



FCT – Universidade do Algarve

REPRESENTAÇÕES INDUZIDAS E
QUANTIZAÇÃO GEOMÉTRICA DAS
ÓRBITAS COADJUNTAS DE
 $SU(2)$ E $SL(2, \mathbb{C})$

Relatório de Projecto Final do Curso de
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica

Realizado por:
Pedro Vaz

Orientado por:
Prof. Dr. Marco Mackaaij

Faro
2004

REPRESENTAÇÕES INDUZIDAS E QUANTIZAÇÃO
GEOMÉTRICA DAS ÓRBITAS COADJUNTAS DE
 $SU(2)$ E $SL(2, \mathbb{C})$

Pedro Vaz

Conteúdo

Introdução	1
1 Os grupos de Lie $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$	3
1.1 $SU(2)$	3
1.1.1 A álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$	4
1.1.2 $SU(2)$ e $SO(3)$	5
1.2 $SL(2, \mathbb{C})$	7
1.2.1 A álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	7
1.2.2 A Decomposição de Iwasawa para $SL(2, \mathbb{C})$	9
1.2.3 $SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz	10
1.3 Acções e Espaços Homogéneos	13
1.4 Representações Unitárias	14
2 Fibrados e Conexões	18
2.1 Fibrados homogéneos	18
2.1.1 Fibrados Principais	18
2.1.2 Fibrados Vectoriais Associados	27
2.1.3 Fibrados Vectoriais Holomorfos	32
2.2 Secções em fibrados homogéneos e funções equivariantes no grupo	34
2.3 Conexões e curvatura	37
2.3.1 Conexões em Fibrados Principais	37
2.3.2 Conexões em Fibrados de Linha Homogéneos	42
2.3.3 Curvatura em Fibrados de Linha	45
2.3.4 Exemplos	46
3 Representações Induzidas	51
3.1 Representações Induzidas	51
3.2 $SL(2, \mathbb{C})$: A série principal	55
3.3 $\text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$	60
3.4 $\text{Ind}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$	63
3.5 A Representação holomorfa de $SU(2)$	64

4	Quantização Geométrica	67
4.1	Quantização Geométrica e o Método das Órbitas Coadjuntas	67
4.1.1	Geometria Simplética	67
4.1.2	Órbitas Coadjuntas	69
4.1.3	O Programa de Quantização Geométrica	77
4.2	Representações Induzidas e QG de Órbitas Coadjuntas	78
4.2.1	Pré-Quantização	78
4.2.2	Polarizações	83
4.2.3	Polarizações de Kähler: Quantização Holomorfa das Órbitas Coad- juntas de $SU(2)$	86
4.2.4	Polarizações Reais: Quantização das Órbitas Coadjuntas de $SL(2, \mathbb{C})$	91
	Bibliografia	97

Introdução

O método de quantização geométrica foi criado no final dos anos 60, por B. Konstant, J. M. Souriau e I. E. Segal, baseados nas ideias de A. Kirillov [4], [11]. Tinha por objetivo fazer a unificação dos vários métodos de quantização conhecidos, num formalismo independente da escolha de coordenadas e tendo por modelo o processo de quantização canônica. Sob o ponto de vista da teoria de representações, o método de quantização geométrica permite-nos obter representações infinitesimais de grupos de Lie que são unitárias. Verifica-se, caso a caso, que as representações infinitesimais obtidas são sempre integráveis, *i.e.* correspondem à versão infinitesimal de representações dos grupos de Lie correspondentes, que podem ser obtidas através do método das representações induzidas, desenvolvido na sua generalidade por G. Mackey nos anos 50 [11].

Neste trabalho estudamos a relação entre o método das representações induzidas e o método de quantização geométrica das órbitas coadjuntas de grupos de Lie. Além de tentar manter uma certa generalidade, fazemos um estudo comparativo de dois casos extremos: o grupo especial unitário $SU(2)$, a cobertura universal do grupo de rotações em três dimensões, que é um grupo compacto, e o grupo especial linear $SL(2, \mathbb{C})$, a cobertura universal do grupo de Lorentz, que é um grupo semi-simples não compacto.

No capítulo 1 começamos por fazer uma descrição dos grupos de Lie $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$ e das suas álgebras de Lie $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ e introduzir conceitos básicos da teoria de representações. Tentámos manter este capítulo num nível tão elementar quanto possível. No capítulo 2 fazemos uma abordagem aos fundamentos da teoria de fibrados, que permite fixar algumas convenções e estabelecer alguns resultados gerais que serão utilizados no decorrer do trabalho. No capítulo 3 apresentamos o suficiente da teoria de repre-

representações induzidas para estabelecer a relação com o método das órbitas em quantização geométrica. Por esta razão são dadas versões um pouco mais restritas dos teoremas de Mackey, mas com generalidade suficiente para estabelecer essa relação. São obtidas duas famílias de representações induzidas de $SU(2)$, uma que mostramos ser redutível e outra que mostramos ser irredutível e a que chamamos *a representação holomorfa de $SU(2)$* . No que refere a $SL(2, \mathbb{C})$, são também obtidas duas famílias de representações induzidas, uma que mostramos não ser irredutível e outra que mostramos ser irredutível e isomorfa a uma representação na chamada *série principal de $SL(2, \mathbb{C})$* . No capítulo 4 começamos por introduzir os conceitos de geometria simpléctica que serão utilizados no restante do capítulo. Explicamos o programa de quantização geométrica no contexto do método das órbitas coadjuntas, provamos que uma pré-quantização da órbita coadjunta de um grupo de Lie corresponde à versão infinitesimal de uma representação induzida e são apresentados os resultados da pré-quantização das órbitas coadjuntas de $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$.

A teoria quântica proveniente do processo de pré-quantização, contudo, não é satisfatória no contexto das órbitas coadjuntas, porque as representações unitárias obtidas não são irredutíveis. Torna-se assim necessário introduzir mais uma estrutura, as polarizações (este conceito deve-se a B. Konstant e J. M. Souriau no caso real e a L. Auslander e B. Konstant no caso complexo [4]). Provamos que as representações infinitesimais polarizadas correspondem também à versão infinitesimal de uma representação induzida. Mostramos que nos casos de $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$ as representações polarizadas são irredutíveis. É estudado o caso de uma polarização 'totalmente' complexa, chamada polarização de Kähler, correspondente a $SU(2)$ e o caso de uma polarização real, correspondente a $SL(2, \mathbb{C})$.

Capítulo 1

Os grupos de Lie $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$

1.1 $SU(2)$

Consideremos \mathbb{C}^2 com coordenadas $\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$. Definimos uma métrica hermitiana em \mathbb{C}^2 como

$$\langle z, w \rangle = \bar{z}^1 w^1 + \bar{z}^2 w^2,$$

onde $z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$.

O grupo unitário $U(2)$ é o grupo de transformações $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tais que

$$\langle gz, gw \rangle = \langle z, w \rangle, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^2.$$

Designemos a matriz transconjugada de uma matriz a por a^\dagger . Em notação matricial, estamos a dizer que

$$g \in U(2) \Leftrightarrow (gz)^\dagger gw = z^\dagger w \Leftrightarrow z^\dagger (g^\dagger g)w = z^\dagger w.$$

Assim, podemos redefinir o grupo unitário $U(2)$

$$U(2) = \{ g \in GL(2, \mathbb{C}) \mid g^\dagger g = I \},$$

e definir o grupo especial unitário $SU(2)$ como

$$SU(2) = \{ g \in U(2) \mid \det g = 1 \}.$$

Um pequeno cálculo mostra que toda a matriz $g \in SU(2)$ pode ser unicamente escrita na forma

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

o que nos permite identificar $SU(2)$ com a 3-esfera S^3 mergulhada em \mathbb{C}^4 , e concluir assim que $SU(2)$ é conexo, simplesmente conexo e compacto.

1.1.1 A álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$

Identificamos o espaço dos campos vectoriais invariantes à direita em $SU(2)$ com a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$, que é formada pelas matrizes anti-hermitianas 2×2 de traço nulo. Consideramos o conjunto de geradores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}.$$

Definimos uma forma bilinear real, simétrica, associativa e não degenerada em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ como

$$\langle X, Y \rangle = -2\operatorname{Re}\operatorname{Tr}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{su}(2),$$

relativamente à qual $\{A_j\}_{j=1,2,3}$ é uma base ortonormada. Assim podemos identificar $(\mathfrak{su}(2), \langle \cdot, \cdot \rangle) \cong (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_e)$.

No caso de $SU(2)$, a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{su}(2) \rightarrow SU(2)$ é sobrejectiva, mas não é injectiva, o que reflecte o facto de $SU(2)$ ser um grupo compacto.

Para ver que não é injectiva basta notar que

$$\exp(tA_3) = \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix}.$$

Mostremos que é sobrejectiva. Começemos por notar que qualquer $g \in SU(2)$ pode ser escrito na forma

$$g = (\cos t)I + S, \quad t \in [0, \pi],$$

onde S é uma matriz anti-hermitiana. Com efeito

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(x) + i\operatorname{Im}(x) & \operatorname{Re}(y) + i\operatorname{Im}(y) \\ -\operatorname{Re}(y) + i\operatorname{Im}(y) & \operatorname{Re}(x) - i\operatorname{Im}(x) \end{pmatrix} \\ &= (\operatorname{Re} x)I + \begin{pmatrix} i\operatorname{Im}(x) & \operatorname{Re}(y) + i\operatorname{Im}(y) \\ -\operatorname{Re}(y) + i\operatorname{Im}(y) & -i\operatorname{Im}(x) \end{pmatrix} \\ &= (\cos t)I + S, \end{aligned}$$

onde o facto de $|x|^2 + |y|^2 = 1$ nos permite tomar $\operatorname{Re}(x) = \cos t$.

Tomemos um elemento $X \in \mathfrak{su}(2)$. Em termos da base $\{A_j\}$ podemos escrever

$$X = x^1 A_1 + x^2 A_2 + x^3 A_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ix^3 & ix^1 - x^2 \\ ix^1 + x^2 & -ix^3 \end{pmatrix}.$$

onde se vê que $\det X = \frac{1}{4}((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) \in \mathbb{R}_+$.

Lembremos que as matrizes 2×2 têm um polinómio característico,

$$\alpha^2 - (\text{Tr}X)\alpha + (\det X)I = P_X(\alpha),$$

e que, de acordo com o Teorema de Cayley-Hamilton, $P_X(X) = 0$. Vemos assim que

$$X^2 - (\text{Tr}X)X + (\det X)I = 0,$$

e como X tem traço nulo,

$$X^2 = -(\det X)I.$$

Daqui segue que

$$\exp X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = \cos(\sqrt{\det X})I + \frac{\sin(\sqrt{\det X})}{\sqrt{\det X}}X,$$

a que chamamos *expressão geral para a aplicação exponencial de matrizes 2×2 com traço nulo*. Tomando em conta que $X = (\cos t)I + S$, com S anti-hermitiana concluímos que a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{su}(2) \rightarrow SU(2)$ é sobrejectiva.

1.1.2 $SU(2)$ e $SO(3)$

O *grupo especial linear* $SO(3)$ é o grupo das rotações em \mathbb{R}^3 , e corresponde à componente conexa da identidade do *grupo ortogonal* $O(3)$, que é o subgrupo de $GL(3, \mathbb{R})$ formado pelas transformações que deixam invariante a métrica euclidiana em \mathbb{R}^3 :

$$g \in O(3) \Leftrightarrow \langle gx, gy \rangle_e = \langle x, y \rangle_e$$

onde, para

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix},$$

se tem

$$\langle x, y \rangle_e = \sum_{j=1}^3 x^j y^j.$$

Em notação matricial $\langle x, y \rangle_e = x^T y$ e para $g \in O(3)$,

$$g \in O(3) \Leftrightarrow x^T g^T g y = x^T y \Rightarrow g^T g = I,$$

e isso implica que $\det g = \pm 1$.

Então,

$$SO(3) = \{g \in O(3) \mid \det g = 1\}.$$

Mostremos que $SU(2)$ é a cobertura universal de $SO(3)$. Suponhamos que temos um vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ em \mathbb{R}^3 . Formamos a matriz anti-hermitiana

$$X = \begin{pmatrix} ix_3 & ix_1 - x_2 \\ ix_1 + x_2 & -ix_3 \end{pmatrix}.$$

A aplicação que envia $x \in \mathbb{R}^3$ para $X \in \text{AH}(\mathbb{C}^2)$, onde $\text{AH}(\mathbb{C}^2)$ designa o espaço vectorial das matrizes anti-hermitianas 2×2 , dá-nos um isomorfismo de espaços vectoriais reais $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \text{AH}(\mathbb{C}^2)$. Além disso, $\det X = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = \langle x, x \rangle_e$. Para $g \in SU(2)$ consideremos a aplicação $\phi_g : \text{AH}(\mathbb{C}^2) \rightarrow \text{AH}(\mathbb{C}^2)$,

$$X \mapsto gXg^{-1}.$$

É imediato que ϕ_g é um isomorfismo linear em $\text{AH}(\mathbb{C}^2)$, que a aplicação $g \mapsto \phi_g$ é suave e que $\det(\phi_g X) = \det X = \langle x, x \rangle_e$. Dado que \mathbb{R}^3 e $\text{AH}(\mathbb{C}^2)$ são isomorfos obtemos um homomorfismo de grupos de Lie $p : SU(2) \rightarrow O(3)$, pois para $g, h \in SU(2)$, $\phi_{gh} = \phi_g \phi_h$. Como $SU(2)$ é conexo, a imagem de p tem que estar contido na componente conexa da identidade em $O(3)$, *i.e.* $\text{im}(p) \subseteq SO(3)$. Da definição de ϕ_g vemos que as matrizes g e $-g$ vão corresponder ao mesmo elemento de $SO(3)$, o que significa que $\ker p = \{-I, I\}$. Assim, concluímos que $\text{im } p \cong SU(2)/\{\pm I\}$ é um subgrupo de Lie de $SO(3)$ de dimensão 3, que é a dimensão de $SO(3)$. Como $SO(3)$ é conexo temos $SO(3) = \text{im } p$. Vemos assim que $SU(2)$ é a cobertura universal de $SO(3)$.

1.2 $SL(2, \mathbb{C})$

Definição 1.1. O grupo especial linear $SL(2, \mathbb{C})$ é definido como

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{g \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \det g = 1\}.$$

É imediato da definição que $SL(2, \mathbb{C})$ tem dimensão real igual a 6. Repare-se que temos $SU(2) = U(2) \cap SL(2, \mathbb{C})$.

1.2.1 A álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Consideramos a base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ constituída pelos geradores de rotações em $SL(2, \mathbb{C})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}$$

e pelos geradores de boosts em $SL(2, \mathbb{C})$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Notemos que da secção 1.1.1 segue imediatamente que $\mathfrak{su}(2)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Definimos a forma bilinear real, simétrica, associativa e não degenerada em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ como

$$\langle X, Y \rangle = -2\text{ReTr}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),$$

cuja restrição a $\mathfrak{su}(2)$ é a forma bilinear real introduzida na secção 1.1.1. Note-se que $\{A_i, F_i\}_{i=1,2,3}$ é uma base ortonormada de sinal $(+, +, +, -, -, -)$ relativamente a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ não é injectiva nem sobrejectiva, mas a sua imagem é densa em $SL(2, \mathbb{C})$. Para ver que não é injectiva basta notar que a sua restrição a $\mathfrak{su}(2)$ não é injectiva. Lembremos que as classes de conjugação em $SL(2, \mathbb{C})$ são representadas pelas formas normais de Jordan que são

$$\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right], \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \quad \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right], \quad \text{onde } a \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}.$$

A única classe de equivalência que não está na imagem da aplicação exponencial é

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right].$$

Para o mostrar notamos que, da expressão geral da aplicação exponencial para matrizes 2×2 com traço nulo (vide 1.1.1), temos

$$\text{Tr}(\exp X) = 2 \cos(\sqrt{\det X}).$$

Se

$$\text{Tr}(X) = \text{Tr} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

obtemos

$$\det X = \pi^2(2n - 1)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

e assim que

$$\exp X = \cos(\sqrt{\det X})I + \frac{\sin(\sqrt{\det X})}{\sqrt{\det X}}X = -I.$$

Daqui concluímos que a única matriz com traço igual a -2 que está na imagem da aplicação exponencial é $-I$, e assim que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \text{im}(\exp).$$

Mostremos que $\dim \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = 4$. Para isso notamos que para $\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -y \\ -w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - xw & x^2 \\ -w^2 & -1 + xw \end{pmatrix},$$

o que significa que

$$\dim \left\{ g \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in SL(2, \mathbb{C}) \right\} = 4.$$

Como a única classe de conjugação em $SL(2, \mathbb{C})$ que não está contida na imagem da aplicação exponencial tem dimensão inferior a $6 = \dim(SL(2, \mathbb{C}))$, concluímos que $\text{im}(\exp)$ é densa em $SL(2, \mathbb{C})$.

1.2.2 A Decomposição de Iwasawa para $SL(2, \mathbb{C})$

Sejam $G = SL(2, \mathbb{C})$ e A, N os subgrupos de $SL(2, \mathbb{C})$ definidos por

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}_+ \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Lema 1.2 (Decomposição de Iwasawa). *Qualquer elemento $g \in SL(2, \mathbb{C})$ pode ser escrito unicamente como $g = kan$, onde $k \in SU(2)$, $a \in A$ e $n \in N$.*

Observação 1.3. *Esta decomposição não é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Seja

$$g = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Queremos escrever $g = kan$, o que é equivalente a escrever $k^{-1}g = an$. Tomamos a base ortonormada $\{u_1, u_2\}$ de \mathbb{C}^2 formada pelos vectores

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e formamos a base $\{gu_1, gu_2\}$. Aplicamos o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormada $\{v_1, v_2\}$ onde

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{y\bar{y} + z\bar{z}}} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad v_2 = \sqrt{y\bar{y} + z\bar{z}} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} - \frac{x\bar{y} + w\bar{z}}{\sqrt{y\bar{y} + z\bar{z}}} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Seja k^{-1} é a matriz que leva v_j para u_j ($j = 1, 2$). Então

$$k^{-1} = \frac{1}{\sqrt{y\bar{y} + z\bar{z}}} \begin{pmatrix} z & -y \\ \bar{y} & \bar{z} \end{pmatrix} \in SU(2),$$

e

$$k^{-1}g = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y\bar{y} + z\bar{z}}} & 0 \\ \frac{x\bar{y} + w\bar{z}}{\sqrt{y\bar{y} + z\bar{z}}} & \sqrt{y\bar{y} + z\bar{z}} \end{pmatrix} \in AN,$$

o que mostra a existência da decomposição. Para mostrar unicidade basta notar que $SU(2) \cap AN = \{1\}$. A aplicação

$$SU(2) \times A \times N \rightarrow SL(2, \mathbb{C}), \quad (k, a, n) \mapsto kan$$

é suave e a sua inversa também é suave porque, como se pode ver acima, v_1 e v_2 dependem suavemente de g . □

Vemos assim que como variedade suave,

$$SL(2, \mathbb{C}) \cong S^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{C},$$

o que mostra que $SL(2, \mathbb{C})$ é um grupo conexo, simplesmente conexo e não compacto.

Em termos da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ existe uma decomposição correspondente. Nesse caso $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ é a subálgebra formada pelas matrizes

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

e $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ a subálgebra formada pelas matrizes

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Então temos uma decomposição de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ como soma directa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, que é chamada a decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ [12]. Esta é uma decomposição de \mathfrak{g} como espaço vectorial, embora cada termo da soma directa seja uma subálgebra de Lie de \mathfrak{g} .

1.2.3 $SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz

Considere-se o espaço \mathbb{R}^4 com coordenadas (x_0, x_1, x_2, x_3) . Definimos uma métrica semi-riemanniana neste espaço como

$$\langle x, y \rangle_m = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

onde $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ e $y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$. Notemos que esta métrica é descrita pela matriz

$$m = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O *espaço de Minkowski* \mathbb{M}^4 é definido como \mathbb{R}^4 com a métrica semi-riemanniana definida acima, a que chamamos *métrica de Minkowski*.

Um vector $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{M}^4$ diz-se

1. de *tipo-espaço* se $\langle x, x \rangle_m > 0$;
2. de *tipo-tempo* se $\langle x, x \rangle_m < 0$;
3. *nulo* se $\langle x, x \rangle_m = 0$.

A componente x_0 diz-se a *componente temporal* de x e o terno (x_1, x_2, x_3) a *parte espacial* de x .

Definição 1.4. O grupo $O(3, 1)$ é o grupo de transformações $S : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{M}^4$ tais que $\langle Sx, Sy \rangle_m = \langle x, y \rangle_m, \forall x, y \in \mathbb{M}^4$.

Estamos a dizer que, em termos de matrizes,

$$O(3, 1) = \{S \in GL(4, \mathbb{R}) \mid (Sx)^T m(Sy) = x^T m y\},$$

o que significa que $S^T m S = m$, e assim que $\det S = \pm 1$. Assim definimos o subgrupo $SO(3, 1) \subset O(3, 1)$ como

$$SO(3, 1) = \{S \in O(3, 1) \mid \det S = 1\}.$$

$O(3, 1)$ tem quatro componentes conexas

$$\begin{aligned} L_+^\uparrow : \det S = 1, \quad \text{sgn } S_{00} = 1, \quad &\text{que contém } I = \text{diag}(1, 1, 1, 1) \\ L_-^\uparrow : \det S = -1, \quad \text{sgn } S_{00} = 1, \quad &\text{que contém } P = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \\ L_-^\downarrow : \det S = -1, \quad \text{sgn } S_{00} = -1, \quad &\text{que contém } T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \\ L_+^\downarrow : \det S = 1, \quad \text{sgn } S_{00} = -1, \quad &\text{que contém } PT = \text{diag}(-1, -1, -1, -1). \end{aligned}$$

O grupo de Lorentz é definido como a componente conexa da identidade em $O(3, 1)$, *i.e.* como L_+^\uparrow . Notemos que $SO(3)$ está naturalmente incluído em L_+^\uparrow através do monomorfismo $SO(3) \rightarrow L_+^\uparrow, g \mapsto 1 \oplus g$, onde $1 \oplus g$ designa a matriz

$$1 \oplus g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}.$$

A acção de um elemento de $SO(3)$ sobre um vector $x \in \mathbb{M}^4$ deixa a sua componente temporal inalterada e efectua uma rotação da sua parte espacial em torno de um eixo fixo.

Lema 1.5. *O grupo de Lorentz L_+^\uparrow tem dimensão real 6.*

Demonstração. Basta notar que $\dim L_+^\uparrow = \dim SO(3, 1)$ e que $\dim SO(3, 1) = 6$, o que pode ser verificado facilmente. \square

Mostremos que $SL(2, \mathbb{C})$ é a cobertura universal do grupo de Lorentz L_+^\uparrow . Suponhamos que temos um vector $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ no espaço de Minkowski \mathbb{M}^4 . Formamos a matriz hermitiana

$$X = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_0 - x_1 \end{pmatrix}.$$

A aplicação que envia $x \in \mathbb{M}^4$ para $X \in \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$, onde $\text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ designa o espaço vectorial das matrizes hermitianas 2×2 , dá-nos um isomorfismo de espaços vectoriais reais $\mathbb{M}^4 \xrightarrow{\cong} \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$, onde $-\det X = -(x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = \langle x, x \rangle_m$. Seja g um elemento de $SL(2, \mathbb{C})$. Consideremos a aplicação $\phi_g : \text{Herm}(\mathbb{C}^2) \rightarrow \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$,

$$X \mapsto gXg^\dagger.$$

É imediato que ϕ_g é um isomorfismo linear em $\text{Herm}(\mathbb{C}^2)$, que a aplicação $g \mapsto \phi_g$ é suave e que $\det(\phi_g X) = \det X = -\langle x, x \rangle_m$. Como \mathbb{M}^4 e $\text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ são isomorfos ϕ_g define um elemento $\tau(g)$ em $SO(3, 1)$, pois $\phi_{gh} = \phi_g \phi_h$ para todos $g, h \in SL(2, \mathbb{C})$. Obtemos assim um homomorfismo de grupos de Lie $\tau : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(3, 1)$. Como $SL(2, \mathbb{C})$ é conexo, a imagem de τ está contida na componente conexa da identidade em $O(3, 1)$, *i.e.* $\text{im } \tau \subset L_+^\uparrow$. Da definição de ϕ_g é imediato que as matrizes g e $-g$ vão corresponder ao mesmo elemento do grupo de Lorentz L_+^\uparrow .

Lema 1.6. *O núcleo de τ é $\{-I, I\}$.*

Demonstração. Seja $g \in SL(2, \mathbb{C})$ e suponhamos que $gXg^\dagger = X$ para qualquer $X \in \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$. Tomando $X = I$ obtém-se $g^\dagger = g^{-1}$. Escrevemos $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e tomamos $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. A igualdade $gXg^{-1} = X$ torna-se

$$\begin{pmatrix} ad & -ba \\ cd & -cb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o que nos dá $ad = 1$, $b = 0$ e $c = 0$, o que significa que $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Considerando $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ obtém-se $a^2 = 1$, o que significa que $a = \pm 1$. \square

Lema 1.7. *A imagem de τ em $O(3, 1)$ é a componente conexa da identidade, o grupo de Lorentz. A aplicação τ é assim um epimorfismo $2 \rightarrow 1$ de núcleo $\{\pm I\}$ e $SL(2, \mathbb{C})$ é a cobertura universal de L_+^\uparrow .*

Demonstração. Já vimos que $\text{im } \tau \subset L_+^\uparrow$ pois $SL(2, \mathbb{C})$ é conexo. Para mostrar o lema basta notar que $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$ é um subgrupo de Lie de L_+^\uparrow de dimensão 6, que é a dimensão de L_+^\uparrow . Como L_+^\uparrow é conexo temos que $L_+^\uparrow = \text{im } \tau$. \square

1.3 Acções e Espaços Homogéneos

Sejam G um grupo de Lie e \mathcal{M} uma variedade suave.

Definição 1.8. *Dizemos que G actua suavemente à direita em \mathcal{M} se a todo o elemento $g \in G$ corresponde uma transformação de \mathcal{M} , designada $p \mapsto p \triangleleft g$, onde $p \in \mathcal{M}$ tal que*

1. *A aplicação $\mathcal{M} \times G \rightarrow \mathcal{M}$, $(p, g) \mapsto p \triangleleft g$ é suave;*
2. *$p \triangleleft (gh) = (p \triangleleft g) \triangleleft h$ para todos $g, h \in G$, $p \in \mathcal{M}$;*
3. *$p \triangleleft 1 = p$.*

A *órbita* de um ponto $p \in \mathcal{M}$ sob G é o conjunto

$$p \triangleleft G = \{p \triangleleft g \mid g \in G\}.$$

A acção de G em \mathcal{M} diz-se *transitiva* se existe apenas uma órbita, *i.e.* cada ponto de \mathcal{M} pode ser transformado em qualquer outro ponto através de um elemento de G .

Definição 1.9. *O estabilizador de $p \in \mathcal{M}$ à acção à direita de G é o subgrupo $G_p \subseteq G$ definido como*

$$G_p = \{g \in G \mid p \triangleleft g = p\}.$$

Seja \mathcal{M} uma variedade suave com uma acção transitiva à direita de um grupo de Lie G . Fixemos um ponto $p \in \mathcal{M}$ e seja $G_p \subset G$ o seu estabilizador. Então, do facto da acção à direita de G sobre \mathcal{M} e $G_p \backslash G$ ser transitiva, é imediato que a aplicação

$$G_p \backslash G \rightarrow \mathcal{M}, \quad G_p g \mapsto p \triangleleft g,$$

é uma bijecção do conjunto $G_p \backslash G = \{G_p g \mid g \in G\}$, de G_p -cosets à esquerda, para \mathcal{M} .

Definição 1.10. *Uma variedade suave \mathcal{M} com uma acção transitiva à direita de um grupo de Lie G diz-se um espaço homogéneo de G se para todo $p \in \mathcal{M}$ a bijecção $G_p \backslash G \rightarrow \mathcal{M}$, $G_p g \mapsto p \triangleleft g$, é um difeomorfismo.*

Observação 1.11. *Pode mostrar-se [19] que para grupos lineares, i.e. grupos de matrizes, a condição de G ter um número contável de componentes conexas é suficiente para que a bijecção acima entre $G_p \backslash G$ e \mathcal{M} seja um difeomorfismo.*

Além disso, temos uma projecção $G \rightarrow G_p \backslash G \cong \mathcal{M}$, $g \mapsto p \triangleleft g$, que é claramente uma submersão. Seja G um grupo de Lie, \mathcal{M} um espaço homogéneo sob a acção à direita de G e $p \in \mathcal{M}$. Seja ainda $G_p \subseteq G$ o estabilizador de p à acção de G .

Lema 1.12. *G_p é um subgrupo fechado de G .*

Demonstração. Seja $\{g_n\} \subset G_p$ uma sucessão convergente (em G) para g . Então,

$$p \triangleleft g = \lim_n (p \triangleleft g_n) = \lim_n p = p,$$

o que significa que $g \in G_p$. □

1.4 Representações Unitárias

Definição 1.13. *Seja G um grupo de Lie. Uma representação unitária V , de G , é constituída por um espaço de Hilbert complexo e separável, a que também chamamos V , e um homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow \mathcal{U}(V)$, onde $\mathcal{U}(V)$ é o grupo de todos os operadores unitários em V .*

A acção de $g \in G$ em $v \in V$ através deste homomorfismo é designada $\rho(g)v$. Vamos requerer sempre que para qualquer $v \in V$, a aplicação $g \mapsto \rho(g)v$ seja contínua como aplicação de G para V , o que é equivalente a requerer que o operador unitário em V definido pela acção de $g \in G$ seja fortemente contínuo ¹.

