JOACHIM ROSENTHAL

DER MATHEMATIKER EMANUEL LASKER

(Buchauszug)

Kapitel 9 aus „Emanuel Lasker: Denker, Weltenbürger, Schachweltmeister“,
hrsg. von Richard Forster, Stefan Hansen und Michael Negele. Exzelsior Verlag, Berlin 2009.

Emanuel Lasker: Denker, Weltenbürger, Schachweltmeister

Herausgegeben von Richard Forster, Stefan Hansen und Michael Negele im Exzelsior Verlag, Berlin, im Auftrag der Emanuel Lasker Gesellschaft. 2009.

XVI + 1079 S., mit über 500 Abb., 1600 Diagrammen und 700 Partien. Gedruckt auf säurefreiem und alterungsbeständigem Papier. Großformat, in Leinen gebunden mit Prägedruck.

Mit Beiträgen von Wolfgang Angerstein, Jesús Bayolo Gonzalez, Ralf Binnewirtz, John Donaldson, Jürgen Fleck, Tony Gillam, Bernd Gräfrath, John Hilbert, Robert Hübner, Peter de Jong, Karl Kadletz, Wolfgang Kamm, Viktor Kortschnoi, Thomas Lemanczyk, Isaak Linder, Wladimir Linder, Tomasz Lissowski, Roberto Mayor Gutiérrez, Egbert Meissenburg, Michael Negele, Susanna Poldauf, Toni Preziuso, Joachim Rosenthal, Raj Tischbierek, Robert van de Velde, Hans-Christian Wohlfarth und einer Einleitung von Paul Werner Wagner.

Verlag und Vertrieb:
Exzelsior Verlag, Leuschnerdamm 31, D-10999 Berlin
Telefon (030) 61076285, Telefax (030) 61076287
Email: info@exzelsior.de
Internet: www.zeitschriftschach.de

ISBN 978-3-935800-05-1

Konzeption und Satz:
Art & Satz · Ulrich Dirr, München
Internet: www.art-satz.de
Satzherstellung · Web-Design · Grafik & Bildbearbeitung · Schrift & Veröffentlichungen

JOACHIM ROSENTHAL

DER MATHEMATIKER EMANUEL LASKER

EINLEITUNG

Unter den Schachspielern von Weltruhm war Emanuel Lasker ohne Zweifel der bedeutendste Mathematiker. Er hat etwa ein Dutzend wissenschaftliche Artikel publiziert, und ein wichtiger Satz der höheren Algebra trägt heute seinen Namen.

Laskers mathematische Begabung hatte sich schon in seiner Kindheit gezeigt,[1] und im Gymnasium in Landsberg an der Warthe wählte er Mathematik als ein Schwerpunktfach. Die Aufgaben seiner Abiturprüfung im März 1888 machen deutlich, dass Lasker sich schon als Gymnasiast gute mathematische Kenntnisse erworben haben musste:

1. In eine Kugel den größten, um sie den kleinsten Kegel zu legen.
2. Zu einer Ellipse und einer konzentrischen Hyperbel von derselben Achsenlänge die gemeinsamen Tangenten finden.
3. Ein Dreieck zu konstruieren und trigonometrisch zu berechnen aus der Grundseite $c = 273$, der zugehörigen Höhe $h = 156$, und der Differenz der beiden anderen Seiten $a - b = d = 91$.
4. Die zwei Brüche

$$\frac{7x^2 + 7x - 176}{x^3 - 9x^2 + 6x + 56} \text{ und } \frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4}$$

in Partialbrüche zu zerlegen.

Offensichtlich sind dies keine leichten Abituraufgaben. Lasker benötigte nur zwei der zur Verfügung gestellten fünf Stunden und löste die Prüfung mit Bravour. Sein Mathematiklehrer zeigte sich ebenso verblüfft über Laskers Schnelligkeit wie seine Mitschüler.[2]

Noch im selben Frühling 1888 nahm Lasker in Berlin das Studium der Mathematik auf. Extensive Reisen und eine ausgiebige Schachtätigkeit führten immer wieder zu Unterbrechungen. Nach Stationen in Göttingen und Heidelberg gelang ihm schließlich in Erlangen 1900 mit der Promotion ein berufsqualifizierender Abschluss.

Lasker war ein produktiver und vielseitiger Mathematiker. Seine Hauptarbeit *Zur Theorie der Moduln und Ideale* (1905) gehört ins Gebiet der Algebra, doch daneben hat er auch mehrere Arbeiten über geometrische Fragestellungen publiziert, und seine Dissertation ist der Analysis zuzuordnen. Seine in den Jahren 1929 und 1931 publizierten Werke zum Karten- und zum Brettspiel behandeln schließlich mathematische Fragestellungen in der Spieltheorie[3] – rund 15 Jahre vor dem klassischen Werk von Morgenstern und von Neumann,[4] das allgemein als Ausgangspunkt der mathematischen Spieltheorie gilt.

Lasker, Mitglied der American Mathematical Society (ab 1906) und der Kant-Gesellschaft (ab 1913),[5] stand über die Jahre in brieflichem Kontakt mit verschiedenen führenden Mathematikern seiner Zeit. Mit der Familie des jung verstorbenen Holländers Pierre Joseph Henry Baudet (1891–1921) verband ihn eine enge Freundschaft.[6] Und Edmund Landau (1877–1938), Mathematikprofessor in Göttingen, teilte mit Lasker und Baudet nicht nur das Interesse für Schach, sondern auch für Go und Laska;[7] ein Gratulationsschreiben zu Laskers 60. Geburtstag zeugt vom freundschaftlichen Kontakt der beiden.

David Hilbert (1862–1943), Adolf Hurwitz (1859–1919) und Otto Toeplitz (1881–1940) waren weitere bekannte Mathematiker, die Lasker offenbar zu seinem Bekanntenkreis zählte.[8]

1. Vgl. Hannak, *Lasker*, S. 15
2. *WSZ*, September/Oktober 1908, S. 278. Zu Laskers Abitur vgl. ferner S. 11–14 in diesem Band.
3. Lasker, *Kartenspiel*, S. 23–32, und Lasker, *Brettspiele*, S. 170–203
4. von Neumann/Morgenstern, *Theory of Games* (1944); vgl. aber auch von Neumann, Theorie der Gesellschaftsspiele (1928), ein Beitrag, den Lasker mit Sicherheit zur Kenntnis genommen hatte.
5. *Science*, Bd. 24, 1906, S. 654 und Dreyer/Sieg, *Lasker*, S. 30
6. Vgl. S. 107–109 in diesem Band. Zum Mathematiker Baudet siehe auch Soifer, *The Mathematical Coloring Book*, S. 320–346 (speziell S. 338–340 und 345 mit Bezug auf Lasker).
7. In einem Brief an seine Frau Martha vom März 1912 berichtet Lasker von seinem Besuch bei Landau in Göttingen, von ihrem Go-Spiel und seiner Vorführung des Laska-Spieles. Laskers Meinung zu Landau als Mathematiker ist bemerkenswert: »(…) und wir haben eine große Menge Mathematik gesprochen. Es war mir sehr interessant, seine Ansichten zu hören. Nur ist er ein Spezialist, weiß fast gar nichts als Theorie der Primzahlen. Trotz der Riesen-Bibliothek. Dabei arbeitet er viel und intelligent, aber jedenfalls beschränkt sich sein Interesse auf die eine Sache und er ist nun schon zu einseitig geworden.« (Quelle: Autographen-Sammlung der Cleveland Public Library, Ohio). Vgl. auch S. 325.
8. Brief an Otto Toeplitz, 27. August 1911 (Kramer, Letters of Emanuel Lasker, Nr. 134), darin auch Erwähnung von Hilbert; ebenso im Brief an Martha Lasker aus Lugano, 5. April 1916 (Kramer, Letters of Emanuel Lasker, Nr. 192), worin neben Hilbert auch Hurwitz erwähnt wird. Ferner: Brief von Adolf Hurwitz an Emanuel Lasker aus Zürich, 1. Mai 1904 (Archiv Jurgen Stigter, Amsterdam). Zu diesen und anderen jüdischen Mathematikern vgl. auch Bergmann/Epple, *Jüdische Mathematiker* (2009).

Edmund G.H. Landau, 1901 an der Berliner Universität habilitiert, kannte den neun Jahre älteren Lasker sicherlich schon aus dessen Berliner Jahren. 1909 wurde Landau in Göttingen Nachfolger des früh verstorbenen Hermann Minkowski. Im Herbst 1933 musste er unter dem politischen Druck der Nazis emeritieren.

Was halte ich von Emanuel Lasker?
Gratulationsschreiben von Edmund Landau zum 60. Geburtstag

Bei Lasker liegt einer der seltenen Fälle in der Geschichte des Geistes vor, dass ein Mann in mehr als einem Wissensgebiete Grosses, Unvergängliches geschaffen hat. Emanuel Lasker hat im Schach Grösstes geleistet, ich bin stolz darauf, die Entwicklung des Weltmeisters von seinem ersten Aufstiege an miterlebt zu haben. Und in der Mathematik hat er in wenigen Abhandlungen Bedeutendes geliefert. Wahrscheinlich wird ihm von den Vertretern anderer Wissenschaften, in denen ich Laie bin, ähnliches Lob gespendet werden.

Göttingen, 7.11.28

Quelle: Lasker Scrapbooks, Cleveland Public Library, Ohio.

Lasker hielt als »Alter Herr« dem Mathematischen Verein der Universität Berlin die Treue. Der hier angekündigte Vortrag wurde 1915 unter dem Titel »Ueber das mathematisch Schöne« in den *Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Blättern* veröffentlicht.

Dabei stellte sich ihm auch wiederholt die Frage nach einer eigenen akademischen Karriere als Mathematiker. Wohl hatte er 1902 eine akademische Anstellung in Manchester, doch Versuche in Missouri (1903) und Pittsburgh (1904) sowie weitere Anläufe in den dreißiger Jahren blieben erfolglos.

Seine akademischen Leistungen, besonders seine Dissertation und seine Arbeit zu den Moduln und Idealen von 1905, wären sicherlich Grundlage genug gewesen, ihm nach 1905 eine Professur an einer guten Universität anzubieten. In Deutschland fehlte ihm allerdings die Habilitation, während in England und den Vereinigten Staaten viele akademische Stellen primär *lectureships* waren, also Stellen, welche mit einer großen Lehrbelastung und mit wenig Zeit zum Forschen und Reisen einhergingen, was für Lasker kaum attraktiv war. Umgekehrt war sein mathematischer Leistungsausweis wohl zu wenig ausgeprägt, um sich erfolgreich auf eine der wenigen Stellen an den amerikanischen Spitzen-Universitäten zu bewerben, was gewiss schon damals sehr attraktiv gewesen wäre.

Im Folgenden wird Laskers Werdegang als Mathematiker etwas näher nachgezeichnet und der Stellenwert seiner Arbeiten erklärt. Dabei soll besonders das Lasker-Noether-Theorem wegen seiner großen Bedeutung auch auf technischer Ebene näher skizziert werden, um so einem breiteren Publikum zu erlauben, seinen Inhalt und seine Wichtigkeit nachzuvollziehen und zu schätzen.[9]

9. Zur Würdigung Laskers als Mathematiker siehe auch Thesing, Zum mathematischen Werk von Emanuel Lasker (1999); M. Lang, »Laskers ›Ideale‹ und die Fundierung der modernen Algebra« in: Dreyer/Sieg, Lasker, S. 93–111, und Rezension von N. Schappacher in: *Mathematische*

Adolf Hurwitz bemühte sich 1892 um die Nachfolge von Hermann Amandus Schwarz in Göttingen, scheiterte aber offenbar an der »Judenfrage«. Er erhielt schließlich im gleichen Jahr einen Lehrstuhl an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, wo er 1900 mit Lasker Kontakt hatte und dieser ihn angeblich zur Lösung eines mathematischen Problems anregte.

Otto Toeplitz, ein Schüler von David Hilbert, habilitierte 1907 in Göttingen. Ab 1928 lehrte er in Bonn, 1939 gelang ihm die Emigration nach Palästina. Toeplitz hat sich entschieden für die Popularisierung der Mathematik und ihrer Geschichte eingesetzt. Sein mit Hans Rademacher verfasstes Werk *Von Zahlen und Figuren* (»Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik«, 1930) wurde in mehrere Sprachen übersetzt.

LASKERS STUDIENJAHRE UND ERSTE PUBLIKATIONEN

Unmittelbar nach dem Abitur immatrikulierte sich Lasker am 25. April 1888 an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin (heute: Humboldt Universität).[10] Unter anderem besuchte er dort Vorlesungen bei Leopold Kronecker (1823–1891), der für das »Kronecker-Matrizenprodukt« und das »Kronecker-Delta« bekannt ist.

Nach drei Semestern verlegte er seine Studien nach Göttingen, wo er unter anderem bei Felix Klein (1849–1925), Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) und Arthur Moritz Schönflies (1853–1928) hörte.

Wenig ist über seine Studienfortschritte in dieser Zeit bekannt. Es scheint, dass er sich selbst nicht ganz sicher war, ob er das richtige Studienfach gewählt hatte:

> Im Jahre des Heils 1891, im Junimonat, wo die Sonne schon anfängt manchmal ganz unbarmherzig heiß auf die Quadersteine und Asphaltpflaster Berlins herabzublicken, da ging ich eines Tages in sengender Glut trübselig von der Universität nach Hause. Schon sieben Semester lang hatte ich zu Füssen der Alma mater gesessen. Aber die Erwartungen, mit denen ich die Universität betreten hatte, hatten sich nicht erfüllt. Mit welcher Liebe hatte ich mich dem Studium der Mathematik hingegeben. Nicht weil ich geglaubt hatte, glänzende Karriere zu machen, sondern einfach aus der Überzeugung heraus, dass in *der* Richtung mein bestes Können liege. Und all die Philisterseelen erzählten mir nun bis zum Überdruss, daß es mehr Mathematiker gebe, als in der Welt Verwendung finden könnten, daß es eine sehr unpraktische Sache von mir gewesen sei, einem derartig überfüllten Berufe mich zuzuwenden usw. usw. Und selbst der Professor rieth uns entschieden ab, uns auf das Studium seiner Wissenschaft zu legen. Zudem hatt' ich weder Gut noch Geld, noch Ehr und Herrlichkeit der Welt.[11]

Semesterberichte, Bd. 48, Heft 1, Juli 2001, S. 110. Ferner Leo Corry, *Modern algebra*, S. 216–220.

10. Thesing, Zum mathematischen Werk von Emanuel Lasker, S. 10
11. *Welt am Montag* (Berlin), 24. Februar 1896

Zwischen 1892 und 1897 stellten sich die großen Erfolge im Schach ein. Lasker reiste viel und man muss annehmen, dass seine mathematischen Studien darunter litten. Dennoch wurde er 1893 von der Tulane University in New Orleans eingeladen, eine Folge von Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen zu halten, ein Gebiet, das zum Basisstoff des Mathematikstudiums gehört. Seine Vorträge, die sich an Lehrer und Studenten der Mathematik wandten, wurden am 3. und 4. März 1893 eigens im *Daily Picayune of New Orleans* angekündigt. Sein Ruf als »the famous chess player« dürfte dabei nicht nur der Auslöser für die Inserate, sondern auch der eigentliche Anlass zur Einladung gewesen sein, denn im Jahre 1893 konnte Lasker weder mathematische Publikationen noch eine Dissertation vorweisen.[12]

Erst zwei Jahre später, inzwischen als Weltmeister, publizierte Lasker seine ersten wissenschaftlichen Artikel. Beide Arbeiten sind relativ kurz und beschäftigen sich mit elementar-geometrischen Fragestellungen rund um Pyramiden[13] und Raumkurven,[14] die man heute als »rationale normale Kurven« kennt. Die Sprache beider Arbeiten wirkt aus heutiger Sicht altmodisch, und sie sind kaum je zitiert worden.

Seine erste beachtliche mathematische Arbeit publizierte Lasker im Jahr darauf.[15] Anregung dazu bot Hermann Günther Grassmanns *Ausdehnungslehre* (1844), auf deren revidierte Fassung von 1862 sich Lasker bezog. Grassmann entwickelte darin einen algebraischen Formalismus zur Behandlung geometrischer Fragestellungen. Wie Lasker schreibt, habe Grassmann damals nur wenige Mathematiker von seiner neuen Betrachtungsweise überzeugen können, weshalb er sich zum Ziel gesetzt habe zu zeigen, dass die projektive Geometrie elegant mit dem Grassmannschen Zugang behandelt werden könne.

Der Artikel bietet einen guten Überblick über den Grassmannschen Formalismus. Obwohl die Theorie im Grunde sehr elementar ist, findet man sie nicht mehr im Lehrplan eines Universitätsstudiums, weil mit der modernen algebraischen Geometrie eine sehr viel leistungsfähigere Theorie zur Verfügung steht.

Ab 1897 widmete sich Lasker wieder dem Mathematikstudium, zuerst in Heidelberg bei Leo Königsberger (1857–1921), Georg Landsberg (1865–1912) und Georg Hermann Quincke (1835–1924, Physik), dann in Berlin wieder bei Fuchs und Kurt Hensel (1861–1941, Physik). Am 31. Januar 1900 promovierte er in Erlangen mit einer Arbeit in Analysis an der königlich-bayerischen Friedrich-Alexander-Universität (mit den Nebenfächern Physik und englische Philologie).[16] Als Doktorvater agierte Max Noether (1844–1921), von 1888 bis zu seiner Emeritierung 1919 ordentlicher Professor in Erlangen. Laskers Dissertation erhielt das Prädikat magna cum laude.

