

Universidade do Algarve

Faculdade de Ciências e Tecnologia



Quantização Geométrica

Pedro Vaz

Prefácio

Estas notas traduzem o conteúdo de dois seminários, de 90 minutos cada um, dados na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve em Julho de 2003, que pretendiam fornecer uma introdução à quantização geométrica e à sua relação com as representações unitárias irredutíveis de grupos e álgebras de Lie. Dada a extensão do tema e a restrição temporal faz-se um tratamento relativamente ligeiro do assunto, onde se optou por tentar transmitir o essencial de uma forma clara e breve. Pelas mesmas razões não é dada muita profundidade nem se explora todos os assuntos que daqui poderiam provir.

Embora seja insatisfatória na maior parte dos casos, o processo de quantização geométrica permite-nos desenvolver muita matemática bastante interessante, sendo um ponto importante a explorar a questão da utilização deste processo na teoria de representações de grupos de Lie pelo método das órbitas. Podemos assim dizer que estamos a tentar desenvolver matemática a partir de física, um caminho que foi tão fértil no passado.

Começamos por descrever o chamado Programa de Quantização Geométrica, onde se estabelece a relação entre as descrições clássica e quântica de um sistema físico. São definidas e justificadas as propriedades que o espaço de Hilbert que suporta os estados quânticos deverá ter, assim como o processo de construção, a partir dos observáveis clássicos do sistema, dos operadores auto-adjuntos que actuam nesse espaço de Hilbert e cujos valores próprios correspondem aos observáveis na descrição quântica.

Nessa altura surge a oportunidade de fazer uma breve digressão pela teoria de representações de grupos e álgebras de Lie, onde são apresentados os conceitos básicos e se começa a estabelecer a relação com a quantização geométrica.

De seguida passamos para o chamado processo de pré-quantização, onde por correcções sucessivas são construídos os operadores que satisfazem as propriedades requeridas, assim como o espaço de Hilbert que suporta os estados quânticos. Julgamos que esta abordagem permite clarificar melhor as relações entre os sistemas clássico e quântico, pois somos levados a construir correctamente os operadores utilizando argumentos relativamente simples. São apresentadas também as insuficiências deste processo.

Somos então levados, primeiro intuitivamente, e depois de uma forma mais formal, a introduzir mais estruturas matemáticas no processo. Desenvolvemos o conceito de Polarização no ambiente conhecido do fibrado cotangente, para depois introduzir com maior formalismo as estruturas complexas, distribuições complexas e Polarizações de Kähler, que são bastante úteis no processo de quantização holomorfa e consequentemente na relação entre a quantização e a teoria de representações de grupos e álgebras de Lie. São discutidos os efeitos da condição de Polarização sobre os estados e operadores. Através de um exemplo simples verificamos que o processo não deverá acabar nesta etapa e deverá ser feita mais uma correção, a chamada correção metaplética, que não fazemos aqui, e que permitiria introduzir mais estrutura matemática.

No final é tratado o processo de quantização holomorfa da órbita coadjunta do grupo de Lie $SU(2)$, relacionado com a descrição do spin das partículas. É assim construída uma representação unitária irredutível da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

Pedro Vaz

<i>CONTEÚDO</i>	3
-----------------	---

Conteúdo

1	Introdução	5
2	O Programa de Quantização Geométrica	7
2.1	A Irredutibilidade do Espaço dos Estados	8
2.2	Simetrias	9
3	Intermezzo em Teoria de Representações	13
3.1	Representações de Grupos de Lie. Conceitos Básicos	13
3.2	Representações de Álgebras de Lie	14
4	Pré-quantização	17
4.1	Primeira tentativa de definição dos estados quânticos e operadores	17
4.2	Espaço dos estados	20
4.3	Operadores de pré-quantização	24
4.4	Exemplos	27
4.4.1	Pré-quantização do oscilador harmônico n-dimensional	27
4.4.2	Pré-quantização de fibrados cotangentes	29
5	Quantização	31
5.1	Polarizações	31
5.1.1	Estruturas complexas	34
5.1.2	Distribuições complexas	35
5.1.3	Polarizações complexas	36
5.1.4	Polarizações de Kähler	36
5.1.5	A Condição de polarização sobre os estados	41

<i>CONTEÚDO</i>	4
5.1.6 A condição de polarização sobre os operadores	42
5.2 Quantização Holomorfa	44
5.2.1 Exemplo: Representação de Bargmann do oscilador harmónico.	44
6 O Método da Órbitas	47
6.1 Breve descrição do Método das Órbitas	47
6.2 Quantização da Órbita Coadjunta de $SU(2)$	47

1 Introdução

Existem dois tipos de teorias para descrever o comportamento dinâmico dos sistemas físicos, as teorias clássicas e as teorias quânticas. A descrição quântica é obtida a partir da descrição clássica através de um processo apropriado, chamado quantização do sistema.

Em física teórica existem várias formas de quantizar uma teoria clássica, como quantização canónica, quantização pelo integral de caminho de Feynman, quantização de Weyl-Wigner, quantização de Moyal, e outros métodos desenvolvidos a partir destes. Em muitos casos, a quantização canónica é a forma mais fácil e directa de quantizar.

A quantização canónica baseia-se nas regras de quantização de Dirac. Aplica-se a sistemas simples com número finito de graus de liberdade e espaços de fase 'planos' (abertos de \mathbb{R}^{2n}). O método começa pela descrição clássica, onde o sistema em questão é descrito pelo formalismo Hamiltoniano (ou canónico), onde o espaço de fases clássico é descrito localmente por um conjunto de coordenadas canónicas (q^j, p_j) , as coordenadas de posição e momento. Os observáveis clássicos são funções $f(q^j, p_j)$. Eventualmente poderá haver um grupo G de simetrias a actuar sobre o sistema. Na descrição quântica o espaço de fases quântico é um espaço de Hilbert complexo \mathcal{H} . Os observáveis quânticos são operadores auto-adjuntos que actuam em \mathcal{H} , $\mathcal{O}(\mathcal{H})$. As simetrias do sistema são realizadas por um grupo de operadores unitários $U_G(\mathcal{H})$. O processo de quantização consiste em tomar como espaço de Hilbert o espaço de funções quadrado-integráveis sobre o espaço das configurações, i.e. funções quadrado-integráveis que dependem apenas das coordenadas de posição, $\psi(q^j)$. O operador quântico associado com $f(q^j, p_j)$ é obtido substituindo p_j por $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q^j}$, e formar assim a correspondência

$$f(q^j, p_j) \rightarrow f\left(q^j, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q^j}\right).$$

Desta forma, assegura-se que as relações de comutação clássicas entre coordenadas canónicas tenham um correspondente quântico: as regras de comutação entre os operadores quânticos de posição e momento (que se relacionam ao princípio da incerteza),

$$\{p_i, q^j\} = \delta_i^j \rightarrow [O_{p_i}, O_{q^j}] = -i\hbar\delta_i^j.$$

Mas o processo de quantização canónica padece de problemas severos. Como foi referido, pode ser aplicado a sistemas com dimensão finita e com espaços de fase 'planos' a surgem dificuldades quando não é este o caso. O método

tem uma forte dependência das coordenadas, necessitando da existência de coordenadas canônicas globais e dependendo da sua escolha, i.e. não é invariante a transformações canônicas. Além disso, o resultado da quantização depende da ordem em que os q 's e os p 's aparecem na expressão para os observáveis clássicos. O procedimento é fácil e directo quando aplicado a sistemas simples mas aparecem dificuldades sérias quando se tenta aplicar a sistemas com constrangimentos ou com graus de liberdade internos. Além disso tudo existem várias maneiras de obter a quantização de um sistema, a chamada representação de Schrödinger, representação de Bargmann-Fock, etc.. e a quantização canônica não os unifica.

Para resolver estas (e outras) questões foi desenvolvida uma nova teoria nos anos 70, chamada quantização geométrica. O seu objectivo principal é estabelecer uma relação entre as mecânicas clássica e quântica sob um ponto de vista geométrico, tomando como modelo o método de quantização canônica. É de alguma forma, uma teoria que remove algumas ambiguidades envolvidas no procedimento de quantização canônica. Por exemplo, fornece-nos uma base apropriada para os vários tipos de representação, generaliza o procedimento de quantização a espaços de fase clássicos que não são necessariamente 'planos' (mesmo que não sejam um fibrado cotangente). Como é uma teoria geométrica é um processo de quantização independente de coordenadas. Além disso, clarifica as analogias entre as estruturas matemáticas envolvidas nas teorias clássica e quântica.

Embora o programa de quantização geométrica tenha sido desenvolvido para quantizar sistemas regulares, i.e. variedades simplécticas, foi aplicado também a variedades pré-simplécticas como tentativa de fornecer uma base geométrica às regras de quantização que Dirac aplicou a sistemas singulares. Além disso, o método mostra limitações importantes, nomeadamente a não comutatividade entre os processos de constranger e quantizar. Para resolver esses problemas foram introduzidas novas estruturas geométricas, o que levou à chamada quantização BRST (de Becci-Rouet-Stora-Tuytin).

A quantização geométrica foi também estendida de forma a ser aplicada a variedades de Poisson. A origem desta questão é que, nos casos mais gerais, os espaços de fase de sistemas dinâmicos clássicos não são simplesmente variedades simplécticas, mas variedades de Poisson. Como generalização dessas ideias foi considerada recentemente também a quantização de variedades de Jacobi. O seu interesse é que, sob o ponto de vista matemático, as variedades de Jacobi são a generalização natural de variedades de Poisson (em particular de variedades simplécticas, co-simplécticas e de Lie-Poisson) e o seu interesse físico reside na sua relação com as álgebras de Batalin-Vilkovski.

2 O Programa de Quantização Geométrica

Pode dizer-se que o programa de quantização geométrica consiste em tentar encontrar uma correspondência entre o conjunto de pares (Variedades simplécticas (\mathcal{M}, ω) , funções reais suaves $C^\infty(\mathcal{M})$) e (Espaços de Hilbert complexos \mathcal{H} , Operadores auto-adjuntos $O(\mathcal{H})$), ou de uma forma mais geral, um functor entre as categorias (Variedades simplécticas (\mathcal{M}, ω) , Simplectomorfismos $Sp(\mathcal{M}, \omega)$) e (Espaços de Hilbert complexos \mathcal{H} , Operadores unitários $U(\mathcal{H})$).

Esta relação functorial deverá satisfazer algumas propriedades. Vamos então começar por definir:

Definição 2.1. *Uma quantização completa do sistema clássico (\mathcal{M}, ω) é um par (\mathcal{H}_Q, O) onde:*

1. \mathcal{H}_Q é um espaço de Hilbert (complexo) separável¹. Os elementos $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_Q$ são as funções de onda quânticas, e os elementos $|\psi\rangle_{\mathbb{C}} \in P\mathcal{H}_Q$ os estados quânticos do sistema. \mathcal{H}_Q diz-se o espaço de Hilbert intrínseco e $P\mathcal{H}_Q$ o espaço dos estados quânticos do sistema.
2. O é uma aplicação 1 – 1 que leva observáveis clássicos (i.e. funções reais $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$) a operadores auto-adjuntos O_f em \mathcal{H}_Q , tal que
 - (a) $O_{f+g} = O_f + O_g$;
 - (b) $O_{\lambda f} = \lambda O_f \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$;
 - (c) $O_1 = id_{\mathcal{H}_Q}$;
 - (d) $[O_f, O_g] = -i\hbar O_{\{f,g\}}$;
 - (e) Se $\{f_j\}$ é um conjunto completo de observáveis clássicos de (\mathcal{M}, ω) , então \mathcal{H}_Q tem que ser irredutível sob a acção do conjunto $\{O_{f_j}\}$. Alternativamente, suponhamos que G é um grupo de simetrias de um estado físico, quer para as descrições clássica e quântica. Se G actua transitivamente em (\mathcal{M}, ω) , então \mathcal{H}_Q fornece um espaço de representação irredutível para uma extensão central por $U(1)$ do grupo correspondente de transformações unitárias.

O conjunto desses operadores é escrito como $\mathcal{O}(\mathcal{H}_Q)$ e os seus elementos são chamados os observáveis quânticos, ou operadores quânticos.

★

¹Um espaço de Hilbert \mathcal{H} é separável se contém um subespaço denso que tem um base contável.

Esta definição requer alguma justificação. Primeiro que tudo, o espaço de Hilbert deverá ser complexo para levar em conta os fenómenos de interferência entre funções de onda que representam os estados quânticos. Os operadores são auto-adjuntos para assegurar que os seus valores próprios são reais.

A parte (1) é consequência do Postulado da mecânica quântica que diz que um sistema físico é descrito por um espaço de Hilbert (complexo) separável onde todo o estado desse sistema no tempo t é representado por um raio $|\psi(t)\rangle_{\mathbb{C}}$ pertencendo ao espaço de Hilbert (i.e. um estado é um elemento do espaço de Hilbert projectivo $P\mathcal{H}$)². Em relação às condições (2), as condições (2a) e (2b) estabelecem a linearidade do sistema, que embora não tenha uma interpretação física em geral, é desejável do ponto de vista matemático. A condição (2c) leva em conta que se o resultado de uma medição é igual à unidade em todos os estados da descrição clássica o mesmo deverá acontecer na descrição quântica. A condição (2d) impõe que a aplicação O é um morfismo de álgebras de Lie (a menos de um factor)³.

Finalmente, a condição (2e) traduz o postulado da irredutibilidade que passamos agora a desenvolver. A primeira parte dessa condição refere-se à irredutibilidade do espaço dos estados e a segunda ao conceito de simetria.

2.1 A Irredutibilidade do Espaço dos Estados

Definição 2.2. *Seja (\mathcal{M}, ω) uma variedade simpléctica. Um conjunto de funções suaves $\{f_j\} \subset \Omega^0(\mathcal{M})$ diz-se um conjunto completo de observáveis clássicos sse qualquer outra função $g \in \Omega^0(\mathcal{M})$ tal que $\{f_j, g\} = 0$ para todos os f_j é constante.*

★

O análogo quântico deste conceito pode se estabelecido como

Definição 2.3. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert. Um conjunto de operadores auto-adjuntos $\{O_j\}$ (actuando em \mathcal{H}) diz-se um conjunto completo de operadores sse qualquer outro operador O que comuta com todos os O_j é um múltiplo da identidade.*

Se \mathcal{H} for considerado como representação quântica de um sistema físico, então este conjunto diz-se um conjunto completo de observáveis quânticos.