Definição 1.14. *Sejam V_1 e V_2 duas representações unitárias de G .*

1. *Um intertwiner entre V_1 e V_2 é um operador linear limitado $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ tal que*

$$\phi(g \triangleright_1 v) = g \triangleright_2 \phi(v).$$

2. *V_1 e V_2 dizem-se isomorfas (como representações unitárias) se existe um intertwiner invertível entre V_1 e V_2 que é uma isometria.*

Designemos o conjunto dos intertwiners entre V_1 e V_2 por $\mathcal{I}(V_1, V_2)$, que é claramente um espaço vectorial.

Definição 1.15. *Uma representação unitária V de G diz-se irredutível se, além de $\{0\}$ e do próprio V , não existir qualquer outro subespaço fechado de V que seja G -invariante.*

Lema 1.16 (Schur). *Uma representação unitária, V , de G é irredutível se e só se $\mathcal{I}(V, V) \cong \mathbb{C}$.*

Demonstração. Suponhamos $\mathcal{I}(V, V) \cong \mathbb{C}$ e que V contém um subespaço $W \neq \{0\}$ que é G -invariante. O complemento ortogonal de W em V , designado W^\perp , é também um subespaço fechado G -invariante, pois a acção de G é unitária. Então,

$$\mathcal{I}(W, W) \oplus \mathcal{I}(W^\perp, W^\perp) \subseteq \mathcal{I}(V, V).$$

Agora, $\mathcal{I}(V, V) \cong \mathbb{C}$ implica que $\mathcal{I}(W^\perp, W^\perp) = 0$, pois assumimos que $W \neq \{0\}$. Assim $W^\perp = \{0\}$ e $W = V$, o que mostra que V não tem subespaços fechados G -invariantes além de $\{0\}$ e V .

¹Significa que se $g_n \rightarrow g$ em G , então $\rho(g_n)v \rightarrow \rho(g)v, \forall v \in V$.

Reciprocamente, suponhamos que V é irredutível. Qualquer operador limitado, A , em V pode ser escrito como

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*), \quad (1.1)$$

onde A^* designa o operador adjunto de A . Cada um dos termos nesta expressão é um operador auto-adjunto. Repare-se que A é um intertwiner se e só se A^* também o é, pois se A é um intertwiner então, $\forall v, w \in V, g \in G$,

$$\begin{aligned} \langle v, A^*g \triangleright_G w \rangle &= \langle Av, g \triangleright_G w \rangle \\ &= \langle g^{-1} \triangleright_G Av, w \rangle \\ &= \langle Ag^{-1} \triangleright_G v, w \rangle \\ &= \langle g^{-1} \triangleright_G v, A^*w \rangle \\ &= \langle v, g \triangleright_G A^*w \rangle, \end{aligned}$$

o que mostra que A^* é um intertwiner. Da mesma forma se mostra que, se A^* é um intertwiner então A também o é. Vemos assim que A é um intertwiner se e só se os dois termos da equação 1.1 são intertwiners. Sem perda de generalidade, podemos assumir assim que A é autoadjunto. Então, pelo teorema espectral para operadores auto-adjuntos limitados,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda.$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ define uma projecção ortogonal num subespaço de V . Lembremos que a aplicação $\lambda \mapsto E_\lambda$ é monótona não decrescente, contínua à direita, e $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda = 1_V$, $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda = 0$. Pode mostrar-se que A comuta com a G -acção se e só se, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ comuta com a G -acção, [21]. Assim, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda V$ é um subespaço fechado G -invariante de V que, pela irredutibilidade de V , tem que ser $\{0\}$ ou o próprio V , *i.e.* $E_\lambda = 0$ ou $E_\lambda = 1_V$. Como E_λ é monótona não decrescente e contínua à direita, vemos que

$$E_\lambda = \begin{cases} 1_V & \lambda_0 \leq \lambda \\ 0 & \lambda < \lambda_0 \end{cases},$$

onde $\lambda_0 = \inf\{\lambda \mid E_\lambda = 1_V\}$. Daqui segue que

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} ((\lambda_0 + \epsilon)1_V - (\lambda_0 - \epsilon)0) = \lambda_0 1_V.$$

□

Todos estes conceitos introduzidos para grupos de Lie têm análogo em termos de álgebras de Lie. Conceitos como invariante, redutível, irredutível e isomorfa são definidos para álgebras de Lie da mesma forma que o foram para grupos de Lie. Existe também uma versão do Lema de Schur para álgebras de Lie [7]. A condição correspondente a unitariedade para uma representação de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é que

$$\langle \phi(X)u, v \rangle + \langle u, \phi(X)v \rangle = 0, \quad \forall u, v \in V, X \in \mathfrak{g},$$

i.e. $\phi(x) \in \mathfrak{u}(V)$.

Capítulo 2

Fibrados e Conexões

2.1 Fibrados homogêneos

Começamos por relembrar algumas definições básicas e fixar notações e convenções que serão seguidas no decorrer deste trabalho.

2.1.1 Fibrados Principais

Definição 2.1. *Sejam B uma variedade e H um grupo de Lie. Um H -fibrado principal (diferenciável) sobre B com grupo H consiste numa variedade P e uma acção à esquerda de H em P satisfazendo as seguintes condições:*

1. H actua livremente em P : $h \triangleright p = hp$, $p \in P, h \in H$.
2. B é o espaço quociente pela relação de equivalência induzida por H , $B = H \backslash P$, e a projecção canónica $\pi : P \rightarrow B$ é suave.
3. Todo o ponto de B tem uma vizinhança¹ U para a qual $\pi^{-1}(U)$ é isomorfa com $U \times H$ no sentido em que existe um difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times H$ que tem a forma $\psi(p) = (\pi(p), \phi(p))$, onde ϕ é uma aplicação de $\pi^{-1}(U)$ em H tal que $\phi(hp) = \phi(p)h^{-1}$, $\forall p \in \pi^{-1}(U), h \in H$ ².

¹Por convenção, vizinhanças são sempre conjuntos abertos.

²Esta condição é denominada trivialidade local.

Designamos um fibrado principal por (P, B, H, π) , $P \rightarrow B$ ou simplesmente por P . P é chamado o espaço total, $B = H \backslash P$ o espaço de base, π a projecção e H o grupo de estrutura.

A condição 3 implica que a projecção canónica é uma submersão, pelo que podemos concluir que, para cada $b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ é uma subvariedade fechada de P . A $\pi^{-1}(b)$ chamamos a *fibra sobre b*. Vê-se que cada fibra é difeomorfa a H , pois se p é um ponto de $\pi^{-1}(b)$, então $\pi^{-1}(b)$ é o conjunto de pontos hp , $h \in H$ (é a fibra através de p).

Por definição, um fibrado principal é sempre localmente trivial. É possível começar com esta condição e construir todo o fibrado. Para isso tomamos uma cobertura por abertos $\{U_\alpha\}$ de B e, para $p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, definimos uma aplicação $\phi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow H$ por

$$\phi_{\beta\alpha}(\pi(p)) = \phi_\beta(p)(\phi_\alpha(p))^{-1}.$$

Nota-se que esta aplicação está bem definida. À família de aplicações $\phi_{\beta\alpha}$ chamamos *funções de transição* do fibrado P correspondentes à cobertura por abertos considerada. Repare-se que se temos $u \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ tal que $u = \pi(p)$ então temos

$$\phi_{\alpha\beta}(u)\phi_{\beta\gamma}(u) = \phi_\alpha(p)(\phi_\beta(p))^{-1}\phi_\beta(p)(\phi_\gamma(p))^{-1} = \phi_\alpha(p)(\phi_\gamma(p))^{-1} = \phi_{\alpha\gamma}(u),$$

a que chamamos a *condição de cociclo*. Além disso, temos as propriedades adicionais $\phi_{\beta\alpha}\phi_{\alpha\beta} = 1$ em $U_\beta \cap U_\alpha$ e $\phi_{\alpha\alpha} = 1$ em U_α , que são imediatas.

Exemplo 2.2. Um exemplo elementar de um fibrado principal é o chamado *fibrado principal trivial*: Tomamos $P = B \times H$ e a projecção no primeiro factor. Existe uma acção livre de H à esquerda em P dada por $h' \triangleright (m, h) = (m, h'h)$. Neste caso $\phi(h) = h^{-1}$. É imediato que se trata de um fibrado principal. \diamond

Exemplo 2.3. O H -fibrado principal $G \rightarrow H \backslash G$.

Consideremos agora o caso mais interessante, e fundamental para o que segue, em que o espaço de base B é um espaço homogéneo sob a acção à direita de um grupo de Lie G . Recordemos que um espaço homogéneo de G é uma variedade diferencial onde está

definida uma acção transitiva suave de G . A acção de $g \in G$ sobre $b \in B$ é designada como $b \triangleleft g$ e ao subgrupo $G_b = \{g \in G \mid b \triangleleft g = b\}$ chamamos estabilizador do ponto b . Existe uma correspondência 1-1 entre pontos de B e os cosets à direita $G_b g$ de G_b em G , onde G_b é o estabilizador de b (Note-se que todos os estabilizadores G_b de pontos b de um espaço homogéneo são isomorfos) [3, pag 42].

Tomando $P = G$ e H um subgrupo de Lie fechado de G , o espaço $H \backslash G$ é o espaço de cosets à direita, *i.e.* $H \backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$ onde a acção à direita de $g' \in G$ é $Hg \triangleleft g' = Hgg'$. Neste caso temos também uma projecção $\pi : G \rightarrow H \backslash G$, que envia $g \in G$ para o coset Hg (é uma submersão suave, pois o pushforward $\pi_* : T_g G \rightarrow T_{Hg}(H \backslash G)$ é claramente uma aplicação sobrejectiva para todo o $g \in G$). O estabilizador de $H1 \in H \backslash G$ é exactamente o subgrupo H , noutros pontos vai ser um seu conjugado como se pode ver: $Hg \triangleleft (g^{-1}Hg) = Hg$, que é claramente isomorfo a H . O Lema 2.4 mostra que, com a projecção canónica, $G \rightarrow H \backslash G$ é um fibrado principal com fibra H . Neste caso, além da acção à esquerda de H sobre o espaço total, que dá a estrutura ao fibrado, existe ainda a acção natural de G (transitiva) à direita e que comuta com a acção à esquerda de H . Em geral, um H -fibrado principal não tem esta acção transitiva de G , o que torna este caso muito especial. \diamond

Lema 2.4. $G \rightarrow H \backslash G$ é um fibrado principal com fibra H .

Demonstração. Basta mostrar a trivialidade local. Como G actua (à direita) de forma transitiva em G e $H \backslash G$ basta mostrar a trivialidade em vizinhanças de $H1 \in H \backslash G$, pois as trivializações em vizinhanças de outros pontos podem ser obtidas por translações à direita em G e $H \backslash G$. Sejam \mathfrak{h} e \mathfrak{g} as álgebras de Lie de H e G respectivamente. Então \mathfrak{h} é uma subálgebra de \mathfrak{g} e podemos formar a decomposição $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ com $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$ o subespaço vectorial complementar de \mathfrak{h} . Tomamos o subconjunto $V = \exp(\mathfrak{v}) \subseteq G$. Então, $H \cap V = 1$ e localmente, $G \cong H \times V$ pela aplicação que envia $(h, v) \in H \times V$ para $hv \in G$. Assim sabemos que existem $U_1 \subseteq H$, $U_2 \subseteq V$ e $U \subseteq G$ tais que $U_1 \times U_2 \cong U$. Além disso, $\pi^{-1}(H \backslash U) = HU_2 \cong H \times U_2$, porque $\forall h_1, h_2 \in H, x, y \in U_2$,

$$h_1 x = h_2 y \Leftrightarrow h_2^{-1} h_1 = y x^{-1} \in H \cap V = \{1\}.$$

Cada ponto de $\pi^{-1}(H \setminus U)$ é da forma $g = h'u$, onde $h' \in H$, $u \in U_2$. Para terminar a prova definimos a aplicação $\phi : \pi^{-1}(H \setminus U) \rightarrow H$ como $\phi(g) = h'^{-1}$. Repare-se que $\phi(hg) = (hh')^{-1} = \phi(g)h^{-1}$, e daqui segue que a aplicação $\psi : \pi^{-1}(H \setminus U) \rightarrow U_2 \times H$, com $\psi(g) = (\pi(g), \phi(g))$, é um isomorfismo (no sentido da definição 2.1). \square

Exemplo 2.5. $SU(2) \rightarrow U(1) \setminus SU(2)$

Qualquer elemento g de $SU(2)$ pode ser escrito como

$$g = \begin{pmatrix} z^0 & z^1 \\ -\bar{z}^1 & \bar{z}^0 \end{pmatrix}, \quad z^0, z^1 \in \mathbb{C}, |z^0|^2 + |z^1|^2 = 1,$$

e identificamos $U(1) \subset SU(2)$ com o subgrupo a 1-parâmetro formado pelas matrizes diagonais em $SU(2)$:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

O quociente $U(1) \setminus SU(2)$ é determinado identificando

$$\begin{pmatrix} z^0 e^{-i\alpha} & z^1 e^{-i\alpha} \\ -\bar{z}^1 e^{i\alpha} & \bar{z}^0 e^{i\alpha} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z^0 & z^1 \\ -\bar{z}^1 & \bar{z}^0 \end{pmatrix}.$$

Olhando para a primeira linha vemos que estamos a identificar $e^{-i\alpha}(z^0, z^1)$ com (z^0, z^1) e temos assim uma projecção³ $SU(2) \rightarrow \mathbb{C}P^1$,

$$\begin{pmatrix} z^0 & z^1 \\ -\bar{z}^1 & \bar{z}^0 \end{pmatrix} \mapsto [z^0 : z^1] = [1 : 0] \begin{pmatrix} z^0 & z^1 \\ -\bar{z}^1 & \bar{z}^0 \end{pmatrix},$$

e além disso, é imediato que a acção de $SU(2)$ sobre $\mathbb{C}P^1$ é transitiva e o estabilizador do ponto $[1 : 0]$ é precisamente $U(1)$, pois

$$[1 : 0] \begin{pmatrix} z^0 & z^1 \\ -\bar{z}^1 & \bar{z}^0 \end{pmatrix} = [1 : 0] \Leftrightarrow z^1 = 0$$

e assim $|z^0|^2 = 1$. Vemos assim (Lema 2.4) que temos um fibrado principal $SU(2) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ com grupo de estrutura $U(1)$. Vejamos as trivializações. Em $U_\alpha \subset \mathbb{C}P^1$, correspondente a $z^0 \neq 0$,

$$[z^0 : z^1] = [1 : \frac{z^1}{z^0}] \mapsto \frac{z^1}{z^0} = z,$$

³Note-se que $(z^0, z^1) \neq (0, 0)$ porque $\det g \neq 0$.

e em U_β , correspondente a $z^1 \neq 0$,

$$[z^0 : z^1] = \left[\frac{z^0}{z^1} : 1 \right] \mapsto \frac{z^0}{z^1} = w.$$

Repare-se que $w = 1/z$ em $U_\alpha \cap U_\beta$. Podemos agora definir as trivializações locais do fibrado $SU(2) \rightarrow \mathbb{C}P^1$,

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times U(1), \quad (z^0, z^1) \mapsto (z^1/z^0, |z^0|/z^0),$$

$$\psi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times U(1), \quad (z^0, z^1) \mapsto (z^0/z^1, |z^1|/z^1).$$

Nota-se que $\phi_\alpha(z^0, z^1) = |z^0|/z^0$ e $\phi_\beta(z^0, z^1) = |z^1|/z^1$ e portanto as funções de transição são

$$\phi_{\beta\alpha}(z) = \phi_\beta(z^0, z^1)\phi_\alpha^{-1}(z^0, z^1) = \frac{|z^1|}{z^1} \frac{z^0}{|z^0|} = \frac{|z|}{z} \in U(1), \quad z \in U_\alpha \cap U_\beta$$

e é imediato que $\phi_{\alpha\beta}(w) = |w|/w$. \diamond

Exemplo 2.6. $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow D \backslash SL(2, \mathbb{C})$

Seja D o grupo de matrizes da forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\} \right\}$$

que actua à esquerda em $SL(2, \mathbb{C})$ por multiplicação. Como $D \cong \mathbb{C}^*$ identificamos a matriz $\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in D$ com $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Para $\lambda \in D$ e $g \in SL(2, \mathbb{C})$ fazemos a identificação habitual $\lambda g \sim g$, ou seja

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1}x & \lambda^{-1}y \\ \lambda w & \lambda z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}.$$

Procedendo como no exemplo anterior, vemos que vamos obter dois pontos em $\mathbb{C}P^1$, um correspondente à primeira linha e outro correspondente à segunda. Mas estes dois pontos não podem ser iguais, pois $\det g = 1$. Temos então a projecção,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \rightarrow ([x : y], [w : z]), [x : y] \neq [w : z] \in \mathbb{C}P^1.$$

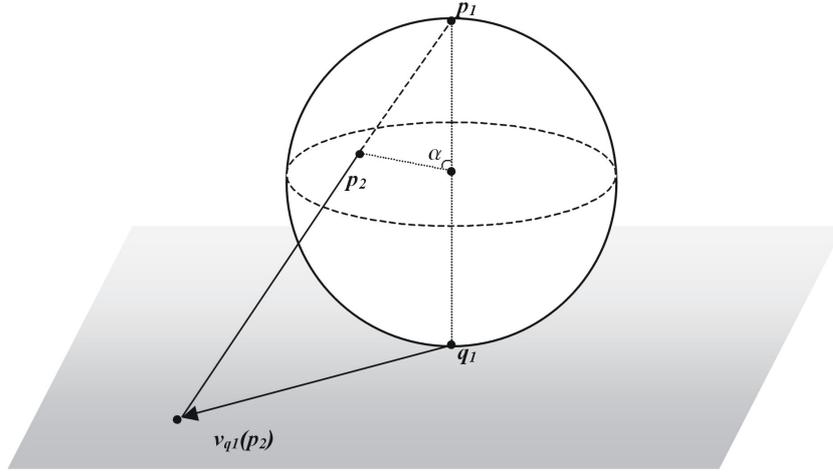


Figura 2.1: Construção geométrica do difeomorfismo entre $D \setminus SL(2, \mathbb{C})$ e TS^2 .

Note-se que

$$([x : y], [w : z]) = ([1 : 0], [0 : 1]) \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix},$$

pelo que o estabilizador do ponto $([1 : 0], [0 : 1])$ é exactamente D .

Vemos assim que

$$D \setminus SL(2, \mathbb{C}) \cong \{(p_1, p_2) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \mid p_1 \neq p_2\}$$

Mostremos que este espaço é difeomorfo ao fibrado tangente da esfera, TS^2 , construindo um difeomorfismo concreto entre estes dois espaços. Os dois pontos p_1 e p_2 em $\mathbb{C}P^1$ podem ser utilizados para definir um vector tangente a $\mathbb{C}P^1$ em p_1 . Para isso precisamos de duas aplicações: $A : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ a aplicação que leva cada ponto p no seu antipodal q e $\pi_p : \mathbb{C}P^1 \setminus \{p\} \rightarrow T_q(\mathbb{C}P^1)$ a projecção estereográfica, onde identificamos o plano, contido em \mathbb{R}^3 , tangente a $\mathbb{C}P^1$ em q_1 com $T_{q_1}(\mathbb{C}P^1)$ (fig. 2.1).

Agora fixemos p_1 e tomemos a projecção estereográfica de p_2 relativamente a p_1 . Esta projecção define unicamente um vector tangente $v_{q_1}(p_2) = \pi_{p_1}(p_2)$ em q_1 que pode ser levado a $T_{p_1}\mathbb{C}P^1$ através de A . (um cálculo simples de geometria elementar mostra que $\|v_{p_1}(p_2)\| = 2 \cot(\alpha/2)$, onde α é o ângulo definido pelos raios-vector de p_1 e p_2 com origem no centro da esfera).

Deixando p_2 variar vamos obter todo o espaço tangente em p_1 . Mais, esta correspondência é claramente 1-1 e suave, pelo que obtemos um difeomorfismo entre $\mathbb{C}P^1 - \{p_1\}$ e $T_{p_1}(S^2)$. Finalmente, deixando p_1 variar também, obtém-se todo o fibrado tangente TS^2 . Daqui segue que $D \backslash SL(2, \mathbb{C})$ e TS^2 são difeomorfos.

Temos assim o fibrado principal (Lema 2.4) $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow D \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong TS^2$, com grupo de estrutura D e projecção

$$\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \mapsto ([x : y], [w : z]).$$

Para obter a estrutura de fibrado é necessário especificar as trivializações e as funções de transição e para isso temos que definir um atlas em $D \backslash SL(2, \mathbb{C})$ primeiro. Deste modo vamos tomar um ponto $p = \left[\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \right] \in D \backslash SL(2, \mathbb{C})$ e o aberto $U_\alpha \subset D \backslash SL(2, \mathbb{C})$ correspondente a $x \neq 0$. Podemos formar o elemento $\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in D$ que actua à esquerda sobre um representante de p levando-o a

$$\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^{-1}y \\ xw & xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}$$

e assim definimos o mapa $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^2$,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \mapsto (x^{-1}y, xw) = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Repare-se que esta aplicação está bem definida, *i.e.* não depende do representante da classe de equivalência considerada, e é injectiva.

Consideremos agora o aberto $U_\beta \subset D \backslash SL(2, \mathbb{C})$ correspondente a $y \neq 0$. Procedendo como o caso anterior obtém-se

$$\begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^{-1} & 1 \\ yw & yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ \beta_1\beta_2 - 1 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

o que define o mapa $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^2$,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \mapsto (xy^{-1}, yz) = (\beta_1, \beta_2).$$

Do anteriormente exposto, é imediato que φ_β está bem definida e é injectiva.

Note-se que $U_\alpha \cup U_\beta = D \setminus SL(2, \mathbb{C})$. Assim, para verificar que $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)\}$ define um atlas basta mostrar que os mapas são compatíveis. Em $U_\alpha \cap U_\beta$ ⁴,

$$\begin{aligned}\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) &= \varphi_\beta \left(\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_1 \alpha_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_1(1 + \alpha_1 \alpha_2) \right), \\ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(\beta_1, \beta_2) &= \varphi_\alpha \left(\begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ \beta_1 \beta_2 - 1 & \beta_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{1}{\beta_1}, \beta_1(\beta_1 \beta_2 - 1) \right),\end{aligned}$$

e vê-se logo que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ e $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ são funções suaves.

Agora definimos as trivializações $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times D$ do fibrado $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow D \setminus SL(2, \mathbb{C})$ como

$$\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \mapsto \left(\left(\left[1 : \frac{y}{x} \right], [xw : xz] \right), \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) \mapsto \left((\alpha_1, \alpha_2), \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right)$$

e

$$\begin{aligned}\psi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) &\rightarrow U_\beta \times D, \\ \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} &\mapsto \left(\left(\left[\frac{x}{y} : 1 \right], [yw : yz] \right), \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right) \mapsto \left((\beta_1, \beta_2), \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right),\end{aligned}$$

e assim as aplicações $\phi_\gamma : \pi^{-1}(U_\gamma) \rightarrow D$ são

$$\phi_\alpha \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad \phi_\beta \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Podemos agora obter as funções de transição em $U_\alpha \cap U_\beta$ como

$$\phi_{\beta\alpha}(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \phi_{\alpha\beta}(\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} \beta_1^{-1} & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}.$$

◇

Exemplo 2.7. $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow P \setminus SL(2, \mathbb{C})$

Consideremos o subgrupo $P \subset SL(2, \mathbb{C})$ formado pelas matrizes da forma

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ z & \lambda \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

⁴repare-se que tanto α_1 como β_1 não se anulam em $U_\alpha \cap U_\beta$.

Nota-se que $P = D \ltimes Z$, onde D é o subgrupo diagonal considerado no exemplo (2.6) e Z o subgrupo $Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C} \right\}$, onde a acção de D em Z é

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{-2}z & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostremos que $P \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}P^1$. Para isso tomamos um elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ e identificamos

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ z & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}a & \lambda^{-1}b \\ za + \lambda c & zb + \lambda d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Temos assim uma projecção $SL(2, \mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}P^1$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto [a : b] = [1 : 0] \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

É imediato que a acção é suave e transitiva e que o estabilizador de $[1 : 0]$ é exactamente P . Repare-se que

$$\mathbb{C}P^1 \cong P \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong (D \backslash P) \backslash (D \backslash SL(2, \mathbb{C})),$$

o que permite identificar $T\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ com $D \backslash SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow P \backslash SL(2, \mathbb{C})$ como fibrados.

Note-se também que $Z \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ através da acção

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b) = (1, 0) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

onde é claro que o estabilizador de $(1, 0) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ é precisamente Z . Assim,

$$\mathbb{C}P^1 \cong P \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong (Z \backslash P) \backslash (Z \backslash SL(2, \mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Agora definimos as trivializações locais do fibrado $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow P \backslash SL(2, \mathbb{C})$ como (vide exemplos 2.5 e 2.6):

$$U_\alpha(a \neq 0) : \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{b}{a}, \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -c & a \end{pmatrix} \right) = \left(\alpha_1, \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -c & a \end{pmatrix} \right),$$

$$U_\beta(b \neq 0) : \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{a}{b}, \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ -d & b \end{pmatrix} \right) = \left(\beta_1, \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ -d & b \end{pmatrix} \right),$$

onde as aplicações $\phi_\gamma : \pi^{-1}(U_\gamma) \rightarrow P$ são

$$\phi_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \phi_\beta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ -d & b \end{pmatrix}.$$

Assim, em $U_\alpha \cap U_\beta$, as funções de transição vão ser

$$\phi_{\beta\alpha}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & 0 \\ -1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \phi_{\alpha\beta}(\beta_1) = \begin{pmatrix} \beta_1^{-1} & 0 \\ 1 & \beta_1 \end{pmatrix}.$$

◇

Definição 2.8. *Sejam (P_1, B_1, H_1, π_1) e (P_2, B_2, H_2, π_2) fibrados principais. Um morfismo de fibrados principais entre P_1 e P_2 consiste numa aplicação suave $f : P_1 \rightarrow P_2$ e num homomorfismo $f' : H \rightarrow H'$ tal que*

$$f(hp) = f'(h)f(p), \quad \forall h \in H, p \in P.$$

O morfismo $f : P_1 \rightarrow P_2$ preserva fibras e assim induz uma aplicação $f_B : B_1 \rightarrow B_2$ entre os espaços de base, onde $f_B \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$.

Exemplo 2.9. A aplicação identidade $\text{id} : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ é um morfismo entre os fibrados principais $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow D \backslash SL(2, \mathbb{C})$ e $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow P \backslash SL(2, \mathbb{C})$. Neste caso, a aplicação f' é simplesmente a inclusão $D \hookrightarrow P$. Este morfismo preserva as fibras e induz claramente uma aplicação $D \backslash SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow P \backslash SL(2, \mathbb{C})$ que é a projecção $([x : y], [w, z]) \rightarrow ([x, y])$. ◇

2.1.2 Fibrados Vectoriais Associados

Dado um fibrado principal, podemos construir *fibrados vectoriais associados*. Primeiro recordemos a definição de um fibrado vectorial.

Definição 2.10. *Sejam E e B variedades suaves e V um espaço vectorial de dimensão finita. Um fibrado vectorial (suave) é um quádruplo (E, B, V, π) , onde*

1. A projecção $\pi : E \rightarrow B$ é suave;

2. Para cada $p \in B$, $\pi^{-1}(p)$ é um espaço vectorial isomorfo a V ($\pi^{-1}(p)$ diz-se a fibra sobre p);
3. E é localmente trivial, i.e. para cada $p \in B$ existe uma vizinhança U e um difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V$ tal que a restrição a $\pi^{-1}(p)$ é uma aplicação linear $\pi^{-1}(p) \rightarrow \{p\} \times V$.

Note-se que para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a composição $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} = \psi_{\alpha\beta}$ é uma aplicação $U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(V)$. À semelhança dos fibrados principais, designaremos um fibrado vectorial por $E \rightarrow B$ ou simplesmente por E quando a restante estrutura for clara do contexto.