Es wird erwähnt, dass Lasker die ersten zwei Kapitel schon früher an einen Wettbewerb der Pariser Académie des sciences geschickt hatte, ohne jedoch einen Preis erhalten zu haben.[17] Lasker schrieb dazu seinen Eltern:

> Die französische Akademie hat, wie ich erwartete, ihrem Landsmann E[mile] Borel den Preis für die von ihm eingelieferte Arbeit zuerkannt. Meine Arbeit wurde sehr ehrenvoll kritisiert und gelangte nur deswegen nicht zur Prämierung, da sie nach Ermessen der eingesetzten Kommission dem zu Grunde gelegten Thema nicht nahe genug kam. Ich bin allerdings der Ansicht, daß das Urteil der Kommission nicht berechtigt sei und werde auch meinen Standpunkt in einer mathematischen Zeitschrift begründen.[18]

Am 15. März 1900 reicht er seine Arbeit auch für die *Philosophical Transactions of the Royal Society* in England ein, wo sie drei Wochen später von Percy Alexander MacMahon akzeptiert wurde. Noch im Jahre 1900 erschien eine dreiseitige Zusammenfassung auf Englisch, als deren Autor »Emanuel Lasker, Dr. Philos.« zeichnete.[19] Die vollständige Arbeit erschien im Jahr darauf.[20] In einem weiteren Brief an seine Eltern, datiert 10. April 1901, schreibt Lasker dazu:

> [Die Arbeit] ist auf deutsch geschrieben – eine sehr seltene Ehre für eine deutsche Abhandlung von der englischen Royal Society veröffentlicht zu werden – in Wahrheit ist die Veröffentlichung sogar eine Ehre für eine englisch geschriebene Abhandlung. Sobald ich die Kopien in der Hand habe, werde [ich] Euch eine derselben zusenden. Ein kleiner Teil der Abhandlung war meine Doktor-Dissertation.[21]

Nach seiner Dissertation weilte Lasker auf Einladung des dortigen Schachklubs mehrere Monate in Manchester und nahm dort Ende 1901 auch eine Stelle als »Assistant Lecturer« am Owens College an. Auf ein Leben als Mathematiklehrer schien er sich zu freuen,[22] doch hat er das englische Klima angeblich schlecht vertragen,[23] und so gab er bald seine Lehrstelle wieder auf, um sich wieder ganz dem Schach zu widmen.

12. Lasker selbst war ausgesprochen stolz auf diese fast einmonatige Vortragsserie. In seinem *London Chess Fortnighly*, 30. März-14. April 1893, S. 127, erwähnt er, dass »18 Damen und Herren von Anafng bis Ende teilnahmen,« und er zitiert einen Dankesbrief von Prof. Brown Avres vom Physikalischen Labor der Tulane University of Louisiana.
13. Lasker, Metrical relations
14. Lasker, Curved lines
15. Lasker, Essay on the geometrical calculus
16. Thesing, Zum mathematischen Werk von Emanuel Lasker, S. 12
17. Lang, Laskers Ideale, S. 96
18. Brief vom 14. Mai 1899 aus Berlin, Pestalozzistr. 42 I, nach Berlinchen, Quelle: Autographen-Sammlung der Cleveland Public Library, Ohio.
19. Lasker, Über Reihen (abstract)
20. Lasker, Über Reihen
21. Autographen-Sammlung der Cleveland Public Library, Ohio
22. Brief Laskers an Shipley vom 3. Dezember 1901 aus Manchester, 12 Exchange Str. (New York Public Library, Rare Books and Manuscripts, Pfeiffer Chess Collection, Box 1). Vgl. auch S. 42f. in diesem Band.
23. *SSZ*, November 1902, S. 21

Promotionsgesuch für Emanuel Lasker, eingereicht am 29. Januar 1900 von Prof. Richard Falckenberg, dem Dekan der philosophischen Fakultät der Friedrich-Alexander-Universität, Erlangen.

Laskers Gesamtnote nach Bestehen der mündlichen Promotionsprüfung.

Laskers Dissertationsthema

In seiner Dissertation untersucht Lasker Konvergenzfragen von komplexen Funktionen, die mittels einer Reihenentwicklung darstellbar sind. Dazu sei r eine natürliche Zahl, und man betrachte eine Folge von analytischen Funktionen

$$u_i : \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}, \ i = 1, 2, 3, \ldots$$

und bilde die Funktion $u := \sum_{i=0}^{\infty} u_i$. Man nimmt an, dass u gleichmäßig und stetig in einem Gebiet G konvergiert. Von Interesse ist das Verhalten der Funktion u auf dem Rande ∂G. Um den Wert u auf einem Randpunkt $P \in \partial G$ zu untersuchen, betrachtet man Punktfolgen $\{P_i\}_{i \geq 1}$, deren Grenzwert P ist. Es ist wohlbekannt, dass im Allgemeinen der Wert $u(P)$ von der Limes-Bildung $\lim_{i \to \infty} P_i$ abhängt. Lasker leitet eine Reihe von Kriterien über gleichmäßige und absolute Konvergenz her. Die Arbeit baut auf Forschungsresultate auf von Niels Henrik Abel (1802–1829), Georg Frobenius (1849–1917) und den französischen Mathematikern Emile Borel (1871–1956), Jacques Hadamard (1865–1963), Emile Picard (1856–1941) und Henri Poincaré (1854–1912).

Die neuen Erkenntnisse in Laskers Arbeit sind beschränkt, die Arbeit zeigt aber seine Fähigkeit, sich in ein großes Gebiet der Analysis einzulesen und auf hohem Niveau eine wissenschaftliche Arbeit zu verfassen.

Im Herbst 1902 begab sich Lasker erneut in die Vereinigten Staaten, wo er sich unter anderem um eine Anstellung an der University of Missouri bewarb. Offenbar haben sich diese Verhandlungen, um die Lasker durchaus bemüht war, jedoch zerschlagen.[24]

Im Jahr darauf stand Lasker in Verhandlungen mit dem Präsidenten des Carnegie Technical Institute in Pittsburgh. Dabei konnte er auch auf die Unterstützung seines Doktorvaters zählen:

> Prof Dr. Noether, bei dem ich den Doktortitel erwarb, übersandte mir eine sehr schmeichelhafte Empfehlung. Mr. Hamerschlag, der Leiter des Carnegie Institute in Pittsburgh interessiert sich sehr für mich.[25]

Aus einem Brief an seinen Bruder Berthold geht hervor, dass er ein Jahressalär von 3500 Dollar forderte.[26]

24. Die Angaben zu Laskers Bewerbung in Missouri sind sowohl im Bezug auf den Zeitpunkt wie den Ort (sowohl St. Louis wie Columbia werden genannt) etwas widersprüchlich. Eine genaue Auswertung der Quellen lässt jedoch kaum Zweifel daran, dass er sich – mit Unterstützung von Max Judd – an der heutigen University of Missouri in Columbia beworben hatte. Vgl. Hilbert, *Shipley*, S. 252; *Checkmate*, März 1903, S. 133; *SSZ*, Februar 1903, S. 67, *DSZ*, Februar 1903, S. 64, *Corsair*, 8. März 1903 und Meissenburg, *Emanuel Lasker*, S. 6 (Fn. 12) sowie die Dementi in *DWS*, 19. April 1903, S. 135 und *Checkmate*, Juni 1903, S. 203. Allerdings schrieb Lasker noch am 5. Oktober 1903 an Walter Penn Shipley: »My application for the Columbia Mo. professorship has been answered in the negative, perhaps two months ago.« (New York Public Library, Rare Books and Manuscripts, Pfeiffer Chess Collection, Box 1). Dreyer/Sieg, *Lasker*, S. 16, scheinen dieses Statement schließlich irrtümlich auf die weit berühmtere Columbia-Universität der Stadt New York zu beziehen.

25. Brief an seine Mutter, New York, 24. Juni 1904 (Kramer, Letters of Emanuel Lasker, Nr. 30)

26. Brief an Berthold Lasker, 5. Mai 1905 [sic] (Autographen-Sammlung der Cleveland Public Library, Ohio)

Das Carnegie Technical Institute (heute Carnegie Mellon University) war im Jahre 1900 gegründet worden und Arthur Hamerschlag sein erster Präsident. Am Ende kam es auch mit dieser Institution zu keiner Übereinkunft.

1904 erfolgten auch die ersten zwei (kleineren) wissenschaftlichen Veröffentlichungen Laskers seit seiner Dissertation. Die eine ist eine elementar-geometrische Beobachtung über Paare von Dreiecken.[27] Von größerem Interesse ist der andere Beitrag, seine erste Arbeit, die dem Gebiet der algebraischen Geometrie zugeordnet werden kann.[28] Lasker greift darin ein klassisches Problem aus der Invarianten-Theorie auf und entwickelt eine Methode, um die minimale Anzahl Parameter zu finden, welche man benötigt, um ein System von algebraischen Gleichungen in eine kanonische Form zu bringen. Es existieren bis auf den heutigen Tag Arbeiten, welche diesen Beitrag zitieren.

DER LASKER-NOETHERSCHE ZERLEGUNGSSATZ

Als Mathematiker berühmt geworden ist Lasker dank seiner 1905 erschienenen *Theorie der Moduln und Ideale*, worin er den Laskerschen Zerlegungssatz für Polynomideale formulierte. Diese Arbeit wurde später von Emmy Noether verallgemeinert,[29] und heute ist diese Verallgemeinerung in der Literatur als Lasker-Noether-Theorem oder Lasker-Noetherscher Zerlegungssatz bekannt. Dieser Satz verallgemeinert den Hauptsatz der Arithmetik weitreichend. In seiner allgemeineren Formulierung enthält das Theorem den Hauptsatz über abelsche Gruppen sowie einen wichtigen Faktorisierungssatz von Richard Dedekind, wodurch sich zum Teil auch seine Wichtigkeit erklärt. Im Folgenden werden wir versuchen, den Inhalt sowie die Konsequenzen des Lasker-Noetherschen Satzes einem breiteren Publikum näher zu bringen.

Um das Lasker-Noether-Theorem herzuleiten, werden in diesem Beitrag alle wichtigen Hilfssätze ohne Beweis zusammengestellt und die Resultate anhand von Beispielen illustriert. Beweise der zitierten Sätze findet man in der Literatur.[30]

*

Man bezeichne mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Der Hauptsatz der Arithmetik besagt, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Primzahl-Zerlegung besitzt:

Satz 1. *Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann existieren Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ und positive ganze Zahlen $e_1, \ldots, e_k$ so dass*

$$n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}.$$

Diese Primzerlegung ist dabei eindeutig bis auf die Anordnung der Primfaktoren $p_1, \ldots, p_k$.

Im 18. und 19. Jahrhundert beschäftigten sich viele Mathematiker mit der Frage, ob der Hauptsatz der Arithmetik auch für andere Zahlringe gelte. Gauß beschäftigte sich z.B. mit dem nach ihm benannten Zahlring $\mathbb{Z}[i]$. Um dieses Konzept zu erklären, bezeichne man mit $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Man bezeichne mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und definiere die Menge der komplexen Zahlen durch:

$$\mathbb{C} := \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ und } i^2 = -1\}.$$

Die Menge der Gaußschen ganzen Zahlen (manchmal auch als »Gaußscher Zahlring« bezeichnet) ist dann definiert als die folgende Untermenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right] := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ induziert in natürlicher Weise eine Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}[i]$. Wie wir bald feststellen werden, hat $\mathbb{Z}[i]$ die Struktur eines Ringes.

Primzahlen in $\mathbb{Z}$ sind nicht notwendigerweise irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$. So zerlegt sich zum Beispiel die Primzahl 5 als

$$5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$$

im Ring der Gaußschen ganzen Zahlen, und man kann zeigen, dass sowohl $(1 + 2i)$ wie auch $(1 - 2i)$ irreduzibel sind. Die Faktorisierung $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ entspricht einer Primzahlzerlegung im Gaußschen Zahlring. Gauß konnte schon am Anfang des 19. Jahrhunderts zeigen, dass jedes Element in $\mathbb{Z}[i]$ eine Zerlegung in irreduzible Elemente hat und dass diese Zerlegung eindeutig ist bis auf die Anordnung der Primfaktoren und bis auf so genannte assoziierte Elemente. Um das letztere Konzept zu verstehen, betrachte man die beiden Faktorisierungen:

$$5 = (1 + 2i)(1 - 2i) = (2 - i)(2 + i).$$

Die Faktoren $(1 + 2i)$ und $(2 - i)$ heißen »assoziierte«, da mittels Multiplikation mit $-i$ der erste Faktor in den zweiten überführt wird und umgekehrt mittels Multiplikation mit

27. Lasker, A geometric proposition
28. Lasker, Zur Theorie der kanonischen Formen
29. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen
30. Wenig Vorkenntnisse verlangen Cox/Little/Shea, *Ideals* sowie Renschuch, *Idealtheorie*. Andere Lehrbücher erwarten mehr Vorkenntnisse, gehen aber auch in den Resultaten weiter (Becker/Weispfenning, *Gröbner Bases*; Eisenbud, *Commutative Algebra* und Kunz, *Einführung*). Details zu den geschichtlichen Aspekten der Algebra im Allgemeinen und des Zerlegungssatzes im Speziellen findet der interessierte Leser in Corry, *Modern algebra*.

Emmy Noether leistete einen fundamentalen Beitrag zu Einsteins Relativitätstheorie. Das Noether-Theorem wurde zum Gemeingut der mathematischen Physiker. 1915 wurde ihre Habilitation abgelehnt. Obwohl sich Einstein und Hilbert nach dem Ersten Weltkrieg erneut für sie einsetzten, blieb ihr eine echte Professur vorenthalten.

$\frac{1}{-i} = i$ der zweite Faktor in den ersten. Ganz ähnlich sind $(1 - 2i)$ und $(2 + i)$ assoziierte Elemente, und die beiden Faktorisierungen sind deshalb »identisch bis auf assoziierte Elemente«. Im Allgemeinen heißen zwei Elemente $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ assoziiert, falls es ein invertierbares Element $r \in \mathbb{Z}[i]$ gibt, so dass $b = ra$. Der Leser wird verifizieren, dass die assoziierten Elemente eines Elementes $a \in \mathbb{Z}[i]$ genau die Elemente $\{a, -a, ia, -ia\}$ sind.

Schwierigkeiten mit einer eindeutigen Faktorisierungs-Theorie tauchten aber bald in anderen Zahlringen auf. Dedekind gab als Beispiel den Zahlring

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right] := \{a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

In dieser Menge können wir wieder addieren und multiplizieren, aber die Eindeutigkeit einer Primzerlegung ist nicht mehr vorhanden. So kann man zeigen, dass die Zahl 6 zwei Zerlegungen hat:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}).$$

Dabei sind die Faktoren $2, 3, (1 + \sqrt{-5}), (1 - \sqrt{-5})$ alle irreduzibel und paarweise nicht zueinander assoziiert, d.h. die Faktoren können nicht einfach durch invertierbare Elemente ineinander überführt werden. Die Faktorisierung in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ ist deshalb im Gegensatz zur Faktorisierung in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right] = \mathbb{Z}[i]$ nicht eindeutig.

Emmy Noether (1882–1935)

Emmy Noether gilt als eine der bedeutendsten Mathematikerinnen des 20. Jahrhunderts. Sie ist die Tochter von Max Noether, dem Doktorvater Emanuel Laskers. Emmy Noether promovierte am 13. Dezember 1907 in Erlangen bei Paul Gordan (1837–1912). Von 1908 bis 1915 war sie ohne formelle Anstellung am Mathematischen Institut in Erlangen tätig und von 1915 bis zu ihrer Emigration 1933 in Göttingen. Neben dem Lasker-Noetherschen Satz ist Emmy Noether vor allem bekannt für das Noether-Theorem aus der mathematischen Physik, wonach jede kontinuierliche Symmetrie eines physikalischen Systems eine Erhaltungsgröße zur Folge hat und umgekehrt jeder Erhaltungsgröße eine kontinuierliche Symmetrie zu Grunde liegt.

Ein anderes bedeutendes Resultat ist der Noethersche Normalisierungssatz aus der algebraischen Geometrie (vgl. Kunz, *Einführung*, Theorem 3.1). Die Begriffe »Noetherscher Ring« und »Noetherscher Modul« tragen ebenfalls ihren Namen.

Emmy Noethers akademische Karriere wurde stark durch das damalige politische Regime behindert. – Frauen war es am Anfang des 20. Jahrhunderts noch nicht erlaubt zu habilitieren. Erst nach Überwindung vieler Hindernisse erhielt sie 1919 als erste Frau in Göttingen die Habilitation und damit eine Lehrerlaubnis.

Wegen ihrer jüdischen Herkunft wurde ihr diese in Göttingen im Frühjahr 1933 zusammen mit fünf anderen jüdischen Professoren entzogen. Im Herbst desselben Jahres folgte sie einer Einladung als Gastprofessorin an das amerikanische Frauencollege Bryn Mawr in Pennsylvania. Sie verstarb am 14. April 1935 in Pennsylvania an den Folgen einer Operation. Albert Einstein verfasste einen Nachruf, der am 4. Mai 1935 in der *New York Times* erschien. Dem interessierten Leser sei die detaillierte Biographie von Tollmien empfohlen.

Die Idealtheorie von Dedekind

Richard Dedekind (1831–1916) untersuchte Faktorisierungen in allgemeinen Zahlringen. Dabei erkannte er, dass eine mengentheoretische Betrachtungsweise sehr viel mehr Informationen liefert, als es die einfache Faktorisierung von Elementen kann. Um dies zu verstehen, definieren wir zuerst das Konzept eines Ringes.

Definition 2. Ein *kommutativer Ring R* ist eine Menge mit zwei Operationen ›+‹ (genannt Addition) und ›·‹ (genannt Multiplikation), so dass folgende Axiome gelten:

1. Die Addition ist assoziativ, d.h. für alle $a, b, c \in R$ soll gelten:
$$(a+b)+c = a+(b+c).$$
2. Die Addition ist kommutativ, d.h. für alle $a, b \in R$ soll gelten: $a+b = b+a$.
3. Es gibt eine ›Null‹ $0 \in R$, so dass $a + 0 = a$ für alle $a \in R$.
4. Jedes Element $a \in R$ besitzt ein additiv inverses Element b, so dass $a + b = 0$.
5. Die Multiplikation ist assoziativ, d.h. für alle $a, b, c \in R$ soll gelten:
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$
6. Die Multiplikation ist kommutativ, d.h. für alle $a, b \in R$ soll gelten:
$$a \cdot b = b \cdot a.$$
7. Es gilt das Distributivgesetz, d.h. für alle $a, b, c \in R$ soll gelten:
$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Sofern es nicht zu Verwirrungen führt, wird das Multiplikationszeichen ›·‹ üblicherweise weggelassen, d.h. man schreibt kurz ab für $a \cdot b$.

