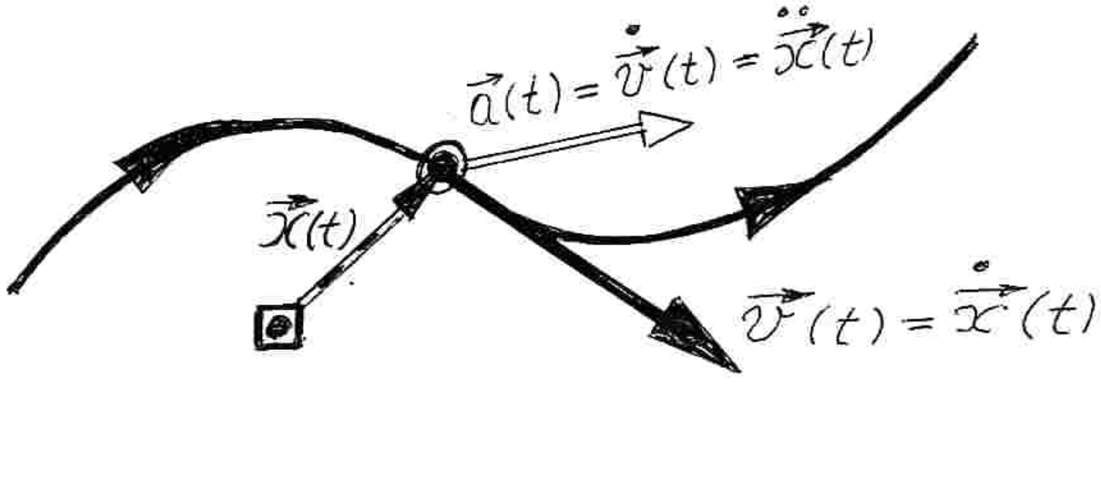
$\therefore$ $$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(s)\,ds}$$ {(Ortsvektor zur Zeit t)}

NB: $\dot{\vec{x}}(t) = v(t)$

Anwendung: • $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}$ = Beschleunigung, $\forall t \in I$
• $\vec{v}(t_0)$ = Geschwindigkeit zur Zeit t_0

$\therefore$ $$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(s)\,ds}$$ {(Geschwindigkeit zur Zeit t)}

NB: $\dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}(t)$



Vektorfelder (vgl. 14.3)

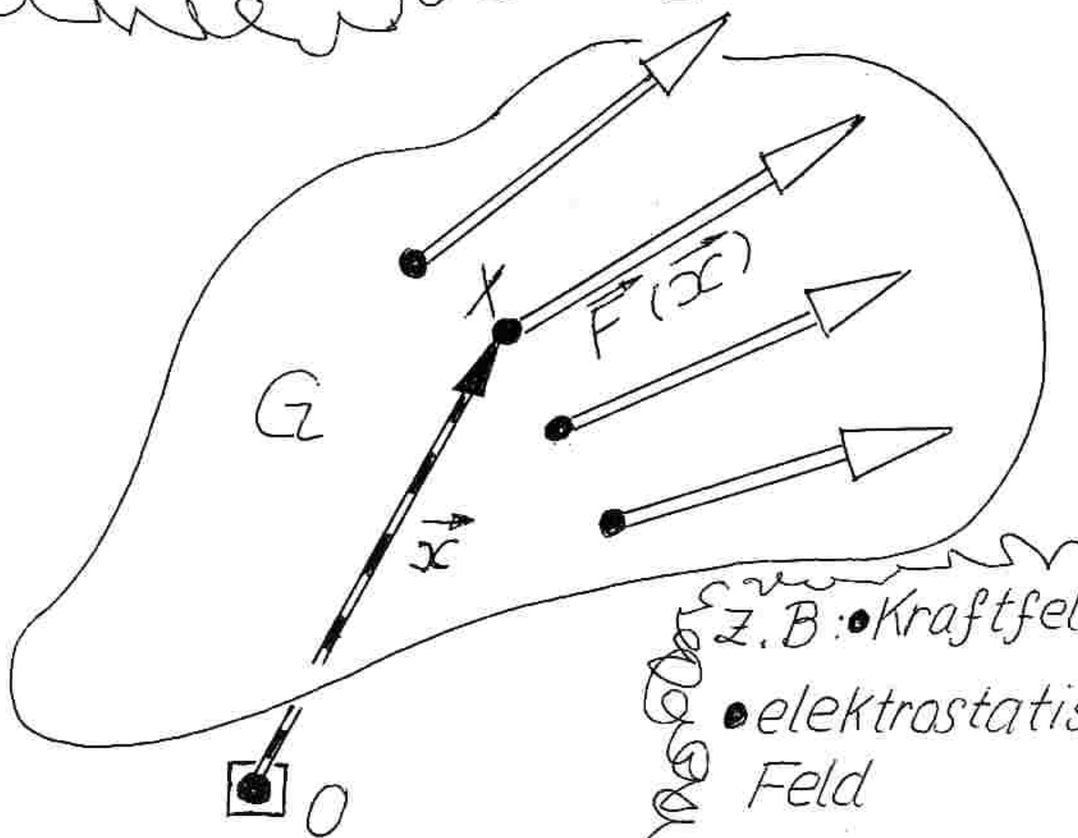
- $G \subseteq \mathbb{R}^3$

Eine Funktion $\vec{F}: G \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

heisst ein Vektorfeld auf G.

Dem Punkt $X \in G$ mit Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ wird der Vektor $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$ zugeordnet.



z.B.:
- Kraftfeld
- elektrostatisches Feld
- Geschwindigkeits= feld

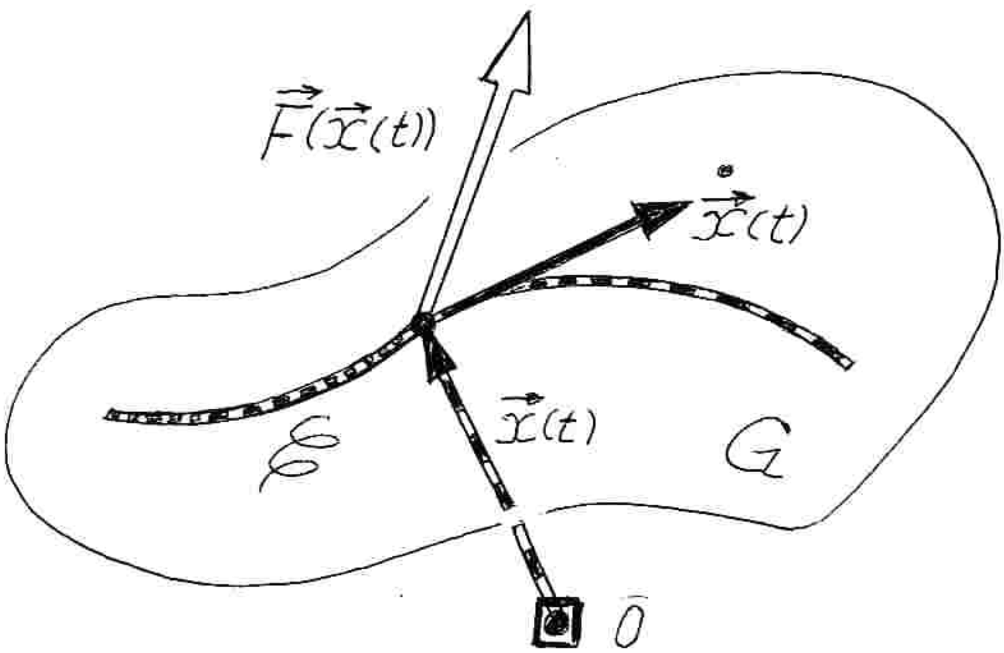
Kurvenintegrale (vgl. 14.4)

- $G \subseteq \mathbb{R}^3$ Gebiet
- $\vec{F}: G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (stetiges) Vektorfeld
- $\mathcal{C} \subseteq G$ Kurvenstück, parametrisiert durch: $\vec{x}: [a, b] \to G\,;\ t \mapsto \vec{x}(t)$

Das Kurvenintegral von $\vec{F}$ längs $\mathcal{C}$ wird gegeben durch

$$\int_{C} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, dt .$$

Skalarprodukt



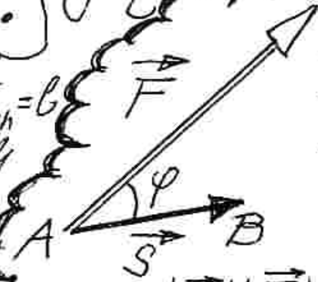
Physikalische Bedeutung (vgl. 14.4)

- $\vec{F}(\vec{x})$ = Kraftfeld
- $\mathscr{C}$ = Kurve, parametrisiert durch

$$\vec{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \vec{x}(t)$$

- W = Arbeit, die beim Durchlaufen von $\mathscr{C}$ geleistet wird.

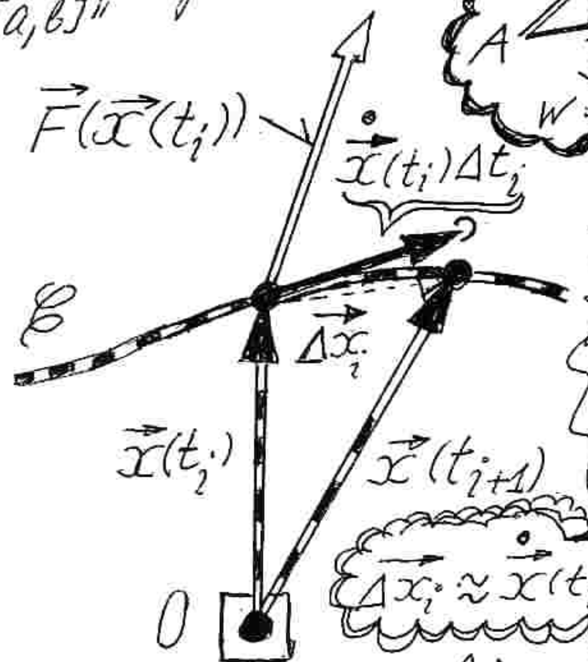
Physik: Arbeit beim Durchlaufen einer Strecke $\overline{AB}$ bei einwirken einer konstanten Kraft $\vec{F}$.



$$W = |\vec{s}||\vec{F}|\cos\varphi = \vec{s} \cdot \vec{F} = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$

"Unterteilung des Intervalls $[a,b]$"



ΔW_i := Arbeit welche auf der Strecke $\vec{x}(t_i)\,\vec{x}(t_{i+1})$ geleistet wird: $\approx \vec{F}(\vec{x}(t_i)) \cdot \Delta \vec{x}_i \approx$
$\approx \vec{F}(\vec{x}(t_i)) \cdot \dot{\vec{x}}(t_i) \Delta t_i$

$\vec{\Delta x_i} \approx \dot{\vec{x}}(t_i)\Delta t_i$

$$W = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\vec{x}(t_i)) \cdot \dot{\vec{x}}(t_i)\Delta t_i$$

$$\boxed{W = \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\,dt.}$$

"Arbeits-Integral längs $\mathscr{C}$"

TAG - NACHT
SOMMER - WINTER

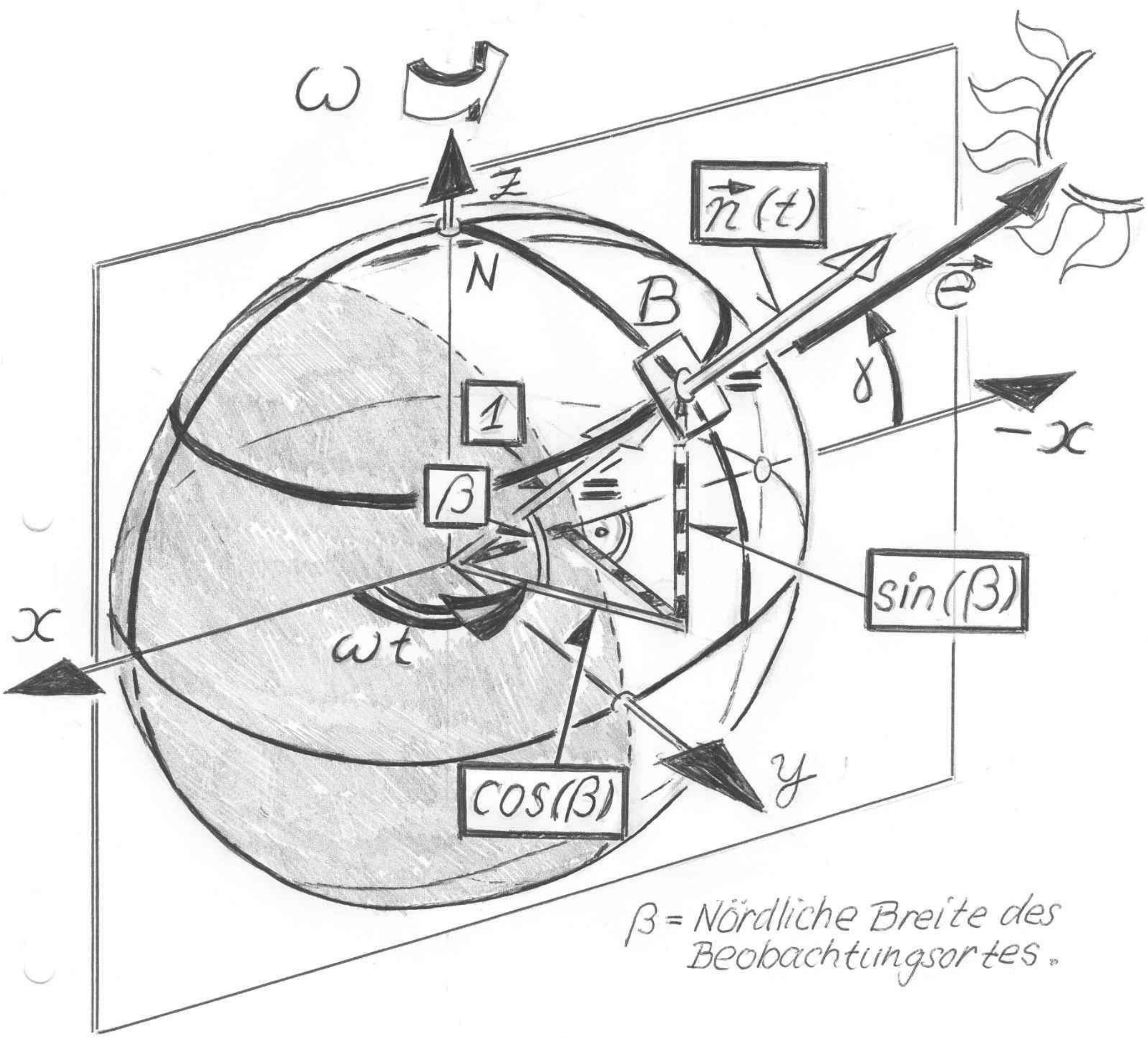
- Die Erde dreht sich um ihre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{24h} = \frac{\pi}{12} h^{-1}$.

- Die Erde umläuft die Sonne in einem Jahr. Die Erdachse behält dabei (≈) ihre Richtung. Die Ekliptik (= Bahn-Ebene der Erde) ist gegenüber dem Erd-Äquator um den Winkel $\delta \approx 23{,}45°$ geneigt. ("Schiefe der Ekliptik").

- Was bedeutet dies für die Einwohner der Stadt ~~X~~ die auf der geographischen Breite β liegt?

z.B.

$$\beta_{ZH} \approx 47°$$



β = Nördliche Breite des Beobachtungsortes.

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} -\cos(\gamma) \\ 0 \\ \sin(\gamma) \end{pmatrix} ; \quad \vec{n}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\omega t) \\ \cos(\beta)\sin(\omega t) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

$\vec{e}$ = Einheitsvektor in Richtung Sonne;

γ = Nördliche Breite der Sonne;

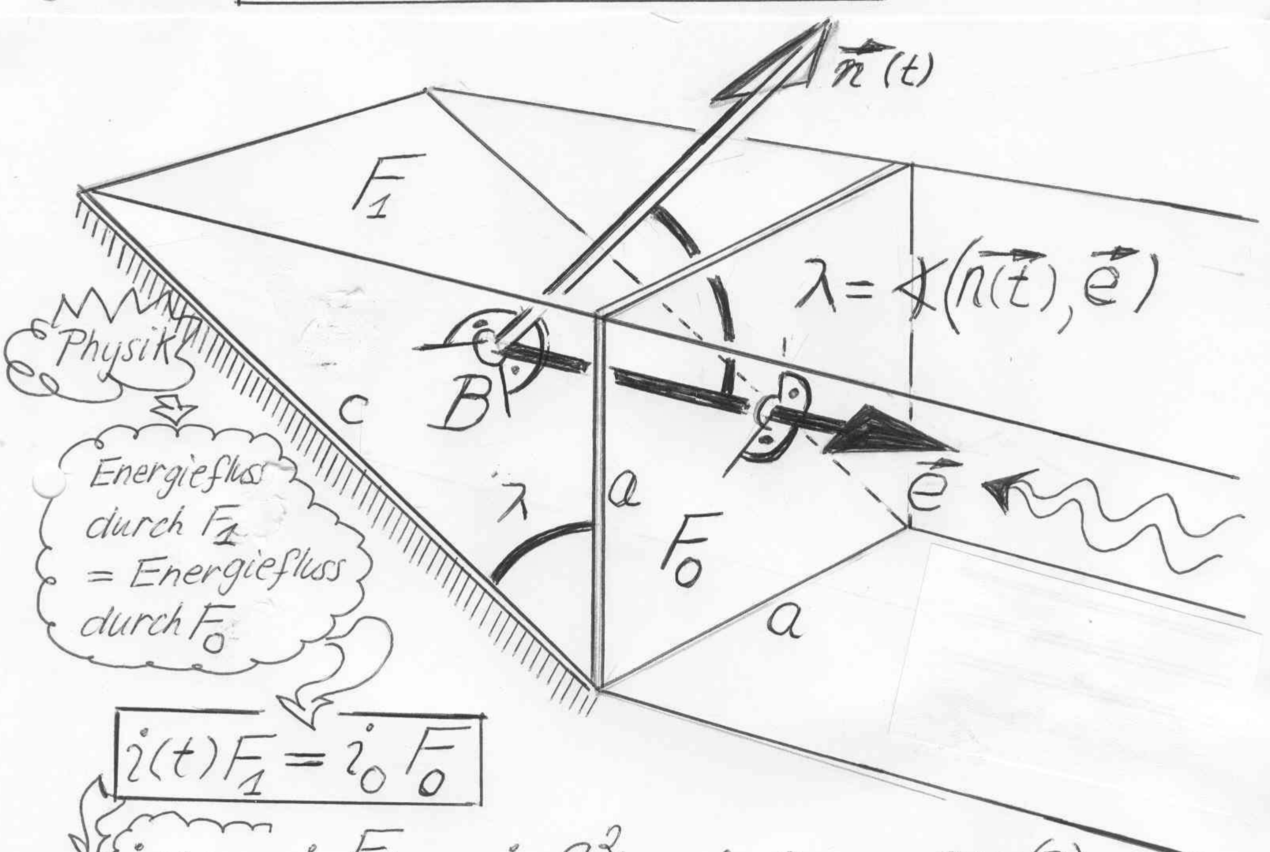
$\vec{n}(t)$ = Einheitsnormalenvektor am Beobachtungsort;

t = Tageszeit; N = Nordpol.

... $\boxed{\text{Strahlungsintensität}}$ ...

- i_0 = Einstrahlungsintensität der Sonne auf der Erde, senkrecht zur Einfallsrichtung ... $\left[\frac{W}{m^2}\right]$.
- $i(t)$ = Intensität der Sonneneinstrahlung am Beobachtungsort auf der Erdoberfläche:

$$\boxed{i(t) = i_0 \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{n(t)}, \vec{e}))}$$



$$\boxed{i(t) F_1 = i_0 F_0}$$

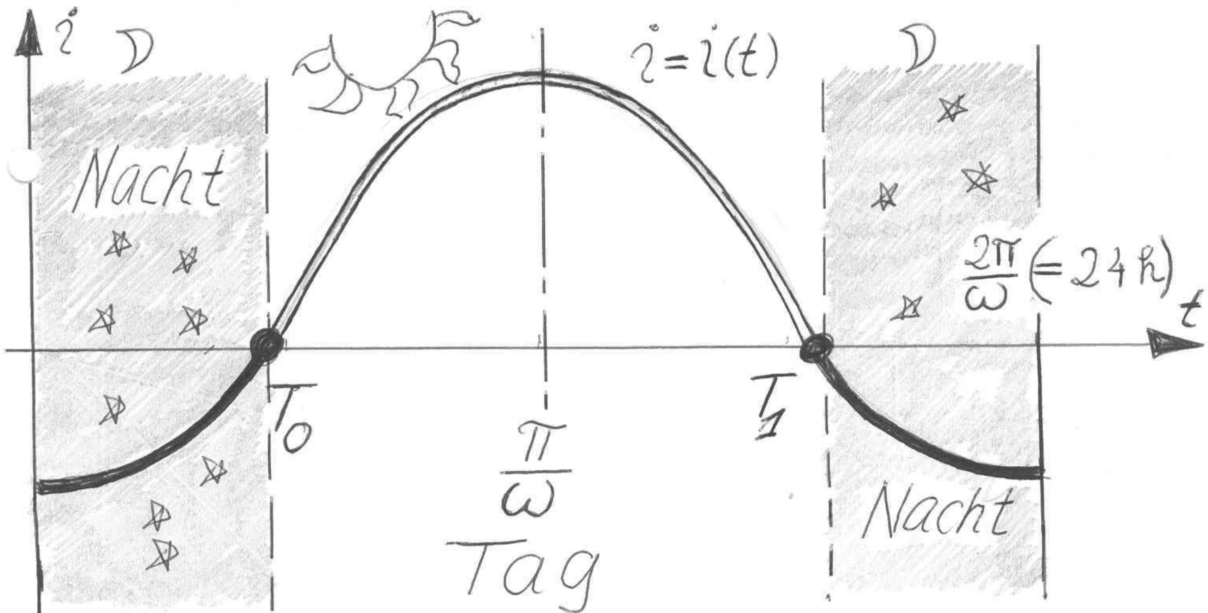
$$i(t) = i_0 \frac{F_0}{F_1} = i_0 \frac{a^2}{ca} = i_0 \frac{a}{c} = i_0 \frac{c\cos(\lambda)}{c} = i_0 \cos(\lambda);$$

$$i(t) = i_0 \cos(\lambda) = i_0 \underbrace{|\vec{n}(t)|}_{1} \underbrace{|\vec{e}|}_{1} \cos(\lambda) = i_0\, \vec{n}(t) \cdot \vec{e}$$

... und Tageslauf

$$\mathring{i}(t) = \mathring{i}_0 \, \vec{n}(t)\vec{e} = \mathring{i}_0 \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\omega t) \\ \cos(\beta)\sin(\omega t) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(\gamma) \\ 0 \\ \sin(\gamma) \end{pmatrix} \therefore$$

$$\boxed{\mathring{i}(t) = \mathring{i}_0 \left(-\cos(\beta)\cos(\gamma)\cos(\omega t) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\right)}$$



T_0: Sonnenaufgang $\therefore \mathring{i}(T_0) = 0;\ \mathring{i}'(T_0) > 0$

$\therefore -\cos(\beta)\cos(\gamma)\cos(\omega T_0) = \sin(\beta)\sin(\gamma)$

$\therefore \cos(\omega T_0) = \dfrac{\sin(\beta)\sin(\gamma)}{\cos(\beta)\cos(\gamma)} = \tan(\beta)\tan(\gamma)$

$\therefore \omega T_0 = \arccos(\tan(\beta)\tan(\gamma)) =: \varphi \therefore$

$$\boxed{\begin{aligned} & T_0 = \varphi/\omega \\ & T_1 = (2\pi - \varphi)/\omega \end{aligned} ;\ \varphi \doteq \arccos(\tan(\beta)\tan(\gamma))}$$

Sonnen-Aufgang und Untergang in ZH
(in astronomischer Sonnenzeit)

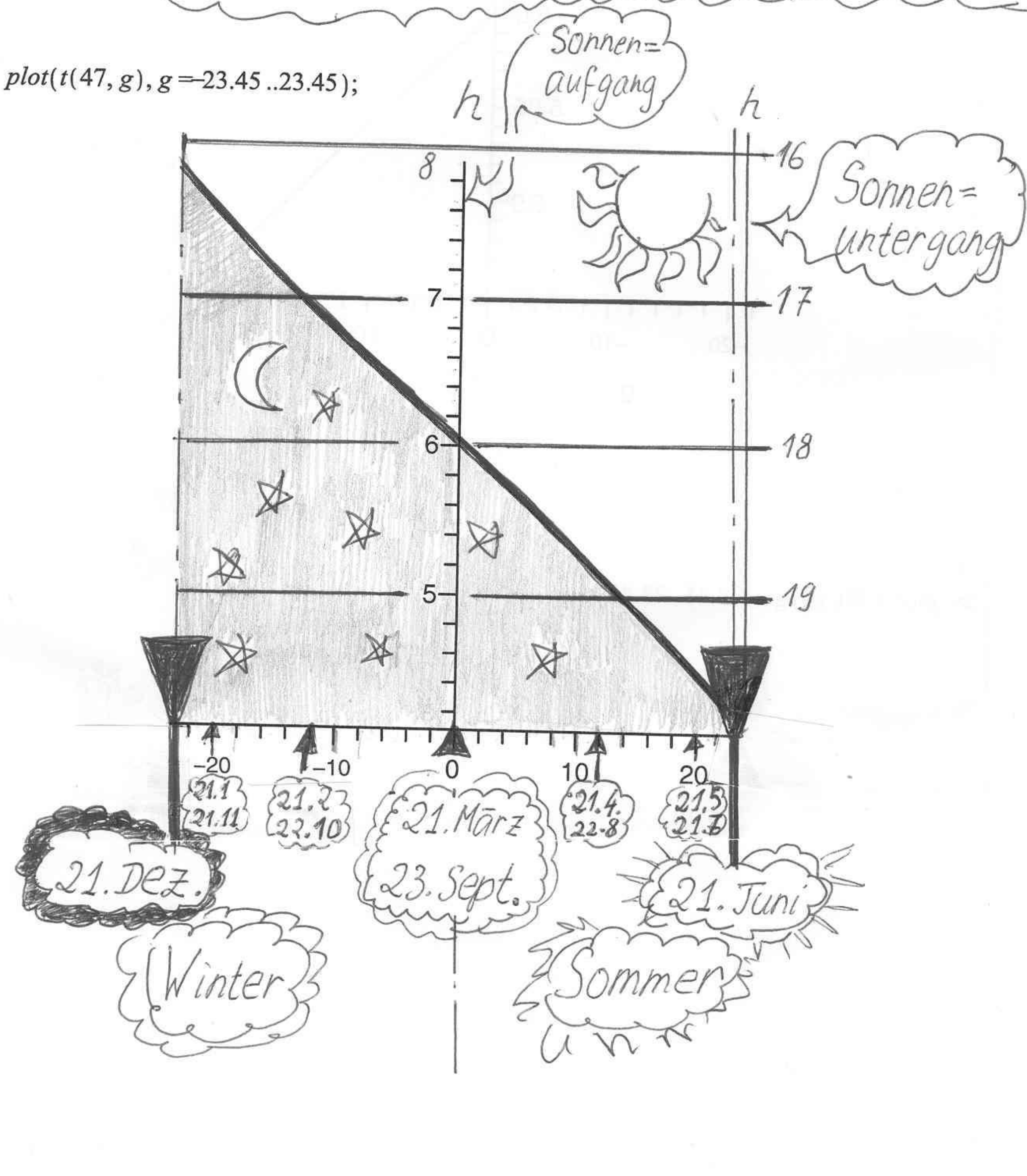
$\beta = 47^\circ$ ....

$$t(b,g) := \frac{\arccos\left(\tan\left(\frac{b\cdot\pi}{180}\right)\cdot\tan\left(\frac{g\cdot\pi}{180}\right)\right)\cdot 24}{2\cdot\pi};$$

vgl. MAT 182 67 IV₀

$$t := (b,g) \rightarrow \frac{12\arccos\left(\tan\left(\frac{1}{180}\,b\,\pi\right)\tan\left(\frac{1}{180}\,g\,\pi\right)\right)}{\pi} \quad (1)$$

$plot(t(47, g), g = -23.45 .. 23.45);$

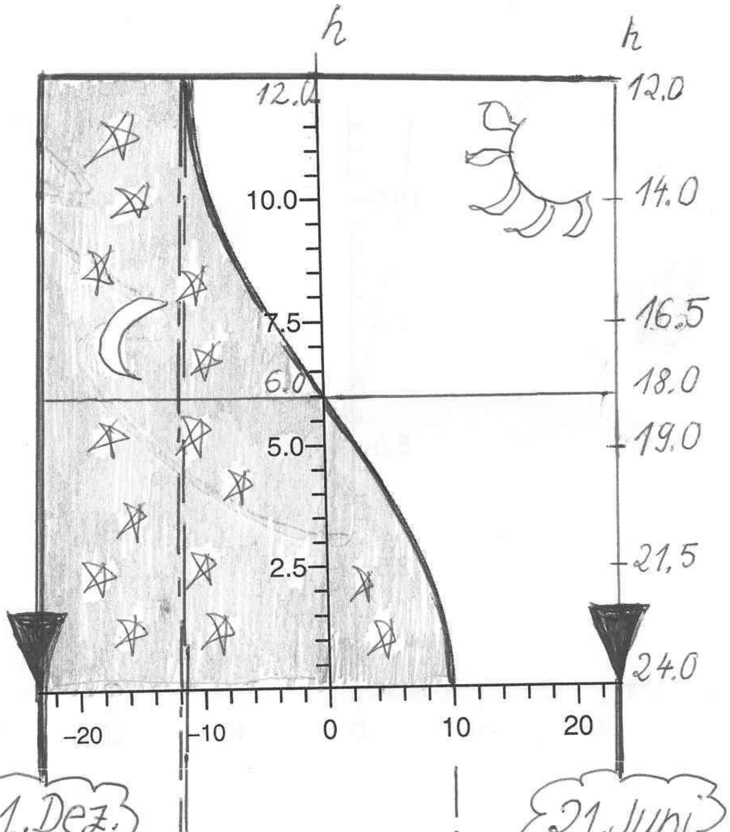


...

und auf Nordaustlandet-Spitzbergen

($\beta \simeq 80°$)

☆ NB: $80° > 90° - \delta (= 66.55°)$ = Breite des Nordpolarkreises.