Seja P um H -fibrado principal. Utilizando uma representação V de H vamos construir o fibrado vectorial associado a P . Formamos o produto $P \times V$ e definimos a acção à esquerda por $h \triangleright (p, v) = (hp, \rho(h)v)$. O fibrado vectorial associado $E = P \times_\rho V$ é obtido tomando o quociente pela acção de H , onde identificamos

$$(p, v) \sim (hp, \rho(h)v), \quad p \in P, h \in H, v \in V.$$

A projecção $\pi_E : E \rightarrow B$ é definida por $\pi_E(p, v) = \pi(p)$. Esta projecção está bem definida porque $\pi(p) = \pi(hp)$. Seja $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times H$ uma trivialização local de P . ψ define uma aplicação $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow H$ (vide 3 da definição 2.1). A trivialização local em $E = P \times_\rho V$ é dada pelo difeomorfismo $\psi_E : \pi_E^{-1}(U) \rightarrow U \times V$,

$$\psi_E([p, v]) = (\pi_E([p, v]), \rho(\phi(p))v) = (\pi(p), \rho(\phi(p))v).$$

Esta aplicação está bem definida porque

$$\begin{aligned} \psi_E([hp, \rho(h)v]) &= (\pi(hp), \rho(\phi(hp))\rho(h)v) = (\pi(p), \rho(\phi(p)h^{-1})\rho(h)v) \\ &= (\pi(p), \rho(\phi(p))v) = \psi_E([p, v]). \end{aligned}$$

Também se vê que a restrição a $\pi_E^{-1}(p)$ é um isomorfismo linear com $\{p\} \times V$, pois $\rho(h) \in \text{GL}(V)$.

Definimos as funções de transição em $P \times_\rho V$ como

$$f_{\beta\alpha} = \rho(\phi_{\beta\alpha}) \text{ em } U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset,$$

onde $\phi_{\beta\alpha}$ são as funções de transição de P .

A condição de cociclo é automaticamente satisfeita:

$$f_{\alpha\beta}f_{\beta\gamma} = \rho(\phi_{\alpha\beta})\rho(\phi_{\beta\gamma}) = \rho(\phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\gamma}) = \rho(\phi_{\alpha\gamma}) = f_{\alpha\gamma} \quad \text{em } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset,$$

assim como as identidades $f_{\alpha\alpha} = 1$ em U_α e $f_{\alpha\beta}f_{\beta\alpha} = 1$ em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, onde 1 designa a identidade em $GL(V)$.

Exemplo 2.11. Voltando ao caso $G \rightarrow H \backslash G$ (ver exemplo 2.3) podemos tomar uma representação (ρ, V) de H e formar o fibrado vectorial associado $G \times_\rho V \rightarrow H \backslash G$. Repare-se que a acção transitiva de G à direita no espaço de base (que é um espaço homogéneo de G) levanta para uma acção, também à direita, no fibrado: $[g, v] \triangleleft g' = [gg', v]$. Fibrados com esta propriedade dizem-se *homogéneos*. A partir de agora vamos fixar terminologia e chamar *fibrado vectorial homogéneo* a fibrados desta forma ($E = G \times_\rho V \rightarrow H \backslash G$).

Quando consideramos um fibrado homogéneo, a relação de equivalência em $G \times_\rho V$ fica

$$(g_1, v_1) \sim (g_2, v_2) \Leftrightarrow g_2 g_1^{-1} \in H \text{ e } \rho(g_2 g_1^{-1}) v_1 = v_2.$$

◇

Como se vai tornar claro quando se discutir o processo de quantização geométrica, vai interessar-nos um tipo muito especial de fibrado homogéneo. Nesses fibrados cada fibra é uma cópia do plano complexo \mathbb{C} , e por essa razão dizem-se *fibrados de linha*. Vamos de seguida apresentar alguns exemplos de fibrados de linha, designados doravante por L . Nestes exemplos vamos utilizar apenas representações unitárias.

Exemplo 2.12. $L = SU(2) \times_\rho \mathbb{C} \longrightarrow U(1) \backslash SU(2) \cong \mathbb{C}P^1$.

Para construir o fibrado de linha $L = SU(2) \times_\rho \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ associado ao fibrado principal $SU(2) \rightarrow U(1) \backslash SU(2)$ (exemplo 2.5) é necessário definir uma representação de

$U(1)$ em \mathbb{C} . Assim identificando $U(1) = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1\}$ definimos

$$\rho_n(\alpha)a = \alpha^n a, \quad a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}.$$

Das construções do fibrado vectorial associado (vide p. 28) e do fibrado homogêneo (exemplo 2.11), e identificando

$$\alpha \leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix},$$

já sabemos que $L = SU(2) \times_{\rho_n} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ é um fibrado de linha com funções de transição

$$f_{\beta\alpha}(z) = \rho_n(\phi_{\beta\alpha}(z)) = \frac{z^n}{|z|^n}, \quad f_{\alpha\beta}(w) = \rho_n(\phi_{\alpha\beta}(w)) = \frac{w^n}{|w|^n}.$$

◇

Exemplo 2.13. $L = SL(2, \mathbb{C}) \times_{\rho} \mathbb{C} \rightarrow D \setminus SL(2, \mathbb{C})$.

Para construir o fibrado de linha associado $L = SL(2, \mathbb{C}) \times_{\xi} \mathbb{C} \rightarrow D \setminus SL(2, \mathbb{C})$ (exemplo 2.6) definimos uma representação unitária de D em \mathbb{C} como

$$\rho_{\xi} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} c = \lambda^{i\xi} \bar{\lambda}^{i\bar{\xi}} c, \quad (2.1)$$

onde $c \in \mathbb{C}, \xi = \frac{a+ib}{2}, a, b \in \mathbb{R}$. A expressão 2.1 define realmente uma representação unitária de D em \mathbb{C} , pois é imediato que $\rho_{\xi}(d_1 d_2) = \rho_{\xi}(d_1) \rho_{\xi}(d_2) \forall d_1, d_2 \in D$ e além disso, escrevendo $\lambda = r e^{i\theta}$, vê-se logo que $\lambda^{i\xi} \bar{\lambda}^{i\bar{\xi}} = r^{ia} e^{-ib\theta} \in U(1), \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Como funções de transição vamos ter:

$$f_{\beta\alpha}(\alpha_1, \alpha_2) = \rho_{\xi}(\phi_{\beta\alpha}(\alpha_1, \alpha_2)) = \alpha_1^{i\xi} \bar{\alpha}_1^{i\bar{\xi}}, \quad f_{\alpha\beta}(\beta_1, \beta_2) = \rho_{\xi}(\phi_{\alpha\beta}(\beta_1, \beta_2)) = \beta_1^{i\xi} \bar{\beta}_1^{i\bar{\xi}}.$$

◇

Exemplo 2.14. $L = SL(2, \mathbb{C}) \times_{\rho} \mathbb{C} \rightarrow P \setminus SL(2, \mathbb{C})$.

Para construir o fibrado de linha associado $L = SL(2, \mathbb{C}) \times_{\xi} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ (exemplo 2.7) definimos uma representação unitária de P por extensão trivial a Z da representação de D definida no exemplo 2.13:

$$\rho_{\xi} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ z & \lambda \end{pmatrix} c = \lambda^{i\xi} \bar{\lambda}^{i\bar{\xi}} c.$$

É imediato que as funções de transição vão ser

$$f_{\beta\alpha}(\alpha_1) = \rho_\xi(\phi_{\beta\alpha}(\alpha_1)) = \alpha_1^{i\xi} \bar{\alpha}_1^{i\bar{\xi}}, \quad f_{\alpha\beta}(\beta_1) = \rho_\xi(\phi_{\alpha\beta}(\beta_1)) = \beta_1^{i\xi} \bar{\beta}_1^{i\bar{\xi}},$$

pois a representação ρ_ξ de D foi estendida trivialmente a Z . \diamond

Para prosseguir definimos aplicações entre fibrados vectoriais.

Definição 2.15. *Sejam (E_1, B_1, V_1, π_1) e (E_2, B_2, V_2, π_2) fibrados vectoriais.*

1. *Uma aplicação suave $f_E : E_1 \rightarrow E_2$ diz-se um morfismo de fibrados vectoriais se*
 - (a) *f_E respeita fibras, i.e. envia fibras de E_1 para fibras de E_2 .*
 - (b) *a restrição de f_E a cada fibra é uma transformação linear.*
2. *(E_1, B, V_1, π_1) e (E_2, B, V_2, π_2) dizem-se equivalentes ($E_1 \cong E_2$) se f_E é um difeomorfismo.*

Um morfismo f_E de fibrados vectoriais induz naturalmente uma aplicação suave, $f_B : B_1 \rightarrow B_2$, tal que $\pi_2 \circ f_E = f_B \circ \pi_1$, i.e. o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f_E} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f_B} & B_2. \end{array}$$

Mostremos que um morfismo de fibrados principais induz naturalmente um morfismo entre os fibrados vectoriais associados. Na notação das definições 2.8 e 2.15 sejam P_1 e P_2 fibrados principais e E_1, E_2 os fibrados vectoriais associados respectivos, onde ρ_1 e ρ_2 são as representações de H_1 e H_2 em V_1 e V_2 respectivamente e f um morfismo entre P_1 e P_2 (vide definição 2.8). Seja ainda $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ um intertwiner (vide definição 1.14).

Formamos a aplicação $f \times \psi : P_1 \times V_1 \rightarrow P_2 \times V_2$. Projectando nos quocientes $P_j \times_{\rho_j} V_j$, ($j = 1, 2$), obtém-se uma aplicação suave $f_E : P_1 \times_{\rho_1} V_1 \rightarrow P_2 \times_{\rho_2} V_2$ que leva a classe de equivalência $[p, v]_{\rho_1(H_1)}$ para $[f(p), \psi(v)]_{\rho_2(f'(H_1))}$. f_E está bem definida porque para

$h \in H_2$,

$$\begin{aligned}
f_E[hp, \rho_1(h)v]_{\rho_1(H_1)} &= [f(hp), \psi(\rho_1(h)v)]_{\rho_2(f'(H_1))} \\
&= [f'(h)f(p), \rho_2(f'(h))\psi(v)]_{\rho_2(f'(H_1))} \\
&= [f(p), \psi(v)]_{\rho_2(f'(H_1))}.
\end{aligned}$$

Além disso, é imediato que f_E respeita as fibras e que a restrição a cada fibra é uma transformação linear.

Exemplo 2.16. Designemos por $L_D \rightarrow D \backslash SL(2, \mathbb{C})$ o fibrado de linha construído no exemplo (2.13) e $L_P \rightarrow P \backslash SL(2, \mathbb{C})$ o fibrado de linha do exemplo (2.14). Existe um morfismo natural entre L_D e L_P . Seja f o morfismo entre os fibrados principais $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow D \backslash SL(2, \mathbb{C})$ e $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow P \backslash SL(2, \mathbb{C})$ do exemplo 2.9. A aplicação $f_L : L_D \rightarrow L_P$

$$[g, c]_D \mapsto [f(g), c]_P, \quad c \in \mathbb{C},$$

é um morfismo entre L_D e L_P .

Sejam agora π_D e π_P as projecções em L_D e L_P respectivamente. A aplicação entre os espaços de base, induzida por f_L , é claramente a projecção $D \backslash SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow P \backslash SL(2, \mathbb{C})$,

$$([x : y], [w : z]) \xrightarrow{pr_1} [x : y].$$

É imediato que $\pi_P \circ f_L = pr_1 \circ \pi_D$, *i.e.* o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc}
L = SL(2, \mathbb{C}) \times_{\xi_D} \mathbb{C} & \xrightarrow{f_L} & L = SL(2, \mathbb{C}) \times_{\xi_P} \mathbb{C} \\
\pi_D \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_P \\
TCP^1 \cong D \backslash SL(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{pr_1} & P \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong CP^1
\end{array}$$

◇

2.1.3 Fibrados Vectoriais Holomorfos

Definição 2.17. *Sejam E e B variedades complexas e V um espaço vectorial complexo de dimensão finita tal que (E, B, V, π) é um fibrado vectorial complexo sobre B . Diz-se um fibrado vectorial holomorfo se*

1. A projecção $\pi : E \rightarrow B$ é holomorfa;
2. As trivializações locais $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times V$ são funções biholomorfas;

As condições 1 e 2 da definição 2.17 são equivalentes a requerer que as funções de transição $f_{\alpha\beta}$ sejam holomorfas.

Nesta secção vamos tratar apenas de fibrados de linha holomorfos. É imediato que o fibrado $L_{\rho_n} : SU(2) \times_{\rho_n} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$, construído no exemplo 2.12, não é holomorfo, pois as funções de transição

$$f_{\beta\alpha}(z) = \rho_n(\phi_{\beta\alpha}(z)) = \frac{z^n}{|z|^n}, \quad f_{\alpha\beta}(w) = \rho_n(\phi_{\alpha\beta}(w)) = \frac{w^n}{|w|^n},$$

não são funções holomorfas.

Estendemos a $P \subset SL(2, \mathbb{C})$ o caracter ρ_n introduzido no exemplo 2.12,

$$\rho'_n \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ z & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Recordando que $P \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}P^1$ (vide exemplo 2.14) é imediato que a extensão de ρ_n a P define um fibrado de linha $L_{\rho'_n} = SL(2, \mathbb{C}) \times_{\rho'_n} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ com funções de transição holomorfas,

$$f_{\beta\alpha}(z) = z^n, \quad f_{\alpha\beta}(w) = w^n.$$

Exemplo 2.18. Mostremos que os fibrados $SU(2) \times_{\rho_n} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ e $SL(2, \mathbb{C}) \times_{\rho'_n} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$, são isomorfos *como fibrados suaves*.

$$\begin{array}{ccc} SU(2) \times_{\rho_n} \mathbb{C} & \xrightarrow{\cong} & SL(2, \mathbb{C}) \times_{\rho'_n} \mathbb{C} \\ \pi_{\rho_n} \downarrow & & \downarrow \pi_{\rho'_n} \\ \mathbb{C}P^1 \cong U(1) \backslash SU(2) & = & P \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}P^1 \end{array}$$

Definimos uma aplicação suave $f_L : SU(2) \times_{\rho_n} \mathbb{C} \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \times_{\rho'_n} \mathbb{C}$ através da inclusão $SU(2) \hookrightarrow SL(2, \mathbb{C})$:

$$[g, v]_{\rho_n} \mapsto [g, v]_{\rho'_n}.$$

Cada elemento $g \in SL(2, \mathbb{C})$ pode ser escrito na forma $x = qh$ (decomposição de Iwasawa. cf. Sec. 1.2.2), onde $h \in SU(2)$ e q pertence ao subgrupo $Q \subset SL(2, \mathbb{C})$,

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ z & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}_+, z \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Estamos assim a dizer que $[g, v] \in SL(2, \mathbb{C}) \times_{\rho_n} \mathbb{C}$ pode ser escrito como

$$[g, v]_{\rho_n} = [qh, v]_{\rho_n} = [h, \rho_n^{-1}(q)v]_{\rho_n},$$

o que mostra imediatamente que f_L é bijectiva e que a restrição de f_L a cada fibra é linear. Daqui segue que f_L é um isomorfismo. Repare-se que $\pi_{\rho'_n} \circ f_L = \text{id}_{\mathbb{C}P^1} \circ \pi_{\rho_n}$ i.e. a aplicação induzida por f_L entre os espaços de base é simplesmente a aplicação identidade em $\mathbb{C}P^1$. \diamond

2.2 Secções em fibrados homogéneos e funções equi-variantes no grupo

Definição 2.19. *Uma secção suave (resp. holomorfa) num fibrado vectorial (resp. holomorfo) $E \rightarrow B$ é uma aplicação suave (resp. holomorfa) $\sigma : B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma$ é a aplicação identidade em B . Se σ estiver definida apenas num aberto $U \subset B$ dizemos que $\sigma_U : U \rightarrow E$ é uma secção local.*

Neste trabalho vamos considerar apenas secções suaves ou holomorfas, pelo que utilizaremos sempre o termo secção para designar uma secção suave (resp. holomorfa). Recordemos que um fibrado principal só admite secções globais se for globalmente trivial, mas num fibrado vectorial existem sempre secções globais, como por exemplo a secção nula.

Definição 2.20. *O conjunto de todas as secções suaves (resp. holomorfas) num fibrado vectorial (resp. holomorfo) $E \rightarrow B$ designa-se $\Gamma^\infty(E)$ (resp. $\Gamma^\omega(E)$).*

Lema 2.21. *$\Gamma(E)$ é um espaço linear.*

Demonstração. Definimos a soma de secções e a multiplicação por um escalar como

$$\begin{aligned}(\sigma_1 + \sigma_2)(b) &= \sigma_1(b) + \sigma_2(b), \quad \forall b \in B, \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E) \\ (\alpha\sigma)(b) &= \alpha(\sigma(b)) \quad \forall b \in B, \alpha \in \mathbb{K}, \sigma \in \Gamma(E).\end{aligned}$$

□

Podemos também considerar $\Gamma(E)$ um *módulo* sobre $C^\infty(B, \mathbb{K})$ (resp. $C^\omega(B, \mathbb{K})$). Se temos uma função α em $C^\infty(B, \mathbb{K})$ e $\sigma \in \Gamma(E)$ (resp. $C^\omega(B, \mathbb{K})$) então $(\alpha\sigma)(b) = \alpha(b)\sigma(b)$ é uma secção em E .

Agora consideremos um fibrado principal P (com grupo estrutural H), o fibrado vectorial associado $E = P \times_\rho V$, onde (ρ, V) é uma representação de H , e o espaço vectorial $C^\infty(P, V)$ (resp. $C^\omega(P, V)$).

Definição 2.22. *Uma função $f \in C^\infty(P, V)$ (resp. $C^\omega(P, V)$) diz-se H -equivariante se comuta com a acção de H em P ,*

$$\rho(h)f(p) = f(hp), \quad \forall p \in P, h \in H.$$

O conjunto de todas as funções H -equivariantes em $C^\infty(P, V)$ (resp. $C^\omega(P, V)$) designa-se $C_\rho^\infty(P, V)$ (resp. $C_\rho^\omega(P, V)$).

É imediato que

$$\forall f \in C^\infty(B, \mathbb{K}), \forall g \in C_\rho^\infty(P, V) : fg \in C_\rho^\infty(P, V),$$

verificando-se o mesmo no caso holomorfo o que significa que, vistos como álgebras, $C_\rho^\infty(P, V)$ é um ideal em $C^\infty(P, V)$ (resp. $C_\rho^\omega(P, V)$ um ideal em $C^\omega(P, V)$).

Lema 2.23. *Existe um isomorfismo linear entre $\Gamma^\infty(E)$ e $C_\rho^\infty(P, V)$ (resp. entre $\Gamma^\omega(E)$ e $C_\rho^\omega(P, V)$).*

Demonstração. Mostremos apenas o caso suave. A prova para o caso holomorfo é semelhante. Sejam $f \in C_\rho^\infty(P, V)$ e $\bar{p} = \pi_E(p)$. Então $\sigma(\bar{p}) = [p, f(p)]$ define unicamente uma secção $\sigma \in \Gamma(E)$, porque $\forall h \in H$,

$$\sigma(\overline{hp}) = [hp, f(hp)] = [hp, \rho(h)f(p)] = [p, f(p)] = \sigma(\bar{p}).$$

Além disso, é claro que $\pi_E \circ \sigma(\bar{p}) = \pi_E([p, f(p)]) = \pi(p) = \bar{p}$.

Por outro lado, qualquer secção $\sigma(\bar{p}) = [p, v_p]$ define uma função H -equivariante $f \in C_\rho^\infty(P, V)$ como

$$f(p) = v_p.$$

Repare-se que f está bem definida e é equivariante, pois

$$\sigma(h\bar{p}) = [hp, v_{hp}] = [hp, f(hp)] = [p, \rho(h^{-1})f(hp)]$$

e $\sigma(h\bar{p}) = \sigma(\bar{p})$ força $f(hp) = \rho(h)f(p)$. □

No caso de um fibrado homogéneo podemos utilizar funções H -equivariantes em G para descrever secções no fibrado e vice-versa.

Exemplo 2.24. Com as representações ρ_n de $U(1)$ e ξ de $D \subset SL(2, \mathbb{C})$ e a sua extensão a $P \subset SL(2, \mathbb{C})$, definidas nos exemplos 2.12, 2.13 e 2.14,

1. Uma função D -equivariante em $SL(2, \mathbb{C})$ é uma função $f : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todos $\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in D$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$,

$$f\left(\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \lambda^{i\xi} \bar{\lambda}^{i\bar{\xi}} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right);$$

2. Uma função P -equivariante em $SL(2, \mathbb{C})$ é uma função $f : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todos $\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ z & \lambda \end{pmatrix} \in P$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$,

$$f\left(\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ z & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \lambda^{i\xi} \bar{\lambda}^{i\bar{\xi}} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right).$$

3. Uma função $U(1)$ -equivariante em $SU(2)$ é uma função $f : SU(2) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todos $\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in U(1)$, $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$,

$$f\left(\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\right) = \alpha^n f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\right);$$

Lembremos que o exemplo 2.18 mostrou que os fibrados $SU(2) \times_{\rho_n} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ e $SL(2, \mathbb{C}) \times_{\rho_n} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ são isomorfos. Uma secção no fibrado $SU(2) \times_{\rho_n} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ está assim associada a uma função $f : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ com a propriedade,

$$f(g) = f(qh) = \rho_n(q)f(h),$$

onde se utilizou a decomposição de Iwasawa para $g \in SL(2, \mathbb{C})$, $g = qh$, com $q \in Q$, $h \in SU(2)$ (vide exemplo 2.18) e $\rho_n(q) = \rho_n \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ z & a \end{pmatrix} = a^n$.

◇

2.3 Conexões e curvatura

2.3.1 Conexões em Fibrados Principais

Seja $P \rightarrow B = H \backslash P$ um fibrado principal e T_pP o seu espaço tangente em $p \in P$. Considere-se o subespaço linear Ver_pP de $T_p(P)$ formado pelos vectores tangentes à fibra através de p .

Definição 2.25. *Uma conexão em P é a atribuição única de um subespaço linear Hor_pP de T_pP a cada $p \in P$ tal que*

1. $T_pP = Ver_pP \oplus Hor_pP$;
2. $Hor_{hp}P = (L_h)_*Hor_pP$, $\forall p \in P, h \in H$;
3. Hor_pP depende suavemente de p .

A Ver_pP chamamos o subespaço vertical e a Hor_pP o subespaço horizontal de T_pP .

Da condição 1 todo o vector X_p em T_pP pode ser escrito unicamente como

$$X_p = X_p^H + X_p^V, \quad X_p^H \in Hor_pP, X_p^V \in Ver_pP.$$

A condição 3 significa que se X é um campo vectorial suave em P então os campos vectoriais X^H e X^V também são suaves.

Vejam os de uma forma mais concreta como é construído o subespaço vertical $\text{Ver}_p P$. Tomamos um elemento A da álgebra de Lie \mathfrak{h} de H . Pela acção à esquerda $\exp(tA)p$ define um caminho através de $p \in P$. Como $\pi(\exp(tA)p) = \pi(p)$ este caminho está contido na fibra de p . Definimos um vector $A^\sharp \in T_p P$ por $A^\sharp f(p) = \left. \frac{d}{dt} f(\exp(tA)p) \right|_{t=0}$, onde f é uma função suave em P arbitrária. O vector A^\sharp pertence claramente a $\text{Ver}_p P$. Desta forma definimos um vector A^\sharp em cada ponto de P e construímos um campo vectorial A^\sharp , a que chamamos *campo vectorial fundamental* gerado por A . A aplicação $\sharp : \mathfrak{h} \rightarrow \text{Ver}_p P$ dada por $A \mapsto A^\sharp$ é um isomorfismo de espaços vectoriais, pois como a acção de H em P é livre, $\{A_1^\sharp, \dots, A_k^\sharp\}$ ($k = \dim H$) são linearmente independentes.

Esta definição de conexão é puramente geométrica. Note-se que a projecção $T_p P \rightarrow \text{Ver}_p P \cong \mathfrak{h}$ define uma 1-forma em P com valores em \mathfrak{h} , pois a projecção é linear em cada fibra e suave quando varia p .

Definição 2.26. *Uma 1-forma de conexão é uma 1-forma diferencial $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{h})$ tal que*

1. $\omega(A^\sharp) = A, \quad A \in \mathfrak{h};$
2. $L_h^* \omega = Ad_h \omega, \quad h \in H.$

A segunda condição significa que para $X \in T_p P$,

$$L_h^* \omega_{hp}(X) = \omega_{hp}((L_h)_* X) = h \omega_p(X) h^{-1}.$$

Lema 2.27. *Existe uma relação bijectiva entre conexões em P e 1-formas de conexão $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{h})$.*

Demonstração. Do comentário anterior à definição 2.26 vemos que uma conexão em P determina uma 1-forma em $\Omega^1(P, \mathfrak{h})$, e é imediato que satisfaz 1 e 2. Por outro lado, tomando uma 1-forma de conexão ω , definimos $\text{Hor}_p P$ como

$$\text{Hor}_p P = \ker \omega_p = \{X \in T_p P \mid \omega_p(X) = 0\}.$$

É imediato que $T_p P = \text{im } \omega_p \oplus \ker \omega_p \cong \text{Ver}_p P \oplus \ker \omega_p$. Assim basta mostrar que $\ker \omega_p$ satisfaz $(L_h)_* \ker \omega_p = \ker \omega_{hp}$, o que é simples pois para $X \in \ker \omega_p$

$$\omega_{hp}((L_h)_* X) = L_h^* \omega_{hp}(X) = h \omega_p(X) h^{-1} = 0.$$

Como $(L_h)_*$ é uma aplicação invertível concluimos que qualquer vector em $\ker \omega_{hp}$ é igual a $(L_h)_* X$ para algum $X \in \ker \omega_p$. \square

Voltemos ao caso $P = G$ e $H \subset G$ um subgrupo de Lie fechado (exemplo 2.3). Assumimos que a álgebra de Lie de G admite a decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ onde $\text{Ad}_H(\mathfrak{v}) \subseteq \mathfrak{v}$.

Lema 2.28. *A projecção em \mathfrak{h} da 1-forma de Maurer-Cartan invariante à direita em G define uma 1-forma de conexão em $G \rightarrow H \backslash G$ com conexão correspondente $\text{Hor}_g G = R_{g*} \mathfrak{v}$.*

Demonstração. Como G actua transitivamente (à direita) sobre ele próprio e sobre $H \backslash G$ basta considerar a identidade em G . A propriedade 1 da definição 2.26 é imediata. Para a propriedade 2 basta lembrar que por definição, a 1-forma de conexão de Maurer-Cartan invariante à direita é $(dgg^{-1})_g(X_g) = (R_{g^{-1}})_* X_g$. Então, para $X \in \mathfrak{g} \cong T_1 G$,

$$\begin{aligned} (L_h^*) \text{proj}_{\mathfrak{h}}((dgg^{-1})_h(X)) &= \text{proj}_{\mathfrak{h}}((dgg^{-1})_h(L_{h*} X)) \\ &= \text{proj}_{\mathfrak{h}}(R_{h^{-1}*} L_{h*} X) \\ &= \text{proj}_{\mathfrak{h}}(\text{Ad}_h X) = \text{Ad}_h(\text{proj}_{\mathfrak{h}} X). \end{aligned}$$

Mostremos que a conexão correspondente é $\text{Hor}_g G = R_{g*} \mathfrak{v}$. É imediato que $\text{Hor}_1 G \cong \mathfrak{v}$. Tomamos $X \in \mathfrak{v}$. Basta mostrar que $\text{proj}_{\mathfrak{h}}(dgg^{-1}(X_g)) = 0$ sse $X_g \in \text{Hor}_g G$, o que é simples pois

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathfrak{h}}((dgg^{-1})_g(X_g)) &= \text{proj}_{\mathfrak{h}}((dgg^{-1})_g((R_g)_* X)) \\ &= \text{proj}_{\mathfrak{h}}((R_{g^{-1}})_*(R_g)_* X) \\ &= \text{proj}_{\mathfrak{h}}(X) = 0. \end{aligned}$$

\square

Passemos agora à descrição local das conexões, o que nos vai permitir descrever a conexão em termos das coordenadas no espaço de base. Embora um fibrado possa não admitir secções globais sabemos que existem sempre secções locais. Por exemplo a trivialização $\psi_\alpha : U_\alpha \times H \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ (ver 2.1) pode ser utilizada para definir uma secção local $\sigma_\alpha = \psi_\alpha^{-1}(p, 1)$. Definimos uma 1-forma \mathcal{A}_α em U_α com valores em \mathfrak{h} como

$$\mathcal{A}_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{h}),$$

onde ω é a 1-forma de conexão em P . Para que se possa descrever a conexão ω em P através da colecção $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ tem que haver uma condição de compatibilidade, que vamos agora determinar. Para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ repare-se⁵ que $\sigma_\beta = \phi_{\alpha\beta} \sigma_\alpha$, onde $\phi_{\alpha\beta}$ são as funções de transição. Sejam $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, X um campo vectorial arbitrário em B e γ_t uma sua curva integral *i.e.* $\gamma_t : [0, 1] \rightarrow B$, $\gamma_0 = x$, $\gamma'_0 = X$. Escrevemos $\sigma_\beta(\gamma_t) = \sigma_\beta(t)$ para simplificar a notação. Da regra de Leibniz obtém-se

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta*} X &= \left. \frac{d}{dt} \sigma_\beta(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (\phi_{\alpha\beta}(t) \sigma_\alpha(t)) \right|_{t=0} \\ &= \phi_{\alpha\beta}(x) (\sigma_{\alpha*} X) + \left. \frac{d}{dt} \phi_{\alpha\beta}(t) \right|_{t=0} \sigma_\alpha(x) \\ &= (L_{\phi_{\alpha\beta}})_* (\sigma_{\alpha*} X) + \left. \frac{d}{dt} \phi_{\alpha\beta}(t) \right|_{t=0} \phi_{\alpha\beta}^{-1}(x) \sigma_\beta(x), \end{aligned}$$

Notemos que no segundo termo $d\phi_{\alpha\beta}(X) \phi_{\alpha\beta}^{-1}(x) = \left. \frac{d}{dt} [\phi_{\alpha\beta}(t) \phi_{\alpha\beta}^{-1}(x)] \right|_{t=0}$ é um vector de \mathfrak{h} . Concluimos assim que o segundo termo da expressão acima para $\sigma_{\beta*} X$ consiste simplesmente no campo vectorial $(d\phi_{\alpha\beta}(X) \phi_{\alpha\beta}^{-1})^\#$ no ponto $\sigma_\beta(x) \in P$.