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, der Gaußsche Zahlring $\mathbb{Z}[i]$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind alles Beispiele von kommutativen Ringen.

Die wichtigsten Teilmengen eines Ringes sind die Ideale:

Definition 3. Es sei R ein kommutativer Ring. Eine Teilmenge $I \subset R$ heißt Ideal, falls mit $a, b \in I$ und $r \in R$ auch $(a - b)$ und ra in I sind.

Beispiel 4. Die Ideale innerhalb der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind genau von der Form

$$n\mathbb{Z} := \{\dots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\},$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

Definition 5. Falls $T \subset R$ eine Teilmenge eines Ringes ist, so bezeichnet man mit $< T > \subset R$ das kleinste Ideal, welches die Teilmenge T enthält.

Richard Dedekind (1831–1916) war der letzte Schüler von Carl Friedrich Gauß in Göttingen. Nach kurzem Aufenthalt in Zürich wurde er 1862 Professor für Mathematik in seiner Heimatstadt Braunschweig. Dedekind gilt mit Kronecker als Wegbereiter der Ideale, er hat die moderne Algebra entscheidend geprägt und damit auch Emanuel Laskers akademische Laufbahn stark beeinflußt.

Man zeigt in der Algebra, dass $< T >$ einfach gleich dem Durchschnitt aller Ideale ist, welche T enthalten. Falls $T \subset R$ die endliche Menge $T = \{a_1, \dots, a_k\}$ darstellt, schreibt man oft auch $< a_1, \dots, a_k >$ für das Ideal $< T >$.

Beispiel 6. Das Ideal $< 5 > \subset \mathbb{Z}$ ist gegeben durch:

$$< 5 > = 5\mathbb{Z} = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}.$$

Das Ideal $< 2, 1 + i > \subset \mathbb{Z}[i]$ besteht aus der Menge:

$$< 2, 1+i > = 2\mathbb{Z}[i] + (1+i)\mathbb{Z}[i] = \{2a + b + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}[i]\}.$$

Ideale kann man in natürlicher Weise addieren und multiplizieren. Ebenso ist der Durchschnitt zweier Ideale wiederum ein Ideal. Das folgende Beispiel illustriert diese mengentheoretischen Operationen an Idealen in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

Beispiel 7.
$$\begin{aligned} < 6 >< 15 > &= < 90 >, \\ < 6 > + < 15 > &= < 3 >, \\ < 6 > \cap < 15 > &= < 30 >. \end{aligned}$$

Man sagt, $I \subset R$ sei ein echtes Ideal, falls $I \neq < 0 >$ und $I \neq R$. Dedekind konnte zeigen, dass in beliebigen Zahlringen für jedes echte Ideal eine Produkt-Zerlegung in Primideale existiert. Dazu definieren wir zuerst:

Definition 8. Ein Ideal $P \subset R$ heißt *Primideal*, falls mit $a, b \in R$, $ab \in P$ folgt, dass $a \in P$ oder $b \in P$.

Beispiel 9. In $\mathbb{Z}$ entsprechen den Primidealen genau die Ideale $< n >= n\mathbb{Z}$, wo n eine Primzahl ist. Dieser Sachverhalt erklärt den Namen. So ist $< 6 > \subset \mathbb{Z}$ kein Primideal, da $2, 3 \notin < 6 >$, aber $2 \cdot 3 = 6 \in < 6 >$.

Um den folgenden wichtigen Faktorisierungssatz von Dedekind zu erklären, wähle man ganze Zahlen $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{Z}$, so dass

$$p(x) := x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

ein irreduzibles Polynom vom Grad n in der Variablen x ist. D.h. $p(x)$ ist ein Element des Polynomrings $\mathbb{Z}[x]$ und $p(x)$ besitzt keine »nicht-triviale« Faktorisierung in diesem Ring. Weiter nehme man an, dass α eine Wurzel von $p(x)$ ist. $\mathbb{Z}[\alpha]$ ist dann der Zahlring definiert durch:

$$\mathbb{Z}[\alpha] := \{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}\}.$$

Innerhalb des Ringes $\mathbb{Z}[\alpha]$ erfolgt die Addition komponentenweise. Für die Multiplikation benützt man die Relation $p(\alpha) = 0$, falls Terme auftauchen, welche einen Grad größer als n haben.

Satz 10. *Falls $I \subset \mathbb{Z}[\alpha]$ ein Ideal ist, $I \neq < 0 >$ und $I \neq \mathbb{Z}[\alpha]$, dann existieren paarweise verschiedene Primideale $P_1, \dots, P_k$ und positive ganze Zahlen $e_1, \dots, e_k$, so dass:*

$$I = P_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot P_k^{e_k}.$$

Des Weiteren ist die Faktorisierung bis auf die Anordnung der Faktoren eindeutig.

Beispiel 11. Wir haben schon erwähnt, dass im Zahlring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ die Zahl 6 keine eindeutige Faktorisierung hat. Wir zeigen nun, dass mengentheoretisch das Ideal $< 6 > \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ eine eindeutige Faktorisierung in Primideale besitzt. Man betrachte dazu die Ideale:

$$\begin{aligned} P_1 &:= < 2, 1 + \sqrt{-5} >, \\ P_2 &:= < 3, 1 + \sqrt{-5} >, \\ P_3 &:= < 3, 1 - \sqrt{-5} >. \end{aligned}$$

Man kann nun zum Beispiel nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} P_2P_3 &= < 3, 1+\sqrt{-5} >< 3, 1-\sqrt{-5} > \\ &= < 9, 3(1+\sqrt{-5}), 3(1-\sqrt{-5}), 6 > \\ &= < 3 >< 3, 1+\sqrt{-5}, 1-\sqrt{-5}, 2 > = < 3 >< 1 > = < 3 > . \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$P_1P_1 = < 2 >, \ P_1P_2 = < 1+\sqrt{-5} > \ \text{und} \ P_1P_3 = < 1-\sqrt{-5} > .$$

Wir haben also gezeigt, dass die »zweideutige Faktorisierung«

$$6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

auf der ideal-theoretischen Seite beide Male die Faktorisierung

$$< 6 > = P_1^2 P_2 P_3$$

darstellt. Es bleibt zu bemerken, dass die drei Ideale P_1, P_2, P_3 Primideale sind.

Der Dedekindsche Satz ist eine der großen Erkenntnisse in der Zahlentheorie des 19. Jahrhunderts. Für den Spezialfall des Ringes $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen liefert der Satz eine mengentheoretische Formulierung des Hauptsatzes der Arithmetik. Der Satz zeigt auch die enorme Wichtigkeit, welche eine mengetheoretische Betrachtungsweise mit sich bringt, und er weckte das Interesse daran, andere algebraische Fragestellungen von einem idealtheoretischen Gesichtspunkt anzuschauen.

Der Satz von Lasker und Noether ist eine idealtheoretische Aussage. Wie wir bald sehen werden, verallgemeinert er den Dedekindschen und daher auch den Hauptsatz der Arithmetik weitreichend.

Der Nullstellensatz von Hilbert

Der bedeutendste Mathematiker am Anfang des 20. Jahrhunderts war David Hilbert (1862–1943). Er hat wichtige Resultate in der algebraischen Geometrie, der Zahlentheorie, der Logik und der Analysis hergeleitet. In der Funktional-Analysis ist der Hilbert-Raum nach ihm benannt. Er war es auch, der am internationalen Mathematiker-Kongress in Paris im Jahre 1900 eine Liste von 23 mathematischen Problemen formulierte, welche bis auf den heutigen Tag die Forschung inspiriert haben.

Für das Lasker-Noether-Theorem war es von großer Bedeutung, dass Hilbert eine Korrespondenz zwischen den speziellen Idealen eines Polynom-Ringes und den Nullstellen-Gebilden von Polynomen herstellte.

Man betrachte dazu den Vektorraum $\mathbb{C}^n$; dies ist die Menge aller Vektoren $v = (v_1, \dots, v_n)$, deren Koordinaten

David Hilberts programmatische Rede auf dem Zweiten Internationalen Mathematiker-Kongress 1900 in Paris beeinflusste die mathematische Forschung des 20. Jahrhunderts nachhaltig. Er plädierte stets für einen Optimismus in der Forschung, der alle selbstgesetzten Beschränkungen des Denkens ablehnt.

$v_i \in \mathbb{C}, \ i = 1, \dots, n$. Ferner ziehe man den Polynomring in den n Variablen $x_1, \dots, x_n$ hinzu:

$$R := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n].$$

Ein Polynom $p \in R$ ist eine formale Summe:

$$p = \sum_{i_1=0}^{d_1} \sum_{i_2=0}^{d_2} \dots \sum_{i_n=0}^{d_n} c_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

wobei die Koeffizienten $c_{i_1,\dots,i_n}$ komplexe Zahlen sind. Ein Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ kann in ein Polynom $p \in R$ eingesetzt werden, worauf man die komplexe Zahl $p(v) \in \mathbb{C}$ erhält. Von grundsätzlicher Bedeutung in der algebraischen Geometrie sind die *(affinen) Varietäten*. Dazu betrachte man eine beliebige Teilmenge $T \subset R$ und definiere die Varietät von T als das »Nullstellen-Gebilde« definiert durch T:

$$V(T) := \{v \in \mathbb{C}^n \mid p(v) = 0 \text{ für alle } p \in T\} .$$

Bemerkung 12. Es sei $I := < T >$ das von T erzeugte Ideal im Ring $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Man verifiziert sofort, dass die Varietäten $V(T)$ und $V(I)$ die gleichen Punktmengen in $\mathbb{C}^n$ beschreiben.

Wir haben Varietäten über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen definiert. Die Definition von $V(T)$ ist sinnvoll über beliebigen Körpern, und in Spezialfällen beinhaltet sie viele geometrische Objekte, die dem Leser sicher bekannt sind. Das folgende Beispiel zeigt dies.

Beispiel 13. Man betrachte die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ zusammen mit dem Polynomring $\mathbb{R}[x, y]$. Dann definiert die Varietät $V(y - x^2)$ eine Parabel, $V(xy)$ eine Hyperbel und $V(x^2 + y^2 - 1)$ den Einheitskreis. Die Varietät $V(x^2 - y^2)$ sieht auf den ersten Blick komplizierter aus. Die Faktorisierung $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$ liefert aber die Zerlegung:

$$V(x^2 - y^2) = V(x + y) \cup V(x - y),$$

d.h. $V(x^2 - y^2)$ stellt die Vereinigung der Geraden $y = x$ und der Geraden $y = -x$ dar.

Wie das Beispiel der Varietät $V(x^2 - y^2)$ illustriert, hat die Faktorisierung des Polynoms $(x^2 - y^2)$ eine Zerlegung der Varietät zur Folge. Das Lasker-Noether-Theorem erreicht eine solche Zerlegung für beliebige Varietäten $V(T) \subset \mathbb{C}^n$, weshalb auch vom »Lasker-Noetherschen Zerlegungssatz« gesprochen wird. Mehr dazu im nächsten Abschnitt weiter unten.

Bis jetzt haben wir gezeigt, wie eine beliebige Teilmenge $T \subset R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ eine Varietät $V(T) \subset \mathbb{C}^n$ definiert. Man betrachte nun umgekehrt eine beliebige Teilmenge $M \subset \mathbb{C}^n$. Die folgende Definition beschreibt alle Polynome, welche auf M identisch Null sind:

$$I(M) := \{p \in R \mid p(v) = 0 \text{ für alle } v \in M\}.$$

Falls $p_1 \in I(M)$, $p_2 \in I(M)$ und $r \in R$, dann verifiziert man, dass auch $p_1 - p_2 \in I(M)$ und $rp_1 \in I(M)$ sind, in anderen Worten $I(M)$ ist ein Ideal in R. Hilbert konnte zeigen, dass $I(M)$ die Eigenschaften eines so genannten Radikalideals hat:

Definition 14. Es sei R ein kommutativer Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Man definiert das *Radikal von I* als:

$$\sqrt{I} := \{r \in R \mid \text{ es existiert } e \in \mathbb{N}, e \geq 1, \text{ so dass } r^e \in I\}$$

Man sagt, I ist ein Radikalideal, falls $\sqrt{I} = I$.

Man kann verifizieren, dass $\sqrt{I}$ wiederum ein Ideal ist, welches das Ideal I enthält ($I \subset \sqrt{I}$).

Mit diesen Vorbereitungen können wir den berühmten Nullstellensatz formulieren, der eine Korrespondenz zwischen Varietäten und Radikalidealen herstellt. Der Satz wurde im Jahre 1893 von David Hilbert das erste Mal publiziert.[31]

Satz 15. *Falls $V \subset \mathbb{C}^n$ eine Varietät ist, dann ist $V(I(V)) = V$. Falls $I \subset R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal ist, dann ist $I(V(I)) = \sqrt{I}$. Im Besonderen definieren die Abbildungen $I(M)$ und $V(I)$ eine Bijektion zwischen den affinen Varietäten des Vektorraums $\mathbb{C}^n$ und den Radikalidealen in R.*

Eisenbuds Lehrbuch führt fünf Beweise verschiedener Versionen des Nullstellensatzes auf.[32]. Seine Wichtigkeit besteht darin, dass er eine Übersetzung von geometrischen Gebilden (nämlich den Varietäten) in algebraische Objekte (nämlich die Ideale) liefert.

Bemerkung 16. Der Name Nullstellensatz erklärt sich so: Es sei $T \subset R$ eine beliebige Menge und $I = < T >$ das von T erzeugte Ideal. Wir haben schon gesehen, dass für die Varietäten gilt, dass $V(T) = V(I)$. Falls $I =< 1 >= R$ ist, dann ist $V(I) = \{ \}$ (die leere Menge). Falls $I \neq R$, dann sagt der Nullstellensatz aus, dass $V(I) \neq \{ \}$, d.h. es gibt einen Punkt $v \in \mathbb{C}^n$, so dass v Nullstelle ist von allen Polynomen $p \in T$. So gesehen verallgemeinert der Nullstellensatz den Hauptsatz der Algebra, der besagt, dass ein nicht-konstantes Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ notwendigerweise eine komplexe Nullstelle hat.

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass das Lasker-Noether-Theorem zusammen mit dem Hilbertschen Nullstellensatz eine Zerlegung von allgemeinen Varietäten in irreduzible Varietäten liefert.

Formulierung und Bedeutung des Lasker-Noether-Theorems

Laskers Arbeit zur Theorie der Moduln und Ideale enthielt die Herleitung eines wichtigen Zerlegungssatzes für Ideale des Ringes $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ und erschien 1905 in den *Mathematischen Annalen*, schon damals eine der besten Zeitschriften für Mathematik. Emmy Noether erkannte später, dass der Satz und die Beweise für allgemeine kommutative Ringe gelten, sobald die Ideale dieses Ringes endlich erzeugt werden können. Im Folgenden ist der Satz in der verallgemeinerten Noetherschen Fassung beschrieben.

Definition 17. Ein (kommutativer) Ring R heißt *noethersch*, falls jedes Ideal $I \subset R$ endlich erzeugt ist, d.h. Elemente $a_1, \ldots, a_k \in R$ existieren, so dass

$$I =< a_1, \ldots, a_k > .$$

31. Hilbert, Invariantensysteme. Vgl. a. Hilbert, *Algebraic invariants*, mit weiterem historischem Material.
32. Eisenbud, *Commutative Algebra*

Die kommutativen Ringe, die wir bisher behandelt haben, sind alles noethersche Ringe. Die Tatsache, dass $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ein noetherscher Ring ist, war von David Hilbert im Jahre 1888 bewiesen worden.[33] Dieses Resultat heißt heute in der Literatur *Hilbertscher Basissatz*. Emmy Noether hat später gezeigt, wie der Hilbertsche Basissatz sehr elegant in einer noch allgemeineren Form formuliert werden kann:

Satz 18. *Falls R ein noetherscher Ring ist, dann ist auch der Polynomring $R[x]$ noethersch.*

Mittels Induktion folgt dann sofort, dass auch $R[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch ist, und im besonderen ist $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch.

Ziel des Lasker-Noetherschen-Zerlegungssatzes ist es, ein beliebiges Ideal als Durchschnitt von so genannten Primäridealen darzustellen. Wünschenswert wäre natürlich eine Darstellung als Schnitt von Primidealen, aber da treten schon Schwierigkeiten im Ring der ganzen Zahlen auf:

Beispiel 19. Man betrachte das Ideal $< 30 > \subset \mathbb{Z}$. Entsprechend der Faktorisierung in Primfaktoren kann man das Ideal $< 30 >$ als mengentheoretischen Schnitt von Primidealen schreiben:

$$< 30 > = < 2 > \cap < 3 > \cap < 5 > .$$

Wie der Leser sofort verifiziert, kann das Ideal $< 12 > \subset \mathbb{Z}$ nicht als Schnitt von Primidealen geschrieben werden. Eine interessante Zerlegung ist aber

$$< 12 > = < 3 > \cap < 4 > .$$

Dabei ist nur das Ideal $< 3 >$ ein Primideal. Da $< 4 > = < 2 > < 2 >$, ist das Ideal $< 4 >$ gleich einer Potenz eines Primideals.

Lasker bemerkte, dass eine Abschwächung des Konzepts eines Primideals zu einer sehr befriedigenden Theorie führt. Die folgende Definition stammt von Lasker:

Definition 20. Ein Ideal $Q \subset R$ heißt *Primärideal*, falls mit $a, b \in R$, $ab \in Q$ folgt, dass $a \in Q$ oder $b^e \in Q$ für einen positiven Exponenten $e \in \mathbb{N}$.

Wie man aus der Definition sofort ersieht, ist jedes Primideal auch ein Primärideal (vgl. Definition 8). Die Umkehrung gilt aber offensichtlich nicht.

Beispiel 21. In den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind die Primärideale genau die Ideale der Form $< p^e >$, wobei p eine Primzahl ist und e eine positive ganze Zahl ist. Zum Beispiel ist $< 4 > \subset \mathbb{Z}$ ein Primärideal.

Das folgende Lemma zeigt, dass jedes Primärideal in einem Primideal enthalten ist.