²Qualquer elemento $|\psi(t)\rangle_{\mathbb{C}}$, diferente de zero, deste raio diz-se um vector de estado.

³As condições (2a-2d) são as condições de quantização de Dirac.

★

Repare-se que os operadores $\{O_j\}$ e O envolvidos nesta definição não provêm necessariamente de um conjunto de observáveis clássicos.

Este conceito pode ser relacionado com a irreduzibilidade de \mathcal{H} sob a acção deste conjunto como

Proposição 2.1. *Se um conjunto de operadores auto-adjuntos $\{O_j\}$ em \mathcal{H} é um conjunto completo de operadores então \mathcal{H} é irreduzível sob a acção de $\{O_j\}$ (i.e. todo o subespaço fechado de \mathcal{H} que é invariante sob a acção deste conjunto ou é igual a $\{0\}$ ou \mathcal{H}).*

Demonstração. Seja $\{O_j\}$ um conjunto completo e $F \subset \mathcal{H}$ um subespaço fechado invariante à acção deste conjunto. Seja Π_F o operador de projecção sobre F . Então Π_F comuta com todos os elementos do conjunto completo. De facto, se O é um operador auto-adjunto em \mathcal{H} que deixa F invariante (e assim F^\perp é também invariante), e $\psi \in \mathcal{H}$, $\psi = \psi_1 + \psi_2$, com $\psi_1 \in F$ e $\psi_2 \in F^\perp$, vamos ter

$$\begin{aligned} [O, \Pi_F]\psi &= O(\Pi_F(\psi_1)) + O(\Pi_F(\psi_2)) - \Pi_F(O(\psi_1)) - \Pi_F(O(\psi_2)) \\ &= O(\psi_1) - O(\psi_1) = 0 \end{aligned}$$

pois $\Pi_F(\psi_1) = \psi_1$ e $\Pi_F(\psi_2) = 0$. Então $\Pi_F = \lambda id_{\mathcal{H}}$, pelo que $F = \{0\}$ se $\lambda = 0$, ou $F = \mathcal{H}$ se $\lambda \neq 0$. \square

2.2 Simetrias

Um conceito relevante em física é a noção de simetria de um sistema.

Seja (\mathcal{M}, ω) uma variedade simpléctica. Uma simetria do sistema descrito por (\mathcal{M}, ω) é um elemento g de um grupo de Lie G que actua por simplectomorfismos em (\mathcal{M}, ω) . Então, toda a simetria é representada por um simplectomorfismo $\phi_g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ (i.e. tal que $\phi_g^*\omega = \omega$). Seja $Sp(\mathcal{M}, \omega)$ o grupo desses simplectomorfismos. Um grupo de simetrias de (\mathcal{M}, ω) é então representado por um subgrupo de $Sp(\mathcal{M}, \omega)$.

O correspondente quântico deste conceito é o seguinte:

Definição 2.4. (Wigner) *Uma simetria da descrição quântica de um sis-*

tema físico é uma aplicação bijectiva $P\mathcal{H} \rightarrow P\mathcal{H}$ que preserva a aplicação

$$\begin{aligned} P\mathcal{H} \times P\mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ \pi|\psi\rangle, \pi|\psi'\rangle &\mapsto \frac{|\langle\psi|\psi'\rangle|}{\|\psi\|^2\|\psi'\|^2} \end{aligned}$$

o que significa que as 'probabilidades de transição' são conservadas.

★

Uma forma de realizar simetrias quânticas é projectar operadores unitários (ou anti-unitários) em \mathcal{H} . A proposição seguinte mostra que esta é, de facto, a única forma possível

Proposição 2.2. (Wigner) *Seja g uma simetria da descrição quântica de um sistema físico. Então*

1. *Existe um operador quer unitário⁴ ou (alternativamente) anti-unitário U_g em \mathcal{H} tal que U_g induz g , i.e. para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H} - \{0\}$, se tem $\pi(U_g|\psi\rangle) = g(\pi|\psi\rangle)$.*
2. *Se U_g e U'_g são operadores unitários ou anti-unitários em \mathcal{H} que induzem g , então U_g e U'_g diferem por um factor de fase.*

Corolário 2.1. *Se g_1 e g_2 são simetrias quânticas e U_{g_1}, U_{g_2} são operadores unitários em \mathcal{H} que induzem essas simetrias, então $U_{g_1 g_2} = \alpha(g_1, g_2) U_{g_1} U_{g_2}$, onde $\alpha(g_1, g_2) \in U(1)$.*

Seja G um grupo conexo de simetrias quânticas. Como consequência dos resultados anteriores, se $U(\mathcal{H})$ for o conjunto de operadores unitários em \mathcal{H} , existe um subgrupo $G' \in U(\mathcal{H})$ tal que a sequência seguinte é exacta,

$$1 \rightarrow U(1) \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow 1,$$

i.e. G' é uma extensão central de G por $U(1)$.

Por outras palavras, se $U(\mathcal{H})$ induzir as simetrias quânticas e $PU(\mathcal{H}) = U(\mathcal{H})/U(1)$ é o grupo de operadores unitários 'projectivos' em \mathcal{H} então $U(\mathcal{H})$ é isomorfo ao grupos de simetrias quânticas, e todo o subgrupo de simetrias quânticas é isomorfo a um quociente de um subgrupo de $U(\mathcal{H})$ por $U(1)$.

⁴O operador $O : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ diz-se unitário se $O^\dagger O = O O^\dagger = id_{\mathcal{H}}$, onde O^\dagger é o adjunto de O .

Resumindo, a situação é a seguinte: Se G é um grupo de Lie então é um grupo de simetrias do sistema físico, quer para a descrição clássica como para a descrição quântica, se temos as seguintes representações de G :

- Como simetrias clássicas, através de uma representação como simplectomorfismos actuando em (\mathcal{M}, ω) (o espaço de fases clássico).
- Como simetrias quânticas, através de uma representação como transformações unitárias que actuam em \mathcal{H} (o espaço que suporta o estados quânticos do sistema).

No entanto, nalguns casos, se G é um grupo de simetrias de um sistema clássico, algumas simetrias são preservadas e outras quebradas no processo de quantização (anomalias quânticas). Por outro lado, nem toda a simetria quântica provém necessariamente de uma simetria clássica (podem haver muitos operadores unitários que não têm correspondente clássico). Significa que os grupos $SP(\mathcal{M}, \omega)$ e $PU(\mathcal{H})$ nem sempre são isomorfos.

⊙

Assim, o programa de quantização consiste em construir um espaço de Hilbert \mathcal{H}_Q

1. no qual a álgebra de Lie dos observáveis clássicos pode ser representada irreduzivelmente por operadores auto-adjuntos em \mathcal{H}_Q que satisfazem as condições (2) da definição,
- ou**
2. no qual a álgebra de Lie do grupo de simetrias G pode ser representada irreduzivelmente por operadores unitários em \mathcal{H}_Q que satisfazem as condições (2) da definição.

A situação é esquematizada no diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc} & G & \rightarrow (\mathcal{M}, \omega) \\ \text{Repr. unit. irr.} & \downarrow & \downarrow \\ & U_G(\mathcal{H}) & \rightarrow \mathcal{H} \end{array} \quad Q.G.$$

Então, a forma de construir representações unitárias de G (pelo método das órbitas) está relacionada à forma de construir o espaço de Hilbert \mathcal{H} a partir de (\mathcal{M}, ω) .

É importante referir que não é possível encontrar uma quantização completa de todos os sistemas clássicos, mesmo no caso de $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$ (Neste último caso não é possível quantizar todos os observáveis clássicos do sistema). Então, a forma usual é quantizar apenas um subconjunto de todos os observáveis clássicos, que é chamado uma sub-álgebra de Hilbert.

3 Intermezzo em Teoria de Representações

Já foi referido que o processo de quantização geométrica está estreitamente ligado à construção de representações unitárias irredutíveis de grupos de Lie. Após a descrição do Programa de Quantização Geométrica surge agora a oportunidade de começar a fazer essa ligação e introduzir alguns conceitos relacionados às representações de Grupos e Álgebras de Lie.

3.1 Representações de Grupos de Lie. Conceitos Básicos

Definição 3.1. *Seja G um grupo de Lie e V um espaço vectorial. Uma representação, π , de G em V é um homomorfismo de grupos de Lie*

$$\pi : G \rightarrow GL(V)$$

Uma representação diz-se fiel se π for 1-1. A dimensão de V diz-se o grau da representação, $\deg(\pi)$.

★

Observação: Seja $g, h \in G$. Estamos a dizer que $\pi(gh) = \pi(g)\pi(h)$. Vamos também assumir sempre que π é diferenciável.

Definição 3.2. *Uma representação (V, π) de G é unitária se V tiver um produto interno Hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positivo-definido em relação ao qual os $\pi(g)$ são unitários, i.e.*

$$\langle \pi(g)x, \pi(g)y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall g \in G, \forall x, y \in V.$$

Tal produto interno diz-se invariante sob G .

★

Definição 3.3. *Um subespaço W de V é invariante, ou estável, (sob π ou G) se $\pi(g)W \subset W$ (e assim $= W$) para todo $g \in G$. Nesse caso a restrição do $\pi(g)$ a W dá-nos uma representação de G em W , que se chama uma subrepresentação de (V, π) .*

*Se V admite algum subespaço invariante que não sejam $\{0\}$ e V , então a representação diz-se redutível. Ao inverso, se V não admitir subespaços invariantes que não sejam $\{0\}$ e o próprio V , a representação diz-se irredutível*⁵.

⁵Por convenção, o caso $V = \{0\}$ não é considerado irredutível, mas a representação trivial $V = \mathbb{C}$, $\pi(g) = 1$ considera-se irredutível.

Se $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ é a soma directa de subespaços invariantes, diz-se que a representação (V, π) é a soma directa das subrepresentações de G sobre os V_j e que (V, π) se decompõe nessas subrepresentações.

★

3.2 Representações de Álgebras de Lie

Um dos propósitos deste trabalho é obter uma representação da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Vamos então definir alguns conceitos e relacioná-los com o que foi tratado em (2).

Definição 3.4. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie real e V um espaço vectorial. Uma representação π de \mathfrak{g} sobre V é um homomorfismo de álgebras de Lie reais de \mathfrak{g} na álgebra de Lie dos endomorfismos de V ,*

$$\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

★

Observação: Estamos a dizer que

$$\pi(\alpha X + \beta Y) = \alpha\pi(X) + \beta\pi(Y),$$

$$\pi([X, Y]) = [\pi(X), \pi(Y)],$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se a primeira condição se verificar para α, β complexos, a representação diz-se holomorfa.

Lembremos a definição (2.1). As condições (2a-2d) dizem-nos imediatamente que estamos a construir uma representação.

Toda a representação (V, π) de um grupo de Lie G origina uma representação da sua álgebra de Lie \mathfrak{g} , a que vamos chamar também (V, π) : a representação $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é a aplicação de Lie⁶ de $\pi : G \rightarrow GL(V)$. Explicitamente, isto significa que para $X \in \mathfrak{g}$,

$$\pi(X)v = \left. \frac{d}{dt} \pi(\exp tX) v \right|_{t=0},$$

para todo $v \in V$. Uma representação (V, π) de um grupo de Lie complexo G é holomorfa, no sentido em que $\pi : G \rightarrow GL(V)$ é uma aplicação holomorfa,

⁶A aplicação de Lie de um homomorfismo de grupos de lineares é o seu diferencial na identidade.

se e só se a representação correspondente π da sua álgebra de Lie é holomorfa. Isto segue da expressão $\pi(\exp X) = \exp \pi(X)$.

Os conceitos de representações invariantes, redutíveis e irredutíveis para álgebras de Lie são definidos da mesma forma que para os grupos de Lie.

Assim, a condição (2e) da definição do Programa de Quantização Geométrica, (2.1), diz-nos que a representação obtida é irredutível.

Vimos anteriormente que uma representação (V, π) de um grupo de Lie G se dizia unitária se V tivesse um produto interno Hermitiano definido-positivo tal que $\langle \pi(g)x, \pi(g)y \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $g \in G$, $x, y \in V$, i.e. $\pi(g) \in U(V)$, o grupo unitário de V . A condição correspondente para a representação de uma álgebra de Lie é a seguinte:

Definição 3.5. *A representação (V, π) da álgebra de Lie \mathfrak{g} diz-se unitária se*

$$\langle \pi(X)x, y \rangle = -\langle x, \pi(X)y \rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $x, y \in V$, i.e. $\pi(X) \in \mathfrak{u}(V)$.

★

Esta condição pode ser obtida facilmente como:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \langle \pi(g)x, \pi(g)y \rangle \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \langle \pi(\exp tX)x, \pi(\exp tX)y \rangle \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \langle (\exp t\pi(X))x, (\exp t\pi(X))y \rangle \right|_{t=0} \\ &= \langle \pi(X)(\exp t\pi(X))x, y \rangle \Big|_{t=0} + \langle x, \pi(X)(\exp t\pi(X))y \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle \pi(X)x, y \rangle + \langle x, \pi(X)y \rangle. \end{aligned}$$

Voltando ao Programa de Quantização Geométrica, estamos a ver que os operadores obtidos (que são hermitianos por construção) não podem satisfazer esta condição. Mas esta é apenas uma questão de convenção, poderíamos ter imposto desde o início que queríamos operadores que fossem anti-hermitianos⁷ e satisfizessem todas as restantes condições. Assim, a representação obtida seria explicitamente unitária. Tendo este aspecto sempre em mente

⁷Os físicos preferem operadores hermitianos para assegurar que os seus valores próprios (o que se pode medir) sejam reais. Optou-se por seguir esta convenção pois todos os exemplos apresentados se referem a exemplos físicos. Notemos, no entanto, que podemos multiplicar todos os operadores por i , assegurando aos mesmo tempo que todas as condições são satisfeitas mas agora com operadores anti-hermitianos cujos valores próprios são imaginários puros.