A condição de compatibilidade pode agora ser obtida aplicando ω :

$$\omega(\sigma_{\beta*} X) = L_{\phi_{\alpha\beta}}^* \omega(\sigma_{\alpha*} X) + d\phi_{\alpha\beta}(X) \phi_{\alpha\beta}^{-1} = \phi_{\alpha\beta} \omega(\sigma_{\alpha*} X) \phi_{\alpha\beta}^{-1} + d\phi_{\alpha\beta}(X) \phi_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Como X é um campo vectorial arbitrário no espaço de base concluimos que a condição de consistência procurada é

$$\mathcal{A}_\beta = \phi_{\alpha\beta} \mathcal{A}_\alpha \phi_{\alpha\beta}^{-1} + d\phi_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta}^{-1}.$$

⁵ $\sigma_\alpha = \psi_\alpha^{-1}(p, 1)$ e $\psi_\alpha = \phi_{\alpha\beta} \psi_\beta$.

A cada elemento da colecção $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ tal que a condição de consistência é satisfeita chama-se um *potencial de gauge*.

Uma conexão permite-nos introduzir a noção de levantamento horizontal de caminhos e campos vectoriais.

Definição 2.29. *Seja $P \xrightarrow{\pi} B$ um fibrado principal e $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ um caminho em B . Um caminho $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$ diz-se o levantamento horizontal de γ se $\pi\tilde{\gamma} = \gamma$ e $\tilde{\gamma}'_t \in \text{Hor}_{\gamma_t} P$.*

Da definição da 1-forma de conexão, $\omega(\tilde{\gamma}'_t) = 0$, que é uma equação diferencial ordinária (EDO no que segue). Fixando uma condição inicial, o Teorema de existência e unicidade da solução garante-nos que o levantamento horizontal existe e é único, o que mostramos a seguir.

Vamos determinar a forma local do levantamento horizontal de caminhos. Consideramos um caminho γ_t no espaço de base contido num único aberto trivializante U_α . Tomemos uma secção local σ_α tal que $\sigma_\alpha(\gamma_0) = \tilde{\gamma}_0$.

Lema 2.30. *O levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ de γ pode ser escrito unicamente, depois de fixar uma condição inicial, na forma $\tilde{\gamma}_t = h_\alpha(\gamma_t)\sigma_\alpha(\gamma_t)$ com $h_\alpha(\gamma_t) \in H$.*

Demonstração. $\tilde{\gamma}'_t$ é horizontal sse $\omega(\tilde{\gamma}'_t) = 0$, e daqui segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(\tilde{\gamma}'_t) = \omega\left(h'_\alpha(\gamma_t)\sigma_\alpha(\gamma_t) + h_\alpha(\gamma_t)\frac{d}{dt}\sigma_\alpha(\gamma_t)\right) \\ &= \omega(h'_\alpha(\gamma_t)\sigma_\alpha(\gamma_t)) + \omega\left(h_\alpha(\gamma_t)\frac{d}{dt}\sigma_\alpha(\gamma_t)\right) \\ &= \omega(h'_\alpha(\gamma_t)h_\alpha^{-1}(\gamma_t)\tilde{\gamma}_t) + h_\alpha(\gamma_t)\omega\left(\frac{d}{dt}\sigma_\alpha(\gamma_t)\right)h_\alpha^{-1}(\gamma_t) \\ &= h'_\alpha(\gamma_t)h_\alpha^{-1}(\gamma_t) + h_\alpha(\gamma_t)\omega((\sigma_\alpha)_*\gamma'_t)h_\alpha^{-1}(\gamma_t), \end{aligned}$$

ou seja, obtém-se a EDO

$$\frac{dh_\alpha(t)}{dt} = -h_\alpha(t)\omega(\sigma_{\alpha*}\gamma'_t), \quad (2.2)$$

com a condição inicial $h_\alpha(0) = 1$. O teorema de existência e unicidade das EDO garante-nos que a solução $h_\alpha(t)$ existe e é única. \square

Corolário 2.31. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ um caminho em M e $p_0 \in \pi^{-1}(\gamma_0)$. Então existe um levantamento horizontal único $\tilde{\gamma}_t$ para P tal que $\tilde{\gamma}_0 = p_0$.*

Como $\omega(\sigma_{\alpha*}X) = \sigma_{\alpha}^*\omega(X) = \mathcal{A}_{\alpha}(X)$ podemos reescrever a equação 2.2 como

$$\frac{dh_{\alpha}(t)}{dt} = -h_{\alpha}(t)\mathcal{A}_{\alpha}(X).$$

A expressão para o levantamento horizontal de um campo vectorial X em B pode assim ser escrita localmente como

$$\tilde{X} = \sigma_{\alpha*}X - \mathcal{A}_{\alpha}(X)^{\sharp}.$$

Em geral, uma conexão em P vai induzir uma conexão no fibrado vectorial associado $P \times_{\rho} V$, como vamos ver.

2.3.2 Conexões em Fibrados de Linha Homogêneos

Começamos por definir o conceito de conexão num fibrado vectorial, para depois particularizar ao caso dos fibrados de linha.

Definição 2.32. *Seja $E \rightarrow B$ um fibrado vectorial. Uma conexão ∇ em E é uma aplicação linear $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(B) \otimes \Gamma(E)$ tal que*

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma,$$

onde f é uma função suave em B e $\sigma \in \Gamma(E)$. Podemos tomar um campo vectorial, X , em B e contraí-lo com $\nabla\sigma$ para obter novamente uma secção em E , o que escrevemos como $\nabla_X\sigma$ e chamamos derivada covariante de σ ao longo de X .

Sejam $P \rightarrow H \backslash P = B$ um fibrado principal, ρ uma representação unitária de H em V e $E = P \times_{\rho} V$ o fibrado vectorial associado a P . Seja também $\sigma(\bar{p}) = [p, v(p)]$ uma secção em E , onde $v : P \rightarrow V$ é uma função suave H -equivariante. Sejam $\gamma_t : [0, 1] \rightarrow B$ um caminho em B , $\tilde{\gamma}_t$ o seu levantamento horizontal para P tal que $\tilde{\gamma}_0 = p$ e X o campo vectorial γ'_t .

Definição 2.33. A derivada covariante de σ em γ'_0 ao longo de X é definida como

$$\nabla_X \sigma = \left[\tilde{\gamma}_0, \frac{d}{dt} v(\tilde{\gamma}_t) \Big|_{t=0} \right].$$

Repare-se que $\nabla_X \sigma$ está bem definida, pois se $\tilde{\gamma}_t^h$ é um levantamento horizontal de γ_t tal que $\tilde{\gamma}_0^h = hp$ então $\tilde{\gamma}_t^h = h\tilde{\gamma}_t$ e

$$\left[\tilde{\gamma}_0^h, \frac{d}{dt} v(\tilde{\gamma}_t^h) \Big|_{t=0} \right] = \left[h\tilde{\gamma}_0, \frac{d}{dt} v(h\tilde{\gamma}_t) \Big|_{t=0} \right] = \left[h\tilde{\gamma}_0, \frac{d}{dt} \rho(h)v(\tilde{\gamma}_t) \Big|_{t=0} \right] = \left[\tilde{\gamma}_0, \frac{d}{dt} v(\tilde{\gamma}_t) \Big|_{t=0} \right].$$

Verifiquemos que ∇ satisfaz a regra de Leibnitz. Seja f uma função no espaço de base, formamos a nova secção $f\sigma(\bar{p}) = [p, f(\bar{p})v(p)]$ e obtém-se

$$\nabla_X(f\sigma) = \left[\tilde{\gamma}_0, \frac{d}{dt} f(\gamma_t)v(\tilde{\gamma}_t) \Big|_{t=0} \right] = \left[\tilde{\gamma}_0, X(f)v(p) + f(\bar{p}) \frac{d}{dt} v(\tilde{\gamma}_t) \Big|_{t=0} \right] = X(f)\sigma + f\nabla_X \sigma.$$

Para obtermos a expressão local da 1-forma de conexão tomamos uma secção local σ_α de P definida em $U_\alpha \subset B$ e o seu levantamento horizontal (para P) $\tilde{\gamma}_t = h_\alpha(\gamma_t)\sigma_\alpha(\gamma_t)$.

Localmente, a secção $s \in \Gamma(E)$ toma a forma

$$\begin{aligned} s_\alpha(\gamma_t) &= [\tilde{\gamma}_t, v(\tilde{\gamma}_t)] = [h_\alpha(\gamma_t)\sigma_\alpha(\gamma_t), v(h_\alpha(\gamma_t)\sigma_\alpha(\gamma_t))] \\ &= [h_\alpha(\gamma_t)\sigma_\alpha(\gamma_t), \rho(h_\alpha(\gamma_t))v(\sigma_\alpha(\gamma_t))] \\ &= [\sigma_\alpha(\gamma_t), v(\sigma_\alpha(\gamma_t))]. \end{aligned}$$

A expressão local da derivada covariante de s_α ao longo de X é assim

$$\begin{aligned} \nabla_X s_\alpha(\bar{p}) &= \left[\tilde{\gamma}_0, \frac{d}{dt} v(\tilde{\gamma}_t) \Big|_{t=0} \right] \\ &= \left[\tilde{\gamma}_0, \frac{d}{dt} v(h_\alpha(\gamma_t)\sigma_\alpha(\gamma_t)) \Big|_{t=0} \right] \\ &= \left[\tilde{\gamma}_0, \frac{d}{dt} \rho(h_\alpha(\gamma_t)) \Big|_{t=0} v(p) + \frac{d}{dt} v(\sigma_\alpha(\gamma_t)) \Big|_{t=0} \right] \\ &= \left[\tilde{\gamma}_0, \frac{d}{dt} \rho(h_\alpha(\gamma_t)) \Big|_{t=0} v(p) + (\sigma_\alpha)_* X v(p) \right]. \end{aligned}$$

Agora, $\frac{d}{dt} \rho(h_\alpha(\gamma_t)) \Big|_{t=0}$ é a representação infinitesimal de H correspondente a ρ , a que vamos chamar ρ' . Deste modo, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \rho(h_\alpha(\gamma_t)) \Big|_{t=0} = \rho' \left(\frac{d}{dt} h_\alpha(\gamma_t) \Big|_{t=0} \right) = -\rho'(\mathcal{A}_\alpha(X)).$$

Deste modo,

$$\left. \frac{d}{dt} \rho(h_\alpha(\gamma_t)) \right|_{t=0} v(p) + (\sigma_\alpha)_* X v(p) = \{-\rho'(\mathcal{A}_\alpha(X)) + (\sigma_\alpha)_* X\} v(p).$$

Tomando $v_\alpha(\bar{p}) = v(\sigma_\alpha(\bar{p}))$ obtém-se

$$\left. \frac{d}{dt} v_\alpha(\tilde{\gamma}_t) \right|_{t=0} = (-\rho'(\mathcal{A}_\alpha(X)) + X) v_\alpha,$$

e assim, a expressão local da derivada covariante de s_α ao longo de X é

$$\nabla_X s_\alpha = ds_\alpha - \rho'(\mathcal{A}_\alpha(X)) s_\alpha.$$

Calculemos explicitamente $\rho'(\mathcal{A}_\alpha)$ no caso do fibrado de linha $L_\xi = G \times_\xi \mathbb{C} \rightarrow H \backslash G$. Neste caso, ρ' é uma representação sobre \mathbb{C} e pode assim ser descrita completamente através de um *character* $\xi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}^*$. Um character em \mathfrak{h} é simplesmente uma função linear em \mathfrak{h} que pode ser identificado com um elemento $\xi \in \mathfrak{h}^*$, onde \mathfrak{h}^* é o espaço dual de \mathfrak{h} . Como a representação é unitária, o character toma valores em $\mathfrak{u}(1) \cong i\mathbb{R}$. Deste modo podemos escrever

$$\rho'(\mathcal{A}_\alpha) = i\xi(\mathcal{A}_\alpha) = i\langle \mathcal{A}_\alpha, \xi \rangle = i\vartheta_\alpha,$$

onde definimos $\vartheta_\alpha = \langle \mathcal{A}_\alpha, \xi \rangle \in \Omega^1(U_\alpha)$. Assim

$$\rho'(\text{proj}_{\mathfrak{h}} dgg^{-1}) = i\langle \text{proj}_{\mathfrak{h}} dgg^{-1}, \xi \rangle = i\langle dgg^{-1}, \xi \rangle.$$

Corolário 2.34. $\langle dgg^{-1}, \xi \rangle$, $\xi \in \mathfrak{h}^*$, induz uma conexão em $L_\xi = G \times_\xi \mathbb{C} \rightarrow H \backslash G$. Além disso, numa trivialização U_α , temos

$$\vartheta_\alpha = \sigma_\alpha^* \langle dgg^{-1}, \xi \rangle,$$

onde σ_α é a secção definida pela trivialização local, $\sigma_\alpha(\bar{g}) = \psi_L^{-1}(\bar{g}, 1)$ (vide p. 28). \square

Passemos agora à descrição da curvatura em fibrados de linha.

2.3.3 Curvatura em Fibrados de Linha

A curvatura num fibrado de linha L pode ser interpretada como a obstrução a encontrar secções locais horizontais que nunca se anulam, *i.e.* uma secção σ tal que $\nabla\sigma = 0$ [1]. É claro que num fibrado de linha existem sempre secções locais que nunca se anulam. Tomamos uma secção local qualquer $\sigma : U_\alpha \rightarrow L$ que nunca se anula e formamos a nova secção $f\sigma$, onde $f : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^*$. Exigindo que $f\sigma$ seja horizontal obtém-se uma equação diferencial para f ,

$$0 = \nabla f\sigma = df\sigma + f\nabla\sigma,$$

ou seja

$$\frac{df}{f} = d \ln f = -\frac{\nabla\sigma}{\sigma}.$$

(Lembremos que o logaritmo está definido a menos de um factor de $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, o que não importa para o argumento, pois o que nos interessa é $d \ln f$). Do lado esquerdo da equação temos uma 1-forma fechada (é exacta), o que significa que a função f só pode existir se $d\left(\frac{\nabla\sigma}{\sigma}\right) = 0$. Mas localmente

$$d\left(\frac{\nabla\sigma}{\sigma}\right) = d\left(\frac{d\sigma - i\vartheta_\alpha\sigma}{\sigma}\right) = d(d \ln \sigma - i\vartheta_\alpha) = -id\vartheta_\alpha.$$

Definição 2.35. *Seja ∇ uma conexão num fibrado de linha. A 2-forma local de curvatura $F(\nabla)$ de ∇ é*⁶

$$F(\nabla)_\alpha = \frac{1}{2\pi} d\vartheta_\alpha.$$

Quando não houver ambiguidade escrevemos simplesmente F em vez de $F(\nabla)$.

Estamos a ver que só existem secções locais horizontais que nunca se anulam se a conexão for plana, *i.e.* $F = 0$.

Lema 2.36. *A 2-forma de curvatura é fechada e está definida globalmente em B .*

Demonstração. Basta notar que em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\vartheta_\beta - \vartheta_\alpha = -idf_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}^{-1} = -id \ln f_{\alpha\beta},$$

⁶O factor 2π é simplesmente um factor de normalização.

pelo que

$$d\vartheta_\beta - d\vartheta_\alpha = -id^2 \ln f_{\alpha\beta} = 0,$$

ou seja, $F_\alpha = F_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$, *i.e.* $F \in \Omega^2(B)$. \square

2.3.4 Exemplos

Exemplo 2.37. Seja $L_\xi = SL(2, \mathbb{C}) \times_\xi \mathbb{C} \rightarrow D \setminus SL(2, \mathbb{C})$ o fibrado de linha homogéneo construído no exemplo 2.13. Vamos determinar a expressão local da 1-forma de conexão e a 2-forma de curvatura deste fibrado.

Consideramos a base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ constituída pelos geradores $\{A_j, F_j\}$ de rotações e boosts em $SL(2, \mathbb{C})$ introduzida na secção 1.2.1, onde definimos uma forma bilinear real, simétrica, associativa e não degenerada como

$$\langle X, Y \rangle = -2\text{ReTr}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}).$$

Esta forma bilinear permite-nos identificar \mathfrak{d}^* com \mathfrak{d} , onde \mathfrak{d} é a álgebra de Lie do subgrupo $D \subset SL(2, \mathbb{C})$ formado pelas matrizes diagonais, *i.e.* \mathfrak{d} é gerada por A_3, F_3 . Seja $\xi^* \in \mathfrak{d}^*$ definido por

$$\xi^* = -\frac{a}{2}F_3 - \frac{b}{2}A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{a+ib}{4} & 0 \\ 0 & \frac{a+ib}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi/2 & 0 \\ 0 & \xi/2 \end{pmatrix},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Seja $g = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, então temos

$$dgg^{-1} = \begin{pmatrix} zdx - wdy & -ydx + xdy \\ zdw - wdz & -ydw + xdz \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \langle dgg^{-1}, \xi^* \rangle &= -2\text{Re} \left(\frac{\xi}{2} (-zdx + xdz - ydw + wdy) \right) \\ &= \frac{1}{2}\xi(zdx - xdz + ydw - wdy) + \frac{1}{2}\bar{\xi}(\bar{z}d\bar{x} - \bar{x}d\bar{z} + \bar{y}d\bar{w} - \bar{w}d\bar{y}). \end{aligned}$$

Em $U_\alpha \subset D \setminus SL(2, \mathbb{C})$ correspondente a $x \neq 0$, *i.e.* $z = (1 + wy)/x$ (vide exemplo 2.6), temos

$$\langle dgg^{-1}, \xi^* \rangle = \xi \left(\frac{1 + yw}{x} dx - wdy \right) + \bar{\xi} \left(\frac{1 + \bar{y}\bar{w}}{\bar{x}} d\bar{x} - \bar{w}d\bar{y} \right).$$

Tomando a secção local $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$,

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix},$$

obtém-se

$$(\sigma_\alpha)_* \frac{\partial}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad (\sigma_\alpha)_* \frac{\partial}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial}{\partial w}, \quad (\sigma_\alpha)_* \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_1} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \quad (\sigma_\alpha)_* \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{w}},$$

e

$$\begin{aligned} \vartheta_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) &= (\sigma_\alpha)_* \left\langle dgg^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right), \xi^* \right\rangle = \left\langle dgg^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right), \xi^* \right\rangle = -\xi\alpha_2 \\ \vartheta_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) &= (\sigma_\alpha)_* \left\langle dgg^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right), \xi^* \right\rangle = \left\langle dgg^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right), \xi^* \right\rangle = 0, \\ \vartheta_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_1} \right) &= -\bar{\xi}\bar{\alpha}_2, \quad \vartheta_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_2} \right) = 0, \end{aligned}$$

pelo que a 1-forma local de conexão é

$$\vartheta_\alpha = -\xi\alpha_2 d\alpha_1 - \bar{\xi}\bar{\alpha}_2 d\bar{\alpha}_1 \in \Omega^1(U_\alpha) \quad (2.3)$$

Em $U_\beta \subset D \setminus SL(2, \mathbb{C})$ correspondente a $y \neq 0$, *i.e.* $y = (xz - 1)/y$,

$$\langle dgg^{-1}, \xi^* \rangle = \xi \left(zdx - \frac{xz-1}{y} dy \right) + \bar{\xi} \left(\bar{z}d\bar{x} - \frac{\bar{x}\bar{z}-1}{\bar{y}} d\bar{y} \right),$$

e tomamos a secção $\sigma_\beta : U_\beta \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$,

$$(\beta_1, \beta_2) \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 + \beta_1\beta_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

para obter

$$(\sigma_\beta)_* \frac{\partial}{\partial \beta_1} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\sigma_\beta)_* \frac{\partial}{\partial \beta_2} = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\vartheta_\beta \left(\frac{\partial}{\partial \beta_1} \right) = \xi\beta_2, \quad \vartheta_\beta \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\beta}_1} \right) = \bar{\xi}\bar{\beta}_2, \quad \vartheta_\beta \left(\frac{\partial}{\partial \beta_2} \right) = \vartheta_\beta \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\beta}_2} \right) = 0,$$

pelo que

$$\vartheta_\beta = \xi\beta_2 d\beta_1 + \bar{\xi}\bar{\beta}_2 d\bar{\beta}_1 \in \Omega^1(U_\beta). \quad (2.4)$$

Utilizando as expressões 2.3 e 2.4 em $U_\alpha \cap U_\beta$ obtém-se

$$\begin{aligned}
i\vartheta_\alpha - i\vartheta_\beta &= -i\xi\alpha_2 d\alpha_1 - i\bar{\xi}\bar{\alpha}_2 d\bar{\alpha}_1 - i\xi\beta_2 d\beta_1 + i\bar{\xi}\bar{\beta}_2 d\bar{\beta}_1 \\
&= -i\xi\alpha_2 d\alpha_1 - i\bar{\xi}\bar{\alpha}_2 d\bar{\alpha}_1 - i\xi\alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2)d\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) + i\bar{\xi}\bar{\alpha}_1(1 + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2)d\left(\frac{1}{\bar{\alpha}_1}\right) \\
&= i\xi\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} + i\bar{\xi}\frac{d\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_1} = d\ln \alpha_1^{i\xi} \bar{\alpha}_1^{i\bar{\xi}} \\
&= d\ln f_{\beta\alpha}(\alpha_1, \alpha_2),
\end{aligned}$$

que são as funções de transição obtidas no exemplo 2.13.

A 2-forma de curvatura pode agora ser calculada como

$$F = \frac{1}{2\pi} (\xi d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 + \bar{\xi} d\bar{\alpha}_1 \wedge d\bar{\alpha}_2) \in \Omega^2(D \setminus SL(2, \mathbb{C}))$$

◇

Exemplo 2.38. Seja $L_\xi = SL(2, \mathbb{C}) \times_\xi \mathbb{C} \rightarrow P \setminus SL(2, \mathbb{C})$ o fibrado de linha homogéneo construído no exemplo 2.14. Vamos determinar a expressão local da 1-forma de conexão e a 2-forma de curvatura deste fibrado. O exemplo 2.16 mostrou que existe um morfismo natural entre os fibrados $L_D = SL(2, \mathbb{C}) \times_\xi \mathbb{C} \rightarrow D \setminus SL(2, \mathbb{C})$ e $L_P = SL(2, \mathbb{C}) \times_{\xi'} \mathbb{C} \rightarrow P \setminus SL(2, \mathbb{C})$ cuja aplicação correspondente entre os espaços de base é simplesmente a projecção $D \setminus SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow P \setminus SL(2, \mathbb{C})$. Vamos utilizar esse morfismo e os resultados do exemplo 2.37 para induzir uma conexão em L_P . Utilizando $D \setminus SL(2, \mathbb{C}) \cong TCP^1$ (vide exemplo 2.6) e $P \setminus SL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}P^1 \cong U(1) \setminus SU(2)$ (exemplos 2.5 e 2.7 e 2.18) a projecção $TCP^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ induz uma aplicação $f : D \setminus SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow U(1) \setminus SU(2)$. Seja

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \in U(1) \setminus SU(2).$$

No mapa U_α , correspondente a $x \neq 0$, definimos a secção $p_\alpha : U_\alpha \subset U(1) \setminus SU(2) \rightarrow U'_\alpha \subset D \setminus SL(2, \mathbb{C})$,

$$(\alpha_1, \bar{\alpha}_1) \mapsto \left(\alpha_1, -\frac{\bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} \right).$$

Observe-se que a inclusão $U(1) \setminus SU(2) \hookrightarrow D \setminus SL(2, \mathbb{C})$ permite-nos identificar

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & y/x \\ -x\bar{y} & x\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ -\frac{\bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} & \frac{1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} \end{pmatrix},$$

o que justifica a escolha da secção p_α . Obtemos assim

$$\Theta_\alpha = p_\alpha^* \vartheta_\alpha = p_\alpha^* (-\xi \alpha_2 d\alpha_1 - \bar{\xi} \bar{\alpha}_2 d\bar{\alpha}_1) = \xi \frac{\bar{\alpha}_1 d\alpha_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} + \bar{\xi} \frac{\alpha_1 d\bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} \in \Omega^1(U_\alpha).$$

Procedendo da mesma forma no mapa U_β , correspondente a $y \neq 0$, obtém-se

$$\Theta_\beta = p_\beta^* \vartheta_\beta = p_\beta^* (\xi \beta_2 d\beta_1 + \bar{\xi} \bar{\beta}_2 d\bar{\beta}_1) = \xi \frac{\bar{\beta}_1 d\beta_1}{1 + \beta_1 \bar{\beta}_1} + \bar{\xi} \frac{\beta_1 d\bar{\beta}_1}{1 + \beta_1 \bar{\beta}_1} \in \Omega^1(U_\alpha).$$

Em $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\begin{aligned} i\Theta_\alpha - i\Theta_\beta &= i\xi \frac{\bar{\alpha}_1 d\alpha_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} + i\bar{\xi} \frac{\alpha_1 d\bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} - i\xi \frac{\frac{1}{\bar{\alpha}_1} d\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)}{1 + \frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{\bar{\alpha}_1}} - i\bar{\xi} \frac{\frac{1}{\alpha_1} d\left(\frac{1}{\bar{\alpha}_1}\right)}{1 + \frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{\bar{\alpha}_1}} \\ &= i\xi \frac{\bar{\alpha}_1 d\alpha_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} + i\bar{\xi} \frac{\alpha_1 d\bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} + i \frac{\xi}{\alpha_1} \frac{d\alpha_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} + i \frac{\bar{\xi}}{\bar{\alpha}_1} \frac{d\bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} \\ &= i\xi \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} + i\bar{\xi} \frac{d\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_1} = d \ln \alpha_1^{i\xi} \bar{\alpha}_1^{i\bar{\xi}}. \end{aligned}$$

A 2-forma de curvatura pode agora ser calculada facilmente como

$$F = \frac{1}{2\pi} d\Theta_\alpha = \xi \frac{d\bar{\alpha}_1 \wedge d\alpha_1}{(1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1)^2} + \bar{\xi} \frac{d\alpha_1 \wedge d\bar{\alpha}_1}{(1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1)^2} = (-\xi + \bar{\xi}) \frac{d\alpha_1 \wedge d\bar{\alpha}_1}{(1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1)^2}$$

ou, utilizando $\xi = \frac{a+ib}{2}$, com $a, b \in \mathbb{R}$,

$$F = -\frac{ib}{2\pi} \frac{d\alpha_1 \wedge d\bar{\alpha}_1}{(1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1)^2}.$$

◇

Exemplo 2.39. O exemplo 2.18 mostrou que a inclusão $SU(2) \hookrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ induz um isomorfismo, como fibrados suaves, entre o fibrado holomorfo $SU(2) \times_{\rho_n} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ e o fibrado $SL(2, \mathbb{C}) \times_{\rho_n} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$. Vamos utilizar esta isomorfismo e determinar a 1-forma de conexão e a 2-forma de curvatura deste fibrado.

Consideramos a base de $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ constituída pelos geradores de rotações $\{A_j\}_{j=1,2,3}$ e a forma bilinear simétrica não degenerada $\langle \cdot, \cdot \rangle$ introduzidas na secção 1.1.1. Seja $\chi^* \in \mathfrak{u}(1)$ definido por

$$\chi^* = \frac{n}{2} A_3 = \begin{pmatrix} in/4 & 0 \\ 0 & -in/4 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Utilizando os mesmos mapas nos dois fibrados, os resultados do exemplo 2.38 e fazendo $\xi = (a + ib)/2 = -in/2$ obtém-se para U_α , onde $x \neq 0$ e $z = y/x$,

$$\vartheta_\alpha = -\frac{in}{2} \frac{\bar{z}dz}{1+z\bar{z}} + \frac{in}{2} \frac{zd\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \quad \in \Omega^1(U_\alpha),$$

e para U_β , onde $y \neq 0$ e $w = x/y$,

$$\vartheta_\beta = -\frac{in}{2} \frac{\bar{w}dw}{1+w\bar{w}} + \frac{in}{2} \frac{wd\bar{w}}{1+w\bar{w}}, \quad \in \Omega^1(U_\beta).$$

Repare-se que em $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\frac{n}{2} \frac{\bar{z}dz}{1+z\bar{z}} = \frac{n}{2} \frac{\frac{1}{\bar{w}}d\left(\frac{1}{w}\right)}{1+\frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}}} = -\frac{n}{2w} \frac{dw}{1+w\bar{w}} = \frac{n}{2} \frac{\bar{w}dw}{1+w\bar{w}} - \frac{n}{2} \frac{dw}{w},$$

pelo que

$$i\vartheta_\alpha - i\vartheta_\beta = \frac{n}{2} \frac{dz}{z} - \frac{n}{2} \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{n}{2} d \ln \frac{z}{\bar{z}} = \frac{n}{2} d \ln \frac{z^2}{|z|^2} = d \ln \frac{z^n}{|z|^n}.$$

A 2-forma de curvatura é então dada por

$$F = \frac{in}{2\pi} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} \in \Omega^2(\mathbb{C}P^1).$$

Observe-se que $\int_{\mathbb{C}P^1} F = n$, facto a que vamos recorrer mais tarde. \diamond

Capítulo 3

Representações Induzidas

3.1 Representações Induzidas

No Capítulo 2 foram estudados os fibrados homogêneos com ênfase particular nos fibrados de linha sobre um espaço homogêneo. Vamos voltar agora ao caso mais geral, em que cada fibra é um espaço vectorial de dimensão finita.