Lemma 22. *Es sei R ein kommutativer Ring und $Q \subset R$ ein Primärideal. Dann ist $P := \sqrt{Q}$ ein Primideal.*

Falls Q ein Primärideal ist, so sagt man, dass $P = \sqrt{Q}$ das zu Q assoziierte Primideal sei. So ist etwa das assoziierte Primideal zum Primärideal $< 27 > \subset \mathbb{Z}$ das Ideal $< 3 >$.

Lasker erkannte, dass die Primärideale innerhalb eines Ringes unzerlegbare Bausteine bilden, aus denen alle anderen Ideale mittels mengentheoretischer Schnittbildungen hergeleitet werden können. Dazu definieren wir:

Definition 23. Ein Ideal $I \subsetneq R$ heißt *irreduzibel*, falls es keine echten Ideale I_1, I_2 gibt, so dass $I = I_1 \cap I_2$.

Man kann zeigen, dass in einem noetherschen Ring R die irreduziblen Ideale genau den Primäridealen $I \subsetneq R$ entsprechen.

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun den Lasker-Noetherschen Zerlegungssatz formulieren. Wir wählen die Form, wie man sie bei Becker und Weispfenning findet:[34]

Satz 24. *Es sei R ein noetherscher Ring und $I \subsetneq R$ ein Ideal. Dann existieren Primärideale $Q_1, \ldots, Q_k$, so dass*

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots\ldots \cap Q_k .$$

Diese Zerlegung hat die Eigenschaft, dass kein Q_i den Schnitt der anderen Primärideale enthält. D. h. für $i = 1, \ldots, k$ gilt, dass $\bigcap_{i \neq j} Q_j \notin Q_i$.

Des Weiteren sind alle assoziierten Primideale $P_i = \sqrt{Q_i}$ verschieden und eindeutig bestimmt durch das Ideal I.

Auf der geometrischen Seite induziert das Lasker-Noether-Theorem eine Zerlegung von affinen Varietäten in irreduzible Bestandteile. Dazu betrachte man wiederum eine beliebige Menge von Polynomen $T \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ und bezeichne mit $I = < T >$ das von T erzeugte Ideal. Für die affine Varietät $V(T)$ gilt dann:

$$V(T) = V(I) = V(Q_1) \cup \ldots \cup V(Q_k) = V(P_1) \cup \ldots \cup V(P_k).$$

Da die assoziierten Primideale eindeutig sind, ist diese Zerlegung auch eindeutig. Im Weiteren wird in der algebraischen Geometrie gezeigt, dass $V(P)$ nicht als Vereinigung von Unter-Varietäten zerlegt werden kann, sobald P ein Primideal ist.

Auf der zahlentheoretischen Seite liefert der Satz von Lasker-Noether den Dedekindschen Faktorisierungssatz

33. Hilbert, Algebraische Gebilde
34. Becker/Weispfenning, *Gröbner Bases*, Abschnitt 8.5

(Satz 10 weiter oben). Dies folgt im Wesentlichen aus der Tatsache, dass für paarweise verschiedene Primideale P_1, P_2 im Zahlring $\mathbb{Z}[\alpha]$ gilt, dass

$$P_1 P_2 = P_1 \cap P_2.$$

Emmy Noether hat diese und andere Folgerungen 1927 beschrieben.[35] Der Satz von Lasker und Noether kann weiter verallgemeinert werden. Er gilt auch für so genannte noethersche Moduln. Die Ansätze dazu finden sich schon 1905 bei Lasker und 1921 bei Emmy Noether.

Nicht nur Verallgemeinerungen des Zerlegungssatzes spielen in der modernen mathematischen Forschung eine Rolle. Auch die sich aus seiner Anwendung ergebenden Fragestellungen der Algorithmik und der effizienten Berechnung auf Computern sind von Bedeutung. Schon relativ kurz nach Lasker hat Francis Sowerby Macaulay einen Weg aufgezeigt, wie die Primärzerlegung algorithmisch im Polynomring berechnet werden kann.[36] Der algorithmische und numerische Aspekt der Primärzerlegung ist bis auf den heutigen Tag für die Forschung von Interesse geblieben.[37]

Auf der rein algebraischen Seite führte Wolfgang Krull 1958 den Begriff *Laskerscher Ring* ein,[38] wodurch ein kommutativer Ring bezeichnet wird, in dem jedes Ideal als Schnitt von Primäridealen dargestellt werden kann. Mehrere Forscher haben sich seit der Arbeit von Krull mit diesen Ringen beschäftigt.

Wie unser mathematischer Exkurs gezeigt hat, hat der Lasker-Noethersche Zerlegungssatz bis auf den heutigen Tag seine Wichtigkeit behalten.

LASKERS PUBLIKATIONEN NACH 1905

Nach 1905 hat Lasker im Wesentlichen noch zwei Arbeiten zur reinen Mathematik verfasst.

Die eine erschien 1908 unter dem Titel »A new method in geometry« und benützt seine früheren Arbeiten über »geometrical calculus« von 1896 und die Ideale von 1905. Als Resultate beschreibt er algebraische Identitäten, welche man ausgehend von gewissen geometrischen Konfigurationen herleiten kann. Zum Beispiel studiert er die Konfiguration von drei Kurven dritten Grades im dreidimensionalen Raum, die sieben Punkte in allgemeiner Lage gemeinsam haben, und er zeigt, wie man daraus algebraische Relationen herleiten kann. Die Arbeit scheint wenig Beachtung gefunden zu haben.

1916 stellte er in einer kurzen Arbeit einen neuen Beweis eines Satzes von Georgi Woronoi (1868–1908) vor und zeigt danach, wie man einen neuen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetztes bekommen kann.[39] Dieses Gesetz über quadratische Reste gilt als eines der wichtigsten der Zahlentheorie. Carl Friedrich Gauß (1777–1855) hat es zuerst bewiesen, und er empfand das Resultat als so wichtig, dass er im Ganzen acht verschiedene Beweise herleitete.

Neben diesen beiden reinen mathematischen Arbeiten hat Lasker nach 1905 angefangen, sich mit philosophischen und spieltheoretischen Fragestellungen zu beschäftigen.[40] Bereits sein 1907 erschienenes Buch *Kampf* enthält etliche Beispiele von so genannten Spielen mit konstanter Summe. Lasker versuchte eine mathematische Spieltheorie zu entwickeln und war damit seiner Zeit voraus.

Nach allgemeiner Auffassung markiert das 1944 erschienene Lehrbuch von John von Neumann und Oskar Morgenstern, *Theory of Games*, den Anfang der mathematischen Spieltheorie, welche heute die Basis zur Beantwortung vieler ökonomischer Fragestellungen darstellt. Die Nobel-Preise in Ökonomie der Jahre 1994 (Nash, Selten und Harsanyi), 2005 (Schelling und Aumann) und 2007 (Myerson, Hurwicz und Maskin) sind alle auf ihrem Gebiet vergeben worden.

Vor 1944 gab es nur wenige Arbeiten, die man der mathematischen Spieltheorie zuordnen kann. Wichtige Ausnahmen sind 1913 ein kurzer Artikel von Ernst Zermelo[41] und Laskers *Kartenspiel* von 1929.

Mit Ernst Zermelo (1871–1953) unterhielt Lasker spätestens ab den späten zwanziger Jahren Briefkontakt, als dieser ihm seine Arbeit zur »Berechnung der Turnierergebnisse als ein Maximalproblem der Wahrscheinlichkeiten« zusandte, worin er die Wahrscheinlichkeitstheorie zur Herleitung eines »Wertungssystems« für Spieler in einem Spiel wie Schach nutzt – etwa 20 Jahre, bevor die Ingo- und Elo-Wertungssysteme entwickelt wurden![42]

Eine Fragestellung, die Lasker im *Verständigen Kartenspiel* studierte, ist die Folgende:[43] Es sei n eine natürliche Zahl und gegeben ein Kartenspiel mit $2n$ Karten, wobei die Karten vollständig durchnummeriert sind mit den Zahlen $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Es gibt zwei Spieler, und jeder erhält n Karten. Jeder Spieler kennt die Werte seiner Karten und diejenigen des Spielpartners. Ein Spieler wird bestimmt, der den »Anzug« hat. Dieser Spieler legt eine Karte auf den Tisch. Der zweite Spieler kann nun entweder eine Karte mit einem höheren Wert auflegen, in welchem Fall der zweite Spieler beide Karten gewinnt und auch den Anzug erhält, oder er kann eine Karte mit tieferem Wert spielen, in welchem Fall der zweite Spieler die Karten

35. Noether, Abstrakter Aufbau
36. Macaulay, On the resolution
37. Vgl. Monico, Primary decomposition; Seidenberg, Lasker-Noether decomposition und Sommese/Verschelde/Wampler, Numerical decomposition, wo auch weitere Hinweise zur aktuellen Literatur aufgeführt sind.
38. Krull, Laskersche Ringe
39. Lasker, Über eine Eigenschaft der Diskriminante
40. Über das mathematisch Schöne (1915), Über Ästhetik der Mathematik (1928), Begründung (1929), *Encyclopedia of Games* (1929), On the definition of logic (1935), Note on Keyser's discussion (1938).
41. Zermelo, Anwendung der Mengenlehre; vgl. a. Ebbinghaus, *Zermelo*, S. 129–133
42. *Mathematische Zeitschrift*, Band 29, 1929, S. 436–460; Ebbinghaus, *Zermelo*, S. 150.
43. Lasker, *Kartenspiel*, S. 81f.

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo begann sein Studium der Mathematik, Physik und Philosophie wie Emanuel Lasker in Berlin. Er setzte es in Halle und Freiburg fort und promovierte 1894 an der Universität Berlin bei Hermann Amandus Schwarz. Anschließend war er Assistent von Max Planck am Institut für theoretische Physik. 1897 wechselte Zermelo nach Göttingen, wo er sich 1899 habilitierte. Von 1910 bis 1916 lehrte er an der Universität Zürich. Danach arbeitete Zermelo erst ab 1926 in Freiburg wieder offiziell als Honorarprofessor. 1935 wurde er politisch denunziert und musste auf die Lehrtätigkeit verzichten.

verliert und der Anzug beim ersten Spieler bleibt. Das Spiel verläuft ohne Zurücklegen der gespielten Karten. Lasker fragt nach der optimalen Strategie, falls das Ziel darin besteht, so viele Karten wie möglich zu gewinnen. Es gibt auch eine »Misère-Variante«, wo das Ziel darin besteht, so wenig Karten wie möglich zu »gewinnen«. Mathematisch ist dies ein typisches Beispiel eines Zwei-Personen-Spiels mit konstanter Summe und vollkommener Information. Das von Lasker beschriebene Spiel, das er »Whistett« taufte, wurde bisher erst in der Misère-Variante befriedigend gelöst.[44]

In den dreißiger Jahren hegte Lasker nochmals Hoffnungen auf eine universitäre Anstellung. In den Briefen jener Zeit bezieht er sich des öfteren auf Emmy Noether, die ihm aus den Vereinigten Staaten eine Empfehlung für eine Professur in Manchester geschrieben hatte.[45] Andere Briefe zeigen, dass er sich in den Jahren 1933/34 auch für eine Mathematik-Professur in Palästina (Jerusalem) interessierte.[46]

Letztlich verschlug es Lasker indes nach Moskau, wo er seine mathematischen Arbeiten wieder aufnehmen wollte.[47] In einem Interview äußerte er sich dazu wie folgt:

> Die Sachlage ist die, dass nach einer Initiative Krylenkos die Akademie Moskaus, repräsentiert durch die Mathematiker, mich eingeladen hat, meine mathematischen Forschungen, an denen ich jetzt beschäftigt bin, zu Ende zu führen und mich dabei der Wohnräume der Akademie und der Bibliothek der Akademie zu bedienen. Ich gedenke auch, mit den dortigen Mathematikern in wissenschaftlichen Verkehr zu treten und mit den Ergebnissen meiner Forschungen den Bericht der Akademie zur Veröffentlichung zu überweisen. Dies ist der wahre Sachverhalt und dazu gehört, dass ich in Moskau wohne. (…)
>
> Massgebend war hier einmal mein Wunsch, mit den Forschern der Akademie in Moskau zusammenzuarbeiten und vor allem die Tatsache, dass ich mich in Moskau als dem Kulturzentrum und der Hochstätte des Bildungswesens sehr wohl fühle.[48]

Die Übersiedlung der Laskers nach Moskau erfolgte im August 1935. Im Dezember wurde er zum Ehrenmitglied des mathematischen Instituts der Akademie der Wissenschaften gewählt.[49] Über den Inhalt seiner mathematischen Arbeiten in Moskau ist wenig bekannt.[50] Ein als Entwurf erhaltenes Vorwort zu einem rund 200-seitigen, deutschen Algebra-Typoskript beleuchtet einige der Ambitionen, die er in seiner Moskauer Zeit verfolgte:

> In der folgenden Arbeit kam es mir darauf an, die Analogie, welche zwischen der Algebra der Formen, der Theorie der Körper und jener der analytischen Funktionen mehrerer Variablen in Punkten algebraischer Singularität besteht, aufzuweisen und mit einiger Breite auszuführen. Auch habe ich mich bemüht, einige Verbindungswege zwischen der Theorie der Moduln, der Invariantenrechnung und der Topologie gangbar zu machen. Zuletzt

44. Kahn/Lagarias/Witsenhausen, Lasker's card game, und dies., The Misère game. Zur Geschichte der mathematischen Spieltheorie und besonders den Beiträgen von Lasker und Zermelo vgl. Leonard, From chess to catastrophe, und Leonard, *Von Neumann, Morgenstern and the Creation of Game Theory*, ferner: Klaus, Lasker Vorläufer der Spieltheorie.
45. Brief vom 9. Dezember 1933 an Martha (Kramer, Letters of Emanuel Lasker, Nr. 671)
46. Vgl. S. 46 in diesem Band.
47. Vgl. a. S. 152f. und 159 in diesem Band.
48. *Schweizerische Arbeiter-Schachzeitung*, Mai 1935, S. 76; Juni 1935, S. 87–90; Juli 1935, S. 101f.
49. Unidentifizierter Zeitungsartikel (Lasker Scrapbooks, Cleveland Public Library, Ohio)
50. Mehrere mathematische Manuskripte aus der Zeit befinden sich in der Privatsammlung von David DeLucia (DeLucia, *Library*, S. 24), darunter eine 368-seitige, deutschsprachige »Architektur der Mathematik« und eine kürzere Abhandlung, die sich mit Emmy Noether und David Hilbert (Ebd., S. 308) beschäftigt. Ferner eine wohl bereits wieder in Amerika entstandene, 305 Seiten starke englische Ausarbeitung (Ebd., S. 306) – wahrscheinlich Laskers letzte Arbeit, datiert auf den 9. Oktober 1940. Es dürfte sich um das von Hannak genannte Kapitel eines Mathematik-Lehrbuchs handeln (Hannak, *Lasker*, S. 307).

Brief Emanuel Laskers an Ernst Zermelo vom 12. Januar 1929. (Universitätsarchiv Freiburg, C 129/67)

Titelseite eines zweiseitigen Sonderdrucks aus *Geisteskultur* (Berlin 1928, S. 275f.) über die »Philosophie des Unvollendbar« mit handschriftlicher Widmung von Emanuel Lasker an Ernst Zermelo. (Universitätsarchiv Freiburg, C 129/67)

Martha und Emanuel Lasker in ihrer Moskauer Wohnung, in der sie ab Anfang 1936 lebten. Im einem Brief vom 1. Januar 1936 schreibt Martha Lasker an ihre Schwägerin Theophila Rochotz: »Endlich sind wir in der Wohnung, die klein, aber sehr gemütlich wie zuhause mit den alten Sachen aussieht. Die ollen Bilder und das alte Schreibbureau aus Berlinchen, was fast auseinanderfiel als es ausgepackt wurde, steht auch da u. Em. arbeitet daran u. denkt an seine Jugendzeit.«

> lag mir auch die Methode am Herzen. Ich habe einer Methode zu folgen mich bestrebt, die den Hauptwert auf den zielstrebigen Gedanken legt, während sie von Formeln oder starr gewordenen Prozessen nur wenig an Inspiration erwartet. Die Untersuchung geht von mehreren Ausgangspunkten her auf ein erstrebenswertes Ziel hin, das noch in weiter Ferne liegt, so dass man es nicht einmal deutlich in Begriffe fassen kann. Die verschiedenen Etappen auf dies mehr gefuehlte oder geahnte als durch den Verstand greifbare Ziel hin werden im Buche umschrieben, und so ist ein Fortschritt erreicht, auch ist die Richtung angegeben, die das Ziel dem Mathematiker wie der Nordstern dem Schiffer weist – nicht klar und deutlich genug, doch so wie es in Wort oder Formel jetzt den Versuch dazu zu wagen ratsam ist – aber es bedarf gewisslich der lang andauernden, entsagenden und hingebenden Arbeit vieler, dem Ziele greifbar nahe zu kommen.
>
> Moskau, im Februar 1937 [handschriftlich geändert in: »den 4. März«].
>
> Emanuel LASKER[51]

*

Unsere Erkundungen zum mathematischen Schaffen von Emanuel Lasker haben gezeigt, dass er ein äußerst vielseitiger Mathematiker war und Autor wesentlicher Arbeiten auf verschiedenen Gebieten. Seine Hauptarbeit über den Zerlegungssatz (1905) prägt bis auf den heutigen Tag die mathematische Forschung. Auch seine Arbeit über kanonische Formen (1904) wird noch immer zitiert, daneben leistete er Beiträge in der Spieltheorie zu einem Zeitpunkt, als dieser noch gar nicht der Anspruch einer mathematischen Theorie zukam.

Prof. Dr. Joachim Rosenthal, geb. 1961, Professor für angewandte Mathematik an der Universität Zürich mit den Spezialgebieten Kodierungstheorie und Kryptologie. Er teilte 1982 an der Offenen Schweizer Meisterschaft den vierten Rang und gewann mit der Schachgesellschaft Allschwil dreimal die Schweizerische Mannschaftsmeisterschaft, ehe er 1987 für 17 Jahre in die Vereinigten Staaten ging und in Arizona und Indiana eine wissenschaftliche Karriere einschlug.

51. Lowenherz, Autographen und Ephemera

Hinweis: Das Quellenverzeichnis auf den nächsten acht Seiten bezieht sich auf das ganze Werk, nicht nur das vorliegende Kapitel.