(multiplicação de todos os operadores por i) iremos referir-nos mais tarde, aquando do tratamento do método das órbitas, à representação unitária irredutível obtida.

4 Pré-quantização

O nosso primeiro passo no programa de quantização é construir o espaço de Hilbert intrínseco do sistema. Vamos seguir um procedimento sistemático, começando pelo modelo mais simples possível e modificando-o de modo a cumprir as condições da definição (2.1).

4.1 Primeira tentativa de definição dos estados quânticos e operadores

Seja (\mathcal{M}, ω) uma variedade simpléctica $2n$ -dimensional. A forma mais fácil de construir um espaço de Hilbert associado a esta variedade é considerar a álgebra das funções complexas suaves com suporte compacto em \mathcal{M} e o produto interno definido por

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{\mathcal{M}} \psi_1 \overline{\psi_2} \epsilon$$

para um par ψ_1, ψ_2 de tais funções, onde ϵ é a forma de volume natural $\epsilon = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^n \omega^n$ induzida por ω . Em relação a este produto, esta álgebra é um espaço pré-Hilbertiano⁸. Seja $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ o seu completado⁹.

A nossa primeira tentativa é tomar $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ como o espaço de Hilbert intrínseco do sistema. Agora, queremos definir um conjunto de operadores auto-adjuntos $\mathcal{O}(\mathcal{C}(\mathcal{M}))$ tal que

1. Existe uma correspondência 1 – 1 entre o conjunto dos observáveis clássicos $\Omega^0(\mathcal{M})$ e $\mathcal{O}(\mathcal{C}(\mathcal{M}))$

$$\Omega^0(\mathcal{M}) \xleftrightarrow{1-1} \mathcal{O}(\mathcal{C}(\mathcal{M}));$$

2. A aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} : \Omega^0(\mathcal{M}) & \rightarrow & \mathcal{O}(\mathcal{C}(\mathcal{M})) \\ f & \mapsto & O_f \end{array}$$

satisfaz as condições (2a)-(2e) da definição (2.1).

⁸Um espaço pré-Hilbertiano é um espaço vectorial onde se definiu um produto interno. Um espaço de Hilbert é um espaço pré-Hilbertiano completo (no sentido da métrica definida pelo produto interno)

⁹Se V é um espaço com produto interno, o espaço completo $\mathcal{C}(V)$ é o seu completado se V for isomorfo a um subespaço denso de $\mathcal{C}(V)$. O completado é único a menos de isomorfismos. Repare-se que neste caso $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ coincide com conjunto de funções complexas suaves quadrado-integráveis $L^2(\mathcal{M}) \cap C^\infty(\mathcal{M})$.

Para satisfazer (1) a forma mais simples é construir $\mathcal{O}(\mathcal{C}(\mathcal{M}))$ a partir do conjunto dos *campos vectoriais Hamiltonianos* em \mathcal{M} , $X_H(\mathcal{M})$.

Então, para todo $X_f \in X_H(\mathcal{M})$ construímos um único operador $O_f \in \mathcal{O}(\mathcal{C}(\mathcal{M}))$ que é definido como

$$O_f = -i\hbar X_f$$

onde X_f actua linearmente em $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ como uma derivação de funções (reais) (i.e. levando em conta que $C^\infty(\mathcal{M}) = \Omega^0(\mathcal{M}) \otimes \mathbb{C}$). Então, se $\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$, vamos ter

$$O_f|\psi\rangle = -i\hbar X_f(\psi).$$

Mas a aplicação

$$\begin{array}{ccccc} O : \Omega^0(\mathcal{M}) & \rightarrow & X_H(\mathcal{M}) & \rightarrow & \mathcal{O}(\mathcal{C}(\mathcal{M})) \\ f & \mapsto & X_f & \mapsto & O_f \end{array}$$

não é 1 – 1, porque se f for uma função constante então $df = 0$ e $X_f = 0$ e assim funções que diferem numa constante vão ter o mesmo operador associado. Além disso, embora as condições (2a) e (2b) da definição (2.1) sejam satisfeitas, a condição (2c) falha. Para resolver este problema, a correcção mais simples consiste em adicionar um termo extra na definição de O_f . Tomamos então

$$O_f = -i\hbar X_f + f$$

e assim, $\forall \psi \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$,

$$O_f|\psi\rangle = -i\hbar X_f(\psi) + f\psi.$$

Agora, satisfazem-se as condições (2a-2c) mas não (2d) porque

$$\begin{aligned} [O_f, O_g]|\psi\rangle &= [-i\hbar X_f + f, -i\hbar X_g + g](\psi) \\ &= -\hbar^2[X_f, X_g](\psi) - i\hbar[X_f, g](\psi) - i\hbar[f, X_g](\psi) + [f, g](\psi) \\ &= -\hbar^2[X_f, X_g](\psi) - i\hbar X_f(g)\psi + i\hbar X_g(f)\psi \\ &= -\hbar^2[X_f, X_g](\psi) - i\hbar\{f, g\}\psi + i\hbar\{g, f\}\psi \\ &= -\hbar^2[X_f, X_g](\psi) - 2i\hbar\{f, g\}\psi \\ &= -i\hbar(-i\hbar[X_f, X_g] + 2\{f, g\})(\psi) \end{aligned}$$

Agora, $X_{\{F,G\}} = [X_F, X_G]$, pois

$$\begin{aligned}
X_{\{F,G\}}(H) &= \{\{F, G\}, H\} = -\{H, \{F, G\}\} \\
&\stackrel{id. Jacobi}{=} \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} \\
&= \{F\{G, H\}\} - \{G\{F, H\}\} \\
&= X_F\{G, H\} - X_G\{F, H\} \\
&= X_F X_G(H) - X_G X_F(H) \\
&= [X_F, X_G](H)
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
[O_f, O_g]|\psi\rangle &= -i\hbar(-i\hbar X_{\{f,g\}} + 2\{f, g\})|\psi\rangle \\
&= -i\hbar O_{\{f,g\}}|\psi\rangle - i\hbar\{f, g\}|\psi\rangle \\
&\neq -i\hbar O_{\{f,g\}}|\psi\rangle
\end{aligned}$$

Deste modo, é necessário proceder a mais uma correcção. A contribuição adicional, $-i\hbar\{f, g\}$, é removida adicionando outro termo à expressão de O_f .

Assim, seja $\theta \in \Omega^1(\mathcal{U})$, ($\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$) um *potencial simpléctico local*, i.e $\omega = d\theta$ (localmente). Então definimos¹⁰

$$O_f = -i\hbar X_f - X_f \lrcorner \theta + f = -i\hbar \left(X_f - \frac{i}{\hbar} X_f \lrcorner \theta \right) + f$$

e assim, $\forall \psi \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$

$$O_f|\psi\rangle = -i\hbar \left(X_f - \frac{i}{\hbar} X_f \lrcorner \theta \right) (\psi) + f\psi$$

Em (4.3) vamos mostrar, além de outras propriedades, que este problema ficou resolvido, mas para isso vamos necessitar de mais alguns conceitos.

Assim, satisfazem-se as condições (2a-2d) e, por agora, esta é a forma final do operador quântico associado ao observável clássico f . Observe-se que se

¹⁰ Através desta definição pode-se definir também $X_f \lrcorner \theta - f = \mathcal{L}_f$, o *Lagrangiano de f* , o que nos leva a uma outra interpretação dos operadores (que se passam a escrever $O_f = -i\hbar X_f - \mathcal{L}_f$) em termos de um integral de caminho, assunto que não iremos abordar aqui.

trata de uma construção local e que a expressão deste operador quântico depende da escolha do potencial simpléctico.

4.2 Espaço dos estados

A necessidade de introduzir um potencial simpléctico local para obter uma definição correcta dos operadores quânticos leva a uma nova dificuldade. Como se disse, a construção dos operadores é local. Então, se \mathcal{U} e \mathcal{U}' forem mapas de \mathcal{M} e θ , θ' os potenciais simplécticos locais correspondentes, na intersecção $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$, θ e θ' diferem (localmente) por uma 1-forma exacta, i.e. $\theta' = \theta + d\alpha$, para algum $\alpha \in \Omega^0(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')$. É imediato que com esta construção, $O_f|\psi\rangle \neq O'_f|\psi\rangle$, pois $O'_f = O_f - X_f \lrcorner d\alpha$. Assim, se quisermos que a acção dos operadores quânticos sobre os vectores de estado seja independente da escolha do potencial simpléctico (i.e. independente da escolha das coordenadas locais) temos que impor que se $\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ então ψ e $\psi' = e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi$ deverão representar o mesmo vector de estado no espaço de Hilbert intrínseco que queremos construir, porque assim

$$\begin{aligned}
O'_f|\psi'\rangle &= [-i\hbar(X_f - \frac{i}{\hbar}X_f \lrcorner \theta') + f] e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi \\
&= [-i\hbar(X_f - \frac{i}{\hbar}X_f \lrcorner (\theta + d\alpha)) + f] e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi \\
&= -i\hbar\left(X_f(e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi) - \frac{i}{\hbar}(X_f \lrcorner \theta + X_f \lrcorner d\alpha)e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi\right) + fe^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi \\
&= -i\hbar\left(\frac{i}{\hbar}X_f(\alpha)e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi + e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}X_f\psi - \frac{i}{\hbar}X_f \lrcorner \theta e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi - \frac{i}{\hbar}X_f(\alpha)e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi\right) \\
&\quad + fe^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi \\
&= -i\hbar\left(e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}X_f\psi - \frac{i}{\hbar}X_f \lrcorner \theta e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi\right) + fe^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi \\
&= e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}[-i\hbar(X_f - \frac{i}{\hbar}X_f \lrcorner \theta) + f](\psi) \\
&= e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}O_f|\psi\rangle
\end{aligned}$$

e assim, a relação entre $O'_f|\psi'\rangle$ e $O_f|\psi\rangle$ é a mesma que entre ψ' e ψ .

Geometricamente, esta propriedade de invariância diz-nos que os vectores de estado $|\psi\rangle$ do espaço de Hilbert intrínseco não podem ser simplesmente funções em \mathcal{M} mas sim secções de um *fibrado de linha complexo*, $L \rightarrow \mathcal{M}$ com grupo estrutural $U(1)$.

Mas, se os vectores de estado são secções em L precisamos de um produto interno entre secções. Para isso podemos introduzir uma métrica hermitiana h em todo o fibrado de linha complexo,

Definição 4.1. *Seja $L \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado de linha complexo. Uma estrutura hermitiana em $L \rightarrow \mathcal{M}$ é uma correspondência que define uma métrica hermitiana h_p em L_p para todo $p \in \mathcal{M}$, de uma forma diferenciável, i.e. se s e s' forem secções diferenciáveis então $h(s, s')$ é diferenciável.*

★

Repare-se que $h(s, s') = \overline{h(s', s)}$.

Essa métrica hermitiana permite-nos então definir um produto interno hermitiano no espaço vectorial complexo das secções suaves $\Gamma(L)$ (com suporte compacto):

$$\begin{aligned} h : \Gamma(L) \times \Gamma(L) &\rightarrow \mathbb{C} \\ |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle &\mapsto \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{\mathcal{M}} h(\psi_1, \psi_2) \epsilon \end{aligned}$$

Mas agora, se os estados quânticos são construídos a partir de secções de um fibrado de linha $L \rightarrow \mathcal{M}$, e os operadores quânticos são definidos a partir dos campos vectoriais Hamiltonianos em \mathcal{M} , é necessário clarificar como é que esses operadores actuam sobre secções desse fibrado.

É imediato que a maneira mais natural é introduzir uma conexão ∇ no fibrado e utilizá-la para associar um operador diferencial linear a cada campo vectorial em \mathcal{M} , actuando em secções de L . Esse operador é simplesmente a *derivada covariante* ∇_X . Mas agora, precisamos de saber que tipo de conexões serão aceitáveis. Lembrando a forma obtida para o operador,

$$O_f = -i\hbar \left(X_f - \frac{i}{\hbar} X_f \lrcorner \theta \right) + f,$$

concluimos que um solução imediata para o nosso problema consiste em tomar a conexão de forma que se $\psi \in \Gamma(L)$,

$$\nabla_{X_f} \psi = \left(X_f - \frac{i}{\hbar} X_f \lrcorner \theta \right) \psi,$$

pelo que¹¹

$$O_f |\psi\rangle = (-i\hbar \nabla_{X_f} + f) \psi.$$

¹¹Repare-se que o produto $f\psi$ é bem definido.

Notemos que esta condição significa que $\frac{\theta}{2\pi\hbar}$ é a 1-forma de conexão de ∇ . Mas, como localmente $\omega = d\theta$, isso é equivalente a dizer que

$$\frac{\omega}{2\pi\hbar} = \text{curv}(\nabla) = F,$$

i.e. $\frac{\omega}{2\pi\hbar}$ é a 2-forma de curvatura da conexão ∇ .

Mas a métrica hermitiana que introduzimos e esta conexão têm que ser compatíveis, h deve ser ∇ -invariante, i.e. se $X \in X_H(\mathcal{M})$ e $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma(L)$, então

$$X(h(\psi_1, \psi_2)) = h(\nabla_X \psi_1, \psi_2) + h(\psi_1, \nabla_X \psi_2)$$

o que é o mesmo que dizer que a conexão é hermitiana em relação a esta métrica.

Outro resultado complementar é o seguinte:

Teorema 4.1. *Seja \mathcal{M} uma variedade e $L \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado de linha com uma conexão ∇ com 1-forma local de conexão $\frac{\theta}{2\pi\hbar}$. Então existe uma métrica hermitiana ∇ -invariante em $L \rightarrow \mathcal{M}$ sse $\theta - \theta$ é uma 1-forma exacta.*

Podemos formalizar tudo o que temos estado a tratar através de uma definição

Definição 4.2. *Seja (\mathcal{M}, ω) uma variedade simpléctica (que representa, total ou parcialmente, o espaço de fase de um sistema físico). Uma Pré-quantização deste sistema é um fibrado de linha complexo $L \rightarrow \mathcal{M}$ juntamente com uma métrica hermitiana h e uma conexão compatível ∇ tal que $\frac{\omega}{2\pi\hbar} = \text{curv}(\nabla)$.*

★

Neste ponto seria importante saber se um dado sistema clássico (\mathcal{M}, ω) admite ou não pré-quantização. A resposta a esta questão é dada pelo Teorema de Weil:

Teorema 4.2. *(Teorema de Weil) Seja (\mathcal{M}, ω) uma variedade simpléctica. Então, o sistema é pré-quantizável se e só se $[\frac{\omega}{2\pi\hbar}] \in H^2(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$, i.e. $[\frac{\omega}{2\pi\hbar}]$ é uma classe de cohomologia integral. No caso particular de \mathcal{M} simplesmente conexa, a conexão ∇ e a métrica hermitiana compatível são únicas a menos de relações de equivalência.*

Observação: Esta condição, chamada condição de integralidade, diz que o integral de $\frac{\omega}{2\pi\hbar}$ sobre todo o 2-ciclo inteiro em \mathcal{M} é um número inteiro (repare-se que ω deverá ser real).