Podemos introduzir mais estruturas num fibrado homogêneo. Neste capítulo $E = G \times_{\rho} V$ designa o fibrado vectorial homogêneo associado ao fibrado principal $G \rightarrow H \backslash G$, onde ρ é uma representação unitária de H em V . Por conveniência, vamos assumir sempre que G é conexo.

Definição 3.1. *Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ um produto interno em V . Então definimos um produto interno nas fibras de E como*

$$\langle [g_1, v_1], [g_2, v_2] \rangle = \langle \rho(g_2 g_1^{-1}) v_1, v_2 \rangle.$$

Verifiquemos que a operação está bem definida, *i.e.* não depende da acção de H . Para qualquer $h \in H$,

$$\langle [hg_1, \rho(h)v_1], [g_2, v_2] \rangle = \langle [\rho(g_2 g_1^{-1} h^{-1}) \rho(h)v_1, v_2] \rangle = \langle \rho(g_2 g_1^{-1}) v_1, v_2 \rangle.$$

Além disso, é invariante à acção à direita de G : para qualquer $g' \in G$,

$$\langle [g_1 g', v_1], [g_2 g', v_2] \rangle = \langle \rho(g_2 g' g'^{-1} g_1^{-1}) v_1, v_2 \rangle = \langle \rho(g_2 g_1^{-1}) v_1, v_2 \rangle = \langle [g_1, v_1], [g_2, v_2] \rangle.$$

Daqui em diante, vamos assumir que todas as variedades com que vamos trabalhar são orientáveis, *i.e.* admitem uma forma de volume, e que a forma de volume atribui um volume não negativo a qualquer subvariedade compacta de G .

Vai ser necessário definir uma acção à esquerda de G sobre secções suaves quadrado integráveis em E . Lembremos que temos uma acção de G à direita sobre E , que foi definida como $[g, v] \triangleleft_G g' = [gg', v]$. Para evitar alguma ambiguidade na notação das acções de G à esquerda e à direita sobre secções vamos fixar notação e designar $[g, v] \triangleleft_G g' = R(g)[g, v]$.

Definição 3.2. A representação unitária de G induzida por V , designada $Ind_H^G V$, é definida escolhendo uma forma de volume μ em $H \backslash G$ e tomando como espaço de Hilbert da representação induzida, também designado $Ind_H^G V$, o completado do espaço vectorial de todas as secções suaves quadrado integráveis no fibrado $G \times_\rho V \xrightarrow{\pi} H \backslash G$, com produto interno

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \int_{\bar{x} \in H \backslash G} \langle \sigma_1(\bar{x}), \sigma_2(\bar{x}) \rangle \mu(\bar{x}).$$

O produto interno dentro do integral é o produto interno nas fibras, como na definição 3.1.

A acção de G à esquerda sobre secções suaves em $E = G \times_\rho V \rightarrow H \backslash G$ é definida por

$$(g \triangleright_G \sigma)(\bar{x}) = R(g^{-1})\sigma(\bar{x}g)\sqrt{\rho_g(\bar{x})},$$

onde $\rho_g(\bar{x})$ é definida por $\rho_g(\bar{x})\mu(\bar{x}) = \mu(\bar{x}g)$ e μ é a forma de volume escolhida para $H \backslash G$.

Repare-se $\rho_g(\bar{x}) \in \mathbb{R}_{>0}$, $\forall \bar{x} \in H \backslash G$, pois a multiplicação à direita por $g \in G$ é um difeomorfismo que preserva a orientação de $H \backslash G$ e estamos a assumir que G é conexo, o que implica que $\rho_g(\bar{x})$ e $\rho_1(\bar{x}) = 1$ têm o mesmo sinal. Além disso,

$$\rho_{g'}(\bar{x})\rho_g(\bar{x}g') = \frac{\mu(\bar{x}g')}{\mu(\bar{x})} \frac{\mu(\bar{x}g'g)}{\mu(\bar{x}g')} = \frac{\mu(\bar{x}g'g)}{\mu(\bar{x})} = \rho_{g'g}(\bar{x}),$$

e assim verifica-se a equação habitual para uma acção de G ,

$$(g'g \triangleright_G \sigma)(\bar{x}) = (g' \triangleright_G (g \triangleright_G \sigma))(\bar{x}).$$

Verifiquemos que $\text{Ind}_H^G V$ define realmente uma representação unitária de G . Utilizando a definição 3.2 obtém-se

$$\begin{aligned}
\langle g \triangleright_G \sigma_1, g \triangleright_G \sigma_2 \rangle &= \int_{\bar{x} \in H \backslash G} \langle R(g^{-1})\sigma_1(\bar{x}g), R(g^{-1})\sigma_2(\bar{x}g) \rangle \rho_g(\bar{x}) \mu(\bar{x}) \\
&= \int_{\bar{x} \in H \backslash G} \langle \sigma_1(\bar{x}g), \sigma_2(\bar{x}g) \rangle \mu(\bar{x}g) \\
&= \int_{\bar{x} \in H \backslash G} \langle \sigma_1(\bar{x}), \sigma_2(\bar{x}) \rangle \mu(\bar{x}) \\
&= \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle.
\end{aligned}$$

O factor $\rho_g(\bar{x})$ introduzido na definição 3.2 permite compensar a falta de invariância de μ à acção de G , tornando realmente unitária a representação induzida (definição 3.2). Se μ é invariante à acção de G vê-se claramente que $\rho_g(\bar{x}) = 1$.

Mostremos que a acção à esquerda de G sobre $\text{Ind}_H^G V$ é contínua. Temos que mostrar que para toda a sucessão $\{g_n\} \subset G$ com $g_n \rightarrow g$, se tem $g_n \triangleright \sigma \rightarrow g \triangleright \sigma$. Como a acção é unitária basta tomar $g_n \rightarrow 1 \in G$. É imediato que $g_n \triangleright_G \sigma(\bar{x}) \rightarrow \sigma(\bar{x})$ pontualmente. Designando $\varsigma_n(\bar{x}) = \langle g_n \triangleright_G \sigma(\bar{x}) - \sigma(\bar{x}), g_n \triangleright_G \sigma(\bar{x}) - \sigma(\bar{x}) \rangle$ vê-se que $\varsigma_n(\bar{x}) \geq 0$ e que

$$|\varsigma_n(\bar{x})| \leq \langle g_n \triangleright_G \sigma(\bar{x}), g_n \triangleright_G \sigma(\bar{x}) \rangle + \langle \sigma(\bar{x}), \sigma(\bar{x}) \rangle = 2\langle \sigma(\bar{x}), \sigma(\bar{x}) \rangle.$$

Do Teorema da convergência dominada [18] segue que

$$\|g_n \triangleright_G \sigma - \sigma\|^2 = \int_{\bar{x} \in H \backslash G} |\varsigma_n(\bar{x})| \mu(\bar{x}) \rightarrow 0,$$

e assim que $g_n \triangleright_G \sigma(\bar{x}) \rightarrow \sigma(\bar{x})$ em $\text{Ind}_H^G V$.

Em termos de funções H -equivariantes, podemos definir

Definição 3.3. *O produto interno de funções H -equivariantes correspondente ao produto interno de secções é dado por*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\bar{x} \in H \backslash G} \langle f_1(x), f_2(x) \rangle \mu(\bar{x}),$$

onde o produto interno dentro do integral é o produto interno em V .

Note-se que $\langle f_1, f_2 \rangle$ está bem definido pois

$$\langle f_1(hx), f_2(hx) \rangle = \langle \rho(h)f_1(x), \rho(h)f_2(x) \rangle = \langle f_1(x), f_2(x) \rangle,$$

porque assumimos que V é uma representação unitária de H .

Definição 3.4. A acção de G à esquerda sobre funções H -equivariantes é dada por

$$g \triangleright_G f(x) = f(xg) \sqrt{\rho_g(\bar{x})}.$$

De agora em diante vamos utilizar secções e funções H -equivariantes sem distinção. A representação induzida (definição 3.2) depende da escolha de uma forma de volume em $H \backslash G$. No entanto, essa escolha não tem importância.

Lema 3.5. *Sejam μ e η formas de volume (diferentes) em $H \backslash G$. Então ${}_\eta \text{Ind}_H^G V$ e ${}_\mu \text{Ind}_H^G V$ são isomorfas como representações unitárias de G .*

Demonstração. Como trabalhamos apenas com formas de volume que atribuem um volume não negativo a subvariedades compactas, η e μ estão relacionadas por uma função real suave estritamente positiva ℓ , tal que $\eta(\bar{x}) = \ell(\bar{x})\mu(\bar{x})$. Definimos o isomorfismo unitário $\phi : {}_\mu \text{Ind}_H^G V \rightarrow {}_\eta \text{Ind}_H^G V$ por $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ell}} f$. Esta aplicação define claramente um isomorfismo linear. É uma isometria porque

$$\begin{aligned} \int_{\bar{x} \in H \backslash G} \langle f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}) \rangle \mu(\bar{x}) &= \int_{\bar{x} \in H \backslash G} \left\langle \frac{f_1(\bar{x})}{\sqrt{\ell(\bar{x})}}, \frac{f_2(\bar{x})}{\sqrt{\ell(\bar{x})}} \right\rangle \ell(\bar{x}) \mu(\bar{x}) \\ &= \int_{\bar{x} \in H \backslash G} \langle \phi f_1(\bar{x}), \phi f_2(\bar{x}) \rangle \eta(\bar{x}). \end{aligned}$$

Para mostrar que ϕ comuta com a acção de G notamos que

$$\rho_g^\eta(\bar{x}) = \frac{\eta(\bar{x}g)}{\eta(\bar{x})} = \frac{\ell(\bar{x}g)\mu(\bar{x}g)}{\ell(\bar{x})\mu(\bar{x})} = \frac{\ell(\bar{x}g)}{\ell(\bar{x})} \rho_g^\mu(\bar{x}),$$

pelo que

$$\begin{aligned} (g \triangleright_\eta \phi f)(\bar{x}) &= \phi f(\bar{x}g) \sqrt{\rho_g^\eta(\bar{x})} = f(\bar{x}g) \frac{\sqrt{\rho_g^\eta(\bar{x})}}{\sqrt{\ell(\bar{x}g)}} \\ &= f(\bar{x}g) \frac{\sqrt{\rho_g^\mu(\bar{x})}}{\sqrt{\ell(\bar{x})}} = \phi(g \triangleright_\mu f)(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

Passamos agora a discutir alguns exemplos de representação induzidas.

3.2 $SL(2, \mathbb{C})$: A série principal

Vamos obter a representação de $SL(2, \mathbb{C})$ na chamada série principal como a representação induzida $\text{Ind}_P^G \mathbb{C}_\xi$ no fibrado $L_\xi = SL(2, \mathbb{C}) \times_{\rho_\xi} \mathbb{C}_\xi \rightarrow P \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}P^1$ (vide exemplos 2.7 e 2.14). Relembramos que Z e P designam os subgrupos de $SL(2, \mathbb{C})$ formados pelas matrizes da forma

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\}, \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ z & \lambda \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Lembremos que $\mathbb{C}P^1 \cong P \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong (Z \backslash P) \backslash (Z \backslash SL(2, \mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ (vide exemplo 2.7) e que no exemplo 2.14 definimos o caracter $\xi : P \rightarrow U(1)$ como

$$\xi \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ z & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^{i\xi} \bar{\lambda}^{i\bar{\xi}},$$

onde $\xi = \frac{a+ib}{2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, cuja restrição a $D \cong Z \backslash P \cong \mathbb{C}^*$ é óbvia.

O Lema 2.23 mostrou que existe uma relação 1-1 entre secções de L_ξ e funções P -equivariantes $f : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, que neste caso são constantes nos Z -cosets à esquerda, pois ξ é trivial em Z . Vemos assim que essas funções podem ser interpretadas como funções em $Z \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$, que devem ser \mathbb{C}^* -equivariantes. Concluimos que $\text{Ind}_P^G \mathbb{C}_\xi$ é o completado do espaço de todas as funções suaves $f : \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{C}$ que são homogéneas, no sentido em que

$$\begin{aligned} f(\lambda z, \lambda w) &= \xi(\lambda) f(z, w), \\ &= \lambda^{i\xi} \bar{\lambda}^{i\bar{\xi}} f(z, w) \\ &= \lambda^{\frac{ia-b}{2}} \bar{\lambda}^{\frac{ia+b}{2}} f(z, w), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*. \end{aligned}$$

Repare-se que estas funções só estão bem definidas se $i\bar{\xi} - i\xi = b \in \mathbb{Z}$, o que vamos assumir de agora em diante¹.

Para determinar a representação $\text{Ind}_P^G \mathbb{C}_\xi$ é necessário escolher uma forma de volume em $\mathbb{C}P^1$. Como a escolha não tem importância, face ao Lema 3.5, vamos escolher

¹Impõe-se $i\bar{\xi} - i\xi = b \in \mathbb{Z}$ para garantir que $\lambda^{i\xi} \bar{\lambda}^{i\bar{\xi}}$ seja unívoca como função de λ .

$$\mu([z_1 : z_2]) = \frac{i}{2} \frac{\eta(z_1, z_2) \wedge \bar{\eta}(z_1, z_2)}{(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2},$$

onde $\eta(z_1, z_2) = z_1 dz_2 - z_2 dz_1$.

Repare-se que para $z_1 \neq 0$, $z = z_2/z_1$,

$$\frac{\eta(z_1, z_2) \wedge \bar{\eta}(z_1, z_2)}{(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2} = \frac{\eta(z_1, z_2) \wedge \bar{\eta}(z_1, z_2)}{|z_1|^4(1 + |z_2/z_1|^2)^2} = \frac{d(z_2/z_1) \wedge d(\bar{z}_2/\bar{z}_1)}{(1 + |z_2/z_1|^2)^2} = \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2},$$

ou seja,

$$\mu(z, \bar{z}) = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2},$$

que é simplesmente a forma de volume habitual de $\mathbb{C}P^1$. Para $z_2 \neq 0$, $w = z_1/z_2$ obtém-se

$$\mu(w, \bar{w}) = \frac{i}{2} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{(1 + |w|^2)^2}.$$

Mostremos que η (e assim $\eta \wedge \bar{\eta}$) é invariante à acção à direita de $SL(2, \mathbb{C})$. Seja $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$. Então

$$\begin{aligned} \eta \left((z_1, z_2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &= \eta(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2) \\ &= (az_1 + cz_2)d(bz_1 + dz_2) - (bz_1 + dz_2)d(az_1 + cz_2) \\ &= (ad - bc)z_1 dz_2 - (ad - bc)z_2 dz_1 \\ &= z_1 dz_2 - z_2 dz_1 \\ &= \eta(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Além disso, é imediato que $\eta(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^2 \eta(z_1, z_2)$ e assim que

$$\mu([\lambda z_1 : \lambda z_2]) = \mu([z_1 : z_2]), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Deste modo, vemos que a acção à direita de $g \in SL(2, \mathbb{C})$ sobre μ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mu \left([z_1 : z_2] \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &= \frac{i}{2} \frac{\eta(z_1, z_2) \wedge \bar{\eta}(z_1, z_2)}{(|az_1 + cz_2|^2 + |bz_1 + dz_2|^2)^2} \\ &= \frac{(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2}{(|az_1 + cz_2|^2 + |bz_1 + dz_2|^2)^2} \mu([z_1, z_2]), \\ &= \rho_g([z_1 : z_2]) \mu([z_1, z_2]). \end{aligned}$$

A acção à esquerda de $g \in SL(2, \mathbb{C})$ sobre $\text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ pode agora ser escrita explicitamente como

$$g \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f(z_1, z_2) = f(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2) \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|az_1 + cz_2|^2 + |bz_1 + dz_2|^2} \quad (3.1)$$

Utilizando a coordenada habitual $z = z_2/z_1$ em $\mathbb{C}P^1 - \{[0 : 1]\}$, podemos escrever

$$g \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f(z) = f\left(\frac{b + dz}{a + cz}\right) \xi(a + cz) \frac{1 + |z|^2}{|a + cz|^2 + |b + dz|^2}, \quad (3.2)$$

onde $f(z) = f(1, z)$. Em $\mathbb{C}P^1 - \{[1 : 0]\}$, com $w = z_1/z_2$,

$$g \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f(w) = f\left(\frac{aw + c}{bw + d}\right) \xi(bw + d) \frac{1 + |w|^2}{|aw + c|^2 + |bw + d|^2}. \quad (3.3)$$

As representações obtidas são caracterizadas por dois parâmetros reais, um contínuo e outro discreto (a e b respectivamente).

Mostremos que $\text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ é isomorfa à *série principal* de $SL(2, \mathbb{C})$ como definida em [5] e [12], e que designamos \mathcal{P}^ξ . As representações da série principal \mathcal{P}^ξ , são dadas pelo completado do espaço das funções em $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ que satisfazem

$$\tilde{f}(\lambda z_1, \lambda z_2) = \frac{\xi(\lambda)}{|\lambda|^2} \tilde{f}(z_1, z_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

e são quadrado integráveis relativamente ao produto interno

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_o = \int_{\mathbb{C}P^1} \langle \tilde{f}(z_1, z_2), \tilde{g}(z_1, z_2) \rangle (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 \mu([z_1 : z_2]),$$

onde $\langle f(z_1, z_2), g(z_1, z_2) \rangle$ é o produto interno nas fibras, como na definição 3.1. A acção à esquerda de $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ sobre \mathcal{P}^ξ é dada por

$$g \tilde{\triangleright}_{SL(2, \mathbb{C})} \tilde{f}(z_1, z_2) = \tilde{f}(az_1 + cz_2, bz_2 + dz_2). \quad (3.4)$$

Consideremos a aplicação $\phi : \text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi \rightarrow \mathcal{P}^\xi$

$$f(z_1, z_2) \xrightarrow{\phi} \frac{f(z_1, z_2)}{(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = \tilde{f}(z_1, z_2). \quad (3.5)$$

Das expressões 3.1, 3.4 e 3.5 segue que ϕ comuta com a acção de $SL(2, \mathbb{C})$, pois

$$\begin{aligned} \phi(g \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f)(z_1, z_2) &= \phi \left(f(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2) \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|az_1 + cz_2|^2 + |bz_1 + dz_2|^2} \right) \\ &= \frac{f(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2)}{|az_1 + cz_2|^2 + |bz_1 + dz_2|^2} \\ &= (g \tilde{\triangleright}_{SL(2, \mathbb{C})} \phi f)(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Além disso ϕ é claramente linear, limitado e invertível, e daqui segue que é um intertwiner entre $\text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ e \mathcal{P}^ξ . É uma isometria porque

$$\begin{aligned} \langle \phi f, \phi g \rangle_o &= \int_{\mathbb{C}P^1} \langle \tilde{f}(z_1, z_2), \tilde{g}(z_1, z_2) \rangle (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 \mu([z_1 : z_2]) \\ &= \int_{\mathbb{C}P^1} \left\langle \frac{f(z_1, z_2)}{|z_1|^2 + |z_2|^2}, \frac{g(z_1, z_2)}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \right\rangle (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 \mu([z_1 : z_2]) \\ &= \int_{\mathbb{C}P^1} \langle f(z_1, z_2), g(z_1, z_2) \rangle \mu([z_1 : z_2]) \\ &= \langle f, g \rangle. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Para mostrar que $\text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ é irredutível basta mostrar que \mathcal{P}^ξ é irredutível, o que fazemos mostrando a irredutibilidade da sua restrição ao subgrupo P . Utilizando o facto de $\mathbb{C}P^1 - \{[1 : 0]\}$ ser denso em $\mathbb{C}P^1$ podemos fazer a prova localmente (lembramos que temos dois mapas em $\mathbb{C}P^1$ onde a acção de $SL(2, \mathbb{C})$ é dada pelas expressões 3.2 e 3.3). Para simplificar notação no que segue vamos designar os elementos de \mathcal{P}^ξ por f , em vez de \tilde{f} . Utilizando a coordenada habitual w de $\mathbb{C}P^1 - \{[1 : 0]\}$, a acção de P sobre \mathcal{P}^ξ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w_0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\triangleright}_P f(w) = f(w + w_0) \tag{3.7}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tilde{\triangleright}_P f(w) = f(\lambda^{-2}w) \frac{\xi(\lambda)}{|\lambda|^2}. \tag{3.8}$$

Seja A um operador linear limitado em \mathcal{P}^ξ que comuta com a acção de todo $g \in SL(2, \mathbb{C})$. Como A comuta com 3.7, o Teorema de Stone-von Neumann [16] implica que, no espaço da transformada de Fourier, a acção de A é dada por multiplicação por uma função limitada mensurável m :

$$\widehat{A}f(\zeta) = m(\zeta)\hat{f}(\zeta), \quad f \in \mathcal{P}^\xi. \tag{3.9}$$

Estamos a utilizar a transformada de Fourier dada por

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{C}} e^{-2\pi i w \cdot \zeta} f(w) \frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w},$$

onde $z \cdot \zeta = \operatorname{Re}(\bar{z}\zeta)$.

Como

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tilde{\triangleright}_P (Af)(w) = \left(A \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tilde{\triangleright}_P \right) f(w),$$

a equação 3.8 dá-nos

$$(Af)(\lambda^{-2}z) = A(f(\lambda^{-2}\cdot))(z), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Fazendo a transformada de Fourier do lado esquerdo desta expressão e utilizando a equação 3.9 obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} e^{-2\pi i w \cdot \zeta} Af(\lambda^{-2}w) \frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w} &= |\lambda|^4 \int_{\mathbb{C}} e^{-2\pi i w \cdot \lambda^2 \zeta} Af(w) \frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w} \\ &= |\lambda|^4 \widehat{Af}(\lambda^2 \zeta) \\ &= |\lambda|^4 m(\lambda^2 \zeta) \hat{f}(\lambda^2 \zeta). \end{aligned}$$

Para o lado direito obtém-se

$$\begin{aligned} m(\zeta) \int_{\mathbb{C}} e^{-2\pi i w \cdot \zeta} f(\lambda^{-2}w) \frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w} &= |\lambda|^4 m(\zeta) \int_{\mathbb{C}} e^{-2\pi i w \cdot \lambda^2 \zeta} f(w) \frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w} \\ &= |\lambda|^4 m(\zeta) \hat{f}(\lambda^2 \zeta). \end{aligned}$$

A igualdade entre estas duas expressões para todo $f \in \mathcal{P}^\xi$ significa que

$$m(\lambda^2 \zeta) = m(\zeta).$$

Em particular, esta igualdade é válida para algum $\zeta' \neq 0$. Como a acção de $D \cong \mathbb{C}^*$ sobre \mathbb{C}^* é transitiva, $\lambda^2 \zeta'$ percorre $\mathbb{C} - \{0\}$, vemos que m é constante. Assim, A é um operador escalar, o que significa que $\mathcal{I}(\mathcal{P}^\xi, \mathcal{P}^\xi) \cong \mathbb{C}$ e concluimos que \mathcal{P}^ξ , logo $\operatorname{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$, é irredutível.

3.3 $\text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$

Vamos calcular a representação induzida $\text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$, determinada a partir do fibrado $L_\xi = SL(2, \mathbb{C}) \times_\xi \mathbb{C}_\xi \rightarrow D \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong T\mathbb{C}P^1$ (vide exemplo 2.13).

Lembrando a acção de D em $SL(2, \mathbb{C})$ (exemplo 2.6) vemos que as funções D -equivariantes $f : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ podem ser interpretadas como funções de quatro variáveis² com a propriedade

$$f(ax, ay, a^{-1}w, a^{-1}z) = \xi(a)f(x, y, w, z), \forall a \in \mathbb{C}^*,$$

onde $\xi : D \rightarrow U(1)$ é o caracter definido no exemplo 2.13 ($\xi(\lambda) = \lambda^{i\xi} \bar{\lambda}^{i\bar{\xi}}$, com $\xi = \frac{a+ib}{2}$, $a, b \in \mathbb{R}$).

$\text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ é assim o completado do espaço de todas as funções suaves que têm esta propriedade.

Para determinar a acção de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre estas funções é necessário escolher uma forma de volume em $D \backslash SL(2, \mathbb{C})$, que escolhemos como

$$\mu \left(\begin{bmatrix} x : y \\ w : z \end{bmatrix} \right) = \frac{i}{2} \eta \left(\begin{bmatrix} x : y \\ w : z \end{bmatrix} \right) \wedge \bar{\eta} \left(\begin{bmatrix} x : y \\ w : z \end{bmatrix} \right),$$

com $\eta \left(\begin{bmatrix} x : y \\ w : z \end{bmatrix} \right) = -dx \wedge dz + dy \wedge dw$.

Observe-se que μ está bem definida, pois é imediato que

$$\eta \left(\begin{bmatrix} [\lambda x : \lambda y] \\ [\lambda^{-1} w : \lambda^{-1} z] \end{bmatrix} \right) = \eta \left(\begin{bmatrix} x : y \\ w : z \end{bmatrix} \right).$$

Mostremos que η (e assim μ) é invariante à acção à direita de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \eta \left(\left(\begin{bmatrix} x : y \\ w : z \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &= -d(ax + cy) \wedge d(bw + dz) + d(bx + dy) \wedge d(aw + cz) \\ &= (ad - bc)(-dx \wedge dz + dy \wedge dw) \\ &= \eta \left(\begin{bmatrix} x : y \\ w : z \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

² Escrevemos $f(x, y, w, z) \equiv f(x, y, w, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \bar{z})$ para simplificar a notação.

Então, $\rho_g \left(\begin{bmatrix} x : y \\ w : z \end{bmatrix} \right) = 1$ e a acção à esquerda de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre $\text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ pode ser escrita como

$$g \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f(x, y, w, z) = f(ax + cy, bx + dy, aw + cz, bw + dz).$$

Utilizando as coordenadas de $D \setminus SL(2, \mathbb{C})$ definidas no exemplo 2.6 obtém-se em U_α , correspondente a $x \neq 0$,

$$g \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f(\alpha_1, \alpha_2) = \xi(a + c\alpha_1) \times \\ \times f \left(1, \frac{b + d\alpha_1}{a + c\alpha_1}, (a + c\alpha_1)(a\alpha_2 + c(1 + \alpha_1\alpha_2)), (a + c\alpha_1)(b\alpha_2 + d(1 + \alpha_1\alpha_2)) \right),$$

e em U_β , correspondente a $y \neq 0$,

$$g \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f(\beta_1, \beta_2) = \xi(b\beta_2 + d) \times \\ \times f \left(\frac{a\beta_1 + c}{b\beta_2 + d}, 1, (b\beta_2 + d)(a(\beta_1\beta_2 - 1) + c\beta_2), (b\beta_2 + d)(b(\beta_1\beta_2 - 1) + d\beta_2) \right).$$

Mostremos que esta representação não é irredutível. Para isso consideramos a transformação

$$\hat{f}(g) = \int_{\mathbb{C}} f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} g \right) \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}.$$

Repare-se que

$$\begin{aligned} \hat{f} \left(\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ w & \lambda \end{pmatrix} g \right) &= \int_{\mathbb{C}} f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ w & \lambda \end{pmatrix} g \right) \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \int_{\mathbb{C}} f \left(\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z\lambda^{-2} + w\lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix} g \right) \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \xi(\lambda) \int_{\mathbb{C}} f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z\lambda^{-2} + w\lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix} g \right) \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\ &= |\lambda|^4 \xi(\lambda) \hat{f}(g), \end{aligned}$$

i.e. $\hat{f}(g)$ é P -equivariante e define assim uma secção suave no fibrado $SL(2, \mathbb{C}) \times_\xi \mathbb{C}_\xi \rightarrow P \setminus SL(2, \mathbb{C})$, onde $\hat{\xi}(\lambda) = |\lambda|^4 \xi(\lambda)$, e que por sua vez (vide exemplo 3.2) define uma função $\hat{f} : \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{C}$ com a propriedade:

$$\hat{f}(\lambda z_1, \lambda z_2) = |\lambda|^4 \hat{f}(z_1, z_2).$$

A acção à esquerda de $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ sobre $\text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ induz uma acção à esquerda sobre \hat{f} dada por

$$g \hat{\triangleright}_{SL(2, \mathbb{C})} \hat{f}(z_1, z_2) = \hat{f}(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2).$$

Designemos a representação de $SL(2, \mathbb{C})$ obtida por \mathcal{R}^ξ , onde tomamos o completado do espaço das funções com a propriedade acima, relativamente ao produto interno:

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \int_{\mathbb{C}P^1} \langle \hat{f}(z_1, z_2), \hat{g}(z_1, z_2) \rangle (|z_1|^2 + |z_2|^2)^4 \mu([z_1 : z_2]),$$

onde $\mu([z_1 : z_2])$ é a forma de volume em $\mathbb{C}P^1$ considerada no exemplo 3.2. Tendo em vista o acima exposto e os procedimentos utilizados no exemplo 3.2 vê-se que \mathcal{R}^ξ é isomorfa a $\text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ através da aplicação $\text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi \rightarrow \mathcal{R}^\xi$

$$f(z_1, z_2) \mapsto \frac{f(z_1, z_2)}{(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2}.$$

Note-se que aplicação que envia $f \in \text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ para $\hat{f} \in \mathcal{R}^\xi$ define um intertwiner $\hat{\phi}$ entre $\text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ e \mathcal{R}^ξ . Como \mathcal{R}^ξ é irredutível, porque é isomorfa a $\text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$, o Lema de Schur (lema 1.16) implica que, se $\text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ fosse irredutível, $\hat{\phi}$ seria nulo ou um isomorfismo. Vamos mostrar que nenhuma destas hipóteses é satisfeita, o que mostra que $\text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ não é irredutível.