QUELLENVERZEICHNIS

Abkürzungen

ACB = *American Chess Bulletin*
BCM = *British Chess Magazine*
DSZ = *Deutsche Schachzeitung*
DWS = *Deutsches Wochenschach*
ICM = *International Chess Magazine*
LCM = *Lasker's Chess Magazine*
SSZ = *Schweizerische Schachzeitung*
TNSB = *Tijdschrift van den Nederlandschen Schaakbond*
WSZ = *Wiener Schachzeitung*

Archive

Archiv David H. Lowenherz, New York (Nachlass Martha Lasker)
Archiv Emanuel Lasker Gesellschaft, Berlin
Archiv Landsberger Foundation, Pequannock (NJ)
Bibliothek der Polnischen Akademie der Wissenschaft, Kórnik
Cleveland Public Library, Ohio: Autographen-Sammlung
Cleveland Public Library, Ohio: Lasker Scrapbooks
Cleveland Public Library, Ohio: Photo Collection
Rueb Scrapbooks, Koninklijke Bibliotheek, Den Haag

Publizierte und unpublizierte Werke

1898. 1923–1933. Festschrift der Wiener Schachzeitung. Wien: Wiener Schach-Zeitung, [1933]
Arnold Schönberg – Spiele, Konstruktionen, Bricolagen. Katalog zur Sonderausstellung »Arnold Schönbergs Schachzüge – Dodekaphonie und Spiele-Konstruktionen«. Wien: Arnold Schönberg Center, 2004
Berliner Adressbuch von 1920 und Vororte von Berlin. Berlin-Schöneberg, [1920]
Biographisches Handbuch der deutschsprachigen Emigration nach 1933 (= International biographical dictionary of Central European émigrés 1933–1945, hrsg. vom Institut für Zeitgeschichte München u. von d. Research Foundation for Jewish Immigration, Inc., New York, unter d. Gesamtleitung von Werner Röder u. Herbert A. Strauss) Band 1: Jan Foitzik, *Politik, Wirtschaft, öffentliches Leben.* München [u.a.] 1980
De eerste 100 Jaren, Kroniek van het Leidsch Schaakgenootschap. Leiden: Leidsch Schaakgenootschap, 1995
Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademieen der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. Leipzig: B.G. Teubner, 1898–1904
Encyclopaedia Judaica: das Judentum in Geschichte und Gegenwart. Herausgegeben von Jakob Klatzkin. 10 Bände. Berlin: Eschkol, 1928–1934
Festschrift zur Feier des 50-jährigen Jubiläums des Königl. Gymnasiums mit Realschule zu Landsberg a.W. (1. Teil: Geschichte der Anstalt von 1859–1909). Landsberg a.W.: Dermietzel & Schmidt, 1909
Galante Abenteuer – Album für Lebemänner – Ein Schatzkästlein pikanten Humors (o.O., o.J., um 1900)
»Heilige Gemeinde Wien«. Judentum in Wien. Sammlung Max Berger. Historisches Museum der Stadt Wien, 108. Sonderausstellung 12. November 1987 bis 5. Juni 1988
Heimatkreis Soldin (Neumark). Soltau: Eigenverlag des Heimatkreises, 1992 (3. Auflage)
Homenaje a Joseì Rauìl Capablanca. Cuba. Direccioìn de Cultura. Havanna: Ministerio de educacioìn, direccioìn de cultura, 1943
150 jaar DD. 1852 – 29 december – 2002. Redigiert von Wim J.P. Vink und Ronald Dickhoff. Den Haag: Koninklijk 's-Gravenhaagsch Schaakgenootschap Discendo Discimus, 2005
Internationales Carl Schlechter-Gedenkturnier. Hrsg. von Robert A.Philipp. Wien und Baden bei Wien, 17.–28. September 1961. Wien: Wiener Schachverlag, 1961
Monte Carlo Tournament of 1903, The. Zürich: Olms, 1983
Nederland schaakt! KNSB 100 jaar. Baarn: Moussault's Uitgeverij, 1974
Programm des Gymnasiums und Realgymnasiums zu Landsberg a.W. für das Schuljahr Ostern 1887 – Ostern 1888. Landsberg a.W., 1888
Ter Herdenking aan het zestigjarig Bestaan van het Schaakgenootschap »Discendo Discimus« 1852–1912. Den Haag: Koch & Knuttel, 1912
Ter Herdenking aan het zeventigjarig bestaan van het 's-Gravenhaagsch Schaakgenootschap Discendo Discimus 1852–1922. Den Haag, 1922
Ter Herinnering aan het 10-jarig Bestaan van den Ned. Ind. Schaakbond April 1915 – April 1925. Magelang: H.V. Maresch, 1925
Wegweiser durch das jüdische Brandenburg. Hrsg. von Irene A. Diekmann und Julius H. Schoeps. Berlin: Edition Hentrich, 1995
Abrahams, Gerald: *Not Only Chess. A Selection of Chessays*. London: George Allen & Unwin, 1974
Adams, Jimmy: *Mikhail Chigorin. The Creative Chess Genius.*Yorklyn: Caissa Editons, 1987
Adams, Jimmy: *Paris 1900*. Nottingham: The Chess Player, 1986
Ahrens, Wilhelm: *Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik.* Berlin: Julius Springer, 1918
Albin, Adolph: *Schach-Aphorismen und Reminiscenzen*. Hannover: Hahn, 1899
Alekhine, Alexander: *My Best Games of Chess: 1924–1937*. London: Bell, 1939
Alexander, Conel Hugh O'Donel: *Chess*. London: Pitman, 1937
Aljechin, Alexander: *Das Grossmeister-Turnier New York 1924.* Berlin/Leipzig: W. de Gruyter, 1925
Aljechin, Alexander: *Internationales und 37. Schweizerisches Schachturnier in Zürich 1934*. Schachgesellschaft Zürich (Hrsg.), 1935
Augustat, Siegfried: »Lasker in Thyrow«, in: Kotowski/Poldauf/Wagner, *Homo ludens*, S. 211–219
Auhagen, Ulrich: *Das große Buch vom Bridge*. München: Keyser'sche Verlagsbuchhandlung, 1973
Auhagen, Ulrich: *Rubberbridge ohne Reue*. Düsseldorf: Rau, 1988
Bachmann, Ludwig: *Schachjahrbuch für 1913. XXIX. Fortsetzung der Sammlung geistreicher Schachpartien, Endspiele und Aufgaben.* Ansbach: Brügel, 1913
Bachmann, Ludwig: *Schachmeister Steinitz: ein Lebensbild des ersten Weltschachmeisters; dargestellt in einer vollständigen Sammlung seiner Partien.* Band 4: 1894–1900. Ansbach: Brügel, 1921
Barcza, Gedeon: *Magyar sakktörténet*. Band 1. Budapest: Sport, 1975
Bardeleben, Curt von und Mieses, Jacques: *Lehrbuch des Schachspiels: auf Grund des gegenwärtigen Standes der Theorie und Praxis; zugleich 6. Aufl. des von der Lasa'schen Leitfadens.* Leipzig: von Veit, 1894
Barmer Schachverein 1865 (Hrsg.): *Der Internationale Schachkongreß des Barmer Schachvereins 1905*. Barmen: Adolf Graeper, 1905
Bárta, Jan: *Mezinárodni šachový turnaj v Brnì 1937*. Brünn, 1937
Bauer, Arpad: *Die Schachspieler und ihre Welt. Eine Revue des Schachhumors; satyrische und kritische Betrachtungen … zur Einführung in die Gedankenwelt der Schachspieler*. Berlin: Dreyer, 1911
Bauer, Arpad: *Heiteres aus der Schachwelt. Allerlei Belustigendes für Schachfreunde*. Leipzig: Hans Hedewig's Nachfolger Curt Ronniger, 1916
Bauer, Günther G. (Hrsg.): *HOMO LUDENS – Der spielende Mensch.* Band IV. Internationale Beiträge des Institutes für Spielforschung und Spielpädagogik an der Hochschule »Mozarteum« Salzburg. München/Salzburg: Emil Katzbichler, 1994
Bauschinger, Sigrid: *Else Lasker-Schüler. Eine Biographie.* Frankfurt a.M.: Suhrkamp, 2006
Bayersdorfer, Adolf: *Zur Kenntnis des Schachproblems. Kritiken und aus-*

gewählte Aufgaben. Hrsg. von J. Kohtz u. C. Kockelkorn. Potsdam: A. Stein's Verlagsbuchhandlung, 1902
Beasley, Henry Mountifort: *Beasley v. Culbertson. The official and authentic record of the International Bridge Match 1933*. London: Hutchinson, 1933
Becker, Thomas und Weispfenning, Volker: *Gröbner Bases*. Graduate Texts in Mathematics. A computational approach to commutative algebra. In cooperation with Heinz Kredel. New York: Springer, 1993
Bemelmans, Lily (Hrsg.): *Hans Lofspraak van vrienden aan een school-, schaak- en bouwmeester*. Liber Amicorum ter Gelegenheid van de Zestigste Verjaardag van Hans Bouwmeester. Venlo: van Spijk, 1989
Berger, Johann: *Schach-Jahrbuch für 1892/93*. Leipzig: von Veit, 1893
Berger, Johann: *Schach-Jahrbuch für 1899/1900*. Leipzig: von Veit, 1899
Bergmann, Birgit und Epple, Moritz (Hrsg.): *Jüdische Mathematiker in der deutschsprachigen akademischen Kultur*. Heidelberg: Springer, 2009
Bernhard, Georg (Hrsg.): *Die Kriegspolitik der Vossischen Zeitung*. Berlin: Vossische Zeitung, 1919
Betlem, Guus: *Aljechin – Euwe. Een Levensbeeld van Twee Schaakkoningen*. Helmond: Helmond, 1936
Bin-Gorion, Emanuel (Hrsg.): *Philo-Lexikon. Handbuch des jüdischen Wissens*. Berlin: Philo, 1935
Blackburne, Joseph Henry: *Mr. Blackburne's games at chess, selected, annotated and arranged by himself*. London: Longmans, Green, 1899
Bogoljubow, Efim: Das *Internationale Schachturnier Moskau 1925*. Im Auftrage des Turnier-Komitees bearbeitet. Berlin/Leipzig: W. de Gruyter, 1927
Bogoljubow, Efim: *Meschdunarodnij schachmatnij turnir w Moskwa 1925*. Band 1. Leningrad: Schachmatny Listok, 1927
Bratkowski, Stefan: *Pod wspólnym niebem: krótka historia Żydów w Polsce i stosunków polsko-żydowskich*. (Unter einem Himmel: eine kurze Geschichte der Juden in Polen und der polnisch-jüdischen Beziehungen). Warschau: Krajowa Agencja Wydawn, 2001
Bruns, Edmund: *Das Schachspiel als Phänomen der Kulturgeschichte des 19. und 20. Jahrhunderts*. Münster/Hamburg/London: Lit Verlag, 2003 (Schriftenreihe der Stipendiatinnen und Stipendiaten der Friedrich-Ebert-Stiftung, Band 20)
Bührke, Thomas: *Albert Einstein*. München: Deutscher Taschenbuch Verlag, 2005
Buller, Walter: *International bridge test. Complete record of bidding, play & scores in »duplicate« contract bridge match between England & America*. With Introduction by Lieut.-Col. Walter Buller, C.B.E. (Captain of the English team). London: News-Chronicle, [1930]
Butler, Samuel: *Life and Habit*. London: Longmans, Green, 1890 (Erstausgabe: 1878)
Capablanca, José Raoul: *Letzte Schachlektionen*. Düsseldorf/Kempten: Walter Rau, 1967
Capablanca, José Raúl: *Torneo Internacional de Ajedrez*. Habana: Avisador Comercial, 1913
Cassel, Hartwig (Hrsg.): *The World's Championship Chess Match played at Havana between Jose Raul Capablanca and Dr. Emanuel Lasker*. New York: American Chess Bulletin, 1921
Cheshire, Horace F.: *The Hastings Chess Tournament, 1895*. London: Chatto & Windus, 1896 (reprinted 1898)
Chicco, Adriano und Rosino, Antonio: *Storia degli Scacchi in Italia dalle origini ai giorni nostri*. Venezia: Marsilio Editori, 1990
Cießow, Günter: *Felix Dueball, Go-Pionier aus Berlin. Eine Reminiszenz aus »Go«-licher Sicht*. Berlin: Selbstverlag, 2008
Clausewitz, Carl von: *Vom Kriege*. Bonn: Ferd. Dümmlers Verlag, 1980 (19. Auflage; Erstausgabe 1832)
Clay, John: *Culbertson, the man who made contract bridge*. London: Weidenfeld and Nicholson, 1985
Corry, Leo: *Modern algebra and the rise of mathematical structures*. Basel/Boston: Birkhäuser Verlag, 1996 (Science Networks, Band 17)
Cox, David A.; Little, John B. und O'Shea, Donal B.: *Ideals, Varieties and Algorithms*. Undergraduate Text in Mathematics. New York: Springer, 1992
Cozio, Carlo: *Il giuoco degli scacchi*. 2 Bände. Torino: Stamperia Reale, 1766
Crouch, Colin: *How to Defend in Chess. Learn from the World Champions*. London: Everyman Chess, 2000
Culbertson, Ely: *300 Contract bridge hands. The first world championship for the Charles M. Schwab Trophy*. Official record reviewed and explained by Ely Culbertson. New York: Bridge World, 1933
Culbertson, Ely: *Contract Bridge Championship of 1933. Britain v. America. First match for the Charles M. Schwab Trophy*. Complete offical hands reviewed and explained by Ely Culbertson. London: News-Chronicle, [1933]
Culbertson, Ely: *Famous Hands of the Culbertson-Lenz Match, analyzed by Ely Culbertson, Josephine Culbertson, Theodore Lightner, Waldemar von Zedwitz. Including additional analyses by Oswald Jacoby, Alfred Gruenther*. New York: Bridge World, 1932
Culbertson, Ely: *The Strange Lives of One Man*. Chicago/Philadelphia/Toronto: The John C. Winston Company, 1940
Culbertson, Ely; Morehead, Albert Hodges; Smith, Lloyd Edwin und Bender, Clifford A.: *The Encyclopedia of Bridge*. New York: Bridge World, 1935
Cunningham, John George (Hrsg.): *The Games in the Steinitz – Lasker Championship Match*. Leeds: Whitehead & Miller, 1894
Cziffra, Géza von: *Der Kuh im Kaffeehaus – Die Goldenen Zwanziger in Anekdoten*. München/Berlin: Herbig, 1981
Daniels, David: *The golden age of contract bridge*. Introduction by Alan Truscott. New York: Stein and Day, 1980
Dawkins, Richard: »Auf welche Einheiten richtet sich die natürliche Evolution?«, in: *Die Herausforderung der Evolutionsbiologie,* hrsg. v. Heinrich Meier, S. 53–78 (München/Zürich: Piper, 1988)
Dawkins, Richard: *Der blinde Uhrmacher: Ein neues Plädoyer für den Darwinismus*. München: Deutscher Taschenbuch Verlag, 1990 (englische Erstausgabe: 1986)
DeLucia, David: *David DeLucia's Chess Library: A Few Old Friends*. Darien: Privatdruck, 2007 (2. Auflage)
Depaulis, Thierry: *Histoire du Bridge*. Paris: Éd. Bornemann, 1997
Devidé, Charles: *William Steinitz. Selectes Games*. New York: Dover Publications, 1974 (Erstveröffentlichung: 1901)
Diel, Alfred und Lindörfer, Klaus: *Die Schachweltmeister. Ein Portrait-Album*. Zürich: Olms, 1979 (Tschaturanga, Band 7)
Diepstraten, Leo C.M.: *Vermaarde schaakcafés en hun illustre gasten*. Baarn: Tirion Sport, 2004
Dill, Richard W.: »Dr. Eduard Lasker – sein Stammbaum und sein Familienumfeld. Ein genealogischer Beitrag zur deutsch-jüdischen Geschichte«, in: *Zeitschrift für Religions- und Geistesgeschichte (ZRGG)*, Leiden, 58. Jg., Nr. 4/2006
Dill, Richard W.: *Der Parlamentarier Eduard Lasker*. Dissertation. Nürnberg, 1956
Domanski, Cezary W. und Lissowski, Tomasz: *Der Großmeister aus Lublin. Wahrheit und Legende über Johannes Hermann Zukertort*. Berlin: Exzelsior, 2005
Dreyer, Michael und Sieg, Ulrich (Hrsg.): *Emanuel Lasker – Schach, Philosophie, Wissenschaft*. Berlin/Wien: Philo, 2001
Dus-Chotimirski, Fjodor I.: *Isbrannije partii*. Moskau: Fiskultura i Sport, 1953
Dvoretsky, Mark: *Dvoretsky's Analytical Manual*. Milford: Russell Enterprises, 2008
Ebbinghaus, Heinz-Dieter: *Ernst Zermelo*. An approach to his life and work. In cooperation with Volker Peckhaus. Berlin: Springer, 2007
Eggink, Leonard Gerardus und Schelfhout, Willem Andreas Theodorus: *Partij verloren … Gedenkboek ter herinnerung aan de Schakers in Nederland*. Amsterdam, Joachimsthal's Boekhandel, 1947
Ehn, Michael und Strouhal, Ernst: *Luftmenschen. Die Schachspieler von Wien. Materialien und Topographien zu einer städtischen Randfigur 1700–1938*. Wien: Sonderzahl, 1998
Eisenbud, David: *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic*

Geometry. Graduate texts in mathematics. New York/Berlin: Springer, 1994

Engelhardt, Herbert (Hrsg.): *Schach-Taschen-Jahrbuch 1955*. Berlin-Frohnau: Siegfried Engelhardt Verlag, 1955

England, Frank und Stapleton-Harris, A.F.: *Crockford's Club v. the Dutch and German teams. 100 selected hands from the duplicate contract bridge tournament with comments*. London: John Lane The Bodley Head, 1932

Euwe, Machgielis und Spaak, Bob: *»Meneer« Caïssa. Schaakerinneringen van Dr. Max Euwe*. Amsterdam: De Bezige Bij, 1955

Euwe, Max: *Aan de nagedachtenis van Daniël Noteboom Jr.* Amsterdam, Haarlem: H. Stam, 1932

Falk, Maximilian: »Über das 50jährige Bestehen des Pester Lloyd, 1853–1903«, in: A. Deutsch, *Die Pester Lloyd-Gesellschaft 1853–1903*, S. III–XIV (Budapest, 1903)

Feenstra Kuiper, Pieter: *100 Jahre Schachturniere. Die bedeutendsten Schachturniere 1851–1950*. Amsterdam: W. ten Have, 1964

Fiala, Vlastimil: *11th Congress of the German Chess Federation, Cologne 1898*. Olomouc: Moravian Chess, 1997

Fiala, Vlastimil: *Capablanca's Chess Career: Capablanca in the United Kingdom (1911–1920). Games and observations from four UK visits by Capablanca*. Olomouc: Moravian Chess, 2006

Fine, Reuben: *Die größten Schachpartien der Welt. Von Morphy bis Fischer und Karpow.* München: W. Heyne, 1979

Fischer, Heinz-Dietrich: *Deutsche Zeitungen des 17. bis 20. Jahrhunderts*. Pullach bei München: Verlag Dokumentation, 1972

Foreest, Dirk van und Tresling, Jan Diderik: *Der Internationale Schachkongreß zu Amsterdam im August 1889*. Utrecht: J.L. Beijers, 1891

Forster, Richard: *Amos Burn. A Chess Biography.* Jefferson: McFarland, 2004

Francis, Henry G.; Truscott, Alan F. und Francis, Dorothy A.: *The Official Encyclopedia of Bridge*. Memphis, Tennessee: American Contract Bridge League, 2001 (6th rev. ed.)