Mittagsnacht
~ 20.10.-20.2

Mitternachtssonne
10.3 ~ 24.8

Tages-Einstrahlung ...

- Physik: Arbeit $= \int$ Leistung $\cdot\, dt$

- Während eines Tages eingestrahlte Energie pro Flächeneinheit:

$$E = E(\beta, \gamma) = \int_{T_0}^{T_1} i(t)\, dt \quad \overset{67^{IV}}{\star}$$

$$= \int_{T_0}^{T_1} i_0 \left(-\cos(\beta)\cos(\gamma)\cos(\omega t) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\right) dt =$$

$$= -i_0 \cos(\beta)\cos(\gamma) \int_{T_0}^{T_1} \cos(\omega t)\, dt + i_0 \sin(\beta)\sin(\gamma) \int_{T_0}^{T_1} dt =$$

$$= -i_0 \cos(\beta)\cos(\gamma) \frac{1}{\omega}\left(\sin(\omega T_1) - \sin(\omega T_0)\right) +$$

$$+ i_0 \sin(\beta)\sin(\gamma)(T_1 - T_0) \quad \overset{(67)^{IV}}{\boxed{\star\star}}$$

$$= -i_0 \cos(\beta)\cos(\gamma) \frac{1}{\omega}\left(\sin(2\pi - \varphi) - \sin(\varphi)\right)$$

$$+ i_0 \sin(\beta)\sin(\gamma) \frac{1}{\omega}(2\pi - 2\varphi) =$$

$$= -\frac{i_0}{\omega} \cos(\beta)\cos(\gamma)\left(-\sin(\varphi) - \sin(\varphi)\right) +$$

$$+ \frac{2 i_0}{\omega} \sin(\beta)\sin(\gamma)(\pi - \varphi) =$$

$$= \frac{2 i_0}{\omega}\left(\cos(\beta)\cos(\gamma)\sin(\varphi) + \sin(\beta)\sin(\gamma)(\pi - \varphi)\right)$$

... ⁝

...

$$\boxed{\begin{aligned} &✡\ E = \frac{2i_0}{\omega}\left(\cos(\beta)\cos(\gamma)\sin(\varphi) + \sin(\beta)\sin(\gamma)(\pi - \varphi)\right) \\ &✡\ \quad \varphi := \arccos(\tan(\beta)\tan(\gamma)) \end{aligned}}$$

$$E_{Sommer} = E_S : \gamma = \delta \mathrel{\hat{=}} 23{,}45^\circ \text{ (21. Juni)}$$

$$E_{Winter} = E_W : \gamma = -\delta \mathrel{\hat{=}} -23{,}45^\circ \text{ (21. Dez.)}$$

$$\varphi_S = \arccos(\tan(\beta)\tan(\delta))$$

$$\varphi_W = \arccos(\tan(\beta)\tan(-\delta)) \overset{\tan(-\delta) = -\tan(\delta)}{=\!=\!=\!=\!=}$$

$$= \arccos(-\tan(\beta)\tan(\delta)) \overset{\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)}{=\!=\!=\!=\!=}$$

$$= \pi - \varphi_S \quad \therefore \varphi_S = \pi - \varphi_W$$

$$\sin(\varphi_S) = \sin(\pi - \varphi_W) \overset{B}{=\!=} \sin(\varphi_W) \therefore \sin(\varphi_S) = \sin(\varphi_W)$$

$$\therefore E_S = \frac{2i_0}{\omega}\left(\cos(\beta)\cos(\delta)\sin(\varphi_S) + \sin(\beta)\sin(\delta)(\pi - \varphi_S)\right) =$$

$$= \frac{2i_0}{\omega}\left(\cos(\beta)\cos(-\delta)\sin(\varphi_W) - \sin(\beta)\sin(-\delta)(\pi - (\pi - \varphi_W))\right) =$$

$$= \frac{2i_0}{\omega}\left(\cos(\beta)\cos(-\delta)\sin(\varphi) + \sin(\beta)\sin(-\delta)(\pi - \varphi_W)\right) +$$

$$+ \frac{2i_0\pi}{\omega}\sin(\beta)\sin(\delta) = E_W + \frac{2i_0\pi}{\omega}\sin(\beta)\sin(\delta) \ \therefore$$

MAT182 (67 VIII)

$$\therefore \quad \boxed{E_S = E_W + \frac{2\pi i_0}{\omega}\sin(\beta)\sin(\delta)}$$

NB: $E_{tot} :\!= \frac{2\pi i_0}{\omega}$ = Während 24 h senkrecht zur Einfallsrichtung eingestrahlte Energie...

$$\therefore \quad \frac{E_S}{E_W} = 1 + \frac{2\pi i_0 \sin(\beta)\sin(\delta)}{E_W} \quad \therefore \; (67^{VII}) \; \therefore$$

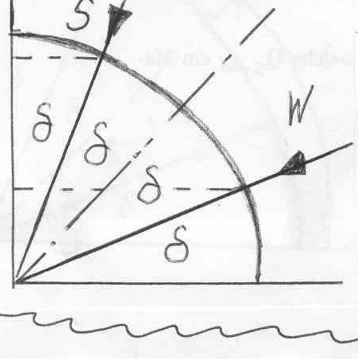
$$\therefore \quad \frac{E_S}{E_W} = 1 + \frac{\pi \sin(\beta)\sin(\delta)}{\cos(\beta)\cos(\delta)\sin(\varphi_W) - \sin(\beta)\sin(\delta)(\pi - \varphi_W)}$$

$$\varphi_W = \arccos(\tan(\beta)\tan(\delta))$$

$$\delta \mathrel{\hat=} 23{,}45^\circ$$

$$\left(\frac{E_S}{E_W}\right)_{ZH} \approx 4.48$$

NB: $\beta_{ZH} \approx 45^\circ \approx 2\delta$. $\left(\frac{\text{Tageslänge}_S}{\text{Tageslänge}_W}\right)_{ZH} = \left(\frac{T_S}{T_W}\right)_{ZH} \approx 2$



$$\frac{\cos(\delta)}{\cos(3\delta)} = \frac{\cos(\delta)}{\cos(90^\circ - \delta)} = \frac{\cos(\delta)}{\sin(\delta)} = \operatorname{cotan}(\delta)$$

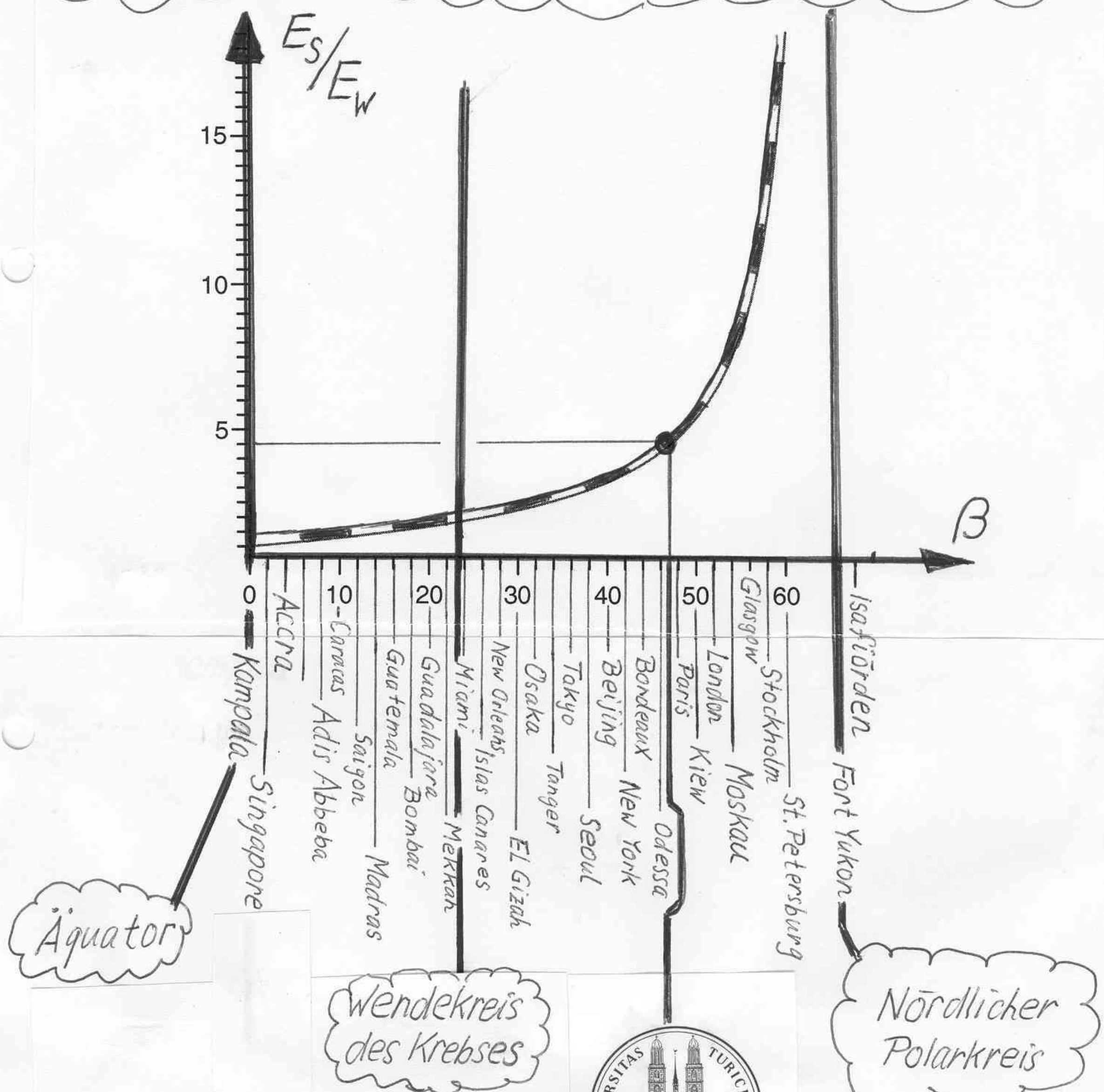
$$\left(\frac{E_S}{E_W}\right)_{ZH} \approx 2 \cdot \operatorname{cotan}(\delta) \approx 2 \cdot 2{,}4 = 4.8$$

MAT 182 (67^IIX)

Verhältnis $\left(E_S / E_W\right)_\beta$; $\beta = 0 \div (90^\circ - \delta)$

$$plot\left(i\left(b, 23.45, \arccos\left(\tan\left(\frac{47\cdot\pi}{180}\right)\cdot\tan\left(\frac{23.45\cdot\pi}{180}\right)\right)\right), b = 0\,..60\right);$$

vgl. MAT 182 (67^VII)



Unbeschränktes Wachstum

vgl. (15.3)

- $N(t)$ = Grösse der Population zur Zeit t.
- $N_0 = N(0)$ (gegeben)
- $\lambda > 0$ (gegeben)

$$\boxed{N'(t) = \lambda N(t)}$$

Exponentielles Wachstumsverhalten "unbeschränkte Ressourcen"

NB: $N'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t}$ = Wachstumsgeschwindigkeit.

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad \therefore \quad \frac{dN}{\lambda N} = dt \quad \therefore \quad \boxed{\int}$$

"TRICK"

$$\therefore \int \frac{dN}{\lambda N} = \int dt \quad \therefore \quad \int \frac{1}{N} dN = \lambda \int dt = \lambda t \quad \therefore \quad \ln N = \lambda t + C$$

$$\therefore \quad N = e^{\lambda t + C} = e^C e^{\lambda t} \overset{e^C =: K}{=} K e^{\lambda t}$$

$$\therefore \quad \boxed{N(t) = K e^{\lambda t}}$$

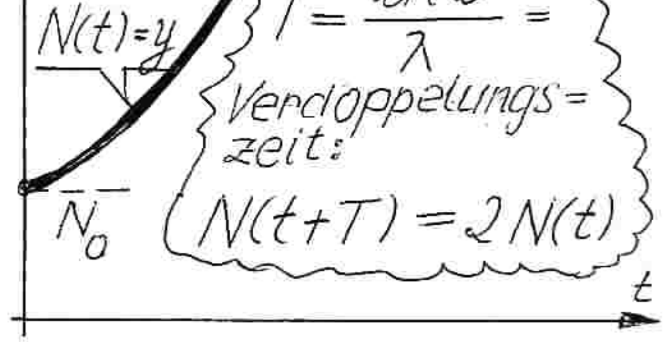
K bestimmen! $\therefore$ $N_0 = N(0) = K$ $\therefore$

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{\lambda t}}$$

exponentielle Wachstumsfunktion

(NB: $N'(t) = (N_0 e^{\lambda t})' = \lambda N_0 e^{\lambda t} = \lambda N_0(t)$) Kontrolle durch Ableiten

Population wächst immer scheller unbegrenzt weiter



$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$ = Verdoppelungs= zeit:

$N(t+T) = 2N(t)$

Einfach Beschränktes Wachstum (vgl. 15.3)

- $N(t)$ = Grösse der Population zur Zeit t
- $N_0 = N(0)$ (gegeben); • $\lambda, B > 0$ (gegeben).

$$\boxed{N'(t) = \lambda(B - N(t))}$$

Einfach beschränktes Wachstumsverhalten. "Population strikt beschränkt"

$\frac{dN}{dt} = \lambda(B-N)$ $\therefore$ $\frac{dN}{\lambda(B-N)} = dt$ $\therefore$ $\int$ "TRICK"

$\therefore \int \frac{dN}{\lambda(B-N)} = \int dt \therefore \int \frac{1}{B-N}\,dt = \lambda \int dt = \lambda t \therefore$ $\left(\int \frac{dt}{B-N} = -\ln(B-N)\right)$

$\therefore -\ln(B-N) = \lambda t + C \therefore \ln(B-N) = -\lambda t + C \therefore B - N = e^{-\lambda t + C} \therefore$

$\therefore N = B - e^{-\lambda t + C} = B - Ke^{-\lambda t}$

$\therefore \boxed{N(t) = B - Ke^{-\lambda t}}$ K bestimmen! : $N_0 = N(0) = B - K \therefore$

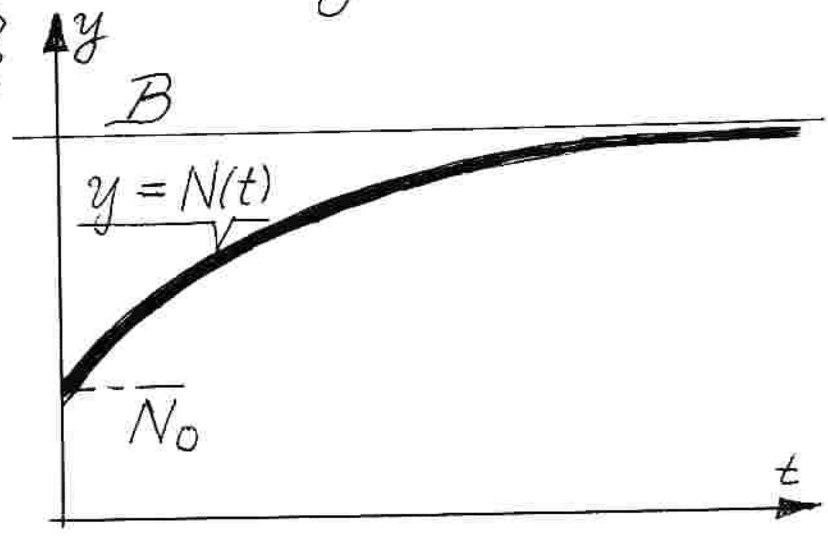
$$\boxed{N(t) = B - (B - N_0)e^{-\lambda t}}$$

einfach beschränkte Wachstumsfunktion

(NB: $N'(t) = \left(B - (B-N_0)e^{-\lambda t}\right)' = \lambda(B-N_0)e^{-\lambda t} =$
$= \lambda\left(B - \left(B - (B-N_0)e^{-\lambda t}\right)\right) = \lambda(B - N(t)))$ Kontrolle durch Ableiten

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty}\left(B - (B-N_0)\underbrace{e^{-\lambda t}}_{\to 0}\right) = B$$

B = Endgrösse der Population!



Logistisches Wachstum (vgl. 15.3/16.12)

- $N(t)$ = Grösse der Population zur Zeit t.
- $N_0 = N(0)$
- $N'(t)$ = Wachstumsgeschwindigkeit.
- $\lambda, B > 0$

$$\boxed{N'(t) = \lambda N(t)(B - N(t))}$$

Logistisches Wachstumsverhalten

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(B-N) \therefore \frac{dN}{\lambda N(B-N)} = dt \therefore \left| \int \right.$$

$$\therefore \int \frac{dN}{\lambda N(B-N)} = \int dt \therefore \int \frac{1}{N(B-N)}\, dN = \lambda \int dt = \lambda t.$$

$$\underline{\underline{NB}}: \frac{1}{N(B-N)} = \frac{1}{B} \frac{(B-N)+N}{N(B-N)} = \frac{1}{B}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{B-N}\right).$$

$$\therefore \frac{1}{B}\int\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{B-N}\right) dN = \lambda t \therefore \left\{\int \frac{1}{N}\, dN = \ln N, \int \frac{1}{N-B}\, dN = \dots\right\} \therefore$$

$$\therefore \frac{1}{B}\left(\ln N - \ln(B-N)\right) = \lambda t + C \therefore \left\{\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b\right\} \therefore$$

$$\therefore \ln \frac{N}{B-N} = \lambda B t + C \therefore \frac{N}{B-N} = e^{\lambda B t + C} \therefore$$

$$\therefore N = Be^{\lambda B t + C} - Ne^{\lambda B t + C} \therefore N(1 + e^{\lambda B t + C}) = Be^{\lambda B t + C} \therefore$$

$$\therefore N = \frac{Be^{\lambda B t + C}}{1 + e^{\lambda B t + C}} = \frac{Be^{C} e^{\lambda B t}}{1 + e^{C} e^{\lambda B t}} \overset{e^C = K}{=} \frac{BKe^{\lambda B t}}{1 + Ke^{\lambda B t}} =$$

$$= \frac{B}{\frac{1 + Ke^{\lambda B t}}{Ke^{\lambda B t}}} = \frac{B}{\frac{1}{K} e^{-\lambda B t} + 1} \overset{1/K = L}{=} \frac{B}{1 + Le^{-\lambda B t}}.$$

$$\therefore \boxed{N(t) = \frac{B}{1+Le^{-\lambda Bt}}}$$ {L bestimmen!} :

$$N_0 = N(0) = \frac{B}{1+L} \therefore (1+L)N_0 = B \therefore L = \frac{B-N_0}{N_0}$$

$$\therefore N(t) = \frac{B}{1+\frac{B-N_0}{N_0}e^{-\lambda Bt}}$$ $\therefore$ {Umformen des Doppelbruchs} :

$$\boxed{N(t) = \frac{BN_0}{N_0+(B-N_0)e^{-\lambda Bt}}}$$ {logistische Wachstums-funktion.}

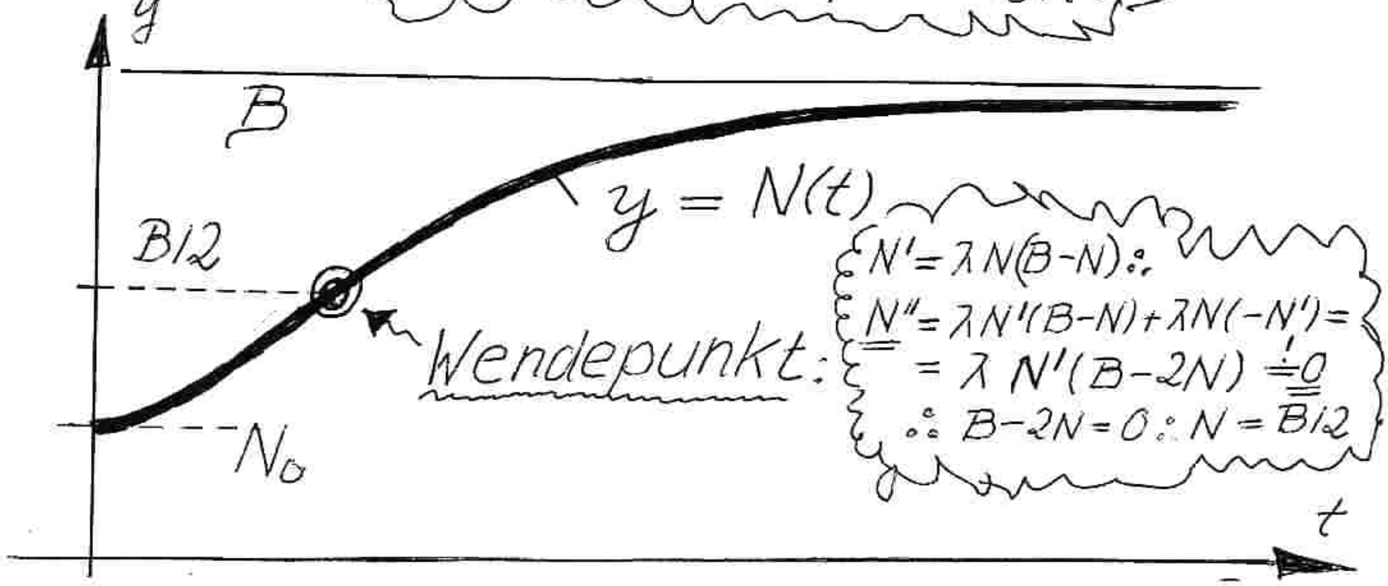
$$\left(NB:\ N'(t) = \left(\frac{BN_0}{N_0+(B-N_0)e^{-\lambda Bt}}\right)' = \frac{-BN_0\,(B-N_0)(-\lambda B)e^{-\lambda Bt}}{(N_0+(B-N_0)e^{-\lambda Bt})^2} =\right.$$

$$= \lambda\,\frac{BN_0}{N_0+(B-N_0)e^{-\lambda Bt}}\;\frac{B(N_0+(B-N_0)e^{-\lambda Bt})-BN_0}{N_0+(B-N_0)e^{-\lambda Bt}} =$$

$$\left. = \lambda\,N(t)\,(B-N(t))\right)$$ {Kontrolle durch Ableiten}

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{BN_0}{N_0+(B-N_0)\underbrace{e^{-\lambda Bt}}_{\to 0}} = \frac{BN_0}{N_0} = B$$

{B = Endgrösse der Population!}



{$N' = \lambda N(B-N) \therefore$
$\underline{N''} = \lambda N'(B-N) + \lambda N(-N') =$
$= \lambda N'(B-2N) \overset{!}{=} 0$
$\therefore B-2N = 0 \therefore N = B/2$}

Explizite Differentialgleichung erster Ordnung

(vgl. 15.4)

- $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (stetige) Funktion in zwei Variablen.

Gesucht: Gesamtheit aller diff'baren Funktionen $y = y(x)$ so, dass

$$\star \quad y' = F(x, y).$$

"explizit": y' direkt durch x und y ausgedrückt.

"erster Ordnung": Es kommen höchstens erste Ableitungen vor.

"Lösung der Dgl. $\star$": Funktion $y = y(x)$ welche der Gleichung $\star$ genügt.

Spezialfälle: $\star\ y' = F(x)$

$\star\ y' = F(y)$

Beispiele von Dgln.

- $y' = \lambda y \; ; (\lambda \in \mathbb{R})$.

  Mit $N(t)$ statt $y(x)$: Gleichung für unbeschränktes Wachstum
  (vgl. MAT 182 (68))

- $y' = \lambda (B - y) ; (\lambda, B > 0)$.

  Mit $N(t)$ statt $y(x)$: Gleichung für einfach beschränktes Wachstum
  (vgl. MAT 182 (69))

- $y' = \lambda y (B - y) ; (\lambda, B > 0)$.

  Mit $N(t)$ statt $y(x)$: Gleichung für logistisches Wachstum
  (vgl. MAT 182 (70))

Wir haben – in anderen Bezeichnungen – die obigen Differentialgleichungen bereits gelöst.

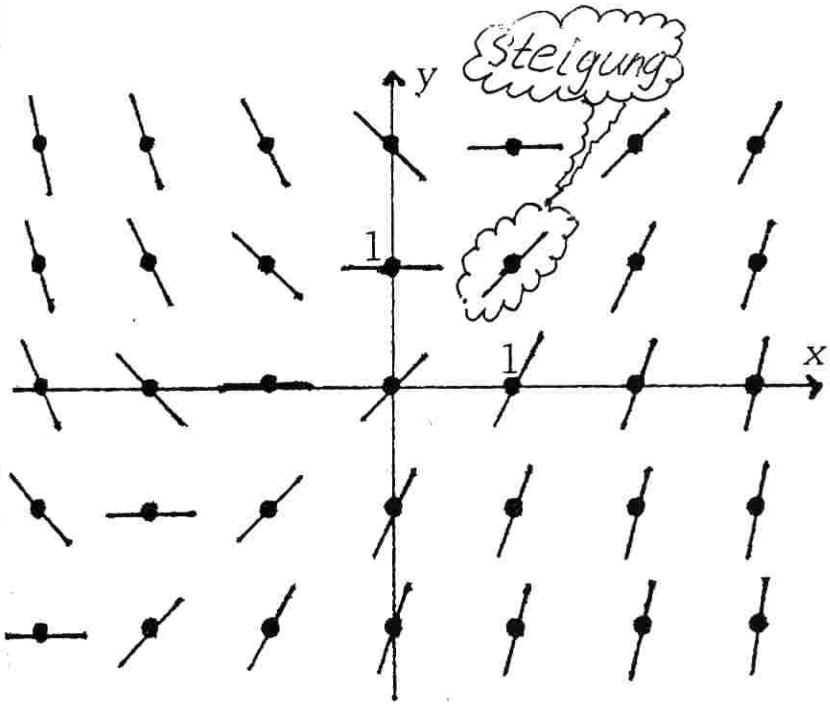
Können wir noch weitere Differentialgleichungen lösen?