Exemplo 4.1. (Órbita coadjunta de $SU(2)$): Lembremo-nos que a órbita coadjunta de $SU(2)$ tem estrutura de variedade simpléctica, com forma simpléctica é dada por

$$\omega = \|\mu\|\lambda$$

onde $\mu \in \mathfrak{su}(2)$ e λ é a forma de volume standard de S^2 . Neste caso, a condição de integralidade diz que $\int_{\mathcal{O}_\mu} \frac{\omega}{2\pi\hbar} \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \frac{\|\mu\|\lambda}{2\pi\hbar} &= \frac{\|\mu\|}{2\pi\hbar} 4\pi = \frac{2\|\mu\|}{\hbar} \in \mathbb{Z} \\ \leadsto \quad \|\mu\| &= n \frac{\hbar}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

pois $\|\mu\| \geq 0$. Não é coincidência que este resultado nos lembre da regra de quantização do momento angular. S^2 é um espaço homogéneo para $SU(2)$, $S^2 \sim SU(2)/U(1)$ e a quantização de S^2 leva assim a representações de $SU(2)$. O espaço de Hilbert pré-quântico tem dimensão infinita, mas considerando apenas secções holomorfas do fibrado de linha pré-quântico (que correspondem a uma escolha particular de uma polarização complexa) obtêm-se espaços de Hilbert de dimensão finita que são módulos de representação irredutível de $SU(2)$. Esta relação entre acções transitivas de grupos (espaços simplécticos homogéneos) e representações irredutíveis é uma das origens da quantização geométrica. \diamond

Exemplo 4.2. (Quantização da Carga Eléctrica) Vamos ver mais tarde que existem muitos problemas com o processo de pré-quantização. Contudo, nalguns casos, a condição de integralidade impõe uma condição de quantização sobre parâmetros que apareçam no sistema clássico. A famosa condição de quantização de Dirac sobre a carga eléctrica, e , de uma partícula que se move no campo de um monopolo magnético pode ser entendida desta forma. Isso é uma consequência do facto de que o acoplamento entre partículas e um campo de gauge abeliano (conexão) A com intensidade de campo (curvatura) $F = dA$ pode ser cumprido substituindo a estrutura simpléctica original $\omega = d\theta$ em T^*Q pela estrutura simpléctica com carga

$$\omega_F = \omega + eF$$

(que ainda é não degenerada e fechada). Integralidade de (T^*Q, ω_F) implica agora a integralidade de $\frac{e}{2\pi\hbar}F$. Se F representar uma classe de cohomologia não trivial (de modo que A é definida apenas localmente), esta condição dá-nos uma restrição aos valores possíveis de e . \diamond

Agora aparece-nos outro problema, o integral que define o produto interno se secções não é necessariamente convergente. Isso significa que $\Gamma(L)$ não

se torna um espaço de Hilbert porque a norma $\|\psi\|$ não está definida para todo $\psi \in \Gamma(L)$ e assim $\Gamma(L)$ não poderá ser o espaço de Hilbert intrínseco que procuramos. Para obviar esta dificuldade podemos tomar o subconjunto de $\Gamma(L)$ constituído pelas secções com suporte compacto. Este subconjunto com o produto interno definido, é um espaço pré-Hibertiano.

Deste modo definimos:

Definição 4.3. *O completado \mathcal{H}_P do conjunto de secções com suporte compacto em $\Gamma(L)$ é um espaço de Hilbert chamado o espaço de Hilbert pré-quântico. O espaço projectivo $P\mathcal{H}_P$ é o espaço dos estados pré-quânticos.*

★

Observação: Repare-se que \mathcal{H}_P é também o conjunto de secções suaves quadrado-integráveis em $\Gamma(L)$.

4.3 Operadores de pré-quantização

Agora podemos provar que o conjunto de operadores O_f dado por

$$O_f = -i\hbar\nabla_{X_f} + f = -i\hbar\left(X_f - \frac{i}{\hbar}X_f\lrcorner\theta\right) + f$$

satisfaz a parte (2) da definição (2.1).

Teorema 4.3. *A aplicação $f \mapsto O_f$ é uma aplicação \mathbb{R} -linear da álgebra de Poisson das funções $\Omega^0(\mathcal{M})$ na álgebra de Lie dos operadores auto-adjuntos em \mathcal{H}_P , satisfazendo as condições (2a-2d) da definição (2.1)*

Demonstração. Para verificar que o operador O_f é auto-adjunto calculamos

$$\begin{aligned}
\langle O_f \psi_1 | \psi_2 \rangle &= \int_{\mathcal{M}} h(O_f(\psi_1), \psi_2) \epsilon = \int_{\mathcal{M}} h((-i\hbar \nabla_{X_f} + f)\psi_1, \psi_2) \epsilon \\
&= \int_{\mathcal{M}} h(-i\hbar \nabla_{X_f} \psi_1, \psi_2) \epsilon + \int_{\mathcal{M}} h(f\psi_1, \psi_2) \epsilon \\
&= \int_{\mathcal{M}} \{-i\hbar X_f h(\psi_1, \psi_2) + i\hbar h(\psi_1, \nabla_{X_f} \psi_2)\} \epsilon + \\
&\quad + \int_{\mathcal{M}} h(f\psi_1, \psi_2) \epsilon \\
&= \int_{\mathcal{M}} \{-i\hbar X_f h(\psi_1, \psi_2) + h(\psi_1, -i\hbar \nabla_{X_f} \psi_2)\} \epsilon + \\
&\quad + \int_{\mathcal{M}} h(\psi_1, f\psi_2) \epsilon \\
&= \int_{\mathcal{M}} \{h(\psi_1, -i\hbar \nabla_{X_f} \psi_2) + h(\psi_1, f\psi_2)\} \epsilon + \\
&\quad + \int_{\mathcal{M}} -i\hbar X_f h(\psi_1, \psi_2) \epsilon \\
&= \int_{\mathcal{M}} h(\psi_1, O_f \psi_2) \epsilon + \int_{\mathcal{M}} -i\hbar X_f h(\psi_1, \psi_2) \epsilon \\
&= \langle \psi_1 | O_f \psi_2 \rangle + \int_{\mathcal{M}} -i\hbar X_f h(\psi_1, \psi_2) \epsilon
\end{aligned}$$

Falta apenas mostrar que o último integral se anula. Repare-se que é um integral do tipo $\int_{\mathcal{M}} X_f(g)\epsilon$, onde $g \in C^\infty(\mathcal{M})$ é uma função com suporte compacto. Também $d\epsilon = 0$ e $d(g\epsilon) = 0$ pois são formas de grau máximo. Além disso, $L_{X_f}\omega = 0$, pois X_f é um campo vectorial Hamiltoniano. Assim

$$L_{X_f}(g\epsilon) = L_{X_f}(g)\epsilon = X_f(g)\epsilon,$$

também, da fórmula de Cartan,

$$L_{X_f}(g\epsilon) = d(X_f \lrcorner g\epsilon) + X_f \lrcorner d(g\epsilon) = d(X_f \lrcorner g\epsilon),$$

pelo que

$$X_f(g)\epsilon = d(X_f \lrcorner g\epsilon)$$

e o integral de $d(X_f \lrcorner g\epsilon)$ é zero porque g é uma função com suporte compacto.

É imediato também que a aplicação $O : \Omega^0(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{H}_P)$ é \mathbb{R} -linear e satisfaz as três primeiras propriedades.

Para a condição (2d),

$$\begin{aligned}
[O_f, O_g](\psi) &= [-i\hbar \nabla_{X_f} + f, -i\hbar \nabla_{X_g} + g](\psi) \\
&= -\hbar^2 [\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}](\psi) + [-i\hbar \nabla_{X_f}, g](\psi) + [f, -i\hbar \nabla_{X_g}](\psi) + \\
&\quad + [f, g](\psi) \\
&= -\hbar^2 [\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}](\psi) + [-i\hbar \nabla_{X_f}, g](\psi) + [f, -i\hbar \nabla_{X_g}](\psi).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
[-i\hbar\nabla_{X_f}, g](\psi) + [f, -i\hbar\nabla_{X_g}](\psi) &= \\
&= -i\hbar\nabla_{X_f}(g\psi) + i\hbar g\nabla_{X_f}(\psi) - i\hbar f\nabla_{X_g}(\psi) + i\hbar\nabla_{X_g}(f\psi) \\
&= -i\hbar(X_f \lrcorner dg)\psi - i\hbar g\nabla_{X_f}(\psi) + i\hbar g\nabla_{X_f}(\psi) - i\hbar f\nabla_{X_g}(\psi) + \\
&\quad i\hbar(X_g \lrcorner df)\psi + i\hbar f\nabla_{X_g}(\psi) \\
&= -i\hbar(X_f \lrcorner dg)\psi + i\hbar(X_g \lrcorner df)\psi \\
&= -i\hbar X_f(g)\psi + i\hbar X_g(f)\psi \\
&= -i\hbar\{f, g\}\psi + i\hbar\{g, f\}\psi \\
&= -2i\hbar\{f, g\},
\end{aligned}$$

e

$$[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}](\psi) = \nabla_{[X_f, X_g]}(\psi) - \frac{i}{\hbar}\omega(X_f, X_g)(\psi).$$

Para verificar esta última expressão repare-se que

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_f}\nabla_{X_g}(\psi) &= (X_f - \frac{i}{\hbar}\theta(X_f))(X_g - \frac{i}{\hbar}\theta(X_g))(\psi) \\
&= X_f X_g(\psi) - \frac{i}{\hbar}X_f(\theta(X_g)\psi) - \frac{i}{\hbar}\theta(X_f)X_g\psi - \frac{1}{\hbar^2}\theta(X_f)\theta(X_g)\psi \\
&= X_f X_g(\psi) - \frac{i}{\hbar}X_f(\theta(X_g))\psi - \frac{i}{\hbar}\theta(X_g)X_f\psi - \frac{i}{\hbar}\theta(X_f)X_g\psi \\
&\quad - \frac{1}{\hbar^2}\theta(X_f)\theta(X_g)\psi
\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}
[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}](\psi) &= [X_f, X_g](\psi) - \frac{i}{\hbar}\{X_f\theta(X_g) - X_g\theta(X_f)\}\psi \\
&= [X_f, X_g](\psi) - \frac{i}{\hbar}\{X_f\theta(X_g) - X_g\theta(X_f) + \theta([X_f, X_g]) \\
&\quad - \theta([X_f, X_g])\}\psi \\
&= [X_f, X_g](\psi) - \frac{i}{\hbar}\{d\theta(X_f, X_g) + \theta([X_f, X_g])\}\psi \\
&= [X_f, X_g](\psi) - \frac{i}{\hbar}\{\omega(X_f, X_g) + \theta([X_f, X_g])\}\psi \\
&= [X_f, X_g](\psi) - \frac{i}{\hbar}\theta([X_f, X_g])(\psi) - \frac{i}{\hbar}\omega(X_f, X_g)(\psi) \\
&= \nabla_{[X_f, X_g]}(\psi) - \frac{i}{\hbar}\omega(X_f, X_g)(\psi)
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
[O_f, O_g](\psi) &= -\hbar^2 \left(\nabla_{[X_f, X_g]}(\psi) - \frac{i}{\hbar} \omega(X_f, X_g) \right) (\psi) - 2i\hbar \{f, g\}(\psi) \\
&= -\hbar^2 \nabla_{[X_f, X_g]}(\psi) + i\hbar \omega(X_f, X_g)(\psi) - 2i\hbar \{f, g\}(\psi) \\
&= -\hbar^2 \nabla_{[X_f, X_g]}(\psi) + i\hbar \{f, g\}(\psi) - 2i\hbar \{f, g\}(\psi) \\
&= -\hbar^2 \nabla_{[X_f, X_g]}(\psi) - i\hbar \{f, g\}(\psi) \\
&= -\hbar^2 \nabla_{X_{\{f, g\}}}(\psi) - i\hbar \{f, g\}(\psi) \\
&= -i\hbar \left(-i\hbar \nabla_{X_{\{f, g\}}} + \{f, g\} \right) (\psi) = -i\hbar O_{\{f, g\}}(\psi)
\end{aligned}$$

□

Este é o procedimento de pré-quantização de Konstant, Souriau e Segal. Resumindo, dada uma variedade simpléctica (\mathcal{M}, ω) , o processo de pré-quantização consiste em construir um fibrado de linha complexo $L \rightarrow \mathcal{M}$ equipado com uma métrica hermitiana h e uma conexão compatível ∇ tal que $\text{curv}\nabla = \frac{\omega}{2\pi\hbar}$.

4.4 Exemplos

4.4.1 Pré-quantização do oscilador harmónico n-dimensional

Como exemplo típico consideremos o oscilador harmónico n -dimensional. Neste caso

$$\mathcal{M} = \{(q^j, p_j)\} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \omega = dp_j \wedge dq^j, \quad H = \frac{1}{2}(p_j^2 + q^{j^2}),$$

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j} = p_j \frac{\partial}{\partial q^j} - q^j \frac{\partial}{\partial p_j}$$

As condições que asseguram a pré-quantização são claramente satisfeitas, pois $\left[\frac{\omega}{2\pi\hbar}\right] = 0$ (é inteiro), e $L = \mathcal{M} \times \mathbb{C}$, pois \mathcal{M} é contráctil.