Fricke, Harald (Hrsg.): *Reallexikon der deutschen Literaturwissenschaft*. Neubearbeitung des Reallexikons der deutschen Literaturgeschichte gemeinsam mit Georg Braungart [u.a.]. Berlin [u.a.], Band 2 (H-O), 2000 (3., neubearbeitete Auflage)

Fürst, Artur und Moszkowski, Alexander (Hrsg.): *Buch der 1000 Wunder*. Berlin: Albert Langen, 1916

Gabriel, Gottfried: »Lasker, Emanuel«, in: *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie,* Band 2, hrsg. v. Jürgen Mittelstraß. Mannheim/Wien/Zürich: Bibliographisches Institut, 1984, S. 543

Gaige, Jeremy: *Chess Personalia. A Biobibliography*. Jefferson/London: McFarland, 1987

Gallagher, George G.: »Doctor Emanuel Lasker: A Psychobiography.« A Thesis presented to the Faculty of the Department of Psychology, Occidental College. Eagle Rock, 1956

Gelabert, José A.: *Glorias del Tablero »Capablanca«*. Havanna: Selbstverlag, 1924 (2. Auflage)

Gerstenberg, Adolf: *Die städtischen Schulbauten Berlins*. Berlin: Ernst & Korn, 1871

Gijssen, Geurt: *Arbiter's Notebook*, Nr. 12, März 1999 (»New York 1924: The Arbiter's View«). www.chesscafe.com/text/geurt12.pdf

Gilchrist, James und Hooper, David: *Capablanca. Sämtliche (568) Turnier- und Wettkampfpartien des Weltmeisters*. Hamburg: Dr. E. Wildhagen, 1963 (Weltgeschichte des Schachs, Band 14)

Gittins, Frederick Richard (Hrsg.): *The Chess Bouquet; or, The Book of the British Composers of Chess Problems*. London: Feilden, McAllan, 1897

Glavinic, Thomas: *Carl Haffners Liebe zum Unentschieden*. Berlin: Volk & Welt, 1998

Golombek, Harry: *A History of Chess*. London: Routledge & Kegan Paul, 1976

Golombek, Harry: *J.R. Capablanca. 75 seiner schönsten Partien*. Berlin: W. de Gruyter, 1970

Göttert, Karl-Heinz und Jungen, Oliver: *Einführung in die Stilistik*, München: Wilhelm Fink, 2004 (UTB 2567)

Gottschall, Hermann von; Metger, Johannes und Seger, Hans: *Der Kongreß des Deutschen Schachbundes Breslau 1889*. Leipzig: von Veit, 1890

Gräfrath, Bernd: »Das Leben als Optimierungsproblem: Emanuel Laskers ›Philosophie des Unvollendbar‹«, in: Gräfrath, Bernd: *Ketzer, Dilettanten und Genies: Grenzgänger der Philosophie.* Hamburg: Junius, 1993

Gräfrath, Bernd: »Lasker und die Philosophie der Gegenwart«, in: Kotowski/Poldauf/Wagner, *Homo ludens*, S. 55–67

Gräfrath, Bernd: »Laskers Wissenschaft vom effizienten Kampf«, in: *Schach-Kalender 2003*, S. 130–133 (Berlin: Edition Marco, 2002)

Gräfrath, Bernd: »The Philosophy of Emanuel Lasker«, in: *Quarterly for Chess History*, Band 8 (2003), S. 396–407

Gräfrath, Bernd: »Zwischen Zeitvertreib und Zeitnot: Philosophisches über das Schachspiel«, in: *Zeitvertreib,* hrsg. v. Klaus G. Gaida. Band 2, S. 25–49 (Köln: Salon Verlag, 1998)

Grassmann, Hermann Günther: *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form begründet*. Berlin: Enslin, 1862 (Erstauflage: *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig, Otto Wigand, 1844)

Grondijs, Harrie: *Four Endgame Studies by Emanuel Lasker: The unexplainable, the quadrilaterals and the Lascar.* Rijswijk: Rijswijkse Uitgeverij Eigen Beheer (RUEB), 2008 (2. Auflage)

Grondijs, Harrie: *No Rook Unturned. A Tour Around the Saavedra Study.* Rijswijk: Selbstverlag, 2004 (2. Auflage)

Grondijs, Harrie: *Unforgotton Chess Men*. Rijswijk: Selbstverlag, 2005

Gustavus Selenus (= Herzog August II. von Braunschweig-Lüneburg): *Das Schach- oder König-Spiel*. Zürich: Edition Olms, 1978 (Tschaturanga, Band 1)

Gutman, Lev: *Gewinnen mit Schottisch*. Kassel: Lev Gutman Verlag, 1992

Haeusserman, Ernst: *Im Banne des Burgtheaters. Reden und Aufsätze*. Herausgegeben und eingeleitet von Jacques Hannak (= Österreichprofile. Zeitgeschichtliche Publikationen, herausgegeben von Fritz Klenner und Erich Pogats). Wien, Frankfurt, Zürich: Europa Verlag, 1966

Hahn, Hans: »Überflüssige Wesenheiten (Occams Rasiermesser)« (urspr. 1930), in: *Logischer Empirismus: Der Wiener Kreis,* hrsg. v. Hubert Schleichert, S. 95–116 (München: Wilhelm Fink, 1975)

Halpern, Jacob: *Halpern's Chess Symposium: Some of the finest end-games and curiousities, by ancient and modern masters. Vol. 1*. New York: American Chess Bulletin, 1904

Hannak, Jacques: *Emanuel Lasker. Biographie eines Schachweltmeisters.* Berlin-Frohnau: Siegfried Engelhardt Verlag, 1952 (2. Auflage: 1962, 3. Auflage: 1970)

Hannak, Jacques: *Emanuel Lasker. The Life of a Chess Master.* New York: Dover Publications, 1991

Hannak, Jacques: *Im Sturm eines Jahrhunderts*. Eine volkstümliche Geschichte der sozialistischen Partei Österreichs. Wien: Verlag der Wiener Volksbuchhandlung, 1952

Hannak, Jacques: *Johannes Schober – Mittelweg in die Katastrophe. Porträt eines Repräsentanten der verlorenen Mitte* (= Österreichprofile). Wien: Europa Verlag, 1966

Hannak, Jacques: *Semmering-Baden 1937*. Sammlung sämtlicher Partien des Turniers mit einem einleitenden Aufsatz. Deutsche Bücherei der ungarischen Schachwelt, Band 5. Kecskemét, 1937

Hannak, Jacques: *Sport und Geschäft*. Wien: Sozialpädagogische Gesellschaft, 1925 (Flugschriften der Sozialpädagogischen Gesellschaft, Band 11)

Hannak, Jacques: *Wilhelm Steinitz. Der Michelangelo des Schachspiels*. Wien: Wiener Schach-Zeitung, 1936

Hannak, Johann: *Die Nachtigallen vom Semmering*. Perchtoldsdorf (masch. vervielf.), 1937

Harborth, Heiko; Heuer, Maria; Löwe, Harald; Löwen, Rainer; Sonar, Thomas: *Gedenkschrift für Richard Dedekind*. Braunschweig: Industrie- und Handelskammer, 2007

Haremaker, Reijerus Nicolaas: *Contract-bridge in de practijk.* Rotterdam: Nijgh & Van Ditmar, 1930 (1933 erschien eine 2., völlig überarbeitete Auflage)

Harenberg, Werner: *Schachweltmeister: Berichte – Gespräche – Partien*. Reinbek bei Hamburg: Spiegel-Verlag, 1981

Harley, Brian: *Chess and ist Stars*. Leeds: Whitehead & Miller, 1936

Harris, James F.: »Eduard Lasker – The Jew as a National German Politician«, in: *Leo Baeck Yearbook*, Band 20 (1975)

Hartston, William: *The Kings of Chess: a History of Chess Traced through the Lives of its Greatest Players*. London: Pavilion Books, 1986

Hilbert, David: »Ueber die vollen Invariantensysteme«, in: *Mathematische Annalen*, Band 42 (1893), S. 313–373

Hilbert, David: »Zur Theorie der algebraischen Gebilde«, in: *Göttinger Nachrichten*, 1888, S. 450–457

Hilbert, David: *Theory of algebraic invariants*. Translated from the German and with a preface by Reinhard C. Laubenbacher, Edited and with an introduction by Bernd Sturmfels. Cambridge: Cambridge University Press, 1993

Hilbert, John S.: *Walter Penn Shipley. Philadelphia's Friend of Chess*. Jefferson: McFarland, 2003

Hoffer, Leopold (Hrsg.): *Lasker v. Schlechter: all tournament and match games between theses masters up to and including the Championship match, 1910*. London: E.A. Michell, F. Hollings, 1911 (Series of first class games, Band 3)

Hoffmann, Kazimierz und Miler, Zbigniew: *Król z Barlinka*. Barlinek: Urzad Miasta i Gminy w Barlinku, 1995

Hooper, David und Whyld, Kenneth: *The Oxford Companion to Chess*. Oxford/New York: Oxford University Press, 1992

Hooper, David: *Wilhelm Steinitz. 575 Partien*. Hamburg: Dr. E. Wildhagen, 1968 (Weltgeschichte des Schachs, Band 7)

Hübner, Robert: *Der Weltmeisterschaftskampf Lasker – Steinitz 1894 und weitere Zweikämpfe Laskers*. Berlin: Edition Marco, 2008

Iwanow, Sergej Nikolajewitsch: *Bashne – Combinations and contracombinations*. Unveröffentlichtes Skript, o.O., o.J. (vor 2002)

Jeremejew, Walerian: *Perwye schagi*. Moskau, 1968

Johnson-Davies, David: »The game of Lasca. About Lasca – a little-known abstract game.« Internet: research.interface.co.uk/lasca/about.htm [1999]

Judowitsch, Michail M.: *Michail Tschigorin*. Moskau: Sowjetskaja Rossija, 1985

Jüdisches Museum Berlin (Hrsg.): *Zwei Jahrtausende deutsch-jüdische Geschichte. Geschichten einer Ausstellung*. Köln: DuMont, 2001

Jussupow, Artur und Dworezki, Mark: *Der selbständige Weg zum Schachprofi*. Hollfeld: Joachim Beyer Verlag, 2006 (5. Auflage)

Kagan, Bernhard (Hrsg.): *Das Großmeister-Turnier im Kerkau-Palast zu Berlin im Oktober 1918*. Weltmeister Dr. E. Lasker, A. Rubinstein, C. Schlechter und Dr. S. Tarrasch / mit Anm. von Emanuel Lasker. Berlin: Kagan, [ca. 1918]

Kagan, Bernhard (Hrsg.): *Internationales Schachmeister-Turnier zu Mährisch-Ostrau vom 1. bis 18. Juli 1923*. Berlin: Kagan, [1923]

Kagan, Bernhard: *III. Internationales Schachturnier in Karlsbad vom 28. April bis 20. Mai 1923*. Berlin: B. Kagan, [1923]

Kagan, Minna (Hrsg.): *Bernhard Kagan: sein Lebensbild; nebst einigen seiner bestgespielten Partien*. Berlin: Kagan, 1933

Kahn, Jeff; Lagarias, Jeffrey C. und Witsenhausen, Hans Sylvain: »On Lasker's card game«, in: T.S. Basar/P. Bernhard (Hrsg.), *Differential games and applications* (Sophia-Antipolis, 1988), Band 119 der *Lecture Notes in Control and Information Science*, S. 1–8 (Berlin: Springer, 1989)

Kahn, Jeff; Lagarias, Jeffrey C. und Witsenhausen, Hans Sylvain: »Single-suit two-person card play. Part III. The Misère game«, in: *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Band 2 (1989), Nr. 3, S. 329–343

Kaiser, Robert und Van de Velde, Robert: *Het Napolitaanse biedsysteem en hoe het te gebruiken*. Met acht Palermo-spellen gekommentarieerd door H.W. Filarski. Amsterdam, 1959

Kamm, Wolfgang: *Siegbert Tarrasch – Leben und Werk*. Unterhaching: Fruth, 2004

Kan, Ilja: *Schachmatnije wstretschi* (Schachbegegnungen). Moskau: Fiskultura i Sport, 1962

Kasparjan, Genrich M.: *Sametschatelnije etjudy*. Erewan: Isdatelstwo »Ajastan«, 1982

Kasparov, Garry: *My Great Predecessors*. Band 1. London: Everyman Chess, 2003

Kasparow, Garri: *Meine großen Vorkämpfer. Die bedeutendsten Partien der Schachweltmeister*. Band 1: Wilhelm Steinitz, Emanuel Lasker und die ersten inoffiziellen Weltmeister. Hombrechtikon/Zürich: Olms, 2003

Kasparow, Garri: *Moi welikije predschestweniki*. Band 1. Moskau: Ripol Klassik, 2003

Kelder, Jan und Van de Velde, Robert: *Winnende kaartwaardering. De Losing Trick Count*. Amsterdam: Becht, 1986

Kemeny, Emil: *The Monte Carlo Tournament of 1903*. Philadelphia: American Chess Weekly, 1903

Keres, Paul: *Power Chess. Great Grandmaster Battles from Russia*. New York: David McKay, 1991

Khalifman, Alexander u.a.: *Emanuel Lasker – Games*. Band 1 (1889–1903) und Band 2 (1904–1940). Sofia: Chess Stars, 1998

Kieboom, Bert; Olof, Erik; Visser, Jan und Bunge, Lucas: *Eeuwig Schaak. Honderd jaar Schaakclub Utrecht 1886–1986*. Utrecht: Schaakclub Utrecht, 1986

Kirsch, Sarah; Serke, Jürgen und Jahn, Hajo (Hrsg.): *Meine Träume fallen in die Welt. Ein Else Lasker-Schüler-Almanach*. Wuppertal: Peter Hammer, 1995

Klaus, Georg: »Emanuel Lasker – ein philosophischer Vorläufer der Spieltheorie«, in: *Deutsche Zeitschrift für Philosophie*, Jg. 13 (1965), S. 976–988

Klaus, Georg: »Emanuel Lasker – ein philosophischer Vorläufer der Spieltheorie«, in: *FIDE-Magazin*, Nr. 2/1965, S. 42–48

Kling, Josef und Horwitz, Bernhard: *Chess studies, or, Endings of games*. London: C.J. Skeet, 1851

Kloosterboer, G.W.: *Schaakmeesters, Biografieën en Partijen van groote Meesters*. Gouda: van Goor, 1925

Kmoch, Hans: »Grandmasters I have known: Emanuel Lasker, Ph.D. (1868–1941)«, aufbereitet von Burt Hochberg. www.chesscafe.com/text/kmoch06.txt. Deutsche Fassung: Hans Kmoch, »Großmeister, die ich gekannt habe – Dr. Emanuel Lasker«, in: *Schach-Kalender 2000* (Berlin: Edition Marco, 1999, S. 22f.; Übersetzung von Stefan Löffler)

Kmoch, Hans: *Die Kunst der Verteidigung*. Berlin/New York: W. de Gruyter, 1982 (4. Auflage)

Kmoch, Hans: *Rubinstein gewinnt!* Hundert Glanzpartien des großen Schachkünstlers. Erläutert von Hans Kmoch. Biographische Einleitung von Dr. Jacques Hannak. Mit einem Titelbild und vielen Diagrammen. Wien: Wiener Schach-Zeitung, 1933

Kmoch, Hans: *Schach-Grossturnier Nottingham 1936. Sammlung der 105 Partien nebst Schilderung des Turnierverlaufes*. Wien: Wiener Schach-Zeitung, 1938 (Billige Turnierbücher-Serie der Wiener Schach-Zeitung, Band 5)

Koblenz, Alexander: *Schach lebenslänglich: Erinnerungen eines Erfolgstrainers*. Hollfeld: Joachim Beyer, 1997 (2. Auflage)

Koigen, David: *Die Kultur der Demokratie*. Jena: Diederichs, 1912

Kok, Theodorus Cornelis Louis: *Wege zur Endspielstudie. Bauernendspiele/Schwarze Damen in Zugzwang*. Hrsg. von Jan van Reek. Koblenz: Hans-Wilhelm Fink, 1992

Kokociński, Wacław und Kurzawa, Jan: *Z dziejów Kępna*. Poznan: Wydawnictwo Poznanìskie, 1960

Kondor, Erwin (Red.): *Die Rache des Enttäuschten. Eine haltlose Kritik an dem Schachgroßturnier Semmering-Baden 1937 u. ihre wahren Gründe*. Semmering, [1938]

Korschelt, Oskar: *Das Japanisch-chinesische Spiel »Go«. Ein Concurrent des Schach*. Separatabdruck aus dem 21ten bis 24ten Heft der »Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens«. Yokohama: Echo du Japan, 1881 (engl. Ausgabe: *The Theory and Practice of Go* [1965; 2000])

Kotov, Alexander A. und Yudovich, Mikhail M.: *The Soviet Chess School*. Moscow: Raduga, 1983

Kotowski, Elke-Vera; Poldauf, Susanna und Wagner, Paul Werner (Hrsg.):

Emanuel Lasker: Homo ludens – homo politicus. Beiträge über sein Leben und Werk. Potsdam: Verlag für Berlin-Brandenburg, 2003

Koulen, Michael: *Go: Die Mitte des Himmels. Geschichte, Spielregeln, Meisterpartien*. Hamburg: Hebsacker, 2006 (5. Auflage)

Kramer, Joseph Geoffrey (»Jeff«): The Letters [1890–1940] of Emanuel Lasker. Typoskript (unveröffentlicht). Whitehall: J.G. Kramer-Books, [2003?]