Richtungsfeld zu einer Dgl. (vgl. 16.3)

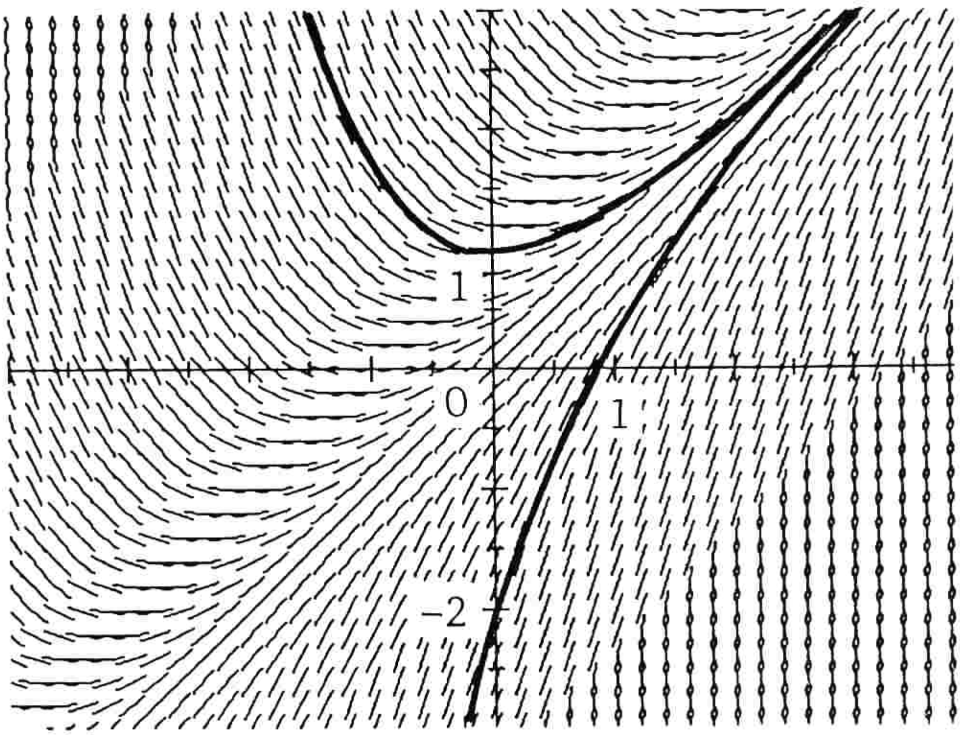
- $y' = F(x,y)$:

F(x,y) = Steigung der Lösungskurve die durch (x,y) läuft an der Stelle (x,y)

- **Richtungsfeld:** In (x,y) wird kleine Strecke mit Steigung F(x,y) eingetragen.



- **Lösungen:** ≙ Kurven, die dem Richtungsfeld folgen



Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung (vgl 16.4)

$$\boxed{y' = p(x)\,y + q(x)}$$

Homogener Fall: $q(x) = 0$ $\therefore$ $y' = p(x)\,y$

Lösung (homogen): $\boxed{y = K e^{\int p(x)\,dx}}$ K = Konstante

Im inhomogenen Fall $(q(x) \neq 0)$:

Variation der Konstanten! $K \mapsto K(x)$

- Ansatz: $y = K(x)e^{P(x)}$, $(P(x) = \int p(x)\,dx)$

$\therefore$ $y'(x) = K'(x)e^{P(x)} + K(x)P'(x)e^{P(x)} =$

$= K'(x)e^{P(x)} + p(x)K(x)e^{P(x)} =$

$= K'(x)e^{P(x)} + p(x)\,y(x).$

$\therefore$ $y'(x) = K'(x)e^{P(x)} + p(x)\,y(x)$ $\therefore$

$\therefore$ $K'(x)e^{P(x)} + p(x)\,y(x) = p(x)\,y(x) + q(x)$ $\therefore$

$\therefore$ $K'(x)\,e^{P(x)} = q(x)$ $\therefore$

$\therefore$ $K'(x) = q(x)e^{-P(x)}$ $\therefore$ $K(x) = \int q(x)e^{-P(x)}dx$ $\therefore$

$\therefore$ $$\boxed{y(x) = \left(\int q(x)e^{-P(x)}dx\right)e^{P(x)}}$$

Lösen der linearen Dgl. erster Ordnung: Zusammenfassung

(vgl. 16.5)

✹ Zu lösen: $y' = p(x)\,y + q(x)$

Vorgehen:

- Löse zuerst die zugehörige homogene Dgl. erster Ordnung, nämlich

  ◉ $y' = p(x)\,y$!

- Lösung: $\underline{y = Ke^{P(x)}}$, $(K \in \mathbb{R},\ P(x) = \int p(x)\,dx)$.

- Mache Ansatz "Variation der Konstanten":

  • $y = K(x)\,e^{P(x)}$!

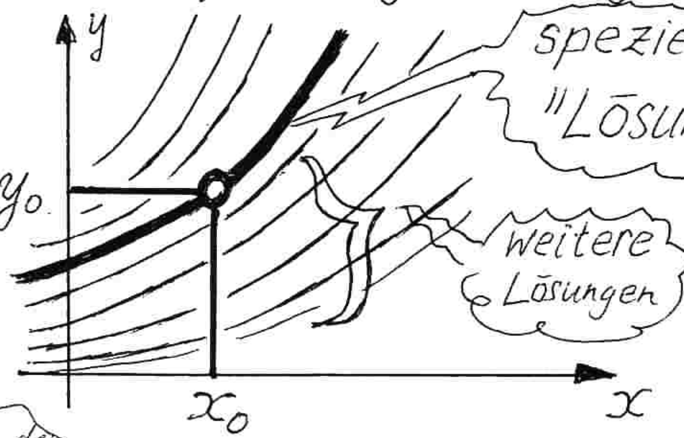
- Setze • in ✹ ein!
- Dies führt zu einer Dgl. für $K(x)$!
- Löse diese neue Dgl. nach $K(x)$ auf!
- Setze gefundene Lösung für $K(x)$ in ◉ ein. ⟹ **Lösung** von ✹

Allgemeine und spezielle Lösungen (vgl. 16.7)

"Allgemeine Lösung" $\hat{=}$ Gesamtheit aller Lösungen der Dgl.

"Spezielle Lösung" $\hat{=}$ einzelne Lösung

Eine spezielle Lösung der Dgl. $y' = p(x)y + q(x)$ ist festgelegt durch eine "Anfangsbedingung" $y(x_0) = y_0$



Lösung der inhomogenen Gleichung

Form der allgemeinen Lösung von $y' = p(x)y + q(x)$:

Lösung der homogenen Gleichung

$$\boxed{y = y_i + C y_h},$$ wobei: C = bel. Konstante

y_i = spezielle Lösung von $y' = p(x)y + q(x)$;

y_h = " " " $y' = p(x)y$; $y_h \neq 0$

Separation der Variablen (vgl. 16.9)

$$y' = r(x)s(y)\,;$$ d.h. $\begin{cases} y' = F(x,y) \text{ mit} \\ F(x,y) = r(x)s(y) \end{cases}$.

Lösungsmethode (vgl. MAT 182 68–70)

$$\frac{dy}{dx} = r(x)s(y)$$ ⁘ Umformen: $\begin{cases} y \text{ links von } "=" \\ x \text{ rechts von } "=" \end{cases}$ "Separation"

$$\frac{dy}{s(y)} = r(x)\,dx$$ ⁘ $\left|\int\right.$: beidseitig integrieren

$$\int \frac{dy}{s(y)} = \int r(x)\,dx + C$$ ⁘ Stammfkt. suchen

$$\boxed{S(y) = R(x) + C\,;}$$ $S(y)$ = Stfkt. von $\frac{1}{s(x)}$. $R(x)$ = Stfkt. von $r(x)$.

Man löst (wenn möglich) die Gleichung nach y auf!
Dies liefert $y = y(x)$, (Lösung von).

Singuläre Lösungen (vgl 16. 10. 4)

- Singuläre Lösungen der Dgl $y' = r(x)s(y)$ können auftreten, wenn die Funktion $s(y)$ nicht linear ist. Diese Lösungen sind nicht in der durch ✡ (MAT 182 (78)) bestimmten Lösungsschar enthalten. Es handelt sich um konstante Funktionen y mit $s(y) = 0$.

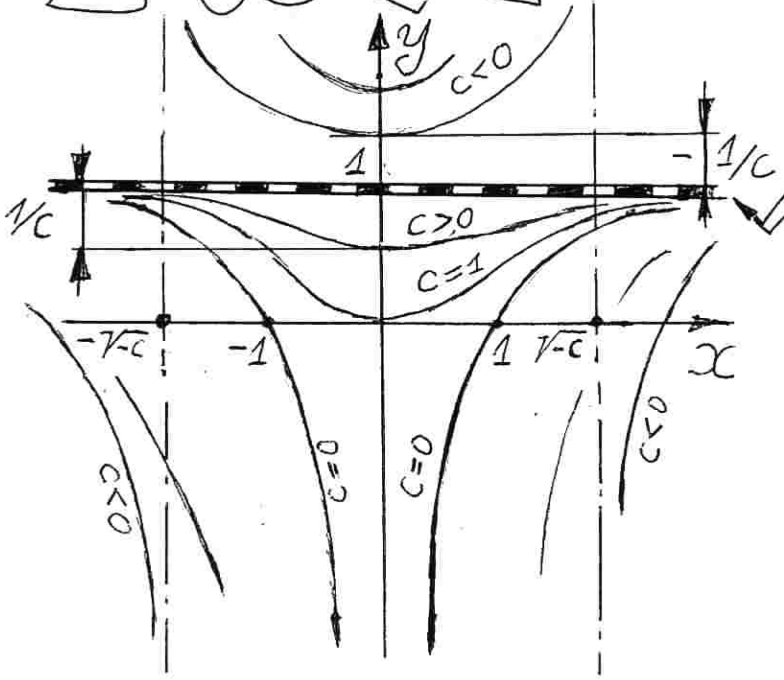
- Beispiel: $y' = 2x(y-1)^2 \therefore \frac{dy}{dx} = 2x(y-1)^2$

$$\therefore \frac{dy}{(y-1)^2} = 2x\,dx \therefore \int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

$$\therefore -\frac{1}{y-1} = x^2 + C \therefore \boxed{y = 1 - \frac{1}{x^2+C} \quad \text{(Allgemeine Lösung)}}$$

✡ $y \equiv 1$: Singuläre Lösung

Für keine Wahl von c erscheint $y \equiv 1$!!!



Singuläre Lösung $y \equiv 1$ $\hat{=}$ "Grenzkurve der allgemeinen Lösungsschar für $c \longrightarrow \pm\infty$"

Umkehrfunktionen (vgl. 17.3)

- $f: D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv, d.h.

$$\boxed{x_1, x_2 \in D(f): x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$$

- $W(f) := \{ f(x) \mid x \in D(f) \}$ = Wertebereich von f.

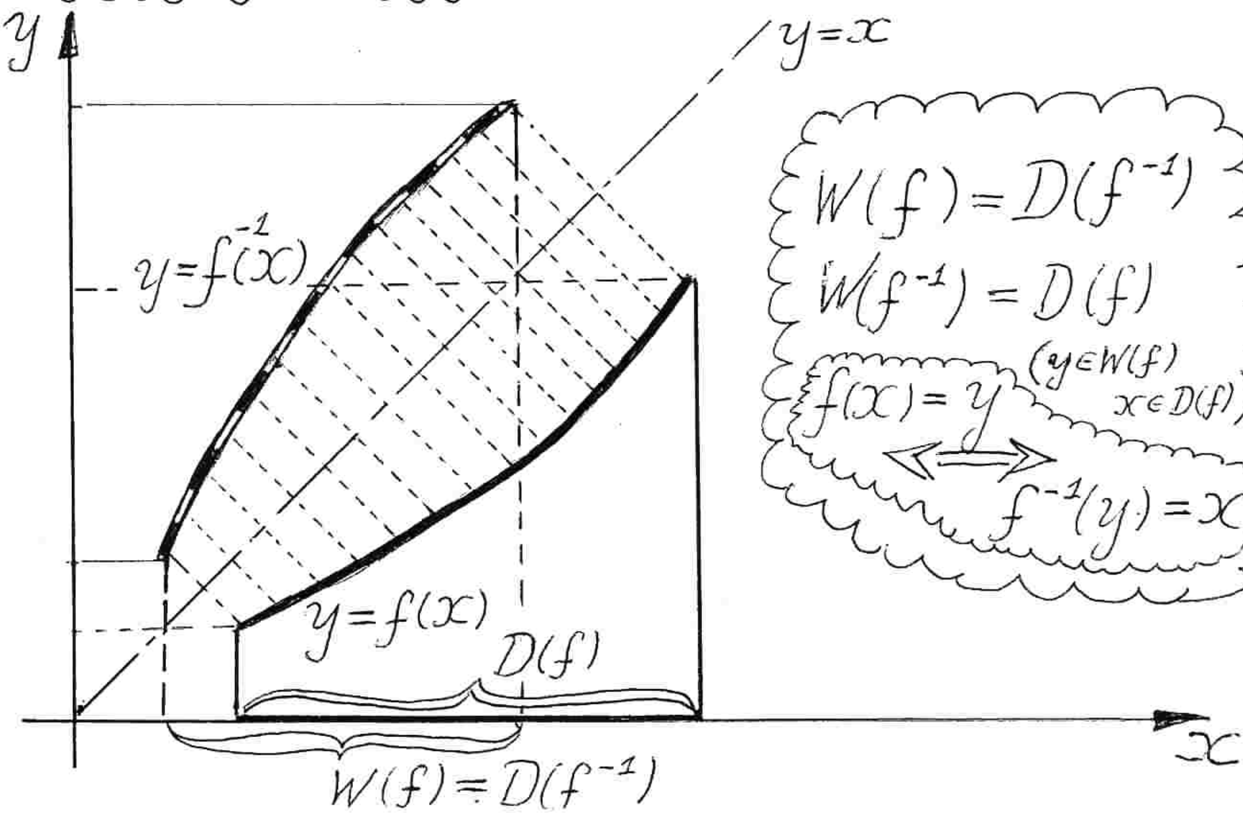
$f^{-1}: W(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ = Umkehrfunktion von f.

$f^{-1}(f(x)) = x, \ (\forall x \in D(f))$.

$f(f^{-1}(y)) = y, \ (\forall y \in W(f))$.

Definierende Eigenschaften von f^{-1} !!

Der Graph von f^{-1} entsteht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Geraden $x = y$



$W(f) = D(f^{-1})$

$W(f^{-1}) = D(f)$

$f(x) = y \quad (y \in W(f), x \in D(f))$

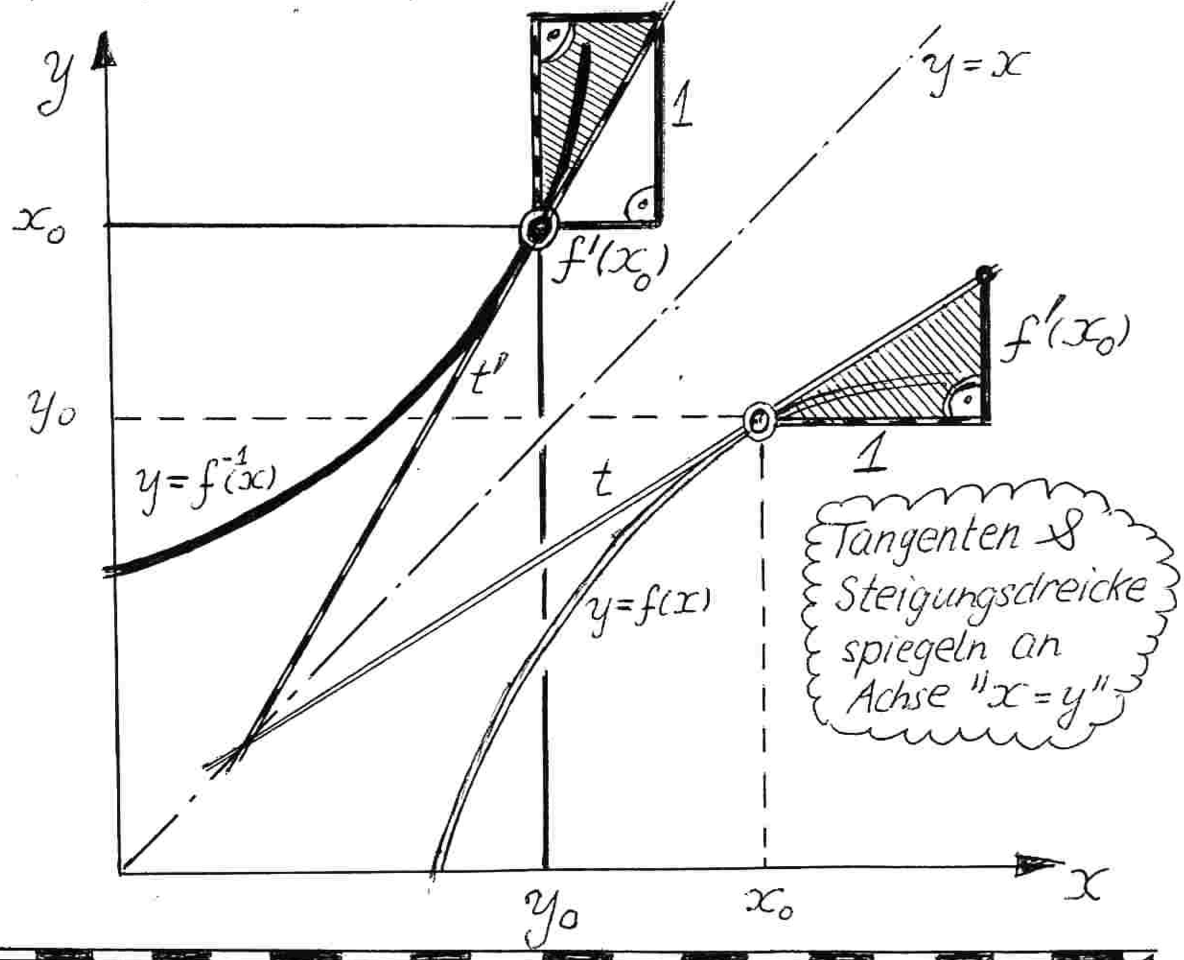
$\Longleftrightarrow$

$f^{-1}(y) = x$

Ableitung der Umkehrfunktion (vgl 17.4)

- $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv und diff'bar.
- $y_0 = f(x_0)$; $f'(x_0) \neq 0$. NB: $x_0 = f^{-1}(y_0)$

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.}$$

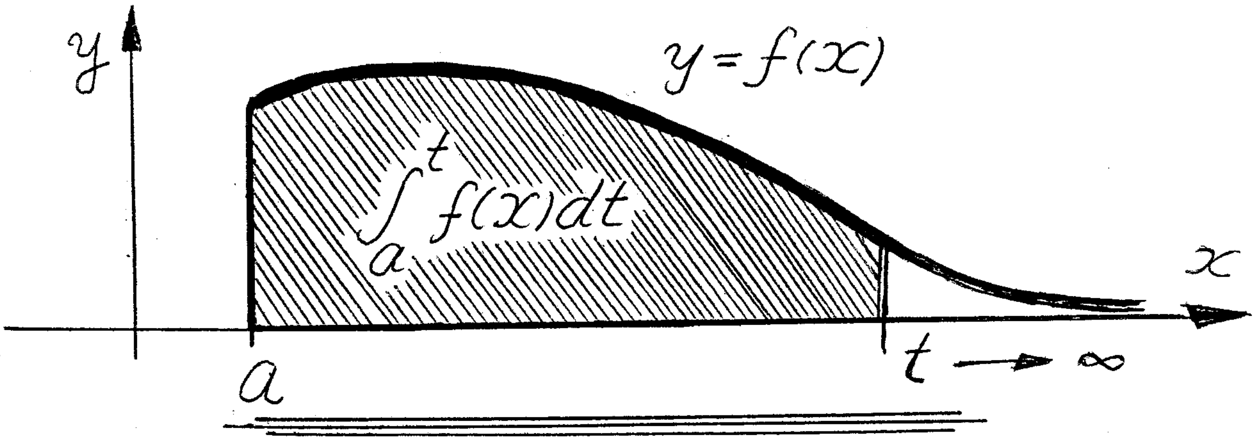


$$\boxed{\forall \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \; ; \begin{pmatrix} x \in W(f) \\ f'(f^{-1}(x)) \neq 0 \end{pmatrix}}$$

Uneigentliche Integrale zweiter Art (vgl. 20.2)

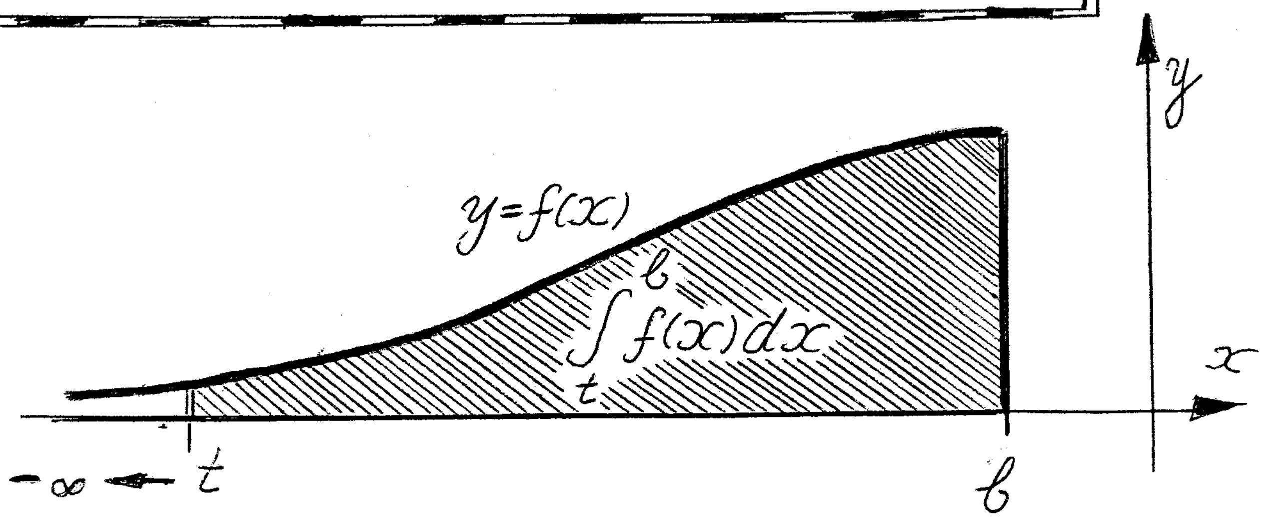
- $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx}$$



- $f : (-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx}$$



$\boxed{\ldots \text{ Fortsetzung}}$ (vgl. (20.2))

- $f : (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx,}$$

falls beide Integrale auf der rechten Seite existieren.

Beispiel:

$$\underline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

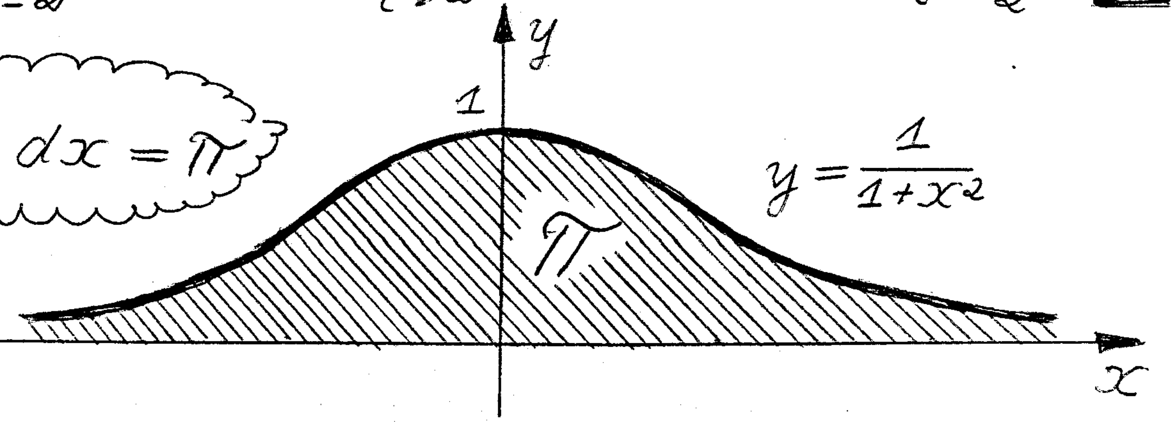
$$= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left(\arctan x \Big|_{t}^{0} \right) + \lim_{t\to\infty} \left(\arctan x \Big|_{0}^{t} \right) =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (0 - \arctan(t)) + \lim_{t\to\infty} (\arctan(t) - 1) =$$

$$= -\lim_{t\to-\infty} \arctan(t) + \lim_{t\to\infty} \arctan(t) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$



Beispiel

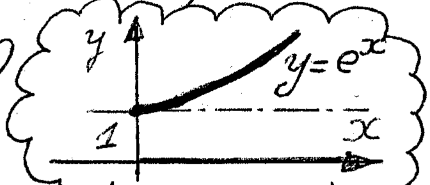
$$\underbrace{\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx}_{\stackrel{..}{=}\, I_n} = \;? \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

- **Vorbereitungen:** $(n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \cdots\};\ n! = 1 \cdot 2 \cdots n)$

A) $\forall x \geq 0 : \dfrac{x^n}{n!} \leq e^x$

Beweis: (Induktion nach n) $n = 0$: $x^n = x^0 = 1$; $n! = 0! = 1$

$\therefore \dfrac{x^n}{n!} \overset{(n=0)}{=\!=} \dfrac{1}{1} \leq e^x$ für alle $x \geq 0$



$n > 0$: Nach Induktionsvoraussetzung:

(*) $\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} \leq e^x$ für alle $x \geq 0$.

Sei $f_n(x) := e^x - \dfrac{x^n}{n!}$. Zu zeigen: $f_n(x) \geq 0$ für $x \geq 0$

a) $f_n(0) = e^0 - \dfrac{0^n}{0!} = 1 - 0 > 0.$

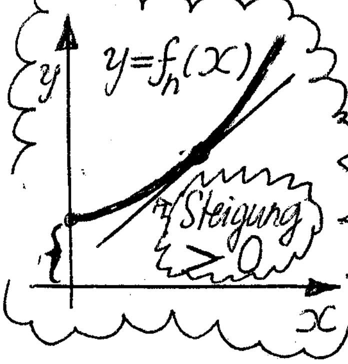
b) $f_n'(x) = \left(e^x - \dfrac{x^n}{n!}\right)' = e^x - \dfrac{n x^{n-1}}{n!} =$

$= e^x - \dfrac{n x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) n} = e^x - \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$= f_{n-1}(x) \geq 0,\ \forall x \geq 0$ (siehe (*))

$\therefore$ f_n wächst monoton auf $[1, \infty)$.

$\Rightarrow$ A)



... Fortsetzung

B) $\lim\limits_{t\to\infty} t^n e^{-t} = 0$

Beweis: Für alle $t>0$ gilt:

$$0 < t^n e^{-t} = \frac{t^n}{e^t} = (n+1)!\,\frac{1}{t}\,\underbrace{\frac{\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}}{e^t}}_{\overset{\text{A)}}{<} 1} < \underbrace{(n+1)!\,\frac{1}{t}}_{\xrightarrow{(t\to\infty)}\,0} \qquad \blacksquare$$

$$\underline{I_0} = \int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-t}-(-e^0)\right) = -\lim_{t\to\infty} e^{-t}+1 = \underline{1}$$

$n>0$: $$\underline{I_n} = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^n \underbrace{e^{-x}}_{(-e^{-x})'}dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(x^n(-e^{-x})\Big|_0^t - \int_0^t n x^{n-1}(-e^{-x})dx\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-x^n e^{-x}\Big|_0^t + n\int_0^t x^{n-1}e^{-x}dx\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-t^n e^{-t}-0\right) + n\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^{n-1}e^{-x}dx =$$

$$= -\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} + nI_{n-1} \overset{\text{B)}}{=} -0+nI_{n-1} = \underline{nI_{n-1}}$$

- $I_0 = 1$;
- $I_n = nI_{n-1}$, $(n>0)$.

$$\boxed{I_n = n!}$$

Beispiel:

MAT 182 (86)

Parabolische Entweichgeschwindigkeit

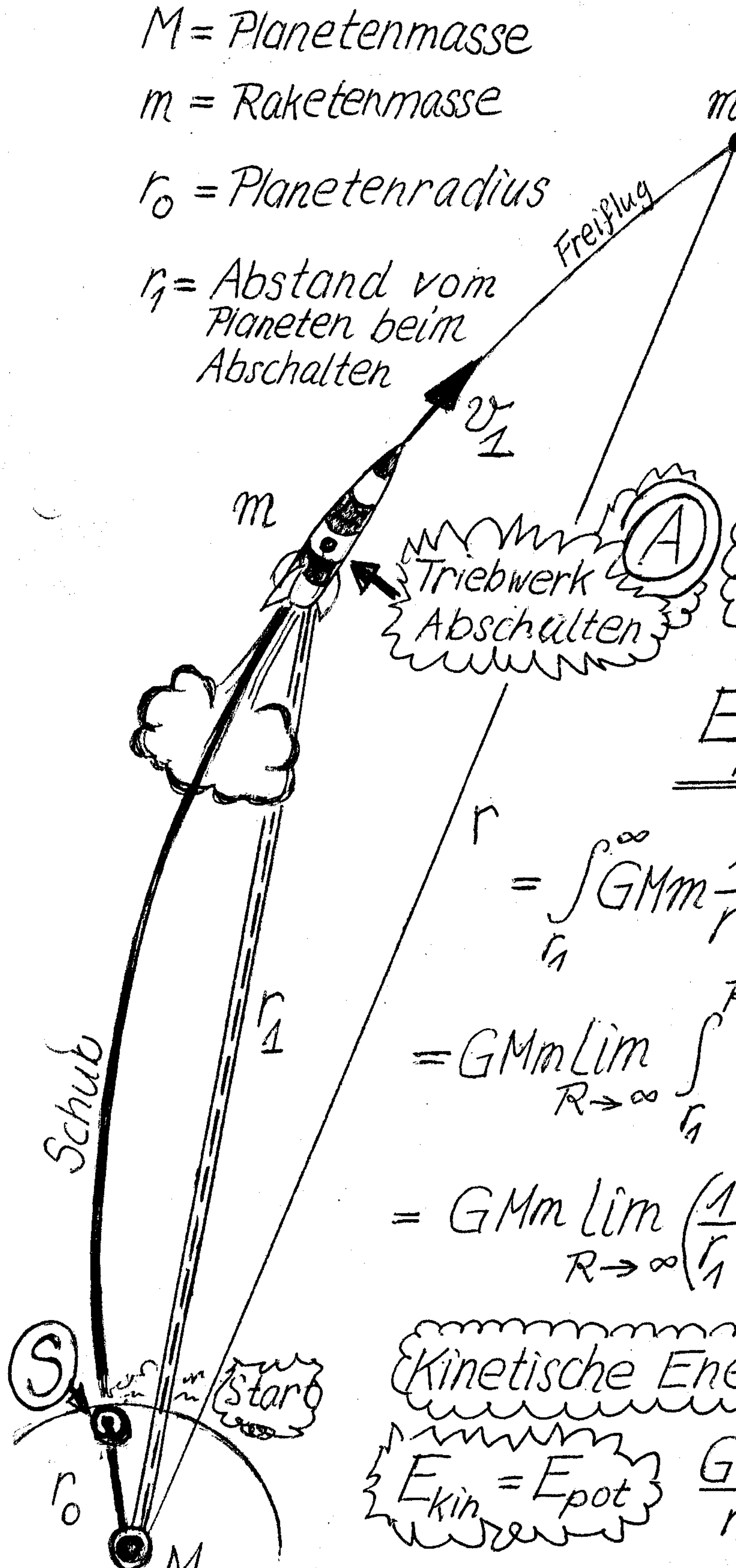
M = Planetenmasse

m = Raketenmasse

r_0 = Planetenradius

r_1 = Abstand vom Planeten beim Abschalten

g = Schwere=beschleunigung in S.