Tomamos como métrica o produto, $h(\psi_1, \psi_2) = \psi_1 \overline{\psi_2}$, e a conexão hermitiana compatível é dada por $\nabla_{X_H} \psi = X_H \psi - \frac{i}{\hbar} \theta(X_H) \psi$. Verifiquemos:

$$\begin{aligned}
X_H h(\psi_1, \psi_2) &= X_H(\psi_1, \bar{\psi}_2) = X_H(\psi_1)\bar{\psi}_2 + \psi_1 X_H(\bar{\psi}_2) \\
&= X_H(\psi_1) + \psi_1 X_H(\bar{\psi}_2) + \frac{i}{\hbar}\theta(X_H)\psi_1\bar{\psi}_2 - \frac{i}{\hbar}\theta(X_H)\psi_1\bar{\psi}_2 \\
&= X_H(\psi_1)\bar{\psi}_2 - \frac{i}{\hbar}\theta(X_H)\psi_1\bar{\psi}_2 + \psi_1 X_H(\bar{\psi}_2) + \frac{i}{\hbar}\theta(X_H)\psi_1\bar{\psi}_2 \\
&= (X_H(\psi_1) - \frac{i}{\hbar}\theta(X_H)\psi_1)\bar{\psi}_2 + \psi_1 (X_H(\bar{\psi}_2) + \frac{i}{\hbar}\theta(X_H)\bar{\psi}_2) \\
&= (X_H(\psi_1) - \frac{i}{\hbar}\theta(X_H)\psi_1)\bar{\psi}_2 + \psi_1 \left(\overline{X_H(\psi_2)} - \frac{i}{\hbar}\theta(X_H)\bar{\psi}_2 \right) \\
&= (X_H(\psi_1) - \frac{i}{\hbar}\theta(X_H)\psi_1)\bar{\psi}_2 + \psi_1 \left(\overline{X_H(\psi_2) - \frac{i}{\hbar}\theta(X_H)\psi_2} \right) \\
&= (\nabla_{X_H}\psi_1)\bar{\psi}_2 + \psi_1 (\overline{\nabla_{X_H}\psi_2}) \\
&= h(\nabla_{X_H}\psi_1, \psi_2) + h(\psi_1, \nabla_{X_H}\psi_2)
\end{aligned}$$

Tomando como potencial simplético (local) $\theta = \frac{1}{2}(p_j dq^j - q^j dp_j)$, obtém-se

$$\theta(X_H) = \frac{1}{2}(p_j dq^j - q^j dp_j) \left(p_j \frac{\partial}{\partial q^j} - q^j \frac{\partial}{\partial p_j} \right) = \frac{1}{2}(q^{j^2} + p_j^2) = H$$

Assim, com esta escolha para o potencial simplético,

$$\begin{aligned}
O_H &= -i\hbar\nabla_{X_H} + H = -i\hbar(X_H - \frac{i}{\hbar}\theta(X_H)) + H \\
&= -i\hbar X_H - H + H = -i\hbar X_H \\
&= -i\hbar \left(p_j \frac{\partial}{\partial q^j} - q^j \frac{\partial}{\partial p_j} \right)
\end{aligned}$$

e assim, a acção do operador associado à energia é

$$O_H(\psi) = -i\hbar X_H(\psi) = -i\hbar\{H, \psi\}.$$

Ao nível da dinâmica,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = O_H(\psi) = -i\hbar\{H, \psi\}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\{H, \psi\}.$$

Assim, as dinâmicas clássica e pré-quântica coincidem¹² e isto mostra que a pré-quantização não é o método mais adequado para quantizar este sistema clássico, porque o espectro deste operador de energia é contínuo, o que não é verdade para o oscilador harmónico quântico.

◇

4.4.2 Pré-quantização de fibrados cotangentes

Seja $\mathcal{M} = T^*Q$, onde Q é um espaço das configurações. Neste caso,

$$\omega = dp_j \wedge dq^j, \quad \mathcal{H}_P \simeq \mathcal{C}(T^*Q)$$

e podemos tomar $L = T^*Q \times \mathbb{C}$ porque $[\frac{\omega}{2\pi\hbar}] = 0$.

Consideremos os observáveis q^j e p_j . Então

$$X_{q^j} = -\frac{\partial}{\partial p_j}, \quad X_{p_j} = \frac{\partial}{\partial q^j}$$

Tomando como potencial simpléctico $\theta = p_j dq^j$ obtém-se os operadores quânticos

$$O_{q^j} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j} - p_j dq^j \left(-\frac{\partial}{\partial p_j} \right) + q^j = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j} + q^j$$

e

$$O_{p_j} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^j} - p_j dq^j \left(\frac{\partial}{\partial q^j} \right) + p_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^j}$$

É evidente que estes operadores só se reduzem à representação de Schrödinger se actuarem sobre funções das coordenadas apenas¹³. Além disso, vê-se que $\frac{\partial}{\partial p_j}$ comuta com todos os O_{q^k} e O_{p_l} e assim, O não satisfaz a condição de irredutibilidade. Considere-se agora $H = \frac{1}{2}p_j^2$ (correspondente a uma partícula livre). Então

$$X_H = p_j \frac{\partial}{\partial q^j}$$

¹²Coincidem na estrutura matemática. Lembremo-nos que a evolução temporal do observável clássico f é dada por $\frac{df}{dt} = \{H, f\}$.

¹³Voltaremos a este assunto mais tarde.

e assim,

$$\begin{aligned}O_H &= -i\hbar p_j \frac{\partial}{\partial q^j} - p_j dq^j \left(p_j \frac{\partial}{\partial q^j} \right) + \frac{1}{2} p_j^2 \\ &= -i\hbar p_j \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{1}{2} p_j^2 \\ &= -i\hbar p_j \frac{\partial}{\partial q^j} - H\end{aligned}$$

que é obviamente um resultado incorrecto.

◇

Nestes exemplos simples verificou-se que o processo de pré-quantização falha claramente. Outro problema com este processo é que ele falha certamente na reprodução de operadores diferenciais de segunda ordem associados a observáveis quadráticos nos momentos.

5 Quantização

\mathcal{H}_P (o completado do conjunto de secções com suporte compacto em $\Gamma(L)$) não é a melhor escolha para o espaço de Hilbert intrínseco do sistema. Como vimos no exemplo (4.4.2), em geral, podem existir no conjunto $O(\mathcal{H})$ operadores que não satisfazem a condição de irreduzibilidade. A origem deste problema está no facto do espaço de Hilbert assim construído ser 'grande demais', i.e. se \mathcal{M} for o espaço de fase do sistema clássico e $\dim(\mathcal{M}) = 2n$ então os estados pré-quânticos em $P\mathcal{H}_P$ dependem de $2n$ variáveis. Mas de acordo com a Mecânica Quântica, os verdadeiros estados quânticos dependem apenas de n variáveis (a dimensão do espaço das configurações).

A ideia que surge para resolver este problema consiste em 'cortar' (i.e. restringir) o espaço \mathcal{H}_P e o conjunto de operadores quânticos. Define-se assim uma nova estrutura em (\mathcal{M}, ω) , as polarizações¹⁴.

5.1 Polarizações

No exemplo (4.4.2) vimos que os operadores de pré-quantização construídos coincidem com os operadores obtidos pela quantização canónica se as funções de onda dependerem apenas das variáveis q^j . Deveremos então seleccionar n coordenadas e removê-las, para que se obtenha o espaço das funções de onda. Vamos agora generalizar esta ideia.

O primeiro passo consiste em seleccionar n direcções em \mathcal{M} através da escolha de uma *distribuição* n -dimensional, \mathcal{P} , em $T\mathcal{M}$. Depois, vamos impor que as secções do fibrado pré-quântico $L \rightarrow \mathcal{M}$ que representam os estados quânticos sejam invariantes pelas transformações induzidas em \mathcal{M} por esta distribuição, ou seja,

$$\nabla_{\mathcal{P}}\psi = 0.$$

Agora, seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ um aberto no qual L se trivializa e seja $s : \mathcal{U} \rightarrow L$ um secção trivializante. Uma secção $\psi = fs$ que satisfaz $\nabla_{\mathcal{P}}\psi = 0$ tem que satisfazer $(\mathcal{P}(f) - \frac{i}{\hbar}\mathcal{P}_{\perp}\theta f)s = 0$. Se exigirmos que a distribuição seja *adaptada à conexão* ∇ , i.e. é tal que existe um potencial simpléctico local θ que satisfaça $\mathcal{P}_{\perp}\theta = 0$, então as equações anteriores reduzem-se a

$$\mathcal{P}(f) = 0.$$

É um sistema de n equações diferenciais parciais lineares independentes, e

¹⁴Esta estrutura também é chamada de foliação de Planck.

para garantir que é integrável é suficiente exigir que a distribuição \mathcal{P} seja involutiva, i.e. $[X, Y]$ é tangente a \mathcal{P} sempre que X e Y são tangentes a \mathcal{P} .

Mas agora é necessária mais uma condição de consistência, $\nabla_{\mathcal{P}}\psi = 0$ implica que, se $\frac{\omega}{2\pi\hbar}$ é a forma de curvatura da conexão, então

$$0 = [\nabla_{\mathcal{P}}, \nabla_{\mathcal{P}}]\psi = \left(\nabla_{[\mathcal{P}, \mathcal{P}]} - \frac{i}{\hbar}\omega(\mathcal{P}, \mathcal{P}) \right) \psi.$$

Mas se a distribuição é involutiva, $[\mathcal{P}, \mathcal{P}] \subseteq \mathcal{P}$ pelo que $\nabla_{[\mathcal{P}, \mathcal{P}]} \psi = 0$ e assim deveremos ter $\omega(\mathcal{P}, \mathcal{P})\psi = 0$. Esta última condição pode ser assegurada se impusermos que a distribuição é *isotrópica*. Mas como é n -dimensional deverá ser Lagrangeana. Assim, o que precisamos é de uma distribuição Lagrangeana involutiva.

Suponhamos que \mathcal{P} é expandida por um conjunto de campos vectoriais Hamiltonianos $\{Y_{f_j}\}_{j=1, \dots, n}$. A condição de isotropia $\omega(Y_{f_l}, Y_{f_j}) = 0$ pode ser escrita de uma forma equivalente como

$$\{f_l, f_j\} = 0.$$

Inversamente, se $\{f_j\}$ for um conjunto de funções globais independentes tal que $\{f_l, f_j\} = 0$ então os seus campos vectoriais Hamiltonianos expandem uma distribuição Lagrangeana involutiva em \mathcal{M} .

Para termos uma ideia do que vamos fazer vamos voltar ao exemplo (4.4.2) onde fizemos a pré-quantização no fibrado cotangente. Este exemplo pretende apenas exemplificar, de uma forma informal, o que se pretende fazer.

Exemplo 5.1. Quantização no fibrado cotangente.

Em (4.4.2) tínhamos obtido os operadores de pré-quantização

$$O_{q^j} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j} + q^j, \quad O_{p_j} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^j}.$$

Suponhamos que consideramos uma polarização \mathcal{P} , expandida pelos campos vectoriais $\left\{ \frac{\partial}{\partial p_j} \right\}$, correspondente à chamada polarização vertical. Para que esta polarização seja adaptada à conexão temos que escolher o potencial simplético $\theta = p_j dq^j$, pois assim $\theta\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right) = 0$. Ainda temos que satisfazer a condição de isotropia, que é claramente satisfeita:

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_j}, \frac{\partial}{\partial p_i}\right) = dp_j \wedge dq^j \left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_l}\right) = 0$$

Assim, a condição $\nabla\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\psi = 0$ implica que $\psi = \psi(q^j)$ e os operadores tornam-se simplesmente

$$O_{q^j} = q^j, \quad O_{p_j} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^j},$$

o que corresponde à representação no espaço das configurações, ou representação de Schrödinger.

Se escolhêssemos a polarização horizontal, expandida pelos campos vectoriais $\left\{\frac{\partial}{\partial q^j}\right\}$ o potencial simpléctico adaptado seria $\theta = -q^j dp_j$, pois aí

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right) = -q^j dp_j\left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right) = 0,$$

assim como

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial q^j}, \frac{\partial}{\partial q^l}\right) = 0,$$

e a condição $\nabla\left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right)\psi = 0$ implica que $\psi = \psi(p_j)$. Deste modo os operadores tornam-se

$$O_q^j = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j}, \quad O_{p_j} = p_j$$

o que corresponde à representação nos espaço dos momentos. As duas representações estão relacionadas pela Transformada de Fourier.

Mas repare-se que as após as alterações que fizemos, a medida induzida pela estrutura simpléctica não pode utilizada, o que nos levanta outro problema. No entanto não vamos tratar desse problema aqui, pois pretendemos desenvolver o suficiente para considerar polarizações complexas, onde este problema não existe.

Além disso, o problema da energia ainda continua por resolver. \diamond

Mas ainda precisamos de mais uma consideração. Em vez de trabalharmos com distribuições reais vamos considerar *distribuições complexas*, i.e. expandidas localmente por campos vectoriais complexos. Por outras palavras, vamos considerar o *fibrado tangente complexificado* $T\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ em vez de $T\mathcal{M}^{15}$. Fazemos isso porque existe um tipo de polarizações que são particularmente interessantes (Polarizações de Kähler) e são complexas, e as polarizações complexas são necessárias para estabelecer a relação entre a quantização geométrica e a teoria de representações unitárias irredutíveis de grupos de Lie.

¹⁵Qualquer espaço vectorial V (quer tenha ou não uma estrutura complexa) pode ser complexificado. A complexificação $V_{\mathbb{C}}$ é o conjunto de combinações lineares formais $u + iv$, onde $u, v \in V$, com a regra óbvia de multiplicação por um escalar complexo $z = a + ib$: $z(u + iv) = au - bv + i(av + bu)$.

5.1.1 Estruturas complexas

Começamos por introduzir estruturas complexas em espaços vectoriais, para depois fazermos a generalização óbvia para variedades.

Um espaço vectorial complexo pode ser visto como um espaço vectorial real com o dobro da dimensão se nos 'esquecermos' como multiplicar por escalares complexos de modo que, se u for um vector não nulo, u e iu forem vistos como independentes. A multiplicação por i torna-se uma transformação linear real $\mathcal{J} : u \mapsto iu$ com a propriedade de que $\mathcal{J}^2 = -1$.

