UNIVERSITE PARIS VI - PIERRE ET MARIE CURIE

Thèse de doctorat

pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Paris VI

Spécialité : Mathématiques

présentée par : **Joseph NAJNUDEL**

Titre :

Temps locaux et pénalisations browniennes

Soutenue le 27 juin 2007 devant le jury composé de :

M. Jean BERTOIN, *examinateur*
M. Philippe BIANE, *examinateur*
M. Erwin BOLTHAUSEN, *rapporteur*
M. Jean-François LE GALL, *examinateur*
M. Bernard ROYNETTE, *rapporteur*
M. Marc YOR, *directeur de thèse*

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude au professeur Marc Yor, sans qui ce travail n'aurait pu voir le jour. Je le remercie particulièrement pour la disponibilité constante dont il a fait preuve durant ces quatre années, ainsi que pour tous les conseils scientifiques qu'il a pu me donner, et qui m'ont été une aide précieuse.

Je suis très reconnaissant à Erwin Bolthausen et à Bernard Roynette d'avoir accepté de rédiger un rapport sur mon travail, et d'avoir eu avec moi des discussions mathématiques enrichissantes, élargissant mes perspectives de recherche.

Je suis également très honoré que Jean Bertoin, Philippe Biane et Jean-François Le Gall aient accepté d'être membres de mon jury de thèse. Je remercie en particulier Jean Bertoin et Jean-François Le Gall pour le rôle qu'ils ont eu dans mon apprentissage des probabilités, à l'ENS et en DEA.

J'adresse aussi mes remerciements aux membres de l'équipe administrative et technique du laboratoire pour leur disponibilité et leur efficacité, qui m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions.

Je remercie les participants et organisateurs du groupe de travail WIP, qui m'ont permis d'exposer régulièrement mes travaux de recherche, tout en gardant contact avec d'autres domaines des probabilités.

Merci également aux thésards du laboratoire, en particulier à Arvind (qui partage mon bureau), Anne-Laure, Guillaume, Nathalie, Olivier, Paul, Sophie, pour les moments de détente que nous avons passés ensemble.

Je voudrais aussi remercier d'anciens thésards de Marc Yor qui m'ont apporté leur aide : Ashkan, Jan, Marc, Roger, Sacha, ainsi que d'autres membres du laboratoire avec qui j'ai pu avoir des discussions interessantes, mathématiques ou autres ; en particulier Nathanaël Enriquez, Jean-Paul Thouvenot, Lorenzo Zambotti.

Enfin, je n'oublie évidemment pas ma famille et mes amis. J'ai une pensée particulière pour ma mère et mon frère Jean-Samuel, qui m'ont constamment soutenu et encouragé durant ces quatre années de thèse.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le mouvement brownien est un processus qui intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes (mouvement de particules, formation des polymères, évolution des cours boursiers, etc...), du fait de ses nombreuses propriétés mathématiques : c'est à la fois un processus de Markov, un processus de Lévy, un processus gaussien, un processus auto-similaire, une martingale continue, etc.

Cependant, les trajectoires du mouvement brownien ont un comportement particulier qui ne correspond pas nécessairement à ce que l'on attend des phénomènes que l'on étudie : par exemple, en dimension inférieure ou égale à trois, elles ont presque sûrement des points doubles, alors qu'on peut vouloir modéliser des polymères qui ne se recoupent pas ; elles sont non bornées alors qu'on peut vouloir modéliser le mouvement d'atomes qui restent dans un volume fini, etc.

Il peut donc être nécessaire de changer la loi du mouvement brownien, d'une manière qui permette de modifier certaines propriétés importantes de ses trajectoires, tout en en conservant d'autres : on peut vouloir construire un "mouvement brownien plan auto-évitant", un mouvement brownien conditionné à rester dans un compact, ou un mouvement brownien réel, conditionné à avoir un supremum fini, inférieur à une valeur donnée.

Une des manières de construire de tels processus est d'effectuer, à partir de la loi du mouvement brownien, ce que nous appellerons des "pénalisations", c'est à dire des changements de probabilité "absoluments continus" (i.e. obtenus via une densité de probabilité) suivis d'un éventuel passage à la limite.
Plus précisément, le principe des pénalisations browniennes est le suivant : on commence par considérer une famille de mesures de probabilité (le plus souvent indexée par un paramètre réel positif), définies par leurs densités par rapport à la mesure de Wiener.
Sous ces mesures, le processus canonique admet les mêmes propriétés presque sûres que le mouvement brownien. En revanche, on peut, dans de nombreux cas, définir une mesure limite pour cette famille de probabilités, et cette mesure limite est souvent singulière par rapport à la mesure de Wiener : on a donc modifié radicalement le comportement des trajectoires du processus canonique en faisant le changement de probabilité correspondant.

Il est en fait possible de construire ce type de mesures dans un cadre plus général que celui de la mesure de Wiener ; pour cela, on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$, et une famille $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ de variables aléatoires positives d'espérance finie et non nulle.

Ensuite, on définit la famille de probabilités $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ par leur densité par rapport à $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}_t = \frac{\Gamma_t}{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\Gamma_t]}.\mathbf{P}$$

La question que l'on se pose alors est celle de l'existence d'une mesure limite $\mathbf{P}_\infty$ vérifiant la propriété suivante : pour tout réel positif s, et pour tout événement $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$:

$$\mathbf{P}_t(\Lambda_s) \underset{t\to\infty}{\to} \mathbf{P}_\infty(\Lambda_s)$$

Si la mesure $\mathbf{P}_\infty$ existe, l'étape suivante consiste à étudier ses propriétés et à les comparer à celles de $\mathbf{P}$.

Le cas des pénalisations browniennes correspond à $\Omega = \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$ (X étant le processus canonique) et $\mathbf{P} = \mathbf{W}$ (mesure de Wiener) ; dans ce cas, le comportement de $\mathbf{P}_\infty$ est donné par l'étude de la trajectoire de $(X_s)_{s\geq 0}$ sous cette nouvelle mesure.

Une grande partie des processus que nous construisons rentre dans ce cadre ; cependant, il y a deux exemples pour lesquels nous aurons besoin de pénalisations plus générales : celui des mesures associées à l'araignée brownienne (un processus pouvant s'interpréter comme un mouvement brownien sur un ensemble fini de demi-droites concourantes), et celui du modèle d'Edwards (voir [Edw65]), qui est un modèle de polymère où l'on "pénalise" la trajectoire d'un mouvement brownien d-dimensionnel ($d \in \{1, 2, 3\}$) par ses intersections avec elle-même.

D'autre part, les pénalisations que nous étudions dans cette thèse étant liées à la mesure d'occupation des trajectoires browniennes, ainsi qu'à leurs points doubles, il nous a paru important d'inclure dans notre travail une étude concernant les propriétés des temps locaux et des temps locaux d'intersection du mouvement brownien, même si cette étude est, dans une certaine mesure, indépendante de la question des pénalisations.

Notre travail concerne donc trois types de problèmes :

- Les problèmes liés aux temps locaux et aux temps locaux d'intersection du mouvement brownien (en dimension inférieure ou égale à trois).

- Les pénalisations browniennes unidimensionnelles, et leurs généralisations à l'araignée brownienne.

- Le modèle d'Edwards et ses généralisations (en dimension inférieure ou égale à trois).

1.1 Temps locaux et temps locaux d'intersection du mouvement brownien

1.1.1 Cas de la dimension 1

En dimension 1, la mesure d'occupation de la trajectoire brownienne jusqu'à un temps fixé est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Il en résulte qu'on peut définir les temps locaux $(L_t^a)_{t\geq 0, a\in\mathbf{R}}$ d'un mouvement brownien B par la formule suivante (valable pour toute fonction réelle mesurable bornée f) :

$$\int_{\mathbf{R}} f(a) L_t^a da = \int_0^t f(B_s) ds$$

On remarque que cette formule permet d'étendre l'intégrale :

$$\int_0^t f(B_s) ds$$

au cas où la fonction f est remplacée par une mesure finie, mais comme on le voit dans N. Eisenbaum [Eis00], N. Bouleau et M. Yor [BY81], on peut faire encore mieux en utilisant les propriétés des temps locaux et de l'intégrale stochastique.

Plus précisément, les temps locaux sont α-höldériens par rapport à la variable d'espace pour tout indice α strictement inférieur à $1/2$, mais ils ne sont pas dérivables.

Lorsque f est une fonction localement de carré intégrable, on peut néanmoins donner un sens à l'expression

$$\int_{\mathbf{R}} f(a) d_a L_t^a$$

(où $d_a L_t^a$ désigne formellement la variation infinitésimale de temps local : $L_t^{a+da} - L_t^a$) de la manière suivante : on pose

$$\int_{\mathbf{R}} f(a) d_a L_t^a = 2 \left[\int_0^t f(B_s) dB_s - \int_{B_0}^{B_t} f \right]$$

après avoir montré que cette définition est compatible avec la définition "naturelle" du membre de gauche lorsque f est une fonction en escalier.

De plus, si f est localement de carré intégrable et si $g = f'$ est sa dérivée au sens des distributions, on peut écrire (grâce à une intégration par partie formelle) :

$$\int_0^t g(B_s) ds = - \int_{\mathbf{R}} f(a) d_a L_t^a$$

après s'être assuré que cette égalité est vraie dans le cas où g est une fonction localement intégrable, et que le second membre ne dépend pas du choix de f comme primitive de g.

Cette définition permet en particulier de donner un sens à l'expression :

$$\int_0^t g(B_s) ds$$

lorsque g est la valeur principale de $1/x$ ou la partie finie de $1/x_+^\alpha$ pour $\alpha < 3/2$ (voir Ph. Biane et M. Yor [BY87], T. Yamada [Yam96]).

L'objet du Chapitre 2 de cette thèse est d'obtenir des résultats analogues pour les temps locaux d'intersection $(\alpha_t^a)_{t \geq 0, a \in \mathbf{R}}$ du mouvement brownien B, définis par l'égalité suivante (valable pour toute fonction f mesurable bornée) :

$$\int_0^t du \int_0^u ds\, f(B_s - B_u) = \int_{\mathbf{R}} f(a) \alpha_t^a da$$

La quantité α_t^0, formellement obtenue par cette égalité en remplaçant f par la mesure de Dirac en zéro, correspond intuitivement au temps passé par le mouvement brownien à se recouper lui-même ; on a également :

$$\alpha_t^0 = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} (L_t^a)^2\, da$$

Par ailleurs, on montre qu'à t fixé, il existe une version de $(\alpha_t^a)_{a\in\mathbf{R}}$ qui admet presque sûrement, sur $\mathbf{R}^*$, une dérivée par rapport à a donnée par la formule suivante :

$$\beta_t^a = 2\left[t\mathbf{1}_{a<0} - \int_0^t \mathbf{1}_{B_s - B_u > a} ds - \int_0^t L_u^{a+B_u} dB_u\right]$$

Cette formule permet de poser, lorsque f est une fonction localement de carré intégrable et bien définie en zéro, l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbf{R}} f(a) d_a\beta_t^a = 2\int_0^t (f(B_s - B_t) - f(0))ds + 4\int_0^t \left[\int_0^{B_0 - B_u} f + \int_0^u f(-B_s^{(u)}) dB_s^{(u)}\right] dB_u$$

avec $B_s^{(u)} = B_u - B_{u-s}$, après avoir vérifié la compatibilité de cette formule avec la définition naturelle du membre de gauche lorsque f est en escalier.

De plus, lorsque f est la primitive seconde d'une fonction localement intégrable, on a :

$$\int_{\mathbf{R}} f(a) d_a\beta_t^a = \int_0^t du \int_0^u ds\, f''(B_s - B_u)$$

résultat qui permet, à l'aide du membre de gauche, de définir :

$$\int_0^t du \int_0^u ds\, g(B_s - B_u)$$

lorsque $g = f''$ est la dérivée seconde, au sens des distributions, d'une fonction f localement de carré intégrable, dont la valeur en zéro est fixée.

Le cas où g est la valeur principale de $\frac{\text{sgn}(x)}{|x|^\beta}$ rentre dans ce cadre pour $\beta < 5/2$; si cette condition est vérifiée, il permet d'étudier le comportement de l'intégrale :

$$\int_0^t du \int_0^u ds \frac{\text{sgn}(B_s - B_u)}{|B_s - B_u|^\beta}\mathbf{1}_{|B_s - B_u| > \epsilon}$$

lorsque ϵ tend vers zéro.

A present, il serait peut-être intéressant de faire une étude analogue des temps locaux d'intersection d'ordre plus élevé $(\alpha_t^{a_1,\ldots,a_k})_{a_1,\ldots,a_k\in\mathbf{R}}$, définis pour tout $k \geq 1$ par la formule :

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_k} dt_{k+1}\, f(B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) = \int_{\mathbf{R}^k} f(a_1, \ldots, a_k)\, \alpha_t^{a_1,\ldots,a_k}\, da_1 da_2 \ldots da_k$$

valable lorsque f est une fonction mesurable bornée.

1.1.2 Cas des dimensions 2 et 3

En dimension $d \in \{2, 3\}$, la mesure d'occupation d'un mouvement brownien B est étrangère à la mesure de Lebesgue : il n'est donc pas possible de définir des temps locaux dans ce cas.

Cependant, la situation est différente pour les temps locaux d'intersection, qu'il est possible de construire moyennant quelques précautions.

L'une des méthodes de construction consiste à montrer que, lorsque $t > 0$ est fixé, il existe une famille continue de variables aléatoires $(\alpha_t^a)_{a \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}}$ telle que pour toute fonction f mesurable bornée défine sur $\mathbf{R}^d$, nulle au voisinage de zéro :

$$\int_0^t du \int_0^u ds\, f(B_s - B_u) = \int_{\mathbf{R}^d \setminus \{0\}} f(a)\, \alpha_t^a \, da$$

(voir D. Geman, J. Horowitz et J. Rosen [GHR84], M.-B. Marcus et J. Rosen [MR06], pour une discussion générale sur les mesures d'occupation associées au mouvement brownien).

On peut prouver que le temps local d'intersection α_t^a tend presque sûrement vers l'infini quand a tend vers zéro ; de ce fait, on ne peut pas directement donner un sens à la quantité α_t^0, formellement définie par :

$$\alpha_t^0 = \int_0^t du \int_0^u ds\, \delta(B_s - B_u)$$

où δ est la mesure de Dirac en zéro.

En dimension 2, on peut néanmoins donner une solution à ce problème grâce à une technique appelée renormalisation (voir S. Varadhan [Var69]), et qui consiste à considérer, pour $a \neq 0$, la quantité :

$$\gamma_t^a = \alpha_t^a - \mathbf{E}[\alpha_t^a]$$

obtenue en enlevant au temps local d'intersection sa propre espérance.

Il est alors possible de montrer qu'on peut définir γ_t^0 comme étant la limite presque sûre (et également dans tous les espaces L^p) de γ_t^a quand a tend vers zéro : on peut considérer que c'est cette variable aléatoire qui mesure le temps que le mouvement brownien plan B passe à se recouper lui-même.

De manière purement formelle, on pourrait écrire :

$$\alpha_t^0 = \gamma_t^0 + \mathbf{E}[\alpha_t^0]$$

où $\mathbf{E}[\alpha_t^0]$ est une "constante infinie de normalisation".

La renormalisation de Varadhan peut aussi être généralisée au cas des points d'ordre $k \geq 3$ de la trajectoire brownienne ; on peut donc également donner un sens à la définition formelle suivante :

$$\gamma_{t,k}^0 = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \, \left[\delta(B_{t_2} - B_{t_1}) \ldots \delta(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \ldots \right.$$
$$\left. \ldots - \mathbf{E}[\delta(B_{t_2} - B_{t_1}) \ldots \delta(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})]\right]$$

(voir par exemple J. Rosen [Ros86a], E.-B. Dynkin [Dyn86], [Dyn88]).

En revanche, la renormalisation de Varadhan n'a pas lieu en dimension 3 ; en effet, dans ce cas, la quantité :

$$\frac{1}{\sqrt{\log(1/||a||)}} \left(\alpha_t^a - \mathbf{E}[\alpha_t^a]\right)$$

tend en loi vers une variable gaussienne (pour un résultat plus précis, voir M. Yor [Yor85], Y. Hu et M. Yor [HY99]), et $\alpha_t^a - \mathbf{E}[\alpha_t^a]$ n'admet pas de limite presque sûre.

On ne peut donc pas définir la quantité γ_t^0 en dimension 3.

Il existe également une autre construction de temps locaux d'intersection (en dimensions 2 et 3), où au lieu de faire tendre la variable d'espace a vers zéro, on prend directement $a = 0$ et on réduit le domaine d'intégration sur lequel on observe les auto-intersections de la trajectoire de B.

Plus précisément, on considère un domaine d'intégration A de la forme $]v, w[\times]x, y[$ $(0 < v < w \leq x < y < t)$, et une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de densités de probabilité convergeant étroitement (au sens des mesures associées) vers la mesure de Dirac en zéro. On peut alors prouver que la suite de variables aléatoires :

$$\alpha_{A,\delta_n}^0 = \int_A du\, ds\, \delta_n(B_s - B_u)$$

converge dans L^2 vers une variable aléatoire ne dépendant pas de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$; cette variable peut alors être considérée comme le temps local d'intersection :

$$\alpha_A^0 = \int_A du\, ds\, \delta(B_s - B_u)$$

restreint au domaine A.

En dimension 2, on peut renormaliser tous les temps locaux d'intersection obtenus pour une famille d'ensembles A recouvrant (à un ensemble de mesure nulle près) l'ensemble des couples (s, u) tels que $0 < s < u < t$; la somme de tous ces temps locaux d'intersection renormalisés est égale à la quantité γ_t^0 définie précédemment.

En revanche, si on effectue cette démarche en dimension 3, on obtient une somme qui ne converge pas.

Nous retrouverons ces discussions sur les temps locaux d'intersection dans l'étude du modèle d'Edwards.

1.2 Pénalisations du mouvement brownien unidimensionnel et de l'araignée brownienne

Un grand nombre de cas de pénalisations du mouvement brownien en dimension 1 ont été étudiés par B. Roynette, P. Vallois, M. Yor (voir [RVY06c], [RVY03], [RVY06a], [RVY05], [RVY06b]).

Rappelons que dans le cadre général défini plus haut, ces pénalisations sont appliquées à l'espace $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+$, muni de la mesure de Wiener $\mathbf{W}$, de la tribu $\mathcal{F}$ de la convergence uniforme sur les compacts, et de la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ définie par :

$$\mathcal{F}_s = \sigma\{X_u, u \leq s\}$$

X étant le processus canonique.

La question posée est alors celle de la convergence de la famille de mesures de probabilités $(\mathbf{W}_t)_{t\geq 0}$ définie par :

$$\mathbf{W}_t = \frac{\Gamma_t}{\mathbf{E}_{\mathbf{W}}[\Gamma_t]}.\mathbf{W}$$

où $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ est une famille de variables aléatoires positives $\mathcal{F}$-mesurables, d'espérance finie et non nulle.

Actuellement, il n'existe pas de conditions vraiment générales sur Γ impliquant cette convergence ; néanmoins, un grand nombre de cas particuliers ont été résolus par B. Roynette, P. Vallois et M. Yor.

Dans les exemples suivants, la mesure limite $\mathbf{W}_\infty$ existe bien :

1) Pour une fonction ϕ d'intégrale finie et non nulle sur $\mathbf{R}_+$, on pose :

$$\Gamma_t = \phi(S_t)$$

où S_t désigne le supremum (unilatéral) de X sur l'intervalle $[0, t]$.

2) Pour une fonction V de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$, vérifiant :

$$0 < \int_{\mathbf{R}} (1 + |y|)V(y)dy < \infty$$

on pose :

$$\Gamma_t = \exp\left(-\int_0^t V(X_u)du\right)$$

3) Pour un réel quelconque λ, on pose :

$$\Gamma_t = e^{\lambda L_t^0}$$

où L_t^0 est le temps local en zéro de $(X_s)_{s\leq t}$.

La démonstration de l'existence de $\mathbf{W}_\infty$ s'effectue de manière un peu différente dans chaque cas particulier, mais dans tous les cas, on a besoin d'une étude asymptotique de l'espérance de Γ_t.

L'existence de nombreux exemples (dont les deux premiers cités ici) pour lesquels cette espérance décroît en $1/\sqrt{t}$ laisse supposer que l'on pourrait trouver un théorème de pénalisation plus général que les résultats connus actuellement, dans les cas où on observe cette vitesse de décroissance.

Plus précisément, il semble exister toute une classe de familles de densités $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$, s'écrivant sous la forme :

$$\Gamma_t = \Phi((X_s)_{s\leq t})$$

où Φ est une fonctionnelle définie sur l'ensemble des trajectoires continues sur un intervalle $[0,t]$ $(t>0)$, pour lesquelles on a l'équivalence :

$$\mathbf{E_W}[\Gamma_t] \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathcal{W}[\Phi((X_s)_{s\geq 0})]$$

où $\Phi((X_s)_{s\geq 0})$ est la limite de $\Phi((X_s)_{s\leq t})$ quand t tend vers l'infini, et $\mathcal{W}$ est une mesure σ-finie ne dépendant pas de Φ et Γ.

De plus, la mesure $\mathcal{W}$ vérifie l'égalité suivante :

$$\mathcal{W} = \int_0^\infty dl\,(\mathcal{W}_+^{(l)} + \mathcal{W}_-^{(l)})$$

où $\mathcal{W}_+^{(l)}$ (resp. $\mathcal{W}_-^{(l)}$) est la loi d'un processus $(Z_t^{l,+})_{t\geq 0}$ (resp. $(Z_t^{l,-})_{t\geq 0}$) pour lequel il existe un mouvement brownien $(B_s)_{s\geq 0}$ et un processus de Bessel de dimension 3 indépendant de B, noté $(R_u)_{u\geq 0}$, tels que $Z_s^{l,+} = B_s$ (resp. $Z_s^{l,-} = B_s$) si $s \leq \tau_l$ (τ_l étant l'inverse du temps local en l de B), et $Z_{\tau_l+u}^{l,+} = R_u$ (resp. $Z_{\tau_l+u}^{l,-} = -R_u$) si $u \geq 0$.

L'intervention de cette mesure σ-finie est liée à la formule suivante, donnée (sous une forme un peu différente) dans C. Leuridan [Leu98] (voir également Ph. Biane et M. Yor [BY88]) : si δ_a est le dernier temps d'atteinte de a du processus $|X|$, on a :

$$\int_0^\infty dt\,\mathbf{E_W}[\Phi((X_s)_{s\leq t})] = \int_0^\infty da\,\mathcal{W}[\Phi((X_s)_{s\leq \delta_a})]$$

Bien que nous ne connaissions pas de résultat impliquant l'équivalence asymptotique donnée ci-dessus pour une classe vraiment générale de fonctionnelles Φ, nous obtenons cette équivalence, ainsi que l'existence de la mesure limite $\mathbf{W}_\infty$, dans le cas particulier où il existe une fonctionnelle F, vérifiant certaines conditions de domination (malheureusement assez complexes à exprimer), et telle que :

$$\Phi((X_s)_{s\leq t}) = F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})$$

$(L_t^y)_{y\in\mathbf{R}}$ désignant la famille des temps locaux de $(X_s)_{s\leq t}$ (voir le Chapitre 4).

Par ailleurs, on a parfois l'existence de la mesure $\mathbf{W}_\infty$, sans que l'espérance de Γ_t décroisse en $1/\sqrt{t}$. Les cas rencontrés le plus souvent sont alors ceux d'une croissance où d'une décroissance exponentielle par rapport à t ; on obtient ce type de comportement dans le troisième exemple donné plus haut, lorsque le paramètre λ est strictement positif.

Plus généralement, B. Roynette, P. Vallois et M. Yor ont prouvé, dans [RVY05], l'existence de la mesure limite $\mathbf{W}_\infty$ pour toute pénalisation de la forme :

$$\Gamma_t = e^{\lambda L_t^0 + \mu |X_t|}$$

ou (voir l'équivalence de Lévy) :

$$\Gamma_t = e^{\lambda S_t + \mu(S_t - X_t)}$$

les réels λ et μ étant quelconques.

Il est cependant évident que selon les valeurs de λ et μ (et en particulier leur signe), le comportement du processus canonique sous la mesure $\mathbf{W}_\infty$ varie considérablement.

L'objet du Chapitre 3 est de généraliser ces résultats de pénalisation donnés dans [RVY05] à l'araignée brownienne, qui, rappelons-le, est un processus pouvant informellement être considéré comme un mouvement brownien à valeurs dans un ensemble de demi-droites concourantes (pour différentes études sur l'araignée brownienne, voir M. Barlow, J. Pitman et M. Yor [BPY89a], J.-B. Walsh [Wal78], B. Tsirelson [Tsi97], B. de Meyer [dM99], S. Watanabe [Wat99]).

Dans cet article, nous retrouvons des distinctions de cas analogues à celles de [RVY05], mais plus complexes et amenant à des calculs plus lourds.

On retrouve également une étude de cas du même type dans Y. Hariya et M. Yor [HY04], où l'on pénalise un mouvement brownien avec drift par l'intégrale de son exponentielle.

Les exemples de pénalisations unidimensionnelles décrits dans cette section permettent de construire de nouvelles mesures de probabilité, le plus souvent singulières par rapport à la mesure de Wiener.

De plus, dans tous les cas précédemment étudiés et tels que la mesure $\mathbf{W}_\infty$ est bien définie, il existe une martingale $(M_s)_{s\geq 0}$ telle que pour tout $s > 0$ et tout $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$, on a :

$$\mathbf{W}_\infty(\Lambda_s) = \mathbf{W}(M_s \, \mathbf{1}_{\Lambda_s})$$

Grâce aux pénalisations, on rencontre donc toute une famille de martingales, construites à partir d'un mouvement brownien ou d'une araignée brownienne.

Un exemple typique de ce genre de martingales (sous la mesure de Wiener) est le suivant :

$$M_s = \phi(S_s)(S_s - X_s) + \int_{S_s}^{\infty} \phi(y)\, dy$$

où ϕ est une fonction positive et intégrable sur $\mathbf{R}_+$: cet exemple provient d'une pénalisation par $\Gamma_t = \phi(S_t)$.

Enfin, il est à noter qu'il existe des cas particuliers de pénalisations unidimensionnelles qui ne sont pas encore résolus, par exemple le modèle d'Edwards :

$$\Gamma_t = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} (L_t^y)^2\, dy\right)$$

ou

$$\Gamma_t = \exp\left(-\sup_{y\in\mathbf{R}} L_t^y\right)$$

Pour le modèle d'Edwards, on ne sait pas s'il existe une mesure $\mathbf{W}_\infty$ vérifiant les conditions de convergence données précédemment ; néanmoins, des résultats intéressants ont été obtenus sur ce modèle par d'autres moyens : nous verrons cela dans la section suivante.

1.3 Etude du modèle d'Edwards

Le modèle d'Edwards d-dimensionnel ($d \in \{1, 2, 3\}$), sur un intervalle fini $[0, t]$, correspond à une pénalisation de la mesure de Wiener $\mathbf{W}^{(d,t)}$ par le temps local d'intersection du processus canonique ; on cherche donc à définir une mesure $\tilde{\mathbf{W}}^{(d,t,g)}$ sur $\mathcal{C}([0,t], \mathbf{R}^d)$ telle qu'on ait formellement :

$$\tilde{\mathbf{W}}^{(d,t,g)} = \frac{\exp\left(-g\int_0^t du\int_0^u ds\,\delta(X_s - X_u)\right)}{\mathbf{W}^{(d,t)}\left[\exp\left(-g\int_0^t du\int_0^u ds\,\delta(X_s - X_u)\right)\right]}\,.\,\mathbf{W}^{(d,t)}$$

δ étant la mesure de Dirac en zéro et g un paramètre réel strictement positif.

La considération de ce modèle conduit aux deux questions suivantes :

- Comment donner une définition rigoureuse de la mesure $\tilde{\mathbf{W}}^{(d,t,g)}$?

- En admettant qu'on ait résolu ce problème, quel est le comportement du processus canonique sous $\tilde{\mathbf{W}}^{(d,t,g)}$ et que se produit-il lorsque t tend vers l'infini ?

Nous allons étudier ces questions dans la suite de cette section, en distinguant les différents cas possibles ($d = 1$, $d = 2$, $d = 3$).

1.3.1 Cas de la dimension 1

Dans le cas de la dimension 1, la réponse à la première question peut être donnée facilement, en utilisant l'existence de la famille des temps locaux $(L_t^y)_{y\in\mathbf{R}}$ et celle des temps locaux d'intersection $(\alpha_t^a)_{a\in\mathbf{R}}$, définis dans la Section 1.1.

On peut en effet poser :

$$\tilde{\mathbf{W}}^{(1,t,g)} = \frac{\exp(-g\alpha_t^0)}{\mathbf{W}^{(1,t)}[\exp(-g\alpha_t^0)]}\,.\,\mathbf{W}^{(1,t)} = \frac{\exp\left(-\frac{g}{2}\int_{\mathbf{R}}(L_t^y)^2\,dy\right)}{\mathbf{W}^{(1,t)}\left[\exp\left(-\frac{g}{2}\int_{\mathbf{R}}(L_t^y)^2\,dy\right)\right]}\,.\,\mathbf{W}^{(1,t)}$$

Cette définition a bien un sens car le dénominateur $\mathbf{W}^{(1,t)}[\exp(-g\alpha_t^0)]$ est fini et non nul.

De plus, on remarque que la mesure associée au modèle d'Edwards est absolument continue par rapport à celle de Wiener : les propriétés presque sûres des trajectoires sont donc les mêmes sous ces deux mesures.

En revanche, si l'on fait tendre t vers l'infini, on obtient un changement du comportement des trajectoires : R. van der Hofstad, F. den Hollander et W. König (voir [vdHdHK97]) ont prouvé qu'il existe une constante c telle que la loi de X_t/t sous $\tilde{\mathbf{W}}^{(1,t,g)}$ tend vers $(\delta_{cg^{1/3}} + \delta_{-cg^{1/3}})/2$ quand t tend vers l'infini (δ_x étant la mesure de Dirac en x), et que $(|X_t| - ct)/\sqrt{t}$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée, dont la variance est bien déterminée (strictement inférieure à un).

Le comportement du modèle d'Edwards en dimension 1 est donc asymptotiquement de type linéaire (balistique), comme pour le mouvement brownien avec drift.

Il est à noter que le résultat donné dans [vdHdHK97] concerne uniquement la valeur terminale du processus canonique sous la mesure $\tilde{\mathbf{W}}^{(1,t,g)}$ et non le processus canonique tout entier : on n'a jusqu'à présent pas réussi à construire une mesure sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ pouvant s'interpréter comme étant la limite des mesures $\tilde{\mathbf{W}}^{(1,t,g)}$ lorsque t tend vers l'infini.

1.3.2 Cas de la dimension 2

Pour construire le modèle d'Edwards en dimension 2, on est amené à utiliser de nouveau les temps locaux d'intersection, et on peut être tenté de poser :

$$\tilde{\mathbf{W}}^{(2,t,g)} = \frac{\exp(-g\alpha_t^0)}{\mathbf{W}^{(2,t)}[\exp(-g\alpha_t^0)]} \,.\, \mathbf{W}^{(2,t)}$$

Malheureusement, cette définition n'est pas encore rigoureuse car en dimension 2, le temps local d'intersection α_t^a n'est pas défini pour $a = 0$.

Cependant, on observe que la définition précédente est "formellement équivalente" à :

$$\tilde{\mathbf{W}}^{(2,t,g)} = \frac{\exp(-g(\alpha_t^0 - \mathbf{W}^{(2,t)}[\alpha_t^0]))}{\mathbf{W}^{(2,t)}[\exp(-g(\alpha_t^0 - \mathbf{W}^{(2,t)}[\alpha_t^0]))]} \,.\, \mathbf{W}^{(2,t)}$$

La renormalisation de Varadhan (décrite dans la Section 1.1) permet alors de remplacer cette formule par :

$$\tilde{\mathbf{W}}^{(2,t,g)} = \frac{\exp(-g\gamma_t^0)}{\mathbf{W}^{(2,t)}[\exp(-g\gamma_t^0)]} \,.\, \mathbf{W}^{(2,t)}$$

où γ_t^0 est le temps local d'intersection renormalisé.

Il a été démontré (voir S. Varadhan [Var69], J.-F. Le Gall [LG85], R.-F. Bass et X. Chen [BC04], J. Pitman et M. Yor [PY96]) que γ_t^0 admet des moments exponentiels de tout ordre inférieur à une certaine constante strictement positive, et en particulier des moments exponentiels négatifs de tout ordre : on en déduit que la définition précédente de $\tilde{\mathbf{W}}^{(2,t,g)}$ a bien un sens.

On a ainsi construit le modèle d'Edwards en dimension 2, et la mesure associée est, comme en dimension 1, absolument continue par rapport à la mesure de Wiener : les propriétés presque sûres associées à ces mesures sont de nouveau identiques.

Une fois le modèle d'Edwards construit, on a cherché à étudier son comportement asymptotique pour t tendant vers l'infini.

Des simulations numériques, ainsi que certains arguments heuristiques (voir R. van der Hofstad [vdH98], N. Madras et G. Slade [MS93]) semblent suggérer le résultat suivant :

$$\tilde{\mathbf{W}}^{(2,t,g)}[\,||X_t||\,] \underset{t\to\infty}{\sim} Dg^{1/4}t^{3/4}$$

où D est une constante.

Cependant, on est à ce jour très loin d'avoir prouvé cette conjecture, puisque des résultats nettement plus faibles tels que :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\,\tilde{\mathbf{W}}^{(2,t,g)}[\,||X_t||\,] = 0$$

ou

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\tilde{\mathbf{W}}^{(2,t,g)}[\,||X_t||\,] = \infty$$

n'ont même pas été démontrés.

La connaissance actuelle du modèle d'Edwards en dimension 2 est donc nettement plus limitée qu'en dimension 1.

1.3.3 Cas de la dimension 3

En dimension 3, la renormalisation de Varadhan n'a pas lieu, comme nous l'avons vu dans la Section 1.1.

Cependant, dans [Wes80] et [Wes82], J. Westwater donne une construction du modèle d'Edwards tridimensionnel, qui fait appel à la technique de pénalisation que nous avons décrite au début de cette introduction.

Plus précisément, on munit l'espace $\Omega = \mathcal{C}([0,t], \mathbf{R}^3)$ de la tribu $\mathcal{F}$ de la convergence uniforme, de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_{kt/2^n}, k \in \mathbf{N}^*, k \leq 2^n\}$$

(X étant le processus canonique), et de la mesure de Wiener $\mathbf{W}^{(3,t)}$.

On considère alors la famille de probabilités $(\mathbf{W}_m^{(3,t,g)})_{m \in \mathbf{N}^*}$ associée à la famille de poids $(\Gamma_m)_{m \in \mathbf{N}^*}$ définie par :

$$\Gamma_m = \exp\left(-g \int_{R_m} du\, ds\, \delta(X_s - X_u)\right)$$

où R_m est l'ensemble des couples $(s,u) \in [0,t]^2$ tels que $s < u$ et les m premiers chiffres binaires de s/t et u/t ne coïncident pas tous.

Les poids Γ_m sont bien définis par l'expression précédente, grâce à l'existence des temps locaux d'intersection restreints aux domaines d'intégration $(R_m)_{m \in \mathbf{N}^*}$, qui sont des réunions finies (à un ensemble de mesure nulle près) d'ensembles de la forme $]v, w[\times]x, y[$
$(0 < v < w \leq x < y < t)$.

J. Westwater construit alors la mesure limite $\tilde{\mathbf{W}}^{(3,t,g)} = \mathbf{W}_\infty^{(3,t,g)}$, qui vérifie, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$:

$$\mathbf{W}_m^{(3,t,g)}(\Lambda_n) \underset{m \to \infty}{\to} \tilde{\mathbf{W}}^{(3,t,g)}(\Lambda_n)$$

Compte tenu de la construction précédente, il est naturel d'associer cette mesure limite au modèle d'Edwards tridimensionnel.

On peut montrer que contrairement à ce qui se produit en dimensions 1 et 2, les mesures $\tilde{\mathbf{W}}^{(3,t,g)}$ sont singulières par rapport à la mesure de Wiener $\mathbf{W}^{(3,t)}$, et singulières entre elles lorsqu'on fait varier g.

Il en résulte qu'en un certain sens, le processus associé au modèle d'Edwards a “moins d'auto-intersections” que le mouvement brownien.

Cependant, X.-Y. Zhou a montré dans [Zho92] que la dimension de Hausdorff des points doubles des trajectoires reste inchangée (égale à 1) lorsqu'on passe du mouvement brownien au modèle d'Edwards : en particulier, la pénalisation correspondante ne suffit pas à produire des trajectoires auto-évitantes.

D'une manière générale, on observe qu'il est nécessaire de se placer en dimension 3 pour que le modèle d'Edwards produise, en temps fini, des trajectoires différentes des trajectoires browniennes.

Néanmoins, dans le Chapitre 5, nous montrons que les résultats principaux donnés par J. Westwater dans [Wes80] et [Wes82] impliquent l'existence de modifications du modèle d'Edwards en dimension 1 et 2, pour lesquelles la mesure associée est singulière par rapport à celle de Wiener.

Plus précisément, cette mesure est formellement définie par :

$$\bar{\mathbf{W}}^{(1,t,g)} = \frac{\exp\left(-g\int_0^t du \int_0^u ds\, \frac{\delta(X_u - X_s)}{u-s}\right)}{\mathbf{W}^{(1,t)}\left[\exp\left(-g\int_0^t du \int_0^u ds\, \frac{\delta(X_u-X_s)}{u-s}\right)\right]} . \mathbf{W}^{(1,t)}$$

en dimension 1, et par :

$$\bar{\mathbf{W}}^{(2,t,g)} = \frac{\exp\left(-g\int_0^t du \int_0^u ds\, \frac{\delta(X_u - X_s)}{\sqrt{u-s}}\right)}{\mathbf{W}^{(2,t)}\left[\exp\left(-g\int_0^t du \int_0^u ds\, \frac{\delta(X_u-X_s)}{\sqrt{u-s}}\right)\right]} . \mathbf{W}^{(2,t)}$$

en dimension 2.

La raison pour laquelle nous avons modifié le modèle d'Edwards de cette manière est la suivante : pour $d \in \{1, 2\}$, on a formellement l'égalité :

$$\int_0^t du \int_0^u ds\, \frac{\delta(X_u^{(d)} - X_s^{(d)})}{(u-s)^{(3-d)/2}} = (2\pi)^{(3-d)/2}\mathbf{W}^{(3,t)}\left[\int_0^t du \int_0^u ds\, \delta(X_u - X_s)|X^{(d)}\right]$$

où $X^{(d)}$ est la projection sur $\mathbf{R}^d$ du processus canonique tridimensionnel X.