Para mostrar que $\ker \hat{\phi} \neq \{0\}$ consideramos a função $f \in \text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ definida por

$$f(g) = \frac{\xi(a) + \xi(b)}{(a^2 + b^2)^2 (c^2 + d^2)^2}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Note-se que f é quadrado integrável, pois

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{T\mathbb{C}P^1} \frac{|\xi(a) + \xi(b)|^2}{|(a^2 + b^2)^2 (c^2 + d^2)^2|^2} \eta([a : b], [c : d]) \\ &\leq \int_{T\mathbb{C}P^1} \frac{|\xi(a)|^2 + |\xi(b)|^2}{|(a^2 + b^2)^2 (c^2 + d^2)^2|^2} \eta([a : b], [c : d]) \\ &= \int_{T\mathbb{C}P^1} \frac{1}{|(a^2 + b^2)^2 (c^2 + d^2)^2|^2} \eta([a : b], [c : d]) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Então, tomando $z = re^{i\theta}$, $\frac{i}{2}dz \wedge d\bar{z} = r dr \wedge d\theta$ obtém-se³

$$\begin{aligned}\hat{f}(g) &= \frac{\xi(a) + \xi(b)}{(a^2 + b^2)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{r dr d\theta}{((are^{i\theta} + c)^2 + (bre^{i\theta} + d)^2)^2} \\ &= \frac{\xi(a) + \xi(b)}{(a^2 + b^2)^2} \frac{1}{2} \left(1 + (ca + bd) \left[\tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{d}{c} \right) \right] \right) \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} d\theta \\ &= 0.\end{aligned}$$

Para mostrar que $\text{im } \hat{\phi} \neq \{0\}$ basta tomar $f \in \text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ definida por:

$$f(g) = \frac{\xi(a) + \xi(b)}{1 + (|a|^2 + |b|^2)^2 (|c|^2 + |d|^2)^2}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

É imediato que f é quadrado integrável e que

$$\hat{f}(g) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{(\xi(a) + \xi(b)) r dr d\theta}{1 + (|a|^2 + |b|^2)^2 (|are^{i\theta} + c|^2 + |bre^{i\theta} + d|^2)^2}$$

não é função nula em \mathcal{R}^ξ , porque

$$\frac{1}{1 + (|a|^2 + |b|^2)^2 (|are^{i\theta} + c|^2 + |bre^{i\theta} + d|^2)^2} > 0 \quad \forall r > 0, \theta \in]0, 2\pi[.$$

3.4 $\text{Ind}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$

Vamos calcular a representação induzida $\text{Ind}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$ utilizando o fibrado $SL(2, \mathbb{C}) \times_{\rho_n} \times \mathbb{C}_{\rho_n} \rightarrow P \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}P^1$ que o exemplo 2.18 mostrou ser isomorfo ao fibrado $SU(2) \times_{\rho_n} \mathbb{C}_{\rho_n} \rightarrow U(1) \backslash SU(2) \cong \mathbb{C}P^1$. Lembrando que o isomorfismo é induzido pelo mergulho $SU(2) \hookrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ e utilizando os resultados do exemplo 3.2 vemos que podemos tomar $\text{Ind}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$ como o completado do espaço das funções suaves quadrado integráveis $f : \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfazem

$$f(\lambda z^0, \lambda z^1, \lambda^{-1} \bar{z}^0, \lambda^{-1} \bar{z}^1) = \lambda^n f(z^0, z^1, \bar{z}^0, \bar{z}^1), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

onde ρ_n é a extensão a P do caracter ρ_n introduzido no exemplo 2.12.

³O integral sobre r foi calculado através de métodos computacionais utilizando o software *MATHEMATICA* 3.0.

Utilizamos a forma de volume de $\mathbb{C}P^1$, introduzida no exemplo 3.2:

$$\mu([z^0 : z^1]) = \frac{i}{2} \frac{\eta(z^0, z^1) \wedge \bar{\eta}(z^0, z^1)}{(|z^0|^2 + |z^1|^2)^2}, \quad \eta(z^0, z^1) = z^0 dz^1 - z^1 dz^0,$$

que é invariante à acção à direita de $SU(2)$, pois

$$\begin{aligned} \eta\left((z^0, z^1) \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\right) &= (az^0 - \bar{b}z^1)d(bz^0 + \bar{a}z^1) - (bz^0 + \bar{a}z^1)d(az^0 - \bar{b}z^1) \\ &= (a\bar{a} + b\bar{b})z^0 dz^1 - (a\bar{a} + b\bar{b})z^1 dz^0 \\ &= \eta(z^0, z^1). \end{aligned}$$

Então, $\rho_g([z^0 : z^1]) = 1$ e a acção à esquerda de $SU(2)$ sobre $\text{Ind}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$ pode ser escrita como

$$g \triangleright_{SU(2)} f(z^0, z^1, \bar{z}^0, \bar{z}^1) = f(az^0 - \bar{b}z^1, bz^0 + \bar{a}z^1, -a\bar{z}^1 - \bar{b}\bar{z}^0, -b\bar{z}^1 + \bar{a}\bar{z}^0).$$

Em $U_\alpha = \mathbb{C}P^1 - \{[0 : 1]\}$, utilizando a coordenada habitual $z = z^1/z^0$, podemos escrever

$$g \triangleright_{SU(2)} f(z^0, z^1, \bar{z}^0, \bar{z}^1) = (a - \bar{b}z)^n f\left(1, \frac{b + \bar{a}z}{a - \bar{b}z}, (a - \bar{b}z)(-a\bar{z} - \bar{b}), (a - \bar{b}z)(-b\bar{z} - \bar{a})\right),$$

e em $U_\beta = \mathbb{C}P^1 - \{[1 : 0]\}$, com $w = z^0/z^1$,

$$g \triangleright_{SU(2)} f(z^0, z^1, \bar{z}^0, \bar{z}^1) = (bw + \bar{a})^n f\left(\frac{aw - \bar{b}}{bw + \bar{a}}, 1, (bw + \bar{a})(-a - \bar{b}\bar{w}), (bw + \bar{a})(\bar{a}\bar{w} - b)\right).$$

Mostraremos no exemplo 3.5 que esta representação não é irredutível, pois admite um subespaço fechado não trivial que é invariante à acção à esquerda de $SU(2)$.

3.5 A Representação holomorfa de $SU(2)$

Restringindo a acção à esquerda de $SU(2)$ sobre $\text{Ind}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$ (vide exemplo 3.4) a funções holomorfas, e lembrando que $\mathbb{C}P^1$ é compacto, definimos a representação holomorfa de $SU(2)$, induzida por $U(1)$, que designamos por $\text{HInd}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$, como o subespaço linear de $\text{Ind}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n} \cong \text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_{\rho_n}$ formado pelas funções holomorfas $f : \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfazem

$$f(\lambda z^0, \lambda z^1) = \lambda^n f(z^0, z^1), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

i.e.

$$\mathrm{HInd}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n} = \left\{ f \in \mathrm{Ind}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^0} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^1} = 0 \right. \right\}.$$

É imediato que f tem que ser um polinómio homogéneo de grau n , *i.e.* $\mathrm{HInd}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$ é formada pelo espaço de polinómios de duas variáveis z_0, z_1 , homogéneos de grau n :

$$f(z_0, z_1) = a_0 z_1^n + a_1 z_1^{n-1} z_0 + a_2 z_1^{n-2} z_0^2 + \dots + a_{n-1} z_1 z_0^{n-1} + a_n z_0^n.$$

Utilizando a forma de volume de $\mathbb{C}P^1$, introduzida no exemplo 3.2 e já utilizada no exemplo 3.4 podemos escrever a acção à esquerda de $SU(2)$ sobre $\mathrm{HInd}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$ como

$$g \triangleright_{SU(2)} f(z^0, z^1) = f(a z^0 - \bar{b} z^1, b z^0 + \bar{a} z^1),$$

ou seja

$$g \triangleright_{SU(2)} f(z_0, z_1) = \sum_{k=0}^n a_k (a z_0 - \bar{b} z_1)^{n-k} (b z_0 + \bar{a} z_1)^k.$$

Em $U_\alpha = \mathbb{C}P^1 - \{[0 : 1]\}$, utilizando a coordenada habitual $z = z^1/z^0$, podemos escrever

$$g \triangleright_{SU(2)} f(z^0, z^1) = (a - \bar{b}z)^n f\left(\frac{b + \bar{a}z}{a - \bar{b}z}\right),$$

e em $U_\beta = \mathbb{C}P^1 - \{[1 : 0]\}$, com $w = z^0/z^1$,

$$g \triangleright_{SU(2)} f(z^0, z^1) = (bw + \bar{a})^n f\left(\frac{aw - \bar{b}}{bw + \bar{a}}\right).$$

Observe-se que para cada n , fixo pela escolha do caracter em $U(1)$,

$$\dim \left(\mathrm{HInd}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n} \right) = n + 1,$$

ou seja, as representações têm dimensão finita, contrariamente aos resultados obtidos nos exemplos 3.2 e 3.3, o que reflecte o facto de $SU(2)$ ser um grupo compacto. Este é um caso particular do teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch [17], que permite calcular a dimensão do espaço de secções holomorfas em fibrados holomorfos de linha sobre variedades complexas compactas. Este espaço é assim completo, logo fechado em $\mathrm{Ind}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$ [15]. Daqui segue que $\mathrm{HInd}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$ é um subespaço fechado de $\mathrm{Ind}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$, que é invariante à

acção à esquerda de $SU(2)$, pelo que a representação $\text{Ind}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$ obtida no exemplo 3.4 não é irredutível. Por $SL(2, \mathbb{C})$ não ser compacto, não admite representações unitárias irredutíveis de dimensão finita não triviais [12].

Capítulo 4

Quantização Geométrica

4.1 Quantização Geométrica e o Método das Órbitas Coadjuntas

4.1.1 Geometria Simplética

A geometria simplética fornece o formalismo matemático adequado à descrição clássica de sistemas físicos, onde o espaço de fases clássico do sistema tem uma estrutura natural de variedade simplética e os observáveis clássicos são descritos por funções reais suaves nessa variedade simplética.

Definição 4.1. *Seja \mathcal{M} uma variedade e $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$.*

- 1. A 2-forma ω define uma estrutura simplética em \mathcal{M} se é fechada e ω_p é não-degenerada $\forall p \in \mathcal{M}$. Nesse caso, o par (\mathcal{M}, ω) diz-se uma variedade simplética.*
- 2. Um potencial simplético ϑ em $U \subseteq \mathcal{M}$ é uma 1-forma em U tal que $\omega = d\vartheta$ em U .*
- 3. Uma aplicação $\varphi : (\mathcal{M}_1, \omega_1) \rightarrow (\mathcal{M}_2, \omega_2)$ entre variedades simpléticas diz-se simplética se $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. Um symplectomorfismo é um difeomorfismo simplético.*

Definição 4.2. *Sejam (\mathcal{M}, ω) uma variedade simplética e $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Como ω é não-degenerada existe um único campo vectorial X_h em \mathcal{M} tal que*

$$dh + X_h \lrcorner \omega = 0$$

onde, para $v \in \text{Vec}(\mathcal{M})$ e $p \in \mathcal{M}$, $X_h \lrcorner \omega_p(v) = \omega_p(X_h, v)$. O campo vectorial X_h diz-se um campo vectorial hamiltoniano com função hamiltoniana h . Designamos o conjunto de todos os campos vectoriais hamiltonianos em \mathcal{M} por $\text{Vec}^H(\mathcal{M})$.

Se X_h é um campo vectorial hamiltoniano com função hamiltoniana h então

$$\mathcal{L}_{X_h} h = dh(X_h) = -\omega(X_h, X_h) = 0,$$

o que significa que as funções hamiltonianas são constantes ao longo das curvas integrais dos respectivos campos vectoriais hamiltonianos.

Definição 4.3. *Seja (\mathcal{M}, ω) uma variedade simpléctica e $f, g : \mathcal{M} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$.*

1. Os parênteses de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ de f e g são definidos por

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g).$$

2. Um conjunto de funções suaves $\{f_j\} \subset C^\infty(\mathcal{M})$ diz-se um conjunto completo de observáveis clássicos sse qualquer outra função $g \in C^\infty(\mathcal{M})$ tal que $\{f_j, g\} = 0$ para todos os f_j , é constante.

A propriedade 2 significa que, localmente, as funções $\{f_j\} \subset C^\infty(\mathcal{M})$ separam pontos em \mathcal{M} . Além disso, para cada ponto em \mathcal{M} existe um aberto U e um subconjunto de $\{f_j\}$ que é um sistema local de coordenadas em U .

Repare-se que, de acordo com a definição, os parênteses de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ são lineares, antissimétricos e que o facto de ω ser fechada implica a identidade de Jacobi. Vemos assim que $\{\cdot, \cdot\}$ introduz uma estrutura de álgebra de Lie (de dimensão infinita) sobre $C^\infty(\mathcal{M})$, que vamos designar $\mathcal{P}^H(\mathcal{M})$. Temos assim uma sequência exacta de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathcal{P}^H(\mathcal{M}) \xrightarrow{j} \text{Vec}^H(\mathcal{M}) \longrightarrow 0,$$

onde i é o mergulho natural de \mathbb{R} no subespaço das funções constantes em $\mathcal{P}^H(\mathcal{M})$ e j envia uma função hamiltoniana f para o seu campo vectorial hamiltoniano X_f .

4.1.2 Órbitas Coadjuntas

Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g} \cong T_1G$ a sua álgebra de Lie. G actua em si próprio por multiplicação à esquerda e à direita,

$$L_g(a) = ga, \quad R_g(a) = ag, \quad \forall a, g \in G.$$

É imediato que $L_g, R_g \in \text{Diff}(G)$, onde $\text{Diff}(G)$ designa o conjunto de todos os difeomorfismos em G , e que $R_g \circ L_g = L_g \circ R_g, \forall g \in G$.

Seja $X \in \mathfrak{g}$, então

$$\left. \frac{d}{dt} L_g \circ R_g(\exp tX) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (g \exp(tX) g^{-1}) \right|_{t=0}$$

é uma aplicação linear invertível $\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Deixando g variar obtemos a acção (representação) adjunta de G em \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \text{Ad}_g. \end{aligned}$$

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma forma bilinear real, simétrica, associativa¹ e não degenerada em \mathfrak{g} .

Definição 4.4. A acção (representação) coadjunta de G em \mathfrak{g}^* é definida por:

$$\langle \text{Ad}_g^* \xi, X \rangle = \langle \xi, \text{Ad}_g X \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Repare-se que $\text{Ad}_{gh} = \text{Ad}_g \text{Ad}_h$, *i.e.* Ad_g é uma acção à esquerda, enquanto que $\text{Ad}_{gh}^* = \text{Ad}_h^* \text{Ad}_g^*$, *i.e.* a acção coadjunta é uma acção à direita.

A forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ permite-nos identificar \mathfrak{g}^* e \mathfrak{g} , pois para todo $X \in \mathfrak{g}$,

$$\langle X, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

define um elemento de \mathfrak{g}^* . Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não-degenerada obtemos um isomorfismo entre \mathfrak{g} e \mathfrak{g}^* . Com esta identificação, a acção coadjunta de g em \mathfrak{g}^* corresponde à acção adjunta de g^{-1} em \mathfrak{g} .

¹Associativa significa que $\langle X, [Y, Z] \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle$.

Definição 4.5. *Seja ξ um elemento fixo de \mathfrak{g}^* . A órbita coadjunta \mathcal{O}_ξ através de ξ é o subconjunto de \mathfrak{g}^* definido por*

$$\mathcal{O}_\xi = \{Ad_g^* \xi \mid g \in G\} = \xi \triangleleft G.$$

É imediato que \mathcal{O}_ξ é um espaço homogéneo sob a acção coadjunta G . Seja $G_\xi \subseteq G$ o estabilizador de ξ à acção coadjunta de G , *i.e.*

$$G_\xi = \{g \in G \mid Ad_g^* \xi = \xi\}.$$

Destes factos e do Lema 1.12 segue que

Lema 4.6. *Para cada $\xi \in \mathfrak{g}^*$, a aplicação que envia $g \in G_\xi \backslash G$ para $Ad_g^* \xi \in \mathcal{O}_\xi$ estabelece um difeomorfismo $\mathcal{O}_\xi \cong G_\xi \backslash G$. \square*

Este difeomorfismo permite-nos identificar a acção de G sobre \mathcal{O}_ξ com a acção natural à direita de G sobre $G_\xi \backslash G$.

Um dos factos mais notáveis da acção coadjunta é que todas as órbitas coadjuntas possuem uma estrutura simpléctica invariante à acção de G [10], [11]. Para descrever essa estrutura é necessário introduzir vectores tangentes a órbitas coadjuntas, o que vamos fazer de seguida. Sejam $X \in \mathfrak{g}$, $g(t)$ uma curva em G tal que $g'(0) = X$, \mathcal{O} uma órbita coadjunta e $\xi \in \mathcal{O}$. Então,

$$\xi(t) = Ad_{g(t)}^* \xi$$

é uma curva em \mathcal{O} com $\xi(0) = \xi$.

Então, para qualquer $Y \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned} \langle \xi'(0), Y \rangle &= \left. \frac{d}{dt} \langle \xi(t), Y \rangle \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \langle \xi, Ad_{g(t)} Y \rangle \right|_{t=0} \\ &= \langle \xi, ad_X Y \rangle = \langle \xi, [X, Y] \rangle = \langle [\xi, X], Y \rangle \\ &= \langle ad_X^* \xi, Y \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não-degenerada isto implica que $\xi'(0) = ad_X^* \xi$, e assim

$$T_\xi \mathcal{O} = \{ad_X^* \xi \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

Repare-se que a álgebra de Lie de G_ξ é $\mathfrak{g}_\xi = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_X^* \xi = 0\}$, o que é o mesmo que dizer que

$$\mathfrak{g}_\xi = \{X \in \mathfrak{g} \mid [\xi, X] = 0\},$$

porque $\langle \xi, [X, Y] \rangle = \langle [\xi, X], Y \rangle = 0$ para todo Y . Estamos assim a ver que $T_\xi \mathcal{O} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\xi$.

Definição 4.7. Designamos $\omega_\xi(X, Y) = \langle \xi, [X, Y] \rangle = \xi([X, Y])$.

Note-se que esta definição nos dá uma 2-forma na identidade que pode se estendida a toda a órbita coadjunta por invariância à direita.

Lema 4.8. ω_ξ define uma estrutura simpléctica em \mathcal{O}_ξ

Demonstração. É imediato da definição que ω_ξ é antissimétrica, não-degenerada e invariante à acção à direita de G . Basta então mostrar que ω_ξ é fechada.

Seja π a projecção $G \rightarrow \mathcal{O}_\xi$. Então $\pi^* \omega_\xi$ é uma 2-forma invariante à direita em G . Afirmamos que $\pi^* \omega_\xi$ é a derivada exterior de $\langle dgg^{-1}, \xi \rangle$ em $g = 1 \in G$, onde dgg^{-1} é a 1-forma de Maurer-Cartan invariante à direita em G . Como a derivada exterior comuta com o pullback e π é uma submersão, este facto é suficiente para garantir que ω_ξ é fechada. Para provar a afirmação basta notar que, para $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned} d\langle dgg^{-1}, \xi \rangle(X, Y) &= \langle d(dgg^{-1}), \xi \rangle(X, Y) = \langle dgg^{-1}[X, Y], \xi \rangle \\ &= \langle [X, Y], \xi \rangle = \xi([X, Y]), \end{aligned}$$

e assim, $\pi^* \omega_\xi(X, Y) = \xi([\pi_* X, \pi_* Y])$ e vemos que ω_ξ é fechada. Notemos que, em geral, não existe nenhuma 1-forma global em \mathcal{O}_ξ cuja derivada exterior seja ω_ξ . \square

Lembremos que $d\langle dgg^{-1}, \xi \rangle(X, Y)$ é exactamente a 2-forma calculada em 2.3, portanto ω_ξ é, a menos de um factor de 2π , a curvatura da conexão introduzida no fibrado de linha $G \times_\xi \mathbb{C} \rightarrow H \backslash G$.

Exemplo 4.9. Os resultados do exemplo 2.5 mostram que para a órbita coadjunta de $SU(2)$ através de $\chi = \begin{pmatrix} in/4 & 0 \\ 0 & -in/4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}^*(2) \cong \mathfrak{su}(2)$, temos

$$\mathcal{O}_\chi^{SU(2)} \cong U(1) \backslash SU(2) \cong \mathbb{C}P^1,$$

e o exemplo 2.39 que a estrutura simpléctica de $\mathcal{O}^{SU(2)}$ é dada por

$$\omega = in \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}.$$

◇

Exemplo 4.10. O exemplo 2.6 mostra que para a órbita coadjunta de $SL(2, \mathbb{C})$ através de $\xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{a+ib}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+ib}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$,

$$\mathcal{O}_\xi^{SL(2, \mathbb{C})} \cong D \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong TCP^1,$$

e o exemplo 2.37 que a estrutura simpléctica de $\mathcal{O}^{SL(2, \mathbb{C})}$ é

$$\omega = \xi d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 + \bar{\xi} d\bar{\alpha}_1 \wedge d\bar{\alpha}_2.$$

◇

Seja \mathcal{O} uma órbita coadjunta de um grupo de Lie G com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Os observáveis clássicos são associados às funções hamiltonianas correspondentes aos campos vectoriais hamiltonianos gerados pelos elementos de \mathfrak{g} . Este facto é concretizado através de homomorfismos de álgebras de Lie

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \text{Vec}^H(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{P}^H(\mathcal{O})$$

$$A \longmapsto X_A \longmapsto h_A,$$

tais que $\{h_A, h_B\} = h_{[A, B]}$ para todos $A, B \in \mathfrak{g}$. Esta condição diz-nos que, se os $\{A_j\}$ são geradores de \mathfrak{g} , então os $\{h_{A_j}\}$ formam um conjunto completo de observáveis clássicos, porque se $\{h_{A_j}, g\} = X_{A_j}(g) = 0$ para todos os A_j , então $dg = 0$.

Identificando $\mathcal{O}_\xi \cong G_\xi \backslash G$ (Lema 4.6) vemos que, para $A \in \mathfrak{g}$, o campo vectorial hamiltoniano X_A em $p \in G_\xi \backslash G$ é determinado por

$$X_A = \left. \frac{d}{dt} p \exp(tA) \right|_{t=0} \in \text{Vec}(G_\xi \backslash G),$$

e a função hamiltoniana $h_A \in \mathcal{P}^H$ através da definição 4.2, $dh_A + X_A \lrcorner \omega = 0$.

Exemplo 4.11. Vamos determinar os campos vectoriais hamiltonianos e funções hamiltonianas na órbita coadjunta de $SU(2)$. Tomamos o conjunto $\{A_j\}_{j=1,2,3}$ de geradores de $\mathfrak{su}(2)$ (vide exemplo 2.39) e utilizando a coordenada z em U_α formamos o ponto

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ -\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} & \frac{1}{1+z\bar{z}} \end{pmatrix} \in U_\alpha,$$

a que também chamamos z . Actuando à direita com $\exp tA_3$ obtém-se

$$(z_t, \bar{z}_t) = (ze^{-it}, \bar{z}e^{it}),$$

onde o segundo termo se deve ao facto de tratarmos a órbita coadjunta de $SU(2)$ como variedade real. Assim

$$X_3 = \left. \frac{d}{dt} (ze^{-it}, \bar{z}e^{it}) \right|_{t=0} = -i(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}).$$

Procedendo da mesma forma para A_1 e A_2 obtemos

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{i}{2} ((z^2 - 1)\partial_z - (\bar{z}^2 - 1)\partial_{\bar{z}}), \\ X_2 &= -\frac{1}{2} ((z^2 + 1)\partial_z + (\bar{z}^2 + 1)\partial_{\bar{z}}), \end{aligned}$$

Procedendo como no exemplo 4.12 obtém-se as funções hamiltonianas

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{n}{2} \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \\ h_2 &= -\frac{in}{2} \frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \\ h_3 &= -\frac{n}{2} \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1}. \end{aligned}$$

Vê-se imediatamente que $\{h_j\}_{j=1,2,3}$ são funções reais e pode verificar-se que

$$\{h_i, h_j\} = h_{[A_i, A_j]}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

◇

Exemplo 4.12. Determinemos os campos vectoriais hamiltonianos e funções hamiltonianas na órbita coadjunta de $SL(2, \mathbb{C})$.

Sejam $\{A_i, F_i\}_{i=1,2,3}$ o conjunto de geradores de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ descrito no exemplo 2.37 e

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}$$

um ponto no mapa U_α (vide exemplo 2.6).

A acção à direita de $\exp tA_1$ em α é

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} \exp t \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ -i/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} + i\alpha_1 \sin \frac{t}{2} & i \sin \frac{t}{2} + \alpha_1 \cos \frac{t}{2} \\ \alpha_2 \cos \frac{t}{2} + (1 + \alpha_1\alpha_2) \sin \frac{t}{2} & i\alpha_2 \sin \frac{t}{2} + (1 + \alpha_1\alpha_2 \cos \frac{t}{2}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

o que nos dá um caminho em \mathcal{O}

$$(\alpha_t, \bar{\alpha}_t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \bar{\alpha}_1(t), \bar{\alpha}_2(t)),$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \frac{i \sin \frac{t}{2} + \alpha_1 \cos \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2} + i\alpha_1 \sin \frac{t}{2}} \\ \alpha_2(t) &= \left(\cos \frac{t}{2} + i\alpha_1 \sin \frac{t}{2} \right) \left(\alpha_2 \cos \frac{t}{2} + (1 + \alpha_1\alpha_2) \sin \frac{t}{2} \right). \end{aligned}$$

Os termos $\bar{\alpha}_1(t)$ e $\bar{\alpha}_2(t)$ devem-se ao facto da órbita coadjunta ser tratada como uma variedade real.

Assim,

$$X_{A_1} = \frac{d}{dt} (\alpha_t, \bar{\alpha}_t) \Big|_{t=0} = \left(\frac{i}{2}(1 - \alpha_1^2), \frac{i}{2}(1 + 2\alpha_1\alpha_2), -\frac{i}{2}(1 - \bar{\alpha}_1^2), -\frac{i}{2}(1 + 2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2) \right)$$

ou, tomando $\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j} \right\}_{j=1,2} \equiv \left\{ \partial_{\alpha_j}, \partial_{\bar{\alpha}_j} \right\}_{j=1,2}$ como base local de $T_\alpha \mathcal{O}$,

$$X_{A_1} = \frac{i}{2} \left((1 - \alpha_1^2) \partial_{\alpha_1} - (1 - \bar{\alpha}_1^2) \partial_{\bar{\alpha}_1} + (1 + 2\alpha_1\alpha_2) \partial_{\alpha_2} - (1 + 2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2) \partial_{\bar{\alpha}_2} \right).$$

Procedendo da mesma forma para os restantes geradores de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ obtém-se

$$X_{A_2} = \frac{1}{2} \left(-(1 + \alpha_1^2) \partial_{\alpha_1} - (1 + \bar{\alpha}_1^2) \partial_{\bar{\alpha}_1} + (1 + 2\alpha_1\alpha_2) \partial_{\alpha_2} + (1 + 2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2) \partial_{\bar{\alpha}_2} \right),$$

$$X_{A_3} = i \left(-\alpha_1 \partial_{\alpha_1} + \bar{\alpha}_1 \partial_{\bar{\alpha}_1} + \alpha_2 \partial_{\alpha_2} - \bar{\alpha}_2 \partial_{\bar{\alpha}_2} \right),$$

$$X_{F_1} = \frac{1}{2} \left((1 - \alpha_1^2) \partial_{\alpha_1} + (1 - \bar{\alpha}_1^2) \partial_{\bar{\alpha}_1} + (1 + 2\alpha_1\alpha_2) \partial_{\alpha_2} + (1 + 2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2) \partial_{\bar{\alpha}_2} \right),$$

$$X_{F_2} = \frac{i}{2} \left(-(1 + \alpha_1^2) \partial_{\alpha_1} + (1 + \bar{\alpha}_1^2) \partial_{\bar{\alpha}_1} + (1 + 2\alpha_1\alpha_2) \partial_{\alpha_2} - (1 + 2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2) \partial_{\bar{\alpha}_2} \right),$$

$$X_{F_3} = -\alpha_1 \partial_{\alpha_1} - \bar{\alpha}_1 \partial_{\bar{\alpha}_1} + \alpha_2 \partial_{\alpha_2} + \bar{\alpha}_2 \partial_{\bar{\alpha}_2}.$$

As funções hamiltonianas correspondentes a $X_{A_j}, X_{F_j}, j = 1, 2, 3$ podem ser determinadas a partir de $dh_A + X_A \lrcorner \omega = 0$, que é uma equação diferencial exacta de primeira ordem para h , que nos dá a função hamiltoniana h a menos de uma constante. Impondo a condição $\{h_A, h_B\} = h_{[A,B]}$ para todos $A, B \in \mathfrak{g}$ pode determinar-se h unicamente.