Definição 5.1. *Seja V um espaço vectorial. Uma estrutura complexa em V é uma aplicação linear:*

$$\mathcal{J} : V \rightarrow V \quad \text{com } \mathcal{J}^2 = -id_V .$$

O par (V, \mathcal{J}) diz-se um espaço vectorial complexo.

★

A estrutura complexa \mathcal{J} é equivalente a uma estrutura de espaço vectorial sobre \mathbb{C} se identificarmos a aplicação \mathcal{J} com a multiplicação por $\sqrt{-1} = i$.

Definição 5.2. *Seja (V, ω) um espaço vectorial simpléctico. Uma estrutura complexa \mathcal{J} em V diz-se compatível com ω (ou ω -compatível) se*

$$g_{\mathcal{J}}(u, v) = \omega(u, \mathcal{J}v), \quad \forall u, v \in V$$

é uma forma bilinear não-degenerada e simétrica em V e

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{J}} = g_{\mathcal{J}}(u, v) + i\omega(u, v)$$

define um produto interno hermitiano em (V, \mathcal{J}) .

★

Estamos a dizer que

$$\mathcal{J} \text{ é } \omega\text{-compatível} \Leftrightarrow \omega(\mathcal{J}u, \mathcal{J}v) = \omega(u, v) \quad [\text{symplectomorfismo}],$$

pois

$$\begin{aligned}\omega(\mathcal{J}u, \mathcal{J}v) &= g_{\mathcal{J}}(\mathcal{J}u, v) = g_{\mathcal{J}}(v, \mathcal{J}u) = \omega(v, \mathcal{J}\mathcal{J}u) \\ &= \omega(v, -u) = -\omega(v, u) = \omega(u, v).\end{aligned}$$

As estruturas complexas compatíveis existem sempre em espaços vectoriais simplécticos:

Proposição 5.1. *Seja (M, ω) um espaço vectorial simpléctico, Então existe uma estrutura complexa \mathcal{J} ω -compatível em V .*

Demonstração. [5, p.66] □

5.1.2 Distribuições complexas

Definição 5.3. *Seja M uma variedade.*

1. *Uma distribuição complexa \mathcal{P} em M é um sub-fibrado do fibrado tangente complexificado $TM^{\mathbb{C}}$.*
2. *Um campo vectorial X é tangente a \mathcal{P} se $X(p) \in \mathcal{P}_p \forall p \in M$. O espaço de todos os campos vectoriais tangentes a \mathcal{P} é representado por $X_{\mathcal{P}}(M)$. O espaço de todas as funções complexas $f \in C_{\mathbb{C}}^{\infty}(M)$ tais que*

$$\overline{X} \lrcorner df = 0 \quad \forall X \in X_{\mathcal{P}}(M)$$

é representado por $C_{\mathcal{P}}^{\infty}(M)$ ¹⁶.

3. *Uma distribuição complexa \mathcal{P} é integrável se, nalguma vizinhança de cada ponto, existem funções complexas f_{k+1}, \dots, f_n tais que*

$$df_j(X) = 0, \quad \forall j \in [k+1, n], X \in \mathcal{P},$$

onde $n - k$ é a dimensão da fibra de \mathcal{P} .

4. *Uma distribuição complexa \mathcal{P} é involutiva se $X, Y \in \mathcal{P} \Rightarrow [X, Y] \in \mathcal{P}$.*
5. *Uma distribuição complexa involutiva é integrável se é analítica ou*

- (a) $\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}}$ tem dimensão constante;
- (b) $\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}$ é involutiva.

¹⁶A razão para a conjugação complexa é que queremos associar funções holomorfas com o fibrado tangente holomorfo de uma variedade complexa.

★

Esta última condição também significa que existe uma família local de funções complexas $\{z_j\}_{j=1,\dots,n} \in C_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathcal{U})$, ($\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$) tal que \mathcal{P} é localmente expandida pelo conjunto de campos vectoriais Hamiltonianos locais \overline{X}_{z_j} .

5.1.3 Polarizações complexas

Definição 5.4. *Uma polarização complexa de uma variedade simpléctica (\mathcal{M}, ω) é uma distribuição complexa \mathcal{P} em \mathcal{M} tal que*

1. para cada $p \in \mathcal{M}$, $\overline{\mathcal{P}}_p \subset (T\mathcal{M})_{\mathbb{C}}$
 - (a) $\forall p \in \mathcal{M}$, $\dim \mathcal{P}_p = n$ (dimensão complexa)
 - (b) $\omega(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = 0$
- i.e. \mathcal{P}_p é Lagrangeana;
2. $\dim(\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap T\mathcal{M})$ é constante $\forall p \in \mathcal{M}$;
3. \mathcal{P} é integrável.

★

Definição 5.5. *Uma polarização complexa \mathcal{P} de (\mathcal{M}, ω) é fortemente integrável se $E = (\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}) \cap T\mathcal{M}$ é integrável. Um potencial simpléctico complexo θ diz-se adaptado a \mathcal{P} se $\overline{X}_{\perp} \theta = 0$ para todo $X \in X_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})$; \mathcal{P} é admissível se existe um potencial adaptado nalguma vizinhança de cada ponto. Uma função complexa f diz-se polarizada se $\overline{X}(f) = 0$ para todo $X \in X_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})$. O espaço de funções polarizadas representa-se por $C_{\mathcal{P}}^{\infty}(\mathcal{M})$.*

★

A partir de agora só vamos considerar polarizações fortemente integráveis.

5.1.4 Polarizações de Kähler

Definição 5.6. *Seja (\mathcal{M}, ω) uma variedade simpléctica. Uma polarização \mathcal{P} em \mathcal{M} diz-se uma polarização de Kähler se $\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} = 0$.*

★

Uma polarização de Kähler é uma polarização 'totalmente' complexa, no sentido em que não contém nenhuma direcção real.

Para analisar as propriedades deste tipo de polarização precisamos de introduzir alguns conceitos novos.

Definição 5.7. *Seja \mathcal{M} uma variedade. Uma estrutura quase-complexa em \mathcal{M} é um campo tensorial \mathcal{J} do tipo $(1,1)$ em \mathcal{M} tal que $\mathcal{J}_p^2 = -id_{T_p\mathcal{M}}$ para todo $p \in \mathcal{M}$. Se existir \mathcal{J} então $(\mathcal{M}, \mathcal{J})$ diz-se uma variedade quase-complexa.*

★

Observação: A existência de uma estrutura quase-complexa implica que a dimensão de \mathcal{M} é par.

Se $(\mathcal{U}; x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ for um mapa de coordenadas locais de \mathcal{M} , \mathcal{J}_p pode se estendido a um endomorfismo linear em $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$. Considere-se agora o conjunto de coordenadas complexas $\{z_j = x_j + iy_j\}$, então uma base de $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ pode ser formada pelos vectores

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_p &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p \\ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)_p &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p \end{aligned}$$

Repare-se que se \mathcal{J} é uma estrutura quase-complexa, então a extensão do endomorfismo \mathcal{J}_p a $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ tem valores próprios $\pm i$. Então, $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ pode ser decomposto numa soma directa

$$T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = T_p^{(+i)}\mathcal{M} \oplus T_p^{(-i)}\mathcal{M}$$

onde

$$\begin{aligned} T_p^{(+i)}\mathcal{M} &= \{X_p \in T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}} \mid \mathcal{J}_p X_p = +iX_p\} \\ T_p^{(-i)}\mathcal{M} &= \{X_p \in T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}} \mid \mathcal{J}_p X_p = -iX_p\}. \end{aligned}$$

Sejam então \mathcal{P} e $\bar{\mathcal{P}}$ as distribuições complexas de $T\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ definidas por $T_p^{(+i)}\mathcal{M}$ e $T_p^{(-i)}\mathcal{M}$ respectivamente.

Definição 5.8. *Uma estrutura quase-complexa em \mathcal{M} diz-se uma estrutura complexa se as distribuições complexas \mathcal{P} e $\overline{\mathcal{P}}$ forem involutivas e n -dimensionais.*

É equivalente a dizer que existem conjuntos de coordenadas complexas locais (z_j, \bar{z}_j) tais que, para todo $p \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{J}_p \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)_p = i \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)_p \quad \mathcal{J}_p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right)_p = -i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right)_p$$

ou, equivalentemente, existem mapas de coordenadas locais $\{\mathcal{U}; x_j, y_j\}$ tais que

$$\mathcal{J}_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p \quad \mathcal{J}_p \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p = - \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p$$

Então, $(\mathcal{M}, \mathcal{J})$ é uma variedade complexa

★

Se \mathcal{J} é uma estrutura complexa, então $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_j} \right\}$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right\}$ são bases locais para \mathcal{P} e $\overline{\mathcal{P}}$ respectivamente.

Então podemos definir

Definição 5.9. *Uma variedade de Kähler é um triplo $(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J})$ onde*

1. (\mathcal{M}, ω) é uma variedade simpléctica;
2. $(\mathcal{M}, \mathcal{J})$ é uma variedade complexa;
3. A estrutura complexa e a forma simpléctica são compatíveis i.e.

$$\omega(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) = \omega(X, Y).$$

★

Exemplo 5.2. Algumas Variedades de Kähler:

1. $\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{J}, \omega_0)$, onde a estrutura complexa corresponde a multiplicação por $i = \sqrt{-1}$ e ω_0 é a forma simpléctica standard em \mathbb{R}^{2n} .
2. Superfícies de Riemann Compactas.

3. Espaço Projectivo Complexo $\mathbb{C}P^n$.

◇

Existe uma relação entre as variedades de Kähler e as polarizações de Kähler, como vamos ver na proposição seguinte.

Proposição 5.2. *Se $(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J})$ é uma variedade de Kähler, então \mathcal{P} e $\overline{\mathcal{P}}$ são polarizações de Kähler, chamadas polarização holomorfa e polarização anti-holomorfa respectivamente.*

Inversamente, se (\mathcal{M}, ω) é uma variedade simpléctica que tem uma polarização de Kähler \mathcal{P} , então existe uma estrutura complexa \mathcal{J} em \mathcal{M} que é compatível com ω e assim $(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J})$ é uma variedade de Kähler.

Demonstração. A primeira parte da definição segue directamente das definições.

Para a segunda parte, seja \mathcal{P} é uma polarização de Kähler. Como $T_p\mathcal{M} \subset T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = \mathcal{P}_p \oplus \overline{\mathcal{P}}_p$, podemos definir uma estrutura quase-complexa \mathcal{J} como: para todo $X_p \in T_p(\mathcal{M})$ podemos escrever $X_p = Y_p + \overline{Y}'_p$ onde $Y_p \in \mathcal{P}_p$ e $\overline{Y}'_p \in \overline{\mathcal{P}}_p$ e assim

$$\mathcal{J}X_p = iY_p - i\overline{Y}'_p.$$

A diferenciabilidade de \mathcal{J} segue da expressão em coordenadas locais. Por outro lado, \mathcal{J} é compatível com ω porque, se $X_p, Z_p \in T_p(\mathcal{M})$ então

$$\begin{aligned} \omega_p(\mathcal{J}_p X_p, \mathcal{J}_p Z_p) &= \omega_p\left(\mathcal{J}_p(Y_p + \overline{Y}'_p), \mathcal{J}_p(W_p + \overline{W}'_p)\right) \\ &= \omega_p\left(iY_p - i\overline{Y}'_p, iW_p - i\overline{W}'_p\right) \\ &= \omega_p(Y_p, \overline{W}'_p) + \omega_p(\overline{Y}'_p, W_p) \\ &= \omega_p(Y_p + \overline{Y}'_p, W_p + \overline{W}'_p) = \omega_p(X_p, Z_p) \end{aligned}$$

Assim, como \mathcal{P} é integrável por definição, $(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J})$ é uma variedade de Kähler (para a qual \mathcal{P} é a sua polarização holomorfa). \square

Também, uma variedade de Kähler admite uma métrica compatível com a estrutura complexa.

Proposição 5.3. *Seja $(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J})$ uma variedade de Kähler. Então existe uma métrica (pseudo) hermitiana não degenerada k definida em \mathcal{M} como*

$$k(X, Y) = g(X, Y) - i\omega(X, Y), \quad \forall X, Y \in Vec(\mathcal{M}),$$

onde g é uma métrica (pseudo) Riemanniana dada por

$$g(X, Y) = \omega(X, \mathcal{J}Y).$$

Esta métrica hermitiana é compatível com \mathcal{J} , isto é,

$$k(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) = k(X, Y).$$

Demonstração. É imediato que é uma métrica hermitiana não degenerada. Para mostrar a compatibilidade com \mathcal{J} basta lembrar que ω é compatível com \mathcal{J} , e assim

$$\begin{aligned} k(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) &= g(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) - i\omega(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) \\ &= \omega(\mathcal{J}X, \mathcal{J}\mathcal{J}Y) - i\omega(X, Y) \\ &= \omega(X, \mathcal{J}Y) - i\omega(X, Y) \\ &= g(X, Y) - i\omega(X, Y) = k(X, Y) \end{aligned}$$

□

Repare-se que esta proposição permite afirmar que, em toda a variedade de Kähler a forma simpléctica pode ser tomada como a parte imaginária de uma métrica (pseudo) hermitiana não degenerada que seja compatível com a estrutura complexa.

Definição 5.10. *Seja $(\mathcal{M}, \mathcal{J})$ uma variedade complexa onde está definida uma métrica (pseudo) hermitiana k que é compatível com \mathcal{J} . Então podemos definir uma 2-forma não degenerada (e anti-simétrica) ω como*

$$\omega(X, Y) = \text{Im}g(k(X, Y))$$

Se ω é fechada (i.e. simpléctica) então chama-se uma forma de Kähler e $(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J})$ é uma variedade de Kähler.

★

É sempre possível encontrar localmente uma função suave real $K(z, \bar{z})$ tal que a expressão local desta forma de Kähler é

$$\omega = i \frac{\partial^2 K}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

i.e. $\omega = i\partial\bar{\partial}K$ [5, p.92], onde introduzimos a notação

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z_j} dz_j, \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j.$$

Repare-se que numa variedade de Kähler \mathcal{M} , o operador de derivação exterior $d : \Omega^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{M})$ pode ser escrito como $d = \partial + \bar{\partial}$.