Cette égalité formelle, que nous justifions au Chapitre 5, permet de relier directement le modèle d'Edwards en dimension 3 à notre modèle modifié.

La construction que nous donnons de ce modèle repose en grande partie sur ce lien, et elle utilise de manière essentielle les résultats de J. Westwater, dont la preuve est très longue et très technique.

C'est pourquoi il serait interessant de trouver une méthode plus simple pour définir $\bar{\mathbf{W}}^{(1,t,g)}$ et $\bar{\mathbf{W}}^{(2,t,g)}$.

Une des directions possibles de recherche est de s'inspirer des travaux d'E. Bolthausen, qui a réussi à simplifier très nettement la construction originale du modèle d'Edwards tridimensionnel (voir [Bol93]).

On pourrait également essayer de construire d'autres modifications du modèle d'Edwards, par exemple en remplaçant, dans l'expression formelle ci-dessus, l'exposant $(3-d)/2$ par un exposant α quelconque. Pour $\alpha < (2-d)/2$, on peut vérifier qu'il est possible de définir directement le temps local d'intersection modifié (comme pour le modèle d'Edwards unidimensionnel) ; pour $(2-d)/2 \leq \alpha < (3-d)/2$, la renormalisation de Varadhan a lieu (comme pour le modèle d'Edwards bidimensionnel) ; le cas $\alpha = (3-d)/2$ est celui qui est étudié au Chapitre 5 ; enfin, pour $\alpha > (3-d)/2$ nous n'avons actuellement pas d'idée précise sur ce qui se produit.

Une autre question qui se pose naturellement est celle du comportement du modèle d'Edwards tridimensionnel quand t tend l'infini.

On n'est actuellement pas plus avancé sur ce problème qu'en dimension 2 ; de manière analogue, on conjecture qu'il existe un réel ν tel que :

$$\tilde{\mathbf{W}}^{(3,t,g)}[\,||X_t||\,] \underset{t\to\infty}{\sim} Dg^{2\nu-1}t^{\nu}$$

Certains arguments heuristiques suggèrent que ν est égal à $3/5$; cependant, les simulations numériques semblent correspondre à une valeur légèrement inférieure, de l'ordre de $0,588$ (voir R. van der Hofstad [vdH98]).

Ce désaccord sur la valeur de ν confirme l'extrême difficulté de l'étude du modèle d'Edwards en dimension 3.

En dimension supérieure ou égale à 4, il n'est pas nécessaire de définir ce modèle : en effet, les trajectoires browniennes n'ont plus de points doubles et la notion de temps local d'intersection n'a plus de sens.

En revanche, on pourrait peut-être construire un modèle qui forcerait le mouvement brownien quadridimensionnel à se recouper lui-même.

Par ailleurs, on remarque qu'il est possible d'étudier, en toute dimension, un analogue discret du modèle d'Edwards (appelé modèle de Domb-Joyce), obtenu en considérant une marche aléatoire simple à la place du mouvement brownien.

En dimension inférieure ou égale à 3, le comportement asymptotique de ce modèle discret semble analogue à celui du modèle continu, et des résultats allant dans ce sens ont été prouvés en dimension 1 (voir R. van der Hofstad [vdH98]).

1.4 Plan de la thèse

La suite de la thèse comporte quatre articles (voir J. Najnudel [Naj07b], [Naj07c], [Naj07a] pour les trois premiers d'entre eux).

Dans le premier, nous définissons l'intégrale d'une fonction par rapport à la dérivée spatiale du temps local d'intersection d'un mouvement brownien unidimensionnel.

Dans le deuxième, nous généralisons à l'araignée brownienne certains résultats de pénalisations obtenus par B. Roynette, P. Vallois et M. Yor.

Dans le troisième, nous étudions les pénalisations du mouvement brownien par une fonctionnelle de ses temps locaux.

Enfin, dans le dernier article, nous étudions des modifications du modèle d'Edwards en dimension 1 et 2, qui présentent certaines analogies avec le modèle d'Edwards tridimensionnel.

Remarque : Les quatre articles, qui correspondent aux Chapitres 2, 3, 4 et 5, sont indépendants les uns des autres.
Il en est de même pour les notations utilisées, qui peuvent varier d'un article à l'autre.

Chapitre 2

Integration with respect to the self-intersection local time of a one-dimensional Brownian motion

Introduction

For any locally square-integrable function f, it is possible to define the expression $\int f(a)d_aL_t^a$ by the following equality :

$$\int f(a)d_aL_t^a = 2\left[\int_0^t f(B_s)dB_s - (F(B_t) - F(B_0))\right]$$

where F is a primitive of f, and L_t^a is the local time at a of a one-dimensional Brownian motion on $[0,t]$, denoted by $(B_s)_{0\leq s\leq t}$.

More precisely, it has been proven (see N. Bouleau and M. Yor [BY81], N. Eisenbaum [Eis00]) that if the previous definition is taken, $\Phi : f \to \int f(a)d_aL_t^a$ is the unique linear and continuous application from $L^2(\mathbf{R})$ to L^2, such that $\Phi(\mathbf{1}_{]a,b]}) = L_t^b - L_t^a$ for all $a, b \in \mathbf{R}$.
Therefore, this definition of $\int f(a)d_aL_t^a$ is compatible with the natural definition for step functions f.
Moreover, if f is the primitive of a locally integrable function f' :

$$\int f(a)d_aL_t^a = -\int_0^t f'(B_s)ds$$

This equality allows us to define $\int_0^t g(B_s)ds$ if g is the derivative of a locally square-integrable function, in the sense of the distribution theory.
For example, we can define the previous integral if g is the principal value of $1/x$, or the finite part of $1/x_+^\alpha$ for $\alpha < 3/2$ (see Ph Biane and M. Yor [BY87], A.-S. Cherny [Che01], T. Yamada [Yam96]).
In this chapter, we prove that it is possible to do approximately the same thing with the self-intersection local time.
To define this self-intersection local time, we consider a one-dimensional Brownian motion on $[0,t]$ (denoted by $(B_s)_{0\leq s\leq t}$) ; in these conditions, there exists a.s. a continuous function $a \to \alpha_t^a$ such that :

$$\int_0^t du \int_0^u ds f(B_s - B_u) = \int f(a)\alpha_t^a da$$

for any locally integrable function f. By definition, the self-intersection local time at a of $(B_s)_{0\leq s\leq t}$ is equal to α_t^a (here, as in J. Rosen [Ros05], we consider only the one-dimensional self-intersection local time; there are a lot of papers about intersection local times in dimensions 2 and 3, for example, see J. Bertoin [Ber89], J.-F. Le Gall [LG85], J. Westwater [Wes80], M. Yor [Yor86]) .

In Section 2.1, we show that $a \to \gamma_t^a = \alpha_t^a + 2ta_-$ is derivable, and that if δ_t^a is its derivative, it is possible to give a meaning to the expression :

$$\int f(a) d_a \delta_t^a$$

for any locally square-integrable function.
In other words, it is possible to do the same integration for the derivative of self-intersection local time as for the local time.
This integration will allow us to extend the definition of $\int_0^t du \int_0^u ds\, g(B_s - B_u)$ to distributions g which are not necessary integrable functions.

Finally, in Section 2.2, we will use the results of Section 2.1 to study the behaviour of :

$$\int_0^t du \int_0^u ds\, h(B_s - B_u)\mathbf{1}_{|B_s - B_u| > \epsilon}$$

where h is an odd function which satisfies some conditions of domination.

2.1 Construction of the integration with respect to self-intersection local time

In this section, we study the behaviour of the self-intersection local time.
To do that, we use a version of Fubini's theorem, which is available for stochastic integrals. More precisely, we have the following proposition (for $t \in \mathbf{R}_+$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$) :

Proposition 2.1.1 : *Let $(B_s)_{0\leq s\leq t}$ be a Brownian motion on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{P}$ the predictable σ-algebra on $[0,t]\times\Omega$, and A a $\mathcal{B}([a,b])\otimes\mathcal{P}$-measurable function from $[a,b]\times[0,t]\times\Omega$ to $\mathbf{R}$, such that :*

$$\int_a^b dx \int_0^t du\, \mathbf{E}[A(x,u)^2] < \infty$$

If $(x,\omega) \to Z(x)(\omega)$ is a $\mathcal{B}([a,b]) \otimes \mathcal{A}$-measurable function on $[a,b]\times\Omega$, such that for any x, $Z(x) = \int_0^t A(x,u) dB_u$, then $\int_a^b Z(x)dx$ and $\int_0^t \left(\int_a^b A(x,u)dx\right) dB_u$ exist and are a.s. equal.

The proof of this proposition is essentially given in P. Protter ([Pro90], Theorem 46, p. 160), so we omit it.

Now, let $(B_s)_{s\geq 0}$ be a one-dimensional Brownian motion, and f a locally integrable function. The following equality holds :

$$\int_0^t ds \int_s^t du |f(B_s - B_u)| = \int_0^t ds \int |f(a)| L_t^{-a}(\tilde{B}^{(s)}) da$$

where $L_t^{-a}(\tilde{B}^{(s)})$ is the local time at $-a$ of the process $(\tilde{B}_u^{(s)})_{s\le u\le t}$, defined by $\tilde{B}_u^{(s)} = B_u - B_s$. We observe that $L_t^{-a}(\tilde{B}^{(s)}) = L_t^{B_s-a}(B) - L_s^{B_s-a}(B)$ (with the continuous version of local time), therefore :

$$\int_0^t ds \int |f(a)| L_t^{-a}(\tilde{B}^{(s)}) da \le \int_0^t ds \int |f(a)| L_t^{B_s-a} da$$

where $L_t^{B_s-a} = 0$ if $|a| > 2\sup_{u\le t}|B_u|$. Consequently :

$$\int_0^t ds \int |f(a)| L_t^{-a}(\tilde{B}^{(s)}) da \le t \sup_{b\in\mathbf{R}} L_t^b \int_{-2\sup|B|}^{2\sup|B|} |f(x)| dx < \infty$$

Hence, we can apply Fubini's theorem :

$$\begin{aligned}\int_0^t du \int_0^u ds f(B_s - B_u) = \int_0^t ds \int_s^t du f(B_s - B_u) = \int_0^t ds \int f(a) L_t^{-a}(\tilde{B}^{(s)}) da \\ = \int da f(a) \int_0^t ds\, L_t^{-a}(\tilde{B}^{(s)}) = \int f(a) \alpha_t^a da\end{aligned}$$

where $\alpha_t^a = \int_0^t ds L_t^{-a}(\tilde{B}^{(s)})$. Because of the previous equality, α_t^a is the self-intersection local time at a of $(B_s)_{0\le s\le t}$. Now, we have a.s. :

$$L_t^{-a}(\tilde{B}^{(s)}) = 2\left[(B_t - B_s + a)_- - a_- + \int_s^t \mathbf{1}_{B_u - B_s < -a} dB_u\right]$$

Therefore, by applying Proposition 2.1.1, we prove that for all a, the following equality holds a.s. :

$$\alpha_t^a = 2\int_0^t ((B_s - B_t - a)_+ - (-a)_+) ds + 2\int_0^t dB_u \int_0^u \mathbf{1}_{B_s - B_u > a} ds$$

If we define γ by $\gamma_t^a = \alpha_t^a + 2ta_-$, we obtain :

$$\gamma_t^a = 2\left[\int_0^t (B_s - B_t - a)_+ ds + \int_0^t dB_u \int_0^u \mathbf{1}_{B_s - B_u > a} ds\right]$$

Hence, for every a, b ($a < b$), we have a.s. :

$$\gamma_t^b - \gamma_t^a = 2\left[\int_0^t \left(\int_a^b (-\mathbf{1}_{B_s - B_t > x}) dx\right) ds + \int_0^t dB_u \left(-\int_a^b L_u^{x+B_u} dx\right)\right]$$

For all x, u, $L_u^{x+B_u}$ is $\mathcal{F}_u$-measurable and continuous with respect to (x,u).

On the other hand, there exists a continuous version of $x \to \int_0^t L_u^{x+B_u} dB_u$ (this is a consequence of Burkholder's inequality and Kolmogorov's criteria).
Moreover, for all $u \in [0,t]$, $x \in [a,b]$,

$$\mathbf{E}[(L_u^{x+B_u})^2] = \mathbf{E}[(L_u^{-x}(B^{(u)}))^2] \le Cu$$

where $B^{(u)} : v \to B_u - B_{u-v}$ is a standard Brownian motion on $[0,u]$ and $C > 0$ is a constant.
Consequently :

$$\int_a^b \int_0^t \mathbf{E}[(L_u^{x+B_u})^2] du dx < \infty$$

and we can apply Proposition 2.1.1 to prove that for any a, b, we have a.s :

$$\gamma_t^b - \gamma_t^a = -2\int_a^b dx \left[\int_0^t \mathbf{1}_{B_s - B_t > x} ds + \int_0^t L_u^{x+B_u} dB_u\right] = \int_a^b \delta_t^x dx$$

where

$$\delta_t^x = -2\left[\int_0^t \mathbf{1}_{B_s - B_t > x} ds + \int_0^t L_u^{x+B_u} dB_u\right]$$

We observe that $a \to \gamma_t^a$ is continuous (because $\alpha_t^a = \int_0^t ds L_t^{-a}(\tilde{B})$).
Consequently, it is almost sure that the previous equality (about $\gamma_t^b - \gamma_t^a$) is true for all a, b.
Therefore, $a \to \gamma_t^a$ is a.s. derivable on $\mathbf{R}$, and its derivative is $a \to \delta_t^a$.

Consequently, $a \to \alpha_t^a$ is derivable on $\mathbf{R}^*$ (with derivative : $a \to \beta_t^a = \delta_t^a + 2t\mathbf{1}_{a<0}$), and we can resume our results in the following proposition :

Proposition 2.1.2 : *Let $(B_s)_{0\leq s\leq t}$ be a one-dimensional Brownian motion. Its self-intersection local time $(\alpha_t^a)_{a\in\mathbf{R}}$ is given by :*

$$\alpha_t^a = 2\left[\int_0^t ((B_s - B_t - a)_+ - (-a)_+) ds + \int_0^t dB_u \int_0^u \mathbf{1}_{B_s - B_u > a} ds\right]$$

Moreover, $a \to \alpha_t^a + 2ta_-$ is differentiable on $\mathbf{R}$, and its derivative is given by :

$$\delta_t^a = -2\left[\int_0^t \mathbf{1}_{B_s - B_t > a} ds + \int_0^t L_u^{a+B_u} dB_u\right]$$

Remark : The derivability of $a \to \gamma_t^a$ is a particular case of a more general study about derivability of self-intersection local time for stable processes (see J. Rosen [Ros05]).
We can also remark that :

$$\delta_t^0 = -2\left[\int_0^t \mathbf{1}_{B_s > B_t} ds + \int_0^t L_u^{B_u} dB_u\right]$$

so δ_t^0 is strongly related to the quantity $A(t, B_t) = \int_0^t \mathbf{1}_{B_s < B_t} ds$.
In fact, it is possible to prove that $t \to \delta_t^0$ has a 4/3-variation which is finite and different from zero, so $A(t, B_t)$ is not a semimartingale (see L.-C.-G. Rogers and J.-B. Walsh [RW91]).

Now, let us prove the following proposition :

Proposition 2.1.3 : *If $f = \sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{]a_i, b_i]}$ is a step function, let $\int f(a) d_a \delta_t^a$ be defined by :* $\sum_i \lambda_i (\delta_t^{b_i} - \delta_t^{a_i})$.
In these conditions, there exists a unique linear and continuous application from $L^2(\mathbf{R})$ to L^2 which coincides with $\int f(a) d_a \delta_t^a$ if f is a step function.

Proof : For all $u \in [0, t]$, $s \to B_s^{(u)} = B_u - B_{u-s}$ is a Brownian motion (from $[0, u]$ to $\mathbf{R}$), and for all $A \in \mathbf{R}$, the following equality holds a.s. :

$$L_u^{A+B_u} = L_u^{-A}(B^{(u)}) = 2\left[(B_u^{(u)} + A)_- - A_- + \int_0^u \mathbf{1}_{B_s^{(u)} + A < 0} dB_s^{(u)}\right]$$

Hence, we have :

$$
\begin{aligned}
-\delta_t^A &= 2\int_0^t \mathbf{1}_{B_s-B_t>A}ds + 4\int_0^t \left[(B_0-B_u-A)_+ - (-A)_+ + \int_0^u \mathbf{1}_{B_s^{(u)}<-A}dB_s^{(u)}\right]dB_u \\
&= 2\int_0^t f(B_s-B_t)ds + 4\int_0^t \left[\int_0^{B_0-B_u} f + \int_0^u f(-B_s^{(u)})dB_s^{(u)}\right]dB_u
\end{aligned}
$$

where $f = \mathbf{1}_{[A,\infty[}$. By linearity, it is not difficult to prove that :

$$
\int f(a)d_a\delta_t^a = 2\int_0^t f(B_s-B_t)ds + 4\int_0^t \left[\int_0^{B_0-B_u} f + \int_0^u f(-B_s^{(u)})dB_s^{(u)}\right]dB_u
$$

for any step function f, if we take a representation of the stochastic integrals such that $u \to \int_0^u f(-B_s^{(u)})dB_s^{(u)}$ is continuous.

On the other hand, for all $f \in L^2(\mathbf{R})$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t f(B_s-B_t)ds\right)^2\right] &\leq t\int_0^t \mathbf{E}[f(B_s-B_t)^2]ds \\
&= t\int_0^t \frac{du}{\sqrt{2\pi u}}\int (f(a))^2 e^{-a^2/2u}da \leq Ct^{3/2}||f||_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{E}\left[\left(\int_0^{B_0-B_u} f\right)^2\right] \leq \mathbf{E}[|B_0-B_u|]||f||_{L^2}^2 \leq C\sqrt{u}||f||_{L^2}^2 \leq C\sqrt{t}||f||_{L^2}^2
$$

$$
\mathbf{E}\left[\left(\int_0^u f(-B_s^{(u)})dB_s^{(u)}\right)^2\right] \leq \int_0^u \mathbf{E}[f(-B_s^{(u)})^2]ds \leq C\sqrt{t}||f||_{L^2}^2
$$

where $C > 0$ is a constant.

If f is a step function, we know that it is possible to define the double stochastic integral :

$$
\int_0^t \left(\int_0^u f(-B_s^{(u)})dB_s^{(u)}\right)dB_u
$$

Now, in the general case, it is possible to take (for all $n \in \mathbf{N}$) step functions f_n such that $||f-f_n||_{L^2} \leq 2^{-n}$. In these conditions, for all $u \in [0,t]$, $\int_0^u f(-B_s^{(u)})dB_s^{(u)}$ is a.s. the limit of $\int_0^u f_n(-B_s^{(u)})dB_s^{(u)}$.

Consequently, the conditions of measurability which are needed for the existence of the double stochastic integral are true in the case of f, since there are true for f_n.
The L^2-integrability is not difficult to check, so the previous double stochastic integral is well-defined for all $f \in L^2$, and we can write :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \left[\int_0^{B_0-B_u} f + \int_0^u f(-B_s^{(u)})dB_s^{(u)}\right]dB_u\right)^2\right] \\
&\leq \int_0^t du\, \mathbf{E}\left[\left(\int_0^{B_0-B_u} f + \int_0^u f(-B_s^{(u)})dB_s^{(u)}\right)^2\right] \leq Ct^{3/2}||f||_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

By density of step functions in $L^2(\mathbf{R})$, $f \to \int f(a) d_a \delta_t^a$ can be extended to a unique linear and continuous application from $L^2(\mathbf{R})$ to L^2, such that :

$$\int f(a) d_a \delta_t^a = 2 \int_0^t f(B_s - B_t) ds + 4 \int_0^t \left[\int_0^{B_0 - B_u} f + \int_0^u f(-B_s^{(u)}) dB_s^{(u)} \right] dB_u$$

Hence, Proposition 2.1.3 is proven. □

We observe that if f and g are in $L^2(\mathbf{R})$ and coincide on the interval $[A, A']$, then $\int f(a) d_a \delta_t^a = \int g(a) d_a \delta_t^a$ when $B_s - B_u \in [A, A']$ for all $s, u \in [0, t]$ (it is easy to prove this for step functions and we conclude by density).
This remark can be used to extend the definition of $\int f(a) d_a \delta_t^a$ to locally square integrable functions f (we replace f by $f \mathbf{1}_{[-A,A]}$ when $\sup |B| \leq A/2$).

In good cases, it is also possible to integrate with respect to $d_a \beta_t^a$: formally, $d_a \beta_t^a = d_a \delta_t^a + 2t d_a(\mathbf{1}_{a<0})$, so if $f(0)$ is well-defined, we will take the following definition :

$$\int f(a) d_a \beta_t^a = \int f(a) d_a \delta_t^a - 2t f(0)$$

Therefore, we have :

$$\int f(a) d_a \beta_t^a = 2 \int_0^t (f(B_s - B_t) - f(0)) ds + 4 \int_0^t \left[\int_0^{B_0 - B_u} f + \int_0^u f(-B_s^{(u)}) dB_s^{(u)} \right] dB_u$$

if this expression has a meaning, and it is only possible if we know the value of $f(0)$ (which for example is naturally defined if a version of f is continuous at 0).

Now, we have the following proposition :

Proposition 2.1.4 : *If f is the second primitive of a locally integrable function (f''), the following equalities hold :*

$$\int f(a) d_a \beta_t^a = \int f''(a) \alpha_t^a da = \int_0^t du \int_0^u ds\, f''(B_s - B_u)$$

Proof : If $f \in C^2$ and f'' has a compact support (which implies that f' is bounded), we define h by $h(x) = f(-x)$, and we have :

$$\begin{aligned}\int_0^{B_0 - B_u} f + \int_0^u f(-B_s^{(u)}) dB_s^{(u)} &= -\int_0^{B_u^{(u)}} h + \int_0^u h(B_s^{(u)}) dB_s^{(u)} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^u h'(B_s^{(u)}) ds = \frac{1}{2} \int_0^u f'(B_s - B_u) ds\end{aligned}$$

Consequently, it is possible to write :

$$\int f(a) d_a \beta_t^a = 2 \left[\int_0^t (f(B_s - B_t) - f(0)) ds + \int_0^t \left(\int_0^u f'(B_s - B_u) ds \right) dB_u \right]$$

It is not difficult to check that if there is a measurable version of $s \to \int_s^t f'(B_s - B_u) dB_u$, the measurability and integrability conditions of Proposition 2.1.1 are satisfied.
Now, for all s :

$$f(B_s - B_t) - f(0) + \int_s^t f'(B_s - B_u) dB_u = \int_s^t f''(B_s - B_u) du$$

almost surely, so a measurable version of the previous family of stochastic integrals exists and we have :

$$\int f(a) d_a \beta_t^a = 2 \int_0^t ds \left[f(B_s - B_t) - f(0) + \int_s^t f'(B_s - B_u) dB_u \right]$$
$$= \int_0^t ds \int_s^t du\, f''(B_s - B_u) = \int_0^t du \int_0^u ds\, f''(B_s - B_u)$$

Therefore, $\int f(a) d_a \beta_t^a = \int f''(a) \alpha_t^a da$ for all $f \in C^2$ such that f'' has compact support ; if f is affine, $\int f(a) d_a \beta_t^a = 0$.

This remark shows that if f'' is an integrable function and f a second primitive of f'', $\int f(a) d_a \beta_t^a$ depends only on f''.
So we have a linear application from $L^1(\mathbf{R})$ to a set of random variables :

$$f'' \to \int f(a) d_a \beta_t^a - \int f''(a) \alpha_t^a da$$

For the second term of this expression, we have :

$$\mathbf{E}\left[|\int f''(a) \alpha_t^a da| \right] \leq \int da\, |f''(a)| \sup_{a \in \mathbf{R}} \mathbf{E}[\alpha_t^a] = C t^{3/2} ||f''||_{L^1}$$

We can suppose that $f(0) = f'(0) = 0$, hence $|f(x)| \leq |x| ||f''||_{L^1}$ and :

$$\mathbf{E}\left[|\int_0^t f(B_s - B_t) ds| \right] \leq \left(\int_0^t \mathbf{E}[|B_s - B_t|] ds \right) ||f''||_{L^1} \leq C t^{3/2} ||f''||_{L^1}$$

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^{B_0 - B_u} f \right)^2 \right] \leq \mathbf{E}[(B_0 - B_u)^4/4] ||f''||_{L^1}^2 = C u^2 ||f''||_{L^1}^2 \leq C t^2 ||f''||_{L^1}^2$$

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^u f(-B_s^{(u)}) dB_s^{(u)} \right)^2 \right] \leq \int_0^u ds\, \mathbf{E}[f(-B_s^{(u)})^2] \leq ||f''||_{L^1}^2 \int_0^u ds\, \mathbf{E}[(B_s - B_u)^2] \leq C t^2 ||f''||_{L^1}^2$$

On the other hand, we have :

$$\int_0^{B_0 - B_u} f + \int_0^u f(-B_s^{(u)}) dB_s^{(u)} = \frac{1}{2} \int_0^u f'(B_s - B_u) ds$$

so the double stochastic integral given above is well-defined. Therefore, the previous application is continuous from $L^1(\mathbf{R})$ to L^1.

This application is equal to zero if f'' is continuous ; by density :

$$\int f(a) d_a \beta_t^a = \int f''(a) \alpha_t^a da = \int_0^t du \int_0^u ds\, f''(B_s - B_u)$$

for all f such that $f'' \in L^1$.

This equality can be extended to locally integrable functions without any difficulty ; consequently, Proposition 2.1.4 is proven. □

Remark : By integration with respect to the derivative of self-intersection local time, we can

give a meaning to the expression $\int_0^t du \int_0^u ds\, g(B_s - B_u)$ when g is the second derivative (in the sense of the distribution theory) of a locally square-integrable function f, if $f(0)$ is well-defined. For example, f can be defined by $f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|^\alpha}$ where $\alpha < 1/2$.
In this case, g can be considered as the principal value of $k\frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|^\beta}$, where $\beta < 5/2$ (k is a multiplicative constant).
f is an odd function, so it is natural to take $f(0) = 0$.

2.2 An application

Let f be a locally square-integrable function, which is odd and C^2 on $\mathbf{R}^*$.

We will consider the following integral (for $\epsilon > 0$) :

$$I_\epsilon = \int_0^t du \int_0^u ds\, h(B_s - B_u)\mathbf{1}_{|B_s - B_u| > \epsilon} = \int h_\epsilon(a)\alpha_t^a da$$

where $h = f''$ and $h_\epsilon(a) = h(a)\mathbf{1}_{|a|>\epsilon}$. A second primitive of h_ϵ is the function f_ϵ, such that $f_\epsilon(a) = ag(\epsilon)$ if $|a| \le \epsilon$ and $f_\epsilon(a) = f(a) + (\epsilon g(\epsilon) - f(\epsilon))\operatorname{sgn}(a)$ if $|a| > \epsilon$ (g is the derivative of f).

This function is equal to zero at 0. On the other hand, we have $f_\epsilon(a) = k_\epsilon(a) + l_\epsilon(a)$ where :

$$k_\epsilon(a) = (ag(\epsilon) + (f(\epsilon) - \epsilon g(\epsilon))\operatorname{sgn}(a))\mathbf{1}_{|a|\le\epsilon} + f(a)\mathbf{1}_{|a|>\epsilon}$$

$$l_\epsilon(a) = (\epsilon g(\epsilon) - f(\epsilon))\operatorname{sgn}(a)$$

$f_\epsilon(0) = 0$ and k_ϵ, l_ϵ are locally square-integrable, so we can write :

$$I_\epsilon = \int f_\epsilon(a) d_a\delta_t^a = \int k_\epsilon(a) d_a\delta_t^a + \int l_\epsilon(a) d_a\delta_t^a$$

When ϵ tends to zero, $k_\epsilon(a)$ tends to $f(a)$ almost everywhere.
Now, we will suppose that there exists a function $\phi \in L^2$ such that, if $c > 0$ is small enough, $|f(c)| + c|g(c)| \le \inf_{|b|\le c}\phi(b)$.
In these conditions, k_ϵ is dominated by $|f| + \phi$ if ϵ is small enough. Now, if we suppose that $\epsilon < 1$, $k_\epsilon(a) = f(a)$ for any a out of $[-1, 1]$.
Therefore, $k_\epsilon - f$ is dominated by $(|f| + \phi)\mathbf{1}_{[-1,1]}$, which is in L^2 : it tends to zero in L^2.

Consequently, if $J = \int f(a) d_a\delta_t^a$, $\int k_\epsilon(a) d_a\delta_t^a - J$ tends to zero in L^2 when ϵ tends to zero.

On the other hand, if A is large enough :

$$\int l_\epsilon(a) d_a\delta_t^a = (\epsilon g(\epsilon) - f(\epsilon))(\delta_t^A - 2\delta_t^0 + \delta_t^{-A})$$

$$= (\epsilon g(\epsilon) - f(\epsilon))(\beta_t^A - \beta_t^{0+} - \beta_t^{0-} + \beta_t^{-A}) = (f(\epsilon) - \epsilon g(\epsilon))(\beta_t^{0+} + \beta_t^{0-})$$

(the last equality is true because $a \to \beta_t^a$ has a compact support).
Consequently, we have the following proposition :

Proposition 2.2 : *Let f be a locally square-integrable function, which is odd and C^2 on $\mathbf{R}^*$. We suppose that there exists a function $\phi \in L^2$, and a number $d > 0$ such that :*
$|f(c)| + c|f'(c)| \leq \phi(b)$ *if* $0 < |b| \leq c < d$.
We denote by β^+ and β^- the two derivatives at 0 (right and left) of the self-intersection local time of a Brownian motion $(B_s)_{0 \leq s \leq t}$.
Then, there exists a random variable J, such that :

$$\int_0^t du \int_0^u ds f''(B_s - B_u)\mathbf{1}_{|B_s - B_u| > \epsilon} - (f(\epsilon) - \epsilon f'(\epsilon))(\beta^+ + \beta^-) - J \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0$$

in L^2.

This proposition can be applied to study the behaviour of the quantity :

$$I_\epsilon^{(\alpha)} = \int_0^t du \int_0^u ds\, |B_s - B_u|^\alpha \operatorname{sgn}(B_s - B_u)\mathbf{1}_{|B_s - B_u| > \epsilon}$$

If $\alpha > -2$, we can take $f(a) = C \operatorname{sgn}(a)|a|^{\alpha+2}$ and $\phi = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ ($C > 0$ is a constant).
The quantity $f(\epsilon) - \epsilon f'(\epsilon)$ tends to 0 when ϵ tends to 0. Since $\beta^+ + \beta^-$ is in L^2, we can deduce that $I_\epsilon^{(\alpha)} - J^{(\alpha)}$ tends to zero in L^2, for some random variable $J^{(\alpha)}$.

If $\alpha = -2$, we can take $f(a) = -\log|a| \operatorname{sgn}(a)$, $\phi = f\mathbf{1}_{[-1,1]}$.
We can check that we obtain :

$$I_\epsilon^{(-2)} - (1 - \log \epsilon)(\beta^+ + \beta^-) - J^{(-2)} \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0$$

If $-5/2 < \alpha < -2$, we check that :

$$I_\epsilon^{(\alpha)} - \frac{1}{(-2-\alpha)\epsilon^{-2-\alpha}}(\beta^+ + \beta^-) - J^{(\alpha)} \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0$$

(If $\alpha \leq -5/2$, the Proposition 2.2 cannot be applied because f is not locally square-integrable).

Chapitre 3

Pénalisations de l'araignée brownienne

3.1 Présentation du problème et des principaux résultats obtenus

3.1.1 Introduction

Récemment, de nombreuses études de pénalisations du mouvement brownien ont été effectuées, en particulier par B. Roynette, P. Vallois et M. Yor (voir [RVY03], [RVY06a], [RVY05], [RVY06c], [RVY06b]).
Dans [RVY05], les pénalisations étudiées sont des fonctions de la valeur X_t atteinte par un mouvement brownien en un temps t, et de S_t, suprémum sur $[0,t]$ de ce mouvement brownien. Plus précisément, on considère une famille de mesures de probabilité $(\mathbf{W}^{(t)})_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ vérifiant, pour tout Λ_t appartenant à la tribu $\mathcal{F}_t$ engendrée par $(X_s)_{s\in[0,t]}$ ($(X_t)_{t\geq 0}$ étant le processus canonique de $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$) :

$$\mathbf{W}^{(t)}(\Lambda_t) = \frac{\mathbf{W}[\mathbf{1}_{\Lambda_t} f(X_t, S_t)]}{\mathbf{W}[f(X_t, S_t)]}$$

où S_t est le maximum de X_s pour $s \in [0,t]$, $\mathbf{W}$ la mesure de Wiener, et f une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}_+$.
B. Roynette, P. Vallois et M. Yor montrent alors que pour certains choix de la fonction f, il existe une mesure de probabilité $\mathbf{W}^{(\infty)}$ (dépendant de f) sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telle que pour tout $s \geq 0$ et tout $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$:

$$\mathbf{W}^{(t)}(\Lambda_s) \underset{t\to\infty}{\to} \mathbf{W}^{(\infty)}(\Lambda_s)$$

Un des cas où cette convergence a lieu est celui où $f(a,y) = \exp(\lambda y + \mu a)$ avec λ, $\mu \in \mathbf{R}$.

Par un changement de mouvement brownien, les résultats de [RVY05] peuvent être adaptés au cas où S_t est remplacé par L_t (temps local en 0 de $(X_u)_{u\leq t}$), et X_t par $L_t - |X_t|$; en effet, le théorème d'équivalence de Lévy affirme que $(S_t - X_t, S_t)_{t\geq 0}$ a même loi que $(|X_t|, L_t)_{t\geq 0}$.

Dans ces conditions, les poids exponentiels étudiés dans [RVY05] prennent la forme :
$\frac{1}{Z_t}\exp(\alpha|X_t| + \gamma L_t)$ où α et γ sont des paramètres réels, et Z_t est la constante de normalisation.

Le but de notre article est de généraliser l'étude de ces pénalisations exponentielles à toutes les araignées browniennes prenant leurs valeurs dans un ensemble fini de demi-droites concourantes.

3.1.2 Quelques rappels et définitions

Dans ce paragraphe, nous allons définir le cadre général dans lequel on peut construire les araignées browniennes (étudiées dans M. Barlow, J. Pitman et M. Yor [BPY89a], et dans J.-B. Walsh [Wal78]), et nous énoncerons plusieurs propriétés de ces processus, utiles par la suite.

a) Soit (E, μ) un espace de probabilité fini ; on suppose $\mu(\{m\}) > 0$ pour tout $m \in E$. Cet espace de probabilité est fixé une fois pour toutes dans cet article ; par conséquent, nous omettrons en général d'indiquer la dépendance en (E, μ) des quantités et des mesures de probabilités que nous introduirons.
On considère, sur l'espace $\mathbf{R}_E = \{(0,0)\} \cup (\mathbf{R}_+^* \times E)$, la distance d définie par :

$$d((x,k),(y,l)) = |x-y|\mathbf{1}_{k=l} + (x+y)\mathbf{1}_{k \neq l}$$

Cette distance permet de considérer $\mathcal{C}_E$, espace des fonctions continues de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_E$, et de munir cet espace de la tribu $\mathcal{T}_E$ associée à la topologie de la convergence uniforme.

b) Nous désignons par $(A_t = (X_t, N_t))_{t \geq 0}$ le processus canonique (à valeurs dans $\mathbf{R}_E$) associé à l'espace $(\mathcal{C}_E, \mathcal{T}_E)$ et nous notons, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $\mathcal{F}_t$ la sous-tribu de $\mathcal{T}_E$ engendrée par $(A_s)_{0 \leq s \leq t}$.
Pour $(x,k) \in \mathbf{R}_E$, on peut alors considérer, sur $\mathcal{C}_E$, la mesure de probabilité $\mathbf{W}_{(x,k)}$, sous laquelle $(A_t)_{t \geq 0}$ est une araignée brownienne issue de (x,k).

c) Rappelons (voir M. Barlow, J. Pitman et M. Yor [BPY89a]) que cette araignée brownienne est un processus de Feller qu'il est possible de caractériser par son semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$; pour toute fonction f borélienne bornée :

$$P_t f(x,k) = 2 \sum_{m \in E} \mu_m \int_{\mathbf{R}_+^*} dy\, p_t(x+y) f(y,m) + \int_{\mathbf{R}_+^*} dy\, (p_t(x-y) - p_t(x+y)) f(y,k)$$

avec $\mu_m = \mu(\{m\})$ (notation conservée dans la suite de l'article) et $p_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-a^2/2t}$.

d) Pour tout $(x,k) \in \mathbf{R}_E$, le processus $(X_t)_{t \geq 0}$, sous $\mathbf{W}_{(x,k)}$, est un mouvement brownien réfléchi issu de x.
D'autre part, si $T_0 = \inf\{t \geq 0, X_t = 0\}$ et si $\mathcal{I}$ est l'ensemble des intervalles d'excursion de $(X_t)_{t \geq T_0}$, N_t est constant sur chaque intervalle $I \in \mathcal{I}$ et on peut donc poser $N_t = N_I$ pour $t \in I$.
On montre alors que conditionnellement à $(X_t)_{t \geq 0}$, les $(N_I)_{I \in \mathcal{I}}$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi μ.
En particulier, pour tout $t \geq 0$, conditionnellement au fait que $T_0 \leq t$, N_t est une variable aléatoire de loi μ, indépendante de $(X_s)_{s \geq 0}$.

e) Dans notre étude de l'araignée brownienne, interviennent des processus à valeurs réelles appelés processus bang-bang.
Par définition, un processus bang-bang de paramètre $\gamma > 0$ est un processus $(Y_t)_{t \geq 0}$, supposé issu de zéro dans cet article, et vérifiant l'équation différentielle stochastique :

$$dY_t = -\gamma \,\mathrm{sgn}(Y_t) dt + d\beta_t$$

où β est un mouvement brownien standard.

Un tel processus admet une probabilité invariante, égale à la loi d'une variable exponentielle symétrique de paramètre 2γ, et son temps local en zéro, pris jusqu'à l'instant t, est p.s. équivalent à γt, quand t tend vers l'infini.