Gravitationskraft im Abstand r

$$F(r) = G\frac{Mm}{r^2} = GMm\frac{1}{r^2}$$

(G = Gravitationskonstante)

Potentielle Energie in ∞ bezügl. (A):

$$\underline{\underline{E_{pot}}} = \int_{r_1}^{\infty} F(r)\,dr =$$

$$= \int_{r_1}^{\infty} GMm\frac{1}{r^2}\,dr = GMm\int_{r_1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,dr =$$

$$= GMm \lim_{R\to\infty}\int_{r_1}^{R}\frac{1}{r^2}\,dr = GMm\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{R}$$

$$= GMm\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{R}\right) = GMm\frac{1}{r_1} = \underline{\underline{\frac{GMm}{r_1}}}$$

Kinetische Energie in (A): $\underline{\underline{E_{kin} = \frac{mv_1^2}{2}}}$

$E_{kin} = E_{pot}$ $\quad \frac{GMm}{r_1} = \frac{mv_1^2}{2}$ $\therefore$ $\underline{\underline{v_1 = \sqrt{2\frac{GM}{r_1}}}}$

$\therefore$ $\underline{\underline{v_1 = \sqrt{2\frac{g r_0^2}{r_1}}}}$ (NB: $GM = g r_0^2$)

Parabolische Entweichgeschwindigkeit aus dem Punkt (A)

Uneigentliche Integrale erster Art

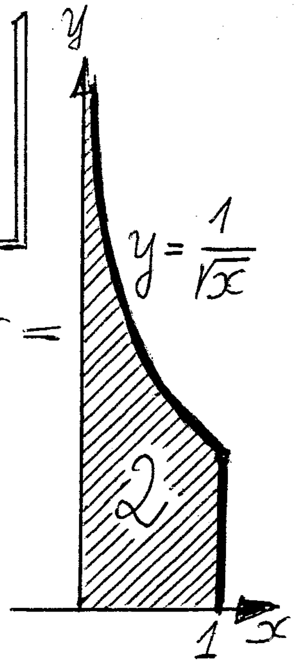
(vgl. 20.

- $f:[a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t \uparrow b} \int_a^t f(x)\,dx}$$

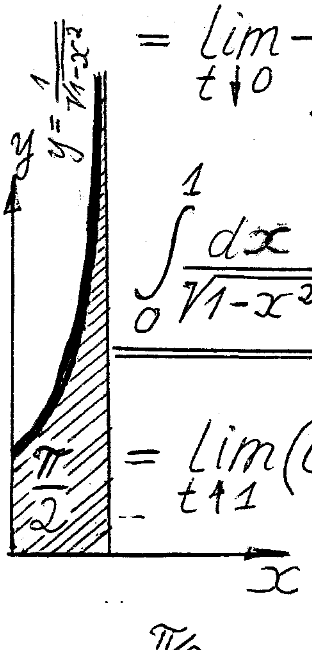
- $f:(a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t \downarrow a} \int_t^b f(x)\,dx}$$



__Beispiele:__ $\underline{\underline{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}} = \lim_{t \downarrow 0} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_t^1 = \lim_{t \downarrow 0} \left(2 - 2\sqrt{t}\right) = \underline{\underline{2}}$$



$$\underline{\underline{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}} = \lim_{t \uparrow 1} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t \uparrow 1} \arcsin x \Big|_0^t =$$

$$= \lim_{t \uparrow 1} (\arcsin t - 0) = \lim_{t \uparrow 1} \arcsin t = \arcsin 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

$$\underline{\underline{\int_0^{\pi/2} \tan(x)\,dx}} = \lim_{t \uparrow \frac{\pi}{2}} \int_0^t \tan(x)\,dx = \lim_{t \uparrow \frac{\pi}{2}} \left(-\ln(\cos x)\right)\Big|_0^t =$$

$$= \lim_{t \uparrow \pi/2} \left(-\ln(\cos t) - 0\right) = \underline{\underline{\infty}} \quad \ldots \text{existiert nicht!}$$

Funktionen von mehreren Variablen

(vgl. 22.3)

- $n \in \{1, 2, 3, \cdots\} =: \mathbb{N}.$

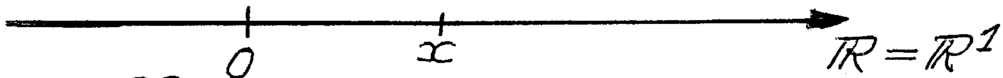
- $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\} =$

  Menge aller n-Tupel reeller Zahlen

  $\underline{x} := (x_1, \cdots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, \cdots, n).$

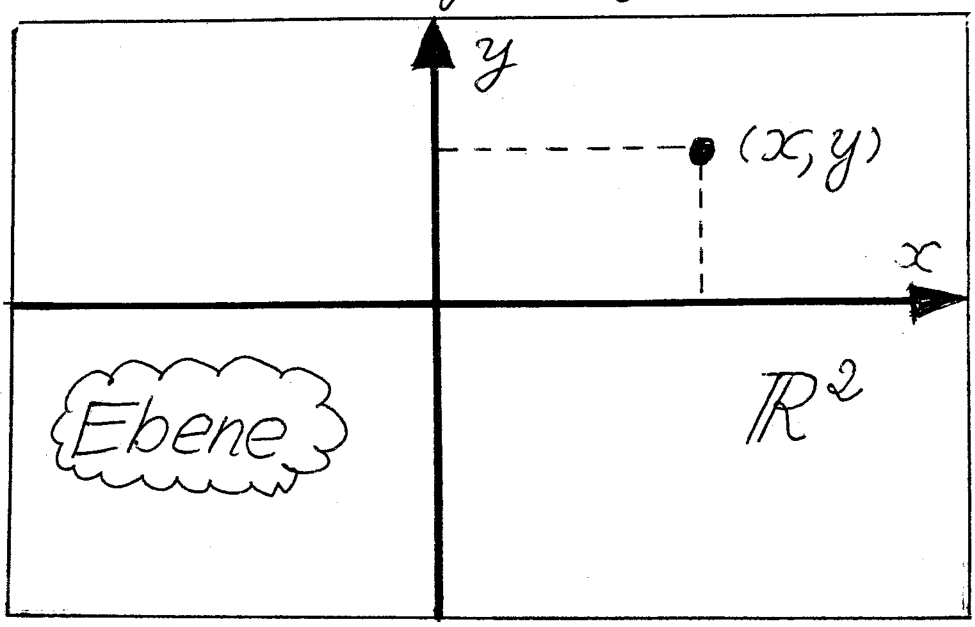
  $\mathbb{R}^n \hat{=}$ "n-dimensionaler Raum"

- $n = 1:\ \mathbb{R}^1 = \{(x) \mid x \in \mathbb{R}\} \hat{=} \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

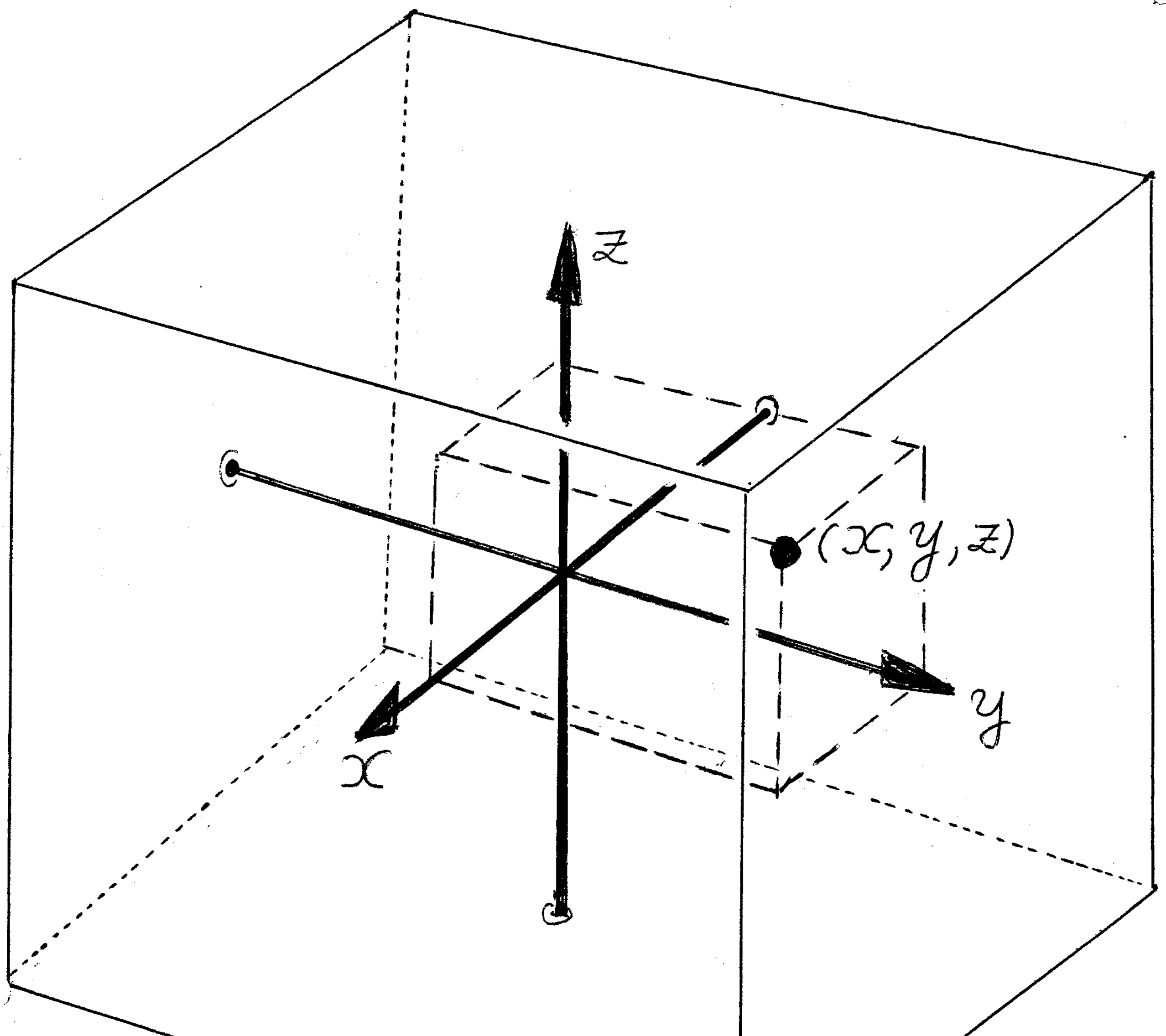


Gerade

- $n = 2:\ \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$



$n=3$: $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z\}$



Raum

$n = 4, 5, 6, \ldots$

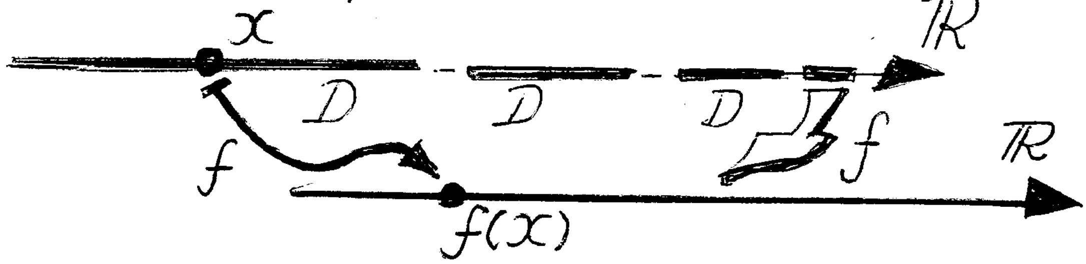
[redacted]

... Fortsetzung

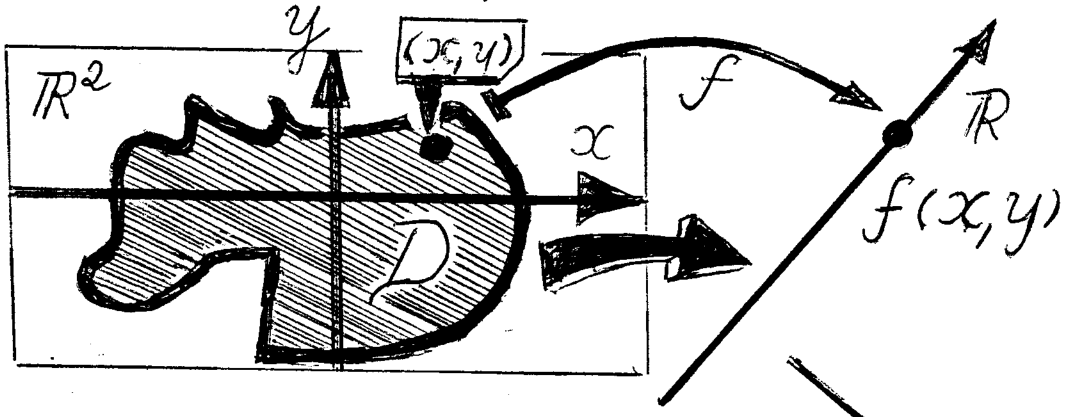
Eine Funktion in n Variablen ist eine Abbildung $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, welche jedem n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ eine Zahl $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ zuordnet.

$D = D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$; $D(f)$ = Def.-Bereich

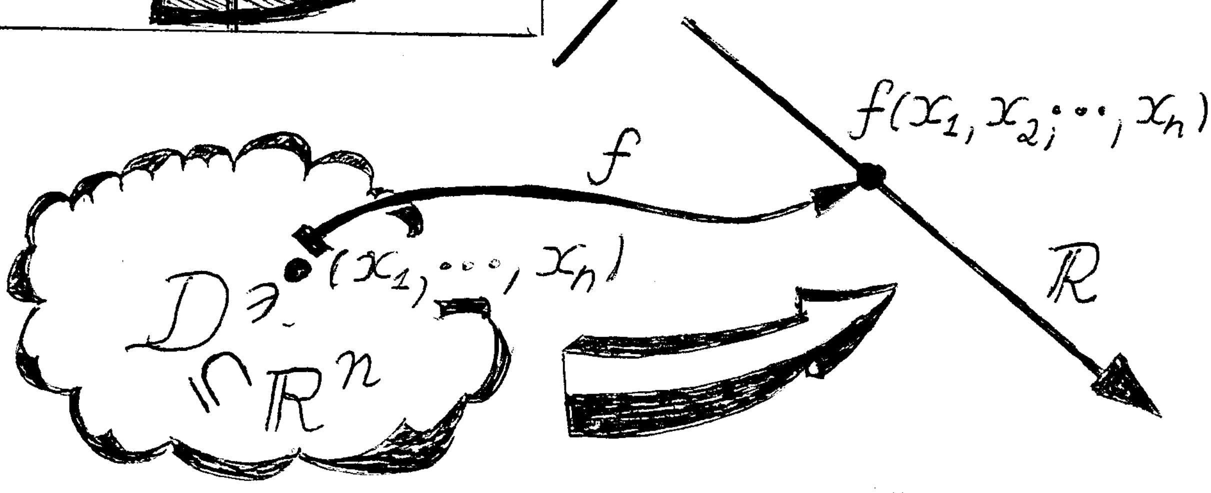
★ $n=1$: $D \subseteq \mathbb{R}$; $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.



★ $n=2$: $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.



★ $n>2$:



Graph einer Funktion von zwei Variablen (vgl. 22.4)

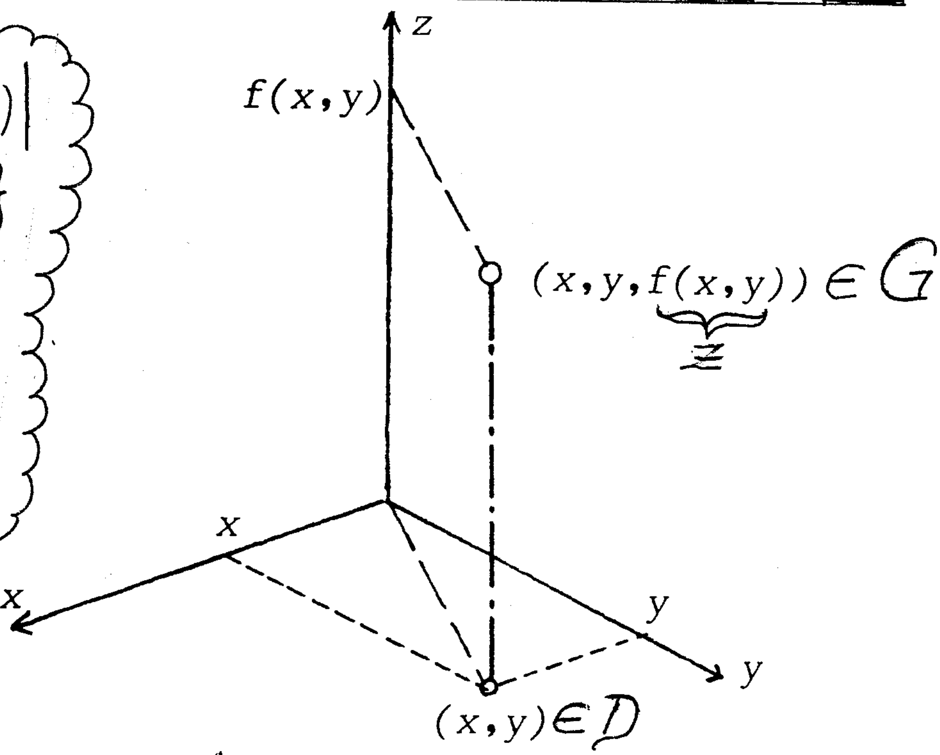
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \to \mathbb{R}$; $(x,y) \xmapsto{f} f(x,y)$

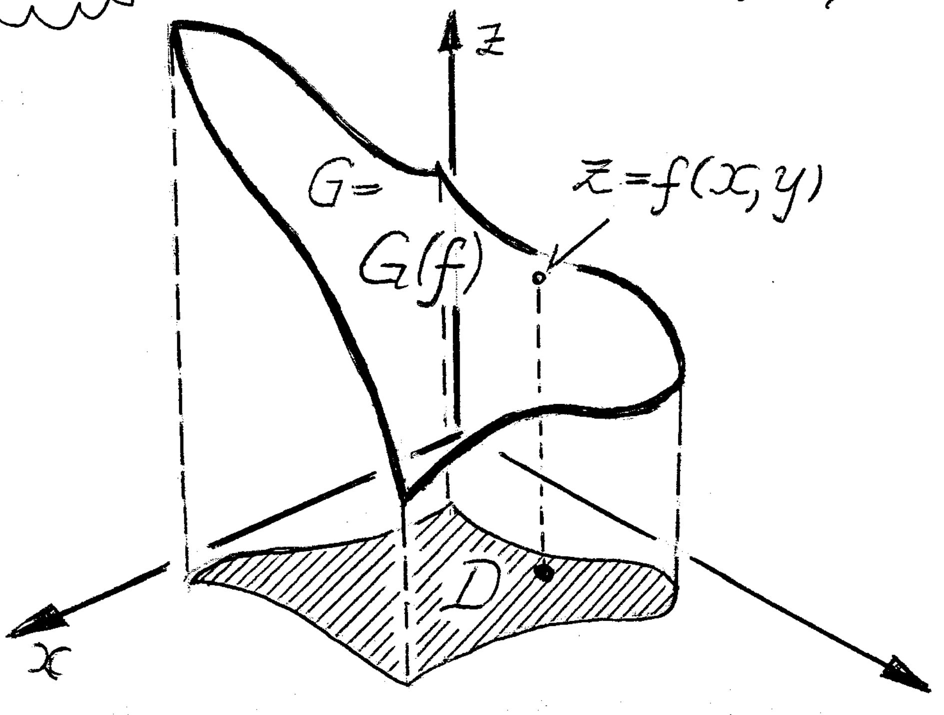
$$\boxed{\begin{array}{c} G = G(f) := \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \text{Graph von } f: D \to \mathbb{R} \end{array}}$$

$G = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}$

$\triangleq$

Fläche im Raum $\mathbb{R}^3$, die über D liegt.





Beispiel: Lineare Funktion in zwei Variablen

- $f(x,y)=ax+by+c\ ;\ (a,b,c\in\mathbb{R})$

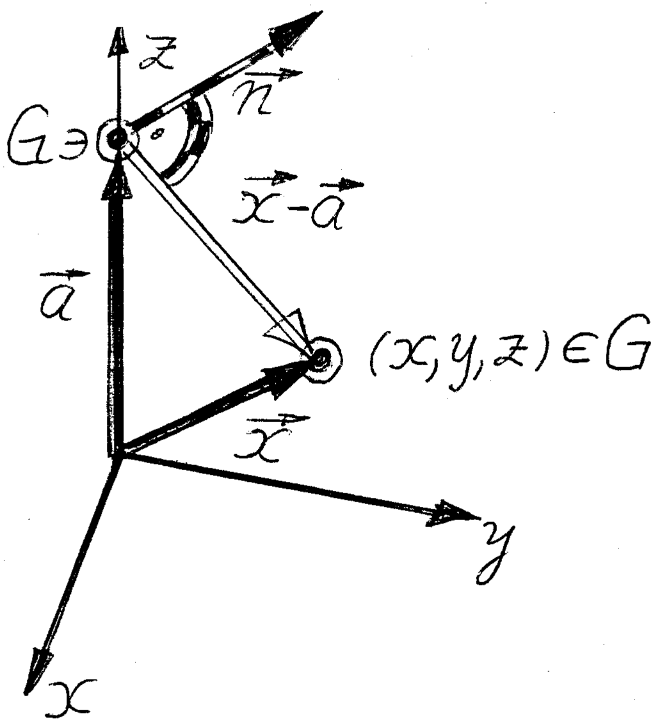
$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid ax+by+c=z\}=$$

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid ax+by-z+c=0\}.$$

$G=$ Ebene $\begin{cases}\text{durch den Punkt } (0,0,c)\\ \text{und mit}\\ \text{Normalenvektor } \vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\-1\end{pmatrix}\end{cases}$

$$\vec{a}:=\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix};\ (0,0,c)\in G.$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\ (x,y,z)\in G.$$



$$\vec{n}(\vec{x}-\vec{a})=$$

$$=\begin{pmatrix}a\\b\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z-x\end{pmatrix}=$$

$$=ax+by-z+c=0.$$

$$\therefore\ \vec{x}-\vec{a}\perp\vec{n}$$

$\boxed{\text{... Fortsetzung}}$

Die Ebene $G = G(f) = \{(x, y, z) \mid ax + by - z + c = 0\}$

schneidet: ...

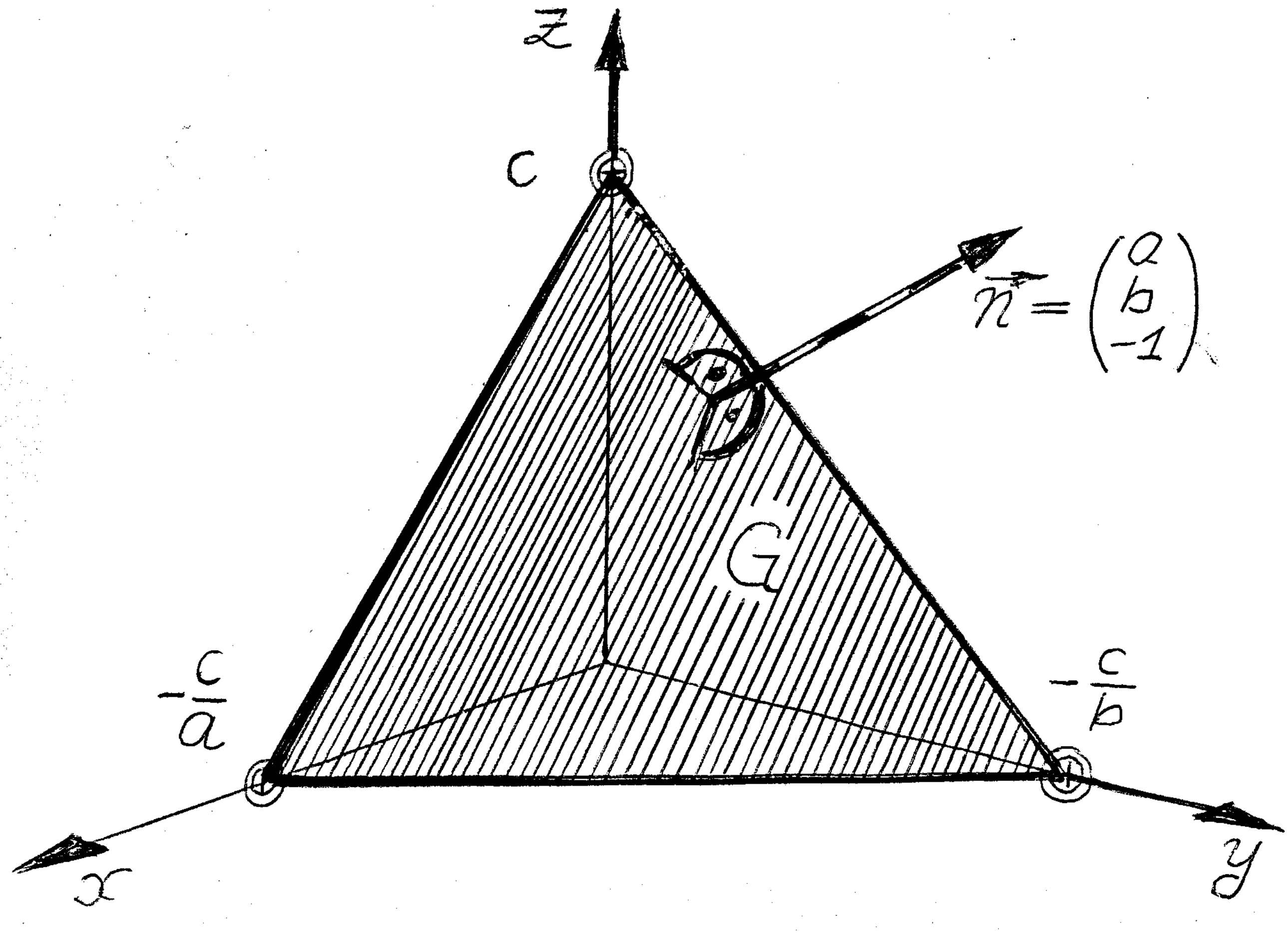
① ie x-Axe in $(-\frac{c}{a}, 0, 0)$

(NB: $a = 0,\ c \neq 0 \Rightarrow$ kein Schnittpunkt
$a = 0,\ c = 0 \Rightarrow$ x-Axe liegt in G);

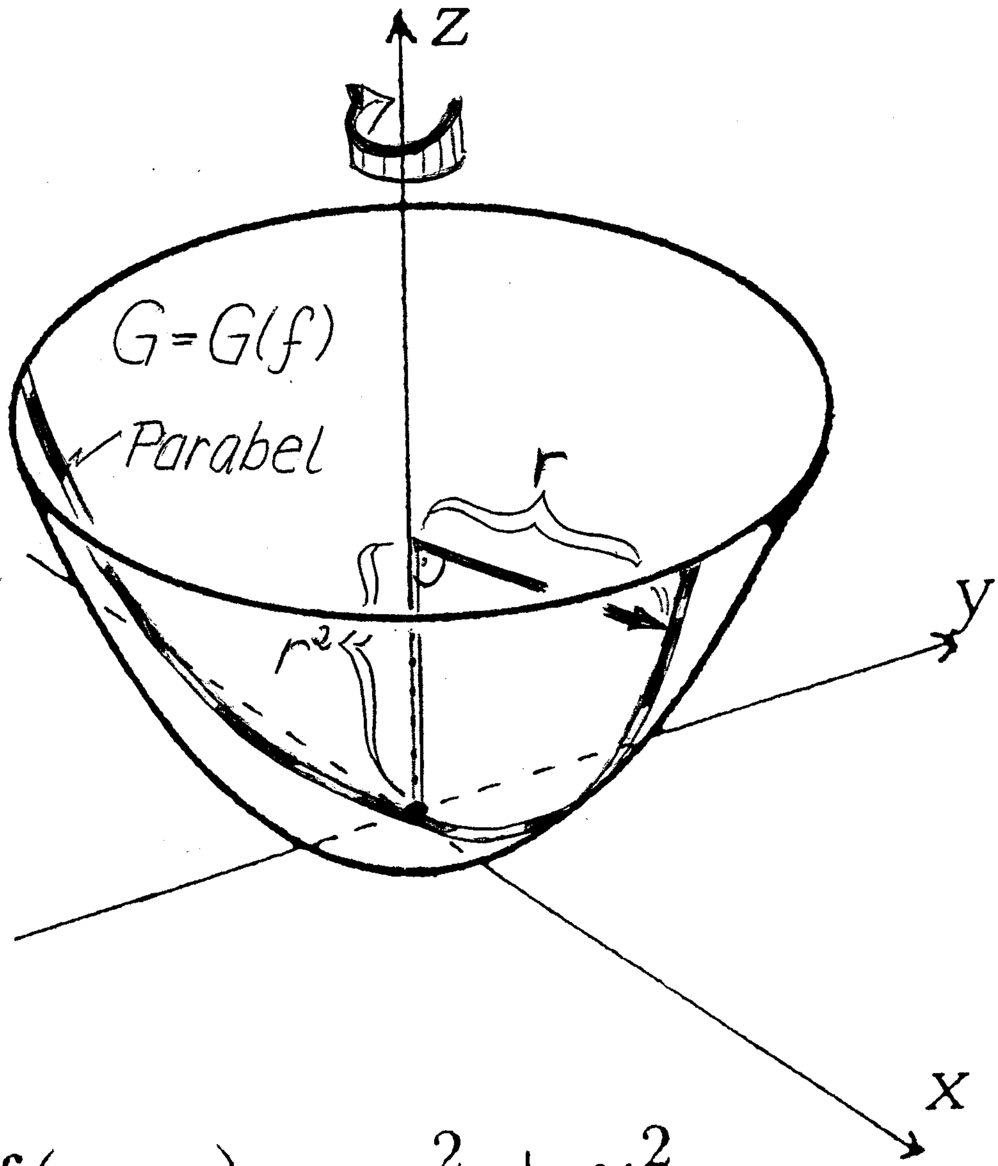
② ie y-Axe in $(0, -\frac{c}{b}, 0)$

(NB: $b = 0,\ c \neq 0 \Rightarrow$ kein Schnittbunkt
$b = 0,\ c = 0 \Rightarrow$ y-Axe liegt in G);

③ die z-Axe in $(0, 0, c)$.