Utilizando $\omega = \xi d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 + \bar{\xi} d\bar{\alpha}_1 \wedge d\bar{\alpha}_2$ (vide exemplo 4.10) e os resultados obtidos acima para $X_{A_j}, X_{F_j}, j = 1, 2, 3$ obtém-se

$$\begin{aligned} h_{A_1} &= \frac{i}{2} \left(\xi(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_1^2 \alpha_2) - \bar{\xi}(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_2) \right), \\ h_{A_2} &= \frac{1}{2} \left(\xi(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1^2 \alpha_2) + \bar{\xi}(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_2) \right), \\ h_{A_3} &= i \left(\xi \alpha_1 \alpha_2 - \bar{\xi} \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 + \frac{\xi - \bar{\xi}}{2} \right), \\ h_{F_1} &= \frac{1}{2} \left(\xi(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_1^2 \alpha_2) + \bar{\xi}(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_2) \right), \\ h_{F_2} &= \frac{i}{2} \left(\xi(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1^2 \alpha_2) - \bar{\xi}(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_2) \right), \\ h_{F_3} &= \xi \alpha_1 \alpha_2 + \bar{\xi} \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 + \frac{\xi + \bar{\xi}}{2}. \end{aligned}$$

Note-se que h_{A_j} e $h_{F_j}, j = 1, 2, 3$ são funções reais e que

$$\begin{aligned} \{h_{A_i}, h_{A_j}\} &= h_{[A_i, A_j]}, \\ \{h_{F_i}, h_{F_j}\} &= h_{[F_i, F_j]}, \\ \{h_{A_i}, h_{F_j}\} &= h_{[A_i, F_j]}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

◇

Definição 4.13. *Uma órbita coadjunta diz-se integral se $[\frac{\omega}{2\pi}] \in H^2(\mathcal{O}, \mathbb{Z})$, i.e. $[\frac{\omega}{2\pi}]$ é uma classe de cohomologia integral,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \omega \in \mathbb{Z}$$

para qualquer 2-ciclo inteiro Σ em \mathcal{O} .

Exemplo 4.14. Dos exemplos 2.39 e 4.9 segue imediatamente que, para a órbita coadjunta de $SU(2)$ através de χ , temos $\frac{1}{2\pi} \omega = F$, onde F é a 2-forma de curvatura do

fibrado de linha do exemplo 2.18. Notando que para o segundo grupo de homologia singular, $H_2(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z}$, pelo que para cada 2-ciclo inteiro,

$$\Sigma \leftrightarrow k [\mathbb{C}P^1], \quad k \in \mathbb{Z},$$

e assim

$$\int_{\Sigma} F = k \int_{\mathbb{C}P^1} F.$$

Daqui segue que a órbita coadjunta de $SU(2)$ é integral sse,

$$\int_{\mathbb{C}P^1} F = n \in \mathbb{Z}.$$

◇

Exemplo 4.15. Dos resultados do exemplo 2.37 é imediato que, para a órbita coadjunta de $SL(2, \mathbb{C})$ através de ξ , temos $\frac{\omega}{2\pi} = F$, onde F é a 2-forma de curvatura do fibrado de linha L_{ξ} construído no exemplo 2.13. Determinemos as condições sob as quais a órbita coadjunta de $SL(2, \mathbb{C})$ é integral.

Começamos por notar que $T\mathbb{C}P^1$ é contráctil para a imagem da secção nula que identificamos com $\mathbb{C}P^1$, o que significa que

$$H_2(T\mathbb{C}P^1) \cong H_2(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z},$$

pelo que

$$F \in H^2(T\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}) \Leftrightarrow F|_{\mathbb{C}P^1} \in H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}).$$

O exemplo 2.38 mostrou que

$$F|_{\mathbb{C}P^1} = -\frac{ib}{2\pi} \frac{d\alpha_1 \wedge d\bar{\alpha}_1}{(1 + |\alpha_1|^2)^2},$$

e daqui concluímos que a órbita coadjunta de $SL(2, \mathbb{C})$ é integral sse

$$\int_{\mathbb{C}P^1} F|_{\mathbb{C}P^1} = -b \in \mathbb{Z},$$

facto que foi assumido no exemplo 3.2. ◇

4.1.3 O Programa de Quantização Geométrica

O programa de quantização geométrica consiste em tentar encontrar uma correspondência entre o conjunto de pares (Variedades simpléticas (\mathcal{M}, ω) , funções reais suaves $C^\infty(\mathcal{M})$) e (Espaços de Hilbert complexos \mathcal{H} , Operadores auto-adjuntos $O(\mathcal{H})$). Esta correspondência deverá satisfazer algumas propriedades.

Definição 4.16. *Uma quantização completa do sistema clássico (\mathcal{M}, ω) é um par (\mathcal{H}, Ω) onde:*

1. \mathcal{H} é um espaço de Hilbert complexo separável. Os elementos $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ são chamados as funções de onda quânticas.
2. Ω é uma aplicação que leva observáveis clássicos $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ a operadores auto-adjuntos $\hat{f} \in O(\mathcal{H})$, tal que

$$(a) \widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g};$$

$$(b) \widehat{\lambda f} = \lambda \hat{f} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C};$$

$$(c) \hat{1} = id_{\mathcal{H}};$$

$$(d) [\hat{f}, \hat{g}] = -i\hbar \widehat{\{f, g\}};$$

- (e) Se $\{f_j\}$ é um conjunto completo de observáveis clássicos de (\mathcal{M}, ω) , então \mathcal{H} tem que ser irredutível sob a ação da álgebra de Lie gerada pelos operadores $\{\hat{f}_j\}$.

A álgebra de Lie desses operadores é escrita como $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ e os seus elementos são chamados observáveis quânticos, ou operadores quânticos.

Esta definição requer alguns comentários. Primeiro que tudo, o espaço de Hilbert deverá ser complexo para levar em conta os fenômenos de interferência entre funções de onda que representam os estados quânticos. Os operadores são auto-adjuntos para assegurar que os seus valores próprios são reais, o que é necessário porque eles são interpretados como valores observáveis no sistema quântico.

A parte 1 concretiza o Postulado da mecânica quântica que diz que um sistema físico é descrito por um espaço de Hilbert (complexo) separável. Em relação às condições 2, as condições 2a e 2b estabelecem a linearidade do sistema, propriedade que é desejável sob o ponto de vista matemático. A condição 2c leva em conta que, se o resultado de uma medição é igual à unidade em todos os estados da descrição clássica, o mesmo deverá acontecer na descrição quântica. A condição 2d impõe que a aplicação $f \mapsto \hat{f}$ seja um morfismo de álgebras de Lie (a menos de um factor). As condições 2a-2d são as *condições de quantização de Dirac* [2].

De agora em diante vamos fixar um sistema de unidades onde $\hbar = 1$. A condição 2d passa assim a ser escrita como $[\hat{f}, \hat{g}] = -i\widehat{\{f, g\}}$.

Notemos que a representação infinitesimal de G construída pelo método de quantização geométrica é anti-unitária, pois os operadores são auto-adjuntos (Hermitianos). Para que a representação seja unitária, os operadores devem ser anti-Hermitianos, pois para uma representação unitária ρ de G com representação infinitesimal ρ' e $X \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \langle \rho(\exp tX)v_1, \rho(\exp tX)v_2 \rangle \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \langle (\exp t\rho'(X))v_1, (\exp t\rho'(X))v_2 \rangle \right|_{t=0} \\ &= \langle (\rho'(X))v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, (\rho'(X))v_2 \rangle, \end{aligned}$$

o que significa que os valores próprios dos operadores ρ' devem ser imaginários puros. Para que se obtenha uma representação unitária através do método de quantização geométrica, os operadores infinitesimais deverão ser multiplicados por um factor de i .

4.2 Representações Induzidas e QG de Órbitas Co-adjuntas

4.2.1 Pré-Quantização

Começamos pela pré-quantização. Na notação da definição 4.16,

Definição 4.17. *Uma pré-quantização de um sistema clássico (\mathcal{M}, ω) é um par $(\mathcal{H}^{pq}, \Omega)$*

que só satisfaz as condições 1 e 2a-2d da definição 4.16.

Sejam G um grupo de Lie, $\xi' \in \mathfrak{g}^*$, $\mathcal{O}_{\xi'}$ uma órbita coadjunta e $H \subset G$ o estabilizador. Então $\mathcal{O}_{\xi'} \cong H \backslash G$ (Lema 4.6). Lembremos que na Secção 3.1 definimos a representação induzida $\text{Ind}_H^G V$ como o completado do espaço das secções quadrado-integráveis num fibrado vectorial homogéneo $G \times_{\xi} V \rightarrow H \backslash G$, onde ξ é uma representação unitária de H em V , com acção à esquerda de $g \in G$ dada por

$$(g \triangleright_G \sigma)(\bar{x}) = R(g^{-1})\sigma(\bar{x}g)\sqrt{\rho_g(\bar{x})}$$

com $\rho_g(\bar{x})$ definida por $\rho_g(\bar{x})\mu(\bar{x}) = \mu(\bar{x}g)$ e μ é uma forma de volume em $H \backslash G$. Toda a órbita coadjunta de dimensão $2n$ tem uma forma de volume natural,

$$\mu = \frac{1}{n!}\omega^n = \frac{1}{n!}\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega}_n,$$

onde ω é a estrutura simpléctica em \mathcal{O} .

Da invariância da estrutura simpléctica em \mathcal{O} à acção à direita de G (ver demonstração do lema 4.8) segue que $\rho_g = 1$, e assim que a acção à esquerda de $g \in G$ sobre $\text{Ind}_H^G V$ é simplesmente

$$(g \triangleright_G \sigma)(\bar{x}) = R(g^{-1})\sigma(\bar{x}g),$$

ou, em termos de funções H -equivariantes em G (vide lema 2.23 e definição 3.4),

$$g \triangleright_G f(x) = f(xg).$$

Seja $A \in \mathfrak{g}$ com campo vectorial hamiltoniano X_A e função hamiltoniana correspondente h_A . O teorema seguinte mostra que

Teorema 4.18. *Uma pré-quantização de uma órbita coadjunta de um grupo de Lie é obtida (a menos de um factor de i) como a derivada na identidade da acção à esquerda de G em $\text{Ind}_H^G \mathbb{C}$,*

$$\hat{h}_A \sigma(\bar{x}) = -i \left. \frac{d}{dt} (\exp(tA) \triangleright_G \sigma)(\bar{x}) \right|_{t=0}$$

Demonstração. Sejam $\bar{g} \in H \backslash G \cong \mathcal{O}$ e $g \in G$ tais que $\pi(g) = \bar{g}$, $\sigma \in \text{Ind}_H^G \mathbb{C}$ e f_σ a função H -equivariante associada a σ (vide lema 2.23). Tomemos o caminho $\gamma_t = \bar{g} \exp tA$ em \mathcal{O} , onde $A \in \mathfrak{g}$ tal que $\gamma'_0 = X_A(\bar{g})$. De acordo com o lema 2.30, o levantamento horizontal $\tilde{\gamma}_t$ de γ_t para o fibrado principal $G \rightarrow H \backslash G$ pode ser escrito unicamente como $\tilde{\gamma}_t = h(\gamma_t)g \exp tA$, com $h(\gamma_t) \in H$, $h(\gamma_0) = 1$.

Lembremos que em 2.3.2 introduzimos a noção de derivada covariante de uma secção σ ao longo do campo vectorial gerado por A a partir da conexão no fibrado principal $G \rightarrow H \backslash G$ definida pela projecção sobre a álgebra de Lie \mathfrak{h} da 1-forma de Maurer-Cartan invariante à direita em G (lema 2.28). Vemos assim que a função H -equivariante associada a $\nabla_{X_A} \sigma$ é

$$f_{\nabla_A \sigma}(g) = \left. \frac{d}{dt} f_\sigma (h(\bar{g} \exp tA)g \exp tA) \right|_{t=0},$$

onde escrevemos $f_{\nabla_A} = f_{\nabla_{X_A}}$ para simplificar a notação.

Da H -equivariância de f_σ segue que

$$f_\sigma (h(\bar{g} \exp tA)g \exp tA) = \xi (h(\bar{g} \exp tA)) f_\sigma (g \exp tA)$$

e assim que

$$f_{\nabla_A \sigma}(g) = \left. \frac{d}{dt} \xi (h(\bar{g} \exp tA)) \right|_{t=0} f_\sigma (g) + \left. \frac{d}{dt} f_\sigma (g \exp tA) \right|_{t=0}$$

Repare-se que (vide dedução na página 44)

$$\left. \frac{d}{dt} \xi (h(\bar{g} \exp tA)) \right|_{t=0} = -i \langle \text{proj}_{\mathfrak{h}} (dgg^{-1}(X_A)), \xi \rangle = -i \langle dgg^{-1}(X_A), \xi \rangle,$$

pois $\xi \in \mathfrak{h}$. Notando que dgg^{-1} é a 1-forma de Maurer-Cartan invariante à direita, vemos que

$$\begin{aligned} d \langle dgg^{-1}(X_A), \xi \rangle &= \langle d(X_A \lrcorner dgg^{-1}), \xi \rangle \\ &= \langle -X_A \lrcorner d(dgg^{-1}) + \mathcal{L}_{X_A} dgg^{-1}, \xi \rangle \\ &= \langle -X_A \lrcorner d(dgg^{-1}), \xi \rangle \\ &= -X_A \lrcorner \omega, \end{aligned}$$

o que significa que $\langle dg g^{-1}(X_A), \xi \rangle$ é a função hamiltoniana h_A associada a X_A .

Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned} f_{\nabla_A \sigma}(g) &= -ih_A f_\sigma(g) + \left. \frac{d}{dt} f_\sigma(g \exp tA) \right|_{t=0} \\ &= -ih_A f_\sigma(g) + \left. \frac{d}{dt} (\exp(tA) \triangleright_G f_\sigma)(g) \right|_{t=0}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\left. \frac{d}{dt} (\exp(tA) \triangleright_G f_\sigma)(g) \right|_{t=0} = f_{\nabla_A \sigma}(g) + ih_A f_\sigma(g) = f_{\nabla_A \sigma + ih_A \sigma}(g),$$

ou, em termos das secções correspondentes

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (\exp(tA) \triangleright_G \sigma)(\bar{g}) \right|_{t=0} &= \nabla_A \sigma(\bar{g}) + ih_A \sigma(\bar{g}) \\ &= i(-i\nabla_A \sigma(\bar{g}) + h_A \sigma(\bar{g})), \end{aligned}$$

que é a fórmula de pré-quantização de Souriau-Konstant, a menos de um factor de i ([4], [10], [11], [22]). \square

Mostrámos que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & U(\text{Ind}_H^G \mathbb{C}) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{u}(\mathcal{H}^{pq}) \end{array}$$

Repare-se que, numa trivialização local U_α da órbita coadjunta, temos

$$\hat{h}_A = -i(X_A - i\vartheta_\alpha(X_A))\sigma + h_A \sigma.$$

Notemos que a prova do teorema 4.18 utilizou a existência de uma conexão no fibrado principal $G \rightarrow H \backslash G$ dada pela projecção sobre a álgebra de Lie \mathfrak{h} da 1-forma de Maurer-Cartan invariante à direita em G (lema 2.28), que existe apenas no caso em que a álgebra de Lie \mathfrak{g} admite a decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ com $\text{Ad}_H(\mathfrak{v}) \subseteq \mathfrak{v}$. No caso de grupos de Lie semi-simples, que são os grupos estudados neste trabalho, esta condição é sempre satisfeita pois uma álgebra de Lie semi-simples admite sempre uma forma bilinear não

degenerada [7], o que nos permite identificar \mathfrak{g}^* com \mathfrak{g} e assim a acção coadjunta de $g \in G$ sobre \mathfrak{g}^* é identificada com a acção adjunta de g^{-1} sobre \mathfrak{g} . Nesse caso, a condição $\text{Ad}_H(\mathfrak{v}) \subseteq \mathfrak{v}$ é sempre satisfeita. Para o mostrar consideramos $\xi \in \mathfrak{g}$ e a órbita coadjunta \mathcal{O}_ξ e supomos que existem $v \in \mathfrak{v}$ e $h \in H$ tais que $\text{Ad}(h)v = X \in \mathfrak{h}$, onde H é o estabilizador de ξ . Então

$$h \exp(v) h^{-1} \triangleright \xi = \xi \Rightarrow \exp(v) \triangleright \xi = \xi,$$

o que implica que $\exp(v) \in H$. Esta contradição prova a afirmação.

Vamos agora proceder à pré-quantização das órbitas coadjuntas de $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$.

Exemplo 4.19. O exemplo 4.14 mostrou que a órbita coadjunta de $SU(2)$ é integral para $n \in \mathbb{Z}$. Tomamos $\text{Ind}_{U(1)}^{SU(2)} \mathbb{C}_{\rho_n}$ (vide exemplo 3.4) como espaço de Hilbert de pré-quantização (teorema 4.18). Utilizando a coordenada habitual z no mapa U_α e a 1-forma local de conexão obtida no exemplo 2.39,

$$\vartheta_\alpha = -\frac{in}{2} \left(\frac{\bar{z}dz}{1+z\bar{z}} - \frac{zd\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right),$$

os operadores de pré-quantização são

$$\begin{aligned} \hat{h}_1 &= -\frac{1}{2} ((z^2 - 1)\partial_z - (\bar{z}^2 - 1)\partial_{\bar{z}}) + \frac{n}{4} (z + \bar{z}), \\ \hat{h}_2 &= \frac{i}{2} ((z^2 + 1)\partial_z + (\bar{z}^2 + 1)\partial_{\bar{z}}) - \frac{in}{4} (z - \bar{z}), \\ \hat{h}_3 &= -(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}) + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Pode verificar-se que $[\hat{h}_i, \hat{h}_j] = -i\hat{h}_{\{h_i, h_j\}}$, $i, j = 1, 2, 3$. Tendo em vista os comentários à definição 4.16 e a demonstração do teorema 4.18, a representação infinitesimal unitária de $SU(2)$ é obtida multiplicando os operadores acima por i . Dos resultados dos exemplos 3.5 e 3.4 e do Teorema 4.18 segue que a representação obtida através do processo de pré-quantização não é irredutível. \diamond

Exemplo 4.20. O exemplo 4.15 mostrou que a órbita coadjunta de $SL(2, \mathbb{C})$ é integral para $b \in \mathbb{Z}$. De acordo com o teorema 4.18, tomamos $\text{Ind}_D^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ (vide exemplo 3.3) como

o espaço de Hilbert de pré-quantização. Utilizando as coordenadas (α_1, α_2) no mapa U_α definidas no exemplo 2.6 e a 1-forma local de conexão obtida no exemplo 2.37,

$$\vartheta_\alpha = -\xi\alpha_2 d\alpha_1 - \bar{\xi}\bar{\alpha}_2 d\bar{\alpha}_1,$$

os operadores de pré-quantização são

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \frac{1}{2} \left((1 - \alpha_1^2)\partial_{\alpha_1} - (1 - \bar{\alpha}_1^2)\partial_{\bar{\alpha}_1} + (1 + 2\alpha_1\alpha_2)\partial_{\alpha_2} - (1 + 2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2)\partial_{\bar{\alpha}_2} \right) + \frac{i}{2} (\xi\alpha_1 - \bar{\xi}\bar{\alpha}_1) \\ \hat{A}_2 &= \frac{i}{2} \left((1 + \alpha_1^2)\partial_{\alpha_1} + (1 + \bar{\alpha}_1^2)\partial_{\bar{\alpha}_1} - (1 + 2\alpha_1\alpha_2)\partial_{\alpha_2} - (1 + 2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2)\partial_{\bar{\alpha}_2} \right) + \frac{1}{2} (\xi\alpha_1 + \bar{\xi}\bar{\alpha}_1) \\ \hat{A}_3 &= -\alpha_1\partial_{\alpha_1} + \bar{\alpha}_1\partial_{\bar{\alpha}_1} + \alpha_2\partial_{\alpha_2} - \bar{\alpha}_2\partial_{\bar{\alpha}_2} + \frac{i}{2}(\xi - \bar{\xi}) \\ \hat{F}_1 &= \frac{-i}{2} \left((1 - \alpha_1^2)\partial_{\alpha_1} + (1 - \bar{\alpha}_1^2)\partial_{\bar{\alpha}_1} + (1 + 2\alpha_1\alpha_2)\partial_{\alpha_2} + (1 + 2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2)\partial_{\bar{\alpha}_2} \right) + \frac{1}{2} (\xi\alpha_1 + \bar{\xi}\bar{\alpha}_1) \\ \hat{F}_2 &= \frac{1}{2} \left(-(1 + \alpha_1^2)\partial_{\alpha_1} + (1 + \bar{\alpha}_1^2)\partial_{\bar{\alpha}_1} + (1 + 2\alpha_1\alpha_2)\partial_{\alpha_2} - (1 + 2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2)\partial_{\bar{\alpha}_2} \right) + \frac{i}{2} (\xi\alpha_1 - \bar{\xi}\bar{\alpha}_1) \\ \hat{F}_3 &= i(\alpha_1\partial_{\alpha_1} + \bar{\alpha}_1\partial_{\bar{\alpha}_1} - \alpha_2\partial_{\alpha_2} - \bar{\alpha}_2\partial_{\bar{\alpha}_2}) + \frac{\xi + \bar{\xi}}{2}.\end{aligned}$$

Tendo em vista os comentários à definição 4.16 e a demonstração do teorema 4.18, a representação infinitesimal unitária de $SL(2, \mathbb{C})$ é obtida multiplicando os operadores acima por i . Dos resultados do exemplo 3.3 e do teorema 4.18 concluímos que a representação de $SL(2, \mathbb{C})$ obtida através do processo de pré-quantização não é irredutível.

◇

4.2.2 Polarizações

Para satisfazer o postulado de irredutibilidade do espaço dos estados (2e da definição 4.16) e assim obter uma quantização completa do sistema clássico descrito pela variedade simpléctica (\mathcal{M}, ω) , *i.e.* para obter uma representação unitária irredutível de um grupo de Lie, G , através da quantização das suas órbitas coadjuntas, é necessário restringir o espaço de secções considerado. Para isso vamos introduzir mais uma estrutura em (\mathcal{M}, ω) , as polarizações. Começamos por definir

Definição 4.21. *Seja \mathcal{M} uma variedade de dimensão $2n$.*

1. Uma distribuição real \mathcal{P} em \mathcal{M} é um sub-fibrado do fibrado tangente $T\mathcal{M}$.
2. Uma distribuição real \mathcal{P} é involutiva se $X, Y \in \mathcal{P} \Rightarrow [X, Y] \in \mathcal{P}$. Nesse caso, \mathcal{P} diz-se uma distribuição real integrável.
3. Uma subvariedade $\Sigma \subset \mathcal{M}$ diz-se uma variedade integral de \mathcal{P} se $\mathcal{P}_p = T_p\Sigma$, $\forall p \in \Sigma$.

Seja $n = \dim \mathcal{P}_p$, $\forall p \in \mathcal{M}$. Pelo teorema de Fröbenius [20], sendo \mathcal{P} uma distribuição real involutiva, \mathcal{P} define uma folheação em \mathcal{M} , i.e. existe uma subvariedade $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$, geralmente desconexa, tal que todo o ponto de \mathcal{M} pertence a alguma componente de \mathcal{F} e que existem sistemas de coordenadas locais $\{x_j\}_{j=1, \dots, 2n}$ tais que \mathcal{P} é gerada por $\{\partial_{x_j}\}_{j=1, \dots, n}$. Então $\{x_j\}_{j=1, \dots, n}$ são coordenadas locais das variedades integrais de \mathcal{P} , que são definidas por $\{x_j\}_{j=n+1, \dots, 2n} = \text{constante}$. Cada componente conexa de \mathcal{F} diz-se uma folha da folheação \mathcal{F} . Pode mostrar-se [20] que se \mathcal{P} é uma distribuição integrável em \mathcal{M} então \mathcal{M} é folheada por uma variedade integral de \mathcal{P} e nesse caso cada componente da folheação diz-se uma variedade integral maximal de \mathcal{P} . Designamos por $\mathcal{Q} = \Sigma \setminus \mathcal{M}$ a variedade das folhas e por $\pi_{\mathcal{Q}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}$ a projecção. Vamos considerar apenas distribuições para as quais \mathcal{Q} é uma variedade suave e $\pi_{\mathcal{Q}}$ uma submersão.

Uma função f em \mathcal{M} é constante ao longo das folhas da folheação definida por \mathcal{P} se $\mathcal{P}(f) = 0$, o que é localmente equivalente a dizer que $\partial_{x_j} f = 0$ para $j = 1, \dots, k$, e assim que f depende apenas das variáveis $\{x_j\}_{j=k+1, \dots, n}$.

Definição 4.22. *Seja (\mathcal{M}, ω) uma variedade simpléctica de dimensão $2n$. Uma polarização real em \mathcal{M} é uma folheação de \mathcal{M} através de subvariedades Lagrangianas.*

Estamos a dizer que uma polarização real em \mathcal{M} é uma distribuição real \mathcal{P} em \mathcal{M} que é integrável e que \mathcal{P}_p é um subespaço Lagrangiano de $T_p\mathcal{M}$, i.e. $\omega(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = 0$ e $\dim \mathcal{P}_p = n$, $\forall p \in \mathcal{M}$.

O caso de distribuições complexas é ligeiramente diferente.

Definição 4.23. *Seja \mathcal{M} uma variedade.*

1. Uma distribuição complexa \mathcal{P} em \mathcal{M} é um sub-fibrado do fibrado tangente complexificado $T\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$.
2. Uma distribuição complexa \mathcal{P} é involutiva se $X, Y \in \mathcal{P} \Rightarrow [X, Y] \in \mathcal{P}$.
3. Uma distribuição complexa involutiva é integrável se é analítica ou se
 - (a) $\mathcal{P} \cap \bar{\mathcal{P}}$ tem dimensão constante;
 - (b) $\mathcal{P} + \bar{\mathcal{P}}$ é involutiva.

Definição 4.24. *Seja (\mathcal{M}, ω) uma variedade simpléctica de dimensão real $2n$. Uma polarização complexa em (\mathcal{M}, ω) é uma distribuição complexa involutiva \mathcal{P} em \mathcal{M} tal que*

1. \mathcal{P} é Lagrangiana:
 - (a) $\forall p \in \mathcal{M}, \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_p = n$;
 - (b) $\omega(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = 0$;
2. $\dim(\mathcal{P}_p \cap \bar{\mathcal{P}}_p \cap T_p\mathcal{M})$ é constante $\forall p \in \mathcal{M}$;
3. \mathcal{P} é integrável;

Agora podemos restringir o espaço das secções que forma o espaço de Hilbert de pré-quantização.

Definição 4.25. *Seja $L \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado de linha de pré-quantização com conexão ∇ e \mathcal{P} uma polarização em \mathcal{M} . Seja ainda Θ a 1-forma local da conexão ∇ .*

1. \mathcal{P} diz-se adaptada a ∇ se $\Theta(\mathcal{P}) = 0$.
2. Uma secção σ em $\Gamma(L)$ diz-se polarizada se $\nabla_{\mathcal{P}}\sigma = 0$. O subespaço linear das secções polarizadas em $\Gamma(L)$ é designado por $\Gamma_{\mathcal{P}}(L)$.
3. Um potencial simpléctico ϑ diz-se adaptado a \mathcal{P} se $\vartheta(\mathcal{P}) = 0$.

Construímos o espaço dos estados quânticos do sistema a partir de $\Gamma_{\mathcal{P}}(L)$. Repare-se que para uma polarização \mathcal{P} adaptada a ∇ , a condição $\nabla_{\mathcal{P}}\sigma = 0$ reduz-se a

$$\mathcal{P}(\sigma) = 0,$$

que é simplesmente um sistema de $n = \frac{1}{2} \dim \mathcal{M}$ equações diferenciais parciais lineares independentes, que é integrável porque \mathcal{P} é involutiva. Vemos assim que, para uma variedade simpléctica de dimensão $2n$ com uma polarização adaptada, as secções polarizadas dependem apenas de n variáveis.

Além disso,

$$[\nabla_{\mathcal{P}}, \nabla_{\mathcal{P}}]\sigma = (\nabla_{[\mathcal{P}, \mathcal{P}]} - i\omega(\mathcal{P}, \mathcal{P}))\sigma = 0,$$

pois \mathcal{P} é involutiva e Lagrangiana.

Notemos que em geral $\Gamma_{\mathcal{P}}(L)$ não é um subespaço do espaço de Hilbert de pré-quantização, pois as secções polarizadas não são necessariamente quadrado integráveis, porque se as folhas não são compactas então

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \int_{\bar{x} \in \mathcal{O}} \langle \sigma_1(\bar{x}), \sigma_2(\bar{x}) \rangle \mu(\bar{x}) \rightarrow \infty$$

para $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_{\mathcal{P}}(L)$, pois σ_1 e σ_2 são constantes sobre as variedades integrais de \mathcal{P} .