De plus, la propriété suivante nous sera utile par la suite : si $(\tilde{Y}_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien avec drift $\gamma > 0$ issu de 0, et si on pose, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $S_t = \sup\{\tilde{Y}_s, s \in [0,t]\}$, alors le processus $(S_t - \tilde{Y}_t)_{t\geq 0}$ est la valeur absolue d'un processus bang-bang de paramètre γ (voir A.-S. Cherny et A.-N. Shiryaev [CS99]).

Pour des discussions plus générales sur les processus de ce type, et en particulier sur leur semi-groupe, voir également I. Karatzas et S.-E. Shreve [KS88].

Remarque : La filtration naturelle d'une araignée brownienne ne peut pas être égale à celle d'un mouvement brownien, dès que le nombre de branches est supérieur ou égal à 3.
Cette propriété remarquable (bien que non directement liée au problème que nous étudions ici) a été démontrée par B. Tsirelson dans [Tsi97] ; son argument a ensuite été simplifié par B. de Meyer (voir [dM99]).
D'autre part, une araignée brownienne sur deux branches peut être vue comme un processus à valeurs dans $\mathbf{R}$, appelé "skew Brownian motion" ; dans A. Lejay [Lej06], on trouve différentes façons de construire ce processus.

3.1.3 Définition des pénalisations étudiées et énoncé des théorèmes principaux de l'article

Après avoir défini la loi de l'araignée brownienne, nous lui appliquons les changements de probabilité suivants : pour $\alpha = (\alpha_i)_{i\in E}$ une famille de réels indexés par E, $\gamma \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+$, on pose

$$^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(t)} = \frac{\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)}{\mathbf{W}_{(0,0)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]}.\mathbf{W}_{(0,0)}$$

où L_t est le temps local en 0 de $(X_s)_{s\leq t}$:

$$L_t = \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{X_s \leq \epsilon} ds$$

(en fait, la limite inférieure ci-dessus est presque sûrement une limite).

Le but de notre article est de prouver les théorèmes suivants :

Théorème 3.1 : *Il existe une mesure de probabilité $^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ (sur la tribu $\mathcal{F}_\infty$ engendrée par les $\mathcal{F}_s$, $s \in \mathbf{R}_+$), telle que pour tout $s \in \mathbf{R}_+$ et tout $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$:*

$$^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(t)}(\Lambda_s) \underset{t\to\infty}{\to} {}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}(\Lambda_s)$$

De plus, on a :

$$^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}(\Lambda_s) = \mathbf{W}_{(0,0)}[\mathbf{1}_{\Lambda_s} M(\alpha, \gamma, X_s, N_s, L_s, s)]$$

où la fonction M est donnée par le tableau suivant :

Conditions sur α, γ	$M(\alpha,\gamma,x,k,l,s)$
$\gamma \geq \alpha_m$ pour tout m et $\gamma > 0$	$e^{\gamma(l-x)-s\gamma^2/2}$
$\alpha_m = \max(\alpha) = \bar{\alpha}$ ssi $m \in J$ ($J \subset E$ et $J \neq \emptyset$), $\bar{\alpha} > \gamma$ et $\bar{\alpha} > 0$	$e^{\gamma l - s\bar{\alpha}^2/2}\left(e^{-\bar{\alpha}x} + \frac{\bar{\alpha}-\gamma}{\bar{\alpha}\sum\limits_{m\in J}\mu_m}\sinh(\bar{\alpha}x)\mathbf{1}_{k\in J}\right)$
$\gamma = 0$, $\alpha_m \leq 0$ pour tout $m \in E$	1
$\alpha_m = 0$ si $m \in J$ ($J \subset E$ et $J \neq \emptyset$), $\alpha_m < 0$ sinon, et $\gamma < 0$	$e^{\gamma l}\left(1 + \frac{\lvert\gamma\rvert}{\sum\limits_{m\in J}\mu_m}x\mathbf{1}_{k\in J}\right)$
$\alpha_m < 0$ pour tout $m \in E$ et $\gamma < 0$	$e^{\gamma l}\left(1 + \frac{\frac{1}{\alpha_k^2}+\sum\limits_{m\in E}\frac{\mu_m}{\alpha_m\gamma}}{\sum\limits_{m\in E}\mu_m\frac{\lvert\alpha_m\rvert+\lvert\gamma\rvert}{\alpha_m^2\gamma^2}}x\right)$

En particulier, pour tout s, la restriction de ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ à $\mathcal{F}_s$ est équivalente à la loi de l'araignée brownienne sur $[0,s]$, et la famille $(M(\alpha,\gamma,X_s,N_s,L_s,s))_{s\geq 0}$ des densités obtenues est une $\mathcal{F}_s$-martingale sous $\mathbf{W}_{(0,0)}$.

Théorème 3.2 : *Le processus canonique $(A_s)_{s\geq 0}$ sous ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ peut être décrit de la manière suivante :*

- Si $\gamma > 0$ et $\gamma \geq \alpha_m$ pour tout m, $(X_s)_{s\geq 0}$ est la valeur absolue d'un processus bang-bang de paramètre γ, et la loi de $(N_s)_{s\geq 0}$ conditionnellement à $(X_s)_{s\geq 0}$ est la même que sous $\mathbf{W}_{(0,0)}$: les variables $(N_I)_{I\in\mathcal{I}}$ ($\mathcal{I}$ étant l'ensemble des excursions de X) sont indépendantes de loi μ.

- Si $\bar{\alpha} = \max(\alpha) > \gamma$ et $\bar{\alpha} > 0$, $(X_s)_{s\geq 0}$ est un processus dont la loi a une densité égale à $\frac{\bar{\alpha}-\gamma}{\bar{\alpha}}\exp(\gamma L_\infty)$ par rapport à celle de la valeur absolue d'un mouvement brownien avec drift $\bar{\alpha}$ (dont L_∞ est le temps local total sur tout $\mathbf{R}_+$), et $(N_s)_{s\geq 0}$ est obtenu en effectuant la même démarche que pour l'araignée initiale, puis en conditionnant le résultat par le fait que la dernière excursion de $(A_s)_{s\geq 0}$ se situe sur une branche m vérifiant $\alpha_m = \bar{\alpha}$.

- Si $\gamma = 0$ et $\alpha_m \leq 0$ pour tout m, $(A_s)_{s\geq 0}$ est une araignée brownienne.

- Si $\gamma < 0$ et $\alpha_m \leq 0$ pour tout m, on considère $(Y_s,R_s)_{s\geq 0}$ une araignée brownienne, $\mathbf{e}$ une variable exponentielle de paramètre $|\gamma|$ indépendante de $(Y_s,R_s)_{s\geq 0}$, $\tau_{\mathbf{e}}$ l'inverse du temps local de $(Y_s)_{s\geq 0}$ en $\mathbf{e}$, $(\hat{Y}_s)_{s\geq 0}$ un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0 et indépendant des variables précédentes, V une variable aléatoire (également indépendante des précédentes) définie sur E, et vérifiant les égalités suivantes pour $m \in E$:

$$\mathbf{P}(V=m) = \frac{\mu_m}{\sum\limits_{k\in J}\mu_k}\mathbf{1}_{m\in J}$$

si $J = \{m \in E, \alpha_m = 0\}$ est non vide, et

$$\mathbf{P}(V=m) = \frac{\mu_m\left(\frac{|\gamma|}{\alpha_m^2}+\sum\limits_{k\in E}\frac{\mu_k}{|\alpha_k|}\right)}{\sum\limits_{k\in E}\mu_k\frac{|\alpha_k|+|\gamma|}{\alpha_k^2}}$$

si $J = \emptyset$.

Dans ces conditions, le processus $(X_s,N_s)_{s\geq 0}$ a même loi que $(\tilde{X}_s,\tilde{N}_s)_{s\geq 0}$, avec

$(\tilde{X}_s, \tilde{N}_s) = (Y_s, R_s)$ *pour* $s \leq \tau_{\mathbf{e}}$, *et* $(\tilde{X}_{s+\tau_{\mathbf{e}}}, \tilde{N}_{s+\tau_{\mathbf{e}}}) = (\hat{Y}_s, V)$ *pour* $s \geq 0$.

Les Théorèmes 3.1 et 3.2 constituent une étude asymptotique complète des pénalisations exponentielles données au début de la section.
On remarque que dans le cas où $\max\{\alpha_m, m \in E\} > 0$ et $\gamma = 0$, la densité de la restriction de ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ à $\mathcal{F}_s$ $(s \geq 0)$, par rapport à celle de $\mathbf{W}_{(0,0)}$, est le produit d'une fonction de s par une fonction de A_s.
Afin de comprendre ce résultat, on peut alors se demander pour quelles mesures de probabilités sur $\mathcal{C}_E$ une telle propriété a lieu. Le théorème suivant répond à la question dans le cas où les densités de probabilité sont suffisamment régulières.

Théorème 3.3 : *Soit ν une mesure de probabilité définie sur $\mathcal{C}_E$, différente de $\mathbf{W}_{(0,0)}$. On suppose que pour tout $s \geq 0$, la densité de la restriction de ν à $\mathcal{F}_s$ par rapport à celle de $\mathbf{W}_{(0,0)}$ existe et s'écrit sous la forme :*

$$g(s, X_s, N_s) = h(s) f_{N_s}(X_s)$$

avec $f_m \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+)$, $f_0(0) = f_m(0) = 1$ pour tout $m \in E$, et $h \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+)$. Dans ces conditions, il existe $\beta > 0$ tel que $h(s) = e^{-s\beta^2/2}$ pour tout $s \geq 0$, et la mesure ν est une combinaison linéaire à coefficients positifs des mesures ${}^{(\alpha^{(m)},0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$, où pour tout $m \in E$, $\alpha^{(m)}$ est donné par $\alpha^{(m)}_{m'} = \beta$ si $m = m'$ et $\alpha^{(m)}_{m'} = 0$ sinon.

3.1.4 Interprétation heuristique des différents cas du Théorème 3.2

Les résultats donnés dans le Théorème 3.2 montrent que les processus obtenus dépendent de manière assez complexe des paramètres α et γ définis précédemment. C'est pourquoi nous allons en donner une interprétation heuristique.

- Dans le premier cas du théorème, $\gamma > 0$ est le plus grand des paramètres de la pénalisation ; de ce fait, son influence domine celle des $(\alpha_m)_{m \in E}$, et la loi limite obtenue ne dépend que de γ.
Le processus canonique, sous cette loi limite, a alors tendance à rester près de l'origine, pour que son temps local en zéro de $(X_t)_{t \geq 0}$ soit asymptotiquement plus grand.
Cette attraction vers l'origine correspond bien au comportement d'un processus bang-bang.

- Dans le deuxième cas, l'influence qui domine est celle du plus grand coefficient $\bar{\alpha}$: le processus canonique, sous la nouvelle loi de probabilité, reste (à partir d'un certain temps) dans une des branches $m \in E$ telles que $\alpha_m = \bar{\alpha}$.
De plus, la pénalisation exponentielle dominante est fortement liée à celle qui transforme un mouvement brownien standard en un mouvement brownien avec drift $\bar{\alpha}$, ce qui explique l'intervention de ce mouvement brownien avec drift dans la loi de $(X_t)_{t \geq 0}$.

- Dans le troisième cas, on pourrait penser que la pénalisation a tendance à empêcher le processus de trop s'éloigner de l'origine.
En réalité, la pénalisation étudiée est uniquement fonction de (X_t, N_t), et le fait que l'on fasse tendre t vers l'infini annule, à la limite, l'effet de cette pénalisation ; le cas est analogue à celui d'un pont brownien sur $[0, t]$ (t tendant vers l'infini) restreint à un intervalle fixé $[0, s]$: ce processus tend, en loi, vers un mouvement brownien (voir B. Roynette, P. Vallois et M. Yor [RVY05]).

- Dans le dernier cas, la pénalisation du temps local à l'origine ($\gamma < 0$) domine, de sorte que le processus étudié reste dans une même branche à partir d'un certain temps ; d'où l'intervention d'un processus de Bessel de dimension 3, qui n'est autre qu'un mouvement brownien conditionné à rester positif sur tout $\mathbf{R}_+$.

3.1.5 Un petit guide de lecture de l'article

- Dans la suite de cet article, nous démontrons les trois théorèmes principaux, dans l'ordre où ils sont énoncés.
Plus précisément, nous effectuons une étude préalable de la quantité :
$\mathbf{W}_{(x,k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]$ dans la Section 3.2, étude nécessaire à la preuve du Théorème 3.1 qui est achevée dans la Section 3.3.
Les Sections 3.4 et 3.5 sont consacrées respectivement aux démonstrations des Théorèmes 3.2 et 3.3.

- On trouvera dans les preuves ci-dessous un certain nombre d'études de cas, selon les valeurs des différents paramètres. Une telle structure des démonstrations paraît inévitable, compte tenu du nombre assez important de ces paramètres.
Dans Y. Hariya et M. Yor [HY04], B. Roynette, P. Vallois et M. Yor [RVY05], on peut également voir des situations où interviennent des distinctions de cas, analogues à celles rencontrées dans cet article.

- Comme nous venons de l'évoquer ci-dessus, un certain nombre d'estimations assez élémentaires (Propositions 3.2.1, 3.2.2, et 3.2.3, Lemmes 3.2.4, 3.3.1 et 3.3.2), se ramenant assez rapidement à une étude du mouvement brownien, sont faites préalablement aux démonstrations des Théorèmes 3.1 et 3.2.
Nous conseillons au lecteur de faire une première lecture rapide de ces estimations, puis de se concentrer sur les démonstrations des théorèmes principaux de l'article, quitte à revenir ensuite sur la preuve des résultats de la Section 3.2 et du Paragraphe 3.3.1.

3.2 Etude de l'expression $\mathbf{W}_{(x,k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]$

3.2.1 Enoncé des résultats obtenus

Afin de prouver l'existence de ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$, nous allons commencer par définir une expression qui majore $Z(\alpha, \gamma, x, k, t) = \mathbf{W}_{(x,k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]$ tout en étant équivalente à cette quantité quand t tend vers l'infini.

Pour cela, introduisons les deux quantités $I(\beta, \gamma, x, t)$ et $J(\beta, x, t)$ ($\beta, \gamma \in \mathbf{R}$, $x, t \in \mathbf{R}_+$), données par les égalités suivantes :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \mathbf{E}_x[\exp(\beta|Y_t| + \gamma L_t)\mathbf{1}_{T_0 \leq t}]$$

$$J(\beta, x, t) = \mathbf{E}_x[\exp(\beta Y_t)\mathbf{1}_{T_0 > t}]$$

où, sous $\mathbf{P}_x$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien issu de x, L_t le temps local en zéro de $(Y_s)_{0\leq s\leq t}$, et $T_0 = \inf\{s \geq 0, Y_s = 0\}$.

De plus, posons :

$$J^*(\beta, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}\frac{x}{\beta^2}\mathbf{1}_{\beta\neq 0} + \sqrt{\frac{2}{\pi t}}x\mathbf{1}_{\beta=0} + 2\sinh(\beta x)\exp(t\beta^2/2)\mathbf{1}_{\beta>0}$$

et définissons la quantité $I^*(\beta,\gamma,x,t)$ par le tableau suivant :

Conditions sur β et γ	$I^*(\beta,\gamma,x,t)$
$\beta,\,\gamma<0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}\left(\frac{x}{\beta\gamma}+\frac{\lvert\beta\rvert+\lvert\gamma\rvert}{\beta^2\gamma^2}\right)$
$\beta=0,\,\gamma<0$	$\frac{1}{\lvert\gamma\rvert}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}$
$\gamma=0,\,\beta<0$	$\frac{1}{\lvert\beta\rvert}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}$
$\beta=\gamma=0$	1
$\beta>0,\,\beta>\gamma$	$\frac{1}{\beta-\gamma}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}+\frac{2\beta}{\beta-\gamma}e^{-\beta x+t\beta^2/2}$
$\gamma>0,\,\gamma>\beta$	$\frac{1}{\gamma-\beta}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}+\frac{2\gamma}{\gamma-\beta}e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$
$\gamma=\beta>0$	$\gamma\sqrt{\frac{2t}{\pi}}+2(t\gamma^2+1)e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$

Si on pose :

$$Z^*(\alpha,\gamma,x,k,t)=\sum_{m\in E}\mu_m I^*(\alpha_m,\gamma,x,t)+J^*(\alpha_k,x,t)$$

on a alors les trois propositions suivantes :

Proposition 3.2.1 : *Pour tous $\beta\in\mathbf{R}$ et $x\in\mathbf{R}_+$:*

$J(\beta,x,t)\le J^*(\beta,x,t)$ pour tout $t\ge 0$.
$J(\beta,x,t)$ est équivalent à $J^*(\beta,x,t)$ quand t tend vers l'infini.

Proposition 3.2.2 : *Pour tous $\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ et $x\in\mathbf{R}_+$:*

$I(\beta,\gamma,x,t)\le I^*(\beta,\gamma,x,t)$ pour tout $t\ge 0$.
$I(\beta,\gamma,x,t)$ est équivalent à $I^*(\beta,\gamma,x,t)$ quand t tend vers l'infini.

Proposition 3.2.3 : *Pour tous $\alpha\in\mathbf{R}^E$, $\gamma\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}_+$ et $k\in E$:*

$Z(\alpha,\gamma,x,k,t)\le Z^*(\alpha,\gamma,x,k,t)$ pour tout $t\ge 0$.
$Z(\alpha,\gamma,x,k,t)$ est équivalent à $Z^*(\alpha,\gamma,x,k,t)$ quand t tend vers l'infini.

Remarquons tout de suite que les Propositions 3.2.1 et 3.2.2 entraînent la Proposition 3.2.3. En effet, on a :

$$Z(\alpha,\gamma,x,k,t)=A_1+A_2$$

avec

$$A_1=\mathbf{W}_{(x,k)}[\exp(\alpha_{N_t}X_t+\gamma L_t)\mathbf{1}_{T_0\le t}]$$

$$A_2=\mathbf{W}_{(x,k)}[\exp(\alpha_{N_t}X_t+\gamma L_t)\mathbf{1}_{T_0>t}]$$

où $T_0=\inf\{s\ge 0, X_s=0\}$. D'après la propriété d) de l'araignée (donnée au début de l'article), conditionnellement au fait que $T_0\le t$, N_t est une variable de loi μ, indépendante de (X_t,L_t). Comme, d'autre part, $(X_s)_{s\ge 0}$ sous $\mathbf{W}_{(x,k)}$ a même loi que $(\lvert Y_s\rvert)_{s\ge 0}$ sous $\mathbf{P}_x$, on a :

$$A_1=\sum_{m\in E}\mu_m I(\alpha_m,\gamma,x,t)$$

Par ailleurs, si $(X_s)_{s\geq 0}$ ne s'annule pas avant t, il est évident que $L_t = 0$ et $N_t = k$.
On a donc $A_2 = J(\alpha_k, x, t)$, et il en résulte l'égalité suivante :

$$Z(\alpha, \gamma, x, k, t) = \sum_{m\in E} \mu_m I(\alpha_m, \gamma, x, t) + J(\alpha_k, x, t)$$

qui entraîne la Proposition 3.2.3, en supposant vraies les Propositions 3.2.1 et 3.2.2.

Il nous reste donc à démontrer ces deux propositions, ce qui est fait dans les Paragraphes 3.2.2 et 3.2.3.

3.2.2 Preuve de la Proposition 3.2.1

Le principe de réflexion implique :

$$\begin{aligned} J(\beta, x, t) &= \mathbf{E}_x[e^{\beta Y_t}\mathbf{1}_{T_0>t}] = \mathbf{E}_x[e^{\beta Y_t}\mathbf{1}_{Y_t>0}] - \mathbf{E}_x[e^{\beta Y_t}\mathbf{1}_{Y_t>0, T_0\leq t}] \\ &= \mathbf{E}_x[e^{\beta Y_t}\mathbf{1}_{Y_t>0}] - \mathbf{E}_x[e^{-\beta Y_t}\mathbf{1}_{Y_t<0}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty (e^{-((x-y)^2/2t)+\beta y} - e^{-((x+y)^2/2t)+\beta y}) dy \end{aligned}$$

Supposons $\beta < 0$: De la majoration immédiate :

$$e^{-(x-y)^2/2t} - e^{-(x+y)^2/2t} \leq \frac{(x+y)^2}{2t} - \frac{(x-y)^2}{2t} = \frac{2xy}{t}$$

on déduit l'inégalité :

$$J(\beta, x, t) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} x \int_0^\infty y e^{\beta y} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{x}{\beta^2} = J^*(\beta, x, t)\,.$$

Par ailleurs, on a les encadrements suivants :

$$1 - \frac{(x-y)^2}{2t} \leq e^{-(x-y)^2/2t} \leq 1 - \frac{(x-y)^2}{2t} + \frac{(x-y)^4}{8t^2}$$

$$1 - \frac{(x+y)^2}{2t} \leq e^{-(x+y)^2/2t} \leq 1 - \frac{(x+y)^2}{2t} + \frac{(x+y)^4}{8t^2}$$

ce qui implique :

$$J^*(\beta, x, t) - J(\beta, x, t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty \frac{(x+y)^4}{8t^2} e^{\beta y} dy = x^5 t^{-5/2} C(\beta x)$$

où, pour tout $u < 0$, $C(u) = \frac{1}{\sqrt{128\pi}} \int_0^\infty (1+y)^4 e^{uy} dy$ est fini.

$J^*(\beta, x, t)$ est donc à la fois un majorant et un équivalent de $J(\beta, x, t)$ quand $t \to \infty$ (x étant fixé) : la Proposition 3.2.1 est donc vraie pour $\beta < 0$.

Supposons $\beta = 0$: On obtient ici

$$J(0, x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-x}^{x} e^{-y^2/2t} dy$$

expression admettant bien comme majorant et comme équivalent :

$$J^*(0,x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}x$$

quand t tend vers l'infini.

Supposons $\beta > 0$: On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-((x-y)^2/2t)+\beta y} - e^{-((x+y)^2/2t)+\beta y})dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-(z^2/2t)+\beta z}(e^{\beta x} - e^{-\beta x}) = 2\sinh(\beta x)e^{t\beta^2/2}\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{0}(e^{-((x-y)^2/2t)+\beta y} - e^{-((x+y)^2/2t)+\beta y})dy = -J(-\beta,x,t)$$

D'où l'égalité :

$$J(\beta,x,t) = J(-\beta,x,t) + 2\sinh(\beta x)e^{t\beta^2/2}$$

quantité qui admet comme majorant et comme équivalent :

$$J^*(\beta,x,t) = 2\sinh(\beta x)e^{t\beta^2/2} + \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}\frac{x}{\beta^2}$$

Nous venons donc de prouver la Proposition 3.2.1 dans tous les cas. □

3.2.3 Preuve de la Proposition 3.2.2

Afin de démontrer cette proposition, nous allons donner quelques résultats sur la loi jointe de $(|Y_t|, L_t)$, lorsque $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien issu de x et $(L_t)_{t\geq 0}$ son temps local en zéro.
Plus précisément, en notant (pour tout $x \in \mathbf{R}_+$), $\mathbf{P}_x$ la loi d'un mouvement brownien réel issu de x, $(Y_t)_{t\geq 0}$ le processus canonique de $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et L_t son temps local en 0, nous allons prouver le lemme suivant :

Lemme 3.2.4 : *Avec les notations précédentes :*

- Pour tout $x \geq 0$, $\mathbf{P}_x[L_t + |Y_t| \in dz, L_t > 0] = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}z(x+z)\exp\left(-\frac{(x+z)^2}{2t}\right)\mathbf{1}_{z>0}dz$.

- Conditionnellement au fait que $L_t > 0$, $\Theta_t = \frac{|Y_t|}{L_t+|Y_t|}$ est une variable uniforme sur $[0,1]$, indépendante de $L_t + |Y_t|$.

Autrement dit, on a, pour $l, y > 0$:

$$\mathbf{P}_x(L_t \in dl, |Y_t| \in dy) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}(l+x+y)\exp\left(-\frac{(l+x+y)^2}{2t}\right)dydl$$

Preuve : En effectuant une intégration par rapport au premier et au dernier temps d'annulation de $(Y_s)_{s\leq t}$, et en appliquant la propriété de Markov au temps $T_0 = \inf\{t \geq 0, Y_t = 0\}$, on obtient, pour tous $y \in \mathbf{R}_+$ et $l > 0$:

$$\mathbf{P}_x(|Y_t| \in dy, L_t \in dl) = \int\limits_{s_1+s_2\leq t} \mathbf{P}_x(T_0 \in ds_1)\mathbf{P}_0(|Y_{t-s_1}| \in dy) \ ...$$

$$... \ \mathbf{P}_0(\sup_{0\leq u\leq t-s_1}\{u|Y_u = 0\} \in d_{s_2}(t - s_1 - s_2), L_{t-s_1} \in dl||Y_{t-s_1}| = y)$$

Par un renversement du temps effectué sur le pont brownien :

$$\mathbf{P}_x(|Y_t| \in dy, L_t \in dl)$$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{s_1+s_2\leq t} \mathbf{P}_x(T_0 \in ds_1)\mathbf{P}_y(T_0 \in ds_2, L_{t-s_1} \in dl, |Y_{t-s_1}| \in [0, dy]) \\
&= \int\limits_{s_1+s_2\leq t} \mathbf{P}_x(T_0 \in ds_1)\mathbf{P}_y(T_0 \in ds_2)\mathbf{P}_0(|Y_{t-s_1-s_2}| \in [0, dy], L_{t-s_1-s_2} \in dl) \\
&= \int\limits_{s_1+s_2\leq t} \frac{2dy}{\sqrt{2\pi(t - s_1 - s_2)}}\mathbf{P}_x(T_0 \in ds_1)\mathbf{P}_y(T_0 \in ds_2)\mathbf{P}_0(L_{t-s_1-s_2} \in dl|Y_{t-s_1-s_2} = 0)
\end{aligned}$$

Or la loi du temps local d'un pont brownien sur l'intervalle de temps $[0, t - s_1 - s_2]$ est connue : c'est la loi (dite de Rayleigh) de la racine carrée d'une variable exponentielle de paramètre $\frac{1}{2(t-s_1-s_2)}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_x(|Y_t| \in dy, L_t \in dl) &= \int\limits_{s_1+s_2\leq t} dydl\frac{2le^{-l^2/2(t-s_1-s_2)}}{\sqrt{2\pi(t - s_1 - s_2)^3}}\mathbf{P}_x(T_0 \in ds_1)\mathbf{P}_y(T_0 \in ds_2) \\
&= 2dydl \int\limits_{s_1+s_2\leq t} \mathbf{P}_x(T_0 \in ds_1)\mathbf{P}_y(T_0 \in ds_2)D_l(t - s_1 - s_2) \\
&= 2dydl \int\limits_{s_1+s_2\leq t} ds_1ds_2D_x(s_1)D_y(s_2)D_l(t - s_1 - s_2) \\
&= 2dydlD_x * D_y * D_l(t) = 2D_{x+y+l}(t)dydl \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}(l + x + y) \exp\left(-\frac{(l + x + y)^2}{2t}\right) dydl
\end{aligned}$$

$D_a(u)$ désignant la densité de T_0 en u sous $\mathbf{P}_a$.

Ces égalités impliquent le lemme annoncé (voir également J. Pitman [Pit99] pour une autre démonstration). □

Suite de la preuve de la Proposition 3.2.2

Avec les notations du Lemme 3.2.4, on peut écrire :
$\beta|Y_t| + \gamma L_t = (|Y_t| + L_t)(\gamma + (\beta - \gamma)\Theta_t)$, ce qui implique la formule suivante :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \mathbf{E}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty z(x + z) \exp\left(\frac{-(x + z)^2}{2t} + zU_{\beta,\gamma}\right) dz\right]$$

où $U_{\beta,\gamma} = \gamma + (\beta - \gamma)\Theta_t$ est une variable uniforme sur $[\beta, \gamma]$ (ou bien $[\gamma, \beta]$ si $\gamma < \beta$).
Nous allons à présent distinguer plusieurs cas, selon les valeurs de β et γ.

Supposons β, $\gamma < 0$: Dans ce cas, le théorème de convergence monotone prouve que $\mathbf{E}[\int_0^\infty z(x+z)e^{-((x+z)^2/2t)+zU_{\beta,\gamma}}dz]$ croît vers $\mathbf{E}[\int_0^\infty z(x+z)e^{zU_{\beta,\gamma}}dz]$ quand t tend vers l'infini.

Or pour $\phi \in \mathbf{R}_-^*$, $\int_0^\infty z(x+z)e^{\phi z}dz = \frac{x}{\phi^2} + \frac{2}{|\phi|^3}$.

On en déduit que si $\beta \neq \gamma$:

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\infty z(x+z)e^{zU_{\beta,\gamma}}dz\right] = \frac{1}{\gamma - \beta}\int_\beta^\gamma \left(\frac{x}{\phi^2} + \frac{2}{|\phi|^3}\right)d\phi \frac{1}{\gamma-\beta}\left[-\frac{x}{\phi} + \frac{1}{\phi^2}\right]_\beta^\gamma = \frac{x}{\beta\gamma} + \frac{|\beta| + |\gamma|}{\beta^2\gamma^2}$$

et que cette dernière égalité se prolonge en fait au cas où $\beta = \gamma$.

Il en résulte que $I(\beta, \gamma, x, t)$ admet comme majorant et comme équivalent :

$$I^*(\beta, \gamma, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}\left(\frac{x}{\beta\gamma} + \frac{|\beta| + |\gamma|}{\beta^2\gamma^2}\right)$$

quand t tend vers l'infini.

Supposons $\beta = 0$, $\gamma < 0$: On a, pour tout z :

$$\mathbf{E}[e^{zU_{\beta,\gamma}}] = \frac{1}{|\gamma|}\int_\gamma^0 e^{\phi z}d\phi = \frac{1 - e^{\gamma z}}{|\gamma| z}$$

D'où :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \frac{1}{|\gamma|}\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}\int_0^\infty (x+z)e^{-(x+z)^2/2t}dz - \frac{1}{|\gamma|}\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}\int_0^\infty (x+z)e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z}dz$$

On a $\int_0^\infty (x+z)e^{\gamma z}dz < \infty$, donc le deuxième terme de l'expression ci-dessus, négatif, est dominé par $t^{-3/2}$ quand t tend vers l'infini.

Par ailleurs,

$$\int_0^\infty (x+z)e^{-(x+z)^2/2t}dz = \left[-te^{-(x+z)^2/2t}\right]_0^\infty = te^{-x^2/2t}$$

admet t comme majorant et comme équivalent quand t tend vers l'infini.

Ces deux propriétés permettent de déduire que $I(\beta, \gamma, x, t)$ admet comme majorant et équivalent :

$$I^*(\beta, \gamma, x, t) = \frac{1}{|\gamma|}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}$$

quand t tend vers l'infini.

Supposons $\gamma = 0$, $\beta < 0$: Par symétrie, ce cas est évidemment analogue au cas précédent.

Supposons $\beta = \gamma = 0$ **:** On a :

$$\begin{aligned}
I(\beta,\gamma,x,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty z(x+z)e^{-(x+z)^2/2t}dz \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \left[-tze^{-(x+z)^2/2t} \right]_0^\infty + \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-(x+z)^2/2t}dz \\
&= 2\mathbf{P}(\mathcal{N} \geq x/\sqrt{t})
\end{aligned}$$

où $\mathcal{N}$ est une variable gaussienne centrée réduite.
La Proposition 3.2.2 est donc vraie dans ce cas puisque $I^*(\beta,\gamma,x,t) = 1$.

Supposons $\beta > 0$ **et** $\beta > \gamma$ **:** On a :

$$\mathbf{E}[e^{zU_{\beta,\gamma}}] = \frac{1}{\beta-\gamma}\int_\gamma^\beta e^{\phi z}d\phi = \frac{e^{\beta z} - e^{\gamma z}}{(\beta-\gamma)z}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
I(\beta,\gamma,x,t) = &\frac{1}{\beta-\gamma}\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty (x+z)e^{-((x+z)^2/2t)+\beta z}dz \\
&- \frac{1}{\beta-\gamma}\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty (x+z)e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z}dz
\end{aligned}$$

Pour tout $\phi > 0$:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty (x+z)e^{-((x+z)^2/2t)+\phi z}dz \\
= &\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \left[-te^{-((x+z)^2/2t)+\phi z} \right]_0^\infty + \phi\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-((x+z)^2/2t)+\phi z}dz \\
= &\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-x^2/2t} + 2\phi e^{-\phi x + t\phi^2/2} - \phi\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-((x-z)^2/2t)-\phi z}dz
\end{aligned}$$

avec

$$\int_0^\infty e^{-((x-z)^2/2t)-\phi z}dz \leq \int_0^\infty e^{-\phi z}dz = \frac{1}{\phi}$$

Donc la quantité ci-dessus admet $\sqrt{2/\pi t} + 2\phi e^{-\phi x + t\phi^2/2}$ comme majorant et comme équivalent quand t tend vers l'infini.
On peut en particulier en déduire que le second terme de $I(\beta,\gamma,x,t)$, négatif, est négligeable devant le premier quand t tend vers l'infini (quel que soit le signe de γ), ce qui permet de prendre :

$$I^*(\beta,\gamma,x,t) = \frac{1}{\beta-\gamma}\sqrt{\frac{2}{\pi t}} + \frac{2\beta}{\beta-\gamma}\exp(-\beta x + t\beta^2/2)$$

comme majorant et équivalent de $I(\beta,\gamma,x,t)$.

Supposons $\gamma > 0$ **et** $\gamma > \beta$ **:** Ce cas est analogue au précédent.

Supposons $\gamma = \beta > 0$ **:** On a ici :

$$I(\beta,\gamma,x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty z(x+z)e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z}dz$$

Or
$$\int_0^\infty (z(x+z)-\gamma tz - t)e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z}dz = \left[-tze^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z}\right]_0^\infty = 0$$
On en déduit :
$$I(\beta,\gamma,x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^\infty (\gamma z+1)e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z}dz$$
Par ailleurs, on a :
$$\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^\infty e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z}dz = 2e^{-\gamma x+t\gamma^2/2} - \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^\infty e^{-((x-z)^2/2t)-\gamma z}dz$$
quantité équivalente et inférieure à $2e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$.

La quantité $-\gamma x\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^\infty e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z}dz$ est donc négative et équivalente à $-2\gamma x e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$.

D'autre part, d'après un calcul précédemment effectué, $\gamma\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^\infty (x+z)e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z}dz$ est équivalent et inférieur à $\gamma\sqrt{\frac{2t}{\pi}}+2t\gamma^2e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$ (voir l'étude du cas $\beta > 0$ et $\beta > \gamma$).

En additionnant les trois termes évalués ci-dessus, on obtient donc à nouveau :
$$I^*(\beta,\gamma,x,t) = \gamma\sqrt{\frac{2t}{\pi}} + 2(t\gamma^2+1)\exp(-\gamma x + t\gamma^2/2)$$
comme majorant et équivalent pour $I(\beta,\gamma,x,t)$. □

Nous venons donc d'achever la preuve des Propositions 3.2.1 et 3.2.2, qui entraînent la Proposition 3.2.3.

3.3 Preuve de l'existence de la mesure ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$

3.3.1 Quelques lemmes techniques

L'objet de cette Section 3.3 est de prouver le Théorème 3.1. Pour cela, nous aurons besoin de deux lemmes, dont le premier est le suivant :

Lemme 3.3.1 : *Pour tous β, $\gamma \in \mathbf{R}$, il existe $D(\beta,\gamma)$ tel qu'on ait, pour tout $t \geq 1$ et tout $x \geq 0$:*
$$J^*(\beta,x,t) \leq D(\beta,\gamma)\sinh((\beta^+ + 1)x)I^*(\beta,\gamma,0,t)$$

Preuve : Fixons β et γ dans $\mathbf{R}$, x dans $\mathbf{R}_+$, et supposons $t \geq 1$.
- Si $\beta < 0$ et $\gamma < 0$, $J^*(\beta,x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}\frac{x}{\beta^2}$ et $I^*(\beta,\gamma,0,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}\frac{|\beta|+|\gamma|}{\beta^2\gamma^2}$, ce qui implique :
$$J^*(\beta,x,t) = \frac{x\gamma^2}{|\beta|+|\gamma|}I^*(\beta,\gamma,0,t)$$
- Si $\beta < 0$ et $\gamma = 0$, $I^*(\beta,\gamma,0,t) = \frac{1}{|\beta|}\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \geq \frac{1}{|\beta|}\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}$, et donc :
$$J^*(\beta,x,t) \leq \frac{x}{|\beta|}I^*(\beta,\gamma,0,t)$$

- Si $\beta < 0$ et $\gamma > 0$, $I^*(\beta,\gamma,0,t) \geq \frac{1}{\gamma-\beta}\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \geq \frac{1}{\gamma-\beta}\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}$, d'où :

$$J^*(\beta,x,t) \leq x\left(\frac{\gamma-\beta}{\beta^2}\right) I^*(\beta,\gamma,0,t)$$

- Si $\beta = 0$ et $\gamma < 0$, $J^*(\beta,x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}x$ et $I^*(\beta,\gamma,0,t) = \frac{1}{|\gamma|}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}$, d'où :

$$J^*(\beta,x,t) = |\gamma| x I^*(\beta,\gamma,0,t)$$

- Si $\beta = \gamma = 0$, $I^*(\beta,\gamma,0,t) = 1 \geq \frac{1}{\sqrt{t}} \geq \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$, et :

$$J^*(\beta,x,t) \leq x I^*(\beta,\gamma,0,t)$$

- Si $\beta = 0$ et $\gamma > 0$, $I^*(\beta,\gamma,0,t) \geq \frac{1}{\gamma-\beta}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}$, d'où :

$$J^*(\beta,x,t) \leq x(\gamma-\beta) I^*(\beta,\gamma,0,t)$$

- Si $\beta > 0$ et $\gamma < \beta$, $J^*(\beta,x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}\frac{x}{\beta^2} + 2\sinh(\beta x)e^{t\beta^2/2}$ et :

$$I^*(\beta,\gamma,0,t) \geq \frac{1}{\beta-\gamma}\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} + \frac{2\beta}{\beta-\gamma}e^{t\beta^2/2}$$

On en déduit que :

$$J^*(\beta,x,t) \leq \max\left(\frac{x(\beta-\gamma)}{\beta^2}, \sinh(\beta x)\frac{\beta-\gamma}{\beta}\right) I^*(\beta,\gamma,0,t)$$

Or $x \leq \frac{\sinh(\beta x)}{\beta}$, d'où :

$$J^*(\beta,x,t) \leq \max\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta^3}, \frac{\beta-\gamma}{\beta}\right) \sinh(\beta x) I^*(\beta,\gamma,0,t)$$

- Si $\beta > 0$ et $\gamma = \beta$, on a $I^*(\beta,\gamma,0,t) \geq \beta\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} + 2e^{t\beta^2/2}$.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} J^*(\beta,x,t) &\leq \max\left(\frac{x}{\beta^3}, \sinh(\beta x)\right) I^*(\beta,\gamma,0,t) \\ &\leq \max\left(\frac{1}{\beta^4}, 1\right) \sinh(\beta x) I^*(\beta,\gamma,0,t) \end{aligned}$$

- Si $\beta > 0$ et $\gamma > \beta$, on a $I^*(\beta,\gamma,0,t) \geq \frac{1}{\gamma-\beta}\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} + \frac{2\gamma}{\gamma-\beta}e^{t\beta^2/2}$ d'où :

$$\begin{aligned} J^*(\beta,\gamma,x) &\leq \max\left(x\frac{\gamma-\beta}{\beta^2}, \sinh(\beta x)\frac{\gamma-\beta}{\gamma}\right) I^*(\beta,\gamma,0,t) \\ &\leq \max\left(\frac{\gamma-\beta}{\beta^3}, \frac{\gamma-\beta}{\gamma}\right) \sinh(\beta x) I^*(\beta,\gamma,0,t) \end{aligned}$$

Le Lemme 3.3.1 est donc prouvé dans tous les cas. $\square$

Il est utilisé pour démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.3.2 : *Pour tous $\alpha \in \mathbf{R}^E$, $\gamma \in \mathbf{R}$, il existe $H(\alpha,\gamma)$, $\psi(\alpha) \in \mathbf{R}^+$ tels que pour tous $x \in \mathbf{R}_+$, $k \in E$, et $t \geq 1$:*

$$Z^*(\alpha,\gamma,x,k,t) \leq H(\alpha,\gamma)\exp(\psi(\alpha)x)Z^*(\alpha,\gamma,0,0,t)$$

Preuve : On observe, tout d'abord, que quels que soient β et γ, il existe $C(\beta,\gamma)$ tel que pour tous x, t :

$$I^*(\beta,\gamma,x,t) \leq C(\beta,\gamma)(1+x)I^*(\beta,\gamma,0,t)$$

(en fait, $I^*(\beta,\gamma,x,t) \leq I^*(\beta,\gamma,0,t)$ dès que $\sup(\beta,\gamma) \geq 0$).