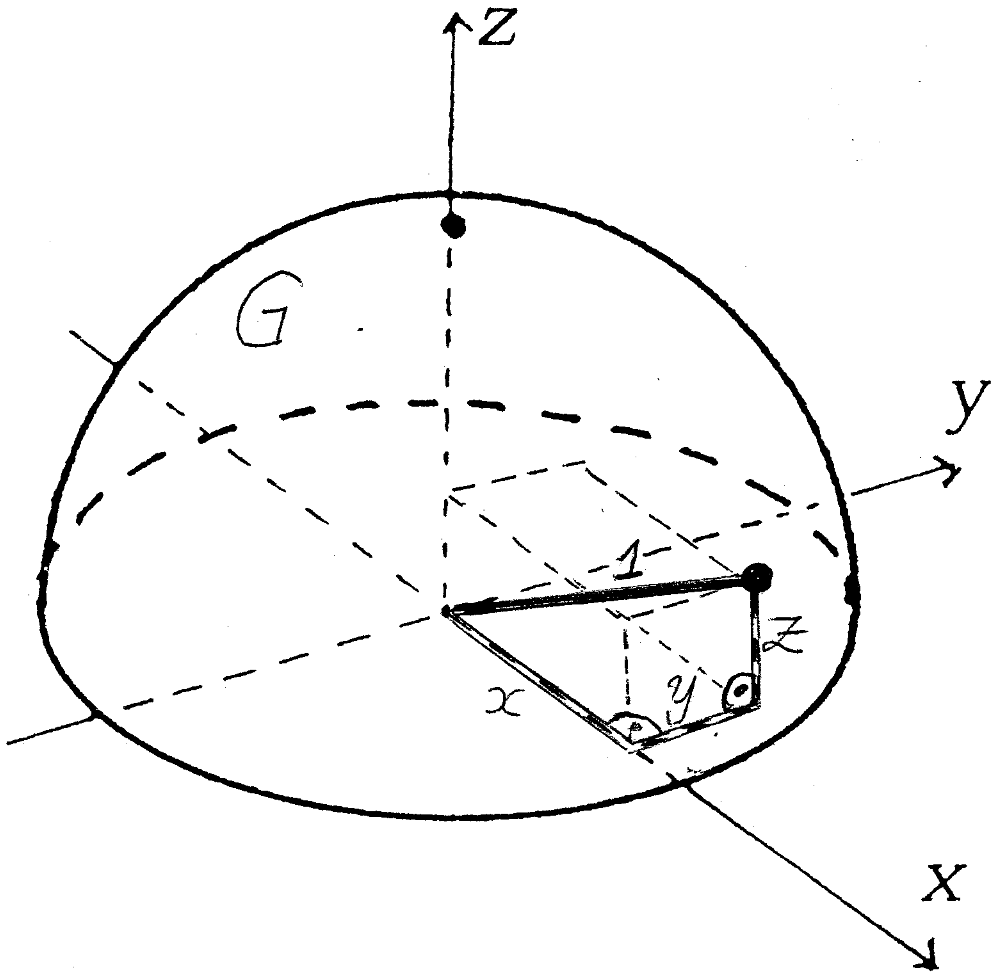
Beispiel (vgl. 22.4. b) 1))



$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

G = Rotationsparaboloid

Beispiel (vgl. 22.4 b) 2))

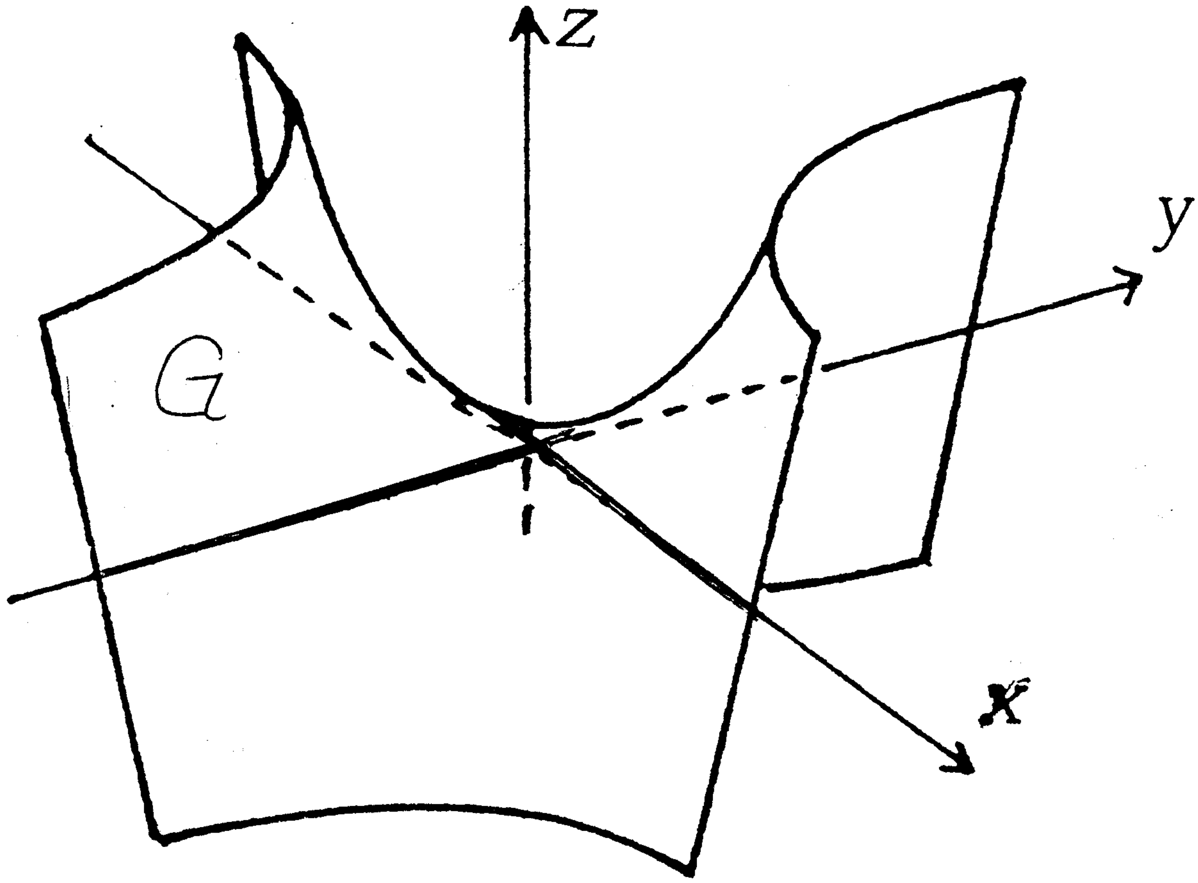


$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$z=f(x,y)\ \therefore\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$

G = Halbkugelfläche

Beispiel (vgl 22.4 b) 3))



$$f(x,y) = xy$$

G = Sattelfläche

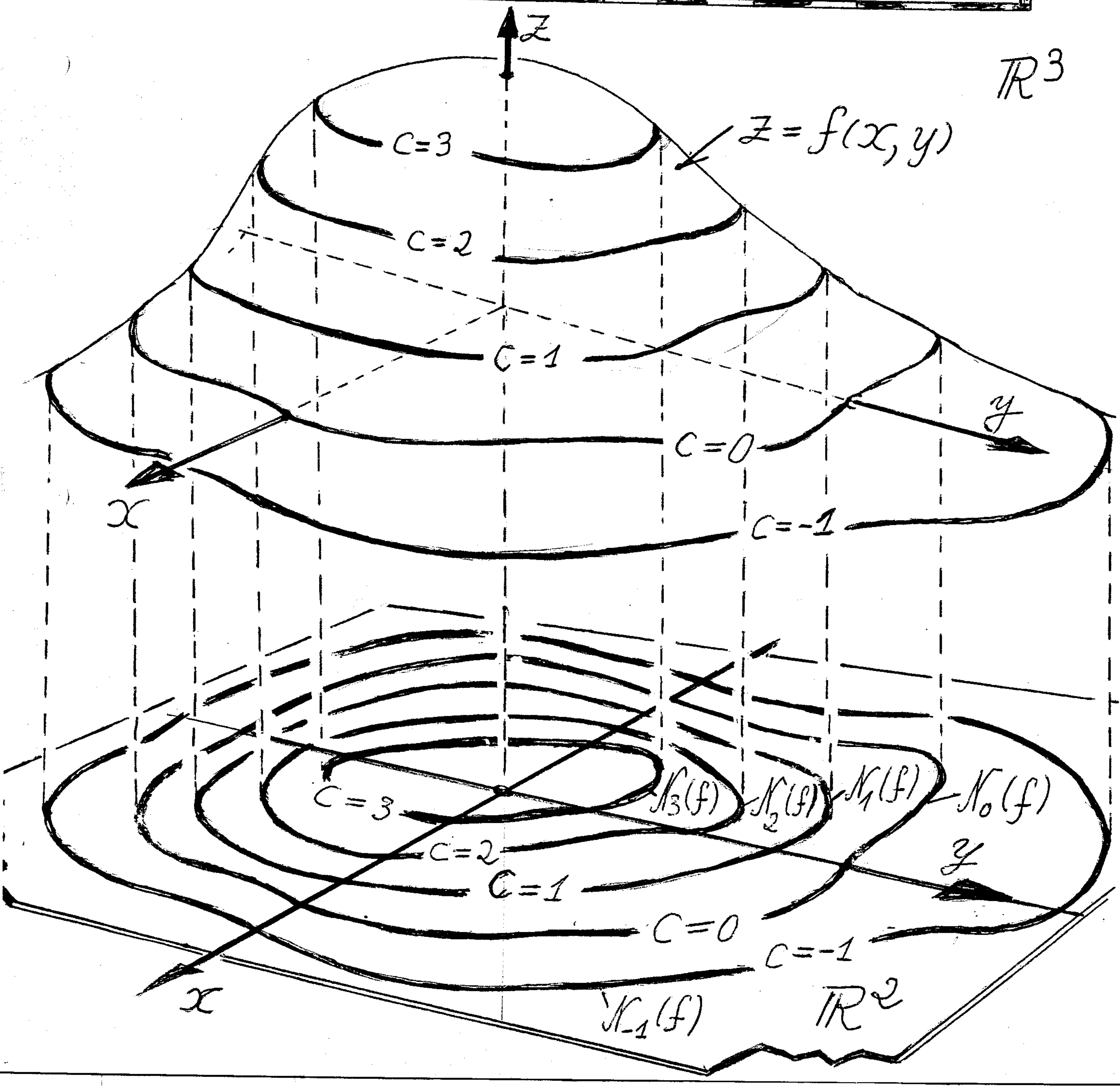
Niveaulinien

(vgl. 22.5)

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto f(x,y)$
- $c \in \mathbb{R}$

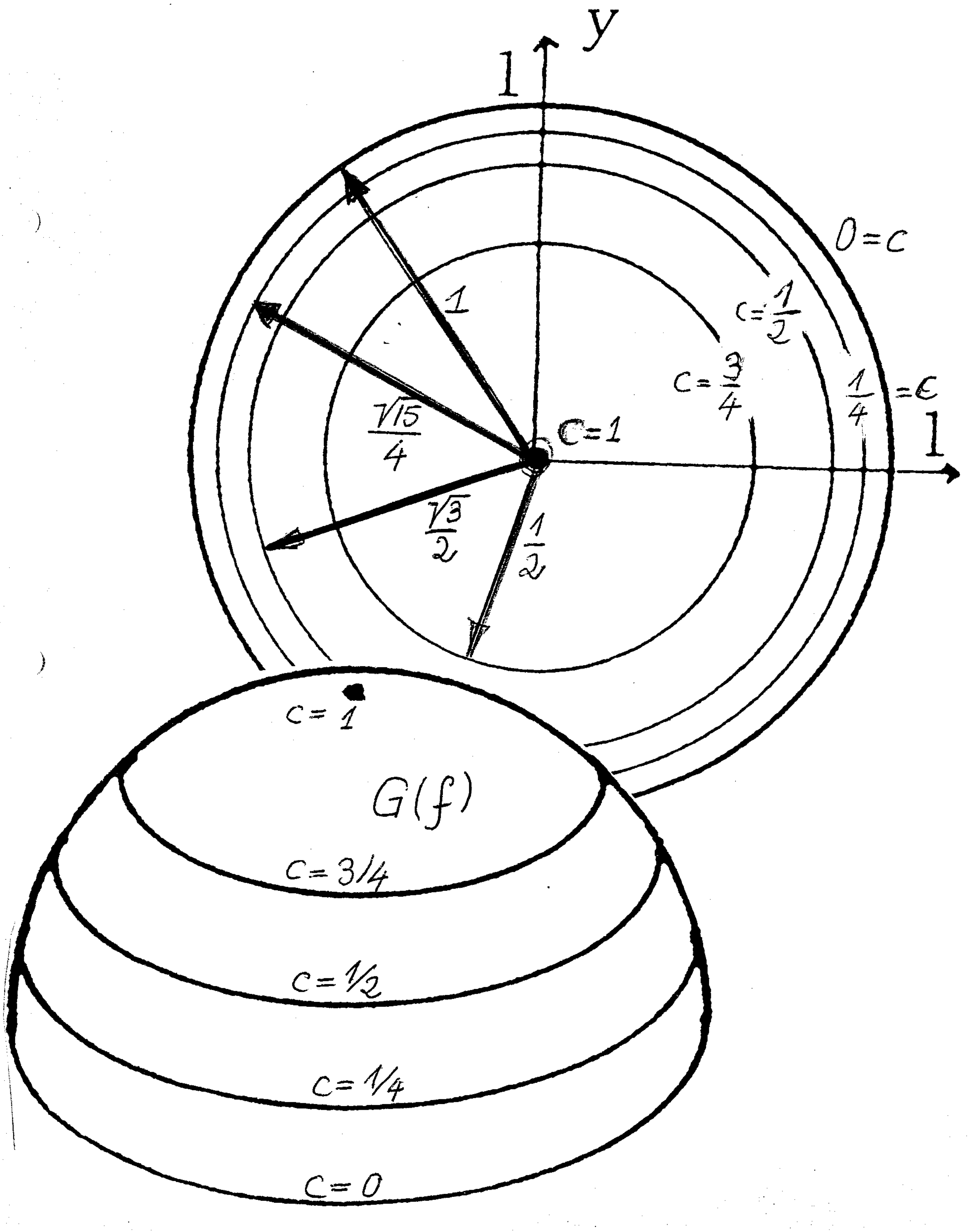
Niveaulinie von f auf der Höhe c:

$$\mathcal{N}_c(f) := \{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\}$$



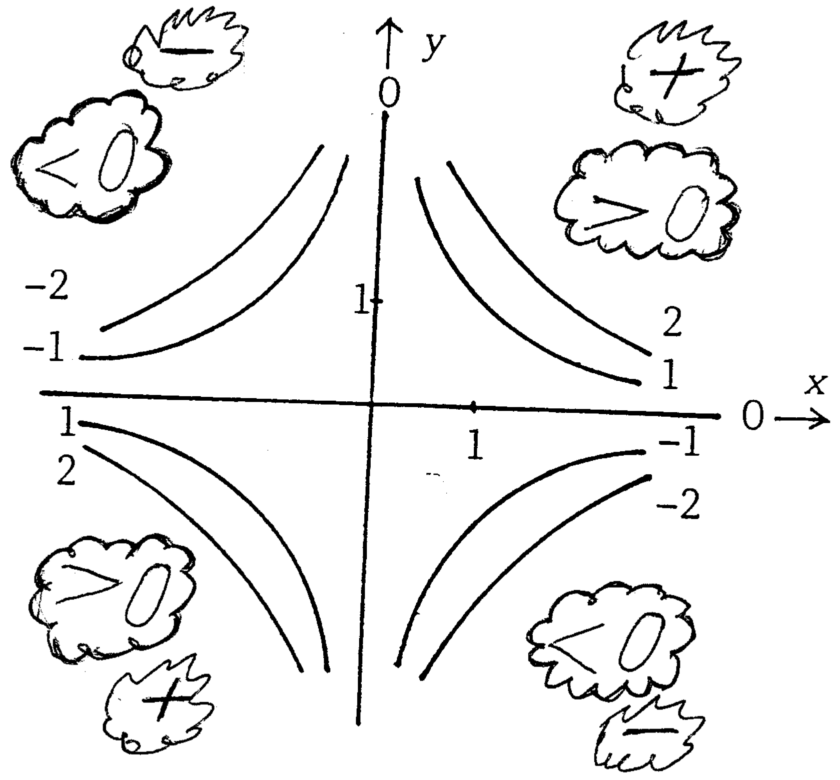
$\boxed{\text{Beispiel}}$ (vgl 22.5.2)

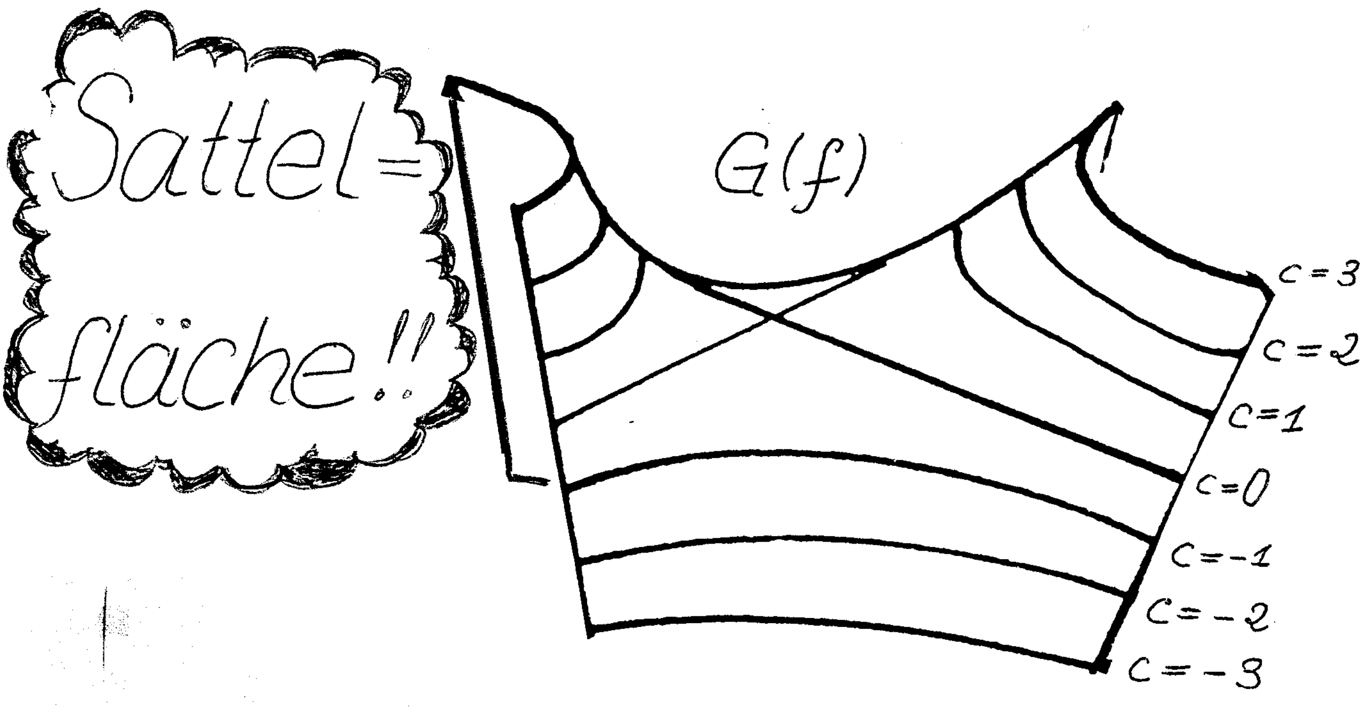
- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$
- $f(x,y) = c \quad ;(c = 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1).$



$\boxed{\text{Beispiel}}$ (vgl. 22.5.1)

- $f(x,y) = xy$
- $f(x,y) = c \quad (c = -2; -1; 0; 1; \ldots)$



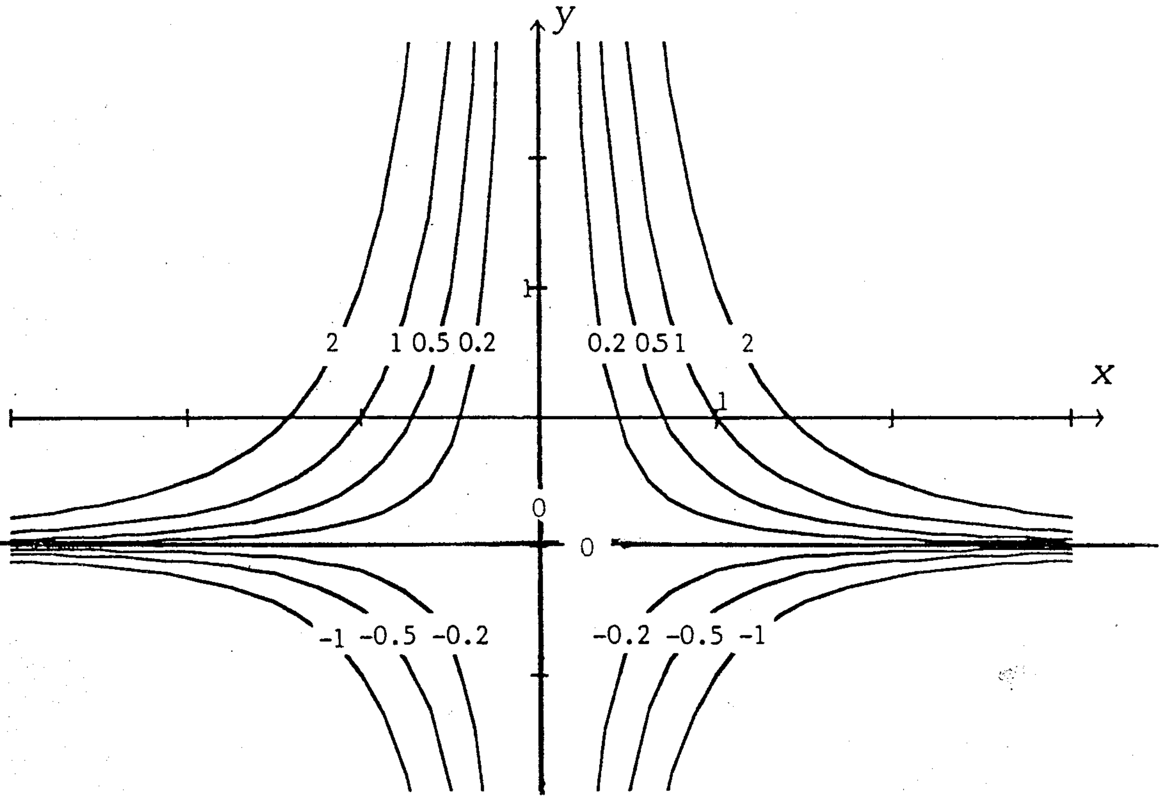


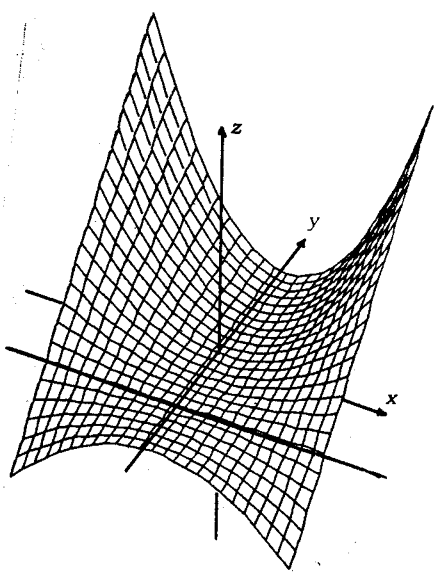
MAT 182 (99)

Beispiel (vgl. 22.5.3)

- $f(x,y) := x^2(y-1)$

- $f(x,y) = c \quad (c = \pm 1; \pm 0.5; \pm 0.2; 2)$





[redacted]

Partielle Funktionen (vgl. 22.6)

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f : D \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto f(x,y)$.
- $(x_0, y_0) \in D$

Partielle Funktionen von f in (x_0, y_0):

$$x \mapsto f(x, y_0) =: \varphi(x)$$

"y_0 festhalten, x laufen lassen"

partielle Funktion in Richtung x durch y_0

$$y \mapsto f(x_0, y) =: \psi(y)$$

"x_0 festhalten, y laufen lassen"

partielle Funktion in Richtung y durch x_0

NB: partielle Funktionen lassen sich auch im Fall von mehr als zwei Variablen definieren.