Krejcik, Josef: *13 Kinder Caïssens*. Wien: Wiener Schach-Zeitung, 1924

Krull, Wolfgang: »Über Laskersche Ringe«, in: *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Jg. 7 (1958), S. 155–166

Krylenko, Nikolai W. (Hrsg.): *Wtoroj meschdunarodnij schachmatnij turnir, Moskwa 1935*. Moskau-Leningrad: Fiskultura i Turism, 1936. Engl. Übers.: Jimmy Adams und Sarah Hurst: *Moscow 1935 International Chess Tournament* (Yorklyn: Caissa Editions, 1998)

Kubanische Schachföderation; National-Schachkommission; Filip, Miroslav und Pachman, Ludek: *Kuba 66 XVII Weltschacholympiade*. Havanna: Instituto del Libro, 1967

Kunz, Ernst: *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*. With an English preface by David Mumford. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1980 (von Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik, Band 46)

Landsberger, Kurt: *The Steinitz Papers*. Jefferson/London: McFarland, 2002

Landsberger, Kurt: *William Steinitz, Chess Champion. A Biography of the Bohemian Caesar*. Games selected and annotated by Grandmaster Andy Soltis. Chess consultant Ken Whyld. Jefferson/London: McFarland, 1993

Lang, Markus: »Lasker's ›Ideale‹ und die Fundierung der modernen Algebra«, in: Dreyer/Sieg, *Lasker*, S. 93–111

Lange, Max: *Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien*. Leipzig: Teubner, 1910 (»Aus Natur und Geisteswelt«, Nr. 281)

Lasker, Bertold und Lasker, Emanuel: *Vom Menschen die Geschichte. Drama in einem Vorspiel und fünf Akten*. Hrsg.: Tim Hagemann. Pfullingen: Promos Verlag, 2008 (Tübinger Beiträge zum Thema Schach, Band 9)

Lasker, Eduard: *Schachstrategie. Einführung in den Geist der praktischen Partie*. Berlin/Leipzig: W. de Gruyter, 1928 (5. Auflage)

Lasker, Edward: *Chess Secrets I Learned from the Masters*. New York: Dover, 1951

Lasker, Edward: *Go and Go-Moku*. New York: Dover, 1960

Lasker, Edward: *Modern Chess Strategy – with an appendix of Go, the oriental strategic game*. New York: McKay, 1945

Lasker, Emanuel: »A geometric proposition«, in: *American Journal of Mathematics*, Jg. 26 (1904), S. 177–179

Lasker, Emanuel: »About a certain class of curved lines in space of n manifoldness«, in: *Nature*, Jg. 52, October 1895, S. 596 (Nr. 1355)

Lasker, Emanuel: »An essay on the geometrical calculus«, in: *Proceedings of the London Mathematical Society*, Jg. 28 (1896), S. 217–260 und 500–531

Lasker, Emanuel: »Begründung des Satzes, daß es in Wirklichkeit Prozesse gibt, die sich mit beliebig großer Geschwindigkeit fortpflanzen«, in: *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*, Jg. 28 (1929), S. 61–70

Lasker, Emanuel: »Beschreibung und Regeln des Lasca-Spiels.« Zwei Seiten Original-Spielanleitung mit taktischen »Winken« (Hinweisen) und sechs unkommentierten Partien (»Spielbeispielen«). Beilage zu den frühen deutschen Laska-Spielsätzen (undatiert, vermutlich zwischen 1911 und 1933)

Lasker, Emanuel: »Contract bridge in theory and practice«. Manuskript, 1931?

Lasker, Emanuel: »Metrical relations of plane spaces of n manifoldness«, in: *Nature*, Jg. 52, August 1895, S. 340–343 (Nr. 1345)

Lasker, Emanuel: »Note on Keyser's discussion of Epicurus«, in: *Scripta Mathematica*, Band 5 (1938), S. 121–123

Lasker, Emanuel: »On the definition of logic and mathematics«, in: *Scripta Mathematica*, Band 3 (1935), S. 247–249

Lasker, Emanuel: »Über Ästhetik der Mathematik«, in: *Sozialistische Monatshefte*, Jg. 34/1, 1928, S. 129–133

Lasker, Emanuel: »Über das mathematisch Schöne«, in: *Mathematisch naturwissenschaftliche Blätter*, Jg. 12 (1915), S. 49–53

Lasker, Emanuel: »Über eine Eigenschaft der Diskriminante«, in: *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*, Jg. 15 (1916), S. 176–178

Lasker, Emanuel: »Über Reihen auf der Convergenzgrenze« (abstract), in: *Proceedings of the Royal Society of London*, Jg. 66 (1900), S. 337–339

Lasker, Emanuel: »Über Reihen auf der Convergenzgrenze«, in: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Series A, Band 196 (1901), S. 431–477

Lasker, Emanuel: »Zur Theorie der kanonischen Formen«, in: *Mathematische Annalen*, Band 58 (1904), Nr. 3, S. 434–440

Lasker, Emanuel: *Brettspiele der Völker*. Berlin: August Scherl, 1931

Lasker, Emanuel: *Bridge. Bieden en spelen volgens de practijk der meesters*. Rotterdam: Pieter D. Bolle N.V., 1933

Lasker, Emanuel: *Bridge. Eenvoudige handleiding*. Met toestemming van den schrijver voor Nederland bewerkt door S. Landau. 2de, geheel herziene druk. Rotterdam: Pieter D. Bolle N.V., 1932. Umschlagtitel: *Laskers spelen-boekjes – Bridge*. (1. Auflage ebenfalls 1932)

Lasker, Emanuel: *Common Sense in Chess*. London: Bellairs; Berlin: Mayer & Müller, 1896

Lasker, Emanuel: *Das Begreifen der Welt*. Berlin: Hans Joseph, 1913

Lasker, Emanuel: *Das Bridgespiel*. Berlin: August Scherl, 1931 (Laskers Spielfibeln, Band [2])

Lasker, Emanuel: *Das Schachspiel*. Berlin: August Scherl, 1931 (Laskers Spielfibeln, Band [1])

Lasker, Emanuel: *Das verständige Kartenspiel*. Berlin: August Scherl, 1929

Lasker, Emanuel: *Der Internationale Schachkongress zu St. Petersburg 1909*. Unter Mitwirkung des Turnier-Komitees bearbeitet von Emanuel Lasker Weltschachmeister. Berlin: Verlag Dr. Emanuel Lasker, 1909. Nachdrucke: Edition Olms, Zürich 1989; Oetwil 2009 (mit Vorwort von I. Linder)

Lasker, Emanuel: *Die Anfangsgründe des Schachspiels. Für Anfänger und wenig geübte Spieler*. Berlin: Kagan, 1919

Lasker, Emanuel: *Die Philosophie des Unvollendbar*. Leipzig: von Veit, 1919

Lasker, Emanuel: *Encyclopedia of Games*. New York: E.P. Dutton, 1929

Lasker, Emanuel: *Encyclopedia of games. Vol. 1: Card strategy*. New York: Dutton, 1929

Lasker, Emanuel: *Gesunder Menschenverstand im Schach*. Berlin: Wertbuchhandel, 1925

Lasker, Emanuel: *Kak Viktor stal schachmatym masterom*. Moskau: Djetskaja Literatura, 1973

Lasker, Emanuel: *Kampf*. New York: Lasker, 1907

Lasker, Emanuel: *Lasker's Chess Primer: an elementary textbook for beginners, which teaches chess by a new, easy and comprehensive method*. With introduction by W.H. Watts. London: Printing-Craft, 1934

Lasker, Emanuel: *Lehrbuch des Schachspiels*. Berlin: Wertbuchhandel, 1926

Lasker, Emanuel: *Mein Wettkampf mit Capablanca*. Berlin/Leipzig: W. de Gruyter, 1922

Lasker, Emanuel: *Meine sechs Partien mit Dr. Tarrasch gespielt im Herbst 1916 zu Berlin*. Mit ausführlichen Erläuterungen herausgegeben von Dr. Emanuel Lasker. Leipzig: von Veit, 1917

Lasker, Emanuel: *Rules of »Lasca« – The great military game*. o.O., [ca. 1911] (Broschüre mit Spielregeln, taktischen Hinweisen und sechs unkommentierten Partien; Cambridge University Library, Signatur-Nr. 1911.10.210)

Lasker, Emanuel: *Struggle*. New York: Lasker, 1907

Lasker, Emanuel: *The Community of the Future*. New York: M.J. Bernin, 1940

Lasker, Emanuel: *Wie Wanja Meister wurde. Eine Erzählung aus der Schachwelt*. Berlin: Exzelsior, 2001

Lasker, Emanuel; Snosko-Borowski, Eugene A. und Maljutin, Boris E. (Red.): *Meschdunardnij schachmatnij kongress w pamjat M.I. Tschigorina. S.-Peterburg, 1909*. St. Petersburg: S.-Peterburgskago Schachmatnago Sobranija, 1910

Lasker: *Der Schachwettkampf Lasker – Tarrasch* (Sonderabdruck aus den »Münchner Neuesten Nachrichten«). Zürich: Olms, 1990 (Nachdruck der 2. Auflage)

Lasker-Wallfisch, Anita: *Ihr sollt die Wahrheit erben.* Reinbek: Rowohlt Taschenbuch Verlag, 2004 (6. Auflage)

Lenin, Wladimir Iljitsch: *Briefe.* Band 10: Briefe an die Angehörigen, 1893–1922. Berlin: Dietz Verlag, 1976

Lennep, Norman Willem van: *Hastings 1895. Een verslag van N.W. van Lennep.* Amsterdam: Andriessen, 1978

Leonard, Robert: »From chess to catastrophe: Psychology, politics and the genesis of von Neumann's game theory.« Technical report, CIRST, Report 2006-04. Montréal, 2006

Leonard, Robert: *Von Neumann, Morgenstern and the Creation of Game Theory: from Chess to Social Science, 1900–1960.* Cambridge: Cambridge University Press (im Druck)

Leser, Norbert (Hrsg.): *Das geistige Leben Wiens in der Zwischenkriegszeit.* Ring-Vorlesung 19. Mai – 20. Juni 1980 im Internationalen Kulturzentrum Wien I, Annagasse 20. Wien: Österreichischer Bundesverlag, 1981 (Quellen und Studien zur österreichischen Geistesgeschichte im 19. und 20. Jahrhundert, Band 1)

Leser, Norbert (Hrsg.): *Grenzgänger. Österreichische Geistesgeschichte in Totenbeschwörungen.* Band 2. Wien: Böhlaus Nachf., 1982

Leser, Norbert: *Zwischen Reformismus und Bolschewismus. Der Austromarxismus als Theorie und Praxis.* Wien: Europa Verlag, 1968

Lewitt, Moritz: *Emil Schallopp. Ein Gedenkblatt zum 70. Geburtstage.* Potsdam: A. Stein, 1913

Linder, Isaak und Linder, Wladimir: *Das Schachgenie Lasker.* Berlin: Sportverlag, 1991

Linder, Isaak und Linder, Wladimir: *Emanuel Lasker: Schisn i igra* (Leben und Spiel). Moskau: Astrel, 2005

Linder, Isaak und Linder, Wladimir: *Koroli schachmatnogo mira* (Könige der Schachwelt). Moskau: Terra-Sport, 2001

Linder, Isaak und Linder, Wladimir: *Lasker: Filosof na trone.* Moskau: Ripol Klassik, 2005

Litmanowicz, Władysław: *Dykteryjki i ciekawostki szachowe.* Warschau: Sport i Turystyka, 1974

Lomas, Steven: Lasca project report. Postgraduierten-Projekt. Department of Computer Science, Universität Auckland, 1986 [unveröffentlicht; Kurzbeschreibung unter www.cs.auckland.ac.nz/~alan/exstudnt.htm]

Long, Robert B. (Hrsg.): *Lasker & His Contemporaries*, Issue No. 2. Davenport: Thinker's Press, 1979

Loose, Walter: *Dr. Lasker – Das Schachphänomen.* Düsseldorf: F. Barkhuis, 1947 (Caïssas Kleine Schachreihe, Band 5)

Lord, Frederick William und Ward-Higgs, William (Hrsg.): *The book of the London International Chess Congress, 1899*; with annotations by Leopold Hoffer. London: Longmans, Green, 1900

Lorenz, Detlef: *David Friedmann (1893–1980). Ein Berliner Pressezeichner der 1920er Jahre.* Teetz, Berlin: Hentrich & Hentrich, 2008 (Jüdische Miniaturen, Band 69)

Lowe, Charles: *Four National Exhibitions in London and their Organiser.* London: T. Fischer Unwin, 1892

Löwenfisch, Grigori (Hrsg.): *Tretij meschdunarodnij schachmatnij turnir, Moskwa 1936.* Moskau-Leningrad: Fiskultura i Turism, 1937. Engl. Übers.: Jimmy Adams: *Moscow 1936 International Chess Tournament* (Yorklyn: Caissa Editions, 1988)

Löwenfisch, Grigori: *Isbrannije partii i wospominanija* (Ausgewählte Partien und Erinnerungen). Moskau: Fiskultura i Sport, 1967

Lowenherz, David H.: Autographen und Ephemera Emanuel Lasker. Verzeichnis (unveröffentlichtes Typoskript). New York, 24. April 2006

Macaulay, Francis Sowerby: »On the resolution of a given modular system into primary systems including some properties of Hilbert numbers«, in: *Mathematische Annalen*, Band 74 (1913), Nr. 1, S. 66–121

MacDonnell, George Alcock: *The Knights and Kings of Chess.* London: H. Cox, 1894

Mach, Ernst: *Die Analyse der Empfindungen und das Verhältnis vom Physischen zum Psychischen.* Jena: Gustav Fischer, 1903 (4. Auflage; Erstausgabe 1886)

Machatscheck, Heinz: *Zug um Zug – Die Zauberwelt der Brettspiele.* Berlin: Neues Leben, 1990 (6. Auflage)

Mackey, Rex: *The Walk of the Oysters: An Unholy History of Contract Bridge. Prentice Hall Press:* Englewood Cliffs, 1965 (1. Auflage: London, W.H. Allen, 1964)

Marchand, Max: *Jaarboekje der Scheveningsche Schaak Societeit.* Scheveningen: Scheveningsche Schaak Societeit, 1917

Marco, Georg (Hrsg.): *Der Schachwettkampf Lasker-Tarrasch um die Weltmeisterschaft im Lichte Laskerscher Analyse.* Zugleich Supplementheft zum Jg. 1908 der *Wiener Schachzeitung.* Wien/Leipzig: Hans Hedewig's Nachfolger Curt Ronniger, 1909.

Marco, Lia (= Martha Cohn): *Aus dem Warenhaus des Lebens – Neue lustige Reime zum Vortrag.* Berlin: Lasker, 1912

Marco, Lia (= Martha Cohn): *Shocking?* Berlin: R. Eckstein, 1903 (5. Auflage)

Marco, Lia (= Martha Cohn): *Wie sie lieben.* Berlin: R. Eckstein, 1901

Marshall, Frank James: *Chess Masterpieces.* New York: Simon & Schuster, 1928

Marshall, Frank James: *Marshall's Chess »Swindels«.* New York: American Chess Bulletin, 1914

Marshall, Frank James: *My Fifty Years of Chess.* New York: Chess Review; Philadelphia: McKay; Toronto: Musson, 1942

Mason, James und Pollock, William Henry Krause: *The Games in the St. Petersburg Tournament 1895–96.* Leeds: Whitehead & Miller, 1896

Mason, James: *Social Chess: a collection of short and brilliant games, with historical and practical illustrations.* London: Horace Cox, 1900

Mason, James: *The Art of Chess.* London: Cox, 1895

Mason, James: *The Principles of Chess in Theory and Practice.* London: H. Cox, 1894

Mayr, Ernst: *Die Entwicklung der biologischen Gedankenwelt: Vielfalt, Evolution und Vererbung.* Berlin/Heidelberg/New York: Springer, 1984 (englische Erstausgabe: 1982)

McCampbell, Bryant: *Auction tactics.* New York: Dodd, Mead and Company, 1920 (2. Auflage)

Meissenburg, Egbert: *Dr. Siegbert Tarrasch. Zur Würdigung des deutschen Großmeisters.* Seevetal: Selbstverlag, 2000 (Schach-Forschungen, Band 14)

Meissenburg, Egbert: *Emanuel Lasker: Zur Würdigung eines Schach-Weltmeisters.* Seevetal: Selbstverlag, 2000 (Schach-Forschungen, Band 19)

Mendelssohn de, Peter: *Zeitungsstadt Berlin.* Menschen und Mächte in der Geschichte der deutschen Presse. Frankfurt/Berlin/Wien: Ullstein, 1982 (1. Auflage: 1959)

Merike Rõtova: *Male Eestis 1965–1969.* Tallinn: »Eesti Raamat«, 1972

Mieses, Jacques (Hrsg.): *Das Buch der Schachmeisterpartien. Sammlung lehrreicher, in den letzten Meisterturnieren gespielter Schachpartien. Zweiter Teil.* Leipzig: Philipp Reclam jun., 1900

Mieses, Jacques und Lewitt, Moritz (Hrsg.): *Internationales Schachmeisterturnier San Sebastian 1911.* Berlin: Wedekind, 1911

Minchin, James Innes: *Games played in the London International Chess Tournament, 1883*; ed. by J.I. Minchin, with the assistance of the English masters Zukertort, Steinitz, Mason, and Bird. London: Wade, [1884]

Monico, Chris: »Computing the primary decomposition of zero-dimensional ideals«, in: *Journal of Symbolic Computation*, Band 34 (2002), Nr. 5, S. 451–459

Moore, George Edward: *Principia Ethica.* Stuttgart: Reclam, 1970 (englische Erstausgabe: 1903)

Moore, Robert Clyde: *Two-Move Chess Problems.* Jefferson/London: McFarland, 1986

Morehead, Albert H.: *Morehead on bidding.* In collaboration with William Root, technical consultant. London: Faber and Faber, 1968 (revised edition, 1st printing)

Moriggl, Ursula: *Jacques Hannak – ein Sozialdemokrat, ein Journalist. Bio-*

graphie und Themenanalyse seiner journalistischen Leistungen für die »Arbeiter-Zeitung« zwischen 1946 und 1955. Wien, 1994 (Diplomarb. [masch.])