On en déduit que pour tous $\alpha = (\alpha_m)_{m\in E} \in \mathbf{R}^E$, $\gamma \in \mathbf{R}$, $t, x \in \mathbf{R}_+$:

$$\begin{aligned}\sum_{m\in E}\mu_m I^*(\alpha_m,\gamma,x,t) &\leq C(\alpha,\gamma)(1+x)\sum_{m\in E}\mu_m I^*(\alpha_m,\gamma,0,t)\\ &\leq C(\alpha,\gamma)(1+x)Z^*(\alpha,\gamma,0,0,t) \qquad (*)\end{aligned}$$

où $C(\alpha,\gamma) = \max\{C(\alpha_m,\gamma), m \in E\}$.

A présent, posons $\delta(\alpha) = \max\{\alpha_m^+, m \in E\}$, $\nu = \min\{\mu_m, m \in E\}$ ($\nu > 0$ puisque $\mu_m > 0$ pour tout $m \in E$), et $D(\alpha,\gamma) = \max\{D(\alpha_m,\gamma), m \in E\}$.

Si $t \geq 1$, le Lemme 3.3.1 permet d'obtenir les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}J^*(\alpha_k,x,t) &\leq D(\alpha_k,\gamma)\sinh((\alpha_k^+ + 1)x)I^*(\alpha_k,\gamma,0,t)\\ &\leq D(\alpha,\gamma)\sinh((\delta(\alpha)+1)x)\sum_{m\in E}\frac{\mu_m}{\nu}I^*(\alpha_m,\gamma,0,t)\\ &\leq \frac{D(\alpha,\gamma)}{\nu}\sinh((\delta(\alpha)+1)x)Z^*(\alpha,\gamma,0,0,t)\end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant l'inégalité (*) :

$$Z^*(\alpha,\gamma,x,k,t) \leq \left(\frac{D(\alpha,\gamma)}{\nu} + C(\alpha,\gamma)\right)\exp[(\delta(\alpha)+1)x]Z^*(\alpha,\gamma,0,0,t)$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 3.3.2. □

Ce lemme nous permettra d'achever la preuve du Théorème 3.1, ce que nous faisons dans le paragraphe suivant.

3.3.2 Preuve du Théorème 3.1

Soient $\alpha \in \mathbf{R}^E$, $\gamma \in \mathbf{R}$, $s \geq 0$ et $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$. En utilisant la propriété de Markov au temps s, on obtient, pour tout $t \geq s$:

$$\begin{aligned}
{}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(t)}[\Lambda_s] &= \mathbf{W}_{(0,0)}\left[\mathbf{1}_{\Lambda_s}\frac{e^{\alpha_{N_t}X_t+\gamma L_t}}{\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{\alpha_{N_t}X_t+\gamma L_t}]}\right] \\
&= \mathbf{W}_{(0,0)}\left[\mathbf{1}_{\Lambda_s}\frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{\alpha_{N_t}X_t+\gamma L_t}|\mathcal{F}_s]}{\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{\alpha_{N_t}X_t+\gamma L_t}]}\right] \\
&= \mathbf{W}_{(0,0)}\left[\mathbf{1}_{\Lambda_s}e^{\gamma L_s}\frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{\alpha_{N_t}X_t+\gamma(L_t-L_s)}|X_s,N_s]}{\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{\alpha_{N_t}X_t+\gamma L_t}]}\right] \\
&= \mathbf{W}_{(0,0)}\left[\mathbf{1}_{\Lambda_s}\exp(\gamma L_s)\frac{Z(\alpha,\gamma,X_s,N_s,t-s)}{Z(\alpha,\gamma,0,0,t)}\right]
\end{aligned}$$

On sait que $\exp(\gamma L_s)\frac{Z(\alpha,\gamma,X_s,N_s,t-s)}{Z(\alpha,\gamma,0,0,t)}$ est équivalent à $\exp(\gamma L_s)\frac{Z^*(\alpha,\gamma,X_s,N_s,t-s)}{Z^*(\alpha,\gamma,0,0,t)}$ quand t tend vers l'infini, L_s, X_s, N_s étant fixés.

Or $Z^*(\alpha,\gamma,x,k,u) = \sum_{m\in E}\mu_m I^*(\alpha_m,\gamma,x,u) + J^*(\alpha_k,x,u)$ pour tous x, k, u, donc d'après les expressions de I^* et J^* données precédemment, on a les équivalents suivants :

Conditions sur α, γ	Equivalent de $Z^*(\alpha,\gamma,x,k,u)$ quand $u\to\infty$
$\gamma \geq \alpha_m$ pour tout m, $\gamma=\alpha_m$ ssi $m\in J$, J sous-ensemble non vide de E, et $\gamma>0$	$2\left(\sum_{m\in J}\mu_m\right)u\gamma^2 e^{-\gamma x+u\gamma^2/2}$
$\gamma>\alpha_m$ pour tout $m\in E$ et $\gamma>0$	$\left(\sum_{m\in E}\frac{2\gamma\mu_m}{\gamma-\alpha_m}\right)e^{-\gamma x+u\gamma^2/2}$
$\alpha_m = \max(\alpha) = \bar{\alpha}$ ssi $m\in J$ (J sous-ensemble non vide de E), $\bar{\alpha}>\gamma$ et $\bar{\alpha}>0$	$e^{u\bar{\alpha}^2/2}\left(\frac{2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}-\gamma}\left(\sum_{m\in J}\mu_m\right)e^{-\bar{\alpha}x}+2\sinh(\bar{\alpha}x)\mathbf{1}_{k\in J}\right)$
$\gamma=0$, $\alpha_m=0$ si $m\in J$ (sous-ensemble non vide de E) et $\alpha_m<0$ sinon	$\sum_{m\in J}\mu_m$
$\gamma=0$, $\alpha_m<0$ pour tout $m\in E$	$\sqrt{\frac{2}{\pi u}}\left(\sum_{m\in E}\frac{\mu_m}{\lvert\alpha_m\rvert}\right)$
$\alpha_m=0$ si $m\in J$ (sous-ensemble non vide de E), $\alpha_m<0$ sinon, et $\gamma<0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi u}}\left(\frac{\sum_{m\in J}\mu_m}{\lvert\gamma\rvert}+x\mathbf{1}_{k\in J}\right)$
$\alpha_m<0$ pour tout $m\in E$ et $\gamma<0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi u^3}}\left(\sum_{m\in E}\mu_m\frac{\lvert\alpha_m\rvert+\lvert\gamma\rvert}{\alpha_m^2\gamma^2}+x\left(\frac{1}{\alpha_k^2}+\sum_{m\in E}\frac{\mu_m}{\alpha_m\gamma}\right)\right)$

On en déduit que l'expression $\exp(\gamma L_s)\frac{Z(\alpha,\gamma,X_s,N_s,t-s)}{Z(\alpha,\gamma,0,0,t)}$ converge, quand t tend vers l'infini, vers $M(\alpha,\gamma,X_s,N_s,L_s,s)$.

Par ailleurs, si $t\geq s+1$, on a, d'après le Lemme 3.3.2, les inégalités :

$$\begin{aligned}
Z(\alpha,\gamma,X_s,N_s,t-s) &\leq Z^*(\alpha,\gamma,X_s,N_s,t-s) \\
&\leq H(\alpha,\gamma)e^{\psi(\alpha)X_s}Z^*(\alpha,\gamma,0,0,t-s)
\end{aligned}$$

De plus :

$$Z(\alpha,\gamma,0,0,t) \geq \frac{1}{2} Z^*(\alpha,\gamma,0,0,t)$$

pour t assez grand, puisque $Z(\alpha,\gamma,0,0,t)$ est équivalent à $Z^*(\alpha,\gamma,0,0,t)$ quand t tend vers l'infini.

D'autre part, pour t assez grand :

$$\frac{Z^*(\alpha,\gamma,0,0,t-s)}{Z^*(\alpha,\gamma,0,0,t)} \leq 2M(\alpha,\gamma,0,0,0,s) \leq 2$$

Il en résulte que pour t assez grand :

$$e^{\gamma L_s} \frac{Z(\alpha,\gamma,X_s,N_s,t-s)}{Z(\alpha,\gamma,0,0,t)} \leq 4H(\alpha,\gamma)\exp(\psi(\alpha)X_s + \gamma L_s)$$

Ce majorant étant intégrable sous $\mathbf{W}_{(0,0)}$, on en déduit le Théorème 3.1, par convergence dominée. $\square$

3.4 Etude du processus associé à ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$

Dans cette section, nous allons prouver le Théorème 3.2 en distinguant plusieurs cas, selon l'expression de la martingale $(M_s^{(\alpha,\gamma)})_{s\geq 0}$,
$M_s^{(\alpha,\gamma)} = M(\alpha,\gamma,X_s,N_s,L_s,s)$ étant la densité de la restriction de ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ à $\mathcal{F}_s$, par rapport à celle de $\mathbf{W}_{(0,0)}$ (nous noterons plus simplement M_s cette densité s'il n'y a pas d'ambiguité possible).

3.4.1 Cas où $\gamma \geq \alpha_m$ pour tout m et $\gamma > 0$

Sous $\mathbf{W}_{(0,0)}$, $(\tilde{Y}_s = L_s - X_s)_{s\geq 0}$ est un mouvement brownien. La densité de la loi de $(\tilde{Y}_u)_{0\leq u\leq s}$ sous ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$, par rapport à celle d'un mouvement brownien sur $[0,s]$, est donc égale à $M_s = \exp(\gamma\tilde{Y}_s - s\gamma^2/2)$.

Par conséquent, $(\tilde{Y}_s)_{s\geq 0}$ est un mouvement brownien avec drift γ sous ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$, et $(X_s)_{s\geq 0}$ peut être obtenu à partir de $(\tilde{Y}_s)_{s\geq 0}$ grâce à l'expression : $X_s = \left(\sup_{u\in[0,s]} \tilde{Y}_u\right) - \tilde{Y}_s$.

On en déduit que $(X_s)_{s\geq 0}$ a même loi que la valeur absolue d'un processus bang-bang de paramètre γ.

Par ailleurs, N_s n'intervient pas dans l'expression de M_s, donc le processus $(N_s)_{s\geq 0}$, sachant $(X_s)_{s\geq 0}$, a même loi sous ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ que sous $\mathbf{W}_{(0,0)}$.

3.4.2 Cas où $\max\{\alpha_m, m \in E\} > \max(\gamma, 0)$

Dans ce paragraphe, nous posons $\bar{\alpha} = \max\{\alpha_m, m \in E\}$ et nous notons J l'ensemble (non vide) des éléments m de E tels que $\alpha_m = \bar{\alpha}$. Commençons tout d'abord par étudier le cas particulier suivant :

a) Cas particulier : $\gamma = 0$ **et il existe** $m \in E$ **tel que** $J = \{m\}$

On a dans ce cas :

$$M_s = e^{-s\bar{\alpha}^2/2}\left(e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m}\sinh(\bar{\alpha}X_s)\mathbf{1}_{N_s=m}\right)$$

pour tout $s \geq 0$.

Considérons à présent un processus $(Y_t, R_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathbf{R}_E$ défini de la manière suivante :

- $(Y_t)_{t\geq 0}$ est la valeur absolue d'un mouvement brownien avec drift $\bar{\alpha}$.

- Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles d'excursion de $(Y_t)_{t\geq 0}$. Conditionnellement à $(Y_t)_{t\geq 0}$, $(R_t)_{t\geq 0}$ est constant sur chaque intervalle $I \in \mathcal{I}$ ($R_t = R_I$ pour $t \in I$), avec $R_I = m$ p.s. si I est l'unique intervalle d'excursion non borné de $(Y_t)_{t\geq 0}$, et avec les autres $(R_I)_{I\in\mathcal{I}}$ indépendants de loi μ.

Montrons alors que ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ est la loi du processus $(Y_t, R_t)_{t\geq 0}$.

Pour cela, observons que si $t > 0$, $k \in E$ et si F est une fonctionnelle mesurable bornée de $\mathcal{C}([0,t], \mathbf{R}_E)$ dans $\mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[F((Y_s)_{s\leq t})\mathbf{1}_{R_t=k}] &= \mathbf{E}[F((Y_s)_{s\leq t})\,\mathbf{P}(R_t = k|(Y_s)_{s\in\mathbf{R}_+})] \\
&= \mathbf{E}[F((Y_s)_{s\leq t})\,(\mathbf{1}_{k=m}\mathbf{1}_{\forall s\geq t, Y_s>0} + \mu_k\mathbf{1}_{\exists s\geq t, Y_s=0})] \\
&= \mathbf{E}[F((Y_s)_{s\leq t})(\mathbf{1}_{k=m}\mathbf{P}(\forall s \geq t, Y_s > 0|Y_t) + \mu_k\mathbf{P}(\exists s \geq t, Y_s = 0|Y_t))]
\end{aligned}$$

compte tenu de la propriété de Markov de $(Y_s)_{s\geq 0}$.

Comme $Y_t = |B_t^{(\bar{\alpha})}|$ où $(B_t^{(\bar{\alpha})})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien avec drift $\bar{\alpha}$, on a :

$$\mathbf{P}(\exists s \geq t, Y_s = 0|Y_t) = \mathbf{E}[\mathbf{P}(\exists s \geq t, B_s^{(\bar{\alpha})} = 0|B_t^{(\bar{\alpha})})||B_t^{(\bar{\alpha})}|]$$

Or $\mathbf{P}(\exists s \geq t, B_s^{(\bar{\alpha})} = 0|B_t^{(\bar{\alpha})})$ est égal à 1 si $B_t^{(\bar{\alpha})} \leq 0$ et à $e^{-2\bar{\alpha}B_t^{(\bar{\alpha})}}$ si $B_t^{(\bar{\alpha})} \geq 0$: le premier cas est évident et le deuxième résulte du fait que $(e^{-2\bar{\alpha}B_{t\wedge T_0}^{(\bar{\alpha})}})_{t\geq s}$ est une martingale bornée si $T_0 = \inf\{t \geq s, B_t^{(\bar{\alpha})} = 0\}$.

Compte tenu des densités en Y_t et en $-Y_t$ de la loi de $B_t^{(\bar{\alpha})}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\exists s \geq t, Y_s = 0|Y_t) &= \mathbf{P}(B_t^{(\bar{\alpha})} = -Y_t|Y_t) + e^{-2\bar{\alpha}Y_t}\mathbf{P}(B_t^{(\bar{\alpha})} = Y_t|Y_t) \\
&= \frac{e^{-\bar{\alpha}Y_t}}{e^{\bar{\alpha}Y_t} + e^{-\bar{\alpha}Y_t}} + e^{-2\bar{\alpha}Y_t}.\frac{e^{\bar{\alpha}Y_t}}{e^{\bar{\alpha}Y_t} + e^{-\bar{\alpha}Y_t}} = \frac{e^{-\bar{\alpha}Y_t}}{\cosh(\bar{\alpha}Y_t)}
\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbf{P}(\forall s \geq t, Y_s > 0|Y_t) = 1 - \frac{e^{-\bar{\alpha}Y_t}}{\cosh(\bar{\alpha}Y_t)} = \frac{\sinh(\bar{\alpha}Y_t)}{\cosh(\bar{\alpha}Y_t)}$$

On en déduit, en utilisant la densité de la loi de $(Y_s)_{s\leq t}$ par rapport à celle du mouvement brownien réfléchi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[F((Y_s)_{s\leq t})\mathbf{1}_{R_t=k}] &= \mathbf{E}\left[F((Y_s)_{s\leq t})\left(\mathbf{1}_{k=m}\frac{\sinh(\bar{\alpha}Y_t)}{\cosh(\bar{\alpha}Y_t)}+\mu_k\frac{e^{-\bar{\alpha}Y_t}}{\cosh(\bar{\alpha}Y_t)}\right)\right] \\
&= \mathbf{W}_{(0,0)}\left[F((X_s)_{s\leq t})\cosh(\bar{\alpha}X_t)e^{-t\bar{\alpha}^2/2}\left(\mathbf{1}_{k=m}\frac{\sinh(\bar{\alpha}X_t)}{\cosh(\bar{\alpha}X_t)}+\mu_k\frac{e^{-\bar{\alpha}X_t}}{\cosh(\bar{\alpha}X_t)}\right)\right] \\
&= \mathbf{W}_{(0,0)}\left[F((X_s)_{s\leq t})\mathbf{1}_{N_t=k}e^{-t\bar{\alpha}^2/2}\left(e^{-\bar{\alpha}X_t}+\frac{1}{\mu_m}\sinh(\bar{\alpha}X_t)\mathbf{1}_{N_t=m}\right)\right] \\
&= {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[F((X_s)_{s\leq t})\mathbf{1}_{N_t=k}]
\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que la loi de $((Y_s)_{s\leq t}, R_t)$ et celle de $((X_s)_{s\leq t}, N_t)$ sous ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ sont égales.

Par ailleurs, la loi conditionnelle de $(R_s)_{s\leq t}$ sachant $((Y_s)_{s\leq t}, R_t)$ peut être décrite de la manière suivante : si $\mathcal{I}_t$ est l'ensemble des intervalles d'excursions de $(Y_s)_{s\leq t}$, I_0 l'élement de $\mathcal{I}_t$ contenant t, et pour tout $I\in\mathcal{I}_t$, $R_I = R_s$ avec s quelconque dans I, alors $R_{I_0} = R_t$ p.s., et les variables $(R_I)_{I\in\mathcal{I}_t\setminus I_0}$ sont indépendantes de loi μ.

On déduit de cette description que la loi de $(R_s)_{s\leq t}$ sachant $((Y_s)_{s\leq t}, R_t)$ est égale à celle de $(N_s)_{s\leq t}$ sachant $((X_s)_{s\leq t}, N_t)$ sous $\mathbf{W}_{(0,0)}$, et donc également sous ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$, puisque la densité de ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ par rapport à $\mathbf{W}_{(0,0)}$ ne dépend que de X_t et N_t.

Sous ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$, on a donc d'une part l'égalité des lois de $((Y_s)_{s\leq t}, R_t)$ et de $((X_s)_{s\leq t}, N_t)$, d'autre part l'égalité des lois conditionnelles de $(R_s)_{s\leq t}$ sachant $((Y_s)_{s\leq t}, R_t)$ et de $(N_s)_{s\leq t}$ sachant $((X_s)_{s\leq t}, N_t)$: il en résulte l'égalité des lois de $(X_s, N_s)_{s\leq t}$ et de $(Y_s, R_s)_{s\leq t}$.

Le résultat annoncé au début du paragraphe est donc démontré, ce qui achève la preuve du Théorème 3.2 dans le cas particulier a).

De plus, ce résultat entraîne les faits suivants, valables pour tout $s\geq 0$ sous la probabilité ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$:

- Conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ et au fait que X_t ne s'annule pour aucun $t\geq s$, $L_\infty - L_s$ est nul.

- Conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ et au fait que X_t s'annule pour au moins un $t\geq s$, $L_\infty - L_s$ est une variable exponentielle de paramètre $\bar{\alpha}$. En particulier, L_∞ est une variable exponentielle de paramètre $\bar{\alpha}$.

Ces propriétés résultent du fait que le mouvement brownien avec drift $\bar{\alpha}$ est un processus fortement markovien dont le temps local total en zéro est une variable exponentielle de paramètre $\bar{\alpha}$.

Remarque : Si $E = \{-1, 1\}$, $\mu_1 = \mu_{-1} = 1/2$ et $m = 1$, le processus $(X_t N_t)_{t\geq 0}$, qui est un mouvement brownien sous $\mathbf{W}_{(0,0)}$, est un mouvement brownien avec drift $\bar{\alpha}$ sous ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$. Cela se vérifie aussi bien avec la martingale $(M_s)_{s\geq 0}$ qu'avec la description du processus $(Y_t, R_t)_{t\geq 0}$ donnée ci-dessus.

Nous pouvons à présent traiter le cas suivant, plus général :

b) Cas où il existe $m \in E$ tel que $J = \{m\}$, mais où $\gamma < \bar{\alpha}$ n'est pas nécessairement nul

On a maintenant :

$$M_s = \exp(\gamma L_s - s\bar{\alpha}^2/2)\left(e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{\bar{\alpha}-\gamma}{\bar{\alpha}\mu_m}\sinh(\bar{\alpha}X_s)\mathbf{1}_{N_s=m}\right)$$

D'autre part, sous ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$, L_∞ est une variable exponentielle de paramètre $\bar{\alpha}$; on peut donc définir la mesure de probabilité suivante :

$$\nu = \frac{\bar{\alpha}-\gamma}{\bar{\alpha}}\exp(\gamma L_\infty).{}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$$

(sous laquelle L_∞ est une variable exponentielle de paramètre $\bar{\alpha}-\gamma$).

Montrons que ν est exactement la mesure ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ que nous étudions, celle-ci étant donc absolument continue par rapport à ${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$.

Pour prouver ce résultat, fixons $s \geq 0$ et $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$. On a :

$$\begin{aligned}
\nu(\Lambda_s) &= {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}\left[\frac{\bar{\alpha}-\gamma}{\bar{\alpha}}\mathbf{1}_{\Lambda_s}e^{\gamma L_s}e^{\gamma(L_\infty - L_s)}\right] \\
&= {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}\left[\frac{\bar{\alpha}-\gamma}{\bar{\alpha}}\mathbf{1}_{\Lambda_s}e^{\gamma L_s}\,{}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[e^{\gamma(L_\infty - L_s)}|\mathcal{F}_s]\right] \\
&= \mathbf{W}_{(0,0)}\left[\frac{\bar{\alpha}-\gamma}{\bar{\alpha}}\mathbf{1}_{\Lambda_s}e^{\gamma L_s - s\bar{\alpha}^2/2}\left(e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m}\sinh(\bar{\alpha}X_s)\mathbf{1}_{N_s=m}\right){}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[e^{\gamma(L_\infty - L_s)}|\mathcal{F}_s]\right]
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $T_0 = \inf\{u \geq s, X_u = 0\}$ et si $t \geq s$, on a :

$${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[T_0 \leq t, \Lambda_s] = \mathbf{W}_{(0,0)}[M_t^{(\alpha,0)}.\mathbf{1}_{T_0\leq t}.\mathbf{1}_{\Lambda_s}]$$

puisque $\{T_0 \leq t\}$ et Λ_s sont $\mathcal{F}_t$-mesurables.

De plus, $\{T_0 \leq t\}$ et Λ_s sont également $\mathcal{F}_{T_0\wedge t}$-mesurables, donc d'après le théorème d'arrêt :

$$\begin{aligned}
{}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[T_0 \leq t, \Lambda_s] &= \mathbf{W}_{(0,0)}[M_{T_0\wedge t}^{(\alpha,0)}\mathbf{1}_{T_0\leq t}\mathbf{1}_{\Lambda_s}] \\
&= \mathbf{W}_{(0,0)}[M_{T_0}^{(\alpha,0)}\mathbf{1}_{T_0\leq t}\mathbf{1}_{\Lambda_s}]
\end{aligned}$$

En faisant tendre t vers l'infini, on a, par convergence monotone :

$$\begin{aligned}
{}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[T_0 < \infty, \Lambda_s] &= \mathbf{W}_{(0,0)}[M_{T_0}^{(\alpha,0)}\mathbf{1}_{T_0<\infty}\mathbf{1}_{\Lambda_s}] \\
&= \mathbf{W}_{(0,0)}[M_{T_0}^{(\alpha,0)}\mathbf{1}_{\Lambda_s}]
\end{aligned}$$

puisque $T_0 < \infty$ p.s. sous $\mathbf{W}_{(0,0)}$.

Il en résulte :

$$\begin{aligned}
{}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[T_0 < \infty, \Lambda_s] &= \mathbf{W}_{(0,0)}[\mathbf{1}_{\Lambda_s}\mathbf{W}_{(0,0)}[M_{T_0}^{(\alpha,0)}|\mathcal{F}_s]] \\
&= {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}\left[\mathbf{1}_{\Lambda_s}\frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[M_{T_0}^{(\alpha,0)}|\mathcal{F}_s]}{M_s^{(\alpha,0)}}\right] \\
&= {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}\left[\mathbf{1}_{\Lambda_s}\frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{-(T_0-s)\bar{\alpha}^2/2}|\mathcal{F}_s]}{e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m}\sinh(\bar{\alpha}X_s)\mathbf{1}_{N_s=m}}\right]
\end{aligned}$$

Or, conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, $T_0 - s$ est le temps d'atteinte de zéro d'un mouvement brownien issu de X_s. On en déduit :

$$\mathbf{W}_{(0,0)}[e^{-(T_0-s)\bar{\alpha}^2/2}|\mathcal{F}_s] = e^{-\bar{\alpha}X_s}$$

et

$${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[T_0 < \infty, \Lambda_s] = {}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}\left[\mathbf{1}_{\Lambda_s}\frac{e^{-\bar{\alpha}X_s}}{e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m}\sinh(\bar{\alpha}X_s)\mathbf{1}_{N_s=m}}\right]$$

autrement dit :

$${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[T_0 < \infty|\mathcal{F}_s] = \frac{e^{-\bar{\alpha}X_s}}{e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m}\sinh(\bar{\alpha}X_s)\mathbf{1}_{N_s=m}}$$

La loi conditionnelle de $L_\infty - L_s$, sachant la tribu engendrée par $\mathcal{F}_s$ et l'événement $\{T_0 < \infty\}$, a été décrite à la fin de l'étude du cas a). On déduit de cette description l'égalité suivante :

$${}^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}[e^{\gamma(L_\infty - L_s)}|\mathcal{F}_s] = \frac{\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}-\gamma}e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m}\sinh(\bar{\alpha}X_s)\mathbf{1}_{N_s=m}}{e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m}\sinh(\bar{\alpha}X_s)\mathbf{1}_{N_s=m}}$$

Il en résulte :

$$\nu(\Lambda_s) = \mathbf{W}_{(0,0)}\left[\mathbf{1}_{\Lambda_s}e^{\gamma L_s - s\bar{\alpha}^2/2}\left(e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{\bar{\alpha}-\gamma}{\bar{\alpha}\mu_m}\sinh(\bar{\alpha}X_s)\mathbf{1}_{N_s=m}\right)\right] = \mathbf{W}_{(0,0)}[\mathbf{1}_{\Lambda_s}M_s^{(\alpha,\gamma)}]$$

On a donc l'égalité cherchée :

$$\nu = {}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$$

qui implique le Théorème 3.2 dans le cas b).

c) Cas général

Une fois le Théorème 3.2 prouvé dans le cas particulier b), il est facile de l'étendre au cas général $\bar{\alpha} > \max(\gamma, 0)$.
En effet, dans ce cas, la loi de $(X_t, N_t)_{t\geq 0}$ est une moyenne des lois données en b), avec une pondération $\frac{\mu_m}{\sum_{k\in J}\mu_k}$ pour chaque $m \in J$.

On en déduit que le processus canonique sous ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ peut être décrit de la même manière qu'en b), sauf que sa dernière excursion se situe sur une branche quelconque appartenant à J, choisie aléatoirement à l'aide de la mesure μ : ceci correspond exactement à l'énoncé du Théorème 3.2.

3.4.3 Cas où $\gamma < 0$ et $\alpha_m \leq 0$ pour tout $m \in E$

Dans ce cas, on a :

$$M_s = e^{\gamma L_s}(1 + \theta_{N_s}X_s)$$

où les $(\theta_k)_{k\in E}$, positifs, dépendant de α, sont tels que :

$$\sum_{k\in E}\mu_k\theta_k = |\gamma|$$

Nous allons tout d'abord supposer qu'il existe $m \in E$ tel que $\theta_k = \frac{|\gamma|}{\mu_m}$ si $k = m$, et $\theta_k = 0$ si $k \neq m$.

Dans ces conditions :

$$M_s = e^{\gamma L_s}\left(1+\frac{|\gamma|}{\mu_m}X_s\mathbf{1}_{N_s=m}\right)$$

Considérons alors des réels positifs l et s, une variable aléatoire $\mathcal{F}_{\tau_l}$-mesurable bornée Y (τ_l étant l'inverse, pris en l, du temps local de $(X_t)_{t\geq 0}$), et une fonctionnelle F mesurable bornée de $\mathcal{C}([0,s],\mathbf{R}_E)$ dans $\mathbf{R}$.

On a, lorsque $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&{}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}\left[\mathbf{1}_{\tau_l\leq t}YF((X_{\tau_l+u},N_{\tau_l+u})_{0\leq u\leq s})\right]\\
&= \mathbf{W}_{(0,0)}\left[M^{(\alpha,\gamma)}_{t+s}\mathbf{1}_{\tau_l\leq t}YF((X_{\tau_l+u},N_{\tau_l+u})_{0\leq u\leq s})\right]\\
&= \mathbf{W}_{(0,0)}\left[M^{(\alpha,\gamma)}_{(t+s)\wedge(\tau_l+s)}\mathbf{1}_{\tau_l\leq t}YF((X_{\tau_l+u},N_{\tau_l+u})_{0\leq u\leq s})\right]\\
&= \mathbf{W}_{(0,0)}\left[M^{(\alpha,\gamma)}_{\tau_l+s}F((X_{\tau_l+u},N_{\tau_l+u})_{0\leq u\leq s})\mathbf{1}_{\tau_l\leq t}Y\right]
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème d'arrêt pour la deuxième égalité.

Le théorème de convergence monotone entraîne alors, en faisant tendre t vers l'infini :

$$\begin{aligned}
&{}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}\left[\mathbf{1}_{\tau_l<\infty}YF((X_{\tau_l+u},N_{\tau_l+u})_{0\leq u\leq s})\right]\\
&= e^{\gamma l}\mathbf{W}_{(0,0)}\left[e^{\gamma(L_{\tau_l+s}-L_{\tau_l})}\left(1+\frac{|\gamma|}{\mu_m}X_{\tau_l+s}\mathbf{1}_{N_{\tau_l+s}=m}\right)F((X_{\tau_l+u},N_{\tau_l+u})_{0\leq u\leq s})Y\right]
\end{aligned}$$

compte tenu du fait que $\tau_l < \infty$ p.s. sous $\mathbf{W}_{(0,0)}$.

D'après la propriété de Markov de l'araignée, $(X_{\tau_l+u},N_{\tau_l+u})_{0\leq u\leq s}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_l}$ sous $\mathbf{W}_{(0,0)}$ et a même loi que $(X_u,N_u)_{0\leq u\leq s}$.

On en déduit :

$${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}\left[\mathbf{1}_{L_\infty\geq l}YF((X_{\tau_l+u},N_{\tau_l+u})_{0\leq u\leq s})\right] = \exp(\gamma l)\,{}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}[F(X_u,N_u)_{0\leq u\leq s}]\mathbf{W}_{(0,0)}[Y]$$

En particulier, pour F et Y égaux à 1, on obtient :

$${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}[L_\infty \geq l] = \exp(\gamma l)$$

On a donc les caractéristiques suivantes :

- L_∞ est une variable exponentielle de paramètre $|\gamma|$.

- Conditionnellement à $L_\infty \geq l$, $(X_s,N_s)_{0\leq s\leq\tau_l}$ est une araignée brownienne arrêtée en τ_l, et $(X_{\tau_l+s},N_{\tau_l+s})_{s\geq 0}$ a pour loi ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$; de plus, ces deux processus sont indépendants.

On déduit de ce qui précède que conditionnellement à $L_\infty = l$, $(X_s,N_s)_{0\leq s\leq\tau_l}$ est encore une araignée arrêtée en τ_l, et $(X_{\tau_l+s},N_{\tau_l+s})_{s\geq 0}$ est un processus de loi ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$, conditionné par le fait qu'il ne s'annule qu'au temps zéro, les deux processus étant encore indépendants.

Pour déterminer la loi du deuxième processus, considérons $s \geq 0$, $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$, $l \geq 0$ et $t \geq s$. On a :

$$\begin{aligned}{}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}[\Lambda_s, \tau_l \leq t] &= \mathbf{W}_{(0,0)}[M_t^{(\alpha,\gamma)} \mathbf{1}_{\Lambda_s} \mathbf{1}_{\tau_l \leq t}] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)}[M_{\tau_l \vee s}^{(\alpha,\gamma)} \mathbf{1}_{\Lambda_s} \mathbf{1}_{\tau_l \leq t}]\end{aligned}$$

d'où

$${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}[\Lambda_s, \tau_l < \infty] = \mathbf{W}_{(0,0)}[M_{\tau_l \vee s}^{(\alpha,\gamma)} \mathbf{1}_{\Lambda_s}]$$

et donc :

$$\begin{aligned}&{}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}[\Lambda_s, L_\infty \leq l] = \mathbf{W}_{(0,0)}[(M_s^{(\alpha,\gamma)} - M_{\tau_l \vee s}^{(\alpha,\gamma)}) \mathbf{1}_{\Lambda_s}] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)} \left[\left(e^{\gamma L_s} \left(1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s = m} \right) - e^{\gamma l} \right) \mathbf{1}_{L_s \leq l} \mathbf{1}_{\Lambda_s} \right] \\ &= \mathbf{W}_{(0,0)}[L_s \leq l] \mathbf{W}_{(0,0)} \left[\mathbf{1}_{\Lambda_s} \left(e^{\gamma L_s} \left(1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s = m} \right) - e^{\gamma l} \right) | L_s \leq l \right]\end{aligned}$$

Comme ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}[L_\infty \leq l] = 1 - e^{\gamma l}$, on a :

$$\begin{aligned}&{}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}[\Lambda_s | L_\infty \leq l] \\ &= \frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[L_s \leq l]}{1 - e^{\gamma l}} \mathbf{W}_{(0,0)} \left[\mathbf{1}_{\Lambda_s} \left(e^{\gamma L_s} \left(1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s = m} \right) - e^{\gamma l} \right) | L_s \leq l \right] \\ &= \frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[L_s \leq l]}{1 - e^{\gamma l}} \tilde{\mathbf{W}}_s(l) \left[\mathbf{1}_{\Lambda_s} \left(e^{\gamma L_s} \left(1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s = m} \right) - e^{\gamma l} \right) \right]\end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbf{W}}_s(l)$ est la loi de $(X_u, N_u)_{u \leq s}$ conditionné par l'événement $\{L_s \leq l\}$.

Quand l tend vers zéro, $\frac{\mathbf{W}_{(0,0)}[L_s \leq l]}{1 - e^{\gamma l}}$ tend vers $\frac{1}{|\gamma|}\sqrt{\frac{2}{\pi s}}$.

D'autre part, si $L_s \leq l$ et si (X_s, N_s) est fixé, $e^{\gamma L_s}\left(1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s = m}\right) - e^{\gamma l}$ tend vers $\frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s = m}$ quand l tend vers zéro.

Ceci permet de démontrer :

$${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}[\Lambda_s | L_\infty = 0] = \tilde{\mathbf{W}}_s(0) \left[\mathbf{1}_{\Lambda_s} \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \frac{X_s}{\mu_m} \mathbf{1}_{N_s = m} \right]$$

où $\tilde{\mathbf{W}}_s(0)$ est la loi d'une araignée sur $[0, s]$, conditionnée par sa non-annulation en dehors du temps 0 ; sous $\tilde{\mathbf{W}}_s(0)$, $(X_u)_{u \leq s}$ est un méandre brownien de durée s.

On en déduit que sous ${}^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}$, et conditionnellement au fait que $X_s > 0$ pour tout $s > 0$, $(X_s)_{s \geq 0}$ est un processus de Bessel de dimension 3, et $N_s = m$ pour tout s.

On a donc la description de $(X_t, N_t)_{t \geq 0}$ dans le cas où un seul des θ_k précédemment donnés est nul.

Le cas général est simple à étudier à présent ; en effet, il suffit de faire une moyenne pondérée des mesures précédemment décrites pour chacun des $m \in E$ (avec la pondération $\frac{\mu_m \theta_m}{|\gamma|}$).