Veranschaulichung der partiellen Funktionen

(vgl. 22.7)

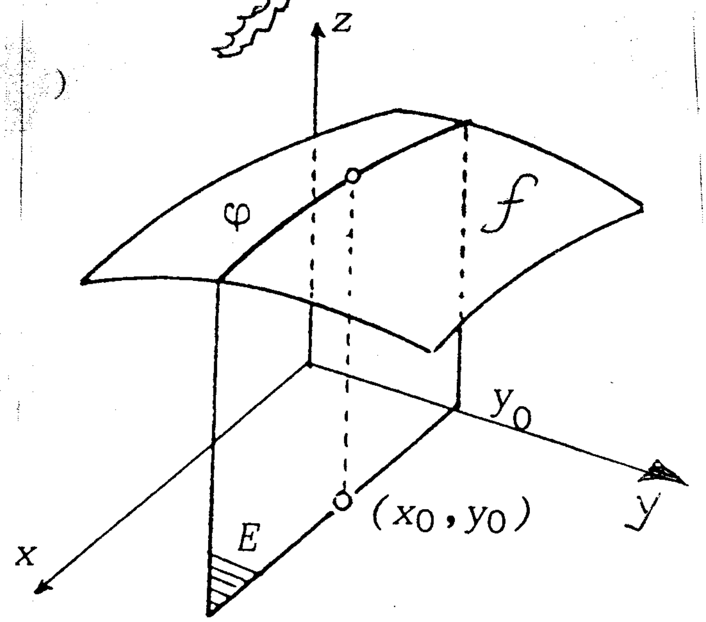
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto f(x,y)$
- $(x_0, y_0) \in D$
- E = Ebene $\parallel$ zur xz-Ebene durch (x_0, y_0)
- F = Ebene $\parallel$ zur yz-Ebene durch (x_0, y_0)

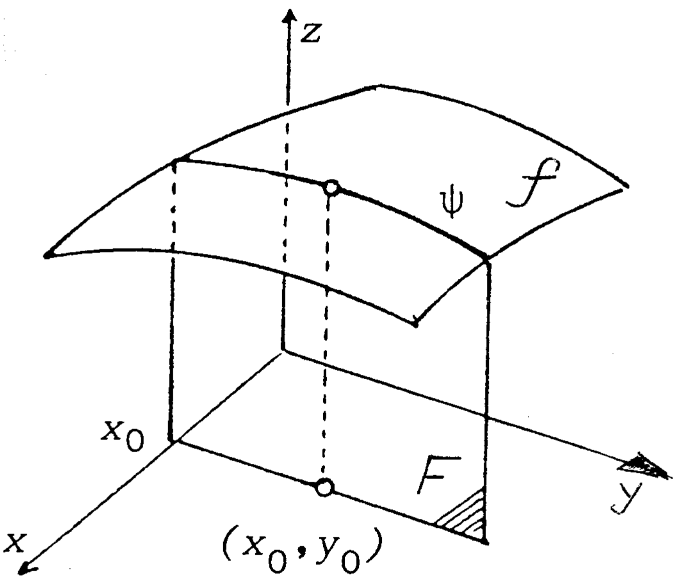
- $\varphi(x) = f(x, y_0)$; $\psi(y) = f(x_0, y)$

  partielle Funktionen

Graph φ = Schnittkurve des Graphen von f mit E

Graph ψ = Schnittkurve des Graphen von f mit F



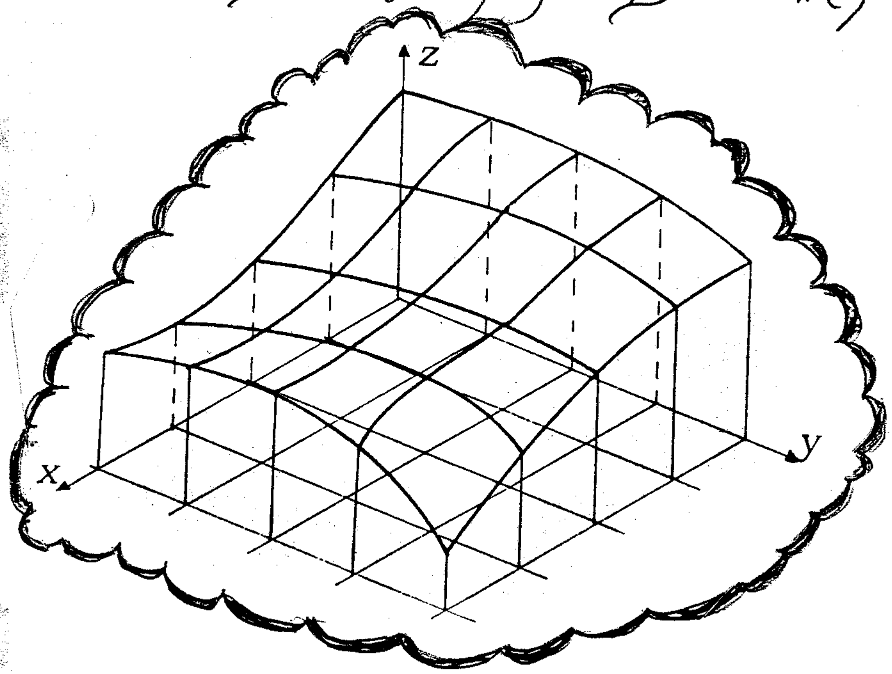


Darstellung von Graphen mit Hilfe von partiellen Funktionen

(vgl. 22.7)

Achsenparallele Vertikalschnitte

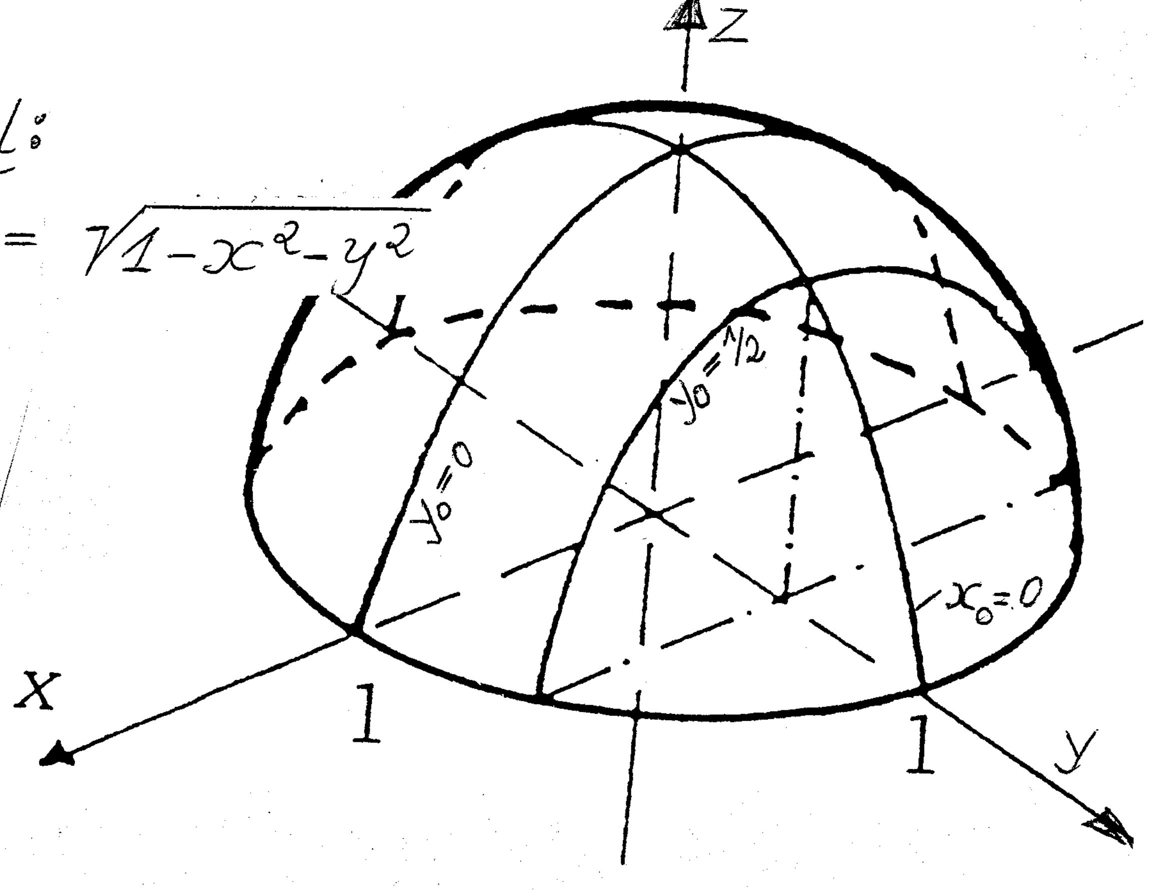
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto f(x,y)$



"zerschneiden in Scheiben"

Beispiel:

$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$



$\boxed{\text{Beispiel}}$ (vgl. 22.7.3)

- $f(x,y) = x^2(y+1)$

$f(x,-2) = -x^2$

$f(x,-1) =$

$f(x,0) = x^2$

$f(x,1) = 2x^2$

$f(x,2) = 3x^2$

partielle Funktionen in x-Richtung (Typ φ)

$f(-1,y) = y+1$

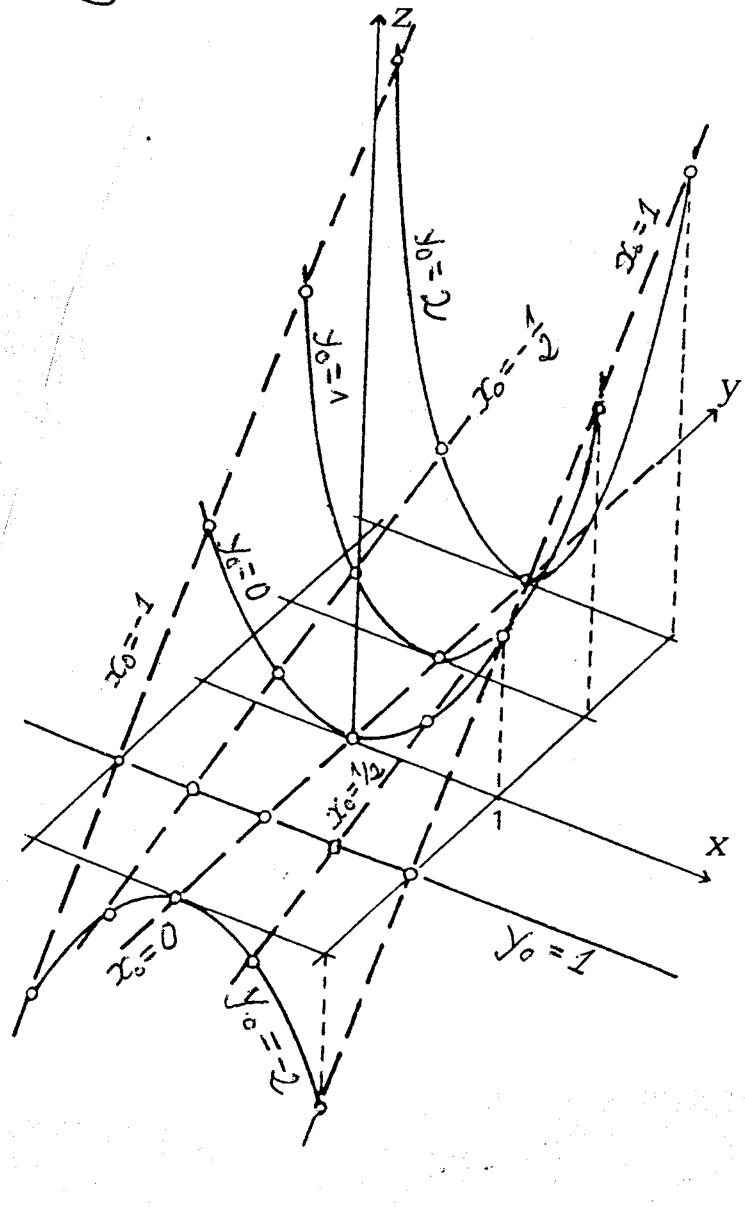
$f(-\frac{1}{2},y) = \frac{1}{4}(y+1)$

$f(0,y) = 0$

$f(\frac{1}{2},y) = \frac{1}{4}(y+1)$

$f(1,y) = y+1$

partielle Funktionen in y-Richtung (Typ ψ)



Partielle Ableitungen (vgl. 23.2)

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto f(x,y)$
- $(x_0, y_0) \in D$.
- $\varphi(x) := f(x, y_0)$; $\psi(y) = f(x_0, y)$.
- $\varphi(x)$ sei differenzierbar in x_0.
- $\psi(y)$ sei differenzierbar in y_0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) := \varphi'(x_0) =$$

partielle Ableitung von f nach x an der Stelle (x_0, y_0).

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) := \psi'(y_0) =$$

partielle Ableitung von f nach y an der Stelle (x_0, y_0).

NB: partielle Ableitungen werden bei mehr als zwei Variablen entsprechend definiert.

... Fortsetzung

... Die partielle Ableitung $f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ von f nach x an der Stelle (x_0, y_0) ist die gewöhnliche Ableitung der partiellen Funktion $\varphi(x) = f(x, y_0)$ in Richtung x an der Stelle x_0.

... Für $f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ... entsprechend.

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

REZEPT

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ = partielle Ableitung von f nach x: "y konstant halten, nach x ableiten!"

$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ = partielle Ableitung von f nach y: "x konstant halten, nach y ableiten!"

Geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen

(vgl. 22.3)

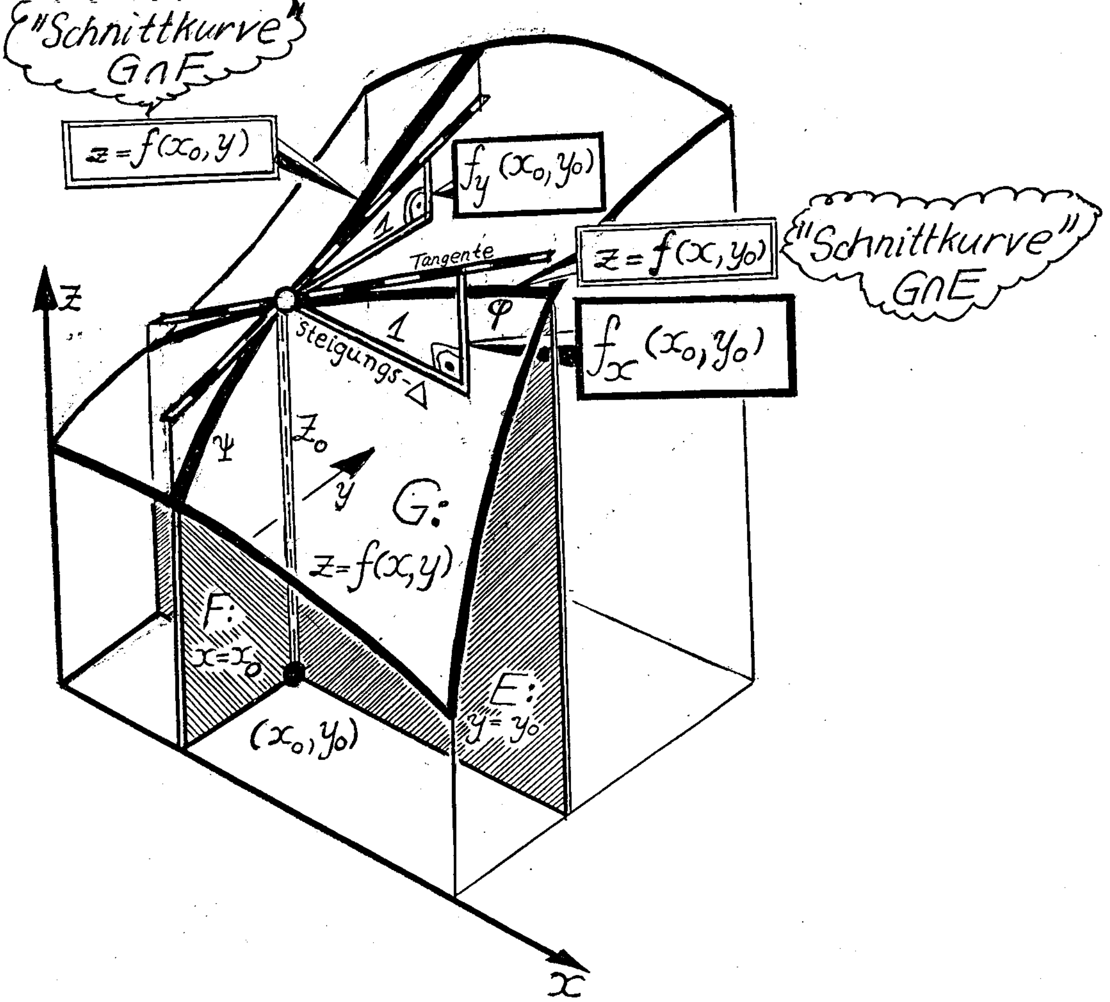
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto f(x,y)$; $(x_0, y_0) \in D$.
- G = Graph von f : $f(x,y) = z$.
- E = Ebene $\parallel$ xz-Ebene : $y = y_0$.
- F = Ebene $\parallel$ yz-Ebene : $x = x_0$.
- $\varphi(x) = f(x, y_0)$; $\psi(y) = f(x_0, y)$.

$f_x(x_0, y_0)$ = Steigung der Schnittkurve $G \cap E$ in (x_0, y_0, z_0)

$f_y(x_0, y_0)$ = Steigung der Schnittkurve $G \cap F$ in (x_0, y_0, z_0)

$G \cap E \mathrel{\hat{=}} \varphi$

$G \cap F \mathrel{\hat{=}} \psi$



Höhere partielle Ableitungen (vgl. 23.4)

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \to \mathbb{R}$ partiell diff'bar.
- $f_x: D \longrightarrow \mathbb{R}$; $f_y: D \to \mathbb{R}$ partiell diff'bar.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f_{xx}(x,y) := (f_x)_x(x,y)$$

f_{xx} = Ableitung von f_x nach x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{xy}(x,y) := (f_x)_y(x,y)$$

f_{xy} = Ableitung von f_x nach y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f_{yx}(x,y) := (f_y)_x(x,y)$$

f_{yx} = Ableitung von f_y nach x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f_{yy}(x,y) := (f_y)_y(x,y)$$

f_{yy} = Ableitung von f_y nach y

"In der Regel" – z.B. wenn $f_{xy}, f_{yx}: D \to \mathbb{R}$ "stetig" sind – gilt: $f_{xy} = f_{yx}$.

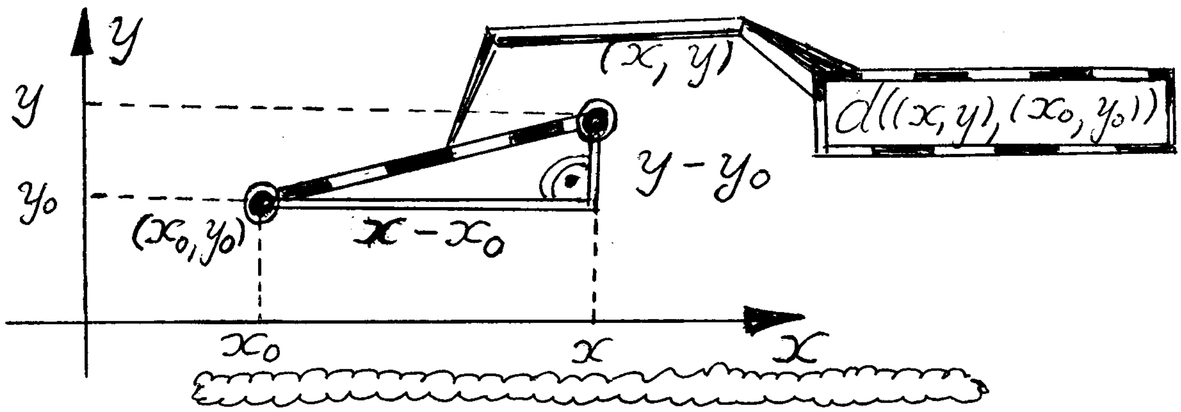
$f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ heissen <u>partielle Ableitungen zweiter Ordnung</u>.

ε-Umgebungen (vgl. 23.5)

- $(x_0, y_0), (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$d((x_0, y_0); (x, y))$ = <u>Distanz</u> zwischen den Punkten (x_0, y_0) und (x, y):

$$\boxed{d((x, y), (x_0, y_0)) := \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

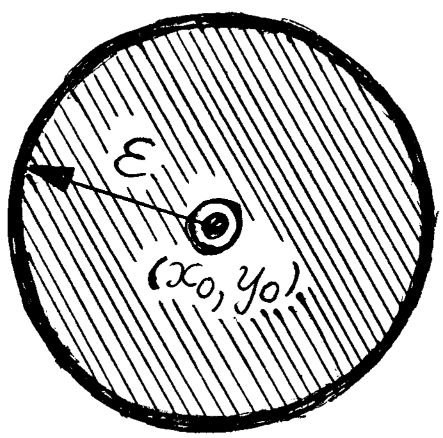


- $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon(x_0, y_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(x_0,y_0)) < \varepsilon\}$$

≙ ε-<u>Umgebung</u> <u>von</u> (x_0, y_0)

NB: ε-Umgebungen lassen sich in jedem Raum $\mathbb{R}^n$ definieren!



Kreisscheibe mit Zentrum (x_0, y_0) und Radius ε, ohne Rand

Absolute Extrema

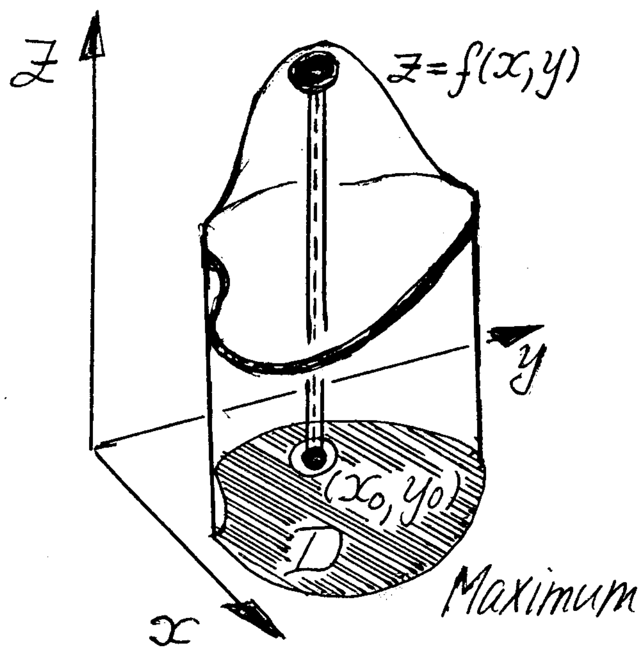
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto f(x,y)$.
- $(x_0, y_0) \in D$.

f hat an der Stelle (x_0, y_0) ein **absolutes Maximum** $:\Longleftrightarrow$

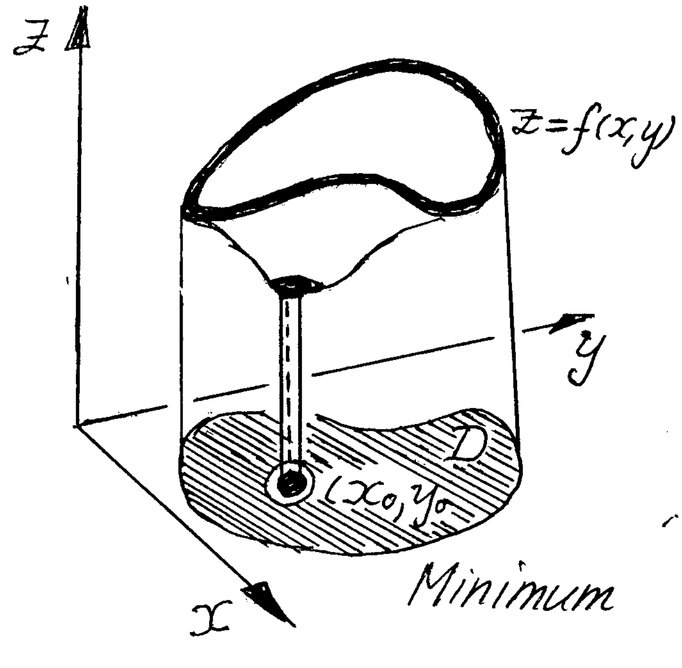
$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \text{ für alle } (x,y) \in D.$$

f hat an der Stelle (x_0, y_0) ein **absolutes Minimum** $:\Longleftrightarrow$

$$f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \text{ für alle } (x,y) \in D.$$



Maximum



Minimum

Absolutes Extremum $\begin{cases}\text{abs. Maximum}\\ \text{abs. Minimum}\end{cases}$

Relative Extrema (vgl. 23.5)

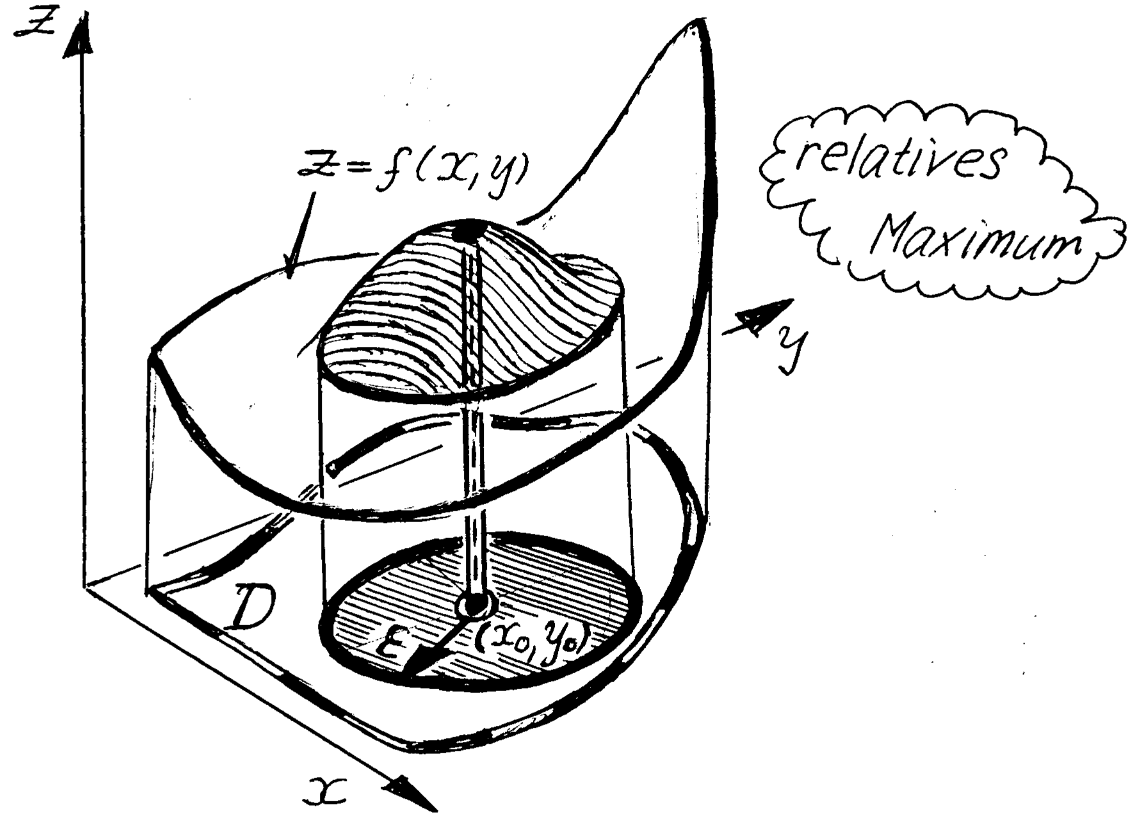
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \to \mathbb{R}^2$; $(x_0, y_0) \in D$.

f hat an der Stelle (x_0, y_0) ein relatives Maximum $:\Longleftrightarrow$

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \text{ für alle } (x,y) \in D \cap U_\varepsilon(x_0,y_0)$$

Definition des relativen Minimums: analog!