4.2.3 Polarizações de Kähler: Quantização Holomorfa das Órbitas Coadjuntas de $SU(2)$

Consideramos agora o caso particular de polarizações de Kähler. Como habitualmente neste Capítulo, (\mathcal{M}, ω) designa uma variedade simpléctica.

Definição 4.26. *Uma polarização complexa \mathcal{P} em (\mathcal{M}, ω) diz-se uma polarização de Kähler se $\mathcal{P} \cap \bar{\mathcal{P}} = 0$.*

Uma polarização de Kähler é totalmente complexa, no sentido em que não contém qualquer direcção real.

Lembremos que uma variedade de Kähler é uma variedade real $2n$ -dimensional \mathcal{M} com uma estrutura simpléctica ω e uma estrutura complexa \mathcal{J} que é compatível com ω

em cada ponto, *i.e.*

$$\omega(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) = \omega(X, Y), \quad \forall X, Y \in \text{Vec}(\mathcal{M}).$$

Se $(U; x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ for um mapa de coordenadas locais de uma variedade de Kähler \mathcal{M} , podemos considerar o conjunto de coordenadas complexas $z_j = x_j + iy_j$ e assim tomar a base de $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ formada pelos vectores

$$\begin{aligned} (\partial_{z_j})_p &= \frac{1}{2} (\partial_{x_j} - i\partial_{y_j})_p \\ (\partial_{\bar{z}_j})_p &= \frac{1}{2} (\partial_{x_j} + i\partial_{y_j})_p. \end{aligned}$$

Lembrando que para uma estrutura complexa \mathcal{J} , $\mathcal{J}_p^2 = -\text{id}_{T_p(\mathcal{M})}$, vemos que a extensão de \mathcal{J} a $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ tem valores próprios $\pm i$. Então, $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ pode ser decomposto numa soma directa

$$T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = T_p^{(+i)}\mathcal{M} \oplus T_p^{(-i)}\mathcal{M},$$

onde

$$\begin{aligned} T_p^{(+i)}\mathcal{M} &= \{X_p \in T_p(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} \mid \mathcal{J}_p X_p = +iX_p\} \\ T_p^{(-i)}\mathcal{M} &= \{X_p \in T_p(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} \mid \mathcal{J}_p X_p = -iX_p\}. \end{aligned}$$

Sejam \mathcal{P} e $\bar{\mathcal{P}}$ as distribuições complexas em \mathcal{M} definidas por $T_p^{(+i)}\mathcal{M}$ e $T_p^{(-i)}\mathcal{M}$ respectivamente. Então $\{\partial_{z_j}\}$ e $\{\partial_{\bar{z}_j}\}$ são bases locais para \mathcal{P} e $\bar{\mathcal{P}}$ respectivamente, através de

$$\mathcal{J}_p (\partial_{x_j})_p = (\partial_{y_j})_p, \quad \mathcal{J}_p (\partial_{y_j})_p = -(\partial_{x_j})_p,$$

ou seja

$$\mathcal{J}_p (\partial_{z_j})_p = -(\partial_{z_j})_p, \quad \mathcal{J}_p (\partial_{\bar{z}_j})_p = -i(\partial_{\bar{z}_j})_p,$$

e \mathcal{P} e $\bar{\mathcal{P}}$ são polarizações de Kähler. Por outro lado, de acordo com o teorema de Nirenberg-Newlander [9], dada uma polarização de Kähler arbitrária \mathcal{P} , existe um sistema de coordenadas locais (z, \bar{z}) na vizinhança de cada ponto $p \in \mathcal{M}$ tal que \mathcal{P} (resp. $\bar{\mathcal{P}}$) é gerada por ∂_z (resp. $\partial_{\bar{z}}$).

Numa variedade de Kähler é sempre possível encontrar uma função real suave $K(z, \bar{z})$, chamado *potencial de Kähler*, tal que a expressão local da estrutura simpléctica é dada por

$$\omega = i \frac{\partial^2 K}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} dz_k \wedge d\bar{z}_k,$$

i.e. $\omega = i\partial\bar{\partial}K$ ([14], [22]), onde introduzimos os *operadores de Dolbeault*

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z_j} \otimes dz_j, \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \otimes d\bar{z}_j.$$

Numa variedade de Kähler, o operador de diferenciação exterior (real) pode assim ser escrito como $d = \partial + \bar{\partial}$. Note-se também que

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0,$$

que são condições equivalentes a $d^2 = 0$.

Seja \mathcal{M} uma variedade de Kähler de dimensão complexa 1. O potencial simpléctico mais natural será

$$\Theta = -\frac{i}{2} (\partial K - \bar{\partial} K).$$

Tomando a polarização gerada por $\{\partial_{\bar{z}}\}$, a condição $\nabla_{\partial_{\bar{z}}}\Psi(z, \bar{z}) = 0$ para uma secção polarizada fica

$$\partial_{\bar{z}}\Psi(z, \bar{z}) + \frac{1}{2} (\partial_{\bar{z}}K(z, \bar{z})) \Psi(z, \bar{z}) = 0,$$

o que implica que

$$\Psi(z, \bar{z}) = F(z) e^{-\frac{1}{2}K(z, \bar{z})}.$$

Para secções polarizadas $\Psi(z, \bar{z}) = F(z) e^{-\frac{1}{2}K(z, \bar{z})}$, temos

$$\nabla_{\partial_{\bar{z}}}\Psi(z, \bar{z}) = [\partial_{\bar{z}}F(z) - i(-i\partial_{\bar{z}}K)F(z)] e^{-\frac{1}{2}K(z, \bar{z})}.$$

Estamos assim a ver que podemos identificar secções holomorfas $F(z)$ com secções polarizadas e utilizar o potencial simpléctico adaptado $\theta = -i\partial K$. Note-se que $\Theta = \theta + \frac{i}{2}dK$ é uma 1-forma de uma conexão num fibrado de linha sobre \mathcal{M} e que θ não é uma 1-forma de uma conexão.

Exemplo 4.27. Lembremos que para $SU(2)$, temos $\mathcal{O}_n \cong \mathbb{C}P^1$ (vide exemplo 4.9), que é uma variedade de Kähler. Utilizando a coordenada habitual z no mapa U_α , a estrutura simpléctica é dada por

$$\omega = in \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2},$$

que corresponde ao potencial de Kähler

$$K(z, \bar{z}) = n \ln(1 + z\bar{z}).$$

Tomamos a polarização gerada por $\partial_{\bar{z}}$. Então as secções polarizadas são secções σ tais que $\partial_{\bar{z}}\sigma = 0$, *i.e.* são secções holomorfas. O potencial simpléctico adaptado a esta polarização é

$$\vartheta_\alpha = -in \frac{\bar{z}dz}{1 + z\bar{z}},$$

e os operadores de quantização são assim

$$\begin{aligned} \hat{h}_1 &= -\frac{1}{2}(z^2 - 1)\partial_z + \frac{n}{2}z, \\ \hat{h}_2 &= \frac{i}{2}(z^2 + 1)\partial_z - \frac{in}{2}z, \\ \hat{h}_3 &= -z\partial_z + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

A representação unitária de $\mathfrak{su}(2)$ é obtida multiplicando os operadores de quantização por i . Assim, definimos os operadores unitários

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= i\hat{h}_1 = -\frac{i}{2}(z^2 - 1)\partial_z + \frac{in}{2}z, \\ \hat{J}_2 &= i\hat{h}_2 = -\frac{1}{2}(z^2 + 1)\partial_z + \frac{n}{2}z, \\ \hat{J}_3 &= i\hat{h}_3 = -i\left(z\partial_z - \frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

Para mostrar que a representação construída é irredutível é necessário definir os 'operadores de escada'

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ &= \hat{J}_1 + i\hat{J}_2 = -i(z^2\partial_z - nz) \\ \hat{J}_- &= \hat{J}_1 - i\hat{J}_2 = i\partial_z. \end{aligned}$$

Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned} [\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= 2i\hat{J}_3, \\ [\hat{J}_\pm, \hat{J}_3] &= \pm i\hat{J}_\pm. \end{aligned}$$

Já sabemos que o espaço de Hilbert formado pelas secções holomorfas em $\text{Ind}_{U(1)}^{SU(2)}\mathbb{C}_{\rho_n}$, *i.e.* $\text{HInd}_{U(1)}^{SU(2)}\mathbb{C}_{\rho_n}$, tem dimensão $n + 1$ (vide exemplo 3.5). Uma base para este espaço é dada pelos vectores

$$z^m \leftrightarrow |m\rangle, \quad 0 \leq m \leq n.$$

Em termos desta base, os operadores \hat{J}_3, \hat{J}_\pm actuam como

$$\begin{aligned} \hat{J}_3|m\rangle &= -i\left(z\partial_z - \frac{n}{2}\right)z^m = -i\left(m - \frac{n}{2}\right)|m\rangle, \\ \hat{J}_+|m\rangle &= -i\left(z^2\partial_z - nz\right)z^m = -i(m - n)|m + 1\rangle, \\ \hat{J}_-|m\rangle &= i\partial_z z^m = im|m - 1\rangle. \end{aligned}$$

Os operadores \hat{J}_\pm são designados por 'operadores de escada' porque \hat{J}_+ sob um estado e \hat{J}_- desce um estado. Repare-se que $\hat{J}_+|n\rangle = -i(n - n)|m + 1\rangle = 0$, ou seja, $|n\rangle = z^n$ é um vector maximal, e que $\hat{J}_-|0\rangle = i\partial_z z^0 = 0$. Vemos assim que $\text{HInd}_{U(1)}^{SU(2)}\mathbb{C}_{\rho_n}$ é gerado por esse vector maximal e por \hat{J}_- , o que significa que podemos escrever

$$\text{HInd}_{U(1)}^{SU(2)}\mathbb{C}_{\rho_n} = \bigoplus_{m=0}^n \hat{J}_-^m |n\rangle,$$

onde

$$\hat{J}_-^m = \underbrace{\hat{J}_- \circ \hat{J}_- \circ \dots \circ \hat{J}_-}_{m \text{ vezes}}.$$

Destes factos e de $\text{HInd}_{U(1)}^{SU(2)}\mathbb{C}_{\rho_n}$ ter dimensão finita segue imediatamente que os únicos subespaços fechados de $\text{HInd}_{U(1)}^{SU(2)}\mathbb{C}_{\rho_n}$ que são invariantes à acção de todos os operadores da representação (e em particular a \hat{J}_\pm) são $\{0\}$ e o próprio $\text{HInd}_{U(1)}^{SU(2)}\mathbb{C}_{\rho_n}$, *i.e.* a representação unitária obtida é irredutível. \diamond

4.2.4 Polarizações Reais: Quantização das Órbitas Coadjuntas de $SL(2, \mathbb{C})$

Tratemos agora do caso das polarizações reais. Lembremos uma polarização real numa variedade simpléctica (\mathcal{M}, ω) é uma folheação de (\mathcal{M}, ω) através de subvariedades Lagrangianas. Começamos por mostrar que

Lema 4.28. *Se \mathcal{P} é uma polarização real numa variedade simpléctica (\mathcal{M}, ω) , existe uma base local de \mathcal{P} formada por campos vectoriais Hamiltonianos.*

Demonstração. Como a distribuição real \mathcal{P} é integrável, existe um sistema local de coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ de \mathcal{M} que define um sistema local de coordenadas num aberto U da variedade integral $\Sigma \subset \mathcal{M}$, de \mathcal{P} , onde os y^i 's são constantes. Como \mathcal{P} é Lagrangiana, a restrição a Σ dos campos vectoriais Hamiltonianos correspondentes às funções coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$ forma uma base do espaço tangente a Σ em cada ponto. \square

Seja $\mathcal{M} = \mathcal{O} \cong H \backslash G$ uma órbita coadjunta de um grupo de Lie G com álgebra de Lie \mathfrak{g} e estabilizador H . Do lema 4.28 segue que \mathcal{P} é gerada por campos vectoriais hamiltonianos invariantes à direita. Neste caso \mathcal{P} diz-se uma *polarização invariante*.

Repare-se que como \mathcal{P} é integrável, é gerada pelos campos vectoriais hamiltonianos invariantes à direita correspondentes a uma subálgebra de Lie, $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{g}$. Assim, as folhas da folheação definida por \mathcal{P} , *i.e.* as variedades integrais Z , formam um subgrupo de Lie de G . Além disso, como $\mathcal{P}_p \subset T_p(H \backslash G)$ é um subespaço Lagrangiano,

$$\dim Z = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O} = \frac{1}{2} (\dim G - \dim H),$$

onde H é o estabilizador da acção coadjunta. Formamos o produto semi-directo $H \ltimes Z$, onde a acção de H em Z é dada por

$$h \triangleright z = h^{-1}zh, \quad \forall h \in H, z \in Z.$$

Notemos que $H \ltimes Z$ é um subgrupo de Lie de G .

Então a variedade das folhas é

$$\mathcal{Q} = Z \backslash \mathcal{O} \cong (H \backslash H \times Z) \backslash (H \backslash G) \cong (H \times Z) \backslash G.$$

Quando as folhas da polarização não são compactas, uma secção polarizada tem norma infinita, pois é constante sobre as folhas. Nesse caso torna-se necessário integrar sobre a variedade das folhas. Notemos que \mathcal{Q} poderá não admitir uma forma de volume invariante à acção à direita de G . Nesse caso é necessário introduzir um factor de correcção à forma de volume que se vai utilizar (*cf.* factor $\rho_g(\bar{x})$ introduzido na definição 3.2).

Lembremos que o fibrado de pré-quantização é determinado a partir da escolha de um caracter unitário ξ em H (vide 2.1.2 e 3.1). Ao introduzir uma polarização estamos a passar de um fibrado de linha sobre \mathcal{O} para um fibrado de linha sobre \mathcal{D} , o que se traduz numa extensão de ξ a $H \times Z$. Como as funções equivariantes, correspondentes às secções polarizadas, são constantes nos Z -cosets à esquerda, a extensão de ξ a $H \times Z$ tem que ser trivial,

$$\xi(H \times Z) = \xi(H),$$

que está bem definida. Notemos (vide construção na página 31) que a extensão ξ' de ξ a $H \times Z$ induz naturalmente um morfismo f entre os fibrados $G \times_{\xi} \mathbb{C}_{\xi} \rightarrow \mathcal{O}$ e $G \times_{\xi'} \mathbb{C}_{\xi'} \rightarrow \mathcal{Q}$ cuja aplicação correspondente entre os espaços de base é simplesmente a projecção $\pi_{\mathcal{Q}} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{Q}$, *i.e.* o diagrama abaixo comuta,

$$\begin{array}{ccc} G \times_{\xi} \mathbb{C}_{\xi} & \xrightarrow{f} & G \times_{\xi'} \mathbb{C}_{\xi'} \\ \pi_{\mathcal{O}} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_{\mathcal{Q}} \\ \mathcal{O} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Q}}} & \mathcal{Q}. \end{array}$$

Como corolário do teorema 4.18 temos o seguinte. Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} , $H \subset G$ o estabilizador da acção coadjunta de G sobre \mathfrak{g}^* e \mathcal{F} uma folheação de $H \backslash G$ através de subvariedades Lagrangianas $Z \subset G$. Então

Corolário 4.29. *A representação unitária polarizada de \mathfrak{g} , obtida através do método de quantização geométrica, é igual à derivada na identidade da acção à esquerda de G sobre $Ind_{H \times Z}^G \mathbb{C}$.* □

Notemos que, para $\sigma \in \text{Ind}_{H \times Z}^G \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (\exp(tA) \triangleright_G \sigma)(\bar{g}) \right|_{t=0} &= \nabla_A \sigma(\bar{g}) + ih_A \sigma(\bar{g}) + \left. \frac{d}{dt} \sqrt{\rho_{\exp tA}(\bar{g})} \right|_{t=0} \sigma(\bar{g}) \\ &= i \left(-i \nabla_A \sigma(\bar{g}) + h_A \sigma(\bar{g}) - i \left. \frac{d}{dt} \sqrt{\rho_{\exp tA}(\bar{g})} \right|_{t=0} \sigma(\bar{g}) \right). \end{aligned}$$

Exemplo 4.30. Lembremos que para $SL(2, \mathbb{C})$, $\mathcal{O}_\xi \cong D \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cong T\mathbb{C}P^1$ (vide exemplo 4.10), onde $D \subset SL(2, \mathbb{C})$ é o subgrupo formado pelas matrizes da forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\} \right\}.$$

Utilizando as coordenadas (α_1, α_2) em U_α (vide exemplo 2.6), a estrutura simpléctica é dada por

$$\omega = \xi d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 + \bar{\xi} d\bar{\alpha}_1 \wedge d\bar{\alpha}_2.$$

Tomamos a polarização real correspondente à folheação de \mathcal{O}_ξ através subgrupo $Z \subset SL(2, \mathbb{C})$ introduzido no exemplo 2.7,

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C} \right\},$$

ao qual corresponde a álgebra de Lie \mathfrak{z} gerada pelas matrizes

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_2 + F_1 \quad \text{e} \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} = A_1 + F_2,$$

onde A_1, A_2, F_1 e F_2 correspondem à base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ introduzida em 1.2.1. Na identidade em $D \backslash SL(2, \mathbb{C})$, os campos vectoriais hamiltonianos invariantes à direita gerados por Z_1 e Z_2 são

$$X_{Z_1}(1) = \partial_{\alpha_2} + \partial_{\bar{\alpha}_2} \quad X_{Z_2}(1) = i(\partial_{\alpha_2} - \partial_{\bar{\alpha}_2}).$$

A polarização escolhida é gerada por $\{X_{Z_1}(1), X_{Z_2}(1)\}$ e é adaptada ao potencial simpléctico

$$\vartheta_\alpha = -\xi \alpha_2 d\alpha_1 - \bar{\xi} \bar{\alpha}_2 d\bar{\alpha}_1,$$

e desta forma obtemos os operadores polarizados

$$\begin{aligned}
\hat{A}_1^{pol} &= \frac{1}{2} \left((1 - \alpha_1^2) \partial_{\alpha_1} - (1 - \bar{\alpha}_1^2) \partial_{\bar{\alpha}_1} \right) + \frac{i}{2} (\xi \alpha_1 - \bar{\xi} \bar{\alpha}_1) \\
\hat{A}_2^{pol} &= \frac{i}{2} \left((1 + \alpha_1^2) \partial_{\alpha_1} + (1 + \bar{\alpha}_1^2) \partial_{\bar{\alpha}_1} \right) + \frac{1}{2} (\xi \alpha_1 + \bar{\xi} \bar{\alpha}_1) \\
\hat{A}_3^{pol} &= -\alpha_1 \partial_{\alpha_1} + \bar{\alpha}_1 \partial_{\bar{\alpha}_1} + \frac{i}{2} (\xi - \bar{\xi}) \\
\hat{F}_1^{pol} &= -\frac{i}{2} \left((1 - \alpha_1^2) \partial_{\alpha_1} + (1 - \bar{\alpha}_1^2) \partial_{\bar{\alpha}_1} \right) + \frac{1}{2} (\xi \alpha_1 + \bar{\xi} \bar{\alpha}_1) \\
\hat{F}_2^{pol} &= \frac{1}{2} \left(-(1 + \alpha_1^2) \partial_{\alpha_1} + (1 + \bar{\alpha}_1^2) \partial_{\bar{\alpha}_1} \right) + \frac{i}{2} (\xi \alpha_1 - \bar{\xi} \bar{\alpha}_1) \\
\hat{F}_3^{pol} &= i (\alpha_1 \partial_{\alpha_1} + \bar{\alpha}_1 \partial_{\bar{\alpha}_1}) + \frac{1}{2} (\xi + \bar{\xi}).
\end{aligned}$$

As polarizações introduziram um problema. Como as folhas da folheação não são compactas, uma secção polarizada ψ tem norma infinita,

$$\|\psi\| = \infty,$$

pois $\langle \psi(\alpha), \psi(\alpha) \rangle$ é constante ao longo das folhas da folheação induzida por \mathcal{P} .

É assim necessário integrar sobre a variedade das folhas $\mathcal{Q} = Z \setminus \mathcal{O}_\xi$. Notando que $D \times Z = P$, onde $P \subset SL(2, \mathbb{C})$ é o subgrupo introduzido no exemplo 2.7, a variedade das folhas é

$$\mathcal{Q} = Z \setminus \mathcal{O}_\xi \cong (D \times Z) \setminus SL(2, \mathbb{C}) \cong P \setminus SL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}P^1,$$

e podemos utilizar a forma de volume

$$\mu(\alpha_1) = 2i \frac{d\alpha_1 \wedge d\bar{\alpha}_1}{(1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1)^2}.$$

Repare-se que estamos a tomar $\text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ como espaço de Hilbert de quantização. Lembremos que a acção à esquerda de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre $\text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ contém um termo extra, que permite compensar a falta de invariância da forma de volume à acção de $SL(2, \mathbb{C})$ (vide exemplo 3.2 e comentário ao corolário 4.29), o que significa que para $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, os operadores de quantização vão ser

$$\hat{X} \mapsto \hat{X}_{pol} - i \frac{d}{dt} \sqrt{\rho_{\exp tX}} \Big|_{t=0}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\hat{A}_1^q &= \frac{1}{2} \left((1 - \alpha_1^2) \partial_{\alpha_1} - (1 - \bar{\alpha}_1^2) \partial_{\bar{\alpha}_1} \right) + \frac{i}{2} (\xi \alpha_1 - \bar{\xi} \bar{\alpha}_1) \\
\hat{A}_2^q &= \frac{i}{2} \left((1 + \alpha_1^2) \partial_{\alpha_1} + (1 + \bar{\alpha}_1^2) \partial_{\bar{\alpha}_1} \right) + \frac{1}{2} (\xi \alpha_1 + \bar{\xi} \bar{\alpha}_1) \\
\hat{A}_3^q &= -\alpha_1 \partial_{\alpha_1} + \bar{\alpha}_1 \partial_{\bar{\alpha}_1} + \frac{i}{2} (\xi - \bar{\xi}) \\
\hat{F}_1^q &= -\frac{i}{2} \left((1 - \alpha_1^2) \partial_{\alpha_1} + (1 - \bar{\alpha}_1^2) \partial_{\bar{\alpha}_1} \right) + \frac{1}{2} (\xi \alpha_1 + \bar{\xi} \bar{\alpha}_1) + i \frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} \\
\hat{F}_2^q &= \frac{1}{2} \left(-(1 + \alpha_1^2) \partial_{\alpha_1} + (1 + \bar{\alpha}_1^2) \partial_{\bar{\alpha}_1} \right) + \frac{i}{2} (\xi \alpha_1 - \bar{\xi} \bar{\alpha}_1) - \frac{\alpha_1 - \bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} \\
\hat{F}_3^q &= i (\alpha_1 \partial_{\alpha_1} + \bar{\alpha}_1 \partial_{\bar{\alpha}_1}) + \frac{1}{2} (\xi + \bar{\xi}) + i \frac{1 - \alpha_1 \bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1}.
\end{aligned}$$

A representação unitária de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ é obtida multiplicando os operadores acima por i e, de acordo com os resultados do exemplo 3.2 e com o Teorema 4.18, a representação unitária obtida é irredutível. \diamond

Exemplo 4.31. Verifiquemos que a representação unitária de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ obtida é, de facto, igual à derivada na identidade da acção à esquerda de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre $\text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$ (cf. cor. 4.29).

Notando que os $\{A_j\}_{j=1,2,3}$ são os geradores de rotações em $SL(2, \mathbb{C})$ vemos que

$$\left. \frac{d}{dt} \sqrt{\rho_{\exp t A_j}} \right|_{t=0} = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Para os $\{F_j\}_{j=1,2,3}$ obtém-se

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \sqrt{\rho_{\exp t F_1}} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \frac{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1}{\left| \cosh \frac{t}{2} + \alpha_1 \sinh \frac{t}{2} \right|^2 + \left| \sinh \frac{t}{2} + \alpha_1 \cosh \frac{t}{2} \right|^2} \right|_{t=0} = -\frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1}, \\
\left. \frac{d}{dt} \sqrt{\rho_{\exp t F_2}} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \frac{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1}{\left| \cosh \frac{t}{2} + i \alpha_1 \sinh \frac{t}{2} \right|^2 + \left| \alpha_1 \cosh \frac{t}{2} - i \sinh \frac{t}{2} \right|^2} \right|_{t=0} = \frac{-i(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} \\
\left. \frac{d}{dt} \sqrt{\rho_{\exp t F_3}} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \frac{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1}{e^t + |\alpha_1|^2 e^{-t}} \right|_{t=0} = -\frac{1 - \alpha_1 \bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1}.
\end{aligned}$$

Utilizando os resultados do exemplo 3.2 obtém-se, para $f \in \text{Ind}_P^{SL(2, \mathbb{C})} \mathbb{C}_\xi$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\exp tA_1 \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f(\alpha_1)) &= \frac{i}{2} \left((1 - \alpha_1^2) \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} - (1 - \bar{\alpha}_1^2) \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}_1} \right) - \frac{1}{2} (\xi \alpha_1 - \bar{\xi} \bar{\alpha}_1) f \\ &= i \hat{A}_1^q f, \\ \frac{d}{dt} (\exp tA_2 \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f(\alpha_1)) &= -\frac{1}{2} \left((1 + \alpha_1^2) \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + (1 + \bar{\alpha}_1^2) \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}_1} \right) + \frac{i}{2} (\xi \alpha_1 + \bar{\xi} \bar{\alpha}_1) f \\ &= i \hat{A}_2^q f, \\ \frac{d}{dt} (\exp tA_3 \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f(\alpha_1)) &= -i \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + i \bar{\alpha}_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}_1} - \frac{1}{2} (\xi - \bar{\xi}) f \\ &= i \hat{A}_3^q f, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\exp tF_1 \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f(\alpha_1)) &= \\ &= \frac{1}{2} \left((1 - \alpha_1^2) \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + (1 - \bar{\alpha}_1^2) \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}_1} \right) + \frac{i}{2} (\xi \alpha_1 + \bar{\xi} \bar{\alpha}_1) f - \frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} f \\ &= i \hat{F}_1^q f, \\ \frac{d}{dt} (\exp tF_2 \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f(\alpha_1)) &= \\ &= \frac{i}{2} \left(-(1 + \alpha_1^2) \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + (1 + \bar{\alpha}_1^2) \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}_1} \right) - \frac{1}{2} (\xi \alpha_1 - \bar{\xi} \bar{\alpha}_1) f - i \frac{\alpha_1 - \bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} f \\ &= i \hat{F}_2^q f, \\ \frac{d}{dt} (\exp tF_3 \triangleright_{SL(2, \mathbb{C})} f(\alpha_1)) &= \\ &= - \left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \bar{\alpha}_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}_1} \right) + \frac{i}{2} (\xi + \bar{\xi}) f - \frac{1 - \alpha_1 \bar{\alpha}_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} f \\ &= i \hat{F}_3^q f. \end{aligned}$$

◇

Bibliografia

- [1] J-L. Brylinski. *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*. Birkäuser, 1993.
- [2] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press, Oxford, fourth edition, 1958.
- [3] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, and S.P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications, Part II*. Graduate Texts in Mathematics 104. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [4] A. Echeverría-Henríquez and et al. Mathematical Foundations of Geometric Quantization. *Extracta Math.*, 13:135–238, 1998.
- [5] I. M. Gelfand, M. I. Graev, and N. Ya. Vilenkin. *Generalized Functions*, volume 5 of *Integral Geometry and Representation Theory*. Academic Press, New York, 1966.
- [6] I. M. Gel'fand, R. A. Minlos, and Z. A. Shapiro. *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications*. Pergamon Press, 1963.
- [7] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Number 9 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1972.
- [8] D. Husemoller. *Fibre Bundles*. Number 20 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1994.

- [9] A. A. Kirillov. Geometric Quantization. In *Dynamical Systems IV*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 4, pages 139–176. Springer-Verlag, Berlin-New-York, second edition, 1990. (Eds V. I. Arnold and S.P. Novikov).
- [10] A. A. Kirillov. Merits and Demerits of the Orbit Method. *Bul. Amer. Math. Soc.*, 36(4):433–488, 1999.
- [11] A.A. Kirillov. *Elements of the Theory of Representations*. Springer-Verlag, 1976.
- [12] A. Knapp. *Representation Theory of Semisimple Groups*. Princeton University Press, 1986.
- [13] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume I. John Wiley & Sons, New York, 1963.
- [14] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume II. John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [15] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library.
- [16] G. W. Mackey. On a Theorem of Stone and von Neumann. *Duke Math. Jour.*, 16:313–326, 1949.
- [17] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. IoP, 2nd edition, 2003.
- [18] M. Reed and B. Simon. *Functional Analysis*, volume I of *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, 1980.
- [19] W. Rossmann. *Lie Groups. An introduction through linear groups*. Number 5 in Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, 2002.
- [20] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume I. Publish or Perish, Berkeley, second edition, 1979.

- [21] M. Sugiura. *Unitary Representations and Harmonic Analysis: An Introduction*. Halsted Press, 1975.
- [22] N. Woodhouse. *Geometric Quantization*. Oxford, 1991.