Remarque : Dans le cas étudié ci-dessus ($\gamma < 0$ et $\alpha_m \leq 0$ pour tout m), on peut vérifier directement, à partir de l'expression de M_s, que la loi du processus $(X_u)_{u \leq s}$ a une densité $e^{\gamma L_s}(1 + |\gamma| X_s)$ par rapport à la loi d'un mouvement brownien réfléchi sur $[0, s]$.
La validité de la description de $(X_s)_{s \geq 0}$ donnée dans le Théorème 3.2 peut alors se déduire du Théorème 1.1. de B. Roynette, P. Vallois et M. Yor [RVY05] (appliqué à la fonction $\phi(y) = |\gamma| e^{\gamma y}$) et du théorème d'équivalence de Lévy.
Par ailleurs, dans le cas où $\theta_k > 0$ ssi $k = m$, on a :

$$^{(\alpha,\gamma)}\mathbf{W}^{(\infty)}[N_t \neq m] = \mathbf{W}_{(0,0)}[e^{\gamma L_t} \mathbf{1}_{N_t \neq m}] \underset{t \to \infty}{\rightarrow} 0$$

ce qui donne une preuve rapide du fait que l'excursion non bornée de $(A_s)_{s \geq 0}$ se situe presque sûrement sur la demi-droite d'indice m.

3.4.4 Cas où $\gamma = 0$ et $\alpha_m \leq 0$ pour tout $m \in E$

Ce cas est le plus simple de tous : $^{(\alpha,0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$ est exactement la loi d'une araignée brownienne, puisque $M_s^{(\alpha,0)}$ est constante et égale à 1.

A présent, nous venons d'achever la preuve du Théorème 3.2 dans tous les cas possibles. $\square$

Remarque : Le Théorème 3.2 indique différents comportements possibles pour le processus limite, selon les valeurs des réels α_m ($m \in E$) et γ.
Cette distinction de cas généralise celle que B. Roynette, P. Vallois et M. Yor obtiennent dans [RVY05] lors de l'étude des pénalisations exponentielles du mouvement brownien. Une distinction de cas du même type apparaît également dans les résultats prouvés par Y. Hariya et M. Yor dans [HY04].

Par ailleurs, il pourrait être intéressant d'étudier d'autres pénalisations de l'araignée brownienne, liées par exemple aux temps passés par l'araignée dans les différentes branches, dont la loi jointe, sur un intervalle de temps fixe, est décrite par M. Barlow, J. Pitman et M. Yor (voir [BPY89b]).

3.5 Preuve du Théorème 3.3

Soit ν une mesure de probabilité vérifiant les conditions de l'énoncé du Théorème 3.3.
La famille des variable aléatoires $(g(s, X_s, N_s))_{s \geq 0}$ est une martingale sous $\mathbf{W}_{(0,0)}$, ce qui implique les résultats suivants, compte tenu du semi-groupe de l'araignée brownienne :

- Pour tous $x \in \mathbf{R}_+^*$, $s \geq 0$ et $m \in E$, $\frac{\partial g}{\partial s}(s, x, m) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, x, m) = 0$.

- Pour tout $s \geq 0$, $\sum_{m \in E} \mu_m \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0, m) = 0$.

La première égalité donne :

$$h'(s) f_m(x) + \frac{1}{2} h(s) f_m''(x) = 0$$

Comme $h(s)$ est non nul pour tout s, on en déduit :

$$f_m''(x) = -\frac{2h'(s)}{h(s)} f_m(x)$$

ce qui implique que $C = \frac{h'(s)}{h(s)}$ ne dépend pas de s.

Si on suppose $C > 0$, $f_m''(x)$ est négatif pour tout x, et f_m' est décroissante. Comme f_m est une fonction positive, la limite de $f_m'(x)$ quand x tend vers l'infini est positive, et f_m est croissante : pour tout x, $f_m(x) \geq f_m(0) = 1$.
On en déduit que $f_m''(x) = -2Cf_m(x) \leq -2C$, ce qui est contradictoire avec la positivité de f_m.

Si on suppose $C = 0$, toutes les fonctions f_m $(m \in E)$ sont affines et positives : $f_m(x) = 1 + \lambda_m x$ où $\lambda_m \geq 0$.
Or, pour tout $s \geq 0$, $\sum\limits_{m \in E} \mu_m \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0, m) = 0$, ce qui implique $\sum\limits_{m \in E} \lambda_m \mu_m = 0$, d'où $\lambda_m = 0$ pour tout m.
La mesure ν est alors égale à $\mathbf{W}_{(0,0)}$, ce qui est exclu dans l'hypothèse du Théorème 3.3.

Nous venons donc de prouver que C est strictement négatif, notons le $-\beta^2/2$, avec $\beta > 0$.
Comme $h(0) = 1$ (puisque $f_0(0) = 1$), on a $h(s) = e^{-s\beta^2/2}$ comme annoncé, et $f_m''(x) = \beta^2 f_m(x)$.

On en déduit qu'il existe δ_m et $\lambda_m \in \mathbf{R}$ tels que :

$$f_m(x) = \delta_m \exp(-\beta x) + \lambda_m \sinh(\beta x)$$

pour tout $x \geq 0$; comme $f_m(0) = 1$, $\delta_m = 1$ pour tout m.

Par ailleurs, $f_m(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, donc $\lambda_m \geq 0$ pour tout m.

De plus, on doit avoir, pour tout $s \geq 0$, $\sum\limits_{m \in E} \mu_m \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0, m) = 0$, ce qui implique $\sum\limits_{m \in E} \mu_m f_m'(0) = 0$, soit $\sum\limits_{m \in E} \mu_m (1 - \lambda_m) = 0$ et $\sum\limits_{m \in E} \mu_m \lambda_m = 1$.

On en déduit que ν est une moyenne pondérée des mesures ${}^{(\alpha^{(m)},0)}\mathbf{W}^{(\infty)}$, la pondération étant $\mu_m \lambda_m$, ce qui achève la preuve du Théorème 3.3. $\square$

Les processus associés aux mesures vérifiant l'énoncé du Théorème 3.3 peuvent être considérés comme des généralisations du mouvement brownien avec drift.

Chapitre 4

Penalizations of the Brownian motion by a functional of its local times

Introduction

Brownian penalizations have been studied in several articles, in particular by B. Roynette, P. Vallois and M. Yor (see [RVY03], [RVY06a], [RVY05]). The general principle of these penalizations is the following : let $\mathbf{W}$ be the Wiener measure on $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, $(X_t)_{t\geq 0}$ the canonical process, and $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ a family of positive weights such that $0 < \mathbf{W}[\Gamma_t] < \infty$; we consider the family of probability measures $(\mathbf{W}_t)_{t\geq 0}$, obtained from $\mathbf{W}$, by "penalization" with the weight Γ :

$$\mathbf{W}_t = \frac{\Gamma_t}{\mathbf{W}[\Gamma_t]}.\mathbf{W}$$

In many different particular cases, the family $(\mathbf{W}_t)_{t\geq 0}$ tends to a limit measure $\mathbf{W}_\infty$ as $t \to \infty$, in the following sense : for all $s \geq 0$, and for Λ_s measurable with respect to $\mathcal{F}_s = \sigma\{X_u, u \leq s\}$:

$$\mathbf{W}_t(\Lambda_s) \underset{t\to\infty}{\to} \mathbf{W}_\infty(\Lambda_s)$$

Up to now, there does not exist a general theorem which covers all the different cases for which convergence holds. On the other hand, we remark that in many of these cases, one has :

$$\Gamma_t = F((l_t^y(X))_{y\in\mathbf{R}})$$

where $(l_t^y(X))_{y\in\mathbf{R}}$ is the family of the local times of $(X_s)_{s\leq t}$, and F is a measurable functional from $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ to $\mathbf{R}_+$.

These two facts led us to prove that if Γ is of this form, the limit measure $\mathbf{W}_\infty$ exists for a "large" class of functionals F.

This proof is the main topic of our article, which is divided into six sections.

In the first one, we define and explain the notations we need to prove our main theorem, which is stated at the end of the section.

In Section 4.2, we prove an equality satisfied by an approximation of a given functional of local times, and in Section 4.3, we majorize the error term corresponding to this approximation.

This allows us to obtain, in Section 4.4, the asymptotic behaviour of the expectation of functionals which satisfy some particular conditions, and finally we prove the main theorem in Section 4.5.

In Section 4.6, we study the four following examples, for which this theorem applies :

1) $F((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = \phi(l^0)$ (which corresponds to $\Gamma_t = \phi(l_t^0(X))$), where ϕ is a function from $\mathbf{R}_+$ to $\mathbf{R}_+$, dominated by an integrable and decreasing function ψ.

2) $F((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = \phi(\inf\{y \geq 0, l^y = 0\})$ (which corresponds to the weight : $\Gamma_t = \phi(\sup\{X_s, s \leq t\})$), where ϕ is a function from $\mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ to $\mathbf{R}_+$, dominated by a decreasing function ψ, which is integrable on $\mathbf{R}$.

3) $F((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} V(y) l^y \, dy\right)$, where V is a positive measurable function, not a.e. equal to zero, and integrable with respect to $(1+y^2)dy$.

4) $F((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = \phi(l^{y_1}, l^{y_2})$, where $y_1 < y_2$ and $\phi(l_1, l_2) \leq h(l_1 \wedge l_2)$, for a decreasing and integrable function h.

The three first examples have been already studied by B. Roynette, P. Vallois and M. Yor.

As a help to the reader, we mention that Sections 4.2 and 4.3 are quite technical, but it is possible to read the details of these sections after Sections 4.4 and 4.5, which contain the principal steps of the proof of the main theorem.

4.1 Notations and statement of the main theorem

In this article, $(B_t)_{t\geq 0}$ denotes a standard one-dimensional Brownian motion, $(L_t^y)_{t\geq 0, y\in\mathbf{R}}$ the bicontinuous version of its local times, and $(\tau_l^a)_{l\geq 0, a\in\mathbf{R}}$ the family of its inverse local times.

To simplify these notations, we put $T_a = \tau_0^a$ (first hitting time at a of B) and $\tau_l^0 = \tau_l$.

For every $l \in \mathbf{R}_+$, $(Y_{l,+}^y)_{y\in\mathbf{R}}$ denotes a random process defined on the whole real line, such that its "positive part" $(Y_{l,+}^y)_{y\geq 0}$ is a 2-dimensional squared Bessel process (BESQ(2)), its "negative part" $(Y_{l,+}^{-y})_{y\geq 0}$ is an independent 0-dimensional squared Bessel process (BESQ(0)), and its value at zero $Y_{l,+}^0$ is equal to l. In particular, by classical properties of BESQ(0) and BESQ(2) processes, there exists a.s. $y_0 \leq 0$ such that $Y_{l,+}^y = 0$ iff $y \leq y_0$.
We define also $(Y_{l,-}^y)_{y\in\mathbf{R}}$ as a process which has the same law as $(Y_{l,+}^{-y})_{y\in\mathbf{R}}$, the process obtained from $(Y_{l,+}^y)_{y\in\mathbf{R}}$ by "reversing the time".

In one of the penalization results shown in [RVY05], B. Roynette, P. Vallois and M. Yor obtain a limit process $(Z_t^l)_{t\geq 0}$, such that $Z_t^l = B_t$ for $t \leq \tau_l$, $(|Z_{\tau_l+u}^l|)_{u\geq 0}$ is a BES(3) process independent of B, and $\epsilon = \mathrm{sgn}(Z_{\tau_l+u}^l)$ $(u > 0)$ is an independent variable such that $\mathbf{P}(\epsilon = 1) = \mathbf{P}(\epsilon = -1) = 1/2$. This process can be informally considered to be a Brownian motion conditionned to have a total local time equal to l at level zero. By applying Ray-Knight theorems for Brownian local times (see D. Revuz and M. Yor [RY99a]) to $(Z_t^l)_{t\geq 0}$, it is possible to show that the law of the family of its total local times is the half-sum of the laws of $(Y_{l,+}^y)_{y\in\mathbf{R}}$

and $(Y^y_{l,-})_{y\in\mathbf{R}}$ ($(Y^y_{l,+})_{y\in\mathbf{R}}$ corresponds to the paths of $(Z^l_t)_{t\geq 0}$ such that $\epsilon = 1$, and $(Y^y_{l,-})_{y\in\mathbf{R}}$ corresponds to the paths such that $\epsilon = -1$).
This explains why the processes $(Y^y_{l,+})_{y\in\mathbf{R}}$ and $(Y^y_{l,-})_{y\in\mathbf{R}}$ occur naturally in the description of the asymptotic behaviour of Brownian local times.

We also need to define some modifications of $(Y^y_{l,+})_{y\in\mathbf{R}}$ and $(Y^y_{l,-})_{y\in\mathbf{R}}$: for $l \geq 0$, $a \geq 0$, $(Y^y_{l,a})_{y\in\mathbf{R}}$ denotes a process such that $(Y^y_{l,a})_{y\geq 0}$ is markovian with the infinitesimal generator of BESQ(2) for $y \leq a$ and the infinitesimal generator of BESQ(0) for $y \geq a$, $(Y^{-y}_{l,a})_{y\geq 0}$ is an independent BESQ(0) process, and $Y^0_{l,a} = l$. For $a \leq 0$, $(Y^y_{l,a})_{y\in\mathbf{R}}$ has the same law as $(Y^{-y}_{l,-a})_{y\in\mathbf{R}}$.

Now, let F be a functional from $\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$ to $\mathbf{R}_+$, which is measurable with respect to the σ-field generated by the topology of uniform convergence on compact sets. We consider the following quantities, which will naturally appear in the asymptotics of $\mathbf{E}[F((L^y_t)_{y\in\mathbf{R}})]$:

$$I_+(F) = \int_0^\infty dl\, \mathbf{E}[F((Y^y_{l,+})_{y\in\mathbf{R}})]$$
$$I_-(F) = \int_0^\infty dl\, \mathbf{E}[F((Y^y_{l,-})_{y\in\mathbf{R}})]$$
$$I(F) = I_+(F) + I_-(F)$$

We observe that $I(F)$ is the integral of F with respect to the σ-finite measure I on $\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$, defined by :

$$I = \int_0^\infty dl\, P_{l,+} + \int_0^\infty dl\, P_{l,-}$$

where $P_{l,+}$ is the law of $(Y^y_{l,+})_{y\in\mathbf{R}}$ and $P_{l,-}$ is the law of $(Y^y_{l,-})_{y\in\mathbf{R}}$.

At the end of this section, we give some conditions on F which turn out to be sufficient to obtain our penalization result.
Unfortunately, these conditions are not very simple and we need three more definitions before stating the main Theorem :

Definition 4.1 (a condition of domination) : *Let c and n be in $\mathbf{R}_+$ (generally n will be an integer). For every decreasing function h from $\mathbf{R}_+$ to $\mathbf{R}_+$, we say that a measurable functional F from $\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$ to $\mathbf{R}_+$ satisfies the condition $C(c,n,h)$ iff the following holds for every continuous function l from $\mathbf{R}$ to $\mathbf{R}_+$:*

1) $F((l^y)_{y\in\mathbf{R}})$ depends only on $(l^y)_{y\in[-c,c]}$.

2) $F((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) \leq \left(\frac{\sup_{y\in[-c,c]} l^y + c}{\inf_{y\in[-c,c]} l^y + c}\right)^n h\left(\inf_{y\in[-c,c]} l^y\right)$

Intuitively, a functional of the local times satisfies the above condition if it depends only on the local times on a compact set, and if it is small when these local times are large and don't vary too much.

Now, let us use the notation :

$$N_c(h) = ch(0) + \int_0^\infty h(y)dy$$

If $N_c(h) < \infty$, it is possible to prove our main theorem for all functionals F which satisfies the condition $C(c,n,h)$, but this condition is restrictive, since the functional F must not depend on the local times outside of $[-c,c]$.

In order to relax this restriction, we need the following definition :

Definition 4.2 (a less restrictive condition of domination) : *Let n be in $\mathbf{R}_+$ and F be a positive and measurable functional from $\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$ to $\mathbf{R}$.*
For all $M \geq 0$, let us say that F satisfies the condition $D(n,M)$ iff there exists a sequence $(c_k)_{k\geq 1}$ in $[1,\infty[$, a sequence $(h_k)_{k\geq 1}$ of decreasing functions from $\mathbf{R}_+$ to $\mathbf{R}_+$, and a sequence $(F_k)_{k\geq 0}$ of measurable functionals from $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ to $\mathbf{R}_+$, such that :

1) $F_0 = 0$ and $(F_k)_{k\geq 1}$ tends to F pointwise.

2) For all $k \geq 1$, $|F_k - F_{k-1}|$ satisfies the condition $C(c_k,n,h_k)$.

3) $\sum\limits_{k\geq 1} N_{c_k}(h_k) \leq M$.

We define the quantity $N^{(n)}(F)$ as the infimum of $M \geq 0$ such that F satisfies the condition $D(n,M)$.

Intuitively, if $N^{(n)}(F) < \infty$, it means that F can be well-approximated by functionals which satisfy conditions given in Definition 4.1.
In particular, if F satisfies the condition $C(c,n,h)$ for $c \geq 1$, one has : $N^{(n)}(F) \leq N_c(h)$ (one can prove that F satisfies the condition $D(n,N_c(h))$, by taking in Definition 4.2 : $c_k = c$, $h_k = h\mathbf{1}_{k=1}$, $F_0 = 0$ and $F_k = F$ if $k \geq 1$).

Now, for a given functional F, we need to define some other fonctionals, informally obtained from F by "shifting" the space and adding a given function to the local time family.

More precisely, let us consider the following definition :

Definition 4.3 (local time and space shift) : *Let x be a real number. If F is a measurable functional from $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ to $\mathbf{R}_+$, and if $(l_0^y)_{y\in\mathbf{R}}$ is a continuous function from $\mathbf{R}$ to $\mathbf{R}_+$, we denote by $F^{(l_0^y)_{y\in\mathbf{R}},x}$ the functional from $\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$ to $\mathbf{R}_+$ which satisfies :*

$$F^{(l_0^y)_{y\in\mathbf{R}},x}((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = F((l_0^y + l^{y-x})_{y\in\mathbf{R}})$$

for every function $(l^y)_{y\in\mathbf{R}}$.

This notation and the functionals defined in this way appear naturally when we consider the conditional expectation : $\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})|(B_u)_{u\leq s}]$, for $0 < s < t$, and apply the Markov property.

We are now able to state the main theorem of the article :

Theorem 4 : *Let F be a functional from $\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$ to $\mathbf{R}_+$ such that $I(F) > 0$ and $N^{(n)}(F) < \infty$*

for some $n \geq 0$.
If $\mathbf{W}$ denotes the standard Wiener measure on $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, $(X_t)_{t\geq 0}$ the canonical process, and $(l_t^y(X))_{t\in\mathbf{R}_+, y\in\mathbf{R}}$ the continuous family of its local times ($\mathbf{W}$-a.s. well-defined), the probability measure :

$$\mathbf{W}_t^F = \frac{F\left((l_t^y(X))_{y\in\mathbf{R}}\right)}{\mathbf{W}\left[F\left((l_t^y(X))_{y\in\mathbf{R}}\right)\right]}.\mathbf{W}$$

is well-defined for every t which is large enough, and there exists a probability measure $\mathbf{W}_\infty^F$ such that :

$$\mathbf{W}_t^F(\Lambda_s) \underset{t\to\infty}{\to} \mathbf{W}_\infty^F(\Lambda_s)$$

for every $s \geq 0$ and $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s = \sigma\{X_u, u \leq s\}$.

Moreover, this limit measure satisfies the following equality :

$$\mathbf{W}_\infty^F(\Lambda_s) = \mathbf{W}\left(\mathbf{1}_{\Lambda_s}.\frac{I\left(F^{(l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}}, X_s}\right)}{I(F)}\right)$$

Remark 4.1.1 : A consequence of the Theorem 4 is the fact that if $I(F) > 0$ and $N^{(n)}(F) < \infty$ for some $n \geq 0$, the process $\frac{(I(F^{(L_s^y)_{y\in\mathbf{R}}, B_s}))_{s\geq 0}}{I(F)}$ is a martingale. In three of the four examples studied in Section 4.6, we compute explicitly this martingale, and in the two first ones, we check that this computation agrees with the results obtained by B. Roynette, P. Vallois and M. Yor.

Remark 4.1.2 : We point out that our notation, $l_t^y(X)$, for the local times given in the Theorem 4, differs from the notation L_t^y, which is used for the local times of $(B_s)_{s\leq t}$. This is because, in one case, we consider the canonical process $(X_t)_{t\geq 0}$ on a given probability space, and in the other case, we consider a Brownian motion on a space which is not made precise. Hence, the two mathematical objects deserve different writings, despite the fact that they are strongly related.

4.2 An approximation of the functionals of local times

In order to prove the Theorem 4, we need to study the expectation of $F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})$, where F is a function from $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ to $\mathbf{R}_+$.

However, in general, it is difficult to do that directly, so in this section, we will replace $F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})$ by an approximation.

For the study of this approximation, we need to consider the following quantities :

$$\mathcal{I}_{l,+}^c = \int_{-c}^{c} Y_{l,+}^y dy, \quad \mathcal{I}_{l,-}^c = \int_{-c}^{c} Y_{l,-}^y dy, \quad \mathcal{I}_{l,a}^c = \int_{-c}^{c} Y_{l,a}^y dy$$

for $c \in \mathbf{R}_+$ or $c = \infty$, $a \in \mathbf{R}$;

$$\mathcal{Y}_{l,+}^c = \frac{1}{2}(Y_{l,+}^c + Y_{l,+}^{-c}), \quad \mathcal{Y}_{l,-}^c = \frac{1}{2}(Y_{l,-}^c + Y_{l,-}^{-c}), \quad \mathcal{Y}_{l,a}^c = \frac{1}{2}(Y_{l,a}^c + Y_{l,a}^{-c})$$

for $c \in \mathbf{R}_+$, $a \in \mathbf{R}$;

$$I_{c,t,+}(F) = \int_0^\infty dl\, \mathbf{E}\left[F((Y^y_{l,+})_{y\in\mathbf{R}}) \frac{e^{-(\mathcal{Y}^c_{l,+})^2/2(t-\mathcal{I}^c_{l,+})}}{\sqrt{1-\mathcal{I}^c_{l,+}/t}} \phi\left(\frac{\mathcal{I}^c_{l,+}}{t}\right)\right]$$

$$I_{c,t,-}(F) = \int_0^\infty dl\, \mathbf{E}\left[F((Y^y_{l,-})_{y\in\mathbf{R}}) \frac{e^{-(\mathcal{Y}^c_{l,-})^2/2(t-\mathcal{I}^c_{l,-})}}{\sqrt{1-\mathcal{I}^c_{l,-}/t}} \phi\left(\frac{\mathcal{I}^c_{l,-}}{t}\right)\right]$$

and

$$I_{c,t}(F) = I_{c,t,+}(F) + I_{c,t,-}(F)$$

for $c \in \mathbf{R}_+$, $t > 0$, where ϕ denotes the function from $\mathbf{R}_+$ to $\mathbf{R}_+$ such that $\phi(x) = 1$ in $x \leq 1/3$, $\phi(x) = 2-3x$ if $1/3 \leq x \leq 2/3$ and $\phi(x) = 0$ if $x \geq 2/3$ (in particular, this function is continuous with compact support included in $[0,1[$).

We observe that the expression $\frac{e^{-(\mathcal{Y}^c_{l,+})^2/2(t-\mathcal{I}^c_{l,+})}}{\sqrt{1-\mathcal{I}^c_{l,+}/t}}$ is not well-defined if $\mathcal{I}^c_{l,+} \geq t$; but this is not important here, since $\phi(\mathcal{I}^c_{l,+}/t) = 0$ in that case.

Now, the main result of this section is the following proposition :

Proposition 4.2 : *For all measurable functionals from $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ to $\mathbf{R}_+$, such that $F((l^y)_{y\in\mathbf{R}})$ depends only on $(l^y)_{y\in[-c,c]}$ for some $c \geq 0$, the following equality holds :*

$$\sqrt{2\pi t}\, \mathbf{E}\left[F((L^y_t)_{y\in\mathbf{R}}) \mathbf{1}_{|B_t|\geq c} \phi\left(\frac{1}{t}\int_{-c}^c L^y_t dy\right)\right] = I_{c,t}(F)$$

for all $t > 0$.

Proof : Let G_0 be a functional from $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}_+$ to $\mathbf{R}_+$, such that the process : $(G_0((X_s)_{s\geq 0}, t))_{t\geq 0}$, defined on the canonical space $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, is progressively measurable.

For every continuous function ω from $\mathbf{R}_+$ to $\mathbf{R}$, $G_0((\omega_s)_{s\geq 0}, t)$ depends only on $(\omega_s)_{s\leq t}$; let us take :

$$G((\omega_s)_{s\leq t}) = G_0((\omega_s)_{s\geq 0}, t)$$

Now, by results by C. Leuridan (see [Leu98]), P. Biane and M. Yor (see [BY88]), one has :

$$\int_0^\infty dt\, G((B_s)_{s\leq t}) = \int_0^\infty dl \int_{-\infty}^\infty da\, G((B_s)_{s\leq \tau^a_l})$$

By using invariance properties of Brownian motion for time and space reversals, one obtains :

$$\int_0^\infty dt\, \mathbf{E}[G((B_s)_{s\leq t})] = \int_0^\infty dl \int_{-\infty}^\infty da\, \mathbf{E}[G((Z^{l,a}_s)_{s\leq \tau_l + T_{a\to 0}})]$$

where $(Z^{l,a}_s)_{s\leq \tau_l+T_{a\to 0}}$ denotes a process such that $Z^{l,a}_s = B_s$ for $s \leq \tau_l$ and $(Z^{l,a}_{\tau_l+u})_{u\leq T_{a\to 0}}$ is the time-reversed process of a Brownian motion starting from a, independent of B, and considered up to its first hitting time of zero (denoted by $T_{a\to 0}$).

Therefore, for all Borel sets U of $\mathbf{R}^*_+$, if we define $J_{c,U}(F)$ by :

$$J_{c,U}(F) = \int_U dt\, \mathbf{E}\left[F((L^y_t)_{y\in\mathbf{R}}) \mathbf{1}_{|B_t|\geq c} \phi\left(\frac{1}{t}\int_{-c}^c L^y_t dy\right)\right]$$

we have, by taking G_0 and G such that $G((B_s)_{s\le t}) = F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})$:

$$J_{c,U}(F) = \int_0^\infty dt\, \mathbf{E}\left[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{|B_t|\ge c}\phi\left(\frac{\int_{-c}^c L_t^y dy}{\int_{-\infty}^\infty L_t^y dy}\right)\mathbf{1}_{\int_{-\infty}^\infty L_t^y dy\in U}\right]$$
$$= \int_0^\infty dl \int_{\mathbf{R}\setminus[-c,c]} da\, \mathbf{E}\left[F((L^{y,l,a})_{y\in\mathbf{R}})\phi\left(\frac{\int_{-c}^c L^{y,l,a}dy}{\int_{-\infty}^\infty L^{y,l,a}dy}\right)\mathbf{1}_{\int_{-\infty}^\infty L^{y,l,a}dy\in U}\right]$$

where $(L^{y,l,a})_{y\in\mathbf{R}}$ is the continuous family of the total local times of $Z^{l,a}$.

Hence, by Ray-Knight theorem applied to the independent processes $(B_s = Z_s)_{s\le\tau_l}$ and $(Z_{\tau_l+u})_{u\le T_{a\to 0}}$, and classical additivity properties of squared Bessel processes :

$$J_{c,U}(F) = \int_0^\infty dl \int_{\mathbf{R}\setminus[-c,c]} da\, \mathbf{E}\left[F((Y_{l,a}^y)_{y\in\mathbf{R}})\phi\left(\frac{\mathcal{I}_{l,a}^c}{\mathcal{I}_{l,a}^\infty}\right)\mathbf{1}_{\mathcal{I}_{l,a}^\infty\in U}\right]$$
$$= \int_0^\infty dl \int_{\mathbf{R}\setminus[-c,c]} da\, \mathbf{E}\left[F((Y_{l,a}^y)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{E}\left[\phi\left(\frac{\mathcal{I}_{l,a}^c}{\mathcal{I}_{l,a}^\infty}\right)\mathbf{1}_{\mathcal{I}_{l,a}^\infty\in U}\,\Big|(Y_{l,a}^y)_{y\in[-c,c]}\right]\right]$$

since $F((Y_{l,a}^y)_{y\in\mathbf{R}})$ depends only on $(Y_{l,a}^y)_{y\in[-c,c]}$.

Now, if θ is a given continuous function from $[-c,c]$ to $\mathbf{R}_+$, the integrals : $\int_c^\infty Y_{l,a}^y dy$ and $\int_{-\infty}^{-c} Y_{l,a}^y dy$ are independent conditionally on $(Y_{l,a}^y = \theta^y)_{y\in[-c,c]}$ and their conditional laws are respectively equal to the laws of $\int_0^\infty Y_{\theta^c,(a-c)_+}^y dy$ and $\int_0^\infty Y_{\theta^{-c},(-a-c)_+}^y dy$.

Therefore, by additivity properties of BESQ processes, the conditional law of :

$$\mathcal{I}_{l,a}^\infty - \mathcal{I}_{l,a}^c = \int_{-\infty}^{-c} Y_{l,a}^y dy + \int_c^\infty Y_{l,a}^y dy$$

given $(Y_{l,a}^y = \theta^y)_{y\in[-c,c]}$, is equal to the law of :

$$\int_0^\infty Y_{\theta^c+\theta^{-c},0}^y dy + \int_0^\infty Y_{0,(|a|-c)_+}^y dy$$

where $(Y_{\theta^c+\theta^{-c},0}^y)_{y\ge0}$ and $(Y_{0,(|a|-c)_+}^y)_{y\ge0}$ are supposed to be independent.

By Ray-Knight theorem, $\int_0^\infty Y_{\theta^c+\theta^{-c},0}^y dy$ has the same law as the time spent in $\mathbf{R}_+$ by $(B_s)_{s\le\tau_{\theta^c+\theta^{-c}}}$, therefore :

$$\int_0^\infty Y_{\theta^c+\theta^{-c},0}^y dy \overset{(d)}{=} \tau_{(\theta^c+\theta^{-c})/2} \overset{(d)}{=} T_{(\theta^c+\theta^{-c})/2}$$

Moreover :

$$\int_0^\infty Y_{0,(|a|-c)_+}^y dy \overset{(d)}{=} T_{(|a|-c)_+}$$

Hence, the conditional law of $\mathcal{I}_{l,a}^\infty - \mathcal{I}_{l,a}^c$, given $(Y_{l,a}^y = \theta^y)_{y\in[-c,c]}$, is equal to the law of $T_{(|a|-c)_+ + (\theta^c+\theta^{-c})/2}$. Consequently :

$$J_{c,U}(F) = \int_0^\infty dl \int_{\mathbf{R}\setminus[-c,c]} da\, \mathbf{E}\left[F((Y_{l,a}^y)_{y\in\mathbf{R}})\psi_a(\mathcal{I}_{l,a}^c, \mathcal{Y}_{l,a}^c)\right]$$

where, for $|a| > c$:

$$\psi_a(\mathcal{I},\theta) = \mathbf{E}\left[\phi\left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}+T_{|a|-c+\theta}}\right)\mathbf{1}_{\mathcal{I}+T_{|a|-c+\theta}\in U}\right]$$

Now, if, for all $u > 0$, p_u denotes the density of the law of T_u, one has :

$$\psi_a(\mathcal{I},\theta) = \int_U \phi(\mathcal{I}/t)p_{|a|-c+\theta}(t-\mathcal{I})dt$$

and :

$$J_{c,U}(F) = \int_U dt \int_0^\infty dl \int_{\mathbf{R}\setminus[-c,c]} da\, \mathbf{E}\left[F((Y^y_{l,a})_{y\in\mathbf{R}})\phi\left(\frac{\mathcal{I}^c_{l,a}}{t}\right)p_{|a|-c+\mathcal{Y}^c_{l,a}}(t-\mathcal{I}^c_{l,a})\right]$$

By hypothesis, $F((Y^y_{l,a})_{y\in\mathbf{R}})$ depends only on $(Y^y_{l,a})_{y\in[-c,c]}$. Moreover, for $a \geq c$, $(Y^y_{l,a})_{y\in[-c,c]}$ has the same law as $(Y^y_{l,+})_{y\in[-c,c]}$, and for $a \leq -c$, $(Y^y_{l,a})_{y\in[-c,c]}$ has the same law as $(Y^y_{l,-})_{y\in[-c,c]}$.

Hence, we have :

$$\begin{aligned} J_{c,U}(F) = & \int_U dt \int_0^\infty dl\, \mathbf{E}\left[F((Y^y_{l,+})_{y\in\mathbf{R}})\phi\left(\frac{\mathcal{I}^c_{l,+}}{t}\right)\int_c^\infty p_{a-c+\mathcal{Y}^c_{l,+}}(t-\mathcal{I}^c_{l,+})da\right] \\ & + \int_U dt \int_0^\infty dl\, \mathbf{E}\left[F((Y^y_{l,-})_{y\in\mathbf{R}})\phi\left(\frac{\mathcal{I}^c_{l,-}}{t}\right)\int_{-\infty}^{-c} p_{|a|-c+\mathcal{Y}^c_{l,-}}(t-\mathcal{I}^c_{l,-})da\right] \end{aligned}$$

Now, for $\theta \geq 0$, $u > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-c} p_{|a|-c+\theta}(u)da &= \int_c^\infty p_{a-c+\theta}(u)da = \int_\theta^\infty p_b(u)db \\ &= \int_\theta^\infty \frac{b}{\sqrt{2\pi u^3}}e^{-b^2/2u}db = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}}e^{-\theta^2/2u} \end{aligned}$$

Therefore :

$$J_{c,U}(F) = \int_U dt\, \frac{I_{c,t}(F)}{\sqrt{2\pi t}}$$

This equality is satisfied for every Borel set U. Hence, by definition of $J_{c,U}(F)$, the equality given in Proposition 4.2 occurs for almost every $t > 0$.
In order to prove it for all $t > 0$, we begin to suppose that F is bounded and continuous.
In this case, for all s, $t > 0$:

$$\begin{aligned} &\left|\mathbf{E}\left[F((L^y_t)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{|X_t|\geq c}\phi\left(\frac{1}{t}\int_{-c}^c L^y_t dy\right)\right] - \mathbf{E}\left[F((L^y_s)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{|X_s|\geq c}\phi\left(\frac{1}{s}\int_{-c}^c L^y_s dy\right)\right]\right| \\ &\leq \mathbf{E}\left[\left|F((L^y_t)_{y\in\mathbf{R}})\phi\left(\frac{1}{t}\int_{-c}^c L^y_t dy\right) - F((L^y_s)_{y\in\mathbf{R}})\phi\left(\frac{1}{s}\int_{-c}^c L^y_s dy\right)\right|\right] \\ &\quad + ||F||_\infty \mathbf{P}(\exists u \in [s,t], |X_u| = c) \end{aligned}$$

If t is fixed, the first term of this sum tends to zero when s tends to t, by continuity of F, ϕ and dominated convergence.
The second term tends also to :

$$||F||_\infty \mathbf{P}(|X_t| = c) = 0$$

Therefore, the function :

$$t \to \mathbf{E}\left[F((L^y_t)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{|X_t|\geq c}\phi\left(\frac{1}{t}\int_{-c}^c L^y_t dy\right)\right]$$

is continuous.

Now, let us prove that $I_{c,t}(F)$ is also continuous with respect to t.

For all $t > 0$:

$$F((Y^y_{l,+})_{y\in\mathbf{R}})\frac{e^{-(\mathcal{Y}^c_{l,+})^2/2(s-\mathcal{I}^c_{l,+})}}{\sqrt{1-\mathcal{I}^c_{l,+}/s}}\phi\left(\frac{\mathcal{I}^c_{l,+}}{s}\right)\underset{s\to t}{\to}F((Y^y_{l,+})_{y\in\mathbf{R}})\frac{e^{-(\mathcal{Y}^c_{l,+})^2/2(t-\mathcal{I}^c_{l,+})}}{\sqrt{1-\mathcal{I}^c_{l,+}/t}}\phi\left(\frac{\mathcal{I}^c_{l,+}}{t}\right)$$

by continuity of ϕ (if $\mathcal{I}^c_{l,+} < t$, it is clear, and if $\mathcal{I}^c_{l,+} \geq t$, the two expressions are equal to zero for $s \leq 3t/2$).

Moreover, for $s \leq 2t$:

$$F((Y^y_{l,+})_{y\in\mathbf{R}})\frac{e^{-(\mathcal{Y}^c_{l,+})^2/2(s-\mathcal{I}^c_{l,+})}}{\sqrt{1-\mathcal{I}^c_{l,+}/s}}\phi\left(\frac{\mathcal{I}^c_{l,+}}{s}\right)\leq\sqrt{3}||F||_\infty e^{-(\mathcal{Y}^c_{l,+})^2/4t}\leq\sqrt{3}||F||_\infty e^{-(Y^c_{l,+})^2/16t}$$

Recalling that the Lebesgue measure is invariant for the BESQ(2) process $(Y^y_{l,+})_{y\geq 0}$, we have :

$$\int_0^\infty dl\,\mathbf{E}\left[e^{-(Y^c_{l,+})^2/16t}\right]=\int_0^\infty dl\,e^{-l^2/16t}<\infty$$

By dominated convergence, $t \to I_{c,t,+}(F)$ is continuous.

Similar computations imply the continuity of $t \to I_{c,t,-}(F)$, and finally $t \to I_{c,t}(F)$ is continuous.

Consequently, for F continuous and bounded, the equality given in Proposition 4.2, which was proven for a.e. $t > 0$, remains true for every $t > 0$.
Now, by monotone class theorem (see D. Revuz and M. Yor [RY99b]), it is not difficult to extend this equality to every measurable and positive function, which completes the proof of Proposition 4.2. □

This proposition has the following consequence :

Corollary 4.2 : *Let F be a functional which satisfies the condition of Proposition 4.2. The two following properties hold :*

1) For all $t > 0$:

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}\left[F((L^y_t)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{|B_t|\geq c}\phi\left(\frac{1}{t}\int_{-c}^{c}L^y_t dy\right)\right]\leq\sqrt{3}\,I(F)$$

2) When t goes to infinity :

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}\left[F((L^y_t)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{|B_t|\geq c}\phi\left(\frac{1}{t}\int_{-c}^{c}L^y_t dy\right)\right]\to I(F)$$

Proof : The first property is obvious, since $\phi(x)/\sqrt{1-x} \leq \sqrt{3}$ for all $x \geq 0$.
In order to prove the second property, we distinguish two cases :

1) If $I(F) < \infty$, we observe that :

$$F((Y_{l,+}^y)_{y\in\mathbf{R}})\frac{e^{-(\mathcal{Y}_{l,+}^c)^2/2(t-\mathcal{I}_{l,+}^c)}}{\sqrt{1-\mathcal{I}_{l,+}^c/t}}\phi\left(\frac{\mathcal{I}_{l,+}^c}{t}\right)$$

is smaller than $\sqrt{3}F((Y_{l,+}^y)_{y\in\mathbf{R}})$ and tends to $F((Y_{l,+}^y)_{y\in\mathbf{R}})$ when t goes to infinity.
By dominated convergence, $I_{c,t,+}(F) \to I_+(F)$.
Similarly, $I_{c,t,-}(F) \to I_-(F)$ and finally :

$$I_{c,t}(F) \to I(F)$$

2) If $I(F) = \infty$, we can suppose for example : $I_+(F) = \infty$.
In this case :

$$I_{c,t}(F) \geq I_{c,t,+}(F) \geq \int_0^\infty dl\,\mathbf{E}\left[F((Y_{l,+}^y)_{y\in\mathbf{R}})e^{-(\mathcal{Y}_{l,+}^c)^2/2(t-\mathcal{I}_{l,+}^c)}\phi\left(\frac{\mathcal{I}_{l,+}^c}{t}\right)\right]$$

which tends to $I_+(F) = \infty$ when $t \to \infty$, by monotone convergence. $\square$

Now, the next step in this article is the majorization of the difference between the quantity $\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})]$ and the expression given in Proposition 4.2.