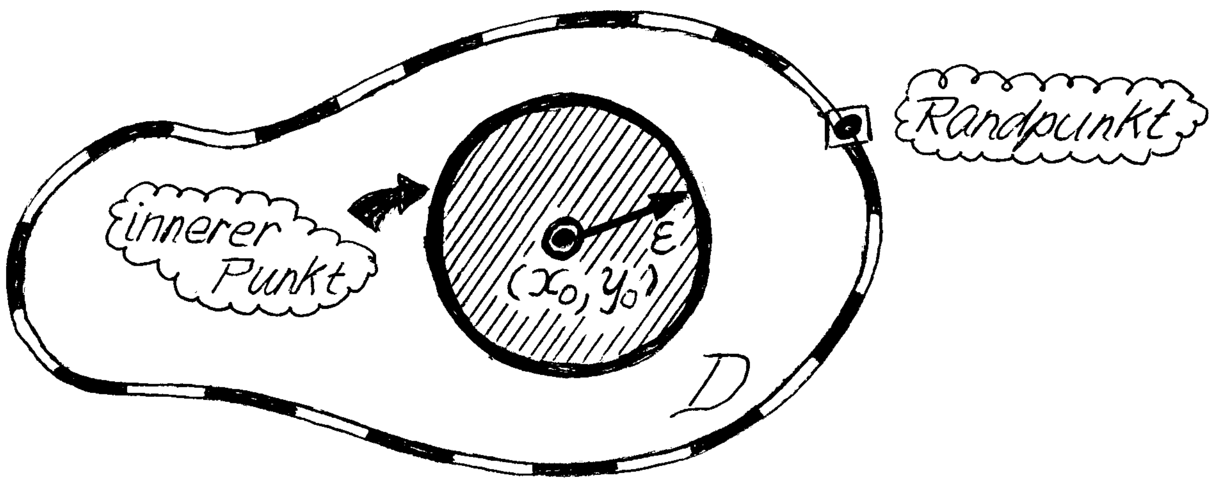
Relatives Extremum — relatives Maximum / relatives Minimum

Innere Punkte / Randpunkte (vgl. 23.5)

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $(x_0, y_0) \in D$

(x_0, y_0) ist innerer Punkt von D :⟺
Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so dass $U_\varepsilon(x_0, y_0) \subseteq D$.

Ist (x_0, y_0) kein innerer Punkt, so ist (x_0, y_0) ein Randpunkt von D.



D heisst offen, wenn alle Punkte von D innere Punkte sind.

"D enthält keinen seiner Randpunkte"

Beispiele:
- $D := \mathbb{R}^2$ ist offen.
- $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ ist offen.
- $D := \{(x, y) \mid |x| < 1, |y| > 1\}$ ist offen.

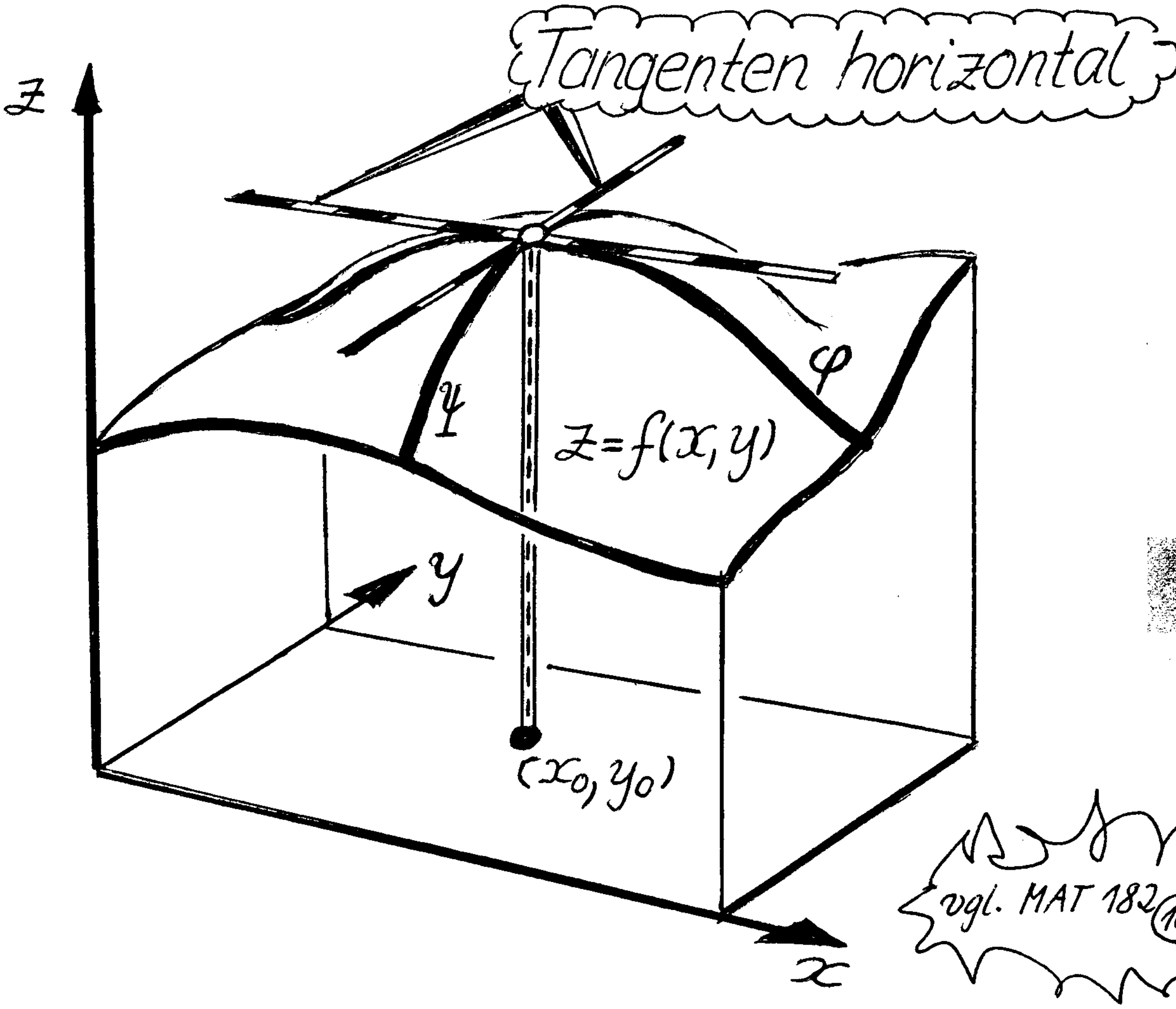
Kriterium für relative Extrema

(vgl. 23.5)

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto f(x,y)$.
- (x_0, y_0) innerer Punkt von D.
- f partiell differenzierbar in (x_0, y_0).

Hat f an der Stelle (x_0, y_0) ein relatives Extremum, so gilt:

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

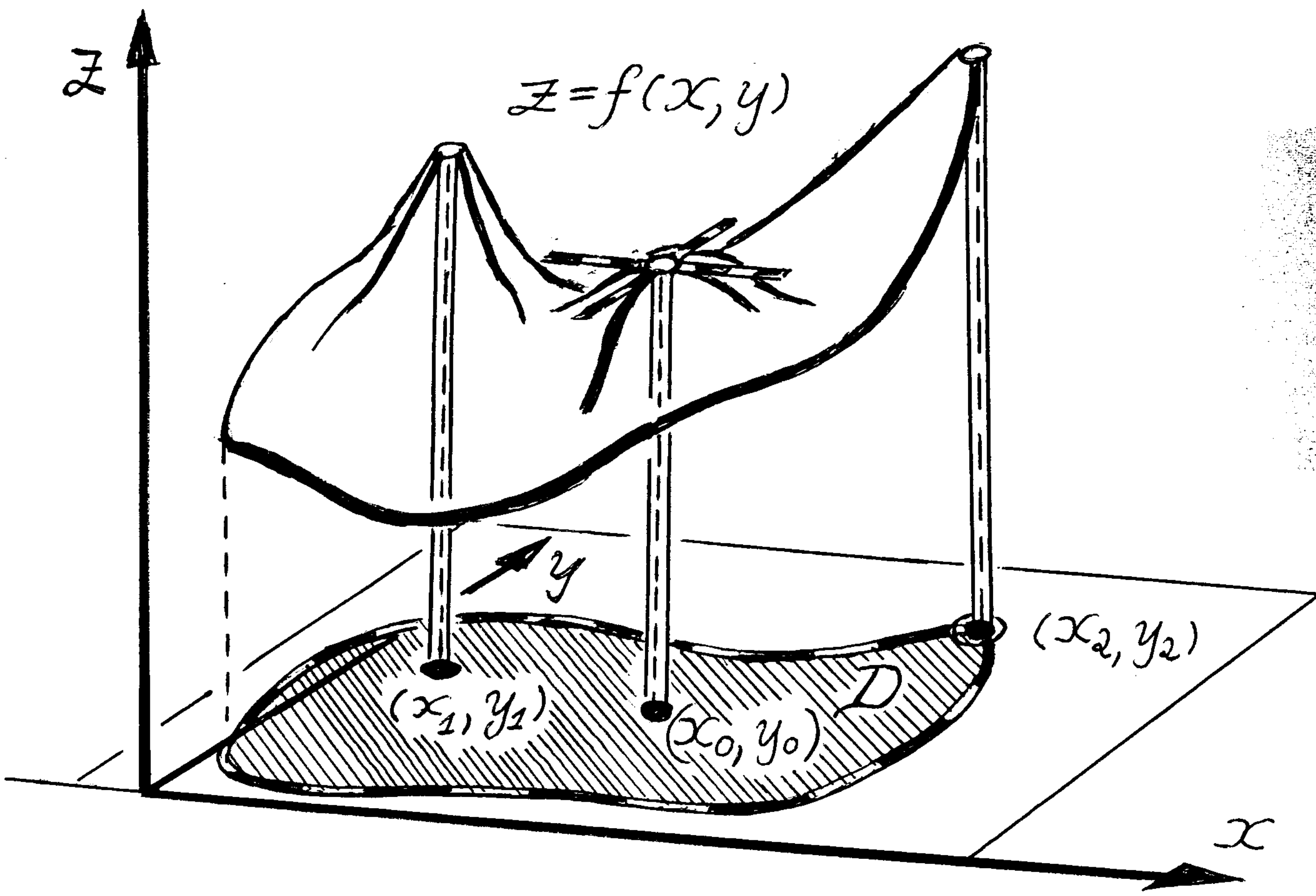


vgl. MAT 182 (106)

Auftreten relativer Extrema (vgl. 23.5)

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto f(x,y)$

Relative Extrema von f treten höchstens auf ...
... in innern Punkten (x_0, y_0) von D in welchen f partiell differenzierbar ist und in welchen gilt $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$;
... in innern Punkten (x_1, y_1) von D in welchen f nicht partiell differenzierbar ist;
... in Randpunkten (x_2, y_2) von D.



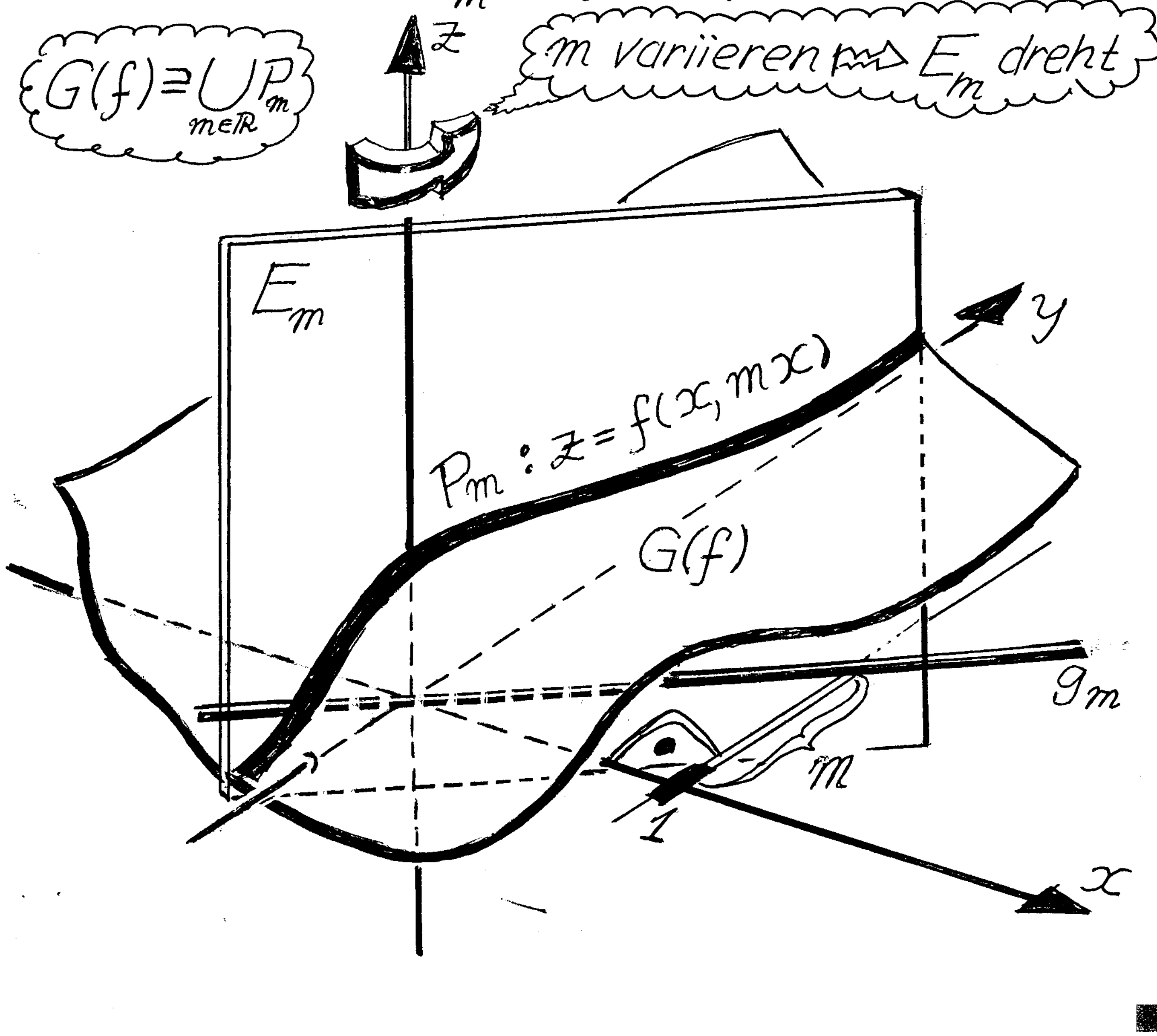
Vorbetrachtung und ...

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \to \mathbb{R}$; $(0,0) \in D$.

Methode zur Untersuchung von $G(f) \hat{=}$ Graph von f: Schneide $G(f)$ mit allen Ebenen durch die z-Achse und betrachte die entstehenden Schnittkurven!

- Gerade $g_m: y = mx$; Ebene $E_m: y = mx$
- Schnittkurve $P_m = G(f) \cap E_m: z = f(x, mx)$

$G(f) \supseteq \bigcup_{m \in \mathbb{R}} P_m$



Unterscheidung relativer Extrema

(vgl. 23.5)

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$; $f: D \to \mathbb{R}$; "2x stetig partiell diff'bar"
- (x_0, y_0) innerer Punkt von D.
- $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

$$A := f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

$A > 0 \Longrightarrow$ f hat in (x_0, y_0) ein relatives Extremum!...

- $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$: relatives Maximum!
- $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$: relatives Minimum!

$A < 0 \Longrightarrow$ f hat in (x_0, y_0) kein relatives Extremum!

$A = 0$: Verfahren liefert keine Entscheidung!

Wichtiger Spezialfall

- $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ (Quadrik)

$\nabla\!\!\!/ \; f_x(x,y) = 2ax + by; \; f_y(x,y) = bx + 2cy.$

$\nabla\!\!\!/ \quad \therefore \; \underline{f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0}.$

$\nabla\!\!\!/\nabla\!\!\!/ \; \underline{f_{xx}(x,y) = 2a; \; f_{xy}(x,y) = b; \; f_{yy}(x,y) = 2c.}$

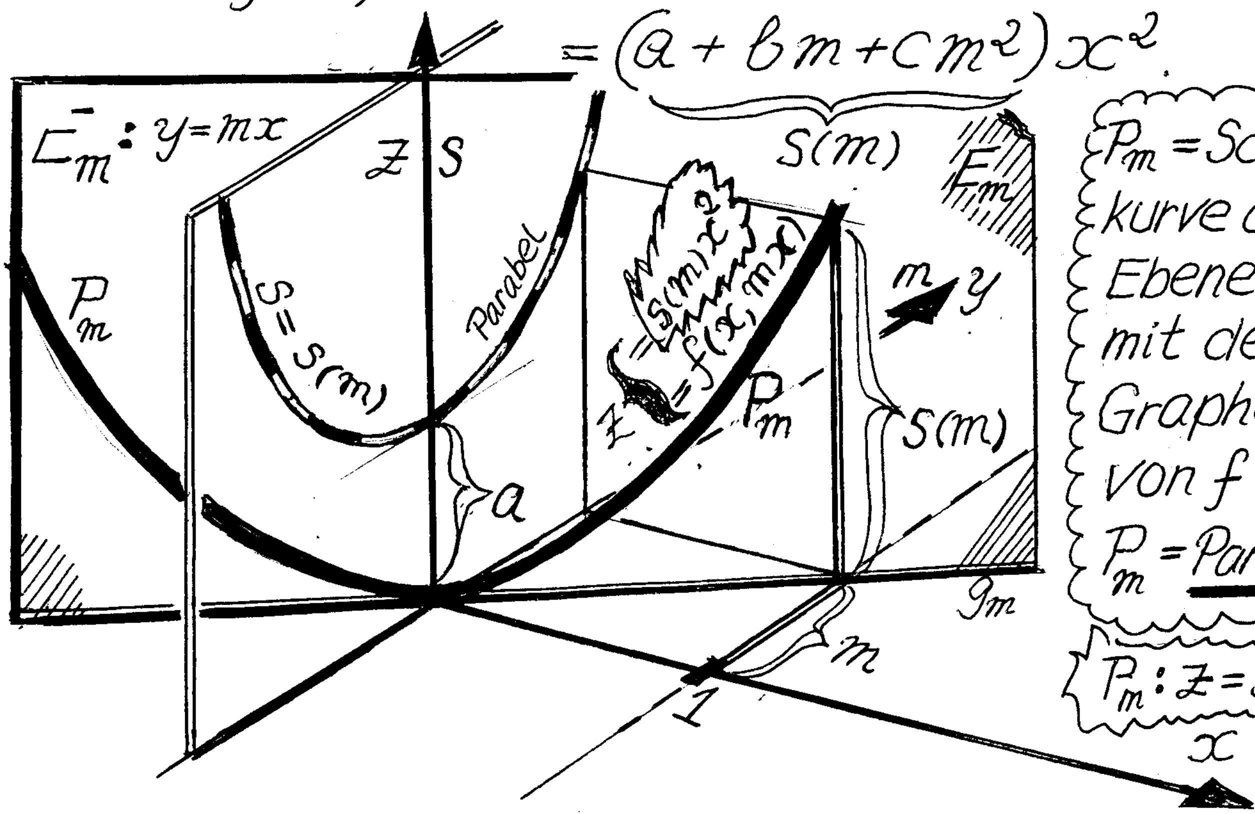
$\nabla\!\!\!/\nabla\!\!\!/ \; \underline{A = A(x,y) = 4ac - b^2} \; (= \text{const.})$

Untersuchen des "Extremums" in $(0,0)$!:

Verhalten von f längs der Geraden

$$g_m : y = mx.$$

$$\therefore f(x, mx) = ax^2 + bxmx + cm^2x^2 = \underbrace{(a + bm + cm^2)}_{S(m)} x^2.$$



P_m = Schnitt=kurve der Ebene E_m mit dem Graphen von f!

P_m = Parabel.

$P_m : z = S(m)x^2$

$\boxed{\text{••• Fortsetzung}}$

• $\underline{A = 4ac - b^2 > 0}$ $\therefore$ $b^2 - 4ac < 0$ $\therefore$

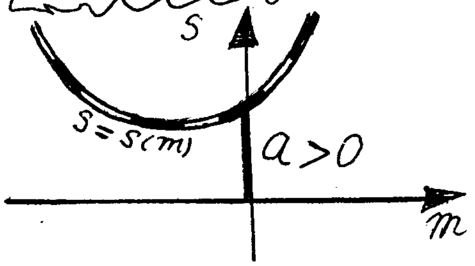
$\therefore$ Die quadratische Gleichung $s(m) = a + bm + cm^2 = 0$ hat keine Lösung!

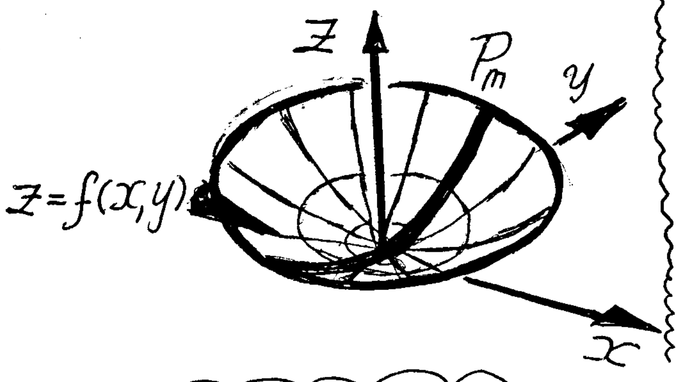
$\boxed{f_{xx}(0,0) = 2a > 0;\ a>0}$

$s(m) > 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$

$\forall m$: P_m nach oben offen

$\therefore$ f hat relatives <u>Minimum</u> in $(0,0)$





$a > 0$

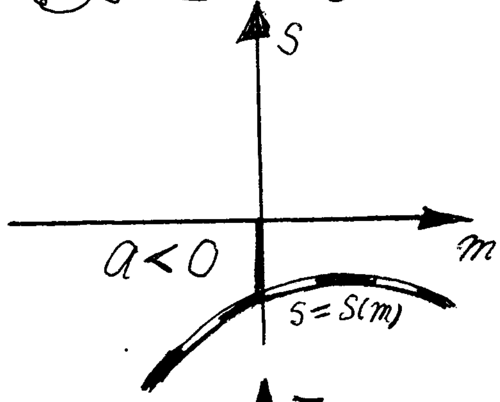
$f_{xx}(0,0) > 0$

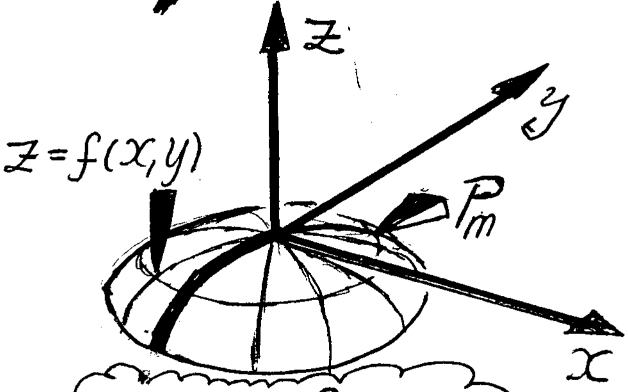
$\boxed{f_{xx}(0,0) = 2a < 0;\ a<0}$

$s(m) < 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$

$\forall m$: P_m nach unten offen

$\therefore$ f hat relatives <u>Maximum</u> in $(0,0)$





$a < 0$

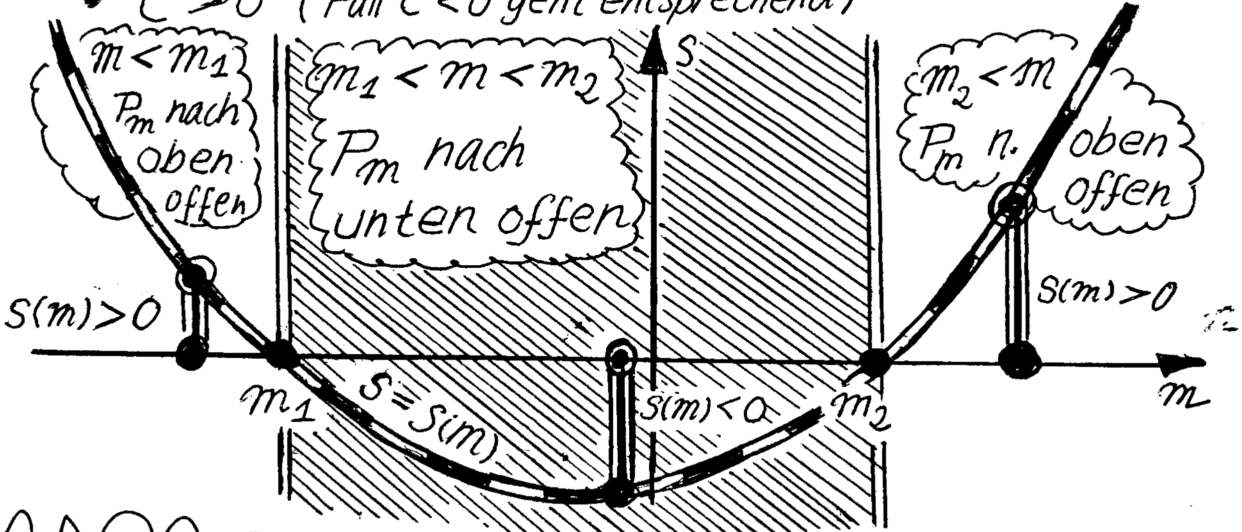
$f_{xx}(0,0) < 0$

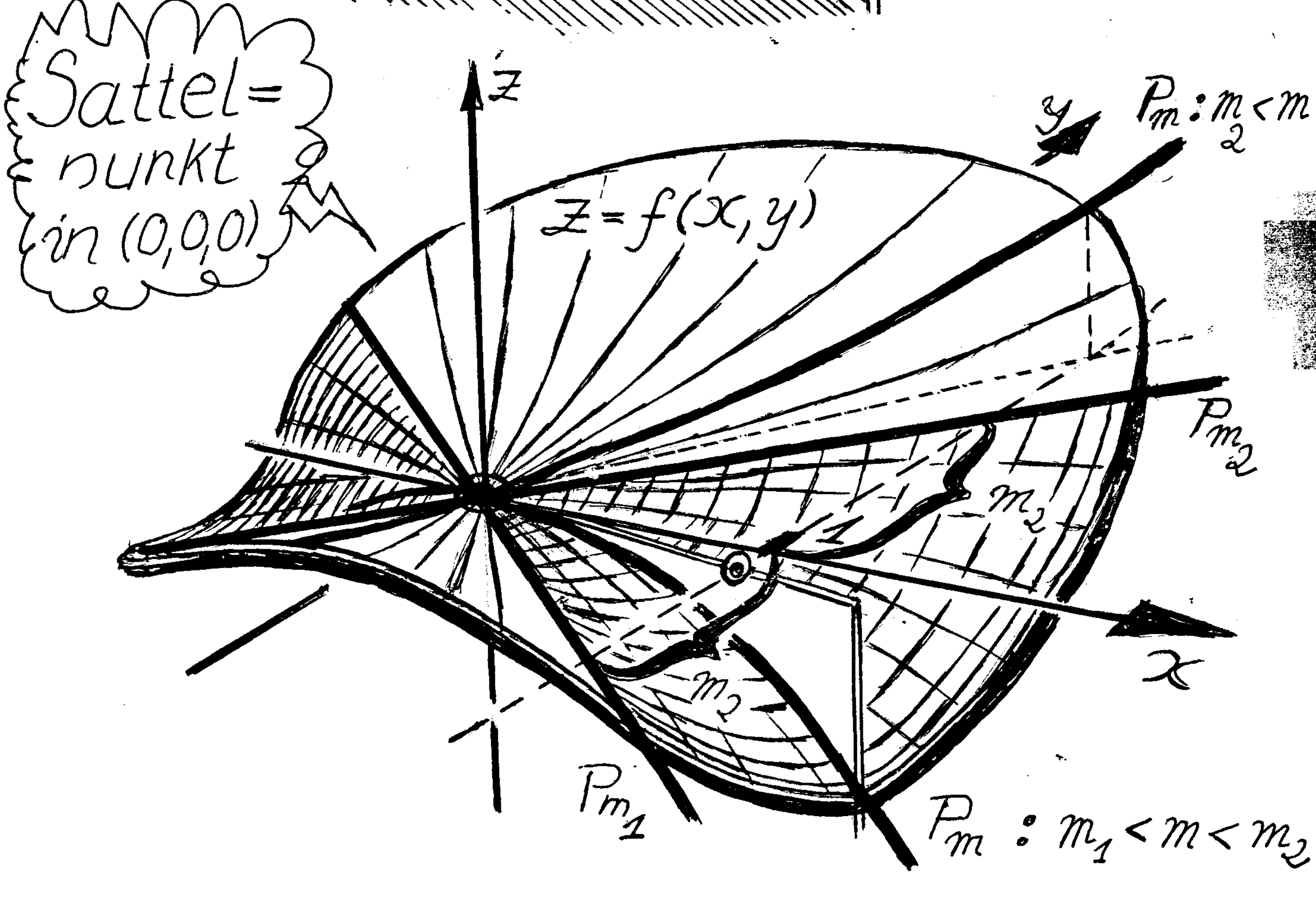
… Fortsetzung

- $A = 4ac - b^2 < 0 \therefore b^2 - 4ac > 0$
- $c \neq 0$ (Fall $a \neq 0$ geht entsprechend)

$\therefore$ Die quadratische Gleichung $s(m) = a + bm + cm^2 = 0$ hat zwei Lösungen $m_{1,2} = -\frac{b}{2c} \mp \frac{1}{2c}\sqrt{b^2 - 4ac}$.