Então, o potencial simpléctico mais natural será

$$\Theta = \frac{i}{2} (\partial K - \bar{\partial} K).$$

Levando em conta estas expressões locais é imediato que

Proposição 5.4. *Seja $(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J})$ uma variedade de Kähler e $L \rightarrow \mathcal{M}$ o fibrado de linha pré-quântico correspondente¹⁷. Então, existem potenciais simplécticos locais θ e $\bar{\theta}$ adaptados às polarizações holomorfa \mathcal{P} e anti-holomorfa $\bar{\mathcal{P}}$ respectivamente. As expressões locais são*

$$\theta = -i\partial K = -i \frac{\partial K}{\partial z_j} dz_j, \quad \bar{\theta} = i\bar{\partial} K = i \frac{\partial K}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$$

Como θ aniquila os vectores $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ é um potencial simpléctico adaptado a \mathcal{P} . Também, o seu complexo conjugado $\bar{\theta}$ é adaptado a $\bar{\mathcal{P}}$. Assim, \mathcal{P} e $\bar{\mathcal{P}}$ são admissíveis.

Também, como $\theta - \bar{\theta} = -i(\partial + \bar{\partial})K = -idK$ é exacta, já sabemos que existe uma métrica Hermitiana ∇ -invariante no fibrado.

5.1.5 A Condição de polarização sobre os estados

Agora que o conceito de polarização está estabelecido podemos utilizá-lo para definir correctamente os estados quânticos. Assim definimos

Definição 5.11. *Sejam (\mathcal{M}, ω) uma variedade simpléctica, $L \rightarrow \mathcal{M}$ o fibrado de linha pré-quântico e \mathcal{P} uma polarização fortemente integrável em \mathcal{M} .*

1. Uma secção suave ψ diz-se polarizada se $\nabla_{\bar{X}}\psi = 0$ para todo $X \in X_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})$.

¹⁷Lembremos que o fibrado de linha pré-quântico consiste no fibrado de linha propriamente dito, numa conexão ∇ e uma métrica hermitiana h compatível.

2. $\Gamma_{\mathcal{P}}(L) \subset \Gamma(L)$ é o conjunto de secções polarizadas.
3. O espaço dos estados quânticos do sistema é construído a partir do conjunto das secções polarizadas $\Gamma_{\mathcal{P}}(L)$.

★

Agora, podemos considerar a estrutura complexa em (\mathcal{M}, ω) tal que \mathcal{P} é a polarização holomorfa. (Recordemos que o espaço de Hilbert pré-quântico \mathcal{H}_P é o conjunto das secções suaves quadrado-integráveis em $\Gamma(L)$).

Para obter as secções polarizadas podemos escolher o potencial simpléctico adaptado $\theta = -i\partial K$. Então, as secções polarizadas ψ são representadas por funções holomorfas $\phi(z)$, i.e. tais que $\bar{\partial}\phi = 0$.

Contudo, o produto interno dessas secções polarizadas não está bem definido, porque elas não são necessariamente quadrado-integráveis. Assim, temos que restringir este produto ao conjunto de *secções holomorfas quadrado-integráveis* que vamos representar por $\Gamma_{hol}(L)$.

Agora,

Proposição 5.5. *Se \mathcal{P} é uma polarização de Kähler então $\Gamma_{hol}(L)$ é um subespaço fechado de \mathcal{H}_P e assim $\Gamma_{hol}(L)$ é também um espaço de Hilbert.*

5.1.6 A condição de polarização sobre os operadores

Tomar as secções polarizadas como o conjunto base para construir os verdadeiros estados quânticos obriga a restringir o conjunto de operadores quânticos admissíveis ou, o que significa o mesmo, o conjunto de observáveis clássicos quantizáveis.

De facto, se queremos satisfazer a condição (2e) da definição (2.1) temos que assegurar que $\Gamma_{\mathcal{P}}(L)$ é invariante sob a acção dos operadores quânticos. Isso leva à seguinte definição:

Definição 5.12. *O conjunto de operadores quânticos polarizados, $\mathcal{O}(\Gamma_{\mathcal{P}}(L))$ é constituído pelos operadores O_f correspondendo a funções $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ tais que, para cada $\psi \in \Gamma_{\mathcal{P}}(L)$,*

$$O_f|\psi\rangle \in \Gamma_{\mathcal{P}}(L)$$

★

Existem formas diferentes de caracterizar as funções f que representam os observáveis clássicos. Para as obter e estabelecer a equivalência com a definição anterior precisamos provar que

Lema 5.1. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. $O_f \in \mathcal{O}(\Gamma_{\mathcal{P}}(L))$;
2. O_f preserva a polarização \mathcal{P} , no sentido em que $[O_f, \nabla_{\mathcal{P}}]\psi = 0$, $\forall \psi \in \Gamma_{\mathcal{P}}(L)$;
3. A função f , a partir da qual o operador O_f é construído, é tal que $[X_f, \mathcal{P}] \subset \mathcal{P}$.

Demonstração. A condição $O_f \in \mathcal{O}(\Gamma_{\mathcal{P}}(L)) \Leftrightarrow [O_f, \nabla_{\mathcal{P}}]\psi = 0$ é uma consequência imediata de $\nabla_{\mathcal{P}}\psi = 0$.

Para mostrar que $[O_f, \nabla_{\mathcal{P}}]\psi = 0 \Leftrightarrow [X_f, \mathcal{P}] \subset \mathcal{P} \forall \psi \in \Gamma_{\mathcal{P}}(L)$ calculemos

$$\begin{aligned}
[O_f, \nabla_{\mathcal{P}}]\psi &= O_f \nabla_{\mathcal{P}}\psi - \nabla_{\mathcal{P}}O_f\psi = -\nabla_{\mathcal{P}}O_f\psi = -\nabla_{\mathcal{P}}(-i\hbar\nabla_{X_f} + f)\psi \\
&= i\hbar\nabla_{\mathcal{P}}\nabla_{X_f}\psi - \nabla_{\mathcal{P}}(f\psi) = i\hbar\nabla_{\mathcal{P}}\nabla_{X_f}\psi - \mathcal{P}(f)\psi - f\nabla_{\mathcal{P}}\psi \\
&= i\hbar\nabla_{\mathcal{P}}\nabla_{X_f}\psi - \mathcal{P}(f)\psi \\
&= i\hbar(\nabla_{\mathcal{P}}\nabla_{X_f} - \nabla_{X_f}\nabla_{\mathcal{P}})\psi - \mathcal{P}(f)\psi \\
&= i\hbar\left(\nabla_{[\mathcal{P}, X_f]} - \frac{i}{\hbar}\omega(\mathcal{P}, X_f)\right)\psi - \mathcal{P}(f)\psi \\
&= i\hbar\nabla_{[\mathcal{P}, X_f]}\psi + \omega(\mathcal{P}, X_f) - \omega(\mathcal{P}, X_f) \\
&= i\hbar\nabla_{[\mathcal{P}, X_f]}\psi
\end{aligned}$$

Assim, se $[X_f, \mathcal{P}] \subset \mathcal{P}$, então $[O_f, \nabla_{\mathcal{P}}]\psi = 0$. Inversamente, $[O_f, \nabla_{\mathcal{P}}]\psi = 0 \Rightarrow [X_f, \mathcal{P}] \subset \mathcal{P}$.

Esta última implicação resulta do facto de que $\nabla_X(\Gamma_{\mathcal{P}}(L)) = 0 \Rightarrow X \in \mathcal{P}$. □

Assim vamos definir

Definição 5.13. *O conjunto de operadores quânticos $\mathcal{O}(\Gamma_{\mathcal{P}}(L))$ é constituído pelos operadores O_f que satisfazem $O_f|\psi\rangle \in \Gamma_{\mathcal{P}}(L)$, ou, o que é equivalente, as condições (2) ou (3) do lema (5.1).*

É evidente que, uma vez que o fibrado de linha complexo é conhecido, a quantização de um sistema (i.e. o espaço de Hilbert e o conjunto dos operadores quânticos) dependem da escolha da polarização (mas não da escolha do potencial simpléctico). A selecção de uma polarização determina a *representação* do sistema quântico.

O procedimento de quantização terminaria aqui. Mas ficam por resolver alguns problemas relacionados com o espectro dos operadores.

5.2 Quantização Holomorfa

Suponhamos que \mathcal{P} é uma polarização de Kähler positiva¹⁸. Quaisquer duas secções não nulas e polarizadas de L são relacionadas por $\psi = \phi\psi'$ onde ϕ é uma função holomorfa. Se utilizarmos apenas secções polarizadas para definir as trivializações locais de L então as funções de transição são holomorfas. Assim \mathcal{P} dá a L a estrutura de um fibrado de linha holomorfo. Seja $\mathcal{H}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{H}$ o subconjunto de secção polarizadas quadrado-integráveis. Então $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ é um subespaço fechado de \mathcal{H} e assim é um espaço de Hilbert.

Quando \mathcal{M} é compacto, $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ tem dimensão finita e a sua dimensão é restringida pela fórmula de Riemann-Roch. No limite semiclássico $\hbar \rightarrow 0$,

$$\dim \mathcal{H}_{\mathcal{P}} \sim \int_{\mathcal{M}} \epsilon$$

onde $\epsilon = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^n \omega^n$ é o elemento de volume induzido por ω . Existe assim uma analogia entre o volume do espaço de fases clássico e a dimensão do espaço de Hilbert quântico¹⁹.

5.2.1 Exemplo: Representação de Bargmann do oscilador harmónico.

Neste exemplo vamos considerar a quantização do oscilador harmónico unidimensional utilizando polarizações de Kähler. O procedimento que vamos seguir vai levar-nos à representação holomorfa (ou de Bargmann) do oscilador harmónico.

Começamos por identificar o espaço de fase $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ (que é um espaço vectorial euclidiano com a métrica usual) com \mathbb{C} e por introduzir as coordenadas

¹⁸Significa que a assinatura da métrica de Kähler tem n sinais +.

¹⁹A interpretação do limite $\hbar \rightarrow 0$ precisa de algum cuidado, pois \mathcal{M} é apenas quantizável para certos valores de \hbar . Deveremos começar com um valor de \hbar para o qual \mathcal{M} é quantizável, substituir \hbar por \hbar/N , onde N é inteiro e então tomar $N \rightarrow \infty$.

complexas holomorfas $\{z, \bar{z}\}$ definidas por $z = q + ip$, $\bar{z} = q - ip$. Assim, a função hamiltoniana e a forma simpléctica são

$$H = \frac{1}{2}z\bar{z}; \quad \omega = \frac{i}{2}dz \wedge d\bar{z}.$$

$(\mathbb{C}, \omega, \mathcal{J})$ é uma variedade de Kähler, onde a estrutura complexa é dada da maneira habitual, e a métrica hermitiana é dada pela função hamiltoniana.

O campo vectorial hamiltoniano é determinado a partir de $dH + X_H \lrcorner \omega = 0$. Tomando $X_H = a \frac{\partial}{\partial z} + b \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}(\bar{z}dz + zd\bar{z}) + \frac{i}{2}dz \wedge d\bar{z} \left(a \frac{\partial}{\partial z} + b \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \cdot \right) \\ &= \frac{1}{2}(\bar{z}dz + zd\bar{z}) + \frac{i}{2}(ad\bar{z} - b dz) \\ &\rightsquigarrow a = iz, \quad b = -i\bar{z} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow X_H = i \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

Agora, podemos tomar a polarização de Kähler \mathcal{P} expandida por $\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$, (i.e. consideramos que $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = 0$, ou seja, $\psi(z, \bar{z}) = F(z)$, com $F(z)$ holomorfa) e o potencial simpléctico adaptado (que neste caso é global) vai ser

$$\theta = -i\partial K = -i\partial \left(\frac{1}{2}z\bar{z} \right) = -\frac{i}{2}\bar{z}dz.$$

Deste modo, obtém-se para o operador \hat{H} :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -i\hbar \left(iz \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{i}{2}\bar{z}dz \left(iz \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}z\bar{z} \\ &= \hbar z \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\bar{z}z + \frac{1}{2}z\bar{z} = \hbar z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Agora, vamos obter o espaço de Hilbert. Para isso utilizamos o facto de $F(z)$ ser holomorfa e consideramos a base $\{z^m\}_{m=0,1,2,\dots}$ e os operadores correspondentes a z e \bar{z} , os operadores de criação e aniquilação respectivamente:

Exercício 5.1. *Mostre que*

$$\hat{H}_z = z, \quad \hat{H}_{\bar{z}} = 2\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

e verifique que a acção de \hat{H}_z e $\hat{H}_{\bar{z}}$ sobre o estado $|m\rangle = z^m$ é

$$\hat{H}_z|m\rangle = z^{m+1} = |m+1\rangle, \quad \hat{H}_{\bar{z}}|m\rangle = 2m\hbar z^{m-1} = 2m\hbar|m-1\rangle.$$

É imediato que para que os estados sejam representados por funções holomorfas existe um estado mínimo a partir do qual já não se pode descer. No entanto, o espectro não é limitado superiormente (como esperado).

Os valores próprios do operador Hamiltoniano são assim

$$\hat{H}|m\rangle = \hbar z \frac{\partial}{\partial z} z^m = m\hbar z^m = m\hbar|m\rangle,$$

o que sabemos não ser correcto. Deveria haver um termo extra em \hat{H} , pois sabemos que os valores próprios correctos são $(m + \frac{1}{2})\hbar$, pelo que o operador obtido deveria ser

$$\hat{H} = \hbar \left(z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \right)$$

Este exemplo mostra que, mesmo utilizando polarizações de Kähler, a quantização não acaba aqui e, no contexto da quantização geométrica, deverá ser feito um último passo, a chamada correcção metaplética, o que não vamos fazer aqui.