4.3 Majorization of the error term

For every positive and measurable functional F, we denote by $\Delta_{c,t}(F)$ the error term we need to majorize :

$$\Delta_{c,t}(F) = \left|\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}\left[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{|B_t|\geq c}\phi\left(\frac{1}{t}\int_{-c}^{c}L_t^y dy\right)\right] - \sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}\left[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})\right]\right|$$

It is easy to check that :

$$\Delta_{c,t}(F) \leq \Delta_{c,t}^{(1)}(F) + \Delta_{c,t}^{(2)}(F)$$

where :

$$\Delta_{c,t}^{(1)}(F) = \sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}\left[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{|B_t|\leq c}\right]$$

and

$$\Delta_{c,t}^{(2)}(F) = \sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}\left[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{\int_{-c}^{c}L_t^y dy\geq t/3}\right]$$

The following proposition gives some precise majorizations of these quantities, when F satisfies the conditions of Definition 4.1.

Proposition 4.3 : *Let F be a functional from $\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$ to $\mathbf{R}_+$ which satisfies the condition $C(c,n,h)$ for a positive, decreasing function h and $c, n \geq 0$.*
For all $t \geq 0$, one has the following majorizations :

1) $\Delta_{c,t}^{(1)}(F) \leq A_n\frac{N_c(h)}{1+(t/c^2)^{1/3}}$

2) $\Delta_{c,t}^{(2)}(F) \leq A_n\frac{ch(0)}{1+(t/c^2)} \leq A_n\frac{N_c(h)}{1+(t/c^2)}$

3) $\Delta_{c,t}(F) \leq A_n\frac{N_c(h)}{1+(t/c^2)^{1/3}}$

4) $I(F) \leq A_n N_c(h)$

where $A_n > 0$ depends only on n.

In order to prove Proposition 4.3, we will need some inequalities about the processes $(L_t^y)_{y\in[-c,c]}$ and $(Y_{l,+}^y)_{y\in[-c,c]}$.
More precisely, if we put : $\Sigma_t^c = \sup_{y\in[-c,c]} L_t^y$, $\sigma_t^c = \inf_{y\in[-c,c]} L_t^y$, $\Theta_{l,+}^c = \sup_{y\in[-c,c]} Y_{l,+}^y$, $\theta_{l,+}^c = \inf_{y\in[-c,c]} Y_{l,+}^y$, $\Theta_{l,-}^c = \sup_{y\in[-c,c]} Y_{l,-}^y$, $\theta_{l,-}^c = \inf_{y\in[-c,c]} Y_{l,-}^y$, the following statement hold :

Lemma 4.3 : *For all c, $t > 0$:*

1) If $a \geq 0$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\Sigma_t^c + c}{\sigma_t^c + c} \geq a\right) \leq Ae^{-\lambda a}$$

2) If $a \geq 4$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\Theta_{l,+}^c + c}{\theta_{l,+}^c + c} \geq a\right) \leq Ae^{-\lambda\left(a+\frac{l}{c}\right)}$$

3) If $a \geq 4$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\Theta_{l,-}^c + c}{\theta_{l,-}^c + c} \geq a\right) \leq Ae^{-\lambda\left(a+\frac{l}{c}\right)}$$

where $A > 0$, $0 < \lambda < 1$ are universal constants.

Proof of Lemma 4.3 : 1) Let us suppose $a \geq 8$, $c > 0$.
In that case :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\frac{\Sigma_t^c + c}{\sigma_t^c + c} \geq a, L_t^0 \geq \frac{ac}{4}\right) &\leq \mathbf{P}\left(\frac{\Sigma_t^c + c}{\sigma_t^c + c} \geq 8, L_t^0 \geq \frac{ac}{4}\right) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{P}\left(\frac{\Sigma_t^c}{\sigma_t^c} \geq 8, L_t^0 \in [2^{k-2}ac, 2^{k-1}ac]\right) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(\Sigma_t^c \geq 2^k ac, L_t^0 \in [2^{k-2}ac, 2^{k-1}ac]) \\
&\quad + \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(\sigma_t^c \leq 2^{k-3}ac, \Sigma_t^c \leq 2^k ac, L_t^0 \in [2^{k-2}ac, 2^{k-1}ac]) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbf{N}} \left[\mathbf{P}(\Sigma_{\tau_{2^{k-1}ac}}^c \geq 2^k ac) + \mathbf{P}(\sigma_{\tau_{2^{k-2}ac}}^c \leq 2^{k-3}ac,\ \Sigma_{\tau_{2^{k-2}ac}}^c \leq 2^k ac)\right] \\
&= \sum_{k\in\mathbf{N}} \left[\alpha_c(2^{k-1}ac) + \beta_c(2^{k-2}ac)\right]
\end{aligned}$$

where for $l \geq 0$, $\alpha_c(l) = \mathbf{P}(\Sigma_{\tau_l}^c \geq 2l)$ and $\beta_c(l) = \mathbf{P}(\sigma_{\tau_l}^c \leq l/2, \Sigma_{\tau_l}^c \leq 4l)$.

Now, by Ray-Knight theorem, $\alpha_c(l) \leq 2\mathbf{P}\left(\sup_{y\in[0,c]} Y_{l,0}^y \geq 2l\right)$, and by Dubins-Schwarz theorem, $Y_{l,0}^y = l + \beta_{\int_0^y 4Y_{l,0}^z dz}$, where β is a Brownian motion.

Hence, if $S = \inf\{y \geq 0, Y^y_{l,0} \geq 2l\}$, one has : $\sup\limits_{u \leq \int_0^S 4Y^z_{l,0}dz} \beta_u = l$, and if we suppose $\sup\limits_{y\in[0,c]} Y^y_{l,0} \geq 2l$, we have $S \leq c$, $\int_0^S 4Y^z_{l,0}dz \leq \int_0^S 8ldz \leq 8lc$, and finally : $\sup\limits_{u\leq 8lc} \beta_u \geq l$.

Consequently :

$$\alpha_c(l) \leq 2\mathbf{P}\left(\sup_{u\leq 8lc} \beta_u \geq l\right) = 2\mathbf{P}(|\beta_{8lc}| \geq l) \leq 4\mathbf{P}(\beta_{8lc} \geq l) \leq 4e^{-l/16c}$$

By the same kind of argument, one obtains :

$$\beta_c(l) \leq 4e^{-l/128c}$$

and finally :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\frac{\Sigma^c_t + c}{\sigma^c_t + c} \geq a, L^0_t \geq \frac{ac}{4}\right) &\leq 4\sum_{k\in\mathbf{N}} \left(e^{-2^{k-1}a/16} + e^{-2^{k-2}a/128}\right) \\
&\leq 8\sum_{k\in\mathbf{N}} e^{-2^k a/512} \leq 8\sum_{k\in\mathbf{N}^*} e^{-ka/512} \\
&\leq 8e^{-a/512}\left(\sum_{k\in\mathbf{N}} e^{-k/64}\right) \leq 520e^{-a/512}
\end{aligned}$$

On the other hand :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\frac{\Sigma^c_t + c}{\sigma^c_t + c} \geq a, L^0_t \leq \frac{ac}{4}\right) &\leq \mathbf{P}\left(\Sigma^c_t + c \geq ac, L^0_t \leq \frac{ac}{4}\right) \leq \mathbf{P}\left(\Sigma^c_{\tau_{ac/4}} \geq (a-1)c\right) \\
&\leq \mathbf{P}\left(\Sigma^c_{\tau_{ac/4}} \geq \frac{7ac}{8}\right) \leq \alpha_c\left(\frac{ac}{4}\right) \leq 4e^{-a/64}
\end{aligned}$$

Consequently :

$$\mathbf{P}\left(\frac{\Sigma^c_t + c}{\sigma^c_t + c} \geq a\right) \leq 524e^{-a/512}$$

for all $a \geq 8$.
This inequality remains obviously true for $a \leq 8$ or $c = 0$, so the first part of Lemma 4.3 is proven.

2) Let a be greater than 4. If $l \geq ac/4$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\Theta^c_{l,+} + c}{\theta^c_{l,+} + c} \geq 4\right) \leq \mathbf{P}\left(\Theta^c_{l,+} \geq 2l\right) + \mathbf{P}\left(\Theta^c_{l,+} \leq 2l, \theta^c_{l,+} \leq l/2\right) \leq 2\tilde{\alpha}_c(l) + \tilde{\beta}_c(l)$$

where

$$\tilde{\alpha}_c(l) = \mathbf{P}\left(\sup_{y\in[0,c]} Y^y_{l,+} \geq 2l\right)$$

and

$$\tilde{\beta}_c(l) = \mathbf{P}\left(\sup_{y\in[-c,c]} Y^y_{l,0} \leq 2l, \inf_{y\in[-c,c]} Y^y_{l,0} \leq l/2\right)$$

Now, $(Y^y_{l,+})_{y\geq 0}$ is a BESQ(2) process, hence, if $(\beta_y = (\beta^{(1)}_y, \beta^{(2)}_y))_{y\geq 0}$ is a standard two-dimensional Brownian motion :

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_c(l) = \mathbf{P}\left(\sup_{y\in[0,c]} Y^y_{l,+} \geq 2l\right) &= \mathbf{P}\left(\sup_{y\leq c} ||\beta_y + (\sqrt{l},0)|| \geq \sqrt{2l}\right) \\
&\leq \mathbf{P}\left(\sup_{y\leq c} ||\beta_y|| \geq \sqrt{l}(\sqrt{2}-1)\right) \leq 2\mathbf{P}\left(\sup_{y\leq c} |\beta^{(1)}_y| \geq \sqrt{l}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\right) \\
&\leq 8\mathbf{P}\left(\beta^{(1)}_c \geq \sqrt{l}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\right) \leq 8e^{-l/50c}
\end{aligned}$$

Moreover :

$$\tilde{\beta}_c(l) \leq \mathbf{P}\left(\sup_{y\in[-c,c]} Y^y_{l,0} \leq 4l, \inf_{y\in[-c,c]} Y^y_{l,0} \leq l/2\right) = \beta_c(l) \leq 4e^{-l/128c}$$

Therefore, if $l \geq ac/4$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\Theta^c_{l,+}+c}{\theta^c_{l,+}+c} \geq a\right) \leq 20e^{-l/128c}$$

Now, let us suppose $l \leq ac/4$. In this case :

$$\mathbf{P}\left(\frac{\Theta^c_{l,+}+c}{\theta^c_{l,+}+c} \geq a\right) \leq \mathbf{P}\left(\Theta^c_{ac/4,+} \geq 3ac/4\right) \leq 2\tilde{\alpha}_c(ac/4) \leq 16e^{-a/200}$$

Hence, for every $l \geq 0$, $a \geq 4$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\Theta^c_{l,+}+c}{\theta^c_{l,+}+c} \geq a\right) \leq 20e^{-(a+(l/c))/1024}$$

which proves the second inequality of the lemma.
The proof of the third inequality is exactly similar. □

Now, we are able to prove the main result of the section, which was presented in Proposition 4.3.

Proof of Proposition 4.3 : 1) For $c = 0$, $\Delta^{(1)}_{c,t}(F) = 0$, so we can suppose $c > 0$.

The functional F satisfies the condition $C(c,n,h)$; hence, for all $a \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta^{(1)}_{c,t}(F)}{\sqrt{2\pi t}} = \mathbf{E}\left[F((L^y_t)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{|B_t|\leq c}\right] &\leq \mathbf{E}\left[\left(\frac{\Sigma^c_t+c}{\sigma^c_t+c}\right)^n h(\sigma^c_t)\mathbf{1}_{|B_t|\leq c}\right] \\
&\leq \mathbf{E}\left[\left(\frac{\Sigma^c_t+c}{\sigma^c_t+c}\right)^n h(0)\mathbf{1}_{\frac{\Sigma^c_t+c}{\sigma^c_t+c}\geq a}\right] + a^n\mathbf{E}\left[h(\sigma^c_t)\mathbf{1}_{|B_t|\leq c}\mathbf{1}_{\frac{\Sigma^c_t+c}{\sigma^c_t+c}\leq a}\right]
\end{aligned}$$

Now, if $\frac{\Sigma^c_t+c}{\sigma^c_t+c} \leq a$, one has : $\frac{L^0_t+c}{\sigma^c_t+c} \leq a$ and $\sigma^c_t \geq \left(\frac{L^0_t}{a} - c\right)_+$.

Therefore :

$$\frac{\Delta^{(1)}_{c,t}(F)}{\sqrt{2\pi t}} \leq h(0)\mathbf{E}\left[\left(\frac{\Sigma^c_t+c}{\sigma^c_t+c}\right)^n \mathbf{1}_{\frac{\Sigma^c_t+c}{\sigma^c_t+c}\geq a}\right] + a^n\mathbf{E}\left[h\left(\left(\frac{L^0_t}{a} - c\right)_+\right)\mathbf{1}_{|B_t|\leq c}\right]$$

By Lemma 4.3 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\left(\frac{\Sigma_t^c + c}{\sigma_t^c + c}\right)^n \mathbf{1}_{\frac{\Sigma_t^c + c}{\sigma_t^c + c} \geq a}\right] &= a^n \mathbf{P}\left(\frac{\Sigma_t^c + c}{\sigma_t^c + c} \geq a\right) + \int_a^\infty n b^{n-1} \mathbf{P}\left(\frac{\Sigma_t^c + c}{\sigma_t^c + c} \geq b\right) db \\
&\leq A\left(a^n e^{-\lambda a} + \int_a^\infty n b^{n-1} e^{-\lambda b} db\right) = A a^n e^{-\lambda a}\left(1 + n\int_0^\infty \frac{(a+b)^{n-1}}{a^n} e^{-\lambda b} db\right) \\
&\leq A a^n e^{-\lambda a}\left(1 + n\int_0^\infty (1+b)^n e^{-\lambda b} db\right) \leq A\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1} (n+1)!\, a^n e^{-\lambda a}
\end{aligned}$$

On the other hand, by using the probability density of $(L_t^0, |B_t|)$ (given for example in J. Najnudel [Naj07c], Lemma 2.4) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[h\left(\left(\frac{L_t^0}{a} - c\right)_+\right) \mathbf{1}_{|B_t| \leq c}\right] &= \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty dl \int_0^c dx\, h\left(\left(\frac{l}{a} - c\right)_+\right) (l+x) e^{-(l+x)^2/2t} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} h(0) \int_0^{ac} dl \int_0^c dx\, (l+x) e^{-(l+x)^2/2t} \\
&\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_{ac}^\infty dl \int_0^c dx\, h\left(\frac{l}{a} - c\right) (l+x) e^{-(l+x)^2/2t} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c^2}{t} h(0) \int_0^a dl \int_0^1 dx\, \frac{c(l+x)}{\sqrt{t}} e^{-c^2(l+x)^2/2t} \\
&\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ac^2}{t} \int_0^\infty dl \int_0^1 dx\, h(cl) \frac{c(al+a+x)}{\sqrt{t}} e^{-c^2(al+a+x)^2/2t}
\end{aligned}$$

For all $\theta \geq 0$, $\theta e^{-\theta^2/2} \leq e^{-1/2} \leq 1$. Hence :

$$\mathbf{E}\left[h\left(\left(\frac{L_t^0}{a} - c\right)_+\right) \mathbf{1}_{|B_t| \leq c}\right] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ac^2}{t} \left(h(0) + \int_0^\infty h(cl) dl\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ac}{t} N_c(h)$$

Moreover, for $0 < t \leq c^2$:

$$\mathbf{E}\left[h\left(\left(\frac{L_t^0}{a} - c\right)_+\right) \mathbf{1}_{|B_t| \leq c}\right] \leq h(0) \leq \frac{N_c(h)}{c} \leq \frac{a N_c(h)}{\sqrt{t}}$$

The majorizations given above imply :

$$\Delta_{c,t}^{(1)}(F) \leq A\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1} (n+1)!\, a^n e^{-\lambda a} \sqrt{2\pi t}\, h(0) + \sqrt{2\pi}\, a^{n+1} \left(\frac{c}{\sqrt{t}} \wedge 1\right) N_c(h)$$

Now, let us choose a as a function of t.

For $t \leq c^2$, we take $a = 1$ and obtain :

$$\begin{aligned}
\Delta_{c,t}^{(1)}(F) &\leq A\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1} (n+1)!\, e^{-\lambda} \sqrt{2\pi}\, c h(0) + \sqrt{2\pi}\, N_c(h) \\
&\leq \sqrt{2\pi}\left(1 + A\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1} (n+1)!\, e^{-\lambda}\right) N_c(h)
\end{aligned}$$

For $t \geq c^2$, we take $a = (t/c^2)^{1/6(n+1)}$:

$$\begin{aligned}
\Delta^{(1)}_{c,t}(F) &\leq A\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1}(n+1)!\left(\frac{t}{c^2}\right)^{1/6} e^{-\lambda\left(\frac{t}{c^2}\right)^{1/6(n+1)}}\sqrt{2\pi t}\,h(0) + \sqrt{2\pi}\left(\frac{t}{c^2}\right)^{1/6}\frac{c}{\sqrt{t}}N_c(h) \\
&\leq \sqrt{2\pi}\left(1 + A\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1}(n+1)!\right)N_c(h)\left(\frac{t}{c^2}\right)^{-1/3}\left(1 + \frac{t}{c^2}e^{-\lambda\left(\frac{t}{c^2}\right)^{1/6(n+1)}}\right) \\
&\leq \sqrt{2\pi}\left(1 + A\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1}(n+1)!\right)\left(1 + \sup_{u\geq 1} u e^{-\lambda u^{1/6(n+1)}}\right)\left(\frac{t}{c^2}\right)^{-1/3} N_c(h)
\end{aligned}$$

where $\sup_{u\geq 1} u e^{-\lambda u^{1/6(n+1)}}$ is finite and depends only on n (we recall the λ is a universal constant).

In the two cases, the first inequality of Proposition 4.3 is satisfied.

2) For $c = 0$, $\Delta^{(2)}_{c,t}(F) = 0$, so we can again suppose $c > 0$.
For $a \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta^{(2)}_{c,t}(F)}{\sqrt{2\pi t}} &= \mathbf{E}\left[F((L^y_t)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{\int_{-c}^{c} L^y_t dy \geq t/3}\right] \leq \mathbf{E}\left[\left(\frac{\Sigma^c_t + c}{\sigma^c_t + c}\right)^n h(\sigma^c_t)\mathbf{1}_{\Sigma^c_t \geq t/6c}\right] \\
&\leq h(0)\left(\mathbf{E}\left[\left(\frac{\Sigma^c_t + c}{\sigma^c_t + c}\right)^n \mathbf{1}_{\frac{\Sigma^c_t + c}{\sigma^c_t + c}\geq a}\right] + a^n \mathbf{P}\left(L^0_t \geq \frac{t}{6ac} - c\right)\right) \\
&\leq A\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1}(n+1)!\,a^n e^{-\lambda a}h(0) + 2a^n h(0) e^{-\frac{1}{2t}\left(\frac{t}{6ac} - c\right)_+^2}
\end{aligned}$$

If $t \leq 12c^2$, we take $a = 1$:

$$\Delta^{(2)}_{c,t}(F) \leq ch(0)\sqrt{24\pi}\left(2 + A\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1}(n+1)!\,e^{-\lambda}\right)$$

If $t \geq 12c^2$, we take $a = \left(\frac{t}{12c^2}\right)^{1/3}$:

$$\begin{aligned}
\Delta^{(2)}_{c,t}(F) \leq \sqrt{2\pi t}\,h(0)\Bigg[&A\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1}(n+1)!\left(\frac{t}{12c^2}\right)^{n/3} e^{-\lambda\left(\frac{t}{12c^2}\right)^{1/3}} \ldots \\
&\ldots + 2\left(\frac{t}{12c^2}\right)^{n/3} e^{-\frac{c^2}{2t}\left(2(t/12c^2)^{2/3} - 1\right)^2}\Bigg]
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{c^2}{t}\right) ch(0)\sqrt{2\pi}\,12^{3/2}\left(2 + A\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1}(n+1)!\right)\left(\frac{t}{12c^2}\right)^{\frac{n}{3}+\frac{3}{2}}\left(e^{-\lambda\left(\frac{t}{12c^2}\right)^{1/3}} + e^{-\frac{1}{24}\left(\frac{t}{12c^2}\right)^{1/3}}\right)$$

The second inequality of Proposition 4.3 holds, since $\sup_{u\geq 1} u^{\frac{n}{3}+\frac{3}{2}}\left(e^{-\lambda u^{1/3}} + e^{-\frac{1}{24}\lambda u^{1/3}}\right)$ is finite and depends only on n.

3) This inequality is an immediate consequence of 1) and 2).

4) For every $l \geq 0$:

$$\mathbf{E}[F((Y_{l,+}^y)_{y\in\mathbf{R}})] \leq \mathbf{E}\left[\left(\frac{\Theta_{l,+}^c + c}{\theta_{l,+}^c + c}\right)^n h(\theta_{l,+}^c)\right]$$
$$\leq h(0)\mathbf{E}\left[\left(\frac{\Theta_{l,+}^c + c}{\theta_{l,+}^c + c}\right)^n \mathbf{1}_{\frac{\Theta_{l,+}^c+c}{\theta_{l,+}^c+c}\geq 4}\right] + 4^n h\left(\left(\frac{l}{4} - c\right)_+\right)$$

Now, by Lemma 4.3 :

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{\Theta_{l,+}^c + c}{\theta_{l,+}^c + c}\right)^n \mathbf{1}_{\frac{\Theta_{l,+}^c+c}{\theta_{l,+}^c+c}\geq 4}\right] = 4^n \mathbf{P}\left(\frac{\Theta_{l,+}^c + c}{\theta_{l,+}^c + c} \geq 4\right) + \int_4^\infty nb^{n-1}\mathbf{P}\left(\frac{\Theta_{l,+}^c + c}{\theta_{l,+}^c + c} \geq b\right) db$$
$$\leq Ae^{-\lambda l/c}\left(4^n e^{-4\lambda} + \int_4^\infty nb^{n-1}e^{-\lambda b}db\right)$$
$$\leq Ae^{-\lambda l/c}\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1}(n+1)!\, 4^n e^{-4\lambda}$$

Hence :

$$\mathbf{E}[F((Y_{l,+}^y)_{y\in\mathbf{R}})] \leq Ah(0)e^{-\lambda l/c}\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1}(n+1)!\, 4^n e^{-4\lambda} + 4^n h\left(\left(\frac{l}{4} - c\right)_+\right)$$

and, by integrating with respect to l :

$$I_+(F) \leq \frac{A}{\lambda}\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1}(n+1)!4^n e^{-4\lambda}ch(0) + 4^{n+1}ch(0) + 4^{n+1}\int_0^\infty h(l)dl$$
$$\leq 4^{n+1}\left(1 + \frac{A}{\lambda}\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1}(n+1)!\right)N_c(h)$$

By symmetry, the same inequality holds for $I_-(F)$, and :

$$I(F) \leq 2^{2n+3}\left(1 + \frac{A}{\lambda}\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{n+1}(n+1)!\right)N_c(h)$$

which completes the proof of Proposition 4.3. □

4.4 An estimation of the quantity : $\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})]$

In this section, we majorize $\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})]$ by an equivalent of this quantity when t goes to infinity. The following statement holds :

Proposition 4.4.1 : *Let F be a functional from $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ to $\mathbf{R}_+$, which satisfies the condition $C(c, n, h)$, for a positive, decreasing function h, and c, $n \geq 0$.*
The following properties hold :

1) For all $t > 0$:

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})] \leq K_n N_c(h)$$

where $K_n > 0$ depends only on n.

2) If $N_c(h) < \infty$:

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})] \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} I(F)$$

Proof : We suppose $N_c(h) < \infty$.
Proposition 4.3 implies the following :

$$\Delta_{c,t}(F) \leq A_n N_c(h)$$

$$\Delta_{c,t}(F) \underset{t\to\infty}{\to} 0$$

Moreover, by Corollary 4.2 :

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}\left[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{|B_t|\geq c}\phi\left(\frac{1}{t}\int_{-c}^{c} L_t^y dy\right)\right] \underset{t\to\infty}{\to} I(F)$$

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}\left[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{|B_t|\geq c}\phi\left(\frac{1}{t}\int_{-c}^{c} L_t^y dy\right)\right] \leq \sqrt{3}\,I(F) \leq \sqrt{3}\,A_n N_c(h)$$

for all $t > 0$.

Now, by definition, one has :

$$\left|\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})] - \sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}\left[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})\mathbf{1}_{|B_t|\geq c}\phi\left(\frac{1}{t}\int_{-c}^{c} L_t^y dy\right)\right]\right| = \Delta_{c,t}(F)$$

Therefore :

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})] \underset{t\to\infty}{\to} I(F)$$

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})] \leq (1+\sqrt{3})A_n N_c(h)$$

which proves Proposition 4.4.1. □

The following result is an extension of Proposition 4.4.1 to a larger class of functionals F :

Proposition 4.4.2 : *Let $F : \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}_+) \to \mathbf{R}_+$ be a positive and measurable functional. The following properties hold for all $n \geq 0$:*

1) For all $t > 0$:

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})] \leq K_n N^{(n)}(F)$$

2) If $N^{(n)}(F) < \infty$:

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})] \underset{t\to\infty}{\to} I(F)$$

Proof : We suppose $N^{(n)}(F) < \infty$.

1) Let us take M such that $N^{(n)}(F) < M$.
By definition, F satisfies the condition $D(n, M)$, so there exists $(c_k)_{k\geq 1}$,$(h_k)_{k\geq 1}$, $(F_k)_{k\geq 0}$ as in Definition 4.2.

One has : $F = \sum_{k\geq 1}(F_k - F_{k-1})$, hence :

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})] &\leq \sum_{k\geq 1}\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[|F_k - F_{k-1}|((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})] \\ &\leq K_n \sum_{k\geq 1} N_{c_k}(h_k) \leq K_n M\end{aligned}$$

By taking $M \to N^{(n)}(F)$, one obtains the first part of Proposition 4.4.2.

2) In order to prove the convergence, let us consider the equality :

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})] = \sum_{k\geq 1}\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[(F_k - F_{k-1})_+((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})] - \sum_{k\geq 1}\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[(F_k - F_{k-1})_-((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})]$$

where the two sums are convergent.

By Proposition 4.4.1, the two terms indexed by k tend to $I((F_k - F_{k-1})_+)$ and $I((F_k - F_{k-1})_-)$ when t goes to infinity, and they are bounded by $K_n N_{c_k}(h_k)$.

Hence, by dominated convergence :

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})] \underset{t\to\infty}{\to} \sum_{k\geq 1} I((F_k - F_{k-1})_+) - \sum_{k\geq 1} I((F_k - F_{k-1})_-)$$

Now, by definition of I :

$$\sum_{k\geq 1} I((F_k - F_{k-1})_+) = I\left(\sum_{k\geq 1}(F_k - F_{k-1})_+\right)$$

$$\sum_{k\geq 1} I((F_k - F_{k-1})_-) = I\left(\sum_{k\geq 1}(F_k - F_{k-1})_-\right)$$

Therefore, if $G = \sum_{k\geq 1}(F_k - F_{k-1})_+$, and $H = \sum_{k\geq 1}(F_k - F_{k-1})_-$, one has :

$$\sum_{k\geq 1} I((F_k - F_{k-1})_+) - \sum_{k\geq 1} I((F_k - F_{k-1})_-) = I(G) - I(H)$$

where :

$$I(G) - I(H) = I(G - H) = I(F)$$

since $I(G) + I(H) \leq 2K_n \sum_{k\geq 1} N_{c_k}(h_k) < \infty$. □

Proposition 4.4.2 is proven, and we now have all we need for the proof of the main Theorem, which is given in Section 4.5.

4.5 Proof of Theorem 4

Our proof of the Theorem 4 starts with a general lemma (which does not involve Wiener measure) :

Lemma 4.5 : *If $F : \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+) \to \mathbf{R}_+$ is a measurable functional, $l_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$, $x \in \mathbf{R}$, and $n \geq 0$:*

$$N^{(n)}\left(F^{(l_0^y)_{y\in\mathbf{R}},x}\right) \leq 2^n \left(1 + \left(\sup_{z\in\mathbf{R}} l_0^z\right)^n\right)(1+|x|)^{n+1}\, N^{(n)}(F)$$

Proof of Lemma 4.5 : Let M be greater than $N^{(n)}(F)$.
There exists a sequence $(c_k)_{k\geq 1}$ in $[1, \infty[$, a sequence $(h_k)_{k\geq 1}$ of decreasing functions from $\mathbf{R}_+$

to $\mathbf{R}_+$, and a sequence $(F_k)_{k\geq 0}$ of measurable functions : $\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)\to\mathbf{R}_+$, such that :

1) $F_0=0$, and $F_k \underset{k\to\infty}{\to} F$.

2) $(|F_k-F_{k-1}|)((l^y)_{y\in\mathbf{R}})$ depends only on $(l^y)_{|y|\leq c_k}$, and :

$$(|F_k-F_{k-1}|)((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) \leq \left(\frac{\sup\limits_{|y|\leq c} l^y + c_k}{\inf\limits_{|y|\leq c} l^y + c_k}\right)^n h_k\left(\inf_{|y|\leq c} l^y\right)$$

3) $\sum\limits_{k\geq 1} N_{c_k}(h_k)\leq M$.

These conditions imply the following ones for the sequence $\left(G_k = F_k^{(l_0^y)_{y\in\mathbf{R}},x}\right)_{k\geq 1}$:

1) $G_0=0$, and $G_k \underset{k\to\infty}{\to} F^{(l_0^y)_{y\in\mathbf{R}},x}$.

2) $(|G_k-G_{k-1}|)((l^y)_{y\in\mathbf{R}})$ depends only on $(l^z)_{|z|\leq c_k+|x|}$ and :

$$\begin{aligned}
(|G_k-G_{k-1}|)((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) &\leq \left(\frac{\sup\limits_{z\in[-c_k-x,c_k-x]} (l_0^{z+x}+l^z)+c_k}{\inf\limits_{z\in[-c_k-x,c_k-x]} (l_0^{z+x}+l^z)+c_k}\right)^n h_k\left(\inf_{z\in[-c_k-x,c_k-x]}(l_0^{z+x}+l^z)\right)\\
&\leq \left(\frac{\sup\limits_{z\in\mathbf{R}} l_0^z + \sup\limits_{|z|\leq c_k+|x|} l^z+c_k+|x|}{\inf\limits_{|z|\leq c_k+|x|} l^z+c_k}\right)^n h_k\left(\inf_{|z|\leq c_k+|x|} l^z\right)
\end{aligned}$$

$$\leq 2^n\left[\left(\frac{\sup\limits_{z\in\mathbf{R}} l_0^z}{c_k}\right)^n + \left(\frac{\sup\limits_{|z|\leq c_k+|x|} l^z+c_k+|x|}{\inf\limits_{|z|\leq c_k+|x|} l^z+c_k+|x|}\right)^n\left(1+\frac{|x|}{\inf\limits_{|z|\leq c_k+|x|} l^z+c_k}\right)^n\right] h_k\left(\inf_{|z|\leq c_k+|x|} l^z\right)$$

$$\leq 2^n\left(\left(\sup_{z\in\mathbf{R}} l_0^z\right)^n + (1+|x|)^n\right)\left(\frac{\sup\limits_{|z|\leq c_k+|x|} l^z+c_k+|x|}{\inf\limits_{|z|\leq c_k+|x|} l^z+c_k+|x|}\right)^n h_k\left(\inf_{|z|\leq c_k+|x|} l^z\right)$$

Therefore, $|G_k-G_{k-1}|$ satisfies the condition $C\left(c_k+|x|, n, 2^n\left(\left(\sup\limits_{z\in\mathbf{R}} l_0^z\right)^n+(1+|x|)^n\right)h_k\right)$.

3) Now :

$$\begin{aligned}
N_{c_k+|x|}\left(2^n\left(\left(\sup_{z\in\mathbf{R}} l_0^z\right)^n+(1+|x|)^n\right)h_k\right) &\leq 2^n\left(\left(\sup_{z\in\mathbf{R}} l_0^z\right)^n+(1+|x|)^n\right)\frac{c_k+|x|}{c_k}N_{c_k}(h_k)\\
&\leq 2^n\left(1+\left(\sup_{z\in\mathbf{R}} l_0^z\right)^n\right)(1+|x|)^{n+1}N_{c_k}(h_k)
\end{aligned}$$

and $\sum\limits_{k\geq 1} N_{c_k}(h_k)\leq M$.

Therefore :

$$N^{(n)}\left(F^{(l_0^y)_{y\in\mathbf{R}},x}\right)\leq 2^n\left(1+\left(\sup_{z\in\mathbf{R}} l_0^z\right)^n\right)(1+|x|)^{n+1}M$$

By taking $M\to N^{(n)}(F)$, we obtain the majorization stated in Lemma 4.5. $\square$

Proof of Theorem 4 : $\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{W}\left[F\left((l_t^y(X))_{y\in\mathbf{R}}\right)\right]$ tends to $I(F) > 0$ when t goes to infinity, so it is strictly positive if t is large enough, and $\mathbf{W}_t^F$ is well-defined.

If t is large enough, by Markov property :

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_t^F(\Lambda_s) &= \mathbf{W}\left[\mathbf{1}_{\Lambda_s}\frac{\mathbf{W}\left[F\left((l_t^y(X))_{y\in\mathbf{R}}\right)|\sigma\{X_u, u\leq s\}\right]}{\mathbf{W}\left[F\left((l_t^y(X))_{y\in\mathbf{R}}\right)\right]}\right] \\ &= \mathbf{W}\left[\mathbf{1}_{\Lambda_s}\frac{\Psi_{t-s}\left((l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}}, X_s\right)}{\mathbf{W}\left[F\left((l_t^y(X))_{y\in\mathbf{R}}\right)\right]}\right]\end{aligned}$$

where, for all continuous functions l from $\mathbf{R}$ to $\mathbf{R}_+$, and for all $x\in\mathbf{R}$, $u > 0$:

$$\Psi_u\left((l^y)_{y\in\mathbf{R}}, x\right) = \mathbf{W}\left[F^{(l^y)_{y\in\mathbf{R}},x}\left((l_u^y(X))_{y\in\mathbf{R}}\right)\right]$$

By Proposition 4.4.2 :

$$\frac{\Psi_{t-s}\left((l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}}, X_s\right)}{\mathbf{W}\left[F\left((l_t^y(X))_{y\in\mathbf{R}}\right)\right]} \underset{t\to\infty}{\to} \frac{I\left(F^{(l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}},X_s}\right)}{I(F)}$$

Moreover, for $t \geq 2s$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi t}\,\Psi_{t-s}\left((l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}}, X_s\right) &\leq \sqrt{\frac{t}{t-s}}N^{(n)}\left(F^{(l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}},X_s}\right) \\ &\leq 2^{n+1/2}\left(1+\left(\sup_{z\in\mathbf{R}} l_s^z(X)\right)^n\right)(1+|X_s|)^{n+1}N^{(n)}(F)\end{aligned}$$

and for t large enough :

$$\sqrt{2\pi t}\,\mathbf{W}\left[F\left((l_t^y(X))_{y\in\mathbf{R}}\right)\right] \geq I(F)/2$$

Hence, for t large enough :

$$\frac{\Psi_{t-s}\left((l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}}, X_s\right)}{\mathbf{W}\left[F\left((l_t^y(X))_{y\in\mathbf{R}}\right)\right]} \leq \frac{2^{n+3/2}\left(1+\left(\sup_{z\in\mathbf{R}} l_s^z(X)\right)^n\right)(1+|X_s|)^{n+1}N^{(n)}(F)}{I(F)}$$

Now :

$$\mathbf{W}\left[\left(1+\left(\sup_{z\in\mathbf{R}} l_s^z(X)\right)^n\right)(1+|X_s|)^{n+1}\right]$$

$$\leq \left(\mathbf{W}\left[\left(1+\left(\sup_{z\in\mathbf{R}} l_s^z(X)\right)^n\right)^2\right]\right)^{1/2}\left(\mathbf{W}\left[(1+|X_s|)^{2n+2}\right]\right)^{1/2} < \infty$$

since $\sup_{z\in\mathbf{R}} l_s^z(X)$ and $|X_s|$ have moments of any order.

By dominated convergence, we obtain Theorem 4. □

4.6 Examples

In this section, we check that the conditions of the Theorem 4 are satisfied in three examples studied by B. Roynette, P. Vallois and M. Yor, and one more particular case.

I) **First example** (penalization with local time at level zero)

We take $F((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = \phi(l^0)$ where ϕ is bounded and dominated by a positive, decreasing and integrable function ψ.