Mosse, Werner E. und Paucker, Arnold (Hrsg.): *Deutsches Judentum in Krieg und Revolution 1916–1923*. Tübingen: J.C.B. Mohr, 1971

Müller, Reiner F.: *Dame, Duell mit flachen Steinen. Ein altes Spiel mit modernen Varianten*. Düsseldorf: Econ, 1988 (Econ-Taschenbuch, Band 20367)

Nasar, Sylvia: *A beautiful mind – A biography of John Forbes Nash Jr., winner of the Nobel prize in economics 1994*. New York: Touchstone book published by Simon & Schuster, 1998

Nasar, Sylvia: *Genie und Wahnsinn – Das Leben des genialen Mathematikers John Nash – »A beautiful mind«*. München: Piper Verlag, 2002 (4. Auflage)

Negele, Michael: »Das Verbrechen des Mr. H(e)yde«, in: *Kaissiber*, Nr. 18/2002, S. 33f.

Neistadt, Jakow I.: *Perwi tschempion mira* (Der erste Schachweltmeister). Moskau: Fiskultura i Sport, 1971

Neumann, John von und Morgenstern, Oscar: *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944

Neumann, John von: »Zur Theorie der Gesellschaftsspiele«, in: *Mathematische Annalen*, Band 100 (1928), Nr. 1, S. 295–320

Nielsen, Bjørn: *ALT OM SKAK for den praktiske Spiller.* Redigeret af Bjørn Nielsen, under medarbeijderskab af Alfred Christensen og Kristian Winther, med special-afsnit af Poul Hage. Odense: Skandinaviske Bogforlag, 1943

Nimzowitsch, Aaron: *Mein System*. Ein Lehrbuch des Schachspiels auf ganz neuartiger Grundlage mit einer Biographie von Dr. J. Hannak, Wien. Berlin-Frohnau: Siegfried Engelhardt Verlag, 1958 (Erstausgabe, ohne die Biographie von J. Hannak: Berlin, 1925)

Noether, Emmy: »Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern«, in: *Mathematische Annalen*, Band 96 (1927), Nr. 1, S. 26–61

Noether, Emmy: »Idealtheorie in Ringbereichen«, in: *Mathematische Annalen*, Band 83 (1921), Nr. 1-2, S. 24–66

Pachman, Ludek: *Entscheidungspartien. Die bedeutendsten Schachereignisse von Baden-Baden 1870 bis zum Kandidatenturnier 1971*. Düsseldorf: Walter Rau, 1972

Pachomow, W.M.; Jurowski, E.M.; Borowikow, A.G.; Soldatow, D.A.; Iwanow, S.N.; Sbarsch, A.N. und Tewelew-Sladkow, A.W.: *Kodex smolbowych schaschek*. St. Petersburg: Isdatelstwo Rus, 2003

Palacio, Carlos Alberto: *Ajedrez en Cuba. 100 años de historia*. Havanna: Imprenta Arquimbau, 1960

Pérez Mendoza, José: *El Ajedrez en la Argentina*. Buenos Aires: Tixi y Schaffner, 1920

Petersma, Errit (Red.): *Amsterdam schaakstad. Hoofdstukken uit de geschiedenis van het schaakleven in Amsterdam.* Amsterdam: Schaakbond Groot-Amsterdam, 1994

Platz, Joseph: *Chess Memoirs.* Coraopolis: Chess Enterprises, 1979

Poincaré, Henri: *La Valeur de la Science.* Paris: Ernest Flammarion, [1905]

Poldauf, Susanna; Saremba, Andreas und Demandt, Philipp (Red.): *Das Lasker-Haus in Thyrow*. Hrsg. Emanuel Lasker Gesellschaft e.V. und Förderverein Lasker-Haus Thyrow e.V. Veröffentlicht von der Kulturstiftung der Länder. Berlin, 2005.

Pole, William: *The philosphy of whist. An essay on the scientific and intellectual aspects of the modern game in two parts. Part I: The philosophy of whist play. Part II: The philosophy of whist probabilities.* London: Thomas de la Rue, 1884 (2. Auflage)

Pole, William: *The theory of the modern scientific game of whist. 10th ed.* From the last London edition (…). New York: G.W. Carlton, 1883 (1st edition 1864 as 16th edition of Coles' *Short whist*)

Ponziani, Domenico Lorenzo: *Il giuoco incomparabile degli scacchi. Opera d'autore Modenese*. Modena: Soliani, 1769

Pratesi, Franco: *EuroGo. Volume 1: Go in Europe until 1920.* Florenz: Aracne, 2004

Pritchard, David Brine: *Brain games – The world's best games for two*. Harmondsworth: Penguin Books, 1982

Prokofjew, Sergei: *Aus meinem Leben. Sowjetisches Tagebuch 1927*. Mainz: Schott Music, 1994

Rathenau, Walther: *Staat und Judentum.* o. O., 1911

Reek, Jan van und Donk, Henk van: *History of Endgame Study Composing in the Netherlands and Flanders*. Margraten: ARVES, 1992 (12th book of ARVES)

Reek, Jan van: *Paul Keres. Schaakspelers als Eindspelkunstenaars (Deel 23)*. Margaten: STES (Stichting Eindspel), 1996

Reerink, Henriëtte: »Lasker und Holland«, in: Kotowski/Poldauf/Wagner, *Homo ludens*, S. 173–186

Reinfeld, Fred (Hrsg.): *The book of the Cambridge Springs International Tournament, 1904*. New York: Black Knight Press, 1935

Reinfeld, Fred und Fine, Reuben (Hrsg.): *Dr. Lasker's Chess Career. Part 1: 1889–1914*. New York: Black Knight Press; London: Printing-Craft, 1935

Rellstab, Ludwig: *Emanuel Lasker. 573 Partien*. Hamburg: Dr. E. Wildhagen, 1958 (Weltgeschichte des Schachs, Band 11)

Renschuch, Bodo: *Elementare und praktische Idealtheorie*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1976 (Mathematik für Lehrer, Band 16)

Réti, Richard: *Das Werk Richard Rétis im Schach. Band 1. Das Lehrbuch: die Meister des Schachbretts.* Mährisch Ostrau: Kittl, 1930

Rhoen, Pierre: *Zij zochten Adullam in Zeist. Overzicht van de joodse inwoners van de gemeente Zeist, 1940–1945.* Zeister Historisch Genootschap van de Poll Stichting. – Zeist/Rotterdam: Barjesteh van Waalwijk van Doorn, 2001

Ricci, Matteo: *De Christiana Expeditione apud Sinas Suscepta ab Societate Jesu.* Gedruckt als: *China in the Sixteenth Century: The Journals of Matthew Ricci: 1583–1610*. New York: Random House, 1953

Rosenthal, Samuel: *Traité des échecs et recueil des parties jouées au tournoi international de 1900*. Paris: Mouillot, 1901

Rüger, Bruno: *Das Go-Spiel – Lehrbuch zur Erlernung des ältesten Brettspieles Für Anfänger und fortgeschrittene Spieler*. Leipzig: Julius Klinkhardt, 1941 (2. Auflage; Erstausgabe 1920)

Russ, Colin: *Miniature Chess Problems From Many Countries. 400 Compositions with Solutions and Comments.* London: William Heinemann, 1981

Russell, Hanon W.: »New York 1927. Documentary Evidence Answers Lingering Questions«, in: *American Chess Journal*, No. 1 (1992), S. 89–104

Sak, Wladimir G.: *Lasker*. Moskau: Fiskultura i Sport, 1963

Sánchez, Miguel Ángel: *Capablanca, leyenda y realidad.* 2 Bände. Havanna: Ediciones Unión, 1978

Sawinka, Natalia Pawlowna: *Sergej Sergejewitsch Prokofjew.* Berlin: Neue Musik, 1984

Sbarsch, Anatoli Naumowitsch: Column checkers (basics of theory, ideas, compositions). Unveröffentlichtes 19-seitiges Skript. Kerch (Krim), Dezember 1996

Schädler, Ulrich: *Spiele der Menschheit. 5000 Jahre Kulturgeschichte der Gesellschaftsspiele.* Darmstadt: Primus Verlag, 2007

Schallopp, Emil: *Das internationale Schachturnier zu Hastings im August-September 1895*. Sammlung sämtlicher Partieen mit ausführlichen Anmerkungen. Leipzig: von Veit, 1896

Schoeps, Julius H.; Grözinger, Karl E. und Mattenklott, Gert (Hrsg.): *MENORA. Jahrbuch für deutsch-jüdische Geschichte 1996*. Bodenheim: Philo, 1996

Scholem, Gershom: *Walter Benjamin: Die Geschichte einer Freundschaft*. Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1975

Schonberg, Harold C.: *Grandmasters of Chess*. London: Davis-Poynter, 1974

Seidenberg, Abraham: »On the Lasker-Noether decomposition theorem«, in: *American Journal of Mathematics*, Band 106 (1984), Nr. 3, S. 611–638

Sergeant, Philip Walsingham: *A Century of British Chess*. London: Hutchinson; Philadelphia: McKay, 1934

Sisonenko, Alexandr I.: *Kapablanka. Wstretschi s Rossiej*. Moskau: Snanije, 1988
Soifer, Alexander: *The Mathematical Coloring Book.* Berlin/Heidelberg: Springer, 2009
Soltis, Andrew: *Pawn Structure Chess.* New York: David McKay, 1995
Soltis, Andrew: *Why Lasker Matters.* London: Batsford, 2005
Sommese, Andrew J.; Verschelde, Jan und Wampler, Charles W.: »Numerical decomposition of the solution sets of polynomial systems into irreducible components«, in: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Band 38 (2001), Nr. 6, S. 2022–2046 (elektronisch)
Spielmann, Rudolf: *Ein Rundflug durch die Schachwelt*. Berlin/Leipzig: W. de Gruyter, 1929. (Veits kleine Schachbücherei, Band 13)
Sprague, Roland: *Unterhaltsame Mathematik. Neue Probleme – überraschende Lösungen*. Braunschweig: Vieweg & Sohn, 1969 (2. Auflage)
Tarrasch, Siegbert und Schröder, Christian (Hrsg.): *Das Internationale Schachturnier des Schachklubs Nürnberg im Juli-August 1896*. Leipzig: von Veit, 1897
Tarrasch, Siegbert: *Das Großmeisterturnier zu St. Petersburg im Jahre 1914*. Leipzig: Hans Hedewig's Nachfolger Curt Ronniger, 1921 (2. Auflage; Erstausagabe 1914)
Tarrasch, Siegbert: *Das Schachspiel: Systematisches Lehrbuch für Anfänger und Geübte.* Berlin: Deutsche Buch-Gemeinschaft, 1947 (Erstausgabe 1931)
Tarrasch, Siegbert: *Der Schachwettkampf Lasker-Marshall im Frühjahr 1907.* Leipzig, von Veit, 1907
Tarrasch, Siegbert: *Der Schachwettkampf Lasker-Tarrasch um die Weltmeisterschaft im August-September 1908*. Leipzig: von Veit, 1908
Tarrasch, Siegbert: *Der Schachwettkampf Tarrasch – Mieses im Herbst 1916*. Mit ausführlichen Erläuterungen herausgegeben von Dr. Tarrasch. Nebst einer Abhandlung über die französische und schottische Eröffnung. Leipzig: von Veit, 1916
Tarrasch, Siegbert: *Die moderne Schachpartie*. Nürnberg: Tarrasch (Selbstverlag), 1912
Tarrasch, Siegbert: *Dreihundert Schachpartien*. Leipzig: von Veit, 1895
Tartakower, Savielly G.: *Die hypermoderne Schachpartie. Ein Schachlehr- und Lesebuch. Zugleich eine Sammlung von 150 schönen Meisterpartien aus den Jahren 1914–1925*. Wien: Wiener Schach-Zeitung, 1925 (2. Auflage)
Tartakower, Savielly G.: *Führende Meister. 23 Schachindividualitäten in ihrem Wirken und Streben*. Wien: Wiener Schach-Zeitung, 1932
Tartakower, Savielly G.: *Neue Schachsterne: der »Führenden Meister« II. Teil*. Wien: Wiener Schach-Zeitung, 1935 (Bücherei der Wiener Schach-Zeitung, Band 4)
Tartakower, Savielly G.: *Zooals ik het zag. De fraaiste partijen van de match Dr. Euwe – Dr. Aljechin om het wereldkampioenschap schaken 3 october – 15 december 1935*. Bewerkt door S.G. Tartakower. Übersetzung von W.A.T. Schelfhout. Amsterdam: B.V. Dagblad »De Telegraaf«, 1976 (Neudruck der Ausgabe 1935)
Truscott, Alan F. und Alder, Phillip: *On bidding. Albert Morehead's classic work revised and updated.* New York: Simon & Schuster, 1990
Turel, Adrien: *Bilanz eines erfolglosen Lebens.* Zürich: Selbstverlag, 1956
Ujvári, Hedvig: »Die Geschichte des Pester Lloyd zwischen 1854–1875«, in: *Magyar Könyvszemle*, Nr. 2/2001 und Nr. 3/2001, S. 189–203 u. 318–331
Varnusz, Egon: *Emanuel Lasker. Volume 1: Games 1889–1907*. Petersaurach-Großhaslach: Schmidt Schach, 1998
Vidmar, Milan: *Goldene Schachzeiten. Erinnerungen*. Berlin: W. de Gruyter, 1961
Voigt, Wolfgang; Ritz, Karl und Gromöller, Wilhelm: *Das große Humboldt Bridge-Buch. Von den Grundregeln zum Turnierspiel*. Hannover: Humboldt Verlag, 2009 (2., aktualisierte Auflage)
Völker, Klaus: *Fritz Kortner, Schauspieler und Regisseur.* Berlin: Edition Hentrich, 1987
Wahltuch, Victor Lionel: *Contract bridge. Current bidding systems explained*. Holborn: Printing-Craft, 1937
Watts, William Henry (Hrsg.): *Chess Pie: The Official Souvenir of the International Tournament, London, July–August, 1922.* London: British Chess Federation/Printing-Craft, 1922
Watts, William Henry (Hrsg.): *The book of the London International Chess Congress, 1922.* London: Printing-Craft, 1923
Watts, William Henry (Hrsg.): *The Book of the Nottingham International Chess Tournament, 10th to 28th August, 1936*. London: Printing-Craft; Philadelphia: McKay, 1937
Weenink, Henri: *Het Schaakprobleem. Ideeën en Scholen*. Gouda: van Goor, 1921
Weenink, Henri: *The Chess Problem*. Ed. by George Hume and Alain C. White. Stroud: Chess Amateur, 1926
White, Alain C.: *Running the Gauntlet.* Stroud: Chess Amateur, 1911
White, Alain C.: *Sam Loyd und seine Schachaufgaben.* Übersetzung W. Massmann. Leipzig: Hans Hedewig's Nachfolger Curt Ronniger, 1926
White, Alain C.: *Tasks and Echoes.* The cumulative principle in problem composition. Stroud: Chess Amateur, 1915
White, Alain C.: *The White Rook.* Stroud: Chess Amateur, 1910
Whitworth, Timothy G.: *The Platov Brothers. Their Chess Endgame Studies.* Cambridge: Selbstverlag, 1994
Whyld, Kenneth: *Chess Columns. A List.* Olomouc: Moravian Chess, 2002
Whyld, Kenneth: *The Collected Games of Emanuel Lasker.* Nottingham: The Chess Player, 1998
Whyld, Kenneth: *Chess Christmas.* Olomouc: Moravian Chess, 2006
Whyld, Kenneth: *Lasker the Composer.* Caistor: Selbstverlag, 1999 (Nachdruck in Whyld, *Chess Christmas,* S. 371–384)
Wilson, Fred: *A Picture History of Chess*. New York: Dover Publications, 1981
Winter, Edward: *A Chess Omnibus.* Milford: Russell Enterprises, 2003
Winter, Edward: *Capablanca. A Compendium of Games, Notes, Articles, Correspondence, Illustrations and Other Rare Archival Materials on the Cuban Chess Genius José Raúl Capablanca, 1888–1942.* Jefferson: McFarland, 1989
Winter, Edward: *Chess Facts and Fables*. Jefferson/London: McFarland, 2006
Winter, Edward: *Chess Notes*. Ab Nr. 3415 (September 2004) im Internet: www.chesshistory.com/winter/
Winter, Edward: *Kings, Commoners and Knaves. Further Chess Explorations*. Milford: Russell Enterprises, 1999
Winter, William: *Kings of Chess: chess championships of the twentieth century*. London: Carroll and Nicholson, 1954
Witham, Duncan: Lasca Player. Final Year Project (BSc. Thesis). Department of Computer Science, Universität Warwick, 2002
Wojciechowski, Mieczysław (Hrsg.): *Dzieje Chełmży* (Die Geschichte von Chełmża). Chełmża: Chełmżyńskie Towarzystwo Kultury, 1994
Work, Milton Cooper: *Contract bridge […]*. Philadelphia/Chicago: John C. Winston, 1927
Zander, Otto: *Geschichte der Berliner Schachgesellschaft*. Festschrift zur Feier ihres hundertjährigen Bestehens. Berlin: Selbstverlag, [1927]
Zermelo, Ernst: »Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels«, in: *Proceedings of the 5th International Congress of Mathematics*, 1913, S. 501–504