- $c > 0$ (Fall $c < 0$ geht entsprechend)





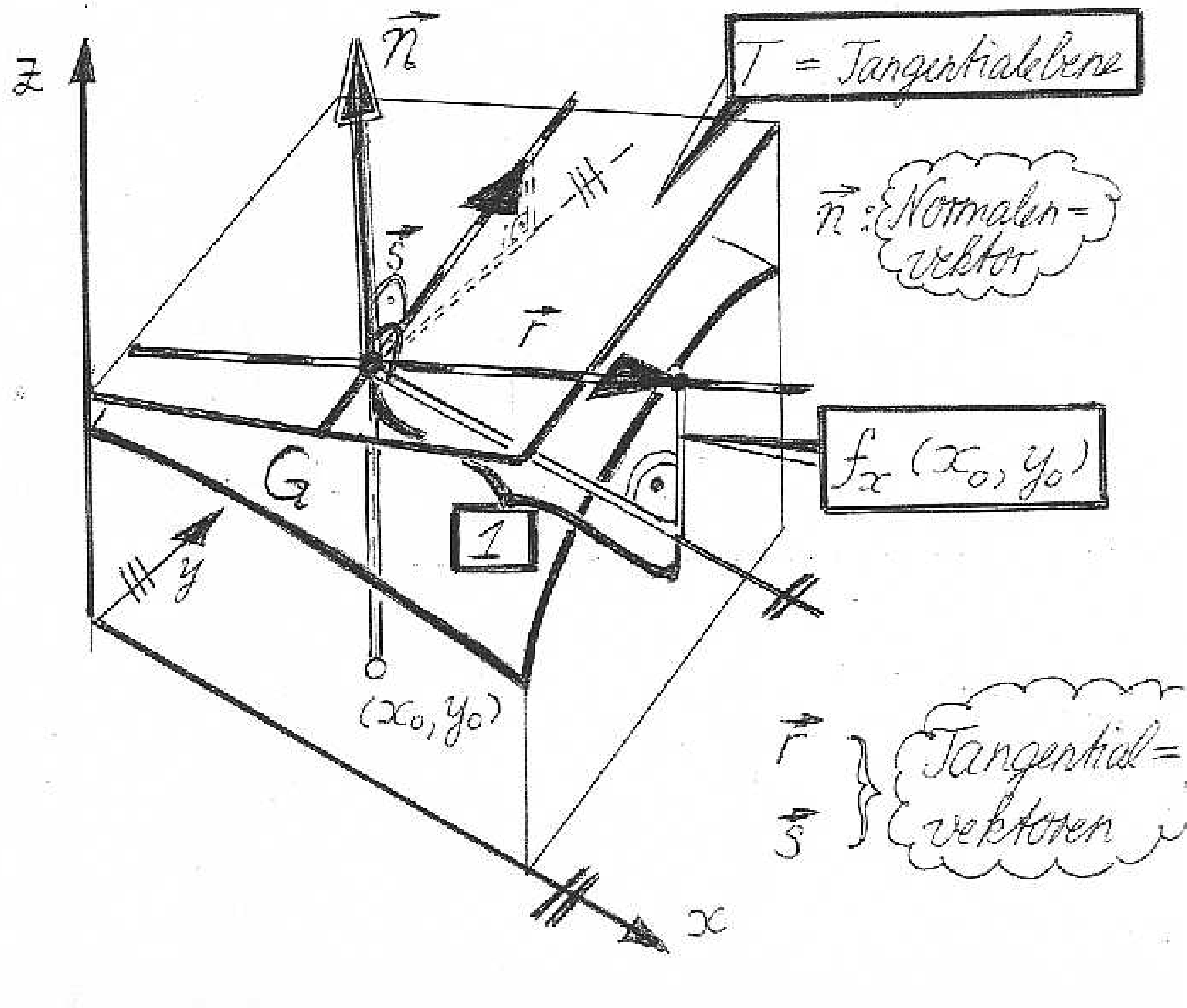
Die Tangentialebene ... vgl. (24.2)

- $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$; $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$; $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$.
- f sei partiell differenzierbar in (x_0, y_0), d.h.

  $\exists\, f_x(x_0, y_0)$; $f_y(x_0, y_0)$.

- $G = Graph(f) = \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbb{D}\}$.

<u>Annahme:</u> G besitzt in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ eine Tangentialebene!



... und ihre Darstellung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix}; \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \text{Stützvektor von } T$$

$\therefore$ Parameterdarstellung von T:

$$(u, v) \mapsto \vec{q}(u, v) = \vec{a} + u\vec{r} + v\vec{s} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 + r \\ y_0 + s \\ f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) r + f_y(x_0, y_0) s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ p(x, y) \end{pmatrix}.$$

NB: $r = x - x_0$; $s = y - y_0$ $\therefore$

T ist der Graph der Funktion:

$$p(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\vec{n} = \vec{r} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Normalenvektor zu } T\text{)}$$

Totale Differenzierbarkeit ... (vgl. 24.3)

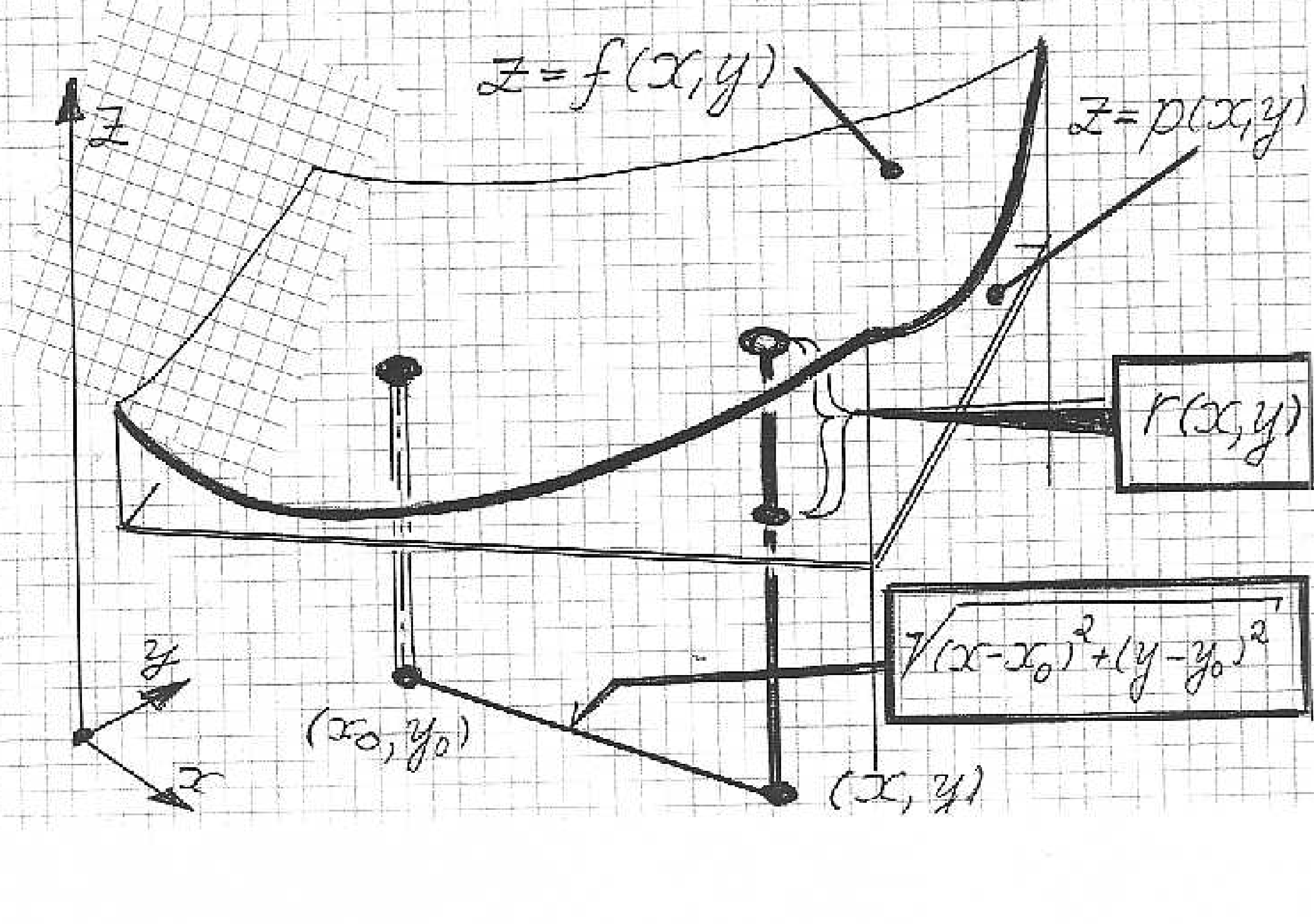
- $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$; $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$; $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$
- f sei partiell differenzierbar in (x_0, y_0).
- $p(x,y) := f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

  $r(x,y) := f(x,y) - p(x,y)$

Def: f heisst (total) differenzierbar in (x_0, y_0)

$$:\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$



... **und ihre Bedeutung**

f ist an der Stelle (x_0, y_0) total differenzierbar

$$\Longleftrightarrow$$

Der Graph von f hat an der Stelle (x_0, y_0) eine Tangentialebene!

Def: Ist f an der Stelle (x_0, y_0) total differenzierbar, so heisst die Funktion

$$p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

die Linearisierung von f an der Stelle (x_0, y_0).

NB: Ist $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ an jeder Stelle $(x,y) \in \mathbb{D}$ partiell differenzierbar, und sind die partiellen Ableitungen $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$ stetige Funktionen, so ist f an jeder Stelle $(x,y) \in \mathbb{D}$ total differenzierbar.

Fazit: In der Regel ist eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ in jedem innern Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$ total differenzierbar.

Ein (Gegen-) Beispiel

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ f(x,y) = -\sqrt{|xy|}$
- $f(x,0) = f(0,y) = 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\left\{ f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0. \right.$ Also ist f an der Stelle $(0,0)$ partiell differenzierbar!

Insbesondere wird nun:

$$r(x,y) = f(x,y) - p(x,y) = f(x,y) - (0 + 0x + 0y) = f(x,y) = -\sqrt{|xy|}$$

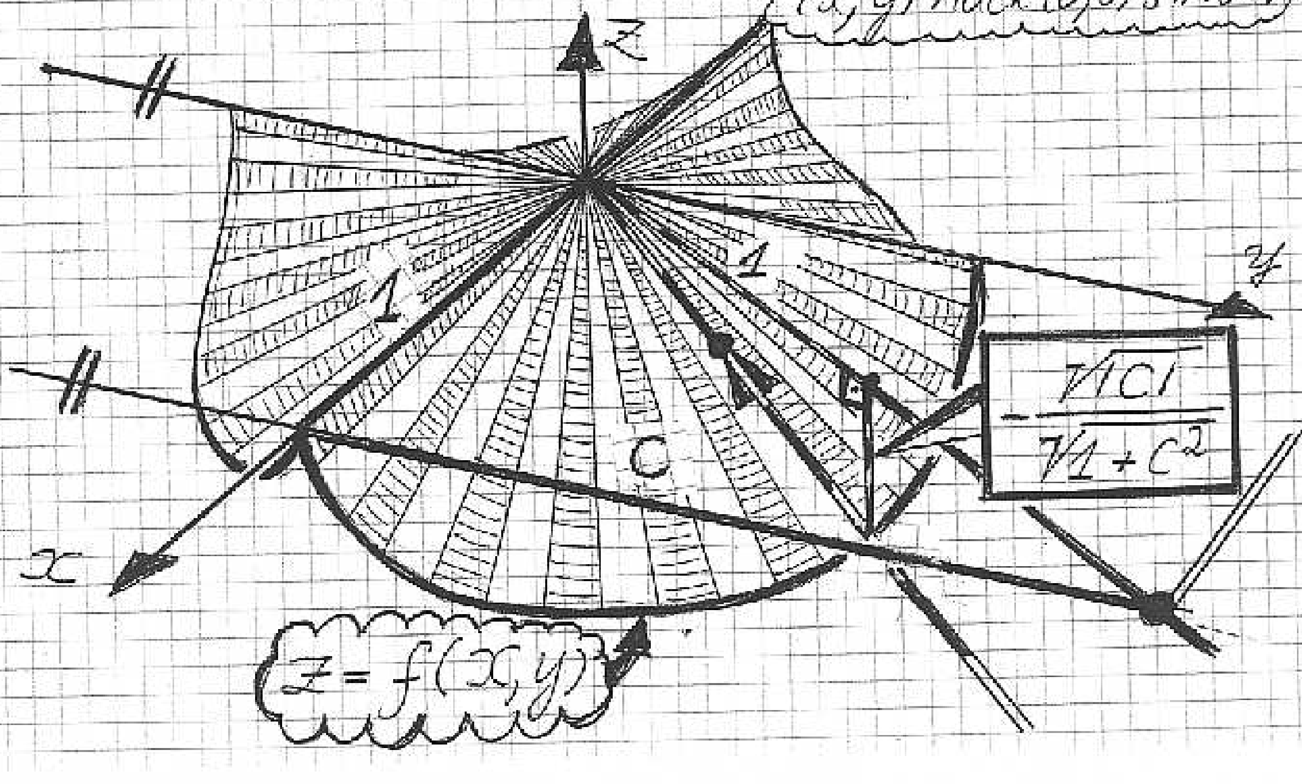
Sei $c \in \mathbb{R}$ fest. Es folgt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{r(x, cx)}{\sqrt{(x-0)^2 + (cx-0)^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sqrt{|c|}\,|x|}{\sqrt{1+c^2}\,|x|} = \frac{-\sqrt{|c|}}{\sqrt{1+c^2}}$$

!

- $$\nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{r(x, cx)}{\sqrt{(x-0)^2 + (cx-0)^2}}$$

Der "Grenzwert" des Bruches hängt davon ab, aus welcher Richtung (x,y) nach $(0,0)$ strebt.



Die Methode der kleinsten Quadrate

(vgl. 23.7)

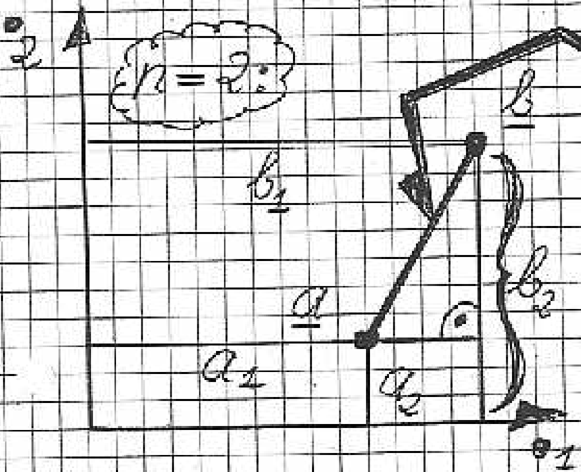
Vorbetrachtung: • $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

• $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ — n-Tupel reeller Zahlen

• $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

Distanz der beiden n-Tupel $\underline{a}$ und $\underline{b}$:

$$d(\underline{a}, \underline{b}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$$



$$\boxed{d(\underline{a}, \underline{b}) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}$$

$d(\underline{a}, \underline{b})$ = übliche Distanz ...

$n = 3$: $d(\underline{a}, \underline{b})$ = übliche Distanz der Punkte $\underline{a}$, $\underline{b}$ im Raum $\mathbb{R}^3$ ...

$n > 3$: $d(\underline{a}, \underline{b})$ = natürliche Verallgemeinerung des Distanzbegriffs aus Ebene und Raum.

Der Mittelwert

- Gegeben: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- Gesucht: $\bar{x} \in \mathbb{R}$ derart dass

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})) =$$
$$= \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt[2]{(x_1-\bar{x})^2 + \dots + (x_n-\bar{x})^2}$$

minimal wird!

!! Idee !! Die Summe der Quadrate

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

muss minimal, also am kleinsten werden

... ⚠ Methode der kleinsten Quadrate ⚠

Also: $F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ minimieren

$$F'(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - \bar{x})^2\right)' = \sum_{i=1}^{n} -2(x_i - \bar{x}) =$$
$$= -2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = -2\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - n\bar{x}\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}} = \text{Mittelwert der Zahlen } x_i$$

NB: $F''(\bar{x}) = 2n > 0 \Rightarrow F$ hat Minimum in $\bar{x}$!

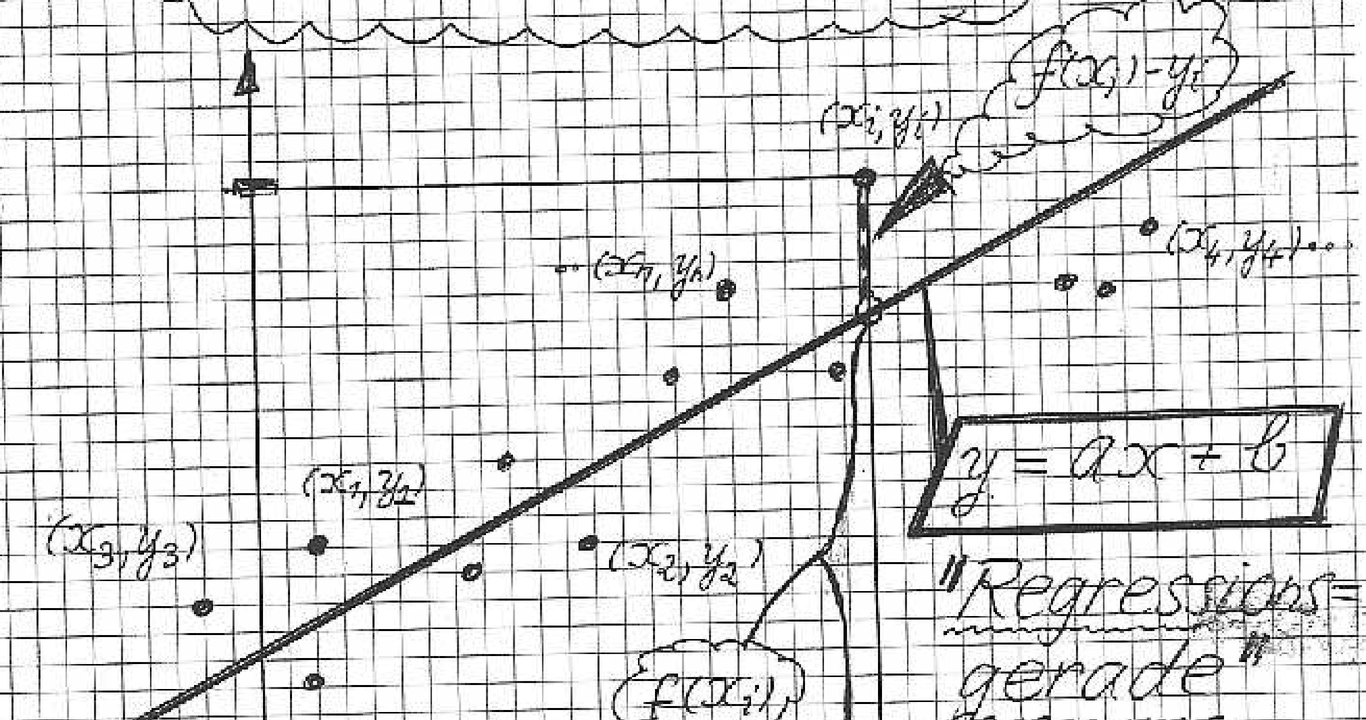
Lineare Regression ...

- Gegeben Zahlenpaare:
  $(x_1, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$

- Gesucht: Lineare Funktion
  $y = ax + b = f(x)$ derart dass

  $$d((f(x_1), \ldots, f(x_n)), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2} = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2}$$

  minimal wird.



... $\boxed{\text{Idee}}$: (Wie früher...)

Die Summe der Quadrate

$$F(a,b) := \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

minimal machen.

$$\underline{\underline{F_a'(a,b)}} = \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a} (ax_i + b - y_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2x_i (ax_i + b - y_i) =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i) =$$

$$= 2 \left(\sum_{i=1}^{n} ax_i^2 + \sum_{i=1}^{n} bx_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)$$

$$\underline{\underline{= 2 \left(a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right).}}$$

$$\underline{\underline{F_b'(a,b)}} = \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = \ldots$$

$$\underline{\underline{\ldots 2 \left(a \sum_{i=1}^{n} x_i + bn - \sum_{i=1}^{n} y_i \right)}}$$

Fortsetzung ...

... $F_a(a_0, b_0) = F_b(a_0, b_0) = 0$ ...

$$\text{(I)}\quad a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 \quad \Big|\cdot n$$

$$\text{(II)}\quad a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_0 n - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \quad \Big| - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\therefore\quad a_0 n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - a_0 \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 - \Big(n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\Big) = 0$$

$$\therefore\quad \boxed{a_0 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2}}$$

$$\overset{\text{(II)}}{\Longrightarrow}\quad b_0 = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \dots \therefore$$

$$\therefore\quad \boxed{b_0 = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2}}$$

Frage: Wann ist "der Nenner = 0"?

... Untersuchung des Nenners:

$$N = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 \dots$$

"Ein Trick"

$$\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \text{Mittelwert.}$$

$$z_i := x_i - \bar{x} \; ; \; (i = 1, \dots, n).$$

$\Longrightarrow$

$$x_i = \bar{x} + z_i \quad ; \; (i = 1, \dots, n). \quad (\star)$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i - n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \text{ d.h.}$$

$$(\star\star) \quad \sum_{i=1}^{n} z_i = 0.$$

$$\underline{N} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \overset{\star}{=} n\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} + z_i)^2 + (n\bar{x})^2$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} (\bar{x}^2 + 2\bar{x}z_i + z_i^2) + n\bar{x}^2 =$$

$$= n\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 + 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2\right) - n^2\bar{x}^2$$

$$\overset{\star\star}{=} n\left(n\bar{x}^2 + 2\bar{x}\cdot 0 + \sum_{i=1}^{n} z_i^2\right) - n^2\bar{x}^2$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \underline{n\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$N \geq 0$ (immer!)

$N > 0 \Longleftrightarrow$ Die n Zahlen $x_1, \dots, x_n$ sind nicht alle gleich.

... **Diskussion**

Frage: Hat $F(a,b)$ an der Stelle (a_0, b_0) tatsächlich ein Minimum ?

$$\left.\begin{aligned} F_{aa}(a,b) &= 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ F_{bb}(a,b) &= 2n \\ F_{ab}(a,b) &= 2\sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$A = A(a,b) = F_{aa}(a,b)F_{bb}(a,b) - (F_{ab}(a,b))^2 =$$

$$= \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)(2n) - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 =$$

$$= 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \Longrightarrow$$

$$A = 4\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) = 4N$$

Sind die n Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ nicht alle gleich, so gilt: ...

$N > 0$ (s. Δ) und $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$, also

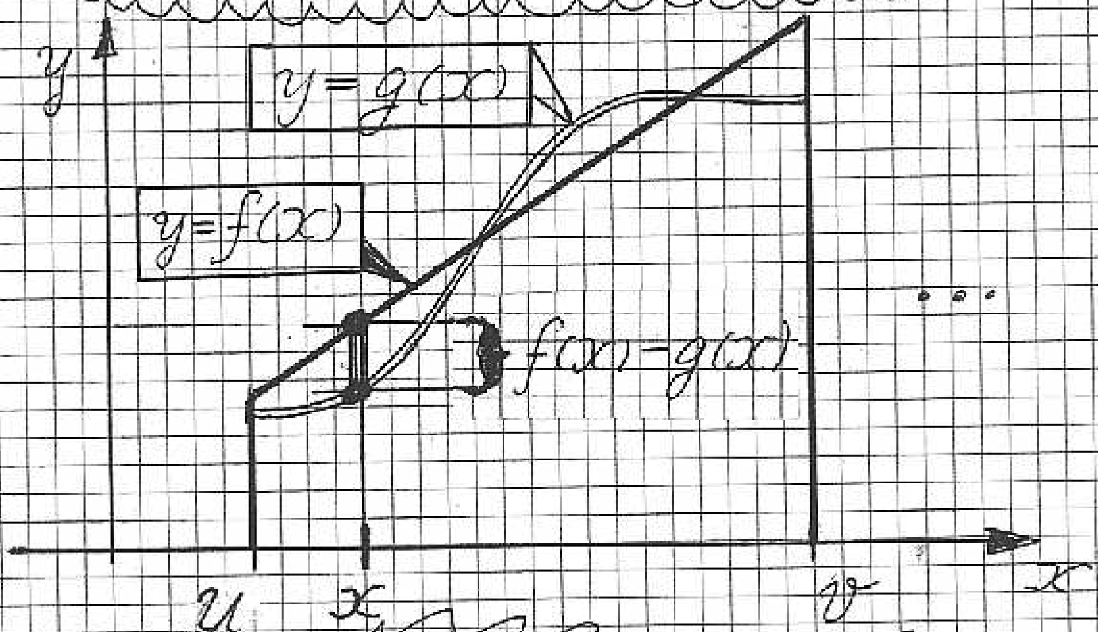
$A > 0$ und $F_{aa}(a,b) > 0$ ...

$\therefore$ $F(a,b)$ hat in (a_0, b_0) ein relatives Minimum.

Der stetige Fall

- $g : [u,v] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

☆ <u>Gesucht</u>: Lineare Funktion $f(x) = ax + b$, welche g „auf dem Intervall $[u,v]$ möglichst gut annähert".



Idee! $\int_u^v (f(x) - g(x))^2 \, dx$ minimal machen!

$$F(a,b) := \int_u^v (ax + b - g(x))^2 \, dx$$

minimal machen!

Beispiel ...

$u=0;\ v=1;\ g(x)=\sqrt{x}$

$$F(a,b)=\int_0^1 (ax+b-\sqrt{x})^2\,dx=$$

$$=\int_0^1 (a^2x^2+b^2+x+2abx-2ax\sqrt{x}-2b\sqrt{x})\,dx=$$

$$=\int_0^1 a^2x^2dx+\int_0^1 b^2dx+\int_0^1 x\,dx+\int_0^1 2abx\,dx-\int_0^1 2ax\sqrt{x}\,dx-\int_0^1 2b\sqrt{x}\,dx$$

$$=a^2\int_0^1 x^2dx+b^2\int_0^1 1\,dx+\int_0^1 x\,dx+2ab\int_0^1 x\,dx-2a\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx-2b\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

$$=a^2\cdot\frac{1}{3}+b^2\cdot 1+\frac{1}{2}+2ab\frac{1}{2}-2a\frac{1}{\frac{5}{2}}-2b\frac{1}{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}a^2+b^2+ab-\frac{4}{5}a-\frac{4}{3}b+\frac{1}{2}.$$

Wir betrachten $F(a,b)$ als Funktion in den Variablen a und b und bestimmen das Minimum dieser Funktion. Zuerst suchen wir die stationären Stellen, d.h. die Stellen $(a_0,b_0)\in R^2$ mit $F_a(a_0,b_0)=F_b(a_0,b_0)=0$:

$(\star)$ $F_a(a,b)=\frac{\partial}{\partial a}F(a,b)=\frac{2}{3}a+b-\frac{4}{5}$;

$(\star\star)$ $F_b(a,b)=\frac{\partial}{\partial b}F(a,b)=a+2b-\frac{4}{3}$.

Dies führt auf das Gleichungssystem

... $\boxed{\text{Fortsetzung}}$

$$\frac{2}{3}a + b - \frac{4}{5} = 0 \quad (I)$$

$$a + 2b - \frac{4}{3} = 0 \quad (II)$$

Die "Gleichungsoperation $2\cdot(I) - (II)$" liefert

$\frac{1}{3}a - \frac{4}{15} = 0$, also $a = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$. Einsetzen in (I) und auflösen nach b ergibt $b = \frac{4}{15}$.

Damit ist gezeigt:

$(a_0, b_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{15}\right)$ ist die einzige stationäre Stelle von $F(a,b)$.

$F(a,b)$ kann also höchstens an der Stelle $\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{15}\right)$ ein relatives Extremum haben. Wir wollen nachweisen, ob dies auch tatsächlich zutrifft:

$$F_{aa}(a,b) = \left(\frac{2}{3}a + b - \frac{4}{5}\right)_a = \frac{2}{3}$$

$$F_{bb}(a,b) = \left(a + 2b - \frac{4}{3}\right)_b = 2$$

$$F_{ab}(a,b) = \left(\frac{2}{3}a + b - \frac{4}{5}\right)_b = 1$$

Es folgt:

$$\Delta = F_{aa}(a,b)F_{bb}(a,b) - F_{ab}(a,b)^2 = \frac{2}{3}\cdot 2 - 1^2 = \frac{1}{3} > 0$$

Wegen $F_{aa}(a,b) = \frac{2}{3} > 0$ liegt ein Minimum vor!