F satisfies the condition $C(1, 0, \psi)$. Hence :

$$N^{(0)}(F) \leq N_1(\psi) = \psi(0) + \int_0^\infty \psi(y)dy < \infty$$

On the other hand :

$$I(F) = 2\int_0^\infty \phi(l)dl$$

$$F^{(l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}},X_s}((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = l_s^0(X) + l^{-X_s}$$

and :

$$I\left(F^{(l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}},X_s}\right) = \int_0^\infty dl \left(\mathbf{E}\left[\phi(l_s^0(X) + Y_{l,+}^{-X_s})\right] + \mathbf{E}\left[\phi(l_s^0(X) + Y_{l,-}^{-X_s})\right]\right)$$

Now, by using the fact that Lebesgue measure is invariant for BESQ(2) process, we obtain :

$$\int_0^\infty dl\, \mathbf{E}\left[\phi(l_s^0(X) + Y_{l,-\,\mathrm{sgn}(X_s)}^{-X_s})\right] = \int_0^\infty dl\, \phi(l_s^0(X) + l) = \int_{l_s^0(X)}^\infty \phi(l)dl$$

Moreover, the image of Lebesgue measure by a BESQ(0) process taken at time $x \geq 0$ is the sum of Lebesgue measure and $2x$ times Dirac measure at 0; more precisely, for all measurable functions $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, one has :

$$\int_0^\infty dl\, \mathbf{E}[f(Y_{l,-}^x)] = 2xf(0) + \int_0^\infty dy f(y)$$

Therefore :

$$\int_0^\infty dl\, \mathbf{E}\left[\phi(l_s^0(X) + Y_{l,\mathrm{sgn}(X_s)}^{-X_s})\right] = 2|X_s|\phi(l_s^0(X)) + \int_{l_s^0(X)}^\infty \phi(l)dl$$

and finally :

$$I\left(F^{(l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}},X_s}\right) = 2\left(|X_s|\phi(l_s^0(X)) + \int_{l_s^0(X)}^\infty \phi(l)dl\right)$$

Consequently, if ϕ is not a.e. equal to zero, we can apply the Theorem 4, and for $s \geq 0$, $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s = \sigma\{X_u, u \leq s\}$:

$$\mathbf{W}_\infty^F(\Lambda_s) = \mathbf{W}\left(\mathbf{1}_{\Lambda_s}.\frac{|X_s|\phi(l_s^0(X)) + \Phi(l_s^0(X))}{\Phi(0)}\right)$$

where $\Phi(x) = \int_x^\infty \phi(l)dl$.

This result is coherent with the limit measure obtained by B. Roynette, P. Vallois and M. Yor in [RVY06a].

II) **Second example** (penalization with the supremum)

We take $F((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = \phi(\inf\{y \geq 0, l^y = 0\})$, where ϕ is dominated by a decreasing function $\psi : \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\} \to \mathbf{R}_+$ such that $\int_0^\infty \psi(y)dy < \infty$.

Let us recall that for this choice of F, $F\left((l_t^y(X))_{y\in\mathbf{R}}\right) = \phi(S_t)$, where S_t denotes the supremum of $(X_s)_{s\leq t}$.

Now, we take for $k \in \mathbf{N}$:

$$F_k((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = \phi_{2^k-1}(\inf\{y \geq 0, l^y = 0\})$$

where $\phi_{2^k-1} = \phi.\mathbf{1}_{]-\infty,2^k-1[}$.

1) One has $F_0 = 0$ and $F_k \underset{k\to\infty}{\to} F$ pointwise.

2) $(|F_k - F_{k-1}|)((l^y)_{y\in\mathbf{R}})$ depends only on $(l^y)_{|y|\leq 2^k-1}$ and :

$$\begin{aligned}(|F_k - F_{k-1}|)((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) &\leq \phi(\inf\{y \geq 0, l^y = 0\})\mathbf{1}_{\inf\{y\geq 0, l^y=0\}\in[2^{k-1}-1,2^k-1[} \\ &\leq \psi(2^{k-1}-1)\mathbf{1}_{\inf\limits_{|y|\leq 2^k-1} l^y=0}\end{aligned}$$

Hence, $|F_k - F_{k-1}|$ satisfies the condition $C(2^k-1, 0, \psi(2^{k-1}-1)\mathbf{1}_{\{0\}})$.

3) Therefore :

$$N^{(0)}(F) \leq \sum_{k\geq 1}(2^k-1)\psi(2^{k-1}-1) \leq \psi(0) + 4\int_0^\infty \psi < \infty$$

Moreover :

$$I(F) = \int_0^\infty dl\, \mathbf{E}\left[\phi\left(\inf\{y \geq 0, Y_{l,+}^y = 0\}\right)\right] + \int_0^\infty dl\, \mathbf{E}\left[\phi\left(\inf\{y \geq 0, Y_{l,-}^y = 0\}\right)\right]$$

The first integral is equal to zero and $\inf\{y \geq 0, Y_{l,-}^y = 0\}$ is the inverse of an exponential variable of parameter $l/2$.
Therefore :

$$I(F) = \int_0^\infty dl \int_0^\infty dy\, \frac{l}{2y^2}e^{-l/2y}\phi(y)dy = \int_0^\infty dy\, \phi(y)\int_0^\infty dl\, \frac{l}{2y^2}e^{-l/2y} = 2\int_0^\infty \phi(y)dy$$

By similar computations, we obtain :

$$\begin{aligned}I\left(F^{(l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}},X_s}\right) &= \int_0^\infty dl\, \mathbf{E}[\phi(S_s \vee (X_s + \inf\{y \geq 0, Y_{l,-}^y = 0\}))] \\ &= 2\left((S_s - X_s)\phi(S_s) + \int_{S_s}^\infty \phi(y)dy\right)\end{aligned}$$

Consequently, if ϕ is not a.e. equal to zero, the sequence $(\mathbf{W}_t^F)_{t\geq 0}$ satisfies for every $s \geq 0$, $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s = \sigma\{X_u, u \leq s\}$:

$$\mathbf{W}_t^F(\Lambda_s) \underset{t\to\infty}{\to} \mathbf{W}_\infty^F(\Lambda_s)$$

where

$$\mathbf{W}_t^F = \frac{\phi(S_t)}{\mathbf{W}[\phi(S_t)]}.\mathbf{W}$$

and :

$$\mathbf{W}_\infty^F(\Lambda_s) = \mathbf{W}\left[\mathbf{1}_{\Lambda_s}\frac{(S_s - X_s)\phi(S_s) + \Phi(S_s)}{\Phi(0)}\right]$$

This corresponds to B. Roynette, P. Vallois and M. Yor's penalization results for the supremum (see [RVY06a]).

III) **Third example** (exponential penalization with an integral of the local times)

Let us take : $F((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} V(y)l^y dy\right)$, where V is a positive measurable function, not a.e. equal to zero, and integrable with respect to $(1+y^2)dy$ (this condition is a little more restrictive than the condition obtained by B. Roynette, P. Vallois and M. Yor in [RVY03]).

In that case, there exists $c \geq 1$ such that :

$$\int_{-c}^{c} V(y)dy > 0$$

We consider the following approximations of F :
$F_0 = 0$, and for $k \geq 1$, $F_k((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = \exp\left(-\int_{-2^k c}^{2^k c} V(y)l^y dy\right)$.
The following holds :

1) $F_0 = 0$ and $F_k \underset{k\to\infty}{\to} F$.

2) $|F_k - F_{k-1}|((l^y)_{y\in\mathbf{R}})$ depends only on $(l^y)_{y\in[-2^k c, 2^k c]}$ and if $k \geq 2$:

$$|F_k - F_{k-1}|((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) \leq \left(\int_{[-2^k c,2^k c]\setminus[-2^{k-1}c,2^{k-1}c]} V(y)dy\right) ...$$

$$... \left(\sup_{y\in[-2^k c,2^k c]} l^y\right) \exp\left(-\int_{-2^{k-1}c}^{2^{k-1}c} V(y)l^y dy\right)$$

$$\leq \left(\int_{[-2^k c,2^k c]\setminus[-2^{k-1}c,2^{k-1}c]} V(y)dy\right)\left(\frac{\sup_{y\in[-2^k c,2^k c]} l^y + 2^k c}{\inf_{y\in[-2^k c,2^k c]} l^y + 2^k c}\right)\left(\inf_{y\in[-2^k c,2^k c]} l^y + 2^k c\right) ...$$

$$... \exp\left[-\left(\int_{-2^{k-1}c}^{2^{k-1}c} V(y)dy\right)\left(\inf_{y\in[-2^k c,2^k c]} l^y\right)\right]$$

Moreover :

$$|F_1 - F_0|((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) \leq \exp\left[-\left(\int_{2c}^{2c} V(y)dy\right)\left(\inf_{y\in[-2c,2c]} l^y\right)\right]$$

Therefore, if we put $\rho = \int_{-c}^{c} V(y)dy > 0$, for every $k \geq 1$, $|F_k - F_{k-1}|$ satisfies the condition $C(2^k c, 1, h_k)$ where the decreasing function h_k is defined by :

$$h_k(l) = \left(\mathbf{1}_{k=1} + \int_{[-2^k c,2^k c]\setminus[-2^{k-1}c,2^{k-1}c]} V(y)dy\right)(l + 2^k c + \rho^{-1})e^{-\rho l}$$

3) One has :

$$N_{2^k c}(h_k) \leq \left(\mathbf{1}_{k=1} + \int\limits_{[-2^k c, 2^k c] \setminus [-2^{k-1} c, 2^{k-1} c]} V(y) dy \right) (2^{2k} c^2 + 2^{k+1} c \rho^{-1} + 2\rho^{-2})$$

Hence :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} N^{(1)}_{2^k c}(h_k) &\leq (1 + \rho^{-1} + \rho^{-2}) \left(4c^2 + \sum_{k \geq 1} 2^{2k} c^2 \int\limits_{[-2^k c, 2^k c] \setminus [-2^{k-1} c, 2^{k-1} c]} V(y) dy \right) \\ &\leq 4(1 + \rho^{-1} + \rho^{-2}) \left(c^2 + \int_{\mathbf{R}} (1 + y^2) V(y) \right) < \infty \end{aligned}$$

Moreover, by properties of BESQ processes, for all $l \geq 0$, $y \in \mathbf{R}$:

$$\mathbf{E}\left[Y^y_{l,+} \right] \leq l + 2|y|$$

and

$$\mathbf{E}\left[\int_{\mathbf{R}} Y^y_{l,+} V(y) dy \right] \leq \int_{\mathbf{R}} (l + 2|y|) V(y) dy < \infty$$

Therefore :

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(- \int_{\mathbf{R}} Y^y_{l,+} V(y) dy \right) \right] > 0$$

and $I(F) > 0$.

Consequently, Theorem 4 applies in this case and B. Roynette, P. Vallois and M. Yor's penalization result holds (see [RVY03]).

IV) **Fourth example** (penalization with local times at two levels)

This example is a generalization of the first one.
Let us take, for $y_1 < y_2$, $F((l^y)_{y \in \mathbf{R}}) = \phi(l^{y_1}, l^{y_2})$ where $\phi(l_1, l_2) \leq h(l_1 \wedge l_2)$ for a positive, integrable and decreasing function h.

In that case, F satisfies the condition $C(|y_1| \vee |y_2|, 0, h)$, so Theorem 4 applies if we have $I(F) > 0$.

For $y > 0$, z, $z' \geq 0$, let $q^{(0)}_y(z, z')$ be the density at z' of a BESQ(0) process starting from level z and taken at time y, $Q^{(0)}_y(z, 0)$ the probability that this process is equal to zero, and $q^{(2)}_y(z, z')$ the density at z' of a BESQ(2) process starting from z and taken at time y. If $0 < y_1 < y_2$, one has :

$$\begin{aligned} I(F) = &\int_0^\infty dl \int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2 \, q^{(2)}_{y_1}(l, l_1) \, q^{(2)}_{y_2 - y_1}(l_1, l_2) \, \phi(l_1, l_2) \\ &+ \int_0^\infty dl \int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2 \, q^{(0)}_{y_1}(l, l_1) \, q^{(0)}_{y_2 - y_1}(l_1, l_2) \, \phi(l_1, l_2) \\ &+ \int_0^\infty dl \int_0^\infty dl_1 \, q^{(0)}_{y_1}(l, l_1) \, Q^{(0)}_{y_2 - y_1}(l_1, 0) \, \phi(l_1, 0) + \int_0^\infty dl \, Q^{(0)}_{y_1}(l, 0) \phi(0, 0) \end{aligned}$$

Now, by properties of time-reversed BESQ processes : $q_y^{(0)}(z,z') = q_y^{(4)}(z',z)$ (where $q^{(4)}$ is the density of the BESQ(4) process) and $q_y^{(2)}(z,z') = q_y^{(2)}(z',z)$. Hence :

$$\int_0^\infty q_y^{(0)}(z,z')\,dz = \int_0^\infty q_y^{(4)}(z',z)\,dz = 1$$

and

$$\int_0^\infty q_y^{(2)}(z,z')\,dz = \int_0^\infty q_y^{(2)}(z',z)\,dz = 1$$

since $q^{(2)}$ and $q^{(4)}$ are probability densities with respect to the second variable.

Moreover :

$$\int_0^\infty Q_y^{(0)}(z,0)dz = \int_0^\infty e^{-z/2y}dz = 2y$$

Therefore :

$$\begin{aligned} I(F) = &\int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2\,(q_{y_2-y_1}^{(2)}(l_1,l_2) + q_{y_2-y_1}^{(0)}(l_1,l_2))\phi(l_1,l_2) \\ &+ \int_0^\infty dl_1\, Q_{y_2-y_1}^{(0)}(l_1,0)\phi(l_1,0) + 2y_1\phi(0,0) \end{aligned}$$

for $0 \le y_1 < y_2$.

Similar computations give for $y_1 < y_2 \le 0$:

$$\begin{aligned} I(F) = &\int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2\,(q_{y_2-y_1}^{(2)}(l_2,l_1) + q_{y_2-y_1}^{(0)}(l_2,l_1))\phi(l_1,l_2) \\ &+ \int_0^\infty dl_2\, Q_{y_2-y_1}^{(0)}(l_2,0)\phi(0,l_2) + 2|y_2|\phi(0,0) \end{aligned}$$

For $y_1 < 0 < y_2$, we have :

$$\begin{aligned} I(F) = &\int_0^\infty dl \int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2\, q_{y_2}^{(2)}(l,l_2)\, q_{|y_1|}^{(0)}(l,l_1)\,\phi(l_1,l_2) \\ &+ \int_0^\infty dl \int_0^\infty dl_2\, q_{y_2}^{(2)}(l,l_2)\, Q_{|y_1|}^{(0)}(l,0)\,\phi(0,l_2) \\ &+ \int_0^\infty dl \int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2\, q_{y_2}^{(0)}(l,l_2)\, q_{|y_1|}^{(2)}(l,l_1)\,\phi(l_1,l_2) \\ &+ \int_0^\infty dl \int_0^\infty dl_1\, Q_{y_2}^{(0)}(l,0)\, q_{|y_1|}^{(2)}(l,l_1)\,\phi(l_1,0) \end{aligned}$$

Now, for y', $y'' > 0$, and z, z', $z'' \le 0$, the two following equalities hold :

$$\int_0^\infty q_{y'}^{(2)}(z,z')q_{y''}^{(0)}(z,z'')\,dz = \frac{y' q_{y'+y''}^{(2)}(z',z'') + y'' q_{y'+y''}^{(0)}(z',z'')}{y'+y''}$$

$$\int_0^\infty q_{y'}^{(2)}(z,z')Q_{y''}^{(0)}(z,0)\,dz = \frac{y''}{y'+y''}Q_{y'+y''}^{(0)}(z',0)$$

(the first one can be proven by using J. Warren [War05], Lemma 3, and the relation :
$q_y^{(0)}(z,z') = q_y^{(4)}(z',z)$; the second is a consequence of the equality :
$Q_{y''}^{(0)}(z,0) = e^{-z/2y''} = 2y'' q_{y''}^{(2)}(0,z)$).

Therefore :

$$I(F) = \int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2 \left[q^{(2)}_{y_2-y_1}(l_1,l_2) + \frac{|y_1| q^{(0)}_{y_2-y_1}(l_2,l_1) + y_2 q^{(0)}_{y_2-y_1}(l_1,l_2)}{y_2-y_1} \right] \phi(l_1,l_2)$$
$$+ \int_0^\infty dl_1 \frac{y_2}{y_2-y_1} Q^{(0)}_{y_2-y_1}(l_1,0)\,\phi(l_1,0)$$
$$+ \int_0^\infty dl_2 \frac{|y_1|}{y_2-y_1} Q^{(0)}_{y_2-y_1}(l_2,0)\,\phi(0,l_2)$$

This computation of $I(F)$ implies the following :

1) For $0 < y_1 < y_2$, the Theorem 4 applies iff :

$$\int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2\, \phi(l_1,l_2) + \int_0^\infty dl_1\, \phi(l_1,0) + \phi(0,0) > 0$$

2) For $0 = y_1 < y_2$, it applies iff :

$$\int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2\, \phi(l_1,l_2) + \int_0^\infty dl_1\, \phi(l_1,0) > 0$$

3) For $y_1 < 0 < y_2$, it applies iff :

$$\int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2\, \phi(l_1,l_2) + \int_0^\infty dl_1\, \phi(l_1,0) + \int_0^\infty dl_2\, \phi(0,l_2) > 0$$

4) For $y_1 < y_2 = 0$, it applies iff :

$$\int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2\, \phi(l_1,l_2) + \int_0^\infty dl_2\, \phi(0,l_2) > 0$$

5) For $y_1 < y_2 < 0$, it applies iff :

$$\int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2\, \phi(l_1,l_2) + \int_0^\infty dl_2\, \phi(0,l_2) + \phi(0,0) > 0$$

If Theorem 4 holds, it is possible to compute $I(F^{(l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}},X_s})$ in order to obtain the density, restricted to $\mathcal{F}_s$, of $\mathbf{W}^F_\infty$ with respect to $\mathbf{W}$.

For $X_s \le y_1 < y_2$, we have :

$$I(F^{(l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}},X_s}) = \int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2\, (q^{(2)}_{y_2-y_1}(l_1,l_2) + q^{(0)}_{y_2-y_1}(l_1,l_2))\phi(l_s^{y_1}(X)+l_1, l_s^{y_2}(X)+l_2)$$
$$+ \int_0^\infty dl_1\, Q^{(0)}_{y_2-y_1}(l_1,0)\phi(l_s^{y_1}(X)+l_1, l_s^{y_2}(X)) + 2(y_1-X_s)\phi(l_s^{y_1}(X), l_s^{y_2}(X))$$

For $y_1 < X_s < y_2$:

$$I(F^{(l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}},X_s}) = \int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2 \left[q^{(2)}_{y_2-y_1}(l_1,l_2) ... \right.$$

$$\left. ... + \frac{(X_s-y_1) q^{(0)}_{y_2-y_1}(l_2,l_1) + (y_2-X_s) q^{(0)}_{y_2-y_1}(l_1,l_2)}{y_2-y_1} \right] \phi(l_s^{y_1}(X)+l_1, l_s^{y_2}(X)+l_2)$$

$$+\int_0^\infty dl_1 \, \frac{y_2 - X_s}{y_2 - y_1} \, Q^{(0)}_{y_2-y_1}(l_1, 0) \, \phi(l_s^{y_1}(X) + l_1, l_s^{y_2}(X))$$
$$+\int_0^\infty dl_2 \, \frac{X_s - y_1}{y_2 - y_1} \, Q^{(0)}_{y_2-y_1}(l_2, 0) \, \phi(l_s^{y_1}(X), l_s^{y_2}(X) + l_2)$$

For $y_1 < y_2 \leq X_s$:

$$I(F^{(l_s^y(X))_{y\in\mathbf{R}}, X_s}) = \int_0^\infty dl_1 \int_0^\infty dl_2 \, (q^{(2)}_{y_2-y_1}(l_2, l_1) + q^{(0)}_{y_2-y_1}(l_2, l_1))\phi(l_s^{y_1}(X) + l_1, l_s^{y_2}(X) + l_2)$$
$$+ \int_0^\infty dl_2 \, Q^{(0)}_{y_2-y_1}(l_2, 0)\phi(l_s^{y_1}(X), l_s^{y_2}(X) + l_2) + 2(X_s - y_2)\phi(l_s^{y_1}(X), l_s^{y_2}(X))$$

These formulae give an explicit expression for the limit measure obtained in our last example.

Remark 4.5.1 : It is not difficult to extend this example to a functional of a finite number of local times. We have only considered the case of two local times in order to avoid too complicated notation.

Remark 4.5.2 : Theorem 4 cannot be extended to every functional F. For example, if we consider the functional :

$$F((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = \exp\left(-\int_{-\infty}^\infty (l^y)^2 \, dy\right)$$

which corresponds to Edwards' model in dimension 1 (see R. van der Hofstad, F. den Hollander and W. König [vdHdHK97]), the expectation $\mathbf{E}[F((L_t^y)_{y\in\mathbf{R}})]$ tends exponentially to zero, and $I(F) = 0$, since for all $l > 0$:

$$\int_{-\infty}^\infty (\mathrm{Y}^y_{l,+})^2 \, dy = \infty$$

almost surely.

Therefore, it is impossible to study this case in the same manner as the examples given above. Another case for which the Theorem 4 cannot apply is the functional :

$$F((l^y)_{y\in\mathbf{R}}) = \phi(\sup(l^y)_{y\in\mathbf{R}})$$

where ϕ is a bounded function with compact support.

It would be interesting to find another way to study this kind of penalizations.

Chapitre 5

Généralisation des processus de Westwater et modèle d'Edwards modifié en dimensions 1 et 2

5.1 Introduction

Pour étudier certaines chaînes de polymères, Edwards (voir [Edw65]) a considéré le modèle suivant : la trajectoire de ces chaînes est représentée par un élément aléatoire de $\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}^d)$ (avec $1 \leq d \leq 3$), dont la loi $\nu^{(d)}(g)$ est formellement définie par :

$$\frac{d\nu^{(d)}(g)}{d\mu^{(d)}}(\omega) = \frac{\exp(-gI)}{\mathbf{E}_{\mu^{(d)}}[\exp(-gI)]}$$

où $\omega \in \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}^d)$, g est un paramètre strictement positif, $\mu^{(d)}$ est la mesure de Wiener sur $\mathbf{R}^d$, et où

$$I = \int_0^1 \int_0^t \delta(\omega(t) - \omega(s))ds\, dt$$

δ désignant la mesure de Dirac en zéro.

En dimension 1, il n'est pas difficile de donner un sens à la variable aléatoire I : on pose

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (L_1^x)^2 dx$$

où $x \to L_1^x$ est la version continue du temps local de ω sur l'intervalle de temps $[0,1]$.

En dimension 2, il a été prouvé (voir Y. Hu et M. Yor [HY99], S. Varadhan [Var69], J. Rosen [Ros83], [Ros86b]) que pour $\mu^{(2)}$-presque tout ω, on peut définir sur $\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ un temps local d'intersection $x \to \Gamma^x$ tel que pour toute fonction mesurable bornée f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, nulle au voisinage de zéro :

$$\int_0^1 \int_0^t f(\omega(t) - \omega(s))ds\, dt = \int_{R^2} f(x)\Gamma^x dx$$

De plus, il existe une version de Γ et une constante $K > 0$ telles que $\gamma : x \to \Gamma^x - K\log\left(\frac{1}{||x||}\right)$ se prolonge par continuité à $\mathbf{R}^2$ tout entier ; en particulier, la variable aléatoire $\gamma(0)$ est bien définie.

On peut alors construire la mesure associée au modèle d'Edwards bidimensionnel en posant :

$$\frac{d\nu^{(2)}(g)}{d\mu^{(2)}} = \frac{\exp(-g\gamma(0))}{\mathbf{E}_{\mu^{(2)}}[\exp(-g\gamma(0))]}$$

compte tenu du fait que $\gamma(0)$ admet des moments exponentiels négatifs de tout ordre (voir J.-F. Le Gall [LG85], [LG92], R.-F. Bass et X. Chen [BC04]).

En dimension 3, la renormalisation de Varadhan n'a pas lieu, mais J. Westwater (voir [Wes80] et [Wes82]) a démontré qu'il est possible de construire des mesures $(\nu^{(3)}(g))_{g>0}$ correspondant au modèle d'Edwards, et E. Bolthausen (voir [Bol93]) a obtenu une méthode de construction nettement plus simple que celle de J. Westwater.
S. Albeverio et X.-Y. Zhou (voir [AZ98]) ont ensuite prouvé que les deux méthodes conduisaient aux mêmes mesures de probabilité $(\nu^{(3)}(g))_{g>0}$.
De plus, ces mesures sont deux à deux singulières, et elles sont singulières par rapport à la mesure de Wiener, ce qui montre un changement de comportement du modèle par rapport aux dimensions 1 et 2.

Dans ce papier, nous allons modifier le modèle d'Edwards afin d'obtenir, en dimensions 1 et 2, un comportement analogue à celui des processus de Westwater en dimension 3.
Ce nouveau modèle est associé (en dimension $d \in \{1, 2\}$) à des mesures $\bar{\nu}^{(d)}(g)$ formellement définies par :

$$\frac{d\bar{\nu}^{(d)}(g)}{d\mu^{(d)}} = \frac{\exp(-gJ)}{\mathbf{E}_{\mu^{(d)}}[\exp(-gJ)]}$$

où :

$$J = \int_0^1 \int_0^t \frac{\delta(\omega(t) - \omega(s))}{(t-s)^{(3-d)/2}} ds\, dt$$

Le but de notre article est de donner une construction rigoureuse du modèle.

Cette construction nécessite de prouver le résultat préliminaire suivant :

Proposition 5.1.1 : *Soit $(\beta_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien en dimension d ($d \in \{1, 2, 3\}$), et soit $(\delta_n)_{n\geq 0}$ une suite de densités de probabilité continues, bornées et telles que la suite de mesures associée tend vers la mesure de Dirac en zéro sur $\mathbf{R}^d$.*
Pour tout ensemble A égal, à un ensemble de mesure nulle près, à une réunion finie disjointe d'ensembles de la forme $]a, b[\times]x, y[$ avec $0 \leq a \leq b \leq x \leq y \leq 1$, la suite de variables aléatoires positives $(J^{(d)}_{\delta_n}(A))_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$J^{(d)}_{\delta_n}(A) = \int_A \frac{\delta_n(\beta_t - \beta_s)}{(t-s)^{(3-d)/2}} ds\, dt$$

converge dans L^2 vers une variable aléatoire positive $J^{(d)}(A)$ ne dépendant pas de la suite $(\delta_n)_{n\geq 0}$.

Dans la suite de cet article, nous poserons :

$$\int_A \frac{\delta(\beta_t - \beta_s)}{(t-s)^{(3-d)/2}} ds\, dt = J^{(d)}(A)$$

pour A vérifiant les conditions de la Proposition 5.1.1.

Cette proposition permet donc de définir les temps locaux d'intersection associés au modèle d'Edwards modifié, à condition de restreindre le domaine d'intégration à un ensemble A vérifiant les conditions précédentes.

Le passage de ces ensembles particuliers à l'ensemble de tous les couples (s, t) tels que $0 \leq s < t \leq 1$ permet de donner une définition rigoureuse du modèle d'Edwards modifié.

Il s'effectue grâce au théorème suivant, qui constitue le résultat principal de l'article :

Théorème 5.1.2 : *Soient g un réel strictement positif et $d \in \{1, 2\}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $R(n)$ des couples (s, t), $0 \leq s \leq t \leq 1$, tels que les $n + 1$ premiers chiffres binaires de (s, t) ne coïncident pas tous, satisfait les hypothèses de la Proposition 5.1.1 ; on peut donc définir une mesure de probabilité $\bar{\nu}_n^{(d)}(g)$ sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}^d)$ à l'aide de sa densité par rapport à la mesure de Wiener $\mu^{(d)}$ sur $\mathbf{R}^d$:*

$$\bar{\nu}_n^{(d)}(g)(d\omega) = \frac{1}{Z_d(g)} \exp\left(-g \int_{R(n)} \frac{\delta(\omega(t) - \omega(s))}{(t-s)^{(3-d)/2}}\right) .\mu^{(d)}(d\omega)$$

où $Z_d(g)$ est la constante de normalisation.
Les résultats donnés par J. Westwater impliquent alors que si g est inférieur ou égal à une certaine constante $g_0 > 0$, il existe une probabilité $\bar{\nu}^{(d)}(g)$, telle que pour tout $m \in \mathbf{N}$, et pour tout sous-ensemble Λ_m de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}^d)$, mesurable par rapport à la tribu engendrée par les projections $(\omega \to \omega(k/2^m))_{k \in \{1,2,\ldots,2^m\}}$, on a :

$$\bar{\nu}_n^{(d)}(g)(\Lambda_m) \underset{n\to\infty}{\to} \bar{\nu}^{(d)}(g)(\Lambda_m)$$

Les mesures $(\bar{\nu}^{(d)}(g))_{0<g\leq g_0}$ sont deux à deux singulières, et elles sont singulières par rapport à la mesure de Wiener.

Dans la Section 5.2, nous allons démontrer la Proposition 5.1.1.
Comme le lecteur s'en apercevra, les variables obtenues dans cette proposition pour $d = 1$, $d = 2$ et $d = 3$ sont intimement liées entre elles, au moyen de certaines espérances conditionnelles.

Dans la Section 5.3, nous allons rappeler la construction générale effectuée par Westwater dans [Wes80], ainsi qu'une partie des théorèmes démontrés dans [Wes80] et [Wes82].

Dans la Section 5.4, nous utiliserons ces théorèmes pour donner la preuve du Théorème 5.1.2.

5.2 Existence du temps local d'intersection modifié

Preuve de la Proposition 5.1.1 : On peut immédiatement se ramener au cas où l'ensemble A lui-même est de la forme $]a, b[\times]x, y[$ $(0 \leq a \leq b \leq x \leq y \leq 1)$.
On a alors, pour tous m, n :

$$\mathbf{E}[J_{\delta_n}^{(d)}(A) J_{\delta_m}^{(d)}(A)] = \int_{A^2} \frac{ds\,dt\,du\,dv}{[(t-s)(v-u)]^{(3-d)/2}} \mathbf{E}[\delta_n(\beta_t - \beta_s)\delta_m(\beta_v - \beta_u)]$$

Il est clair que $(\beta_t - \beta_s, \beta_v - \beta_u)$ est un vecteur gaussien ; de plus, s et u sont inférieurs à t et v, donc la matrice de covariance de $(\beta_t - \beta_s, \beta_v - \beta_u)$ est semblable à un bloc de d matrices 2×2 dont les termes diagonaux sont $t - s$ et $v - u$, et dont les termes non diagonaux sont égaux à

$w = \inf(t,v) - \sup(s,u)$.
Le déterminant $K(s,t,u,v)$ de ces matrices est inférieur à $(t-s)(v-u)$; d'autre part, $t-s = w + (t-v)_+ + (u-s)_+$ et $v-u = w + (t-v)_- + (u-s)_-$, donc ce déterminant est plus grand que $w(|t-v| + |u-s|)$ (en particulier, il est strictement positif presque partout).
On en déduit que pour presque tous s, u :

$$\mathbf{E}[\delta_n(\beta_t - \beta_s)\delta_m(\beta_v - \beta_u)] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{(\mathbf{R}^d)^2} \frac{\delta_n(x)\delta_m(y)}{[K(s,t,u,v)]^{d/2}} e^{-Q_{s,t,u,v}(x.y)} dx\, dy$$

où $Q_{s,t,u,v}$ est une forme quadratique positive.

Par conséquent :

$$\mathbf{E}[J^{(d)}_{\delta_n}(A) J^{(d)}_{\delta_m}(A)]$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{A^2} \frac{ds\, dt\, du\, dv}{[(t-s)(v-u)]^{(3-d)/2}[K(s,t,u,v)]^{d/2}} \int_{(\mathbf{R}^d)^2} \delta_n(x)\delta_m(y)\, e^{-Q_{s,t,u,v}(x,y)} dx\, dy$$

Les propriétés de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ permettent de montrer que la seconde intégrale de l'expression ci-dessus tend vers 1 par valeurs inférieures, quand m et n tendent vers l'infini.

Par conséquent, le terme à intégrer par rapport à $ds\, dt\, du\, dv$ tend presque partout vers :

$$\bar{K}_d(s,t,u,v) = \frac{1}{[(t-s)(v-u)]^{(3-d)/2}[K(s,t,u,v)]^{d/2}}$$

et il reste inférieur à cette limite.

L'intégrale de $\bar{K}_d(s,t,u,v)$ est finie ; en effet, $\bar{K}_d(s,t,u,v) \geq [K(s,t,u,v)]^{-3/2}$, et un calcul, ne présentant pas de difficultés particulières, permet de vérifier que :

$$\int_{A^2} [K(s,t,u,v)]^{-3/2} < \infty$$

compte tenu de la forme particulière de l'ensemble A.

Le théorème de convergence dominée montre alors que $\mathbf{E}[J^{(d)}_{\delta_n}(A) J^{(d)}_{\delta_m}(A)]$ tend vers une limite finie, ce qui entraîne la convergence L^2 cherchée ; le fait que la variable aléatoire $J^{(d)}(A)$ ne dépende pas du choix de $(\delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est alors facile à vérifier. □

Les variables aléatoires $J^{(d)}(A)$ $(d = 1,2)$ sont intimement liées au temps local d'intersection tridimensionnel $J^{(3)}(A)$, grâce à la proposition suivante :

Proposition 5.2.1 : *Soient $d \in \{1,2\}$, B un mouvement brownien de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}^3$, β le mouvement brownien d-dimensionnel constitué des d premières composantes de B, et A un sous-ensemble de $[0,1]^2$ satisfaisant les hypothèses de la Proposition 5.1.1. On a alors l'égalité presque sûre :*

$$\int_A \frac{\delta(\beta_t - \beta_s)}{(t-s)^{(3-d)/2}} ds\, dt = (2\pi)^{(3-d)/2} \mathbf{E}\left[\int_A \delta(B_t - B_s) ds\, dt | \beta\right]$$

Preuve : Soient $(\delta^1_n)_{n\geq 0}$ et $(\delta^2_n)_{n\geq 0}$ des suites d'approximations de la mesure de Dirac, respectivement en dimension d et $3-d$.
La suite de fonctions $((x,y) \to \delta^1_n(x)\delta^2_n(y))_{n\geq 0}$ approxime la mesure de Dirac sur $\mathbf{R}^3$.

Si on pose $B = (\beta, \gamma)$, γ est un mouvement brownien sur $\mathbf{R}^{3-d}$, indépendant de β, et on a, d'après la Proposition 5.1.1 :

$$\int_A \delta_n^1(\beta_t - \beta_s)\delta_n^2(\gamma_t - \gamma_s) ds\, dt \underset{L^2}{\rightarrow} \int_A \delta(B_t - B_s) ds\, dt$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à β, on obtient alors :

$$\int_A \delta_n^1(\beta_t - \beta_s)\mathbf{E}[\delta_n^2(\gamma_t - \gamma_s)] ds\, dt \underset{L^2}{\rightarrow} \mathbf{E}\left[\int_A \delta(B_t - B_s) ds\, dt | \beta\right]$$

On en déduit que, pour montrer la Proposition 5.2.1, il suffit de prouver que le membre de gauche de la convergence précédente tend vers $\frac{J^{(d)}(A)}{(2\pi)^{(3-d)/2}}$; autrement dit, nous devons démontrer que $N_n \to 0$ avec :

$$N_n = \mathbf{E}\left[\left(\int_A \delta_n^1(\beta_t - \beta_s)\left(\mathbf{E}[\delta_n^2(\gamma_t - \gamma_s)] - \frac{1}{[2\pi(t-s)]^{(3-d)/2}}\right) ds\, dt\right)^2\right]$$

Compte tenu de la densité de la loi de $\gamma_t - \gamma_s$, on a :

$$\mathbf{E}[\delta_n^2(\gamma_t - \gamma_s)] = \frac{1}{[2\pi(t-s)]^{(3-d)/2}} \int_{\mathbf{R}^{3-d}} \delta_n^2(x) e^{-||x||^2/2(t-s)} dx$$

quantité qui tend vers $1/[2\pi(t-s)]^{(3-d)/2}$ par valeurs inférieures.

Par conséquent :

$$N_n = \mathbf{E}\left[\left(\int_A \delta_n^1(\beta_t - \beta_s)\phi_n(s,t) ds\, dt\right)^2\right]$$

où $\phi_n(s,t)$ est positif, tend vers zéro pour tous s, t et est inférieur à $1/[2\pi(t-s)]^{(3-d)/2}$.
On en déduit :

$$N_n = \int_{A^2} \phi_n(s,t)\phi_n(u,v)\mathbf{E}[\delta_n^1(\beta_t - \beta_s)\delta_n^1(\beta_v - \beta_u)] ds\, dt\, du\, dv$$

où $\phi_n(s,t)\phi_n(u,v) \leq \frac{1}{(2\pi)^{3-d}[(t-s)(v-u)]^{(3-d)/2}}$ tend vers zéro et où $\mathbf{E}[\delta_n^1(\beta_t - \beta_s)\delta_n^1(\beta_v - \beta_u)]$ est dominé par $[K(s,t,u,v)]^{-d/2}$.

Ces propriétés de domination entraînent la convergence L^2 cherchée. □

Pour montrer que les mesures associées au modèle d'Ewards modifié sont étrangères à la mesure de Wiener, nous aurons en plus besoin du lemme suivant :

Lemme 5.2.2 : *Si $A =]a,b[\times]x,y[$ et $A' =]a',b'[\times]x',y'[$ avec $0 \leq a \leq b \leq x \leq y \leq 1$ et $0 \leq a' \leq b' \leq x' \leq y' \leq 1$, alors les variables aléatoires $J^{(d)}(A)$ et $J^{(d)}(A')$ sont positivement corrélées.*

Preuve : Soit $(\delta_n)_{n\geq 0}$ une suite approximant la mesure de Dirac. On a, pour tout n :

$$\mathbf{E}[J_{\delta_n}^{(d)}(A)J_{\delta_n}^{(d)}(A')] = \int_{A\times A'} \frac{ds\, dt\, du\, dv}{[(t-s)(v-u)]^{(3-d)/2}} \mathbf{E}[\delta_n(\beta_t - \beta_s)\delta_n(\beta_v - \beta_u)]$$

La matrice de covariance de $(\beta_t - \beta_s, \beta_v - \beta_u)$ est semblable à un bloc diagonal de d matrices 2×2, dont le déterminant $K(s,t,u,v)$ vérifie $0 < K(s,t,u,v) \leq (t-s)(v-u)$ lorsque s, t, u, v sont deux à deux distincts.
On en déduit :

$$\mathbf{E}[J_{\delta_n}^{(d)}(A) J_{\delta_n}^{(d)}(A')]$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{A \times A'} \frac{ds\,dt\,du\,dv}{[(t-s)(v-u)]^{(3-d)/2}[K(s,t,u,v)]^{d/2}} \int_{(\mathbf{R}^d)^2} \delta_n(x)\delta_n(y)\, e^{-Q_{s,t,u,v}(x,y)} dx\,dy$$

où $Q_{s,t,u,v}$ est une forme quadratique positive.