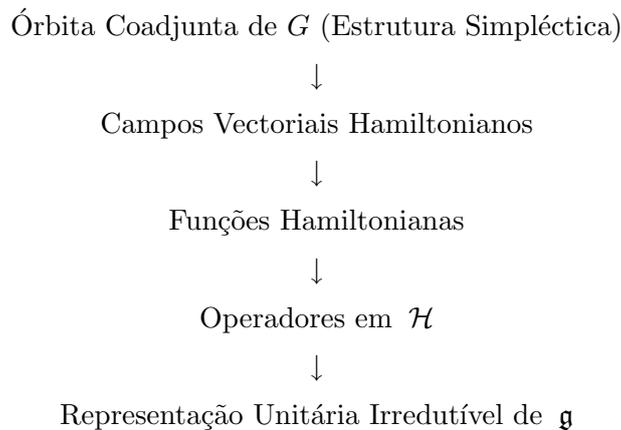
◇

6 O Método da Órbitas

6.1 Breve descrição do Método das Órbitas

Como se sabe, a órbita coadjunta de um grupo de Lie G tem uma estrutura simpléctica muito natural. O processo de quantização dessa órbita permite-nos obter uma representação da álgebra de Lie de G . Como se viu em (3), já sabemos à partida que essa representação é unitária (se se levar em conta o aspecto relacionado com a anti-hermiticidade dos operadores) e irredutível, pois o espaço de Hilbert, e portanto o espaço de representação, é irredutível por construção.

O processo consiste em escolher uma base de \mathfrak{g} ²⁰, onde cada elemento pode também ser identificado com um campo vectorial na identidade que é invariante à esquerda em G , determinar as funções Hamiltonianas correspondentes a esses campos vectoriais e a partir daí desenvolver todo o processo de quantização. Os passos do processo estão esquematizados na figura abaixo:



Este processo vai agora ser aplicado à órbita coadjunta de $SU(2)$. Como já sabemos qual a forma órbita e a sua estrutura simpléctica vamos começar a sua quantização a partir daí.

6.2 Quantização da Órbita Coadjunta de $SU(2)$

Como aplicação vamos considerar a quantização holomorfa da órbita coadjunta de $SU(2)$. Todo o processo de quantização garante-nos que vamos

²⁰Que como sabemos é isomorfa com \mathfrak{g} .

obter uma representação unitária irredutível da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ no espaço de Hilbert que suporta os estados quânticos do sistema.

Lembremo-nos que a órbita coadjunta de $SU(2)$ pode ser identificada com a 2-esfera S^2 e tem uma estrutura simpléctica natural dada por $\omega = s\omega_{std}$, onde ω_{std} é a forma de volume standard em S^2 e $s = \|\mu\|$, $\mu \in \mathfrak{su}(2)$ é o vector contido na órbita. Identificando S^2 com $\mathbb{C}P^1$ ²¹, a estrutura complexa de S^2 , onde a forma simpléctica é dada pela forma de Fubini-Study

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$$

poderíamos tomar $\omega = \frac{is}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$.

Mas $\omega_{FS} = \frac{1}{4}\omega_{std}$, pelo que a forma de volume que dá o volume correcto a S^2 é $\lambda = 2i \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$.

Exercício 6.1. *Utilizando projecções estereográficas mostre que*

$$\omega_{FS} = \frac{1}{4}\omega_{std}.$$

Deste modo, vê-se que a estrutura simpléctica associada à órbita coadjunta de $SU(2)$ é

$$\omega = 2is \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}.$$

Para construir os operadores quânticos precisamos das funções hamiltonianas e dos campos vectoriais hamiltonianos na órbita. Para obter os campos vectoriais hamiltonianos correspondentes às matrizes de Pauli podemos utilizar a simetria da órbita e considerar

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leftrightarrow X_1 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{i}{2} \left[(z^2 - 1) \frac{\partial}{\partial z} - (\bar{z}^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right], \\ \sigma_2 &\leftrightarrow X_2 = x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} = -\frac{1}{2} \left[(z^2 + 1) \frac{\partial}{\partial z} + (\bar{z}^2 + 1) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right], \\ \sigma_3 &\leftrightarrow X_3 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} = i \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \end{aligned}$$

As funções hamiltonianas são determinadas a partir de

$$dH + X_H \lrcorner \omega = 0,$$

de onde se obtém

²¹A chamada "esfera de Riemann".

$$H_1 = -s \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2},$$

$$H_2 = -is \frac{z - \bar{z}}{1 + |z|^2},$$

e

$$H_3 = s \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Exercício 6.2. *Verifique que*

1. $H_1 = -s \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}$.
2. $H_2 = -is \frac{z - \bar{z}}{1 + |z|^2}$.
3. $H_3 = s \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$.
4. $\{H_1, H_2\} = H_3$ (+ cíclicas).

Considerando o potencial adaptado

$$\theta = -i\partial K = -i\partial(2s \ln(1 + z\bar{z})) = -2is \frac{\bar{z}dz}{1 + |z|^2},$$

correspondente à polarização holomorfa, vamos ter para H_3

$$\begin{aligned} \hat{H}_3 &= -i\hbar X_3 - \theta(X_3) + H_3 \\ &= -i\hbar \left(iz \frac{\partial}{\partial z} - i\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + 2is \frac{\bar{z}dz}{1 + |z|^2} \left(iz \frac{\partial}{\partial z} - i\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + s \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \\ &= \hbar \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) - 2s \frac{z\bar{z}}{1 + |z|^2} + s \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \\ &= \hbar \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + s \frac{-2|z|^2 + |z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \\ &= \hbar \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) - s \end{aligned}$$

Agora, a polarização escolhida (holomorfa) significa que os estados são tal que $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = 0$, i.e. $\psi(z, \bar{z}) = F(z)$, onde $F(z)$ é uma função holomorfa.

Deste modo, o operador \hat{H}_3 torna-se simplesmente

$$\hat{H}_3 = \hbar z \frac{\partial}{\partial z} - s.$$

Por comodidade, passamos agora a escrever $s = N/2$. Deste modo,

$$\hat{H}_3 = \hbar \left(z \frac{\partial}{\partial z} - s \right).$$

Para obtermos o espaço de Hilbert notamos que como $F(z)$ é holomorfa pode ser escrita como uma série de potências (de expoentes positivos). No mapa \mathcal{U}_N

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Agora, lembremo-nos que no gauge considerado

$$\theta = -2is \frac{\bar{z} dz}{1 + |z|^2}$$

em \mathcal{U}_N e quando mudamos de mapa,

$$z \rightarrow \frac{1}{w}$$

e

$$\theta \rightarrow -2is \frac{\frac{1}{\bar{w}} d\frac{1}{w}}{1 + |\frac{1}{w}|^2} = \frac{2is}{w} \frac{dw}{1 + |w|^2}.$$

Deveremos encontrar em \mathcal{U}_S um gauge onde esta conexão seja não-singular. Se fizermos a transformação de gauge em secções dada por $F \rightarrow w^m F$ então

$$\theta \rightarrow \frac{2is}{w} \frac{dw}{1 + |w|^2} - im \frac{dw}{w}.$$

Tomando $m = 2s$ vem que

$$\theta = \frac{2is}{w} \left(\frac{1}{1 + |w|^2} - 1 \right) = -2is \frac{\bar{w} dw}{1 + |w|^2},$$

que além de ser não-singular é precisamente da mesma forma que em \mathcal{U}_N . Assim, ao mudar de mapa, a secção $F(z)$ vai tornar-se

$$F \rightarrow w^{2s} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{w} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{2s-n}.$$

Mas para que F seja holomorfa em \mathcal{U}_S não poderá haver potências negativas, o que significa que $2s - n \geq 0$ ou seja,

$$0 \leq n \leq 2s,$$

e assim as funções que se estendem a funções holomorfas globais são precisamente as funções z^m com $m \leq 2s$. O espaço de Hilbert consiste então em polinómios em z de ordem não superior a $2s$, o que significa que $\dim(\mathcal{H}_{hol}) = 2s + 1$. Uma base para o espaço de Hilbert será

$$\{1, z, z^2, \dots, z^{2s}\}.$$

Verifiquemos que os valores próprios de \hat{H}_3 são os correctos. Para isso tomamos $|m\rangle = z^m$ e obtemos

$$\hat{H}_3|m\rangle = \hbar \left(z \frac{\partial}{\partial z} - s \right) z^m = \hbar(m - s) z^m = \hbar(m - s) |m\rangle.$$

O espectro do operador construído é assim $\lambda_m = (m - \frac{N}{2})\hbar$, onde $\frac{N}{2} = s$, $m = 0, \dots, N$.

Por exemplo, para $s = \frac{1}{2}$, a base do espaço de Hilbert é simplesmente $\{1, z\}$ e os valores próprios são $\pm \frac{1}{2}\hbar$, como esperado.

Podemos também formar os operadores \hat{H}_1 e \hat{H}_2 seguindo o mesmo processo.

Exercício 6.3. *Verifique que*

1. $\hat{H}_1 = \frac{\hbar}{2} (z^2 - 1) \frac{\partial}{\partial z} - s\hbar z$.
2. $\hat{H}_2 = \frac{i\hbar}{2} (z^2 + 1) \frac{\partial}{\partial z} - is\hbar z$.
3. $[\hat{H}_1, \hat{H}_2] = -i\hbar\hat{H}_3 + \text{cíclicas}$.

No entanto, como se pode ver facilmente, os estados próprios de \hat{H}_1 e \hat{H}_2 não são $|m\rangle = z^m$ (como era de esperar, dado que \hat{H}_1 , \hat{H}_2 e \hat{H}_3 não comutam entre si).

Mas podemos formar os operadores de escada (Ladder operators) $\hat{H}_\pm = \hat{H}_1 \mp i\hat{H}_2$ ²². Assim,

$$\hat{H}_- = \frac{\hbar}{2} (z^2 - 1) \frac{\partial}{\partial z} - s\hbar z - \frac{\hbar}{2} (z^2 + 1) \frac{\partial}{\partial z} + s\hbar z = -\hbar \frac{\partial}{\partial z},$$

²²A utilização dos sinais \pm é simplesmente uma convenção. Os sinais dos operadores foram definidos desta forma devido à sua acção sobre os estados.

e

$$\hat{H}_+ - = \frac{\hbar}{2} (z^2 - 1) \frac{\partial}{\partial z} - s\hbar z + \frac{\hbar}{2} (z^2 + 1) \frac{\partial}{\partial z} - s\hbar z = \hbar z^2 \frac{\partial}{\partial z} - 2s\hbar z.$$

Exercício 6.4. *Mostre que*

1. $[\hat{H}_-, \hat{H}_+] = -2\hbar\hat{H}_3.$
2. $[\hat{H}_3, \hat{H}_\pm] = \pm\hbar\hat{H}_\pm.$

Para vermos qual a acção de \hat{H}_\pm sobre os estados próprios de \hat{H}_z escrevemos os operadores em termos de $N = 2s$. Assim, para o estado $|m\rangle = z^m$ vamos ter

$$\hat{H}_- |m\rangle = -\hbar \frac{\partial}{\partial z} z^m = -\hbar m z^{m-1} = -m\hbar |m-1\rangle$$

ou seja, \hat{H}_- passa para o estado abaixo. Também

$$\begin{aligned} \hat{H}_+ |m\rangle &= \left(z^2 \frac{\partial}{\partial z} - Nz \right) \hbar z^m = (m\hbar z^2 z^{m-1} - N\hbar z^{m+1}) \\ &= (m - N)\hbar z^{m+1} = (m - N)\hbar |m+1\rangle \end{aligned}$$

ou seja, \hat{H}_+ passa para o estado acima. Repare-se que para o estado mais baixo possível ($N = 0$, $|m\rangle = 1$) vamos ter

$$\hat{H}_- |0\rangle = -\hbar \frac{\partial}{\partial z} 1 = 0$$

pois os estados não podem descer mais, e para o estado mais alto ($m = N$, $|m\rangle = z^N$),

$$\hat{H}_+ |N\rangle = \left(z^2 \frac{\partial}{\partial z} - Nz \right) \hbar z^N = (N - N)\hbar z^{N+1} = 0$$

o que significa que os estados não podem subir mais. Repare-se que este facto poderia ter sido utilizado para determinar a dimensão do espaço de Hilbert.

Desta forma simples construímos uma representação unitária irredutível da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ (Lembrar as questões referidas anteriormente sobre a anti-hermiticidade dos operadores).

Reparemos que para a representação ser rigorosamente unitária poderíamos ter multiplicado todos os operadores por i logo desde o início, definindo o

Programa de Quantização Geométrica dessa forma (com operadores anti-hermitianos). Todas as condições impostas no início seriam satisfeitas à excepção do facto de que iríamos obter operadores anti-hermitianos. Como foi referido em (3.2), é simplesmente uma questão de convenção. Por exemplo, \hat{H}_3 seria

$$\hat{H}'_3 = i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial z} - s \right),$$

que se vê logo ser anti-hermitiano, pois os seus valores próprios são imaginários puros $\lambda_m = i\hbar(m - s)$ e assim, $\overline{\lambda_m} = -\lambda_m$.

Referências

- [1] V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*, Editora Mir Moscovo, 1987.
- [2] M. Blau, *Symplectic Geometry and Geometric Quantization*, Lecture Notes, <http://www.ictp.trieste.it/~mblau/lecturesGQ.ps.gz> .
- [3] J-L. Brylinski, *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*, Birkäuser, 1993.
- [4] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes 2000, <http://math.berkeley.edu/acannas>.
- [5] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1764, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [6] R.W.R. Darling, *Differential Forms and Connections*, Cambridge University Press, 1994.
- [7] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4a Edição, Clarendon Press, Oxford, 1958.
- [8] A. Echeverría-Henríquez et al, *Mathematical Foundations of Geometric Quantization*, Extracta Math. 13 (1998) 135-238.
- [9] I.M. Gel'fand, R. A. Minlos and Z. A. Shapiro *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications*, Pergamon Press, 1963.
- [10] A.A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag, 1976.
- [11] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1978.
- [12] J. Marsden and T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, second edition, Texts in Applied Mathematics 17, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [13] D. McDuff, *A Glimpse into Symplectic Geometry*, in Mathematics - Frontiers and Perspectives 2000, (175-187), International Mathematical Union.
- [14] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1955.
- [15] W. Rossmann, *Lie Groups. An introduction through linear groups*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 5, Oxford University Press, 2002.

- [16] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol I, second edition, Publish or Perish, 1979.
- [17] W. Taylor, *Coadjoint Orbits and Conformal Field Theory*, PhD Thesis, University of California, Berkeley, 1993.
- [18] N. Woodhouse, *Geometric Quantization*, second edition, Oxford, 1991.