Si on choisit une suite $(\delta_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $\delta_n(x) = (n+1)^d \delta_1((n+1)x)$, on a l'égalité :

$$\int_{(\mathbf{R}^d)^2} \delta_n(x)\delta_n(y)\, e^{-Q_{s,t,u,v}(x,y)} dx\,dy = \int_{(\mathbf{R}^d)^2} \delta_0(x)\delta_0(y)\, e^{-Q_{s,t,u,v}(x,y)/(n+1)^2} dx\,dy$$

D'après le théorème de convergence monotone, cette dernière intégrale croît vers 1 ; il en résulte :

$$\mathbf{E}[J^{(d)}(A) J^{(d)}(A')] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{A \times A'} \frac{ds\,dt\,du\,dv}{[(t-s)(v-u)]^{(3-d)/2}[K(s,t,u,v)]^{d/2}}$$

Un calcul similaire donne :

$$\mathbf{E}[J^{(d)}(A)]\mathbf{E}[J^{(d)}(A')] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{A \times A'} \frac{ds\,dt\,du\,dv}{[(t-s)(v-u)]^{3/2}}$$

Comme $0 \leq K(s,t,u,v) \leq (t-s)(v-u)$, le Lemme 5.2.2 est prouvé. $\square$

Remarque : Les résultats donnés dans cette section restent valables pour tous les ensembles A inclus dans l'ensemble des $(s,t) \in [0,1]^2$ tels que $s < t$, et vérifiant la condition :

$$\int_A \frac{ds\,dt}{(t-s)^{3/2}} < \infty$$

Cependant, cette généralisation ne sera pas nécessaire pour la suite de notre article.

A présent, nous allons rappeler la construction générale de J. Westwater donnée dans [Wes80], ainsi qu'une partie des résultats démontrés dans [Wes80] et [Wes82], afin de les appliquer au cas du modèle d'Edwards modifié.

5.3 Construction de J. Westwater

Les étapes successives de la construction de J. Westwater sont les suivantes :

(1) On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}$ et une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{M}, \mu) \to \mathbf{R}_+^*$.

(2) On suppose l'existence de deux applications mesurables α_0 et α_1 de $(\Omega, \mathcal{M})$ dans lui-même, telles que l'image de la mesure μ par l'application $(\alpha_0, \alpha_1) : (\Omega, \mathcal{M}) \to (\Omega^2, \mathcal{M} \otimes \mathcal{M})$ est égale à $\mu \otimes \mu$.
De plus, on suppose que α_0 et α_1 engendrent la tribu $\mathcal{M}$.

(3) Pour tout $n \geq 0$, on définit l'ensemble $T(n)$ par :

$$T(n) = \{(n, i_1, ..., i_n); i_1, ..., i_n \in \{0,1\}\}$$

(en particulier $T(0) = \{0\}$), et on pose :

$$T = \bigcup_{n \geq 0} T(n)$$

Pour tout $v = (n, i_1, ..., i_n) \in T(n)$, on définit l'application α_v de Ω dans Ω par la relation :

$$\alpha_v = \alpha_{i_n} \circ \alpha_{i_{n-1}} \circ ... \circ \alpha_{i_1}$$

(4) Pour tout $n \geq 0$, et pour tout $v \in T(n)$, on définit, sur l'espace de probabilité Ω, les variables aléatoires suivantes :

$$X(v) = 2^{-n/2} X \circ \alpha_v$$

$$X(n) = \sum_{v \in T(n)} X(v)$$

$$S(n) = \sum_{0 \leq m \leq n} X(m)$$

(5) Pour tout $v \in T$, on note $\mathcal{G}_v$ la tribu engendrée par les images réciproques des éléments de $\mathcal{G}$ par l'application α_v :

$$\mathcal{G}_v = \sigma\{\alpha_v^{<-1>}(A), A \in \mathcal{G}\}$$

Pour tout n, on note $\mathcal{G}_n$ la tribu engendrée par $\bigcup_{v \in T(n)} \mathcal{G}_v$ et on suppose que la tribu $\mathcal{M}$ est engendrée par $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{G}_n$.

(6) On suppose qu'il existe une tribu $\mathcal{F}$, indépendante de $\mathcal{G}$ sous μ, et telle que $\mathcal{G}_1$ est la tribu engendrée par $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$.

(7) Pour tout $v \in T$ et pour tout $n \geq 0$, on pose :

$$\mathcal{F}_v = \{\alpha_v^{<-1>}(A), A \in \mathcal{F}\}$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\bigcup_{v \in T(n)} \mathcal{F}_v\right)$$

$$\mathcal{F}_+ = \sigma\left(\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n\right)$$

(8) On suppose que les quatre conditions suivantes sont vérifiées sous la mesure μ :

(a) Il existe $C_1 > 0$, $\beta_1 > 0$ tels que pour tout $p \geq 1$:

$$||X||_p \leq C_1 p_1^{\beta_1}$$

(b) Il existe $C_2 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\tau_2 < 1$ tels que pour tous $p \geq 1$, $n \geq 0$:

$$||X - \mathbf{E}[X|\mathcal{G}_n]||_p \leq C_2 p^{\beta_2} \tau_2^n$$

(c) Il existe $C_3 > 0$, $\beta_3 > 0$, $\tau_3 < 1$ tels que pour tous $p \geq 1$, $n \geq 0$:

$$||X(n) - \mathbf{E}[X(n)|\mathcal{F}_+]||_p \leq C_3 p^{\beta_3} \tau_3^n$$

(d) Pour tous v_1, $v_2 \in T$, $X(v_1)$ et $X(v_2)$ sont positivement corrélés.

(9) Pour tout $g \geq 0$ et pour tous m, $n \in \mathbf{N}$, on considère la mesure de probabilité $\nu_n(g)$ sur Ω, de densité :

$$\frac{d\nu_n(g)}{d\mu} = \frac{\exp(-gS(n))}{\mathbf{E}_\mu[\exp(-gS(n))]}$$

par rapport à μ, et on note $f_{nm}(g)$ l'espérance de cette densité, conditionnellement à $\mathcal{G}_m$:

$$f_{nm}(g) = \mathbf{E}_\mu \left[\frac{d\nu_n(g)}{d\mu} | \mathcal{G}_m \right]$$

J. Westwater a alors obtenu le résultat suivant :

Proposition 5.3.1 : *On suppose que toutes les conditions permettant la construction ci-dessus sont satisfaites. Il existe $g_0 > 0$ tel que pour tous $g \leq g_0$ et $m \geq 0$, la variable aléatoire $f_{nm}(g)$ admet une limite dans $L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$.*
Si on note $f_m(g)$ cette limite, $(f_m(g))_{m \geq 0}$ est une $\mathcal{G}_m$-martingale positive ; en particulier, $\mathbf{E}[f_m(g)] = 1$ pour tout $m \geq 0$.

Cette proposition correspond au Théorème 1 de J. Westwater [Wes80].

Elle permet de définir, pour tous $g \leq g_0$ et $m \geq 0$, une mesure $\nu^{[m]}(g)$ sur $\mathcal{G}_m$, satisfaisant l'égalité :

$$\nu^{[m]}(g)[\Lambda_m] = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\Lambda_m} f_m(g)]$$

pour tout $\Lambda_m \in \mathcal{G}_m$.

Les mesures $(\nu^{[m]}(g))_{m \geq 0}$ sont compatibles entre elles, et vérifient la proposition suivante :

Proposition 5.3.2 : *Soient $q > 1$ et $g \leq g_0$. Il existe une constante $C_{q,g} > 0$ telle que pour tout $m \geq 0$, et pour toute variable aléatoire $R \in L^q(\Omega, \mathcal{G}_m, \mu)$:*

$$\mathbf{E}_{\nu_n(g)}[R] \underset{n \to \infty}{\to} \mathbf{E}_{\nu^{[m]}(g)}[R]$$

$$\mathbf{E}_{\nu^{[m]}(g)}[R] \leq (C_{q,g})^m ||R||_q$$

la norme L^q étant considérée sous la mesure μ.

Ce résultat est indiqué à la fin du Paragraphe 3.2 de J. Westwater [Wes80] (p. 163), et il se déduit des calculs effectués dans le Paragraphe 2.8 du même article.

La compatibilité de la famille de mesures $(\nu^{[m]}(g))_{m \geq 0}$ pour tout $g \leq g_0$ suggère l'existence d'une mesure $\nu(g)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{M})$, telle que $\nu^{[m]}(g)$ est la restriction de $\nu(g)$ à $\mathcal{G}_m$.

La dernière étape de la construction de J. Westwater est la suivante, lorsqu'elle est possible :

(10) On suppose que $\nu(g)$ existe pour tout $g \leq g_0$: cette mesure est nécessairement unique,

puisque les tribus $(\mathcal{G}_m)_{m\geq 0}$ engendrent $\mathcal{M}$.

On a alors le résultat suivant :

Proposition 5.3.3 : *Les mesures $(\nu_g)_{0\leq g\leq g_0}$ sont deux à deux singulières.*

Cette proposition correspond au Théorème 3 de J. Westwater [Wes82].

Dans la Section 5.4, nous allons montrer le Théorème 5.1.2 en appliquant la construction de J. Westwater aux temps locaux d'intersection modifiés.

5.4 Application de la construction de J. Westwater à la preuve du Théorème 5.1.2

Soit $d \in \{1,2,3\}$. La construction de J. Westwater est applicable au cas suivant :

(1) $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$ est l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}^d$, muni de la tribu de la convergence uniforme, et de la mesure de Wiener.
$\mathcal{G}$ est la tribu engendrée par $\omega \to \omega(1)$, variable aléatoire définie sur Ω.
On suppose que X est μ-presque sûrement égal à $J^{(d)}\left(\left]0,\frac{1}{2}\right[\times\left]\frac{1}{2},1\right[\right)$, temps local d'intersection modifié associé au processus canonique de $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$, qui est un mouvement brownien.

(2) On définit α_0 et α_1 par les égalités : $\alpha_0(\omega)(s)=\sqrt{2}\omega\left(\frac{s}{2}\right)$ et $\alpha_1(\omega)(s)=\sqrt{2}\left(\omega\left(\frac{1+s}{2}\right)-\omega\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ pour tout $\omega\in\Omega$.
Sous μ, $\omega \to \alpha_0(\omega)$ et $\omega\to\alpha_1(\omega)$ sont deux mouvements browniens indépendants, donc $(\alpha_0,\alpha_1)(\mu)=\mu\otimes\mu$.
De plus, il est clair que α_0 et α_1 engendrent $\mathcal{M}$.

(3) Pour $v=(n,i_1,i_2,...,i_n)$, on pose :

$$q(v)=\frac{i_1}{2}+\frac{i_2}{2^2}+...+\frac{i_n}{2^n}$$

On vérifie, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbf{N}$, pour tout $v\in T(n)$ et pour tout $s\in[0,1]$:

$$\alpha_v(\omega)(s)=2^{n/2}\left[\omega\left(q(v)+\frac{s}{2^n}\right)-\omega(q(v))\right]$$

(4) Si $v\in T(n)$ et si $(\delta_k)_{k\geq 0}$ est une suite d'approximations de la mesure de Dirac, on a les convergences suivantes dans $L^2(\Omega,\mathcal{M},\mu)$:

$$\begin{aligned} X(v)(\omega) &= \lim_{k\to\infty} 2^{-n/2}\int_0^{1/2}\int_{1/2}^1 \frac{\delta_k\left(2^{n/2}\left[\omega\left(q(v)+\frac{t}{2^n}\right)-\omega\left(q(v)+\frac{s}{2^n}\right)\right]\right)}{(t-s)^{(3-d)/2}}ds\,dt \\ &= \lim_{k\to\infty} 2^{nd/2}\int_{q(v)}^{q(v)+2^{-n-1}}\int_{q(v)+2^{-n-1}}^{q(v)+2^{-n}}\frac{\delta_k(2^{n/2}(\omega(t)-\omega(s)))}{(t-s)^{(3-d)/2}}dsdt \end{aligned}$$

Maintenant, on observe que si $(\delta_k)_{k\geq 0}$ est une suite d'approximations de la mesure de Dirac, il en est de même pour $(\delta'_k)_{k\geq 0}$ avec $\delta'_k(x)=2^{nd/2}\delta_k(2^{n/2}x)$.

On en déduit que presque sûrement :

$$X(v)(\omega)=J^{(d)}(]q(v),q(v)+2^{-n-1}[\times]q(v)+2^{-n-1},q(v)+2^{-n}[)(\omega)$$

(5) Pour tout $v \in T(n)$, $\mathcal{G}_v$ est la tribu engendrée par les variables aléatoires $\omega \to \omega(q(v) + 2^{-n}) - \omega(q(v))$, et $\mathcal{G}_n$ est engendrée par les variables $\omega \to \omega(k.2^{-n})$ avec $k \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq 2^n$.
On en déduit que $\mathcal{M}$ est engendrée par les $\mathcal{G}_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

(6) La tribu $\mathcal{G}_1$ est engendrée par $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ avec $\mathcal{F} = \sigma\{\omega \to \omega(1) - 2\omega\left(\frac{1}{2}\right)\}$, indépendante de $\mathcal{G}$.

(7) Pour $v \in T(n)$, la tribu $\mathcal{F}_v$ est engendrée par :

$$\omega \to \omega(q(v) + 2^{-n}) - 2\omega(q(v) + 2^{-n-1}) + \omega(q(v))$$

et on montre par récurrence que $\sigma\left(\bigcup_{0 \leq m \leq n} \mathcal{F}_m\right)$ est engendrée par les variables $\omega \to \omega(s) - s\omega(1)$ où $s = k.2^n$ avec k entier compris entre 1 et $2^n - 1$.
$\mathcal{F}_+$ est donc engendrée par les variables $\omega \to \omega(s) - s\omega(1)$ pour $s \in [0, 1]$.

(8) Si $d = 3$, les conditions (a), (b) et (c) sont vérifiées d'après J. Westwater [Wes80]. Afin d'en déduire qu'elles le sont également pour $d \in \{1, 2\}$, notons $(\Omega^{(3)}, \mathcal{M}^{(3)}, \mu^{(3)})$, $X^{(3)}$, etc., les éléments de la construction de J. Westwater correspondant à la dimension 3, p_j la projection : $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \to \omega_j$ de $\Omega^{(3)} = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}^3)$ vers $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$, et $P_d = (p_1, ..., p_d)$ la projection canonique de $\Omega^{(3)}$ vers $\Omega = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}^d)$.

On a le lemme suivant :

Lemme 5.4.1 : *Soient Y une variable aléatoire positive sur $(\Omega^{(3)}, \mathcal{M}^{(3)}, \mu^{(3)})$ et $(V^{(i)})_{i \in E}$ une famille au plus dénombrable d'applications de $\mathbf{C}([0, 1], \mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, de la forme $\omega_1 \to \sum_{0 \leq k \leq r} \lambda_{k,i}\omega_1(s_{k,i})$, avec $r \in \mathbf{N}$ et $\lambda_{k,i} \in \mathbf{R}$, $s_{k,i} \in [0, 1]$ pour tout $k \leq r$. On a l'égalité suivante :*

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[Y|(V^{(i)} \circ p_1, V^{(i)} \circ p_2, V^{(i)} \circ p_3)_{i \in E}]|P_d] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y|P_d]|(V^{(i)} \circ p_1, ..., V^{(i)} \circ p_d)_{i \in E}]$$

Preuve : Notons U et V ces deux espérances.
U est de la forme $\mathbf{E}[\psi((V^{(i)} \circ p_1, V^{(i)} \circ p_2, V^{(i)} \circ p_3)_{i \in E})|P_d]$, où ψ est une certaine fonctionnelle. De plus, conditionnellement à P_d, $(V^{(i)} \circ p_1, ..., V^{(i)} \circ p_d)_{i \in E}$ est fixé et la loi conditionnelle de $(V^{(i)} \circ p_{d+1}, ..., V^{(i)} \circ p_3)_{i \in E}$ est constante, puisque $(p_{d+1}, ..., p_3)$ est indépendant de P_d sous $\mu^{(3)}$.

On en déduit que U est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les variables : $V^{(i)} \circ p_1, ..., V^{(i)} \circ p_d$ $(i \in E)$.
Il en est évidemment de même pour V.

Or, pour Z bornée et mesurable par rapport à cette tribu, on vérifie que :

$$\mathbf{E}[UZ] = \mathbf{E}[VZ] = \mathbf{E}[YZ]$$

Il en résulte :

$$U = V = \mathbf{E}[Y|(V^{(i)} \circ p_1, ..., V^{(i)} \circ p_d)_{i \in E}]$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 5.4.1. □

A présent, l'étude du cas $d = 3$ par J. Westwater implique qu'il existe $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $C_3 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0$, $\tau_2 < 1$, $\tau_3 < 1$ tels que pour tous $p \geq 1$, $n \geq 0$:

(a') $||X^{(3)}||_p \leq C_1 p^{\beta_1}$

(b') $||X^{(3)} - \mathbf{E}[X^{(3)}|\mathcal{G}_n^{(3)}]||_p \leq C_2 p^{\beta_2} \tau_2^n$

(c') $||X^{(3)}(n) - \mathbf{E}[X^{(3)}(n)|\mathcal{F}_+^{(3)}]||_p \leq C_3 p^{\beta_3} \tau_3^n$

L'esperance conditionnelle étant une contraction dans tous les espaces L^p $(p > 1)$, on a :

(a") $||\mathbf{E}[X^{(3)}|P_d]||_p \leq C_1 p^{\beta_1}$

(b") $||\mathbf{E}[X^{(3)}|P_d] - \mathbf{E}[\mathbf{E}[X^{(3)}|\mathcal{G}_n^{(3)}]|P_d]||_p \leq C_2 p^{\beta_2} \tau_2^n$

(c") $||\mathbf{E}[X^{(3)}(n)|P_d] - \mathbf{E}[\mathbf{E}[X^{(3)}(n)|\mathcal{F}_+^{(3)}]|P_d]||_p \leq C_3 p^{\beta_3} \tau_3^n$

Le Lemme 5.4.1 implique alors :

(a''') $||Z^{(d)}||_p \leq C_1 p^{\beta_1}$

(b''') $||Z^{(d)} - \mathbf{E}[Z^{(d)}|\mathcal{G}_n^{(d)}]||_p \leq C_2 p^{\beta_2} \tau_2^n$

(c''') $||Z^{(d)}(n) - \mathbf{E}[Z^{(d)}(n)|\mathcal{F}_+^{(d)}]||_p \leq C_3 p^{\beta_3} \tau_3^n$

où $Z^{(d)} = \mathbf{E}[X^{(3)}|P_d]$, $Z^{(d)}(n) = \mathbf{E}[X^{(3)}(n)|P_d]$, où $\mathcal{G}_n^{(d)}$ est la tribu engendrée par les variables $\omega \to P_d(\omega)(k.2^{-n})$ $(1 \leq k \leq 2^n,\ k \in \mathbf{N})$ et où $\mathcal{F}_+^{(d)}$ est la tribu engendrée par : $\omega \to P_d(\omega)(s) - sP_d(\omega)(1)$ $(0 \leq s \leq 1)$.

D'après la Proposition 5.2.1, on a :

$$Z^{(d)} = \frac{1}{(2\pi)^{(3-d)/2}} X \circ P_d$$

et

$$Z^{(d)}(n) = \frac{1}{(2\pi)^{(3-d)/2}} X(n) \circ P_d$$

Comme l'image de $\mu^{(3)}$ (mesure de Wiener sur $\mathbf{R}^3$) par P_d est μ (mesure de Wiener sur $\mathbf{R}^d$), les inégalités (a"'), (b"'), (c"') impliquent que les conditions (a), (b), (c) sont vérifiées en dimension d, comme annoncé.

D'autre part, la condition (d) est une conséquence immédiate du Lemme 5.2.2.

(9) On peut vérifier que la mesure $\nu_n(g)$ obtenue par la construction de J. Westwater est exactement la mesure $\bar{\nu}_n^{(d)}(g)$ définie au début de cet article.

Il en résulte que pour $g \leq g_0$ la famille de mesures $(\nu^{[m]}(g))_{m \in \mathbf{N}}$ construite grâce à la Proposition 5.3.1 vérifie la convergence :

$$\bar{\nu}_n^{(d)}(g)(\Lambda_m) \underset{n \to \infty}{\to} \nu^{[m]}(g)(\Lambda_m)$$

pour tout $\Lambda_m \in \mathcal{G}_m$.

On en déduit que s'il existe une mesure $\nu(g)$ compatible avec la famille $(\nu^{[m]}(g))_{m\in\mathbf{N}}$, et si les mesures $(\nu(g))_{0\leq g\leq g_0}$ sont deux à deux singulières, alors le Théorème 5.1.2 est démontré pour $g \leq g_0$, en posant $\bar{\nu}^{(d)}(g) = \nu(g)$.

La dernière étape de notre raisonnement consiste donc à prouver ces propriétés.

(10) Pour montrer l'existence de $\nu(g)$, considérons la représentation de Ciesielski du mouvement brownien appliquée à ω ; on a, pour tout $s \in [0,1]$:

$$\omega(s) = s\omega(1) + \sum_{v\in T} f(v)(s)\theta_v(\omega)$$

avec

$$f(v)(s) = 2^{m/2}[(2^{-m-1} - |s - (q(v) + 2^{-m-1})|)_+]$$

et

$$\theta(\omega) = 2^{m/2}[2\omega(q(v) + 2^{-m-1}) - \omega(q(v)) - \omega(q(v) + 2^{-m})]$$

pour $v \in T(m)$.

Sous μ, $\omega \to \omega(1)$ et $(\theta_v)_{v\in T}$ sont des variables gaussiennes standard indépendantes sur $\mathbf{R}^d$.

De plus, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\mathcal{G}_m$ est la tribu engendrée par $\omega \to \omega(1)$ et $(\theta_v)_{v\in T(k),k<m}$.

Soit $\tilde{\nu}^{[m]}(g)$ la mesure sur $(\mathbf{R}^d)^{\{1\}\cup \bigcup\limits_{k<m} T(k)}$, image de $\nu^{[m]}(g)$ par l'application :
$\omega \to (\omega(1), (\theta_v(\omega))_{v\in T(k),k<m})$

Les mesures $(\tilde{\nu}^{[m]}(g))_{m\in\mathbf{N}}$ sont compatibles entre elles, donc d'après le théorème de Kolmogorov, il existe une mesure $\tilde{\nu}(g)$ sur $\tilde{\Omega} = (\mathbf{R}^d)^{\{1\}\cup \bigcup\limits_{k\in\mathbf{N}} T(k)}$ dont la restriction à $(\mathbf{R}^d)^{\{1\}\cup \bigcup\limits_{k<m} T(k)}$ est $\tilde{\nu}^{[m]}(g)$, pour tout m.

Notons maintenant α_1 et $(\gamma_v)_{v\in T}$ les projections canoniques de $\tilde{\Omega}$ sur $\mathbf{R}^d$, $\tilde{\mathcal{M}}$ la tribu engendrée par ces projections, $\tilde{\mu}$ la mesure sous laquelle α_1 et $(\gamma_v)_{v\in T}$ sont des gaussiennes standard d-dimensionnelles et indépendantes, et $\tilde{\mathcal{G}}_m$ la tribu engendrée par α_1 et γ_v pour $v \in T(k)$, $k < m$.

Soit q un réel strictement supérieur à 1. D'après la Proposition 5.3.2, il existe $C_{q,g} > 0$ telle que pour tout $m \in \mathbf{N}$ et pour toute variable aléatoire $\tilde{R} \in L^q(\tilde{\Omega}, \tilde{G}_m, \tilde{\mu})$, on a :

$$\mathbf{E}_{\tilde{\nu}(g)}[\tilde{R}] \leq (C_{q,g})^m ||\tilde{R}||_q$$

la norme L^q étant considérée sous $\tilde{\mu}$.

En posant $\tilde{R} = ||\gamma_v||^{(m+1)p}$, où p est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on peut alors montrer (voir J. Westwater [Wes80], Paragraphe 3.2) l'existence d'une constante $D > 0$ telle que pour tous $p > 1$, $m \in \mathbf{N}$ et $v \in T(m)$:

$$(\mathbf{E}_{\tilde{\nu}(g)}[||\gamma_v||^p])^{1/p} \leq Dp^{1/2}(m+1)^{1/2}$$

Pour tout $m \in \mathbf{N}$ et pour tous $v \in T(m)$, $s, t \in [0,1]$, on a $f(v)(s) = 0$ si $s \notin [q(v), q(v) + 2^{-m}]$, $0 \leq f(v)(s) \leq 2^{-m/2-1}$ et $|f(v)(s) - f(v)(t)| \leq 2^{m/2}|s - t|$.

On peut alors vérifier que sous la loi $\tilde{\nu}(g)$, la fonction aléatoire $\omega : s \to \omega(s) = s\alpha_1 + \sum_{\omega \in T} f(v)(s)\gamma_v$ est p.s. définie pour tout s et vérifie des inégalités de la forme $\mathbf{E}[|\omega(s) - \omega(t)|^\beta] \leq M|s-t|^{1+\alpha}$ avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tels que α/β est aussi proche de $\frac{1}{2}$ que l'on veut.

La fonction ω est donc p.s. Höldérienne d'exposant $\frac{1}{2} - \epsilon$, pour tout $\epsilon \in]0, 1/2[$, et en particulier continue.

ω est donc une variable aléatoire sur $\Omega = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}^d)$ et on peut considérer sa loi sous $\tilde{\nu}(g)$; par construction, cette loi est la mesure $\nu(g)$ cherchée.

De plus, d'après la Proposition 5.3.3, les mesures $(\nu(g))_{0 \leq g \leq g_0}$ sont deux à deux singulières : ceci achève la preuve du Théorème 5.1.2.

Remarque : Il semble probable que le Théorème 5.1.2 reste vrai pour toute valeur strictement positive de g.
Il est peut-être possible de démontrer ce résultat en utilisant les résultats donnés par J. Westwater dans [Wes82].
Une autre piste de recherche pourrait être de s'inspirer de la construction du modèle d'Edwards tridimensionnel par E. Bolthausen (see [Bol93]). Ceci éviterait de faire reposer l'ensemble de notre raisonnement sur les résultats de J. Westwater, dont la preuve demande des calculs très lourds.

Conclusion et perspectives

Les résultats obtenus au cours de cette thèse nous ont donné l'occasion d'étudier différents aspects du mouvement brownien, de ses temps locaux et de ses temps locaux d'intersection.

Cette étude offre également d'intéressantes perspectives de recherche.

Par exemple, il semble possible d'obtenir une meilleure compréhension des pénalisations étudiées par B. Roynette, P. Vallois et M. Yor : en effet, la mesure limite associée à ce type de pénalisations existe dans la plupart des cas particuliers étudiés, alors que ces cas sont souvent très différents les uns des autres.

Il est donc probable qu'il existe un théorème de pénalisation global impliquant tous ces cas particuliers, ou du moins une grande partie d'entre eux, et il est d'ailleurs remarquable que l'on n'ait pas d'idée précise sur ce que serait un tel théorème.

Toutefois, le Chapitre 4 constitue un début de réponse à ce problème, du moins pour les pénalisations ne dépendant que des temps locaux des trajectoires considérées.

Ce type de pénalisation est fortement lié au problème du "bandit brownien", qui consiste à décrire, aussi explicitement et simplement que possible, le mouvement brownien conditionné par l'ensemble de ses temps locaux aux différents niveaux (voir J. Warren et M. Yor [WY98]). Le lien entre ces deux problèmes peut être vu de la manière suivante : le bandit brownien est, formellement, un mouvement brownien pénalisé avec un poids égal à un si ses temps locaux sont égaux à des valeurs fixées à l'avance, et égal à zéro dans le cas contraire.

Le fait qu'on ne connaisse pas de résultat de pénalisation vraiment général semble également lié à la difficulé que l'on a de résoudre les différents cas particuliers : les calculs correspondants n'aboutissent complètement que pour des poids de pénalisation suffisamment simples.

A défaut d'obtenir un théorème général de pénalisation, il peut donc être intéressant d'étudier des cas particuliers plus difficiles que ceux qui sont résolus actuellement.

Ceci pourrait par exemple permettre de construire un modèle d'Edwards valable pour des trajectoires infinies, et éventuellement de comparer ce modèle au comportement asymptotique du modèle d'Edwards classique.

Par ailleurs, bien que les pénalisations étudiées par B. Roynette, P. Vallois et M. Yor soient, pour l'essentiel, unidimensionnelles, rien n'empêche d'essayer de généraliser certains de leurs résultats aux dimensions supérieures (voir B. Roynette, P. Vallois et M. Yor [RVY], article consacré en particulier au mouvement brownien plan).

On peut donc envisager de construire un modèle d'Edwards infini en dimension 2 (voire en dimension 3) : ce type de construction pourrait peut-être permettre d'étudier le comportement asymptotique du modèle d'Edwards classique, qui est actuellement très mal connu.

En conclusion, les travaux que nous avons effectués dans le cadre de cette thèse peuvent être considérés comme une préparation à l'étude de problèmes plus difficiles sur le mouvement brownien, tels que ceux qui sont posés par la modélisation des trajectoires de polymères.

Bibliographie

[AZ98] S. Albeverio and X.-Y. Zhou. On the equality of two polymer measures in three dimensions. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 5(3) :561–596, 1998.

[BC04] R.-F. Bass and X. Chen. Self-intersection local time : critical exponent, large deviations, and laws of the iterated logarithm. *Ann. Probab.*, 32(4) :3221–3247, 2004.

[Ber89] J. Bertoin. Applications des processus de Dirichlet aux temps locaux et temps locaux d'intersection d'un mouvement brownien. *Probab. Theory Related Fields*, 80(3) :433–460, 1989.

[Bol93] E. Bolthausen. On the construction of the three-dimensional polymer measure. *Probab. Theory Related Fields*, 97(1-2) :81–101, 1993.

[BPY89a] M. Barlow, J. Pitman, and M. Yor. On Walsh's Brownian motions. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 275–293. Springer, Berlin, 1989.

[BPY89b] M. Barlow, J. Pitman, and M. Yor. Une extension multidimensionnelle de la loi de l'arc sinus. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 294–314. Springer, Berlin, 1989.

[BY81] N. Bouleau and M. Yor. Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semimartingales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(9) :491–494, 1981.

[BY87] Ph. Biane and M. Yor. Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. *Bull. Sci. Math. (2)*, 111(1) :23–101, 1987.

[BY88] Ph. Biane and M. Yor. Sur la loi des temps locaux browniens pris en un temps exponentiel. In *Séminaire de Probabilités, XXII*, volume 1321 of *Lecture Notes in Math.*, pages 454–466. Springer, Berlin, 1988.

[Che01] A.-S. Cherny. Principal values of the integral functionals of Brownian motion : existence, continuity and an extension of Itô's formula. In *Séminaire de Probabilités, XXXV*, volume 1755 of *Lecture Notes in Math.*, pages 348–370. Springer, Berlin, 2001.

[CS99] A.-S. Cherny and A.-N. Shiryaev. Some distributional properties of a Brownian motion with a drift and an extension of P. Lévy's theorem. *Th. of Probab. and Its Applications*, 44(2) :412–418, 1999.

[dM99] B. de Meyer. Une simplification de l'argument de Tsirelson sur le caractère non-brownien des processus de Walsh. In *Séminaire de Probabilités, XXXIII*, volume 1709 of *Lecture Notes in Math.*, pages 217–220. Springer, Berlin, 1999.

[Dyn86] E.-B. Dynkin. Functionals associated with self-intersections of the planar Brownian motion. In *Séminaire de Probabilités, XX*, volume 1204 of *Lecture Notes in Math.*, pages 553–571. Springer, Berlin, 1986.

[Dyn88] E.-B. Dynkin. Self-intersection gauge for random walks and for Brownian motion. *Ann. Probab.*, 16(1) :1–57, 1988.

[Edw65] S.-F. Edwards. The statistical mechanics of polymers with excluded volume. *Proc. Phys. Soc.*, 85 :613–624, 1965.

[Eis00] N. Eisenbaum. Integration with respect to local time. *Potential Anal.*, 13(4) :303–328, 2000.

[GHR84] D. Geman, J. Horowitz, and J. Rosen. A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. Probab.*, 12(1) :86–107, 1984.

[HY99] Y. Hu and M. Yor. Asymptotic studies of Brownian functionals. In *Random walks*, volume 9 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 187–217. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999.

[HY04] Y. Hariya and M. Yor. Limiting distributions associated with moments of exponential Brownian functionals. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 41(2) :193–242, 2004.

[KS88] I. Karatzas and S.-E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[Lej06] A. Lejay. On the constructions of the skew Brownian motion. *Probab. Surveys*, 3 :413–466, 2006.

[Leu98] C. Leuridan. Le théorème de Ray-Knight à temps fixe. In *Séminaire de Probabilités, XXXII*, volume 1686 of *Lecture Notes in Math.*, pages 376–396. Springer, Berlin, 1998.

[LG85] J.-F. Le Gall. Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. In *Séminaire de probabilités, XIX*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 314–331. Springer, Berlin, 1985.

[LG92] J.-F. Le Gall. Some properties of planar Brownian motion. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XX*, volume 1527 of *Lecture Notes in Math.*, pages 111–235. Springer, Berlin, 1992.

[MR06] M.-B. Marcus and J. Rosen. *Markov processes, Gaussian processes, and local times*, volume 100 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[MS93] N. Madras and G. Slade. *The self-avoiding walk*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.

[Naj07a] J. Najnudel. Penalizations of the Brownian motion by a functional of its local times. *Stochastic Processes and their Applications*, submitted in 2007.

[Naj07b] J. Najnudel. Integration with respect to self-intersection local time of a one-dimensional Brownian motion. In *Séminaire de Probabilités, XL*. to appear in 2007.

[Naj07c] J. Najnudel. Pénalisations de l'araignée brownienne (penalizations of Walsh Brownian motion). *Annales de l'Institut Fourier*, to appear in 2007.

[Pit99] J. Pitman. The distribution of local times of a Brownian bridge. In *Séminaire de Probabilités, XXXIII*, volume 1709 of *Lecture Notes in Math.*, pages 388–394. Springer, Berlin, 1999.

[Pro90] Ph. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[PY96] J. Pitman and M. Yor. Quelques identités en loi pour les processus de Bessel. *Astérisque*, 236 :249–276, 1996. Hommage à P. A. Meyer et J. Neveu.

[Ros83] J. Rosen. A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space. *Comm. Math. Phys.*, 88(3) :327–338, 1983.

[Ros86a] J. Rosen. A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion. In *Séminaire de Probabilités, XX*, volume 1204 of *Lecture Notes in Math.*, pages 515–531. Springer, Berlin, 1986.

[Ros86b] J. Rosen. Tanaka's formula and renormalization for intersections of planar Brownian motion. *Ann. Probab.*, 14(4) :1245–1251, 1986.

[Ros05] J. Rosen. Derivatives of self-intersection local times. In *Séminaire de Probabilités XXXVIII*, volume 1857 of *Lecture Notes in Math.*, pages 263–281. Springer, Berlin, 2005.

[RVY] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Penalisation of multidimensional brownian motion.

[RVY03] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbated by normalized exponential weights. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 337(10) :667–673, 2003.

[RVY05] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws for long Brownian bridges perturbed by their one-sided maximum. III. *Period. Math. Hungar.*, 50(1-2) :247–280, 2005.

[RVY06a] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time. II. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(3) :295–360, 2006.

[RVY06b] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Pénalisations et quelques extensions du théorème de Pitman, relatives au mouvement brownien et à son maximum unilatère. In *Séminaire de Probabilités, XXXIX*, volume 1874 of *Lecture Notes in Math.*, pages 305–336. Springer, 2006.

[RVY06c] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Some penalisations of the Wiener measure. *Jap. Journal of Math.*, 1 :263–290, 2006.

[RW91] L.-C.-G. Rogers and J.-B. Walsh. $A(t, B_t)$ is not a semimartingale. In *Seminar on Stochastic Processes*, volume 24 of *Progr. Probab.*, pages 275–283. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.

[RY99a] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293, pp 454-462 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.

[RY99b] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293, pp 2–3 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.

[Tsi97] B. Tsirelson. Triple points : from non-Brownian filtrations to harmonic measures. *Geom. Funct. Anal.*, 7(6) :1096–1142, 1997.

[Var69] S. Varadhan. Appendix to : Euclidian quantum field theory, by K. Symanzik. *Local Quantum Fields Theory, Academic Press*, 1969.

[vdH98] R. van der Hofstad. *One-dimensional random polymers*, volume 123 of *CWI Tract*. Stichting Mathematisch Centrum Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1998.

[vdHdHK97] R. van der Hofstad, F. den Hollander, and W. König. Central limit theorem for the Edwards model. *Ann. Probab.*, 25(2) :573–597, 1997.

[Wal78] J.-B. Walsh. A diffusion with a discontinuous local time. *Temps Locaux, Astérisque*, 52–53 :37–45, 1978.

[War05] J. Warren. A stochastic flow arising in the study of local times. *Probab. Theory Related Fields*, 133(4) :559–572, 2005.

[Wat99] S. Watanabe. The existence of a multiple spider martingale in the natural filtration of a certain diffusion in the plane. In *Séminaire de Probabilités, XXXIII*, volume 1709 of *Lecture Notes in Math.*, pages 277–290. Springer, Berlin, 1999.

[Wes80] J. Westwater. On Edwards' model for long polymer chains. *Comm. Math. Phys.*, 72(2) :131–174, 1980.

[Wes82] J. Westwater. On Edwards' model for polymer chains. III. Borel summability. *Comm. Math. Phys.*, 84(4) :459–470, 1982.

[WY98] J. Warren and M. Yor. The Brownian burglar : conditioning Brownian motion by its local time process. In *Séminaire de Probabilités, XXXII*, volume 1686 of *Lecture Notes in Math.*, pages 328–342. Springer, Berlin, 1998.

[Yam96] T. Yamada. Principal values of Brownian local times and their related topics. In *Itô's stochastic calculus and probability theory*, pages 413–422. Springer, Tokyo, 1996.

[Yor85] M. Yor. Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^3$. In *Séminaire de probabilités, XIX*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 350–365. Springer, Berlin, 1985.

[Yor86] M. Yor. Précisions sur l'existence et la continuité des temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^2$. In *Séminaire de Probabilités, XX*, volume 1204 of *Lecture Notes in Math.*, pages 532–542. Springer, Berlin, 1986.

[Zho92] X.-Y. Zhou. Hausdorff dimension of the double point set of the Westwater process. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 13(1) :86–94, 1992.